

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

INVERSÃO DE MOMENTOS DE FONTE
EM MÉTODOS POTENCIAIS

TESE APRESENTADA POR
WALTER EUGÊNIO DE MEDEIROS

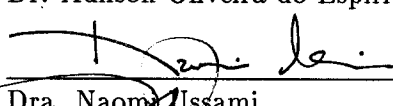
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

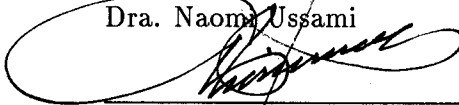
Data de Aprovação : 16/08/1993

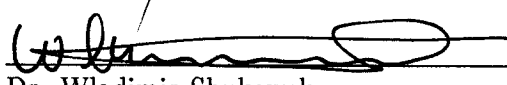
COMITÊ DE TESE:


Dr. João Batista Corrêa da Silva (Orientador)


Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo


Dra. Naama Ussami


Dr. Nelsi Cogo de Sá


Dr. Wladimir Shukowsky

BELEM

1993

MEDEIROS, Walter Eugênio de Medeiros. Inversão de momentos de fonte em métodos potenciais. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1993. 219 p. il.

Tese (Doutorado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPa., 1993.

1. INVERSÃO. 2. MOMENTOS DE FONTE. 3. MÉTODOS POTENCIAIS. I. Título.

A beleza da natureza está nas
particularidades; a mensagem, nas
generalidades.

Stephen Jay Gould

A Preta, Luizinho e Fulô.

AGRADECIMENTOS

Ao Depto de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, pelo incentivo e liberação para fazer o doutorado.

Ao CNPq, pelo bolsa de estudo.

Ao Programa de Pesquisa em Geofísica Aplicada a Petróleo da Universidade Federal do Pará, pelo apoio na forma de bolsas e auxílios para viagens a congressos em que resultados parciais desta tese foram apresentados.

A meu orientador, Prof. Dr. João Batista Corrêa da Silva, pela capacidade de transformar meus muitos erros em fontes de acerto (sem a qual esta tese jamais teria sido realizada), pela amizade e acessibilidade (pelos empréstimos). Mas, acima de tudo, pela liberdade de pesquisar que me foi concedida.

A meus examinadores, Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo, Profa. Dra. Naomi Ussami, Prof. Dr. Nelsi Côgo de Sá e Prof. Dr. Wladimir Shukowsky pela generosidade com que julgaram esta tese. À Profa. Dra. Naomi Ussami agradeço também a gentil cessão dos dados do levantamento gravimétrico do estado da Bahia.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Dias, pelo apoio que me foi indispensável em várias situações de dificuldades pessoais, familiares e financeiras. Além disso, pelo exemplo de dedicação que sempre me serviu de referência.

À Profa. Dra. Jacira Felipe Beltrão e a meus colegas Carlos Alberto Mendonça e Jorge Wilson Delgado Leão, pelas gentis cessões e auxílios na utilização de seus algoritmos de separação regional-residual, interpolação e redução ao pólo, respectivamente.

Ao Prof. Paulo Buarque Guimarães, pela assistência computacional sempre solícita. Mas principalmente pela amizade.

A meu colega potiguar, José Antônio de Moraes Moreira, pelo apoio indispensável e pelo interesse com que cuidou dos meus problemas em Natal durante minha ausência que, não tenho dúvida, superou o seu interesse pelos seus próprios problemas.

A todos os professores do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPa, pelas boas aulas e/ou pela amizade.

A todos os funcionários do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPa, pelo apoio sempre presente e pela amizade.

A meus colegas, Jessé Carvalho Costa e João dos Santos Protázio, pelas muitas discussões e auxílios no desenvolvimento desta tese. Mas principalmente pela amizade e companheirismo.

A todos os meus colegas, pela amizade, pelo companheirismo, pelas cervejadas e pelo apoio que me deram num momento muito difícil.

A meus pais e irmãos e a Dona Vilma Kansaki, pelo apoio sempre presente que me foi indispensável.

Finalmente, a minha mulher Geneci e a meus filhos Luizinho e Rafinha, que me suportaram durante estes duros quatro anos com muito amor e paciência.

SUMÁRIO

	p.
DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	3
1 - INTRODUÇÃO	5
2 - ANÁLISE DA INVERSÃO DE MOMENTOS DE FONTE GRAVI- MÉTRICA	10
2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS	11
2.2 ANÁLISE DA INVERSÃO DE MOMENTOS CONHECENDO-SE APENAS A ANOMALIA GRAVIMÉTRICA	15
2.2.1 Momentos como funcionais da anomalia gravimétrica	15
2.2.2 Condições sobre o núcleo polinomial dos momentos e conseqüências	16
2.3 ANÁLISE DA INVERSÃO DE MOMENTOS A PARTIR DA REPRESENTA- ÇÃO DA ANOMALIA GRAVIMÉTRICA PELA SÉRIE FINITA OBTIDA DE SUA EXPANSÃO EM MULTIPÓLOS	21
2.3.1 A abordagem de GOL'TSMAN (1970) para a inversão de momentos	21
2.3.2 Análise de unicidade dos momentos da abordagem de GOL'TSMAN (1970), dado um centro de expansão qualquer	23
2.3.3 Análise de unicidade dos momentos equivalentes	28
2.3.4 A informação a priori introduzida pelo truncamento da série em mo- mentos de 2a. ordem	31
2.4 HIPÓTESE A RESPEITO DO NÚCLEO POLINOMIAL DOS MOMENTOS QUE PODEM SER DETERMINADOS CONHECENDO-SE APENAS A ANO- MALIA GRAVIMÉTRICA	34
2.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO	34

3 - CARACTERIZAÇÃO DAS DIREÇÕES DOS EIXOS PRINCIPAIS E EXEMPLOS DE INVERSÃO DE ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS SINTÉTICAS	38
3.1 NORMALIZAÇÃO DAS FUNÇÕES-BASES E DOS MOMENTOS	38
3.2 ESTUDO DAS DIREÇÕES DOS EIXOS PRINCIPAIS	42
3.2.1 Caracterização das direções dos eixos principais a partir da diagonalização da matriz de espalhamento	42
3.2.2 Determinação da ordem relativa dos eixos principais equivalentes . .	44
3.2.3 Dependência das direções dos eixos principais com o centro de expansão	47
3.3 DESCRIÇÃO DOS ALGORITMOS	51
3.3.1 Algoritmo de Estimção Pontual	51
3.3.2 Algoritmo de Análise de Sensibilidade	53
3.3.3 Algoritmo de Análise de Estabilidade	54
3.4 EXEMPLOS DE INVERSÃO COM DADOS SINTÉTICOS	55
3.4.1 Exemplo Gravimétrico 1: investigação da condição de fonte distante das observações	55
3.4.2 Exemplo Gravimétrico 2: prisma de lados diferentes	58
3.4.3 Exemplo Gravimétrico 3: prisma com dois lados iguais	61
3.4.4 Exemplo Gravimétrico 4: esfera	62
3.4.5 Exemplo Gravimétrico 5: mudança no nível de ruído da anomalia, em relação ao do Exemplo Gravimétrico 2	63
3.4.6 Exemplo Gravimétrico 6: mudança do espaçamento da malha de geração da anomalia, em relação à do Exemplo Gravimétrico 2 . . .	65
3.4.7 Exemplo Gravimétrico 7: tronco de pirâmide	66
3.4.8 Exemplo Gravimétrico 8: distribuições aleatórias de massas pontuais	68
3.4.9 Exemplo Gravimétrico 9: efeito de corpos pequenos e rasos	69
3.4.10 Exemplo Gravimétrico 10: efeito de uma constante adicionada ao campo observado	71
3.5 COMPARAÇÃO ENTRE AS ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE ESTABILIDADE	73
3.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO	75
4 - ADAPTAÇÃO PARA O CASO MAGNÉTICO	113
4.1 EXPANSÃO EM MULTIPOLos DO CAMPO MAGNÉTICO VERTICAL . . .	114
4.2 NORMALIZAÇÃO DAS FUNÇÕES-BASES E DOS MOMENTOS	117

4.3	GENERALIZAÇÃO PARA O CASO MAGNÉTICO DOS RESULTADOS OBTIDOS NO CAPÍTULO 2	119
4.3.1	Inversão de momentos conhecendo-se apenas a anomalia magnética	119
4.3.2	Inversão de momentos a partir da série truncada	121
4.4	OBTENÇÃO DE MOMENTOS NÃO DEPENDENTES DA DIREÇÃO DE MAGNETIZAÇÃO	124
4.4.1	Desacoplamento do momento de dipolo total	124
4.4.2	Desacoplamento da posição de centro de momento de dipolo	125
4.4.3	Desacoplamento das direções dos eixos principais	126
4.5	SÍNTESE DO CAPÍTULO	127
5	EXEMPLOS DE INVERSÃO DE ANOMALIAS MAGNÉTICAS SINTÉTICAS	129
5.1	ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO DE GOL'TSMAN PARA O CASO MAGNÉTICO	129
5.2	EXEMPLOS DE INVERSÃO COM DADOS SINTÉTICOS	130
5.2.1	Exemplo Magnético 1: prisma de lados diferentes	130
5.2.2	Exemplo Magnético 2: esfera	132
5.2.3	Exemplo Magnético 3: tronco de pirâmide	133
5.2.4	Exemplo Magnético 4: distribuições aleatórias de dipolos magnéticos	135
5.2.5	Exemplo Magnético 5: direção de magnetização variável	136
5.3	SÍNTESE DO CAPÍTULO	138
6	APLICAÇÃO A DADOS REAIS	160
6.1	CASO GRAVIMÉTRICO	160
6.1.1	Mapa de anomalias Bouguer	160
6.1.2	Geologia da área	161
6.1.3	Interpretação qualitativa do mapa Bouguer	162
6.1.4	Separação regional-residual	163
6.1.5	Inversão da anomalia	165
6.1.6	Discussão dos resultados	167
6.2	CASO MAGNÉTICO	168
6.2.1	Obtenção da anomalia de campo vertical	169
6.2.2	Inversão da anomalia de campo vertical	170
6.2.3	Discussão dos resultados	172
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	196

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	201
ANEXO I ANÁLISE DO RESÍDUO DEFINIDO PELA EQUAÇÃO (2.27)	208
ANEXO II SINAL DA TANGENTE DEFINIDA PELAS EQUA- ÇÕES (3.41) E (3.42)	212
ANEXO III ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DE UMA COMPONENTE REGIONAL E DE MOMENTOS DE FONTE DO CAMPO ANÔMALO	214
ANEXO IV UNICIDADE E ESTABILIDADE DAS OPERAÇÕES DE DESACOPLAMENTO DOS MOMENTOS MAG- NÉTICOS	216

RESUMO

A inversão de momentos de fonte gravimétrica tridimensional é analisada em duas situações. Na primeira se admite conhecer apenas a anomalia. Na segunda se admite conhecer, além da anomalia, informação a priori sobre o corpo anômalo. Sem usar informação a priori, mostramos que é possível determinar univocamente *todo* momento, ou combinação linear de momentos, cujo núcleo polinomial seja função apenas das coordenadas Cartesianas que definem o plano de medida e que tenha Laplaciano nulo. Além disso, mostramos que nenhum momento cujo núcleo polinomial tenha Laplaciano não nulo pode ser determinado.

Por outro lado, informação a priori é implicitamente introduzida se o método de inversão de momentos se baseia na aproximação da anomalia pela série *truncada* obtida de sua expansão em multipolos. Dado um centro de expansão qualquer, o truncamento da série impõe uma condição de regularização sobre as superfícies equipotenciais do corpo anômalo, que permite estimar univocamente os momentos e combinações lineares de momentos que são os coeficientes das funções-bases da expansão em multipolos. Assim, uma distribuição de massa *equivalente* à real é postulada, sendo o critério de equivalência especificado pela condição de ajuste entre os campos observado e calculado com a série truncada em momentos de uma ordem máxima pré-estabelecida. Os momentos da distribuição equivalente de massa foram identificados como a solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem, para a qual se asseguram unicidade e estabilidade assintótica. Para a série re-tendo momentos até 2a. ordem, é implicitamente admitido que o corpo anômalo seja convexo e tenha volume finito, que ele esteja suficientemente distante do plano de medida e que a sua distribuição espacial de massa apresente três planos ortogonais de simetria. O método de inversão de momentos baseado na série truncada (IMT) é adaptado para o caso magnético. Para este caso, mostramos que, para assegurar unicidade e estabilidade assintótica, é suficiente pressupor, além da condição de regularização, a condição de que a magnetização total tenha direção e sentido constantes, embora desconhecidos.

O método IMT baseado na série de 2a. ordem (IMT2) é aplicado a anomalias gravimétricas e magnéticas tridimensionais sintéticas. Mostramos que se a fonte satisfaz as condições exigidas, boas estimativas da sua massa ou vetor momento de dipolo anômalo total, da posição de seu centro de massa ou de momento de dipolo e das direções de seus três eixos principais são obtidas de maneira estável.

O método IMT2 pode falhar parcialmente quando a fonte está próxima do plano de medida ou quando a anomalia tem efeitos localizados e fortes de um corpo pequeno e raso e se tenta estimar os parâmetros de um corpo grande e profundo. Definimos por falha *parcial* a situação em que *algumas* das estimativas obtidas podem não ser boas aproximações dos valores verdadeiros. Nas duas situações acima descritas, a profundidade do centro da fonte (maior) e as direções de seus eixos principais podem ser erroneamente estimadas, embora que a massa ou vetor momento de dipolo anômalo total e a projeção do centro desta fonte no plano de medida ainda sejam bem estimados. Se a direção de magnetização total não for constante, o método IMT2 pode fornecer estimativas erradas das direções dos eixos principais (mesmo se a fonte estiver distante do plano de medida), embora que os demais parâmetros sejam bem estimados. O método IMT2 pode falhar completamente se a fonte não tiver volume finito. Definimos por falha *completa* a situação em que *qualquer* estimativa obtida pode não ser boa aproximação do valor verdadeiro.

O método IMT2 é aplicado a dados reais gravimétricos e magnéticos. No caso gravimétrico, utilizamos uma anomalia situada no estado da Bahia, que se supõe ser causada por um batólito de granito. Com base nos resultados, sugerimos que as massas graníticas geradoras desta anomalia tenham sido estiradas na direção NNW e adelgadas na direção vertical durante o evento compressivo que causou a orogênese do Sistema de Dobramentos do Espinhaço. Além disso, estimamos que a profundidade do centro de massa da fonte geradora é cerca de 20 km. No caso magnético, utilizamos a anomalia de um monte submarino situado no Golfo da Guiné. Com base nos resultados, estimamos que o paleopolo magnético do monte submarino tem latitude $50^{\circ}48'S$ e longitude $74^{\circ}54'E$ e sugerimos que não exista contraste de magnetização expressivo abaixo da base do monte submarino.

ABSTRACT

The inversion of three-dimensional gravity source moments is analyzed in two situations. In the first one only the anomalous field is assumed to be known. In the second situation a priori information about the anomalous body is assumed to be known besides the field data. Without using a priori information, we show that it is possible to determine uniquely any moment, or linear combination of moments, whose polynomial kernel: (a) is not a function of the Cartesian coordinate which is orthogonal to the measuring plane and (b) has null Laplacian. Besides, we show that it is impossible to determine any moment whose polynomial kernel has non-null Laplacian.

On the other hand, we show that a priori information is implicitly introduced if the source moment inversion method is based on the approximation of the anomalous field by the *truncated* series obtained from its multipole expansion. Given any center of expansion, the series truncation imposes a regularization condition on the equipotential surfaces of the anomalous body that allows the moments and linear combination of moments (which are the coefficients of the multipole expansion basis function) to be uniquely estimated. So, a mass distribution *equivalent* to the real mass distribution is postulated, being the equivalence criterion specified by the fitting conditions between the observed anomaly and the anomaly calculated with the truncated multipole expansion series. The highest order for the retained terms in the truncated series is specified by the previously defined maximum order for the moments. The moments of the equivalent mass distribution were identified as the stationary solution of a system of first order linear differential equations, for which uniqueness and asymptotic stability are assured. For the series having moments up to 2nd order, it is implicitly assumed that the anomalous body: (1) has finite volume, (2) that it is sufficiently far from the measuring plane and (3) that its spatial mass distribution is convex and presents three orthogonal planes of symmetry. The source moment inversion method based on the approximation of the anomalous field by a truncated series (MIT) is adapted to the magnetic case. In this case, we show that in order to guarantee uniqueness and asymptotic stability it is sufficient to assume, besides the regularization condition, that the total magnetization has constant but unknown direction.

The MIT method based on the 2nd order series (MIT2) is applied to three-dimensional synthetic gravity and magnetic anomalies. If the source satisfies all imposed conditions, we

show that it is possible to obtain in a stable way good estimates of the total anomalous mass or dipole moment vector, of the position of center of mass or dipole moment and of the directions of all three principal axes.

A partial failure of MIT2 method may occur either if the source is close to the measuring plane or if the anomaly presents a localized but strong effect due to a shallow and small body and an attempt is made to estimate the moments of a large and deep body. By *partial* failure we mean the situation when *some* of the estimates may be poor approximations of the true values. In these two cases we show that the estimates of the depth and the directions of the principal axes of the (main) source may be poor but the estimates of the total anomalous mass or dipole moment vector and the projection on the measuring plane of the center of mass or dipole moment of the source are good. If the total magnetization direction is not constant, MIT2 method may produce poor estimates of the directions of the principal axes (even if the source is far from the measuring plane) but good estimates are obtained for the other parameters. A complete failure of MIT2 method may occur if the source does not have finite volume. By *complete* failure we mean the situation when *any* obtained estimate may be a poor approximation of the true value.

MIT2 method is applied to real gravity and magnetic data. In the gravimetric case we used an anomaly located in Bahia state, Brazil, which is assumed to be produced by the presence of a large granitic body. Based on the inversion results, we propose that the granite was deformed into an oblate ellipsoid during the compressive event that generated the Middle Proterozoic Espinhaço orogeny. The center of mass estimated for this body is about 20 km. In the magnetic case, we used an anomaly produced by a seamount located in the Gulf of Guinea. Based on the inversion results, we estimate a magnetic palaeopole for the seamount at $50^{\circ}48'S$ and $74^{\circ}54'E$ and we suggest that no important magnetization contrast exists below the bottom of the seamount.

1 - INTRODUÇÃO

A inversão de dados de campos potenciais é um problema mal-posto no sentido de HADAMARD (1902) uma vez que ele não tem solução única. Isto é, para um dado conjunto de medidas de campo, existe um número infinito de distribuições espaciais de propriedade física que reproduzem estas medidas.

Confrontado com este problema, restam ao intérprete apenas duas alternativas. Na primeira alternativa, o intérprete reduz sua demanda de informação sobre as fontes, satisfazendo-se em conhecer apenas grandezas que sejam comuns a todos os corpos que reproduzem os dados (e que possam ser estimadas de modo único e estável), seguindo, pois, basicamente, a linha de inversão de BACKUS & GILBERT (1967, 1968) e PARKER (1974, 1975). Na segunda alternativa, o intérprete usa, além dos dados geofísicos, informação *a priori* sobre as fontes anômalas, de modo a propiciar uma inversão mais detalhada, mas cujas soluções são restritas à classe de corpos compatíveis com a informação suplementar, seguindo, assim, a linha de inversão de Tikhonov (TIKHONOV & ARSENIN, 1977).

Do ponto de vista histórico, no entanto, a incorporação de informação *a priori* na interpretação geofísica tem sido muita mais a regra do que a exceção. Na realidade, ao estabelecer um dado modelo como sendo o mais adequado, o intérprete o faz com base no conjunto de todo o conhecimento disponível sobre a fonte anômala, em que entra, inclusive, a sua própria experiência. Assim sendo, tomada no seu aspecto mais geral, a interpretação é também arte. Esta regra histórica foi reforçada após a constatação de que a abordagem de inversão de BACKUS & GILBERT (1967, 1968) e PARKER (1974, 1975) é muito mais uma ferramenta de diagnóstico do problema inverso do que uma ferramenta de construção de métodos ou técnicas para a sua solução. Desse modo, embora esta abordagem de inversão tenha produzido muitos resultados teóricos importantes, eles são, geralmente, de difícil implementação (ANDER & HUESTIS, 1987) e de pouca utilidade prática¹.

Todavia, a incorporação de forma *quantitativa* de informação *a priori* sobre as fontes anômalas, na inversão geofísica, não é, em geral, um problema simples. A razão desta dificuldade é que as informações *a priori* provêm, quase sempre, da Geologia, sendo predominantemente de natureza qualitativa ou semi-quantitativa, ao passo que o processo de inversão

¹Silva, J. B. C. 1990. Notas de aulas da disciplina Teoria da Inversão I, ministrada no Curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPa.

usa sempre informação de natureza quantitativa: as observações geofísicas. Face a essa dificuldade, é de fundamental importância identificar o maior número possível de *maneiras* de se introduzir, matematicamente, informação a priori sobre as fontes anômalas, com o intuito de fornecer vários caminhos pelos quais uma dada informação a priori possa vir a ser aproximadamente “traduzida” para o ambiente matemático do processo de inversão. Isso é especialmente importante quando se leva em conta que se a quantidade de dados geofísicos e de informações independentes sobre as fontes for muito grande, a interpretação por tentativa e erro pode se tornar um processo demorado e tedioso. Desse modo, a construção de métodos e algoritmos de interpretação quantitativa, incorporando, automaticamente, diversos tipos de informação a priori sobre as fontes anômalas, é hoje um problema de fundamental importância em Geofísica. Estes métodos poderiam poupar o intérprete da parte matemática da interpretação, liberando-o, assim, para a parte qualitativa de seu trabalho, a de inferir sobre as fontes, o que somente o cérebro humano pode fazer.

Uma maneira de se introduzir informação a priori sobre a distribuição espacial incógnita da densidade (ou da magnetização) anômala, que se revelou muito versátil e frutífera, foi a da vinculação *explícita* de um atributo da distribuição com o mínimo de um funcional *determinístico*, adicionando-se a condição de minimização do funcional à condição de ajuste do campo através do método dos multiplicadores de Lagrange. Esta maneira de introduzir informação a priori foi analisada, de um ponto de vista matemático genérico, por TIKHONOV & ARSENIN (1977) que especificaram quais as propriedades que deve ter o funcional, o espaço onde ele é definido e o estimador a ele associado, para que a inversão vinculada por este funcional venha a garantir estabilidade para a solução, uma vez garantida de antemão a unicidade da solução. Vários funcionais específicos já foram propostos, possibilitando a introdução de diferentes tipos de informação sobre a distribuição espacial da densidade ou da magnetização, como, por exemplo, a informação de suavidade global (JUPP & VOZOFF, 1975 e GLASKO et al., 1987) ou direcional (MEDEIROS et al., 1992), a informação de máxima compacidade das fontes (LAST & KUBIK, 1983) e a informação de distribuição preferencial das fontes ao longo de um eixo (GUILLEN & MENICHETTI, 1984) ou de vários eixos (BARBOSA, 1991). Uma outra forma de se introduzir informação sobre as fontes anômalas, também explícita, mas de natureza *probabilística*, é através do Teorema de Bayes (RICHARD et al., 1984), ou dos conceitos de máxima entropia (RIETSCH, 1988) e de entropia relativa mínima (ULRYCH et al., 1990). Uma visão geral da abordagem probabilística de introdução de informação a priori na inversão é dada por TARANTOLA (1987)

Esta tese tem dois objetivos. O primeiro, de natureza mais ampla, é chamar a atenção para a existência de uma maneira *implícita* de se introduzir informação a priori *determinística* sobre as fontes anômalas, em Métodos Potenciais, em decorrência do fato de que um campo

anômalo de natureza potencial pode ser aproximado pela série originada da expansão em multipolos do potencial, truncada em uma *dada máxima ordem*. Será mostrado que, ao especificar a ordem, acima da qual todas as contribuições dos momentos de fonte para o campo anômalo podem ser desprezadas, o intérprete está, implicitamente, admitindo a existência de informação suplementar sobre o corpo anômalo.

Esta forma de introdução implícita de informação a priori condiciona que a abordagem de inversão a ela associada seja a da inversão de momentos de fonte. A inversão de momentos de fonte com base na aproximação do campo anômalo pela série truncada originada de sua expansão em multipolos é, na verdade, uma antiga proposta de inversão em Métodos Potenciais. Ela foi feita, entre outros autores, por GRANT & WEST (1965) e GOL'TSMAN (1970). Este último autor apresentou uma teoria bastante simples e versátil para estimar momentos de fonte, preservando, neste método, uma expressão linear para o campo anômalo em função dos momentos. No entanto, não foi reconhecida a introdução implícita de informação suplementar sobre as fontes anômalas e, além disso, não foi identificada, no caso do campo ser de natureza potencial, a impossibilidade de se estimar, a partir da série truncada, alguns dos momentos de fonte, como mostraremos. Por outro lado, GRANT & WEST (1965) reconheceram que, no caso gravimétrico, a aproximação da anomalia gravimétrica pela série truncada (obtida de sua expansão em multipolos), pressupõe uma restrição à classe de modelos de corpos anômalos e indicaram, para o caso da série truncada em momentos de 2a. ordem, os modelos de elipsóides, paralelepípedos e cilindros de densidade uniforme para a representação dos corpos anômalos. Todavia, GRANT & WEST (1965) introduziram, na expressão para a anomalia gravimétrica, a dependência explícita do campo com os ângulos de azimute e de mergulho do corpo-modelo, obtendo, em consequência, uma expressão não linear para o campo, bastante difícil de ser trabalhada. Estes fatos explicam, parcialmente, as razões pelas quais a inversão de momentos de fonte, em métodos potenciais, não tenha sido bem desenvolvida e aplicada, apesar de ter sido proposta há tanto tempo.

O segundo objetivo desta tese, de natureza mais específica, é explorar as potencialidades para a inversão tridimensional da série truncada em momentos de 2a. ordem, nos casos gravimétrico e magnético, seguindo a abordagem de GOL'TSMAN (1970), modificada de tal forma que os momentos nela contidos possam ser então univocamente estimados. A série truncada em momentos de 2a. ordem incorpora, como veremos, a informação de que o corpo anômalo é convexo e tem volume finito, que o mesmo se encontra suficientemente afastado do plano que contém as observações e que a sua distribuição de densidade (ou de magnetização) é simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais. Apesar destas restrições serem matematicamente muito fortes, mostraremos que elas são suficientemente versáteis, do ponto de vista geológico, para representar, aproximadamente, diques, corpos de

minério e batólitos de granito, entre outros. Desde que o corpo anômalo satisfaça aproximadamente estas condições, será possível estimar, em conjunto, sua massa ou momento de dipolo anômalo total (inclusive direção e sentido), centro de massa ou de momento de dipolo e direções dos eixos principais. Especial ênfase será dada à estimação dessas direções.

O método de inversão tridimensional com base na série truncada em momentos de 2a. ordem é relevante porque os parâmetros por ele estimados fornecem uma caracterização global do corpo anômalo. Esta caracterização pode ser muito útil, por exemplo, para direcionar perfurações visando atingir um corpo de minério, ou para auxiliar no diagnóstico da gênese de corpos de granito, problema em que a identificação do posicionamento destes corpos no espaço é de fundamental importância (GASTIL et al., 1991; PITCHER, 1979; STEPHANSSON, 1975).

A abordagem de GOL'TSMAN (1970) já foi utilizada em métodos potenciais por KALININA (1976), mas restrita a corpos bidimensionais e, no caso magnético, admitindo-se conhecer a direção de magnetização, o que mostraremos ser uma hipótese desnecessária.

Forneceremos a seguir uma visão geral do conteúdo dos capítulos. No Capítulo 2, faremos uma análise teórica da inversão tridimensional de momentos de fonte, no caso gravimétrico, que servirá de fundamento para o método de inversão a ser desenvolvido nesta tese. Nesta análise, primeiro identificaremos quais são os momentos que podem ser univocamente estimados conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica, ou seja, sem que nenhuma hipótese sobre o corpo anômalo seja feita. Em seguida, faremos uma análise da abordagem de inversão de GOL'TSMAN (1970), em que mostraremos como modificar o conjunto original de momentos a serem estimados, de forma que o novo conjunto passe a conter momentos e combinações lineares de momentos com coeficientes não nulos na expansão em multipolos e possam, portanto, ser univocamente estimados. Além disso, mostraremos que esta abordagem incorpora informação a priori sobre o corpo anômalo.

No Capítulo 3, mostraremos que, apesar do erro na formulação de GOL'TSMAN (1970), ainda é possível estimar as direções dos eixos principais através de sua abordagem modificada. Em seguida, deduziremos analiticamente a influência do ponto de expansão nas estimativas das direções dos eixos principais e, por último, apresentaremos vários exemplos de inversão de anomalias gravimétricas tridimensionais sintéticas, utilizando a abordagem modificada de GOL'TSMAN (1970). Nestes exemplos, apresentaremos resultados de uma análise numérica de estabilidade dos parâmetros estimados, com o objetivo de identificar as características positivas e negativas da abordagem de inversão modificada de GOL'TSMAN (1970).

No Capítulo 4, mostraremos como adaptar a abordagem modificada de GOL'TSMAN (1970), para o caso magnético, de modo que não haja agora a necessidade de se conhecer, de

antemão, a direção da magnetização total.

No Capítulo 5, apresentaremos vários exemplos de inversão de anomalias magnéticas tridimensionais sintéticas, utilizando a abordagem de inversão modificada de GOL'TSMAN (1970). Nestes exemplos, apresentaremos resultados de uma análise numérica de estabilidade dos parâmetros estimados, similar à que foi feita no Capítulo 3 para o caso gravimétrico.

No Capítulo 6, aplicaremos o método desenvolvido à inversão de anomalias tridimensionais reais, tanto no caso gravimétrico como no caso magnético. A anomalia gravimétrica utilizada situa-se no estado da Bahia, sendo presumivelmente causada por um corpo de granito (USSAMI & BOTT, 1989). A anomalia magnética situa-se no Golfo da Guiné e é causada por um monte submarino (HARRISON, 1971).

Finalmente, no Capítulo 7, apresentaremos as nossas conclusões e sugestões para futuros trabalhos na linha de inversão de momentos de fonte.

2 - ANÁLISE DA INVERSÃO DE MOMENTOS DE FONTE GRAVIMÉTRICA

A interpretação de dados de campos potenciais através da inversão de momentos de fonte é uma estratégia antiga. Desde os anos 30, ela tem sido usada tanto através do uso de relações integrais entre o campo anômalo e os momentos (Gamburtsev, 1930, 1938, apud STRAKHOV & LAPINA, 1975; Jung, 1937, 1961, apud HELBIG, 1963; Kogbetliantz, 1944, apud GRANT & WEST, 1965; Kogbetliantz, 1945, apud ANDERSEN & PEDERSEN, 1979; HELBIG, 1963), como através da aproximação do campo anômalo pela série finita obtida de sua expansão em multipolos (GRANT & WEST, 1965; GOL'TSMAN, 1970; STRAKHOV, 1975; KALININA, 1976; FANSELAU et al., 1980). Como uma variante da última abordagem, algumas vezes se especifica também a forma do corpo anômalo (STRAKHOV & LAPINA, 1975; ANDERSEN & PEDERSEN, 1979).

Como HELBIG (1963) corretamente chamou à atenção, os trabalhos de Jung acima citados contribuíram para responder à importante questão de quais são os parâmetros do corpo anômalo que podem ser univocamente estimados, conhecendo-se apenas a sua anomalia gravimétrica. Na literatura, contudo, ao contrário do artigo de HELBIG (1963), quase nunca fica claro se o método de inversão de momentos que está sendo proposto pressupõe apenas o conhecimento da anomalia gravimétrica ou, por outro lado, se informação a priori sobre o corpo anômalo, relevante do ponto de vista geológico, está também sendo usada. Neste caso, a informação a priori e a situação geológica típica em que ela é válida deveriam ser também especificadas. Neste capítulo, buscaremos esclarecer essas questões, no caso gravimétrico, e para tanto, vamos dividi-lo em duas partes principais.

Na primeira parte, apresentaremos as definições básicas sobre momentos de fonte e deduziremos uma relação integral geral entre a anomalia gravimétrica e um momento genérico. Esta relação nos permitirá identificar qual é o conjunto de momentos que podem ser estimados conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica. Relações explícitas para os momentos até 2a. ordem, pertencentes a este conjunto, serão dadas.

Na segunda parte, faremos uma análise das abordagens de inversão de momentos que são baseadas na representação da anomalia gravimétrica através da série finita obtida de sua expansão em multipolos. Para tanto, tomaremos como paradigma o trabalho de GOL'TSMAN

(1970) e, como exemplo, a série retendo momentos até 2a. ordem. Usando os resultados da primeira parte, mostraremos que a abordagem de GOL'TSMAN (1970) usa implicitamente informação a priori sobre o corpo anômalo e indicaremos, no caso da série retendo momentos até 2a. ordem, qual é esta informação a priori. Além disso, identificaremos algumas situações geológicas típicas em que essa informação a priori pode ser um atributo real do corpo anômalo.

2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Seja uma fonte anômala de massa de volume finito v_0 , descrita pelo contraste de densidade $\rho \equiv \rho(\vec{r}')$, em que $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$ é um ponto arbitrário dentro de v_0 em coordenadas Cartesianas (x, y, z) . O plano $x - y$ representa localmente a superfície da Terra e z aponta para baixo. Além disso, vamos admitir que v_0 : (1) esteja contido dentro do semi-espço inferior da Terra, (2) não tenha nenhum ponto em contato com a superfície da Terra e (3) todos os seus pontos estejam a uma distância finita desta superfície. Por outro lado, vamos admitir que ρ : (1) seja seccionalmente contínuo, (2) seja limitado superior e inferiormente e (3) não oscile um número infinito de vezes entre os limites superior e inferior. O campo gravimétrico normal à superfície da Terra, que passaremos a denominar de anomalia gravimétrica, produzido por ρ é dado por (GRANT & WEST, 1965)

$$g \equiv g(\vec{r}) = \int_{v_0} \Phi(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dv_0, \quad (2.1)$$

em que

$$\Phi \equiv \Phi(\vec{r}, \vec{r}') = G \frac{z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.2)$$

é a função de Green, $\vec{r} \equiv (x, y, 0)$ é um ponto de observação na superfície da Terra e G é a constante universal de atração gravitacional.

Sob as hipóteses acima estabelecidas para v_0 e ρ , é possível expandir em multipolos o potencial e a anomalia gravimétrica (KELLOG, 1953). Vamos expandir $\Phi(\vec{r}, \vec{r}')$, na equação (2.2), numa série de Taylor no entorno de $\vec{r}' = \vec{r}'_0 \equiv (x'_0, y'_0, z'_0)$, e obter uma representação *exata* para $g(\vec{r})$, na equação (2.1), dada pela série *infinita*

$$g(\vec{r}) = \Phi^0 m_0 + \bar{\Phi}_1^T \cdot \bar{M}_1 + \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\Phi}_2 \cdot \bar{M}_2) + O(R^{-5}), \quad (2.3)$$

sendo

$$\Phi^0 = \Phi|_{\vec{r}=\vec{r}_0},$$

$$\overline{\Phi}_1 = (\Phi^x \ \Phi^y \ \Phi^z)^T,$$

com

$$\Phi^x = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0'},$$

e similarmente para Φ^y e Φ^z ,

$$\overline{\overline{\Phi}}_2 = \begin{pmatrix} \Phi^{xx} & \Phi^{xy} & \Phi^{xz} \\ \Phi^{xy} & \Phi^{yy} & \Phi^{yz} \\ \Phi^{xz} & \Phi^{yz} & \Phi^{zz} \end{pmatrix},$$

com

$$\Phi^{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0'},$$

e similarmente para Φ^{yy} e Φ^{zz} ,

$$\Phi^{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial y'} \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0'},$$

e similarmente para Φ^{xz} e Φ^{yz} ,

$$m_0 = \int_{v_0} \rho(\vec{r}') dv_0,$$

$$\overline{M}_1 = (m_x \ m_y \ m_z)^T,$$

com

$$m_x = \int_{v_0} (x' - x'_0) \rho(\vec{r}') dv_0,$$

e similarmente para m_y e m_z ,

$$\overline{\overline{M}}_2 = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{xy} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{xz} & m_{yz} & m_{zz} \end{pmatrix}$$

com

$$m_{xx} = \int_{v_0} (x' - x'_0)^2 \rho(\vec{r}') dv_0,$$

e similarmente para m_{yy} e m_{zz} ,

$$m_{xy} = \int_{v_0} (x' - x'_0)(y' - y'_0) \rho(\vec{r}') dv_0, \quad (2.4)$$

e similarmente para m_{xz} e m_{yz} , e

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'_0| = \sqrt{(x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 + z'^2_0}. \quad (2.5)$$

As notações $tr(\cdot)$ e $O(R^{-5})$ representam o traço da matriz e o resto contendo termos de ordens 5 e maiores, respectivamente. Além disso, o superescrito T representa a operação de transposição de vetor ou matriz.

As expressões para as funções $\Phi^0 \equiv \Phi^0(x, y)$, $\Phi^x \equiv \Phi^x(x, y)$, $\Phi^y \equiv \Phi^y(x, y)$, etc., são dadas por

$$\Phi^0 = Gc_z R^{-2}, \quad (2.6)$$

$$\Phi^x = 3Gc_x c_z R^{-3}, \quad (2.7)$$

$$\Phi^y = 3Gc_y c_z R^{-3}, \quad (2.8)$$

$$\Phi^z = G(1 - 3c_z^2) R^{-3}, \quad (2.9)$$

$$\Phi^{xx} = -3G(5c_x^2 - 1)c_z R^{-4}, \quad (2.10)$$

$$\Phi^{xy} = 15Gc_x c_y c_z R^{-4}, \quad (2.11)$$

$$\Phi^{xz} = 3Gc_x(1 - 5c_z^2) R^{-4}, \quad (2.12)$$

$$\Phi^{yy} = -3G(5c_y^2 - 1)c_z R^{-4}, \quad (2.13)$$

$$\Phi^{yz} = 3Gc_y(1 - 5c_z^2) R^{-4}, \quad (2.14)$$

$$\Phi^{zz} = -3G(5c_z^2 - 3)c_z R^{-4}, \quad (2.15)$$

em que

$$c_x = \frac{x - x'_0}{R}, \quad (2.16)$$

$$c_y = \frac{y - y'_0}{R}, \quad (2.17)$$

$$c_z = \frac{z'_0}{R}. \quad (2.18)$$

Do exame de R , na equação (2.5), vemos que é necessário se exigir que a coordenada z'_0 do centro de expansão seja diferente de zero para evitar singularidades nas funções definidas nas equações (2.6) a (2.15), que ocorreriam se o centro de expansão coincidisse com um ponto de observação. Além disso, descartamos a condição $z'_0 < 0$, pois a mesma não tem significado geofísico. Desse modo, restringimos $z'_0 > 0$.

Podemos identificar $m_0, m_x, \dots, m_{xx}, m_{xy}, \dots, m_{zz}$ como os momentos da distribuição espacial da fonte ρ . m_0 é o momento de ordem zero. m_x, m_y e m_z são os momentos de ordem 1 em x, y e z , respectivamente. $m_{xx}, m_{yy}, m_{zz}, m_{xy}, m_{xz}$ e m_{yz} são os momentos de ordem

2, sendo m_{xx} , m_{yy} e m_{zz} as dispersões em x , y e z , respectivamente, e m_{xy} , m_{xz} e m_{yz} as correlações entre as distribuições de massa ao longo de x e y , x e z e y e z , respectivamente. O termo correlação será sempre usado estritamente com esse sentido.

Fisicamente, m_0 é a massa anômala total e m_x , m_y e m_z estão relacionados com as coordenadas x_{cm} , y_{cm} e z_{cm} do centro de massa, $\vec{r}_{cm} \equiv (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$, por

$$x_{cm} = \frac{m_x}{m_0} + x'_0, \quad (2.19)$$

$$y_{cm} = \frac{m_y}{m_0} + y'_0, \quad (2.20)$$

e

$$z_{cm} = \frac{m_z}{m_0} + z'_0, \quad (2.21)$$

respectivamente. Além disso, m_{xx} , m_{yy} e m_{zz} estão relacionados com os momentos de inércia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} , por

$$I_{zz} = m_{xx} + m_{yy},$$

$$I_{yy} = m_{xx} + m_{zz},$$

$$I_{xx} = m_{yy} + m_{zz},$$

e m_{xy} , m_{xz} e m_{yz} podem ser identificados como os negativos dos produtos de inércia I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} , respectivamente (GOLDSTEIN, 1959). Finalmente, os momentos de ordem 2 podem ser agrupados na matriz de espalhamento $\overline{\overline{E}}$, dada por

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{M}}_2 = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{xy} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{xz} & m_{yz} & m_{zz} \end{pmatrix},$$

cujas diagonalização fornece as direções dos eixos principais (ou, abreviadamente, direções principais). Sob as premissas de que a distribuição espacial de massa é convexa e tem apenas três planos ortogonais de simetria, os eixos principais coincidem com os eixos de espalhamento de massa.

Vamos agora investigar quais são os momentos que podem ser determinados conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica.

2.2 ANÁLISE DA INVERSÃO DE MOMENTOS CONHECENDO-SE APENAS A ANOMALIA GRAVIMÉTRICA

Nesta seção, uma expressão integral será deduzida de maneira a representar qualquer momento como um funcional da anomalia gravimétrica. Investigando as condições que asseguram a convergência desta expressão, revelaremos quais são os momentos que podem ser obtidos conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica.

Em toda a seção, admitiremos o conhecimento exato da anomalia gravimétrica em toda a superfície da Terra e também a possibilidade de se obter, em regiões harmônicas, o potencial gravimétrico a partir da anomalia gravimétrica, e vice-versa, por meio de transformações lineares a exemplo daquelas definidas por GUNN (1975).

2.2.1 Momentos como funcionais da anomalia gravimétrica

Começemos com a equação de Poisson (GRANT & WEST, 1965), dada por

$$-\nabla^2 u = 4\pi G\rho, \quad (2.22)$$

em que $\nabla^2(\cdot)$ é o operador Laplaciano, $u \equiv u(\vec{r})$ é o potencial gravimétrico e $\vec{r} \equiv \vec{r}(x, y, z)$ é um ponto qualquer do espaço.

Seja P um polinômio da forma $P \equiv P[(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)]$, em que (x_0, y_0, z_0) é um dado centro de expansão. P representará o **núcleo polinomial** de qualquer momento ou combinação linear de momentos de mesma ordem. Por exemplo, se a correlação m_{xy} é desejada, $P = (x - x_0)(y - y_0)$ de acordo com a equação (2.4). Multiplicando a equação (2.22) por P e fazendo algumas manipulações matemáticas simples a fim de aplicar a segunda identidade de Green (TIJONOV & SAMARSKY, 1980), obtemos que

$$\oint_A \left[u \frac{\partial P}{\partial n} - P \frac{\partial u}{\partial n} \right] dA = 4\pi G \int_V \rho P dV + \int_V u \nabla^2 P dV, \quad (2.23)$$

em que A é a superfície lisa fechada limitando um volume arbitrário V , que contém o volume das fontes v_0 , e $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n}$ é a derivada com respeito à direção normal que aponta para fora de A . Notemos que o uso da segunda identidade de Green é válida, mesmo no caso em que $u(\vec{r})$ tem derivadas segundas descontínuas na superfície de v_0 (TIJONOV & SAMARSKY, 1980).

Tomando, inicialmente, V como sendo V_D , o volume do hemisfério inferior contendo a massa anômala (Figura 2.1), A se torna a união das superfícies S e D e a equação (2.23) pode ser escrita como

$$\int_S f dS + \int_D f dD = 4\pi G \int_{V_D} \rho P dV_D + \int_{V_D} u \nabla^2 P dV_D, \quad (2.24)$$

em que

$$f \equiv f(u, P) = u \frac{\partial P}{\partial n} - P \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (2.25)$$

A fim de isolar a integral sobre S (a superfície da Terra), na equação (2.24), avaliaremos a integral sobre D , tomando agora V como sendo a esfera inteira, de tal forma que A se torne a união das superfícies U e D (Figura 2.1). Usando a equação (2.23), obtemos que

$$\int_D f dD = 2\pi G \int_{V_T} \rho P dV_T + \frac{1}{2} \int_{V_T} u \nabla^2 P dV_T + Res(f), \quad (2.26)$$

em que

$$Res(f) = \frac{1}{2} \left[\int_D f dD - \int_U f dU \right]. \quad (2.27)$$

Na equação acima, $Res(f)$ pode ser interpretado como o resíduo sobre A da parte anti-simétrica de f .

Substituindo a equação (2.26) na equação (2.24) e levando em conta que

$$\int_{V_T} u \nabla^2 P dV_T = \int_{V_D} u \nabla^2 P dV_D + \int_{V_U} u \nabla^2 P dV_U,$$

e que

$$\int_{V_T} \rho P dV_T = \int_{V_D} \rho P dV_D = \int_{v_0} \rho P dv_0,$$

obtemos que

$$\int_{v_0} \rho P dv_0 = \frac{1}{2\pi G} \left[\int_S P g dS - \int_S u \frac{\partial P}{\partial z} dS - \frac{1}{2} \left(\int_{V_D} u \nabla^2 P dV_D - \int_{V_U} u \nabla^2 P dV_U \right) + Res(f) \right], \quad (2.28)$$

em que $g = -\frac{\partial u}{\partial n}|_{z=0}$ é a anomalia gravimétrica e $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n} = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$, porque z é positivo para baixo.

A equação (2.28) expressa um momento genérico como função de seu núcleo polinomial P . Todas as integrais contidas na equação (2.28) convergem porque as superfícies e volumes de integração são finitos (TIJONOV & SAMARSKY, 1980). Desse modo, essa equação é válida para todo P . Podemos ainda concluir do exame da terceira integral do lado direito da equação (2.28) que, conhecendo-se o potencial gravimétrico apenas na região fora do volume das fontes, não é possível se determinarem as dispersões pois, para estas grandezas, $\nabla^2 P = 2$.

2.2.2 Condições sobre o núcleo polinomial dos momentos e conseqüências

Nesta seção, vamos obter condições suficientes para P , a partir da equação (2.28), que permitam a estimação de momentos *conhecendo-se apenas grandezas definidas no semi-espaço*

superior da Terra, situação esta em que a equação (2.28) terá uso geofísico. Além disso, vamos discutir a questão das condições necessárias para P nesta mesma situação.

Vamos inicialmente identificar as condições suficientes para P . A equação (2.28) não tem uso geofísico prático, porque (entre outras coisas) $Res(f)$ não pode ser calculado pela equação (2.27), uma vez que não se conhece f sobre D , e não há garantia, sem hipóteses adicionais, que este resíduo será nulo. Todavia, é possível que $Res(f)$ seja nulo se D e U estiverem infinitamente distantes do volume das fontes. Assim, vamos aplicar o limite $\Gamma \rightarrow \infty$ na equação (2.28), em que a distância Γ está definida na Figura 2.1, e, *sob este limite*, assegurar condições suficientes para que a equação (2.28) produza uma expressão convergente em valor principal (CHURCHILL, 1960) e, além disso, independente de grandezas medidas no semi-espaço inferior da Terra.

Do exame da equação (2.28) constatamos que, para eliminar a segunda integral do lado direito desta equação (que pode ser divergente), é suficiente que $\partial P / \partial z = 0$. Por outro lado, para eliminar a terceira e quarta integrais do lado direito da equação (2.28) (que podem depender de grandezas medidas no semi-espaço inferior da Terra e/ou serem divergentes), é suficiente que $\nabla^2 P = 0$. Além disso, mostramos no Anexo I que, se $\nabla^2 P$ e $\partial P / \partial z$ são ambos nulos, $Res(f)$ é nulo sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$.

Desse modo, $\partial P / \partial z = 0$ e $\nabla^2 P = 0$ são condições suficientes para assegurar validade à equação

$$\int_{v_0} \rho P dv_0 = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi G} \int_{S(\Gamma)} P g dS, \quad (2.29)$$

pois, sob as hipóteses estabelecidas na Seção 2.1 para v_0 e ρ , os momentos são limitados e, assim, a integral do lado direito da equação acima é convergente.

Vamos agora discutir a questão das condições necessárias para P de modo a assegurar que, sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$, a equação (2.28) produza uma expressão convergente em valor principal e, além disso, independente de grandezas medidas no semi-espaço inferior da Terra. A terceira integral do lado direito da equação (2.28) (I_3) é função do potencial no semi-espaço inferior da Terra (V_D) e, em particular, do potencial dentro do volume das fontes. Além disso, devido às hipóteses estabelecidas para v_0 na Seção 2.1, está descartada a existência de situações particulares em que o potencial fosse simétrico, em relação a S , nos semi-espaços inferior e superior, de modo que I_3 pudesse ser aniquilada com a quarta integral do lado direito da equação (2.28). Assim sendo, na hipótese otimista de que I_3 seja convergente, para avaliar I_3 só há duas maneiras: a primeira é introduzir informação a priori sobre a distribuição anômala de massa, de modo a obter u em V_D a partir de g medido na superfície da Terra, e a segunda é usar a segunda identidade de Green, dada pela equação (2.23). Por outro

lado, se I_3 for divergente, a segunda maneira tem necessariamente que ser usada. A primeira maneira é descartada porque ela necessita de informação a priori. Por outro lado, a segunda maneira é também descartada porque ela produz apenas uma tautologia (ou seja, ela produz a identidade de que o momento incógnito é igual a ele próprio) e não uma expressão que tenha uso geofísico. Portanto, é necessário que $\nabla^2 P = 0$ para que a expressão obtida da equação (2.28) possa vir a ter uso geofísico. Satisfeita esta condição (e sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$) a equação (2.28) se reduz a

$$\int_{v_0} \rho P dv_0 = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi G} \left[\int_{S(\Gamma)} P g dS - \int_{S(\Gamma)} u \frac{\partial P}{\partial z} dS + Res(f) \right]. \quad (2.30)$$

Ao contrário de I_3 , para as demais integrais presentes na equação acima não é possível impor condições necessárias sobre P apenas. Estas condições devem ser agora impostas sobre o produto $u \partial P / \partial z$, no caso da segunda integral do lado direito da equação (2.30) (I_2), ou sobre f , para o caso de $Res(f)$. Em consequência, não se pode descartar a possibilidade de que, para certas distribuições *particulares* de massa, momentos dependentes de z (e que satisfaçam $\nabla^2 P = 0$) possam ser determinados. A seguir, mostraremos que as distribuições de massa que têm massa anômala total nula, ou que geram anomalias apresentando pelo menos um eixo de simetria sobre a superfície da Terra, permitem a avaliação de momentos até 2a. ordem dependentes de z . De agora em diante, denominaremos de **distribuições patológicas** as distribuições particulares de massa que permitem a avaliação de momentos dependentes de z .

Considere as distribuições de massa em que a massa anômala total seja nula. Por exemplo: a distribuição de massa que é composta por duas massas pontuais, de módulos iguais mas sinais contrários, situadas a uma mesma profundidade e estando o ponto médio do segmento que une os seus centros localizado no centro de expansão O_0 . Esta distribuição de massa é patológica porque o seu campo (ou potencial) permite identificar que m_z é nulo ou, em outras palavras, permite descartar a atribuição de um centro de massa à distribuição de massa. Senão vejamos: nesta situação e para m_z , $\partial P / \partial z$ é constante sobre S e, portanto,

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \int_S u \frac{\partial P}{\partial z} dS = \frac{\partial P}{\partial z} \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \int_S u dS = 0.$$

Além disso, para esta distribuição patológica, $Res(f)$ também é nulo sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$, como se pode facilmente verificar a partir da expressão obtida no Anexo I para este resíduo. Procedendo de maneira análoga, é fácil identificar que, para esta distribuição patológica, as combinações lineares de momentos $m_{zz} - m_{xx}$ e $m_{zz} - m_{yy}$ são nulas.

Todavia, se a distribuição patológica acima for perturbada por uma massa pontual, de massa arbitrariamente pequena (mas finita) e situada numa posição arbitrária do semi-espaco

inferior da Terra (mas a uma distância finita de O_0), m_z não pode ser mais avaliado porque as parcelas de I_2 e $Res(f)$ (sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$), associadas a esta massa pontual, são divergentes. (I_2 é divergente para uma massa pontual porque o potencial da mesma tem um só sinal sobre S e, a partir da projeção sobre S do ponto que define a posição da massa, o potencial decai com Γ^{-1} enquanto a área cresce com Γ^2 .)

Considere agora a distribuição de massa que gera potencial e anomalia tendo pelo menos um eixo de simetria sobre S . Por exemplo: a distribuição de massa que é um cilindro vertical de contraste de densidade constante e centro localizado no ponto de expansão O_0 . Sem perda de generalidade, vamos definir que o eixo de simetria é o eixo y e que este eixo contém a projeção sobre S de O_0 . Esta distribuição é patológica porque o seu campo (ou potencial) permite identificar que m_{xz} é nulo ou, em outras palavras, permite descartar a atribuição de um plano de simetria inclinado e contendo o eixo y para a distribuição de massa. Senão vejamos: nesta situação e para m_{xz} , $\partial P/\partial z$ é anti-simétrico enquanto u é simétrico em relação a y . Assim, o produto $u\partial P/\partial z$ é anti-simétrico sobre S e, portanto, I_2 é nula. Além disso, para esta distribuição, $Res(f)$ é nulo sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$, como se pode facilmente verificar da expressão obtida no Anexo I para este resíduo. Procedendo de maneira análoga, é fácil identificar que, se o campo da distribuição patológica tem dois eixos ortogonais de simetria sobre S , m_{yz} também é nulo.

Vamos perturbar a distribuição de massa que tem pelo menos um eixo horizontal de simetria com a distribuição de massa que é composta por duas massas pontuais, de módulos iguais, em que as massas são arbitrariamente pequenas, mas finitas e de sinais contrários, e, além disso, em que as massas estão situadas a uma mesma profundidade e a projeção do ponto médio do segmento que une os seus centros (O_M) está localizado sobre o eixo y , a uma distância finita de O_0 , e em que este segmento é perpendicular a y . O potencial deste par de massas (u_p) é anti-simétrico em relação a y . Assim sendo, o produto do mesmo com $\partial P/\partial z$ (associado a m_{xz}) é simétrico e tem um único sinal sobre S . Em consequência, nesta situação o produto $u_p\partial P/\partial z$ decai com Γ^{-1} a partir de O_M enquanto a área cresce com Γ^2 e, portanto, I_2 é divergente pois esta parcela da mesma é divergente.

Unindo os resultados desta seção, concluímos que $\partial P/\partial z = 0$ e $\nabla^2 P = 0$ são condições suficientes para assegurar validade à equação (2.29). Além disso, concluímos que $\nabla^2 P = 0$ é uma condição necessária para o mesmo fim. Assim sendo, *todo* momento, ou combinação linear de momentos, cujo núcleo polinomial P satisfaça estas condições pode ser univocamente determinado conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica. Além disso, nenhum momento de 3a. ordem ou superior pode ser *individualmente* determinado, exceto m_{xyz} .

Particularmente, dentre os momentos até 2a. ordem, m_0 , m_x , m_y , m_{xy} e $m_{yy} - m_{xx}$

satisfazem as condições acima e, portanto, podem ser determinados conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica. Conseqüentemente, x_{cm} e y_{cm} também podem ser determinados a partir das condições $m_x \rightarrow 0$ e $m_y \rightarrow 0$, de acordo com as equações (2.19) e (2.20), respectivamente. Portanto, as expressões

$$m_0 = \frac{1}{2\pi G} \int_S g dS, \quad (2.31)$$

$$m_x = \frac{1}{2\pi G} \int_S (x - x_0) g dS, \quad (2.32)$$

$$m_y = \frac{1}{2\pi G} \int_S (y - y_0) g dS, \quad (2.33)$$

$$m_{xy} = \frac{1}{2\pi G} \int_S (x - x_0)(y - y_0) g dS, \quad (2.34)$$

$$m_{yy} - m_{xx} = \frac{1}{2\pi G} \int_S [(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2] g dS, \quad (2.35)$$

$$x_{cm} = \frac{1}{2\pi G m_0} \int_S x g dS, \quad (2.36)$$

e

$$y_{cm} = \frac{1}{2\pi G m_0} \int_S y g dS. \quad (2.37)$$

são válidas para calcular estas grandezas. Além disso, descartada a ocorrência de anomalias que apresentem pelo menos um eixo de simetria sobre a superfície da Terra, ou que tenham sido geradas por distribuições de massa com massa anômala total nula, não é possível avaliar nenhum momento até 2a. ordem dependente de z . Observemos que as expressões (2.31), (2.36) e (2.37) para m_0 , x_{cm} e y_{cm} , respectivamente, são bem conhecidas na literatura e que suas validades são fatos estabelecidos (GRANT & WEST, 1965). Não obstante, elas foram anteriormente deduzidas por procedimentos diferentes (GRANT & WEST, 1965). Em contraste, apresentamos aqui um procedimento unificado que nos permitiu obter expressões para todos os momentos e coordenadas de centro de massa. Este procedimento unificado é a generalização, para todos os momentos, do procedimento apresentado em GRANT & WEST (1965) para calcular m_0 .

Devido aos eixos x e y estarem arbitrariamente posicionados em relação à massa anômala, podemos afirmar que as medidas, sobre qualquer plano, da componente do campo gravimétrico normal a este plano, permite a determinação unívoca de todo momento, ou combinação linear de momentos, cujo núcleo polinomial seja função apenas das coordenadas Cartesianas que definem o plano de medida e que tenha Laplaciano nulo. Em particular, dentre os momentos até 2a. ordem, satisfazem estas condições a massa anômala total, as projeções do centro de massa sobre o plano de medida, o produto de inércia e a diferença entre os momentos de inércia em torno de qualquer par de eixos mutuamente ortogonais contidos no plano de medida

Concluído o primeiro objetivo deste capítulo, passaremos ao segundo.

2.3 ANÁLISE DA INVERSÃO DE MOMENTOS A PARTIR DA REPRESENTAÇÃO DA ANOMALIA GRAVIMÉTRICA PELA SÉRIE FINITA OBTIDA DE SUA EXPANSÃO EM MULTIPÓLOS

Nesta seção, após uma breve apresentação da abordagem de GOL'TSMAN (1970) para a inversão de momentos de fonte, apresentaremos uma análise da unicidade dos momentos envolvidos. Esta análise nos revelará a possibilidade de estimar, conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica, alguns dos momentos que já sabemos não poderem ser determinados se a distribuição de massa não for patológica. Esta aparente contradição nos permitirá concluir que a abordagem de GOL'TSMAN (1970) e outras similares estão, na realidade, usando informação suplementar sobre a distribuição anômala de massa. Além disso, através de um simples arrazoado físico, identificaremos qual é esta informação suplementar.

A abordagem de GOL'TSMAN (1970) foi selecionada para esta análise por causa de sua simplicidade, validade para todos os métodos potenciais e pelo fato da mesma não necessitar de nenhuma hipótese sobre a forma do corpo anômalo. Estas características a qualificam, em nossa opinião, como a mais representativa das abordagens pertencentes à linha de inversão de momentos, baseada na representação da anomalia gravimétrica pela série finita obtida de sua expansão em multipolos.

2.3.1 A abordagem de GOL'TSMAN (1970) para a inversão de momentos

Retendo na equação (2.3) somente momentos até 2a. ordem e pressupondo que $g(\vec{r})$ é conhecida apenas em pontos discretos k , com $k = 1, \dots, N$, da superfície da Terra, obtemos que

$$\begin{aligned} g_k \equiv g(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{r}_k} &= \Phi_k^0 m_0^* + \Phi_k^x m_x^* + \Phi_k^y m_y^* + \Phi_k^z m_z^* + \frac{1}{2} \Phi_k^{xx} m_{xx}^* + \Phi_k^{xy} m_{xy}^* + \Phi_k^{xz} m_{xz}^* \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_k^{yy} m_{yy}^* + \Phi_k^{yz} m_{yz}^* + \frac{1}{2} \Phi_k^{zz} m_{zz}^*, \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que o índice $*$ foi introduzido para evitar confusão entre os momentos verdadeiros $m_0, m_x, \dots, m_{zz}$, presentes na equação (2.3), e os novos momentos, presentes na equação (2.38), após se ter desprezado $O(R^{-5})$.

Levando-se em consideração todas as observações de campo, podemos escrever a equação (2.38), em notação matricial, como

$$\bar{g} = \bar{\Phi} \bar{m}, \quad (2.39)$$

em que $\bar{g}$ é o vetor N -dimensional cujo elemento g_k é a anomalia gravimétrica observada no ponto $(x_k, y_k, 0)$ e $\bar{m}$ é o vetor dos momentos incógnitos arranjados na seqüência $m_0^*, m_x^*, m_y^*, m_z^*, \frac{1}{2}m_{xx}^*, m_{xy}^*, m_{xz}^*, \frac{1}{2}m_{yy}^*, m_{yz}^*$ e $\frac{1}{2}m_{zz}^*$. Além disso, $\bar{\Phi}$ é a matriz $N \times 10$, cujo elemento $\Phi_{k,j}$ é a função Φ^j calculada no ponto $(x_k, y_k, 0)$, sendo Φ^j , com $(j = 0, x, y, \dots, zz)$, as funções definidas nas equações (2.6) a (2.15).

Segundo GOL'TSMAN (1970), a equação (2.39) permite a inversão dos momentos, a partir da condição de que a anomalia calculada ajuste a anomalia observada, de acordo com o critério dos mínimos quadrados para a soma dos resíduos entre estas duas anomalias. Para resolver a equação (2.39), ele propôs o seguinte algoritmo iterativo, que passaremos a denominar **Algoritmo de Gol'tsman**: começando com um centro de expansão a priori $\vec{r}_0$, a solução da equação (2.39) produzirá estimativas $\hat{m}_0^*, \hat{m}_x^*, \dots, \hat{m}_{zz}^*$, as quais levarão às estimativas $\hat{x}_{cm}^*, \hat{y}_{cm}^*$ e $\hat{z}_{cm}^*$, através das equações (2.19) a (2.21). Estas estimativas das coordenadas Cartesianas do centro de massa definirão um novo centro de expansão $\vec{r}_1$, que substituirá $\vec{r}_0$, e este ciclo será repetido até que $\hat{x}_{cm}^*, \hat{y}_{cm}^*$ e $\hat{z}_{cm}^*$ não mudem substancialmente.

Caso haja convergência do Algoritmo de Gol'tsman, o membro final da seqüência de pontos de expansão será uma estimativa do centro de massa **equivalente**, que representaremos por $\vec{r}_{cm}^e \equiv (x_{cm}^e, y_{cm}^e, z_{cm}^e)$. Este centro de massa equivalente coincidirá com o centro de massa **verdadeiro** $\vec{r}_{cm} \equiv (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$ apenas quando o resto $O(R^{-5})$ for *exatamente* nulo. Uma definição mais precisa do que significa centro de massa equivalente será dada na Seção 2.3.4.

Por brevidade, passaremos a denominar de **momentos equivalentes** os momentos calculados com o centro de massa equivalente. Observemos que os momentos equivalentes de 1ª. ordem são nulos, pois foi com esta propriedade que foi definido o centro de massa equivalente, à semelhança do centro de massa verdadeiro, através das equações (2.19) a (2.21). Estimar os momentos equivalentes é o nosso objetivo pois, como veremos no Capítulo 3, é a partir desses momentos que obtemos parâmetros geologicamente interpretáveis para o corpo anômalo.

Provaremos em duas etapas a seguir que, na verdade, a abordagem de GOL'TSMAN (1970) permite estimar apenas *alguns* dos momentos e combinações de momentos equivalentes. Na primeira etapa, apresentada na próxima seção, mostraremos que, *dado um centro de expansão qualquer* (com $z_0 > 0$), *será* possível estimar univocamente os momentos e combinações de momentos que remanecerem com coeficientes não nulos, após uma recominação das dispersões na equação (2.38). Na segunda etapa, apresentada na Seção 2.3.3, mostraremos que o mesmo conjunto remanescente de momentos e combinações de momentos *equivalentes*, poderão ser também univocamente estimados. Ainda na Seção 2.3.3, daremos algumas condições gerais que asseguram a convergência do Algoritmo de Gol'tsman. Por

último, na Seção 2.3.4, evidenciaremos qual é a informação a priori contida na abordagem de GOL'TSMAN (1970).

2.3.2 Análise de unicidade dos momentos da abordagem de GOL'TSMAN (1970), dado um centro de expansão qualquer

Pressupondo o conhecimento exato da anomalia gravimétrica em todo o plano $x - y$, e rearranjando convenientemente a equação (2.38), obtemos

$$\begin{aligned} g = & \Phi^0 m_0^* + \Phi^z m_z^* + \frac{1}{2} \Phi^{yy} (m_{yy}^* - m_{xx}^*) + \frac{1}{2} \Phi^{zz} (m_{zz}^* - m_{xx}^*) + \Phi^x m_x^* + \Phi^{xz} m_{xz}^* \\ & + \Phi^y m_y^* + \Phi^{yz} m_{yz}^* + \Phi^{xy} m_{xy}^* + \frac{1}{2} (\Phi^{xx} + \Phi^{yy} + \Phi^{zz}) m_{xx}^*. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lembrando que

$$\Phi^{xx} + \Phi^{yy} + \Phi^{zz} \equiv \nabla^2 \Phi = 0$$

na região fora das fontes, que inclui a superfície da Terra, podemos concluir que é impossível determinar $\frac{1}{2} m_{xx}^*$ a partir da equação (2.40). Observemos, no entanto, que por manipulações similares $\nabla^2 \Phi$ pode se tornar também o coeficiente de $\frac{1}{2} m_{yy}^*$ ou de $\frac{1}{2} m_{zz}^*$. Portanto, é *impossível* se estimarem (também) pela equação (2.40) as dispersões *isoladamente*, o que é simplesmente outra forma de afirmar que é impossível determinar volume e contraste de densidade, sem uma hipótese sobre um dos dois. Esta impossibilidade não foi reconhecida nem por GOL'TSMAN (1970) nem por KALININA (1976), provavelmente devido à hipótese de trabalho adotada por ambos que se baseava numa analogia entre inversão de momentos de fonte e estimação de momentos de variáveis aleatórias. Esta analogia, contudo, não é completa, porque na Estatística os dados são amostras da própria variável aleatória, seguindo uma dada distribuição, enquanto que na Gravimetria os dados são medidas de um *efeito* produzido pela distribuição de densidade, havendo restrições adicionais como $\nabla^2 \Phi = 0$.

A equação (2.40) se torna, portanto,

$$\begin{aligned} g = & \Phi^0 m_0^* + \Phi^z m_z^* + \frac{1}{2} \Phi^{yy} (m_{yy}^* - m_{xx}^*) + \frac{1}{2} \Phi^{zz} (m_{zz}^* - m_{xx}^*) + \Phi^x m_x^* + \Phi^{xz} m_{xz}^* \\ & + \Phi^y m_y^* + \Phi^{yz} m_{yz}^* + \Phi^{xy} m_{xy}^*. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Esta equação pode ser interpretada como uma interpolação aproximada de $g(x, y)$ com as funções do conjunto $B = \{\Phi^0(x, y), \Phi^z(x, y), \Phi^{yy}(x, y), \Phi^{zz}(x, y), \Phi^x(x, y), \Phi^{xz}(x, y), \Phi^y(x, y), \Phi^{yz}(x, y), \Phi^{xy}(x, y)\}$, com os momentos atuando como pesos. Dado um centro de expansão qualquer com $z_0 > 0$, provaremos agora a unicidade para as estimativas dos

momentos, ou combinações de momentos, pertencentes ao conjunto $C = \{m_0^*, m_x^*, m_y^*, m_z^*, m_{xy}^*, m_{xz}^*, m_{yz}^*, \frac{1}{2}(m_{yy}^* - m_{xx}^*), \frac{1}{2}(m_{zz}^* - m_{xx}^*), \frac{1}{2}(m_{zz}^* - m_{yy}^*)\}$, obtidas a partir do ajuste em mínimos quadrados de g na equação (2.41).

Vamos adotar as notações Φ^i (com $i = 0, z, yy, \dots, xy$) para as funções do conjunto B , acima definido, e $p_{i,j}$ e h_i para os produtos internos definidos no plano $x - y$ entre os pares de funções Φ^i e Φ^j e Φ^i e g , respectivamente. Usando as propriedades de simetria das funções Φ^i em relação a x e y , conforme se pode deduzir do exame das equações (2.6) a (2.15), é fácil identificar se $p_{i,j} = 0$ ou se $p_{i,j} \neq 0$. Desse modo, é possível escrever o sistema de equações normais associado à equação (2.41) como

$$\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,z} & p_{0,yy} & p_{0,zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{0,z} & p_{z,z} & p_{z,yy} & p_{z,zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{0,yy} & p_{z,yy} & p_{yy,yy} & p_{yy,zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{0,zz} & p_{z,zz} & p_{yy,zz} & p_{zz,zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{x,x} & p_{x,z} & p_{x,y} & p_{x,yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{x,z} & p_{zz,zz} & p_{xz,y} & p_{xz,yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{x,y} & p_{xz,y} & p_{y,y} & p_{y,yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{x,yz} & p_{xz,yz} & p_{y,yz} & p_{yz,yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{xy,xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0^* \\ m_z^* \\ \frac{1}{2}(m_{yy}^* - m_{xx}^*) \\ \frac{1}{2}(m_{zz}^* - m_{xx}^*) \\ m_x^* \\ m_{xz}^* \\ m_y^* \\ m_{yz}^* \\ m_{xy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_z \\ h_{yy} \\ h_{zz} \\ h_x \\ h_{xz} \\ h_y \\ h_{yz} \\ h_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

ou, de forma compacta, como

$$\bar{G} \bar{\eta} = \bar{h}. \quad (2.43)$$

De acordo com DAVIS (1975), o determinante $\det(\bar{G})$ da matriz de Gram $\bar{G}$ satisfaz a

$$0 \leq \det(\bar{G}) \leq \prod p_{i,i}, \quad (2.44)$$

em que o limite inferior, $\det(\bar{G}) = 0$, ocorre se e somente se as funções Φ^i são linearmente dependentes.

Para demonstrar que $\det(\bar{G}) > 0$, usaremos as equações (2.6) a (2.15) e forçaremos ser nula uma combinação linear (rearranjada) das funções Φ^i do conjunto B :

$$\begin{aligned} a_0 c_z R^{-2} + [3(a_x c_x + a_y c_y - a_z c_z) c_z + a_z] R^{-3} + 3\{5[(a_{xy} c_x c_y - a_{yy} c_y^2 - a_{zz} c_z^2) \\ - (a_{xz} c_x + a_{yz} c_y) c_z] + [(a_{xz} c_x + a_{yz} c_y) + (a_{yy} + 3a_{zz}) c_z]\} R^{-4} \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

em que $a_0, a_x, a_y, \dots, a_{zz}$ são os coeficientes de $\Phi^0, \Phi^x, \Phi^y, \dots, \Phi^{zz}$, respectivamente.

Mas $a_0, a_x, a_y, \dots, a_{zz}$ devem ser independentes de posição, a fim de que a identidade (2.45) seja válida em qualquer ponto do plano $x - y$. Examinando sob este ponto de vista cada termo desta identidade, obtemos:

- (1) para o termo proporcional a R^{-2} : $a_0 = 0$;
 (2) para o termo proporcional a R^{-3} : simultaneamente, $a_z = 0$ e

$$a_x c_x + a_y c_y - a_z c_z = 0.$$

Como não existem combinações lineares invariantes entre os cossenos diretores c_x , c_y e c_z , definidos nas equações (2.16) a (2.18), respectivamente, obtemos que $a_x = a_y = a_z = 0$;

- (3) para o termo proporcional a R^{-4} : simultaneamente,

$$a_{xy} c_x c_y - a_{yy} c_y^2 - a_{zz} c_z^2 - (a_{xz} c_x + a_{yz} c_y) c_z = 0 \quad (2.46)$$

e

$$(a_{xz} c_x + a_{yz} c_y) + (a_{yy} + 3a_{zz}) c_z = 0.$$

Pela mesma razão de não existirem combinações lineares invariantes entre os cossenos diretores, obtemos da última expressão acima que $a_{xz} = a_{yz} = 0$ e que $a_{yy} = -3a_{zz}$. Usando estes resultados na equação (2.46), obtemos que

$$a_{xy} = -\frac{(3c_y^2 - c_z^2)}{c_x c_y} a_{zz},$$

o que implica $a_{xy} = a_{zz} = 0$ e, conseqüentemente, $a_{yy} = 0$, porque o termo que multiplica a_{zz} na equação acima não é invariante com posição.

Desse modo, podemos concluir que

$$a_0 = a_x = a_y = \dots = a_{zz} = 0$$

são os únicos valores dos coeficientes que satisfazem a identidade (2.45). Portanto, as funções Φ^i pertencentes ao conjunto B são linearmente independentes e formam uma base não ortogonal para a representação, no plano $x - y$, de campos potenciais. Isto é suficiente para assegurar que $\det(\overline{G}) > 0$ na relação (2.44) e, conseqüentemente, que os elementos de $\overline{\eta}$ podem ser univocamente determinados através da equação (2.43) (DAVIS, 1975). Reconhecendo que

$$(m_{yy}^* - m_{xx}^*) + (m_{zz}^* - m_{yy}^*) \equiv (m_{zz}^* - m_{xx}^*),$$

podemos concluir que (dado um centro de expansão qualquer com $z_0 > 0$), *todos os momentos, ou combinações de momentos, pertencentes ao conjunto C podem ser univocamente determinados pela resolução da equação (2.43).*

A extensão desta prova de unicidade para um número *finito* qualquer de termos na expansão em multipolos é imediata. Observemos, no entanto, que por causa da não ortogonalidade da base de funções B , e bases similares de maior ordem usadas para representar a anomalia gravimétrica, a unicidade dos momentos e combinações de momentos m_i^* é condicional ao valor máximo adotado para a ordem desses momentos, que no presente caso é 2. Conseqüentemente, não há garantia de que as estimativas dos momentos m_i^* não irão se alterar quando o número de termos na expansão é alterado (RAINVILLE, 1967). É interessante observar que a não ortogonalidade das funções da base torna impossível se determinarem os momentos *verdadeiros*, até uma dada ordem, a partir da série truncada nesta ordem (RAINVILLE, 1967).

Não há nenhuma contradição entre os resultados da unicidade para os momentos m_i^* , passíveis de serem obtidos da extensão acima referida, e os resultados da Seção 2.2. Primeiro, porque há implicitamente introdução de informação a priori na abordagem de GOL'TSMAN (1970), como será evidenciado na próxima seção, e segundo, porque é impossível se extrair um número *infinito* de momentos, ou combinações de momentos, fazendo crescer indefinidamente o número de termos na expansão em multipolos, como se mostra a seguir.

Vamos definir como *zero* a função

$$zero \equiv zero(x, y) = 0,$$

em todo o plano $x - y$, e escrever a função genérica Φ^i como

$$\Phi^i(x, y) = \frac{\Gamma^i(x, y)}{R^{N_i}} \leq \frac{K}{R^{N_i}}, \quad (2.47)$$

em que K é o menor limite superior para $\Gamma^i(x, y)$. A desigualdade acima enfatiza o decaimento intrínseco de Φ^i com a distância R dada pela equação (2.5). Desse modo, dado um número positivo arbitrariamente pequeno ϵ , é possível encontrar um número $N_j(\epsilon)$, suficientemente grande, para o qual a função $\Phi^j(x, y)$ a ele associada satisfaz a

$$|zero - \Phi^j| \leq \epsilon,$$

em todo o plano $x - y$, porque é sempre possível fazer $R > 1$ na equação (2.47), bastando para tanto escolher adequadamente o centro de expansão. Logo, podemos concluir que

$$\lim_{N_i \rightarrow \infty} \Phi^i = zero.$$

Em conseqüência, na situação limite em que o número de termos na expansão em multipolos cresce indefinidamente, existem funções-bases cujos produtos internos se tornam iguais a

zero e, conseqüentemente, $\prod p_{i,i} \rightarrow 0$ na relação (2.44). Assim, a matriz de Gram $\overline{\overline{G}}$ se torna singular, tornando também impossível se determinarem *todos* os momentos ou combinações de momentos verdadeiros a partir da equação (2.3).

Poder-se-ia afirmar que a prova acima não é geral por causa da escolha $R > 1$ na equação (2.47). Contudo, dada uma distância qualquer $R < 1$, é sempre possível, por uma simples mudança do sistema de unidades usadas para expressar as grandezas que compõem as funções Φ^i , expressar R em outra unidade de tal forma que R se torne numericamente maior que 1, mas expressando a mesma distância física de antes. Dado que uma propriedade física da base de funções B não pode depender do sistema de unidades usado para representá-la, temos pois que admitir que fazer $R > 1$, na demonstração acima, expressa não uma imposição, mas apenas uma *conveniência*. Logo, a prova dada acima é geral.

De fato, uma vez que a equação (2.3) é uma representação exata da equação (2.1) e vale para todas as distribuições finitas de massa, tentar determinar um número infinito de momentos, a partir da equação (2.3), equivale a tentar determinar os valores *verdadeiros* de *todos* os momentos de uma fonte arbitrária, conhecendo-se *apenas* a sua anomalia gravimétrica, o que já sabemos ser impossível. Em conseqüência, à medida que se acrescentam à equação (2.41) momentos de ordem 3 e superiores, a matriz de Gram $\overline{\overline{G}}$ se torna progressivamente mais mal-condicionada, introduzindo, dessa forma, instabilidade na determinação dos momentos. No limite em que se tentaria estimar um número infinito de momentos, a matriz $\overline{\overline{G}}$ se torna singular e a instabilidade se funde na não unicidade. Dessa forma, o valor máximo para a ordem dos momentos adotada pelo intérprete controla o compromisso resolução versus estabilidade (BACKUS & GILBERT, 1968).

Na prova acima foi suposto o conhecimento da anomalia gravimétrica em todo o plano $x - y$. No entanto, na prática, esta anomalia é conhecida apenas num conjunto finito de pontos discretos. A fim de preservar, nestas condições, a unicidade para os elementos do conjunto C , são necessárias pelo menos nove medidas (DAVIS, 1975) de campo gravimétrico em pontos diferentes do plano $x - y$.

Notemos que a equação (2.42) revela possíveis acoplamentos entre os momentos. Como conseqüência da não ortogonalidade da base de funções B , os momentos se agrupam disjuntamente da seguinte forma: grupo 1, formado por m_0^* , m_z^* , m_{xx}^* , m_{yy}^* e m_{zz}^* ; grupo 2, por m_x^* , m_{xz}^* , m_y^* e m_{yz}^* , e grupo 3 formado exclusivamente por m_{xy}^* . O grupo 1 contém os elementos do bem-conhecido acoplamento entre massa e profundidade do centro de massa. O grupo 2 mostra dependências entre as *correlações* envolvendo a profundidade z e os momentos de 1a. ordem nas direções x e y que definem o plano de medida. Este acoplamento revela a dependência (menos conhecida) entre o mergulho de um corpo e a projeção do centro de

massa desse corpo na superfície de medida. O grupo 3 revela o completo desacoplamento da correlação m_{xy}^* de qualquer outro momento até a 2a. ordem, o que pode ser interpretado como a possibilidade de se identificar a direção, na superfície de medida, da projeção nesta superfície do eixo principal verdadeiro maior.

2.3.3 Análise de unicidade dos momentos equivalentes

Vamos escrever a equação (2.41), em notação matricial, como

$$\bar{g} = \bar{\Phi}(\vec{r}) \cdot \bar{m}(\vec{r}), \quad (2.48)$$

em que $\vec{r}$ é um ponto de expansão qualquer com $z_0 > 0$. Embora esta equação seja, em notação, semelhante à equação (2.39), está implícito agora que $\bar{m}(\vec{r})$ contém os momentos remanescentes após a recombinação das dispersões. Desse modo, a matriz de Gram $\bar{\Phi}^T(\vec{r}) \cdot \bar{\Phi}(\vec{r})$ é positivo-definida para todo $\vec{r}$ com $z_0 > 0$.

Queremos mostrar, a partir da equação (2.48), que é possível estimar univocamente os momentos equivalentes, isto é, os momentos calculados em $\vec{r} = \vec{r}_{cm}^e$, definidos por

$$\bar{m}_e = \bar{m}(\vec{r} = \vec{r}_{cm}^e) = [\bar{\Phi}^T(\vec{r}_{cm}^e) \cdot \bar{\Phi}(\vec{r}_{cm}^e)]^{-1} \cdot \bar{\Phi}^T(\vec{r}_{cm}^e) \cdot \bar{g}. \quad (2.49)$$

Embora a prova de unicidade dos momentos, dada na seção anterior, seja válida para *qualquer* centro de expansão com $z_0 > 0$, parece não ser possível obter, a princípio, $\bar{m}_e$ porque não conhecemos a priori uma estimativa de $\vec{r}_{cm}^e$. No entanto, conhecemos a priori uma *propriedade* de $\bar{m}_e$: sabemos que três dos seus elementos, que são os momentos de 1a. ordem equivalentes, são nulos, de acordo com suas definições por relações similares às dos momentos de 1a. ordem verdadeiros nas equações (2.19) a (2.21). A seguir, vamos demonstrar que é possível determinar todos os elementos de $\bar{m}_e$, a partir da propriedade de que os momentos de 1a. ordem equivalentes são nulos. Para tanto, vamos transformar o problema de determinar $\bar{m}_e$ num outro problema, mais geral, que tenha uma solução-limite com a mesma propriedade acima apresentada para $\bar{m}_e$. Uma vez obtida esta solução-limite, poderemos assegurar que ela é igual a $\bar{m}_e$ porque, pela própria definição de $\vec{r}_{cm}^e$, a condição dos momentos de 1a. ordem equivalentes serem nulos só pode ocorrer se $\vec{r} = \vec{r}_{cm}^e$.

Seguindo VEMURI & CHEN (1974), vamos definir o sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem

$$\frac{d}{dt} \bar{m}[\vec{r}(t)] = -\{\bar{\Phi}^T[\vec{r}(t)] \cdot \bar{\Phi}[\vec{r}(t)]\} \cdot \bar{m}[\vec{r}(t)] + \bar{\Phi}^T[\vec{r}(t)] \cdot \bar{g}, \quad (2.50)$$

em que t é um tempo fictício. Além disso, vamos impor que a dependência de $\vec{r}$ com t é dada por

$$\vec{r}(t + \delta t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{m_o^*[\vec{r}(t)]} \begin{pmatrix} m_x^*[\vec{r}(t)] \\ m_y^*[\vec{r}(t)] \\ m_z^*[\vec{r}(t)] \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

A solução estacionária da equação (2.50), obtida da condição

$$\frac{d}{dt} \overline{m}[\vec{r}(t \rightarrow \infty)] = 0, \quad (2.52)$$

é dada por

$$\overline{m}[\vec{r}(t \rightarrow \infty)] = \{\overline{\Phi}^T[\vec{r}(t \rightarrow \infty)] \cdot \overline{\Phi}[\vec{r}(t \rightarrow \infty)]\}^{-1} \cdot \overline{\Phi}^T[\vec{r}(t \rightarrow \infty)] \cdot \vec{g}. \quad (2.53)$$

Como $-\{\overline{\Phi}^T[\vec{r}(t)] \cdot \overline{\Phi}[\vec{r}(t)]\}$ na equação (2.50) é negativo-definida (já que é a negativa de uma matriz positivo-definida), esta solução estacionária é única, além de ser assintoticamente estável (ARNOLD, 1985). Além disso, a solução estacionária satisfaz a condição

$$\overline{m}[\vec{r}(t + \delta t)] = \overline{m}[\vec{r}(t)].$$

Ora, esta condição só ocorre quando $\vec{r}(t + \delta t) = \vec{r}(t)$, dada a unicidade de $\overline{m}(\vec{r})$ com $\vec{r}$. Por outro lado, tendo-se em vista a equação (2.51), esta invariância dos momentos com o tempo só ocorre quando os momentos de 1a. ordem equivalentes forem nulos. Podemos assim concluir que a solução estacionária (2.53) da equação (2.50) é $\overline{m}_e$, definido na equação (2.49), e, além disso, que esta solução é única e assintoticamente estável.

A caracterização de $\overline{m}_e$ como a solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem nos permite, agora, dar uma interpretação para o Algoritmo de Gol'tsman (que foi apresentado na Seção 2.3.1). Este algoritmo é uma versão de passo variável do método numérico de Euler-Cauchy (ISAACSON & KELLER, 1966) para resolver sistemas de equações diferenciais lineares. Senão vejamos: no passo $i + 1$ do algoritmo, o vetor de momentos $\overline{m}_{i+1}$, calculado com o centro de expansão $\vec{r}_{i+1}$, é dado por

$$\overline{m}_{i+1} = (\overline{\Phi}_{i+1}^T \cdot \overline{\Phi}_{i+1})^{-1} \cdot \overline{\Phi}_{i+1}^T \cdot \vec{g}, \quad (2.54)$$

em que $\overline{\Phi}_{i+1}$ é a matriz das funções-bases calculada em $\vec{r}_{i+1}$. Vamos expandir $\overline{\Phi}_{i+1}$ numa série de Taylor, no entorno da iteração anterior i , identificando assim o tempo fictício t com a evolução das iterações. Retendo nesta expansão só o termo de 1a. ordem, obtemos que

$$\overline{\Phi}_{i+1} = \overline{\Phi}_i + \Delta \overline{\Phi}_i. \quad (2.55)$$

Substituindo a equação (2.55) na equação (2.54), obtemos que

$$\bar{m}_{i+1} = [(\bar{\Phi}_i + \Delta\bar{\Phi}_i)^T \cdot (\bar{\Phi}_i + \Delta\bar{\Phi}_i)]^{-1} \cdot (\bar{\Phi}_i + \Delta\bar{\Phi}_i)^T \cdot \bar{g},$$

que pode ser aproximada por

$$\bar{m}_{i+1} = (\bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{\Phi}_i + 2 \cdot \bar{\Phi}_i^T \cdot \Delta\bar{\Phi}_i)^{-1} \cdot (\bar{\Phi}_i + \Delta\bar{\Phi}_i)^T \cdot \bar{g},$$

desprezando-se o termo de 2a. ordem em $\Delta\bar{\Phi}_i$. Aplicando a expansão binomial à operação inversa contida na equação acima, e retendo somente os termos de 1a. ordem em $\Delta\bar{\Phi}_i$, obtemos que

$$\bar{m}_{i+1} = (\bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{\Phi}_i)^{-1} \cdot \bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{g} + (\bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{\Phi}_i)^{-1} \cdot \Delta\bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{g} - 2 \cdot (\bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{\Phi}_i)^{-2} \cdot \bar{\Phi}_i^T \cdot \Delta\bar{\Phi}_i \cdot \bar{\Phi}_i^T \cdot \bar{g}.$$

A expressão acima é a expansão de Taylor de $\bar{m}_{i+1}$ no entorno de $\bar{m}_i$ retendo somente os termos de 1a. ordem em $\Delta\bar{\Phi}_i$, isto é,

$$\bar{m}_{i+1} = \bar{m}_i + \Delta\bar{m}_i,$$

que se constitui, por sua vez, na fórmula de definição do passo de evolução do método de Euler-Cauchy, como queríamos demonstrar.

A convergência do Algoritmo de Gol'tsman está, assim, apoiada nas condições que asseguram a convergência do método de Euler-Cauchy (ISAACSON & KELLER, 1966). Basicamente, é necessário que o operador do termo de amortecimento $-\{\bar{\Phi}^T[\vec{r}(t)] \cdot \bar{\Phi}[\vec{r}(t)]\}$ seja negativo-definido, o que sabemos ser verdade. Observemos, no entanto, que se durante a evolução do algoritmo o centro de expansão tocar na superfície da Terra, pode ocorrer uma singularidade na matriz $\bar{\Phi}$, o que ocasiona a não convergência desse algoritmo, como verificamos em alguns exemplos de inversão com dados sintéticos.

A transformação do problema de mínimos quadrados, de estimar $\bar{m}_e$, no problema de encontrar a solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem evidencia, claramente, que a estimação de momentos pela abordagem de GOL'TSMAN (1970) é um problema linear. A dependência não linear com m_0^* , na fórmula (2.51) de atualização do centro de expansão, define apenas o *passo* do algoritmo, mas não o problema em si de estimar $\bar{m}_e$.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar a importância do trabalho de VEMURI & CHEN (1974), em que nos baseamos para obter os resultados desta seção. VEMURI & CHEN (1974) estabeleceram uma *inusitada* ligação do problema de inversão (especificamente, do Inverso Generalizado), com o da solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares

de 1a. ordem. Esta ligação é potencialmente geradora de muitos resultados importantes em teoria da inversão porque ela estabelece uma linguagem em comum com um dos campos mais estudados da Matemática, o das equações diferenciais lineares, possibilitando assim o acesso a grande número de teoremas de unicidade, de condições de estabilidade, etc. Além disso, esta ligação permite ver o problema da instabilidade em inversão como um problema de *caos determinístico*, que é atualmente uma das áreas de pesquisa mais férteis em toda a Ciência.

2.3.4 A informação a priori introduzida pelo truncamento da série em momentos de 2a. ordem

Se a distribuição de massa não for patológica e desde que estimativas dos momentos equivalentes m_z^e , m_{zz}^e , m_{yz}^e , $\frac{1}{2}(m_{zz}^e - m_{xx}^e)$ e $\frac{1}{2}(m_{zz}^e - m_{yy}^e)$ sejam aceitas como sendo também estimativas dos momentos verdadeiros m_z , m_{zz} , m_{yz} , $\frac{1}{2}(m_{zz} - m_{xx})$ e $\frac{1}{2}(m_{zz} - m_{yy})$, respectivamente, devemos admitir, de acordo com os resultados da Seção 2.2.2, que informação suplementar sobre as fontes está sendo de algum modo introduzida pelo truncamento da série em momentos de 2a. ordem, que tornou possível obter estas estimativas através da abordagem de GOL'TSMAN (1970). Vamos evidenciar agora que informações são estas, trabalhando na hipótese de que é possível, dada a anomalia gravimétrica, obter o potencial gravimétrico em regiões harmônicas e vice-versa (GUNN, 1975).

Primeiramente, devemos reconhecer que a validade da representação de um campo potencial por sua expansão em multipolos, truncada em momentos de uma dada ordem, requer que as fontes estejam "suficientemente distantes" dos pontos de observação. Todavia, especificar exatamente o quão distante do observador devem estar as fontes não é um problema simples. Este problema depende, pelo menos, da máxima ordem pressuposta para os momentos e da distribuição espacial da densidade nas fontes. Como regra geral para assegurar a validade da expansão em multipolos de campos estáticos, REITZ & MILFORD (1964) indicaram que o raio da esfera de menor volume que contém as fontes deve ser *pequeno* quando comparado com as distâncias aos pontos de observação. No Capítulo 3, estudaremos numericamente este problema para o caso da série truncada em momentos de 2a. ordem e utilizando, como fonte anômala, um paralelepípedo de contraste de densidade uniforme. Para este modelo, mostraremos que é possível se obterem boas estimativas dos momentos verdadeiros, bastando, para tanto, que o raio definido na regra geral de REITZ & MILFORD (1964) seja menor (e não muito menor) que a profundidade do centro de massa. Apesar de ser uma restrição, a condição de estar "longe das fontes" em métodos potenciais não é crucial, pois é sempre possível aumentar artificialmente e de maneira estável a distância entre as fontes e o plano de observação através da operação de continuação para cima dos campos.

Admitido que as fontes estão suficientemente afastadas dos pontos de observação, vamos agora investigar qual é a propriedade que deve ter a distribuição espacial do contraste de densidade a fim de *otimizar* a representação do campo anômalo pela expansão em multipolos truncada em momentos de 2a. ordem. Seja E o conjunto das superfícies equipotenciais geradas no semi-espaco superior acima da superfície da Terra S pela distribuição real anômala de massas (Figura 2.2). Dado E , é possível se obter, *em todo o espaco*, uma família de superfícies F , a partir de condições sobre a forma de F e do vínculo de que F seja próximo de E , no semi-espaco superior, de acordo com um dado critério (Figura 2.2). Por exemplo, dado o centro de massa equivalente $\vec{r}_{cm}^e$, uma família específica F^e pode ser obtida impondo-se que F^e seja gerada a partir da expressão do potencial gravimétrico contendo momentos até 2a. ordem, e que a anomalia gravimétrica teórica obtida deste potencial ajuste, no sentido dos mínimos quadrados, a anomalia gravimétrica medida sobre S . Assim, a ordem pressuposta para os momentos e a condição de ajuste das anomalias definem um critério de *equivalência* entre a distribuição real de massa e a **distribuição equivalente de massa**, que é especificada pelos momentos equivalentes.

Usando F^e , é possível se obter agora, em qualquer plano que não contenha o centro de massa equivalente ($\vec{r}_{cm}^e$), o campo gravimétrico normal a este plano. Em particular, é possível se obter a componente z do campo gravimétrico sobre um plano $x - y$, digamos g_z , a componente y sobre um plano $x - z$, g_y , e a componente x sobre um plano $y - z$, g_x , todos esses planos não contendo $\vec{r}_{cm}^e$. De acordo com os resultados estabelecidos na Seção 2.2.2, é possível estimar, a partir de g_z , os elementos do subconjunto $C_{x-y} = \{m_0^e, m_x^e, m_y^e, m_{xy}^e, \frac{1}{2}(m_{yy}^e - m_{xx}^e)\}$; a partir de g_y , os elementos de $C_{x-z} = \{m_0^e, m_x^e, m_z^e, m_{xz}^e, \frac{1}{2}(m_{zz}^e - m_{xx}^e)\}$; e a partir de g_x , os elementos de $C_{y-z} = \{m_0^e, m_y^e, m_z^e, m_{yz}^e, \frac{1}{2}(m_{zz}^e - m_{yy}^e)\}$. Mas $C = \{m_0^e, m_x^e, m_y^e, m_z^e, m_{xy}^e, m_{xz}^e, m_{yz}^e, \frac{1}{2}(m_{yy}^e - m_{xx}^e), \frac{1}{2}(m_{zz}^e - m_{xx}^e), \frac{1}{2}(m_{zz}^e - m_{yy}^e)\}$, que é o conjunto dos momentos para os quais provamos haver unicidade, é simplesmente a união de C_{x-y} , C_{x-z} e C_{y-z} . Assim, desprezar o resto $O(R^{-5})$, na série infinita da equação (2.3), impõe uma **condição de regularização** (TIKHONOV & ARSENIN, 1977; GLASKO et al., 1977) sobre as superfícies equipotenciais do corpo anômalo, que permite fazer estimativas de z_{cm} , $\frac{1}{2}(m_{zz} - m_{xx})$, $\frac{1}{2}(m_{zz} - m_{yy})$, m_{xz} e m_{yz} , as quais, em geral, não podem ser obtidas somente da anomalia gravimétrica. Devido ao resto $O(R^{-5})$ ter sido desprezado, a distribuição real de massa está sendo aproximada pela *distribuição equivalente de massa*, acima definida, cuja anomalia gravimétrica tem contribuições não desprezíveis apenas dos momentos até 2a. ordem. Fisicamente, a hipótese mais simples que acarreta a minimização do resíduo entre os campos real e equivalente é supor que a massa anômala real possa ser representada por uma fonte de *volume finito cuja distribuição de massa seja convexa e simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais*. Se existe simetria na distribuição de massa, todos os

momentos equivalentes ímpares serão nulos, uma vez que o centro de massa equivalente é também o centro de simetria, e a primeira contribuição não nula desprezada é proporcional a R^{-6} . Esta é a *informação a priori* introduzida na abordagem de GOL'TSMAN (1970), além da condição das fontes estarem suficientemente distantes dos pontos de observação.

Esta informação, apesar de ser muito restritiva do ponto de vista matemático, é versátil o bastante, do ponto de vista geológico, para que o método de inversão a ela associado modele diferentes tipos de estruturas geológicas como diques, corpos mineralizados e corpos de granito. Desde que a informação *a priori* expresse aproximadamente um atributo da distribuição real de massa, esta abordagem de inversão é capaz de produzir boas estimativas simultâneas de massa anômala total, posição de centro de massa e direções dos três eixos principais, como veremos no Capítulo 3.

É possível entender agora a impossibilidade de se determinarem todos os momentos, a partir da equação (2.3), como sendo a ausência de uma condição de regularização sobre as superfícies equipotenciais que permitisse extrapolar, para pontos abaixo da superfície da Terra, os valores conhecidos do potencial gravimétrico nos pontos acima desta superfície. Podemos assim identificar a abordagem de inversão de GOL'TSMAN (1970) como um caso especial do *método da seleção* (TIKHONOV & ARSENIN, 1977). Contudo, ao contrário das aplicações usuais do método da seleção (AL-CHALABI, 1970, 1971; BRODSKY, 1981), não há aqui a necessidade de se especificar, de antemão, qual é a forma geométrica do corpo anômalo e, em conseqüência, o problema permanece linear.

Finalmente, observemos que GRANT & WEST (1965) propuseram uma abordagem de inversão bastante similar à de GOL'TSMAN (1970). A equação (8-23) de GRANT & WEST (1965) foi deduzida da expansão em multipolos do potencial gravimétrico, retendo também momentos só até a 2a. ordem. Mas, em seqüência, GRANT & WEST (1965) fizeram a hipótese de que o corpo anômalo poderia ser espacialmente representado com um único eixo principal e introduziram, na sua equação (8-24), a dependência explícita da anomalia gravimétrica com os ângulos de azimuth e inclinação desse eixo. Desse modo, a expressão final de GRANT & WEST (1965) tornou-se mais restritiva do que a equação (2.41) e também mais difícil de ser trabalhada, por causa de sua não linearidade com os ângulos de azimuth e inclinação do eixo principal do corpo anômalo.

2.4 HIPÓTESE A RESPEITO DO NÚCLEO POLINOMIAL DOS MOMENTOS QUE PODEM SER DETERMINADOS CONHECENDO-SE APENAS A ANOMALIA GRAVIMÉTRICA

Na Seção 2.2.2, mostramos que todo momento, ou combinação linear de momentos, cujo núcleo polinomial P seja função apenas das coordenadas Cartesianas que definem o plano de medida, e que tenha Laplaciano nulo, pode ser univocamente determinado conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica. Além disso, mostramos na Seção 2.3.2 que as funções que formam a base da expansão em multipolos são aquelas que remanesceram na expansão, após a eliminação do Laplaciano da função de Green, dada pela equação (2.2), e de todas as suas derivadas.

Os dois resultados acima podem estar ligados pois, observando a equação (2.41), que foi obtida da equação (2.38) após a eliminação do Laplaciano da função de Green, vemos que os momentos, e combinações lineares de momentos, cujos núcleos polinomiais P dependem apenas de x e/ou de y , têm todos a propriedade $\nabla^2 P = 0$ e, além disso, eles são *exatamente* aqueles que podem ser determinados conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica e descartando-se a ocorrência de distribuições patológicas de massa. Desse modo, podemos fazer a *hipótese* de que a propriedade $\nabla^2 P = 0$ seja *conseqüência* apenas do rearranjo dos momentos, após a eliminação na expansão em multipolos do Laplaciano da função de Green e de todas as suas derivadas. Nós comprovamos a validade desta hipótese para todos os momentos e combinações lineares de momentos até 3a. ordem. Todavia, não conseguimos provar a sua validade geral.

Caso a hipótese acima esteja correta, a determinação de um dado momento, sem o uso de informação a priori, é uma conseqüência apenas das propriedades da função-base da qual ele atua como coeficiente na expansão em multipolos, e não uma propriedade em si do momento. Esta hipótese é, portanto, razoável do ponto de vista matemático, pois é fato bem conhecido que as propriedades de um dado espaço são completamente descritas pela base que define o espaço.

2.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Como uma contribuição para esclarecer a questão, no caso gravimétrico, a respeito do uso de informação a priori na inversão de momentos de fonte, concluímos que qualquer esquema de inversão, que se baseie no uso da série finita, obtida da expansão em multipolos do potencial gravimétrico, está implicitamente incorporando informação a priori sobre a fonte

em todos os momentos. Nesta situação, está sendo imposta uma condição de regularização para as superfícies equipotenciais do corpo anômalo, em consequência do truncamento da série na máxima ordem postulada para os momentos. Para séries retendo momentos até 2a. ordem, por exemplo, pressupõe-se que o corpo anômalo seja convexo e tenha volume finito, que ele esteja suficientemente distante dos pontos de observação e que a sua distribuição de massa seja simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais. Além disso, se a fonte anômala é isolada, os parâmetros estimados serão geologicamente interpretáveis, como se verá no próximo capítulo.

Por outro lado, sem usar informação a priori, é possível determinar univocamente todo momento, ou combinação linear de momentos, cujo núcleo polinomial seja função apenas das coordenadas Cartesianas que definem o plano de medida e que tenha Laplaciano nulo. Além disso, nenhum momento cujo núcleo polinomial tenha Laplaciano não nulo pode ser determinado. Em particular, dentre os momentos até 2a. ordem, satisfazem estas condições a massa anômala total, as projeções do centro de massa sobre o plano de medida, o produto de inércia e a diferença entre os momentos de inércia em torno de qualquer par de eixos mutuamente ortogonais contidos no plano de medida. (Obviamente, sempre haverá incertezas devido ao conhecimento incompleto, discreto e impreciso da anomalia gravimétrica que poderão, inclusive, tornar instável a estimação destas grandezas.)

A generalização deste trabalho para o caso magnético pode ser feita obtendo-se, desse modo, uma análise similar para a inversão de momentos magnéticos.

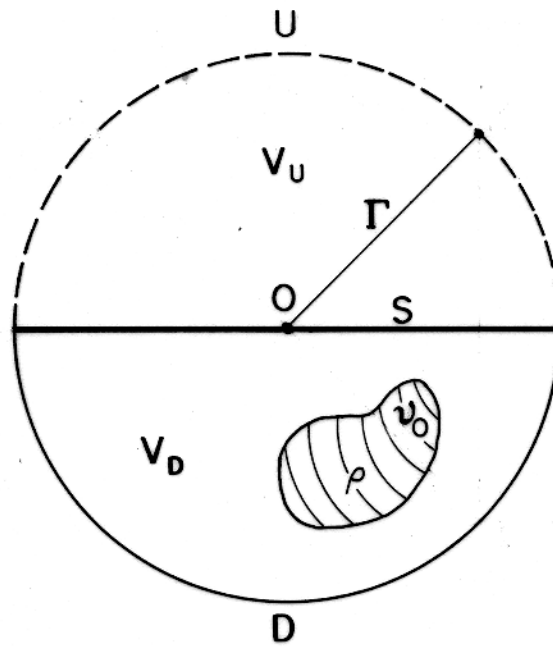


Figura 2.1 - Superfícies U (linha tracejada), D (linha cheia fina) e S (linha cheia grossa) e volumes V_U e V_D de integração. v_0 é o volume das fontes.

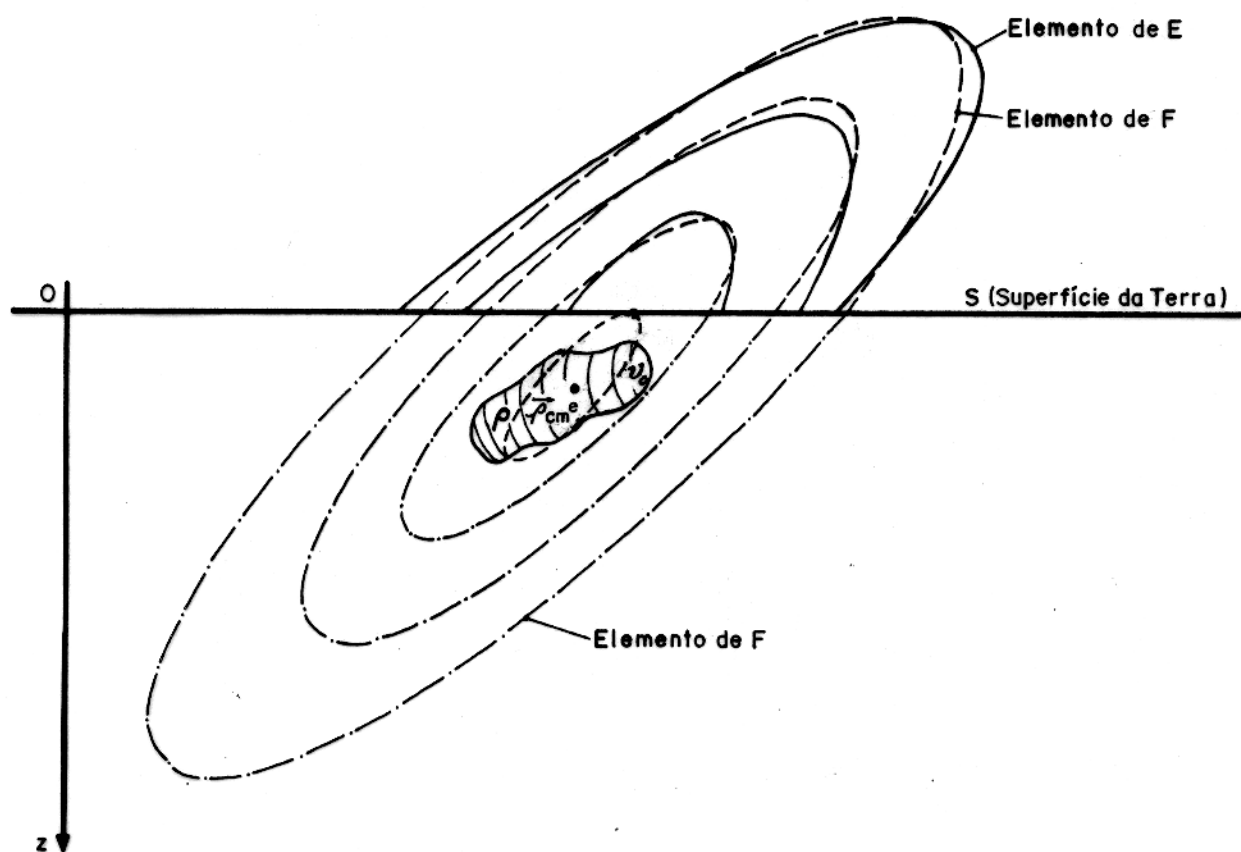


Figura 2.2 - Extrapolação (linha ponto-tracejada) de uma aproximação (linha tracejada) das superfícies equipotenciais (linha cheia) geradas pela distribuição real de massas no semi-espço superior.

3 - CARACTERIZAÇÃO DAS DIREÇÕES DOS EIXOS PRINCIPAIS E EXEMPLOS DE INVERSÃO DE ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS SINTÉTICAS

O objetivo central deste capítulo é apresentar resultados da inversão de anomalias gravimétricas tridimensionais sintéticas, através da aproximação das mesmas pela série truncada em momentos de 2a. ordem. Todavia, para atingir este objetivo, precisaremos cumprir três etapas preliminares.

A primeira etapa será apresentar uma normalização das funções-bases e dos momentos contidos na série truncada em momentos de 2a. ordem. Esta normalização possibilitará mais estabilidade numérica à inversão dos momentos e, ao mesmo tempo, facilitará a interpretação dos momentos.

A segunda etapa será fazer um estudo analítico das direções principais. Neste estudo, mostraremos que, apesar de não se conhecerem isoladamente as dispersões, será possível estimar as direções principais. Além disso, deduziremos qual é a dependência das direções principais com o centro de expansão.

A terceira etapa será apresentar os algoritmos a serem usados nos exemplos de inversão. Cumpridas essas etapas, passaremos a apresentar os exemplos de inversão com dados sintéticos.

3.1 NORMALIZAÇÃO DAS FUNÇÕES-BASES E DOS MOMENTOS

Reescrevendo a equação (2.41), que aproxima a anomalia gravimétrica pela série obtida de sua expansão em multipolos contendo momentos até 2a. ordem, e presumindo que esta anomalia é conhecida apenas em pontos discretos k ($k = 1, 2, \dots, N$) da superfície da Terra, obtemos que

$$\begin{aligned} g_k = & \Phi_k^0 m_0 + \Phi_k^x m_x + \Phi_k^y m_y + \Phi_k^z m_z + \Phi_k^{xy} m_{xy} + \Phi_k^{xz} m_{xz} + \frac{1}{2} \Phi_k^{yy} (m_{yy} - m_{xx}) \\ & + \Phi_k^{yz} m_{yz} + \frac{1}{2} \Phi_k^{zz} (m_{zz} - m_{xx}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que g_k é a anomalia gravimétrica medida no ponto $(x_k, y_k, 0)$, expresso no sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) , em que $x - y$ é a superfície plana da Terra e z é positivo para baixo. Além disso, $\Phi_k^0, \Phi_k^x, \dots, \Phi_k^{zz}$ são os valores das funções-bases $\Phi^0(x, y), \Phi^x(x, y), \dots, \Phi^{zz}(x, y)$, calculadas no ponto $(x_k, y_k, 0)$, e $m_0, m_x, \dots, \frac{1}{2}(m_{zz} - m_{yy})$ são os momentos ou combinações de momentos de fonte. Por simplicidade na notação, não conservamos o índice * da equação (2.41). Não obstante, devido ao truncamento da série, estamos presumindo que o corpo anômalo tem volume finito, que ele se encontra suficientemente distante dos pontos de observação e que a sua distribuição de massa é convexa e simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais.

Vamos reescrever a equação (3.1) como

$$g_k = \left(\Phi_k^0 \frac{l^2}{G} \right) \cdot \left(\frac{G}{l^2} m_0 \right) + \left(\Phi_k^x \frac{l^3}{G} \right) \cdot \left(\frac{G}{l^3} m_x \right) + \dots + \left(\Phi_k^{xy} \frac{l^4}{G} \right) \cdot \left(\frac{G}{l^4} m_{xy} \right) + \left(\Phi_k^{xz} \frac{l^4}{G} \right) \cdot \left(\frac{G}{l^4} m_{xz} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\Phi_k^{zz} \frac{l^4}{G} \right) \cdot \left[\frac{G}{l^4} (m_{zz} - m_{xx}) \right], \quad (3.2)$$

em que G é a constante universal de atração gravitacional e l é uma distância de normalização pré-especificada, tendo a mesma magnitude que a coordenada vertical do centro de expansão. Definindo Ψ_k^0 e μ_0 como

$$\Psi_k^0 = \Phi_k^0 \frac{l^2}{G}$$

e

$$\mu_0 = \frac{G}{l^2} m_0, \quad (3.3)$$

e agindo similarmente para os demais termos contidos na equação (3.2), podemos reescrevê-la como

$$g_k = \Psi_k^0 \mu_0 + \Psi_k^x \mu_x + \Psi_k^y \mu_y + \Psi_k^z \mu_z + \Psi_k^{xy} \mu_{xy} + \Psi_k^{xz} \mu_{xz} + \frac{1}{2} \Psi_k^{yy} (\mu_{yy} - \mu_{xx}) + \Psi_k^{yz} \mu_{yz} + \frac{1}{2} \Psi_k^{zz} (\mu_{zz} - \mu_{xx}). \quad (3.4)$$

Considerando o conjunto de todas as medidas do campo anômalo, podemos escrever a equação (3.4), na forma matricial, como

$$\bar{g} = \bar{\Psi} \bar{\mu}, \quad (3.5)$$

em que $\bar{g}$ é o vetor de dimensão N cujo k -ésimo elemento é o campo gravimétrico observado no ponto $(x_k, y_k, 0)$ e $\bar{\mu}$ é o vetor de dimensão 9, cujos elementos são os momentos, ou

combinações de momentos, arranjados na seqüência $\mu_0, \mu_x, \mu_y, \mu_z, \mu_{xy}, \mu_{xz}, \frac{1}{2}(\mu_{yy} - \mu_{xx}), \mu_{yz}$ e $\frac{1}{2}(\mu_{zz} - \mu_{xx})$. Além disso, $\bar{\Psi}$ é a matriz $N \times 9$ cujo elemento $\Psi_{k,j}$ é igual à função-base Ψ^j , com $j = \{0, x, y, z, \dots, zz\}$, calculada no ponto $(x_k, y_k, 0)$. O conjunto das funções-bases normalizadas é dado por

$$\Psi_k^0 = c_z \lambda^2, \quad (3.6)$$

$$\Psi_k^x = 3c_x c_z \lambda^3, \quad (3.7)$$

$$\Psi_k^y = 3c_y c_z \lambda^3, \quad (3.8)$$

$$\Psi_k^z = (1 - 3c_z^2) \lambda^3, \quad (3.9)$$

$$\Psi_k^{xy} = 15c_x c_y c_z \lambda^4, \quad (3.10)$$

$$\Psi_k^{xz} = 3c_x (1 - 5c_z^2) \lambda^4, \quad (3.11)$$

$$\Psi_k^{yy} = -3(5c_y^2 - 1) c_z \lambda^4, \quad (3.12)$$

$$\Psi_k^{yz} = 3c_y (1 - 5c_z^2) \lambda^4, \quad (3.13)$$

$$\Psi_k^{zz} = -3(5c_z^2 - 3) c_z \lambda^4, \quad (3.14)$$

em que

$$c_x = \frac{x_k - x_0}{R},$$

$$c_y = \frac{y_k - y_0}{R},$$

$$c_z = \frac{z_0}{R},$$

$$\lambda = \frac{l}{R}$$

e

$$R = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 + z_0^2},$$

sendo x_0, y_0 e z_0 , as coordenadas do centro da expansão em multipolos. A equação (3.5) é a que será efetivamente usada para estimar os momentos.

Observemos que as funções-bases, dadas pelas equações (3.6) a (3.14), são adimensionais e, assim, os momentos normalizados $\mu_0, \mu_x, \mu_y, \dots, \frac{1}{2}(\mu_{zz} - \mu_{xx})$ têm todos a mesma unidade, que é igual à unidade de campo gravimétrico. Nós podemos identificar μ_0 , na equação (3.3), como sendo a contribuição da massa anômala total para o campo medido em qualquer ponto cuja distância ao centro de massa seja igual a l . Os demais momentos, na equação (3.4), podem ser interpretados de modo similar. A equação (3.5) é mais adequada do que a versão matricial da equação (3.1) para a estimação dos momentos, porque a matriz $\bar{\Psi}$ é melhor condicionada que a matriz $\bar{\Phi}$, o que proporciona maior estabilidade numérica à estimação

Tabela 3.1 - Resultados da decomposição em valores singulares da matriz $\bar{\Psi}$. Em cada coluna da tabela, os nove primeiros elementos expressam uma coluna da matriz ortogonal $\bar{V}$ (LANCZOS, 1961) e o décimo elemento é o valor singular associado a esta coluna de $\bar{V}$. Os elementos de $\bar{V}$ estão multiplicados por 10^4 . A matriz $\bar{\Psi}$ foi calculada numa malha centrada no ponto (15, 15, 0) em km, contendo 31 x 31 pontos igualmente espaçados de 1 km. O centro de expansão utilizado foi o ponto (15, 15, 5) em km.

momentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
μ_0	0	0	-650	0	-731	5290	0	0	-8430
μ_x	-1338	1039	0	0	0	0	-9279	3322	0
μ_y	1039	1338	0	0	0	0	-3322	-9279	0
μ_z	0	0	2920	0	210	-7713	0	0	-5248
μ_{xy}	0	0	0	-10000	0	0	0	0	0
μ_{xz}	7783	-6046	0	0	0	0	-1595	571	0
$\mu_{yy} - \mu_{xx}$	0	0	4592	0	-8858	-674	0	0	-9
μ_{yz}	-6046	-7783	0	0	0	0	-571	-1595	0
$\mu_{zz} - \mu_{xx}$	0	0	-8364	0	-4071	-3474	0	0	-1182
valor sing.	372,4	372,4	307,0	183,5	82,7	48,5	30,6	30,6	11,1

dos momentos. Além disso, os momentos normalizados μ_i são de mais fácil manuseio do que os não normalizados m_i , porque os momentos normalizados são expressos em números menores que os não normalizados, e vale entre os momentos normalizados a regra aproximada de que os momentos de ordem inferior são maiores que os momentos de ordem superior.

Na Tabela 3.1, apresentamos a decomposição em valores singulares (LANCZOS, 1961) da matriz $\bar{\Psi}$, na equação (3.5), numa situação típica dos exemplos a serem apresentados. Podemos observar nesta tabela, que a razão entre os valores singulares extremos de $\bar{\Psi}$ é menor que 34. Assim, $\bar{\Psi}$ é tipicamente uma matriz bem-condicionada, o que possibilitará estabilidade na inversão dos elementos do vetor $\bar{\mu}$, como veremos. Observemos, ainda na Tabela 3.1, que as combinações lineares entre os elementos de $\bar{\mu}$ (expressas pelas colunas da matriz ortogonal $\bar{V}$) confirmam numericamente a existência de possíveis acoplamentos entre momentos, que foram evidenciados pela equação (2.42).

3.2 ESTUDO DAS DIREÇÕES DOS EIXOS PRINCIPAIS

Nesta seção, vamos caracterizar matematicamente as direções principais e mostrar que é possível calculá-las, mesmo sem conhecer isoladamente as dispersões. Além disso, vamos estudar a dependência das direções principais com o centro de expansão, de modo a fornecer embasamento teórico para entender os resultados da inversão.

3.2.1 Caracterização das direções dos eixos principais a partir da diagonalização da matriz de espalhamento

Seja (x_0, y_0, z_0) o centro de expansão. Vamos definir a tripla de transformações do sistema de coordenadas $(x', y', z') \equiv (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, nos sistemas (x', u, v) , (ζ, u, η) e finalmente (ϵ, δ, η) , por rotações sucessivas em torno dos eixos x' , u e η , de ângulos α , β e γ , respectivamente. Uma rotação em torno de um eixo será considerada positiva quando ela for anti-horária para um observador olhando no sentido negativo do eixo.

Aplicando estas rotações à matriz de espalhamento $\bar{\bar{E}}$, dada por

$$\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{xy} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{xz} & m_{yz} & m_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

obtemos uma nova matriz de espalhamento $\bar{\bar{E}}_{pr}$, dada por

$$\bar{\bar{E}}_{pr} = \bar{\bar{R}}_\gamma \bar{\bar{R}}_\beta \bar{\bar{R}}_\alpha \bar{\bar{E}} \bar{\bar{R}}_\alpha^T \bar{\bar{R}}_\beta^T \bar{\bar{R}}_\gamma^T, \quad (3.16)$$

em que

$$\bar{\bar{R}}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

é o operador de rotação em torno do eixo x' e $\bar{\bar{R}}_\beta$ e $\bar{\bar{R}}_\gamma$ são, respectivamente, os operadores de rotação em torno dos eixos u e η , similarmente definidos.

Para que $\bar{\bar{E}}_{pr}$ seja uma **matriz principal de espalhamento**, é necessário que os seus termos fora da diagonal principal sejam nulos, satisfazendo as seguintes condições:

$$\sin 2\gamma[(D_{yx} + Q) - \sin^2 \beta(D_{zx} - Q) - \frac{1}{2} \sin 2\beta P] + \cos 2\gamma(\sin \beta R + \cos \beta T) = 0, \quad (3.17)$$

$$\cos \gamma[\sin 2\beta(D_{zx} - Q) + \cos 2\beta P] + \sin \gamma(\cos \beta R - \sin \beta T) = 0, \quad (3.18)$$

$$-\sin \gamma [\sin 2\beta (D_{zx} - Q) + \cos 2\beta P] + \cos \gamma (\cos \beta R - \sin \beta T) = 0, \quad (3.19)$$

em que

$$P = \cos \alpha m_{xz} - \sin \alpha m_{xy}, \quad (3.20)$$

$$Q = \sin^2 \alpha D_{zy} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha m_{yz}, \quad (3.21)$$

$$R = \sin 2\alpha D_{zy} + \cos 2\alpha m_{yz}, \quad (3.22)$$

$$T = \cos \alpha m_{xy} + \sin \alpha m_{xz}, \quad (3.23)$$

$$D_{yx} = \frac{1}{2}(m_{yy} - m_{xx}), \quad (3.24)$$

$$D_{zx} = \frac{1}{2}(m_{zz} - m_{xx}) \quad (3.25)$$

e

$$D_{zy} = \frac{1}{2}(m_{zz} - m_{yy}). \quad (3.26)$$

Os ângulos α , β e γ , que satisfazem o sistema não linear de equações (3.17) a (3.19), especificam as direções dos eixos principais, para o centro de expansão no qual os momentos foram calculados. Estes ângulos podem ser assim identificados como ângulos de Euler (GOLDSTEIN, 1959), que dão a orientação espacial do corpo anômalo em relação ao sistema de eixos (x', y', z') . Observemos que para resolver o sistema de equações (3.17) a (3.19), precisamos conhecer, apenas, as correlações e as *diferenças entre pares* de dispersões. Como mostramos no Capítulo 2, estas grandezas podem ser univocamente estimadas, a partir da anomalia gravimétrica, uma vez admitido que esta anomalia possa ser aproximada por uma série finita retendo, pelo menos, momentos de 2a. ordem.

O sistema de equações (3.17) a (3.19) pode ser simplificado explicitando-se γ , em função de α e β , como

$$\tan 2\gamma = \frac{\sin \beta R + \cos \beta T}{\sin^2 \beta (D_{zx} - Q) - \frac{1}{2} \sin 2\beta P - (D_{yx} + Q)}, \quad (3.27)$$

e deixando-se assim acoplados apenas α e β , no sistema reduzido dado por

$$\cos \beta R - \sin \beta T = 0 \quad (3.28)$$

$$\sin 2\beta (D_{zx} - Q) + \cos 2\beta P = 0, \quad (3.29)$$

estando P , Q , R , T , D_{yx} , D_{zx} e D_{zy} definidos nas equações (3.20) a (3.26), respectivamente.

Os resultados acima obtidos revelam que a etapa de estimação das direções principais equivalentes é um problema não linear. Contudo, dentro do contexto global de estimação

dos momentos equivalentes (e dos parâmetros que podem ser posteriormente obtidos através dos mesmos), esta etapa ficou bastante simples e fácil de ser realizada. Na realidade, as operações de rotação definidas na equação (3.16) representam a operação de diagonalização da matriz de espalhamento $\overline{\overline{E}}$, dada pela equação (3.15). Assim, embora que do ponto de vista geofísico esta etapa não linear seja extremamente importante, do ponto de vista numérico ela tornou-se um pequeno apêndice após a estimação dos momentos equivalentes, que é um problema linear. Isso revela a superioridade da abordagem de GOL'TSMAN (1970), sobre a de GRANT & WEST (1965), para estimar o posicionamento espacial de um corpo anômalo. Enquanto que a abordagem de GOL'TSMAN (1970) é basicamente linear, com apêndices não lineares, a de GRANT & WEST (1965) é completamente não linear porque estes autores introduziram, já na formulação inicial do problema, a não linearidade intrínseca ao cálculo das direções principais.

Os ângulos de Euler obtidos da solução das equações (3.27) a (3.29) especificam, de maneira *indistinta*, as três direções principais. Ou seja, esta solução não permite determinar a ordem *relativa* de importância dos três eixos principais. Para determinar esta ordem, mostramos na próxima seção que é suficiente especificar, de antemão, qual é o sinal do contraste de densidade.

3.2.2 Determinação da ordem relativa dos eixos principais equivalentes

Nesta seção, vamos provar que é possível identificar quais são os eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor. Para tanto, vamos fazer a hipótese de que o contraste de densidade ρ seja positivo, de modo que a matriz de espalhamento $\overline{\overline{E}}$, definida na equação (3.15), seja positivo-definida. Além disso, vamos definir $\overline{\overline{D}}$ como:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \delta & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{xy} & \delta + (m_{yy} - m_{xx}) & m_{yz} \\ m_{xz} & m_{yz} & \delta + (m_{zz} - m_{xx}) \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

em que δ é número real qualquer. Assim,

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{D}} + (m_{xx} - \delta)\overline{\overline{I}}, \quad (3.31)$$

em que $\overline{\overline{I}}$ é a matriz identidade.

Observemos que as diferenças entre os pares de elementos situados na diagonal principal de $\overline{\overline{D}}$ são iguais às diferenças entre os pares similares de elementos situados na diagonal principal de $\overline{\overline{E}}$. Assim sendo, as *condições de diagonalização* das matrizes $\overline{\overline{D}}$ e $\overline{\overline{E}}$ são as mesmas, já que estas condições só dependem das correlações e das diferenças entre pares de

dispersões. Isto significa que, para qualquer valor de δ na equação (3.30), as estimativas das direções dos eixos principais obtidas de $\bar{\bar{D}}$ são iguais às que seriam obtidas de $\bar{\bar{E}}$, a menos de *permutações* e mudanças de *sentido* nestes eixos. Vamos provar, a seguir, que existe e é possível determinar um valor mínimo (δ_{min}) para δ , de tal modo que as direções dos eixos principais, calculadas através das matrizes $\bar{\bar{E}}$ e $\bar{\bar{D}}$, sejam exatamente iguais inclusive em ordem relativa e sentidos.

Vamos fazer a decomposição em autovalores e autovetores (LANCZOS, 1961) das matrizes $\bar{\bar{E}}$ e $\bar{\bar{D}}$:

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{U}}_E \bar{\bar{A}}_E \bar{\bar{U}}_E^T \quad (3.32)$$

e

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{U}}_D \bar{\bar{A}}_D \bar{\bar{U}}_D^T, \quad (3.33)$$

em que $\bar{\bar{A}}_E$ é a matriz diagonal de autovalores e $\bar{\bar{U}}_E$ é a matriz ortogonal de autovetores, ambas associadas com $\bar{\bar{E}}$, e em que $\bar{\bar{A}}_D$ e $\bar{\bar{U}}_D$ estão similarmente definidas em relação a $\bar{\bar{D}}$.

Devido às condições de diagonalização de $\bar{\bar{E}}$ e $\bar{\bar{D}}$ serem as mesmas, podemos afirmar que

$$\bar{\bar{U}}_D = \bar{\bar{U}}_E \bar{\bar{P}} \bar{\bar{T}}, \quad (3.34)$$

em que $\bar{\bar{P}}$ é uma matriz de possíveis permutações de colunas e $\bar{\bar{T}}$ é uma matriz de possíveis trocas de sinal dos elementos das colunas. Usando as equações (3.31) a (3.34) e as propriedades das matrizes envolvidas, é fácil obter que

$$\bar{\bar{A}}_D = \bar{\bar{T}}^T \bar{\bar{P}}^T [\bar{\bar{A}}_E + (\delta - m_{xx}) \bar{\bar{I}}] \bar{\bar{P}} \bar{\bar{T}},$$

que podemos estender como

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^D & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^D & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^D \end{pmatrix} = \bar{\bar{P}}^T \bar{\bar{T}}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^E + \delta - m_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^E + \delta - m_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^E + \delta - m_{xx} \end{pmatrix} \cdot \bar{\bar{P}} \bar{\bar{T}}, \quad (3.35)$$

em que λ_i^D e λ_i^E , com $i=1, 2, 3$, são os autovalores de $\bar{\bar{D}}$ e $\bar{\bar{E}}$, respectivamente. Devido $\bar{\bar{E}}$ ser positivo-definida, todos os seus autovalores são positivos. Além disso, sem perda de generalidade, podemos ordenar os autovalores de $\bar{\bar{E}}$ (e de $\bar{\bar{D}}$) em sentido decrescente, obtendo assim $\lambda_1^E \geq \lambda_2^E \geq \lambda_3^E > 0$.

Para fazer com que $\bar{\bar{U}}_D$ seja igual a $\bar{\bar{U}}_E$ na equação (3.34) (e, assim, impor que as direções principais obtidas das colunas de $\bar{\bar{U}}_D$ sejam iguais às obtidas de $\bar{\bar{U}}_E$), é suficiente forçar que

$$\bar{\bar{P}} \bar{\bar{T}} = \bar{\bar{I}},$$

o que implica que cada autovalor de $\overline{\overline{D}}$ seja igual ao correspondente autovalor de $\overline{\overline{E}}$ somado a $\delta - m_{xx}$.

Por outro lado, para que $\overline{\overline{U}}_D$ seja igual a $\overline{\overline{U}}_E$ na equação (3.34), é necessário que $\overline{\overline{D}}$ tenha a mesma propriedade de $\overline{\overline{E}}$ de ser positivo-definida, isto é, $\lambda_1^D \geq \lambda_2^D \geq \lambda_3^D > 0$. Unindo os resultados obtidos, concluímos que

$$\delta > m_{xx} - \lambda_3^E, \quad (3.36)$$

para que as direções principais obtidas das colunas de $\overline{\overline{U}}_D$ sejam iguais às obtidas de $\overline{\overline{U}}_E$.

Observemos na inequação (3.36) que, embora m_{xx} e λ_3^E sejam desconhecidos, eles são necessariamente limitados e, assim, existe δ_{min} tal que as direções principais obtidas por $\overline{\overline{D}}$ sejam exatamente iguais às que seriam obtidas por $\overline{\overline{E}}$, já que δ pode ser arbitrariamente grande. A seguir, vamos demonstrar que é possível determinar exatamente o valor de δ_{min} , conhecendo-se apenas as correlações e as diferenças entre pares de dispersões.

É fácil obter que a equação característica associada aos autovalores da matriz $\overline{\overline{D}}$, na equação (3.30), é dada por

$$(\delta - \lambda^{D_0})^3 + b(\delta - \lambda^{D_0})^2 + c(\delta - \lambda^{D_0}) + d = 0, \quad (3.37)$$

em que

$$\begin{aligned} b &= (m_{yy} - m_{xx}) + (m_{zz} - m_{xx}), \\ c &= m_{xy}^2 + m_{xz}^2 + m_{yz}^2 - (m_{yy} - m_{xx})(m_{zz} - m_{xx}), \\ d &= 2m_{xy}m_{xz}m_{yz} - m_{xy}^2(m_{zz} - m_{xx}) - m_{xz}^2(m_{yy} - m_{xx}), \end{aligned}$$

$\lambda^D = \delta + \lambda^{D_0}$ e λ^{D_0} são os autovalores da matriz *particular* $\overline{\overline{D}}_0$ em que δ fosse tomado nulo. Observemos na equação (3.37) que qualquer valor δ não nulo atua na forma de uma *translação* em λ^{D_0} no eixo real. Assim, se $\lambda_3^{D_0}$ é o menor valor singular de $\overline{\overline{D}}_0$, para forçar $\overline{\overline{D}}$ ser positivo-definida basta fazer

$$\delta_{min} > -\lambda_3^{D_0}.$$

Além disso, observemos que a determinação de λ_3^D só depende dos coeficientes b , c e d , acima definidos, que por sua vez só dependem das correlações e diferenças entre pares de dispersões.

A determinação de δ_{min} através da menor raiz de um polinômio de grau 3 não é conveniente do ponto de vista algorítmico. Todavia, não é importante determinar exatamente o valor δ_{min} , embora não seja conveniente superestimá-lo, para evitar a degradação dos cálculos na diagonalização da matriz $\overline{\overline{D}}$. Uma majoração segura e sem super-estimação excessiva de δ_{min}

pode ser obtida através do Teorema de Gershgorin (RALSTON & RABINOWITZ, 1978). Este teorema afirma que se $\overline{\overline{A}}$ é uma matriz arbitrária $N \times N$ de elementos complexos a_{ij} , os autovalores de $\overline{\overline{A}}$ estão contidos dentro dos círculos cujos centros são os elementos a_{ii} e cujos raios R_i são dados por

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|.$$

Desse modo, é suficiente fazer

$$\delta_{min} > \max_i |r_i - d_{ii}|, \quad (3.38)$$

em que r_i e d_{ii} são os raios e os elementos da matriz $\overline{\overline{D}}_0$ em que δ foi tomado nulo.

Na hipótese de que o contraste de densidade ρ seja negativo, a matriz de espalhamentos $\overline{\overline{E}}$ seria negativo-definida. Neste caso, por analogia, é suficiente definir um valor máximo (δ_{max}) para δ de tal modo que $\overline{\overline{D}}$ seja também negativo-definida. Para tanto, basta fazer

$$\delta_{max} < -\min_i |r_i - d_{ii}|, \quad (3.39)$$

em que estas grandezas têm os mesmos significados acima.

Em resumo, provamos que a ordem relativa de importância das direções dos eixos principais equivalentes pode ser resgatada da imposição de que a matriz $\overline{\overline{D}}$ tenha a mesma propriedade da matriz $\overline{\overline{E}}$ de ser positivo-definida, ou negativo-definida, de acordo com o sinal do contraste de densidade.

3.2.3 Dependência das direções dos eixos principais com o centro de expansão

Em geral, somente o momento não nulo de menor ordem, que está presente na representação exata da expansão em multipolos, é independente do centro de expansão (JACKSON, 1983). Assim, em qualquer situação prática, os momentos de 2a. ordem de fonte gravimétrica dependerão da posição do centro de expansão, o que faz com que as direções principais também dependam. Vamos definir linhas de espalhamento de massa como sendo as linhas ao longo das quais a massa realmente se distribui, como ilustra a Figura 3.1. As linhas de espalhamento de massa são, assim, aquelas que têm realmente significado geológico. Contudo, não podemos determinar estas linhas pois para isso teríamos que conhecer a própria distribuição do contraste de densidade. Além disso, não podemos determinar nem mesmo as direções principais *verdadeiras* do corpo anômalo (isto é, aquelas calculadas com os momentos exatos desse corpo, sendo estes, por sua vez, calculados com o centro de expansão

sendo o centro de massa verdadeiro do mesmo), pois não podemos estimar todos os momentos necessários para este cálculo conhecendo-se apenas a anomalia gravimétrica. Na verdade, o melhor que podemos fazer é introduzir informação a priori sobre o corpo anômalo e, assim fundamentados, estimar as direções principais *equivalentes* isto é, aquelas obtidas com o centro de expansão sendo o centro de massa equivalente. A semelhança entre linhas de espalhamento de massa e direções principais verdadeiras e equivalentes dependerá, assim, da veracidade da informação a priori de que o corpo anômalo tenha três planos mutuamente ortogonais de simetria, além da validade da condição de que as fontes estejam suficientemente distantes dos pontos de observação.

Mesmo admitida a veracidade destas informações a priori, as direções principais equivalentes só podem ser estimadas com precisão finita, pois a anomalia gravimétrica é conhecida, com precisão limitada, em pontos discretos e numa área finita. Desse modo, os efeitos na determinação das direções principais equivalentes devidos às incertezas no conhecimento dos momentos, do centro de massa e do próprio campo, entre outros, devem ser analisados. Contudo, uma dedução analítica do efeito *conjunto* dessas incertezas é impraticável e, assim, este problema será tratado de forma numérica nos exemplos de inversão a serem apresentados na Seção 3.4. Não obstante, com o objetivo de fornecer subsídios para entender a influência da posição do centro de expansão (que verificamos ser de fundamental importância para a correta interpretação das estimativas das direções principais), vamos aqui investigar, analiticamente, a dependência das direções principais de um corpo, com a posição do centro de expansão, supondo que se conhecem, exatamente, a massa anômala total e os momentos de 2a. ordem verdadeiros deste corpo.

Seja (u, v, w) um sistema de coordenadas Cartesianas cujos eixos coincidem com as direções principais verdadeiras e cuja origem O coincide com o centro de massa verdadeiro CM de um dado corpo (Figura 3.2). Usando as definições dos momentos de 2a. ordem verdadeiros e relações análogas ao Teorema dos Eixos Paralelos para pares de momentos de inércia (GOLDSTEIN, 1959), é possível relacionar a matriz de espalhamento $\bar{\bar{E}}_P$, calculada num ponto $P \equiv P(u', v', w')$ qualquer, com a matriz principal de espalhamento $\bar{\bar{E}}_{cm}$, calculada no centro de massa verdadeiro, por

$$\bar{\bar{E}}_P = \bar{\bar{E}}_{cm} + m_0 \bar{\bar{\Delta}},$$

ou, explicitamente, por

$$\begin{pmatrix} m_{uu} & m_{uv} & m_{uw} \\ m_{uv} & m_{vv} & m_{vw} \\ m_{uw} & m_{vw} & m_{ww} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & M_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ww} \end{pmatrix} + m_0 \begin{pmatrix} u'^2 & u'v' & u'w' \\ u'v' & v'^2 & v'w' \\ u'w' & v'w' & w'^2 \end{pmatrix},$$

em que m_0 é massa anômala total e, por definição, $M_{uu} \geq M_{vv} \geq M_{ww}$.

Para evidenciar qual é a dependência das direções principais com o centro de expansão P , devemos caracterizar a dependência dos autovetores de $\bar{\bar{E}}_P$ com as coordenadas u' , v' e w' do ponto P . Vamos definir como sendo (u_P, v_P, w_P) (Figura 3.2) o sistema de eixos cujas direções coincidem com as direções dos autovetores de $\bar{\bar{E}}_P$ e que indicam, portanto, as direções dos eixos principais calculadas em P . Vamos simplificar ainda mais o nosso problema restringindo $w' = 0$, de modo que w_P permanecerá paralelo a w e, assim, uma simples rotação em torno do eixo w_P possibilitará que as direções de u e u_P venham a ser coincidentes. Nós iremos deduzir expressões para o ângulo de rotação $\alpha \equiv \alpha(u', v')$, entre os eixos u e u_P (Figura 3.2), e provar que o centro de massa é um ponto de sela na superfície da função $\alpha(u', v')$.

A direção do eixo u_P está associada com o maior autovalor da matriz reduzida de espalhamento $\bar{\bar{E}}_{red}$ dada por

$$\bar{\bar{E}}_{red} = \begin{pmatrix} M_{uu} + m_0 u'^2 & m_0 u' v' \\ m_0 u' v' & M_{vv} + m_0 v'^2 \end{pmatrix}.$$

As raízes da equação característica associada com $\bar{\bar{E}}_{red}$ são dadas por

$$\lambda = M_{uu} \left(\frac{1 \pm \delta}{2} \right) + M_{vv} \left(\frac{1 \mp \delta}{2} \right) + m_0 \left(\frac{u'^2 + v'^2}{2} \right),$$

em que

$$\delta = \sqrt{\left[1 + m_0 \left(\frac{u'^2 - v'^2}{M_{uu} + M_{vv}} \right) \right]^2 + m_0^2 \left[\left(\frac{u'^2 + v'^2}{M_{uu} - M_{vv}} \right)^2 - \left(\frac{u'^2 - v'^2}{M_{uu} + M_{vv}} \right)^2 \right]} \geq 0, \quad (3.40)$$

sendo o limite inferior para δ na equação acima consequência do fato que $M_{uu} \geq M_{vv}$. É possível agora obter que $\tan \alpha$ pode ser dada tanto por

$$\tan \alpha = \frac{2m_0 u' v'}{(\delta + 1)(M_{uu} - M_{vv}) + m_0(u'^2 - v'^2)}, \quad (3.41)$$

como por

$$\tan \alpha = \frac{(\delta - 1)(M_{uu} - M_{vv}) + m_0(v'^2 - u'^2)}{2m_0 u' v'}. \quad (3.42)$$

Observemos que quando $m_0 u'^2 \gg M_{uu}$ e $m_0 v'^2 \gg M_{vv}$

$$\tan \alpha = \frac{v'}{u'},$$

o mesmo acontecendo quando $M_{uu} = M_{vv}$, revelando assim que, nestas condições, a distribuição de massa se comporta como um ponto de massa.

Usando as equações (3.41) e (3.42), nós mostramos no Anexo II que o sinal da função $\tan \alpha$, em todo o plano $u - v$, é dado pelo sinal do produto $u' \cdot v'$. Além disso, uma vez que $\tan \alpha$ é uma função contínua em u' e v' , o centro de massa verdadeiro é um ponto de sela na superfície de $\tan \alpha$. Em consequência, uma vez definido α no intervalo -90° a 90° , a própria função $\alpha(u', v')$ terá também um ponto de sela na origem do plano $u - v$, como queríamos demonstrar.

Dois exemplos da superfície de α estão mostrados nas Figuras 3.3 e 3.4. Em cada um destes exemplos, os valores de α foram calculados usando-se a equação (3.42). Os valores dos momentos M_{uu} e M_{vv} , necessários para fazer este cálculo, foram obtidos usando-se as placas retangulares, com distribuições uniformes de massa, mostradas em linha tracejada nas Figuras 3.3.a e 3.4.a. Ambas as placas têm a mesma massa, de valor unitário (em unidade arbitrária).

Vamos usar esses dois exemplos para revelar como um erro na estimativa da posição do centro de massa afeta a determinação das direções principais, a depender de como a massa está distribuída no corpo. Vamos supor que os pontos P e Q sejam duas estimativas de centro de massa para ambas as placas nas Figuras 3.3.a e 3.4.a. Do exame dos valores de α , em P e Q , nestas figuras, podemos concluir que

- (1) para um mesmo corpo, a discrepância entre direções principais estimadas e direções principais verdadeiras é tanto maior quanto maior for a distância entre o centro de massa estimado e o centro de massa verdadeiro, desde que P e Q estejam sobre uma mesma reta, contendo também esta reta o centro de massa, e não sendo ela coincidente com o eixo u ou com o eixo v . Se P estiver sobre um desses dois eixos, as direções principais estimadas irão coincidir com as direções principais verdadeiras não importando quão distante P possa estar do centro de massa verdadeiro;
- (2) para uma mesma estimativa de centro de massa, digamos P , a discrepância entre direções principais estimadas e direções principais verdadeiras é tanto menor quanto maior for a diferença $M_{uu} - M_{vv}$.

A extensão dessa análise, para um centro de expansão arbitrário $P(u', v', w')$, em que $w' \neq 0$, é possível, embora exija cálculos muito mais longos (e tediosos). Contudo, uma vez que o nosso objetivo é, apenas, estabelecer uma base teórica para entender estruturalmente o comportamento das direções principais com a posição do centro de expansão (visando fornecer subsídios para julgamento dos resultados numéricos), esta extensão não será realizada, pois já é possível concluir que a estimação das direções principais é controlada, fundamentalmente, pelas diferenças entre os momentos de inércia do corpo anômalo (medidos em torno dos eixos

principais), pela distância entre centro de massa estimado e centro de massa verdadeiro e pela direção, em relação às direções principais verdadeiras, da reta que une estes dois centros. Passaremos agora a descrever os algoritmos que serão utilizados nos exemplos de inversão a serem apresentados na Seção 3.4.

3.3 DESCRIÇÃO DOS ALGORITMOS

Três algoritmos serão utilizados nos exemplos de inversão. O primeiro se destina a obter *uma* estimativa dos momentos equivalentes e das três direções principais equivalentes, que passaremos a chamar de **estimativa pontual**. O segundo algoritmo tem por objetivo verificar, no entorno da estimativa pontual, a sensibilidade desta estimativa a erros contidos nas estimativas dos momentos de 2a. ordem equivalentes. O terceiro algoritmo tem por objetivo fazer uma análise de estabilidade dos momentos e das direções principais equivalentes. Denominaremos estes algoritmos, respectivamente, por Algoritmo de Estimção Pontual, Algoritmo de Análise de Sensibilidade e Algoritmo de Análise de Estabilidade. A seguir, descreveremos estes três algoritmos, tanto com o objetivo de facilitar a apresentação dos resultados dos exemplos de inversão, como de proporcionar condições de se reproduzirem estes resultados.

3.3.1 Algoritmo de Estimção Pontual

Este algoritmo consta de duas *fases*: a primeira é obter as estimativas dos momentos equivalentes e a segunda é calcular as direções principais equivalentes, uma vez conhecidas as estimativas desses momentos.

Para estimar os momentos equivalentes, usamos em duas *etapas* o Algoritmo de Gol'tsman, já apresentado na Seção 2.3.1. Na primeira etapa, aplicamos este algoritmo à equação similar à equação (3.5), mas retendo momentos só até 1a. ordem. O centro de expansão final desta etapa é então utilizado como centro de expansão inicial para resolver a equação (3.5). Denominaremos de **estimativas de ordens 1 e 2** as estimativas dos momentos equivalentes, que são obtidas na última iteração das etapas 1 e 2 de utilização do Algoritmo de Gol'tsman, respectivamente. Além disso, denominaremos de **aproximações de 1a. e de 2a. ordens** as aproximações obtidas para a anomalia observada com as estimativas dos momentos equivalentes de ordens 1 e 2, respectivamente. O uso destas duas etapas se deve ao fato de que as discrepâncias entre as estimativas de ordens 1 e 2 permite que se tenha uma idéia do grau de esfericidade do corpo anômalo. Esta informação é muito importante para a correta interpretação dos resultados da inversão, como veremos.

Por vezes, o Algoritmo de Gol'tsman não apresenta convergência em relação à estimativa de ordem 2 de z_{cm} e de todos os momentos a ela acoplados. Esta dificuldade é consequência da inadequação do *passo* de evolução do Algoritmo de Gol'tsman, ou seja, do passo de evolução do Método de Euler–Cauchy, para encontrar a solução estacionária do sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem, solução esta que especifica os momentos equivalentes. No entanto, é possível obter a solução estacionária para as estimativas de ordem 2, se modificarmos a fórmula de atualização na iteração $i + 1$ da estimativa de ordem 2 da profundidade do centro de massa $\hat{z}_{cm}^{i+1}$ (até então associada com a equação (2.21)) para

$$\hat{z}_{cm}^{i+1} = \frac{\hat{\mu}_z^i}{\hat{\mu}_0^i + C} \cdot l + \hat{z}_{cm}^i, \quad (3.43)$$

em que $\hat{\mu}_0^i$ e $\hat{\mu}_z^i$ são os momentos normalizados da iteração i de ordem zero e de 1a. ordem em z , respectivamente, $\hat{z}_{cm}^i$ é a estimativa de ordem 2 da profundidade do centro de massa da iteração i , l é a distância de normalização e C é uma constante de mesmo sinal que $\hat{\mu}_0^i$. Nesta situação, a introdução da constante C ocasiona uma evolução mais lenta ou “amortecida” para as estimativas de ordem 2, o que possibilita a obtenção de sua solução estacionária. Denominaremos de **versões amortecida e não amortecida** do Algoritmo de Estimação Pontual as versões deste algoritmo que utilizam as fórmulas (3.43) e (2.21), respectivamente, para determinar o passo de evolução das estimativas de ordem 2 de z_{cm} . A primeira tentativa de obtenção dos momentos equivalentes é feita sempre com a versão não amortecida do Algoritmo de Estimação Pontual. Caso a solução estacionária não seja atingida, fazemos a seguir outras tentativas com a versão amortecida do algoritmo, usando valores crescentes para a constante de amortecimento C , até que a solução estacionária seja alcançada.

Em cada iteração de qualquer uma das duas etapas e versões acima referidas, o cálculo dos momentos, a partir da equação (3.5), ou sua similar de 1a. ordem, foi efetuado com a subrotina SVA de LAWSON & HANSON (1974). Entre outros resultados, esta subrotina fornece as soluções de Inverso Generalizado do vetor $\bar{\mu}$ (LANCZOS, 1961) presumindo-se desde posto um até posto completo. Como estamos interessados na solução de mínimos quadrados para os momentos, adotamos para $\bar{\mu}$ a solução de posto completo (LANCZOS, 1961). É importante ressaltar que a subrotina SVA não demanda o cálculo da matriz de Gram $\bar{\Psi}^T \bar{\Psi}$ para a obtenção dos momentos, o que evita a degradação da precisão numérica advinda do pior condicionamento de $\bar{\Psi}^T \bar{\Psi}$ em relação ao de $\bar{\Psi}$.

Uma vez conhecidas as estimativas de ordem 2 dos momentos, em um centro de expansão qualquer, para estimar as direções principais neste centro, fazemos a decomposição em autovetores e autovalores da matriz $\bar{D}$, definida na equação (3.30). Os elementos da diagonal de $\bar{D}$ são obtidos usando um valor δ compatível com δ_{min} definido na inequação (3.38), ou

com δ_{max} definido na inequação (3.39), para contrastes de densidade positivos ou negativos, respectivamente. Os eixos principais maior, intermediário e menor são paralelos aos autovetores associados com os autovalores de $\overline{D}$ ordenados no sentido decrescente.

3.3.2 Algoritmo de Análise de Sensibilidade

O objetivo do Algoritmo de Análise de Sensibilidade é caracterizar, no entorno da estimativa pontual das direções principais equivalentes, a sensibilidade desta estimativa a erros contidos nas estimativas dos momentos de 2a. ordem equivalentes.

Vamos definir, a partir das equações (3.28) e (3.29), as funções $f_1 \equiv f_1(\alpha', \beta')$ e $f_2 \equiv f_2(\alpha', \beta')$ como

$$f_1 = \cos \beta' R - \sin \beta' T, \quad (3.44)$$

$$f_2 = \sin 2\beta' (D_{xx} - Q) + \cos 2\beta' P, \quad (3.45)$$

em que $P, Q, R, T, D_{yx}, D_{zx}$ e D_{zy} estão definidos nas equações (3.20) a (3.26), respectivamente, e α' e β' variam de -90° a 90° .

As interseções das curvas de isovalor igual a zero das funções f_1 e f_2 , definidas nas equações (3.44) e (3.45), respectivamente, são as soluções α e β do sistema de equações (3.28) e (3.29). Estas interseções, juntamente com os correspondentes valores de γ (calculados pela equação (3.27)), especificam as direções principais equivalentes.

Vamos relaxar a condição de que somente as interseções acima definidas sejam soluções do sistema de equações (3.28) e (3.29). Para tanto, vamos também aceitar as soluções aproximadas que são permitidas pela presença de erros nas estimativas dos momentos de 2a. ordem equivalentes. Estas soluções aproximadas podem ser especificadas através dos pares de ângulos α e β , para os quais sejam simultaneamente válidas as desigualdades

$$|f_1(\alpha', \beta')| \leq L, \quad (3.46)$$

$$|f_2(\alpha', \beta')| \leq L, \quad (3.47)$$

em que L é um número positivo próximo de zero. Vamos admitir também que, sendo L pequeno, a equação (3.27) continue válida para estimar γ . O conjunto de ângulos α, β e γ assim obtidos especificam as rotações que levam a distribuição de massa equivalente a posições espaciais *muito próximas* daquelas que são obtidas das soluções exatas do sistema de equações (3.28) e (3.29). Assim, representadas em conjunto num estereograma de igual área, estas trincas de ângulos revelam a sensibilidade da estimativa pontual dos eixos principais equivalentes a erros nos momentos de 2a. ordem equivalentes.

Os pares de ângulos α e β que satisfazem simultaneamente as desigualdades (3.46) e (3.47) podem ser facilmente obtidos. Para tanto, basta testar sistematicamente estas desigualdades em pontos de uma malha regular, cobrindo toda a região fisicamente admissível do plano $\alpha' - \beta'$, e armazenar somente os pontos que a satisfazem. Observemos que a análise de sensibilidade tem a deficiência de não reconhecer a ordem relativa de importância dos eixos principais equivalentes. Não obstante, como esta ordem relativa é reconhecida pelo Algoritmo de Estimação Pontual, não há perda de informação.

3.3.3 Algoritmo de Análise de Estabilidade

Dada uma anomalia gravimétrica, para caracterizar se a aplicação à mesma do método de inversão em estudo é um problema bem-posto, no sentido de HADAMARD (1902), precisamos investigar se as estimativas obtidas são estáveis em relação a pequenas perturbações da anomalia. Analiticamente, este é um problema muito difícil de ser abordado. Contudo, é possível tratá-lo numericamente de maneira muito simples. Para tanto, é suficiente obter um conjunto de N de estimativas pontuais de ordem 2 dos momentos equivalentes, contaminando, a cada vez, a anomalia observada com uma sequência *diferente* de ruído pseudo-aleatório. Estas seqüências de ruído podem simular, por exemplo, erros experimentais de medição da anomalia gravimétrica. As N estimativas pontuais de ordem 2 dos momentos equivalentes (e grandezas obtidas a partir das mesmas) revelam, pela sua variabilidade, se estas estimativas são ou não estáveis.

O Algoritmo de Análise de Estabilidade é o algoritmo que obtém o conjunto acima definido de N estimativas pontuais de ordem 2 dos momentos equivalentes. Este algoritmo se constitui, pois, da aplicação sucessivas vezes do Algoritmo de Estimação Pontual, uma para cada contaminação diferente da anomalia gravimétrica. Todavia, para evitar desperdício de tempo de computação, somente na primeira contaminação da anomalia gravimétrica usamos a primeira etapa do Algoritmo de Estimação Pontual (que obtém as estimativas de ordem 1 dos momentos equivalentes). Da segunda contaminação em diante, o centro de expansão inicial, para obter as estimativas de ordem 2 dos momentos equivalentes, passa a ser a estimativa de ordem 2 do centro de massa equivalente da contaminação anterior.

Para contaminar a anomalia gravimétrica, adicionamos à mesma diferentes seqüências de ruído pseudo-aleatório seguindo uma distribuição Gaussiana de média nula. Estas seqüências de ruído foram geradas com a subrotina URANDN de FORSYTHE et al. (1977). Devemos ressaltar que em cada nova contaminação da anomalia, a seqüência de ruído aleatório a ser utilizada substitui e não se soma à seqüência de ruído da contaminação anterior.

3.4 EXEMPLOS DE INVERSÃO COM DADOS SINTÉTICOS

Apresentamos, nesta seção, dez exemplos de inversão de anomalias gravimétricas tridimensionais sintéticas. Nestes exemplos, as anomalias foram geradas por prismas, esferas, troncos de pirâmides e distribuições aleatórias de massas pontuais. As anomalias geradas com os corpos de geometria regular podem simular, por exemplo, anomalias causadas por batólitos de granito. Por outro lado, o exemplo com as distribuições aleatórias de massas pontuais pode simular um caso de prospecção mineral.

No primeiro exemplo, investigaremos qual deve ser a relação entre o raio da esfera de menor volume que contém as fontes e a profundidade do centro de massa, para que a condição de fonte distante das observações seja satisfeita. Nos nove exemplos restantes, os corpos anômalos utilizados satisfazem esta condição.

No segundo exemplo, vamos discutir os resultados da inversão para um prisma de contraste de densidade uniforme e de lados diferentes. A seguir, do terceiro ao oitavo exemplo, mudaremos parâmetros do corpo anômalo, da malha de geração do campo e do ruído de contaminação da anomalia para verificar quais são os seus efeitos nas estimativas dos momentos e grandezas deles derivadas. No nono e no décimo exemplos, investigaremos quais são os efeitos provocados pela presença de um corpo raso e pela adição, em todos os pontos de medida, de uma constante ao campo observado, respectivamente.

3.4.1 Exemplo Gravimétrico 1: investigação da condição de fonte distante das observações

Vamos estabelecer, do ponto de vista da inversão, o critério de que, para um corpo de volume finito e convexo, que tem três planos mutuamente ortogonais de simetria na distribuição de massa e cuja anomalia é conhecida de maneira exata, a condição de fonte distante das observações está satisfeita quando a maior discrepância ϵ entre estimativas de ordem 2 e respectivas grandezas verdadeiras for igual ou inferior a 5%. Vamos investigar, a seguir, qual é a relação entre o raio da esfera de menor volume que contém as fontes, e a profundidade do centro de massa, que se obtém como consequência deste critério. Por simplicidade, vamos usar um prisma de lados paralelos ao sistema de coordenadas x , y e z , de modo a produzir grandes discrepâncias entre estimativas e valores verdadeiros apenas em relação ao parâmetro z_{cm} .

Seja um prisma com contraste de densidade uniforme de $0,2 \text{ g/cm}^3$ e dimensões 10 km, 3 km e 2 km, ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. Assim, cada lado do prisma define

Tabela 3.2 - Exemplo Gravimétrico 1: resultados do Algoritmo de Estimção Pontual para a profundidade de centro de massa do prisma. ϵ é o erro relativo percentual entre a estimativa pontual de ordem 2 e o valor verdadeiro da profundidade de centro de massa.

valor verdadeiro (km)	est. pontual de ordem 1 (km)	est. pontual de ordem 2 (km)	ϵ (%)
1,5	3,38	2,81	87,53
2,0	3,74	3,11	55,28
3,0	4,48	3,78	25,87
4,0	5,27	4,55	13,74
5,0	6,11	5,40	8,05
6,0	6,70	6,31	5,10
7,0	7,90	7,24	3,45
8,0	8,83	8,20	2,46
9,0	9,78	9,16	1,83
10,0	10,73	10,14	1,40

uma direção principal verdadeira, calculada em relação ao seu centro de massa. A projeção do centro de massa no plano $x - y$ é o ponto (15, 15) em km. A malha de geração do campo tem 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km tanto em x quanto em y , e está centrada no ponto (15, 15) em km.

Vamos variar a profundidade do centro de massa do prisma desde 1,5 km até 10,0 km, usando os valores indicados na Tabela 3.2. Cada valor de z_{cm} identificará um caso. Utilizando, em todos os casos, o ponto (14, 14, 5) em km como centro de expansão inicial, obtivemos as estimativas pontuais de profundidade de centro de massa apresentadas na Tabela 3.2. Desta tabela, podemos concluir que a condição de fonte distante das observações foi atingida em torno de $z_{cm} = 6,0$ km. Assim, esta condição foi satisfeita quando a profundidade do centro de massa se tornou superior ao raio da esfera de menor volume que contém o prisma, que é igual a 5 km.

Observemos que a progressiva concordância das estimativas de ordens 1 e 2 de z_{cm} (Tabela 3.2), à medida que o valor verdadeiro desta grandeza aumenta, é um fator diagnóstico, que pode ser usado em dados reais, de que a satisfação da condição de fonte distante das observações está próxima. Nas Figuras 3.5, 3.6 e 3.7 mostramos a superposição do campo do prisma e de sua aproximação de 2a. ordem nos casos em que a profundidade de centro de massa é igual a 1,5 km, 3,0 km e 6,0 km, respectivamente. De acordo com estas figuras, à medida que a profundidade de centro de massa aumenta, o ajuste entre o campo do prisma e

a sua aproximação de 2a. ordem melhora. Além disso, observemos, nas Figuras 3.5 e 3.6, que quando a condição de fonte distante das observações não está satisfeita, a aproximação de 2a. ordem apresenta uma forte influência dos termos de de 2a. ordem, conforme é revelado pela tendência a ser produzido um campo com dois máximos, ao invés de um único máximo, como a anomalia do prisma. Este é um fator diagnóstico da violação da condição de fonte distante das observações, que também pode ser usado em dados reais.

Vamos colocar agora o seguinte problema: na hipótese de que a anomalia do prisma gerada com $z_{cm} = 1,5$ km (Figura 3.5) seja fornecida a um intérprete como uma anomalia *real*, como este intérprete poderia inferir que a condição de fonte distante das observações não estava satisfeita para a mesma e, além disso, obter uma estimativa melhor da profundidade de centro de massa da fonte desta anomalia? A resposta a este problema pode ser obtida do exame das Figuras 3.8.a a 3.8.d, especialmente desta última figura que mostra a variação de $\hat{z}_{cm} - h$ como função de h , em que $\hat{z}_{cm}$ é a estimativa pontual de ordem 2 obtida para a profundidade de centro de massa, em cada caso mostrado na Tabela 3.2, e $h = z_{cm} - 1,5$, em km, para o caso correspondente. Uma vez que a anomalia gerada com $z_{cm}=4,0$ km, por exemplo, é a continuação para cima, de uma altura $h=2,5$ km, da anomalia gerada com $z_{cm}=1,5$ km, as Figura 3.8.a a 3.8.d retratam os efeitos provocados, pela continuação para cima da anomalia “real”, em σ_2 e nas estimativas de ordem 2 de m_0 , x_{cm} e y_{cm} , e $z_{cm} - h$, respectivamente, em função da altitude h (conhecida) de continuação para cima. σ_2 é o erro médio quadrático do resíduo entre a anomalia do prisma e a sua aproximação de 2a. ordem.

Assim, podemos constatar nas Figuras 3.8.a e 3.8.d que, à medida que h cresce, σ_2 diminui rapidamente e $\hat{z}_{cm} - h$ converge lentamente para o valor verdadeiro da profundidade de centro de massa do prisma causador da anomalia “real”. Desse modo, o intérprete poderia inferir que a condição de fonte distante das observações não estava satisfeita e, ao mesmo tempo, obter uma estimativa mais precisa da profundidade do centro de massa de sua fonte. Além disso, observemos que, à medida que h aumenta, as estimativas de m_0 se aproximam do valor verdadeiro e as estimativas de x_{cm} e y_{cm} permanecem constantes, conforme mostram as Figuras 3.8.b e 3.8.c, respectivamente.

Contudo, existe um preço a ser pago nesta otimização da distância fonte—observações: a perda de resolução na estimação de alguns parâmetros. Para confirmar este fato, apresentamos nas Figuras 3.9, 3.10 e 3.11, as análises de sensibilidade das estimativas pontuais das direções principais equivalentes, nos casos em que h é igual a 0,0 km, 1,5 km e 4,5 km, respectivamente. Estas figuras foram obtidas usando-se $L = 10^{-3}$ mGal para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47). Estas figuras revelam que, à medida que h aumenta, há perda de resolução nas estimativas das direções principais equivalentes associadas aos lados

do prisma que medem 3 km e 2 km.

Ao invés de continuar para cima a anomalia, buscando satisfazer a condição de fonte distante das observações, o intérprete poderia seguir outra abordagem. Esta abordagem é a de adicionar momentos de 3a. ordem e superiores à equação (3.4), buscando adaptar a máxima ordem dos momentos à anomalia em estudo, e não adaptar a distância fonte—observações à série truncada em momentos de 2a. ordem. Na verdade, a abordagem de adicionar momentos à série é a abordagem *ideal*, desde que se respeitasse o compromisso resolução versus estabilidade, pois dessa forma se utilizaria toda a informação disponível na anomalia. Todavia, para manter a tese dentro de limites factíveis, preferimos não investigar esta abordagem deixando-a, como sugestão, para futuros trabalhos.

Para assegurar validade à representação de um campo estático pela série truncada obtida da sua expansão em multipolos, REITZ & MILFORD (1964) indicaram a regra geral de que o raio da esfera de menor volume que contém a fonte deve ser *pequeno* quando comparado com as distâncias aos pontos de observação. Neste exemplo, mostramos que, para a série truncada em momentos de 2a. ordem, é suficiente que o raio definido por REITZ & MILFORD (1964) seja menor (e não muito menor) que a profundidade do centro de massa.

3.4.2 Exemplo Gravimétrico 2: prisma de lados diferentes

O prisma usado tem contraste de densidade uniforme de $0,4 \text{ g/cm}^3$, dimensões de 2 km, 4 km e 6 km e centro em (14, 16, 5) em km. As direções dos lados do prisma estão indicadas na Figura 3.12. Cada lado do prisma define uma direção principal verdadeira, calculada em relação ao seu centro de massa. Esta posição espacial do prisma foi obtida usando os valores 45° , 10° e 10° para a trinca de ângulos de Euler α , β e γ , respectivamente definidos na Seção 3.2.1. A malha de geração do campo tem 31×31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, tanto em x quanto em y , e está centrada no ponto (15, 15, 0) em km. A anomalia gravimétrica do prisma foi calculada com o algoritmo de POHÁNKÁ (1988) e contaminada com ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão σ_C igual a 0,1 mGal. Observemos que σ_C corresponde a cerca de 1,8% do valor máximo da anomalia. A anomalia resultante está mostrada na Figura 3.13. Por simplicidade, passaremos a adjetivar de observada (ou observado) este anomalia (ou campo). Além disso, vamos definir σ_1 (σ_2) como o erro médio quadrático do resíduo entre o campo observado e a sua aproximação de 1a. (2a.) ordem.

Para inicializar o Algoritmo de Estimação Pontual, usamos como centro de expansão o ponto (15, 15, 2) em km. A aproximação de 1a. ordem obtida para o campo observado está mostrada na Figura 3.14. As evoluções de σ_1 e das estimativas de ordem 1 para a massa

Tabela 3.3 - Exemplo Gravimétrico 2: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro	19,20	14,00	16,00	5,00
estimativa pontual de ordem 1	18,44	13,93	15,66	4,66
estimativa pontual de ordem 2	19,55	13,97	16,01	5,22
média das estimativas de ordem 2	19,39	14,03	16,08	5,13
σ_A das estimativas de ordem 2	0,16	0,06	0,05	0,08

anômala total e coordenadas de centro de massa estão apresentadas nas Figuras 3.15.a a 3.15.d. Se o modelo interpretativo é correto e sob certas premissas estatísticas (BECK & ARNOLD, 1977), σ_1 e σ_2 são estimadores tendenciosos do desvio padrão da variável aleatória que descreve estatisticamente os erros contidos nos dados.

Observemos na Figura 3.15.a que o valor final de σ_1 é praticamente igual ao de σ_C (que foi de 0,1 mGal). Desse modo, o campo da esfera se constitui numa boa aproximação para o campo do prisma. Em consequência, a estimativa de ordem 1 para a massa anômala total é uma boa estimativa do valor verdadeiro desta massa, como se pode constatar na Tabela 3.3. Todavia, o fato de que a estimativa de ordem 1 de m_0 seja uma boa estimativa do valor verdadeiro, não significa que as demais estimativas de ordem 1, especialmente a de z_{cm} , também o sejam. Para este exemplo particular, no entanto, todas as estimativas de ordem 1 estão bastante próximas dos valores verdadeiros (Tabela 3.3).

A aproximação de 2a. ordem para o campo observado está também mostrada na Figura 3.14. As evoluções de σ_2 e das estimativas de ordem 2 para a massa anômala total e coordenadas de centro de massa estão apresentadas nas Figuras 3.16.a a 3.16.d. Os resultados do Algoritmo de Análise de Estabilidade para estas grandezas estão mostrados nas Figuras 3.17.a a 3.17.d e sintetizados na Tabela 3.3. Do exame desta tabela, podemos concluir que as estimativas pontuais de ordem 2 estão muito próximas dos valores verdadeiros, além de serem estáveis. A evolução das estimativas das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.12. Esta figura revela que a estimativa pontual das direções principais equivalentes está também muito próxima dos valores verdadeiros.

Para decidir que estimativas (ordem 1 ou ordem 2) serão adotadas, vamos estabelecer dois

critérios: primeiro, se houve *diferenças significativas* das estimativas pontuais de ordem 2, em relação às de ordem 1, da massa anômala total ou das coordenadas de centro de massa, e segundo (e mais importante), se houve *insensibilidade ou estabilidade* nas estimativas das direções principais equivalentes. Vamos aplicar o primeiro critério. Observemos na Tabela 3.3 que há uma diferença considerável entre as estimativas pontuais de ordens 1 e 2 de z_{cm} . Esta diferença revela que as contribuições dos momentos de 2a. ordem podem ser importantes.

Vamos aplicar o segundo critério. A análise de sensibilidade da estimativa pontual das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.18. Esta figura foi obtida usando-se $L = 10^{-3}$ mGal para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47). Do exame da Figura 3.18, podemos concluir que a estimativa pontual das direções principais equivalentes é bastante *insensível* a presença de erros nas estimativas dos momentos de 2a. ordem equivalentes. Em outras palavras, é muito pequena a área no estereograma (de igual área) que especifica as posições em que a distribuição equivalente de massa assume atitudes espaciais muito próximas das estimadas. Desse modo, podemos inferir que o corpo anômalo tem diferenças significativas entre os seus momentos de inércia medidos em torno dos eixos principais. A análise de estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.19. De seu exame, podemos assegurar que estas estimativas são estáveis e que a distribuição de massa equivalente tem realmente diferenças significativas entre os seus momentos de inércia medidos em torno dos eixos principais. Portanto, podemos concluir que as estimativas pontuais de ordem 2 dos momentos equivalentes são preferíveis às de ordem 1. Além disso, uma vez que o prisma tem três planos mutuamente ortogonais de simetria, os parâmetros obtidos das estimativas de ordem 2 dos momentos equivalentes expressam atributos reais do corpo anômalo.

Para evidenciar que o critério de ajuste entre os campos observado e teórico é um critério necessário, mas não suficiente, para estimar os momentos equivalentes, vamos reexaminar a Figura 3.16.a. Desta figura podemos constatar que σ_2 permanece praticamente constante em todas as iterações do Algoritmo de Estimação Pontual. Se ficassemos, pois, restritos somente ao critério de ajuste entre estes dois campos, poderíamos aceitar como solução o conjunto dos momentos estimados em qualquer uma dessas iterações. Lembremos, no entanto, que os momentos equivalentes são definidos através da propriedade da invariância com as iterações das estimativas das coordenadas do centro de massa. Muitas vezes, inclusive neste exemplo, o particular valor de σ_2 em que esta propriedade é satisfeita, não coincide com o mínimo de σ_2 no conjunto de todas as iterações.

Vamos agora evidenciar qual a razão de ter havido estabilidade nas estimativas das direções principais equivalentes. Para tanto, vamos rever na Figura 3.14 a superposição

das aproximações de 1a. e de 2a. ordens. Nesta figura podemos observar que a aproximação de 2a. ordem tem *gradientes não uniformes*, ao contrário da aproximação de 1a. ordem que é o campo da esfera. As direções principais equivalentes são estimadas graças a esta não uniformidade, com direção, dos gradientes da aproximação de 2a. ordem, que é uma característica do campo (livre de ruído) do prisma. Assim sendo, só houve estabilidade nas estimativas das direções principais equivalentes porque a não uniformidade do gradiente do campo do prisma foi suficientemente preservada, mesmo após a adição do ruído.

Duas questões agora naturalmente se colocam: primeira, se a anomalia tivesse gradientes uniformes antes da adição do ruído, seria possível reconhecer este fato?; e segunda, até que nível de ruído e espaçamento da grade de observação do campo será possível estimar, de maneira estável, as direções principais equivalentes? Os quatro próximos exemplos, a seguir, se destinam ao estudo destas questões.

3.4.3 Exemplo Gravimétrico 3: prisma com dois lados iguais

Vamos usar agora um prisma de lados 2 km, 2 km e 6 km. Todos os demais parâmetros do modelo, bem como de controle dos algoritmos, são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2. A anomalia gerada e a sua aproximação de 2a. ordem estão mostradas nas Figura 3.20 e 3.21, respectivamente.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 para a massa anômala total e coordenadas de centro de massa estão mostradas na Tabela 3.4. Todas estas estimativas são muito boas. A análise de estabilidade para as estimativas de ordem 2 da massa anômala total e coordenadas de centro de massa está sintetizada na Tabela 3.4. De seu exame, podemos concluir que estas estimativas são estáveis.

Antes de discutir as estimativas das direções principais, observemos que qualquer eixo contido na face quadrada do prisma, que passe pelo centro da face, é um eixo principal do prisma, calculado em relação ao seu centro de massa. Ou seja, a face quadrada do prisma (Figura 3.22) define um **plano de degenerescência** (GOLDSTEIN, 1959) para as direções dos eixos principais verdadeiros intermediário e menor do prisma. Além disso, o maior lado do prisma define a direção do eixo principal verdadeiro maior, calculada em relação ao centro de massa.

A estimativa pontual para as direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.22. Nesta figura, constatamos que a estimativa obtida para a direção do eixo principal equivalente maior é uma boa aproximação da direção do eixo principal verdadeiro maior. Além disso, as duas outras estimativas das direções dos eixos principais equivalentes estão

Tabela 3.4 - Exemplo Gravimétrico 3: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro	9,60	14,00	16,00	5,00
estimativa pontual de ordem 1	9,40	13,88	15,45	4,81
estimativa pontual de ordem 2	9,63	13,92	15,87	5,02
média das estimativas de ordem 2	9,51	14,02	15,98	4,90
σ_A das estimativa de ordem 2	0,13	0,09	0,08	0,11

aproximadamente contidas na face quadrada do prisma.

A Figura 3.23 mostra a análise de sensibilidade da estimativa pontual das direções principais equivalentes. Desta figura, podemos concluir que a distribuição de massa equivalente apresenta, como o prisma, um plano de degenerescência para as direções dos eixos principais equivalentes intermediário e menor.

A análise de estabilidade para as direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.24. Esta figura confirma que a distribuição de massa equivalente tem realmente dois momentos de inércia equivalentes iguais. Além disso, a Figura 3.24 revela também que a estimativa da direção do eixo principal equivalente maior é estável.

3.4.4 Exemplo Gravimétrico 4: esfera

Vamos usar agora uma esfera de raio igual a 2,46 km. Todos os demais parâmetros do modelo, bem como de controle dos algoritmos, são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2. A anomalia gerada está mostrada na Figura 3.25 e as suas aproximações de 1a. e de 2a. ordens estão mostradas na Figura 3.26.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 para a massa anômala total, e para as coordenadas de centro de massa, são praticamente iguais entre si, além de serem muito próximas dos valores verdadeiros, como se pode ver na Tabela 3.5. Assim sendo, é possível que a distribuição de massa equivalente não precise dos momentos de 2a. ordem para ser especificada. A análise de estabilidade para as estimativas de ordem 2 da massa anômala total

Tabela 3.5 - Exemplo Gravimétrico 4: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro	24,94	14,00	16,00	5,00
estimativa pontual de ordem 1	24,98	14,01	15,99	5,01
estimativa pontual de ordem 2	25,03	13,97	15,94	5,03
média das estimativas de ordem 2	24,94	14,01	16,00	5,00
σ_A das estimativas de ordem 2	0,14	0,03	0,03	0,05

e coordenadas de centro de massa está sintetizada na Tabela 3.5. De seu exame, podemos concluir que estas estimativas são estáveis.

A estimativa pontual das direções principais equivalentes e as análises de sensibilidade e de estabilidade destas direções estão mostradas nas Figuras 3.27, 3.28 e 3.29, respectivamente. Estas duas análises revelam que a estimativa pontual não tem nenhum significado. Este resultado é esperado, pois, para uma esfera de densidade uniforme, qualquer eixo que passe pelo seu centro de massa define uma direção verdadeira principal calculada em relação a este centro.

A estimativa pontual das direções principais equivalentes (Figura 3.27) está quase que somente relacionada à particular sequência de ruídos adicionada à anomalia. Este ruído faz com que a estimativa pontual do centro de massa deixe de coincidir com o centro verdadeiro e, assim, a direção da reta que une estes dois centros define uma direção principal para a distribuição equivalente de massa, como mostramos na Seção 3.2.3. Todavia, nesta situação, as análises de sensibilidade e de estabilidade revelam que o corpo anômalo tem infinitos eixos principais verdadeiros.

3.4.5 Exemplo Gravimétrico 5: mudança no nível de ruído da anomalia, em relação ao do Exemplo Gravimétrico 2

Vamos mudar o nível de contaminação por ruído da anomalia do Exemplo Gravimétrico 2 para $\sigma_C = 0,3$ mGal, tanto no Algoritmo de Estimativa Pontual, como no Algoritmo de Análise de Estabilidade. σ_C é agora cerca de 5,5% do valor máximo da anomalia. Todos

Tabela 3.6 - Exemplo Gravimétrico 5: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro	19,20	14,00	16,00	5,00
estimativa pontual de ordem 1	18,52	13,94	15,63	4,70
estimativa pontual de ordem 2	19,92	13,82	15,85	5,43
média das estimativas de ordem 2	19,39	14,05	16,08	5,14
σ_A das estimativas de ordem 2	0,49	0,19	0,16	0,24

os demais parâmetros do modelo, bem como de controle dos algoritmos, são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2. A anomalia gerada e a sua aproximação de 2a. ordem estão mostradas nas Figuras 3.30 e 3.31, respectivamente.

As estimativas pontuais de ordem 2 da massa anômala total, e das coordenadas de centro de massa, estão muito próximas dos valores verdadeiros, além de serem estáveis, como revela a Tabela 3.6. A estimativa pontual das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.32. Comparadas com os valores verdadeiros, as direções dos três eixos desta estimativa não são boas. Não obstante, a análise de sensibilidade da estimativa pontual, mostrada na Figura 3.33, revela que existem discrepâncias significativas entre os momentos de inércia da distribuição equivalente de massa (medidos em torno dos eixos principais). Esta interpretação é também compatível com o fato de que as estimativas pontuais de z_{cm} de ordens 1 e 2 sejam bastante diferentes (Tabela 3.6).

Por sua vez, a análise de estabilidade para as direções principais equivalentes, mostrada na Figura 3.34, indica que ainda há, para o nível de ruído em estudo, uma certa estabilidade nas estimativas dessas direções, especialmente em relação à direção do eixo principal equivalente maior. Notemos que a estabilidade nas estimativas deste eixo é ainda expressiva, principalmente quando se leva em conta que um ruído com desvio padrão $\sigma_C = 0,3$ mGal já é bastante grande, podendo simular, por exemplo, erros de medida em um levantamento gravimétrico cuja altimetria tenha incerteza de 1 metro. Além disso, a Figura 3.34 mostra também que a estimativa pontual das direções principais equivalentes, mostrada na Figura 3.32, caiu fortuitamente no extremo da classe das direções amostradas. Isso revela, mais uma vez, a não representatividade que uma particular sequência de ruídos pode introduzir numa

estimativa pontual e a utilidade das análises de sensibilidade e de estabilidade em diminuir o risco de se usarem apenas estimativas pontuais.

Em resumo, para este nível de ruído ainda foi possível distinguir, pelo menos, a direção do eixo principal equivalente maior.

3.4.6 Exemplo Gravimétrico 6: mudança do espaçamento da malha de geração da anomalia, em relação à do Exemplo Gravimétrico 2

Vamos usar agora uma malha com 9×9 pontos, igualmente espaçados de 4 km, tanto em x quanto em y , e centrada no ponto (16, 16, 0) em km. Além disso, vamos diminuir o nível de contaminação com ruído da anomalia para $\sigma_C = 0,05$ mGal, tanto no Algoritmo de Estimção Pontual como no Algoritmo de Análise de Estabilidade. Todos os demais parâmetros do modelo (inclusive, de forma aproximada, a área de cobertura da anomalia), bem como de controle dos algoritmos, são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2. A anomalia gerada e a sua aproximação de 2a. ordem estão mostradas nas Figuras 3.35 e 3.36, respectivamente.

As estimativas de ordens 1 e 2 obtidas para a massa anômala total, e para as coordenadas de centro de massa, são boas estimativas dos valores verdadeiros, além de serem estáveis, como revela a Tabela 3.7. A estimativa pontual das direções principais equivalentes, mostrada na Figura 3.37, contém aproximações razoáveis dos valores verdadeiros. Além disso, a análise de sensibilidade da estimativa pontual, mostrada na Figura 3.38, revela que existem discrepâncias significativas entre os momentos de inércia da distribuição equivalente de massa (medidos em torno dos eixos principais). Como nos exemplos anteriores, essa interpretação foi consistente com o fato de que as estimativas pontuais de ordens 1 e 2 de z_{cm} sejam bastante diferentes (Tabela 3.7). Por sua vez, a análise de estabilidade para as direções principais equivalentes, apresentada na Figura 3.39, mostra que ainda há estabilidade nas estimativas dessas direções.

Observemos que a malha de cobertura deste exemplo foi esparsa o suficiente para deformar a anomalia (compare a Figura 3.35 com a Figura 3.13). Esta deformação ocorreu porque o máximo da anomalia na direção y foi amostrado, ao passo que na direção x ele não foi. Todavia, mesmo com esta malha esparsa (mas em que os valores de campo são de alta precisão), foi possível estimar, de maneira estável, as direções principais equivalentes.

Tabela 3.7 - Exemplo Gravimétrico 6: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro	19,20	14,00	16,00	5,00
estimativa pontual de ordem 1	19,04	13,89	15,73	4,87
estimativa pontual de ordem 2	19,84	13,85	15,98	5,33
média das estimativas de ordem 2	19,29	13,99	16,01	5,08
σ_A das estimativas de ordem 2	0,39	0,11	0,10	0,20

3.4.7 Exemplo Gravimétrico 7: tronco de pirâmide

Para simular uma situação em que a distribuição de massa não é simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais, vamos usar como corpo anômalo o tronco de pirâmide mostrado na Figura 3.40. A malha de geração da anomalia, o ruído de contaminação da mesma e todos os parâmetros de controle dos algoritmos são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2. A anomalia observada e a sua aproximação de 2a. ordem estão mostradas nas Figura 3.41 e 3.42, respectivamente.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 para a massa anômala total, e para as coordenadas de centro de massa, estão mostradas na Tabela 3.8, juntamente com os valores verdadeiros dessas grandezas. Do exame desta tabela, podemos constatar que todas as estimativas pontuais de ordem 2 estão bastante próximas dos valores verdadeiros e que a estimativa pontual de ordem 2 de maior erro relativo é a de z_{cm} . Além disso, observemos que tanto a estimativa pontual de ordem 1, quanto a de ordem 2 de z_{cm} , são maiores que o valor verdadeiro e que esta última estimativa está mais próxima do valor verdadeiro do que a primeira.

A análise de estabilidade para as estimativas de ordem 2 da massa anômala total, e das coordenadas de centro de massa, está sintetizada na Tabela 3.8. De seu exame podemos concluir que as estimativas são estáveis. Além disso, podemos constatar, comparando as Tabelas 3.3 a 3.7 com a Tabela 3.8, que foi neste exemplo que ocorreu a maior discrepância entre o valor verdadeiro de z_{cm} e a média de suas estimativas de ordem 2, como consequência da falta de simetria do tronco de pirâmide em relação a um plano horizontal.

Uma vez que o tronco de pirâmide tem bases quadradas e paralelas ao plano horizontal,

Tabela 3.8 - Exemplo Gravimétrico 7: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro	35,00	14,00	16,00	5,32
estimativa pontual de ordem 1	38,41	14,00	15,99	6,43
estimativa pontual de ordem 2	36,13	13,97	15,96	5,76
média das estimativas de ordem 2	36,03	14,00	16,00	5,74
σ_A das estimativas de ordem 2	0,14	0,03	0,03	0,03

este plano é um plano de degenerescência para as direções dos eixos principais verdadeiros maior e intermediário. Além disso, a direção vertical é a direção do eixo principal verdadeiro menor. Tendo estes fatos em mente, vamos examinar a estimativa pontual das direções principais equivalentes, que está mostrada na Figura 3.43. Nesta figura, constatamos que há boa concordância da estimativa da direção do eixo principal equivalente menor com o eixo vertical do tronco de pirâmide e que as estimativas das direções dos eixos principais equivalentes maior e intermediário estão aproximadamente situadas no plano horizontal. Houve boa concordância entre a estimativa da direção do eixo principal equivalente menor e a respectiva direção verdadeira, apesar do centro de massa estimado e verdadeiro não coincidirem, porque a estimativa do centro de massa se situou sobre um eixo principal verdadeiro do tronco de pirâmide. Quando isso ocorre, boas estimativas das direções principais verdadeiras podem ser obtidas, como mostramos na Seção 3.2.3.

As análises de sensibilidade e de estabilidade, para as direções principais equivalentes, estão mostradas nas Figuras 3.44 e 3.45, respectivamente. Estas análises evidenciam que somente a estimativa da direção do eixo principal equivalente menor tem significado, além de ser estável.

Como resumo deste exemplo, podemos concluir que o método de inversão em estudo é estável em relação à validade da informação a priori de que a distribuição de massa é simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais.

Tabela 3.9 - Exemplo Gravimétrico 8: resultados obtidos para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^6 kg)	x_{cm} (m)	y_{cm} (m)	z_{cm} (m)
valor verdadeiro	201,07	85,29	85,39	49,94
estimativa pontual de ordem 1	194,66	80,87	80,66	47,25
estimativa pontual de ordem 2	198,16	84,52	84,30	48,35
média das estimativas de ordem 2	197,41	84,91	85,10	48,21
σ_A das estimativas de ordem 2	1,57	0,48	0,43	0,55

3.4.8 Exemplo Gravimétrico 8: distribuições aleatórias de massas pontuais

Vamos usar agora como corpo anômalo o modelo de “nuvens” de pontos mostrado na Figura 3.46. Em cada uma das três nuvens desta figura existem mil pontos, cada ponto representando uma pequena esfera de 2 m de raio e contraste de densidade igual a 2 g/cm^3 . As coordenadas desses pontos seguem distribuições Gaussianas independentes centradas nos pontos (75, 75, 35), (85, 85, 50) e (96, 96, 65) em metros. Além disso, todas as três nuvens têm desvios padrões nas distribuições das coordenadas x , y e z de seus pontos iguais a $\sigma_x = 3,5$ m, $\sigma_y = 3,5$ m e $\sigma_z = 2,0$ m, respectivamente. Estas três nuvens podem representar, por exemplo, mineralizações ao longo de um sistema de fraturas planas paralelas. As direções principais verdadeiras do conjunto das nuvens estão mostradas na Figura 3.47. O campo anômalo gerado pelo modelo, após a adição de uma sequência de ruído com $\sigma_C = 20 \mu\text{Gal}$, está mostrado na Figura 3.48. Para gerar este campo, utilizamos uma malha com 35×35 pontos igualmente espaçados de 5 m, tanto em x quanto em y .

Para inicializar o Algoritmo de Estimção Pontual, usamos como centro de expansão o ponto (75, 75, 35) em metros. A aproximação de 2a. ordem obtida para o campo observado está mostrada na Figura 3.49. As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 obtidas para a massa anômala total e para as coordenadas de centro de massa estão mostradas na Tabela 3.9, juntamente com os valores verdadeiros e os resultados do Algoritmo de Análise de Estabilidade. Do exame desta tabela, podemos concluir que as estimativas pontuais de ordem 2 estão muito próximas dos valores verdadeiros, além de serem estáveis. Assim, a estimativa pontual de ordem 2 da massa anômala total pode servir de base para a cubagem da jazida.

A estimativa pontual das direções principais equivalentes, mostrada na Figura 3.47, contém boas estimativas dos valores verdadeiros. Contudo, a análise de sensibilidade para as mesmas, mostrada na Figura 3.50, evidencia que as direções dos eixos principais equivalentes intermediário e menor são sensíveis a presença de erros nos momentos de 2a. ordem equivalentes. Na verdade, este é um fato esperado, por causa da simetria aproximada das massas pontuais em relação ao eixo que passa pelo centro das nuvens (Figura 3.46). Esta interpretação é confirmada pela análise de estabilidade para as direções principais equivalentes mostrada na Figura 3.51.

Em resumo, para este conjunto complexo de massas (mas que obedece de forma aproximada à condição de simetria na distribuição espacial do contraste de densidade), foi possível obter boas estimativas da massa anômala total, das coordenadas do centro de massa e da direção do eixo principal verdadeiro maior.

3.4.9 Exemplo Gravimétrico 9: efeito de corpos pequenos e rasos

Vamos agora simular uma situação em que haja a presença de corpos interferentes pequenos e rasos. Para tanto, vamos utilizar um modelo composto de dois corpos: o primeiro deles é um prisma relativamente profundo e de massa grande, cujos parâmetros estaremos interessados em estimar; o segundo corpo é uma esfera subaflorante e de massa relativamente pequena que representará o corpo interferente. O prisma tem parâmetros iguais aos do prisma do Exemplo Gravimétrico 2, exceto as direções dos lados, que estão mostradas na Figura 3.52. A esfera tem contraste de densidade uniforme, raio igual a 1 km e centro em (15, 17, 1) em km. Todos os parâmetros da malha de geração do campo e de controle dos algoritmos são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2.

Vamos apresentar em conjunto dois casos. No caso 1, o contraste de densidade da esfera é igual a $0,2 \text{ g/cm}^3$ e, no caso 2, este contraste é igual a $-0,2 \text{ g/cm}^3$. As anomalias observadas nos casos 1 e 2 estão mostradas nas Figuras 3.53 e 3.54, respectivamente. Nenhum ruído foi adicionado às mesmas.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 para a massa anômala total e coordenadas de centro de massa, de ambos os casos, estão mostradas na Tabela 3.10. Nos dois casos, as estimativas pontuais são boas aproximações dos valores verdadeiros do prisma. Além disso, no caso 1, a estimativa pontual de ordem 2 de z_{cm} é menor do que a profundidade do prisma, enquanto que no caso 2 ocorre o contrário (Tabela 3.10), como se deveria esperar.

A superposição da aproximação de 2a. ordem com o campo observado está mostrada na Figura 3.55, para o caso 1, e na Figura 3.56, para o caso 2. Podemos constatar na Figura

Tabela 3.10 - Exemplo Gravimétrico 9: resultados obtidos com o Algoritmo de Estimção Pontual para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa. Os valores verdadeiros se referem somente ao prisma.

caso	grandezas	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
1	valor verdadeiro	19,20	14,00	16,00	5,00
	estimativa pontual de ordem 1	19,73	15,00	14,23	4,59
	estimativa pontual de ordem 2	19,12	15,00	14,12	4,32
2	valor verdadeiro	19,20	14,00	16,00	5,00
	estimativa pontual de ordem 1	16,64	15,00	13,14	4,54
	estimativa pontual de ordem 2	18,84	15,00	14,70	5,46

3.55 que, no caso 1, a aproximação de 2a. ordem ajustou bem a anomalia observada. Além disso, a presença da esfera modificou bastante os gradientes da anomalia especialmente no entorno do máximo. Assim, devemos esperar que a estimativa pontual das direções principais equivalentes, no caso 1, venha a conter direções bastante diferentes das direções dos eixos do prisma. De fato, o mergulho do prisma foi erroneamente estimado como sendo quase nulo (Figura 3.57). A análise de sensibilidade da estimativa pontual do caso 1 (não mostrada), tampouco ajudaria no sentido de identificar o mergulho correto do prisma.

Para o caso 2, observemos que foi pior o ajuste entre a anomalia observada e a sua aproximação de 2a. ordem. Além disso, houve também distorção nos gradientes da aproximação de 2a. ordem, conforme mostra a Figura 3.56. Todavia, no entorno do máximo da anomalia, a distorção foi menor que no caso 1. Assim, devemos esperar que a estimativa pontual das direções principais equivalentes seja agora melhor. Como se pode ver na Figura 3.58, em que esta estimativa está mostrada, isso realmente aconteceu. Desta vez, inclusive, a análise de sensibilidade (não mostrada) contém as direções dos eixos verdadeiros do prisma.

A comparação dos dois casos apresentados nos permite concluir que a interferência de um corpo pequeno e raso é mais danosa para a estimação das direções principais equivalentes quando o seu contraste de densidade é de mesmo sinal que o do corpo principal, do que quando o seu contraste de densidade tem sinal contrário ao do corpo principal. Este conclusão foi constatada em vários outros testes, em que mudamos as dimensões do prisma, sua posição espacial e a posição do centro da esfera. A explicação para este fato está na *incapacidade* das funções-bases de reproduzirem uma oscilação muito forte existente no campo observado, cuja integral sobre o plano $x - y$ não seja nula, como a que ocorre na situação em que o contraste de densidade do corpo interferente é de sinal contrário ao do corpo principal. Esta incapacidade proporciona um ajuste mais *pobre* entre o campo observado e a sua aproximação

de 2a. ordem, o que ocasiona, neste caso, uma melhor estimação dos parâmetros do prisma. Assim sendo, é possível que a sensibilidade do método à presença de corpos interferentes seja muito mais uma deficiência do *critério de ajuste* utilizado do que uma deficiência em si do método de inversão de momentos. Desse modo, é possível que uma mudança do critério de ajuste entre os campos, do critério de mínimos quadrados para um critério *robusto* de ajuste (ANDERSON, 1982; HUBER, 1981; SILVA & CUTRIM, 1989), proporcionasse melhores estimativas dos parâmetros do corpo principal.

Se o módulo do contraste de densidade da esfera fosse igual ou menor a $0,05 \text{ g/cm}^3$, tanto no caso 1 como no caso 2, seriam muito pequenas as discrepâncias obtidas entre as direções principais verdadeiras do prisma e as estimativas das direções principais equivalentes. Além disso, à medida que se aumenta a distância entre a projeção no plano $x - y$ do centro do corpo interferente e o ponto de máxima amplitude da anomalia, a influência do corpo interferente diminui, especialmente quando os contrastes de densidade dos corpos principal e interferente são de sinais contrários.

Como síntese deste exemplo, concluímos que a estimação das direções principais equivalentes é bastante sensível à presença de corpos interferentes, especialmente se o contraste de densidade deste corpo for de mesmo sinal que o do corpo principal e se o corpo interferente estiver próximo do ponto de máxima amplitude da anomalia.

3.4.10 Exemplo Gravimétrico 10: efeito de uma constante adicionada ao campo observado

Vamos agora simular de maneira simples a situação em que, na etapa de separação regional-residual de uma anomalia, tenha havido “vazamento” de uma parte da componente regional para a componente residual a ser interpretada. Para tanto, vamos retomar o modelo do Exemplo Gravimétrico 2 e adicionar ao campo mostrado na Figura 3.13 o valor $0,1 \text{ mGal}$. A anomalia resultante e a sua aproximação de 2a. ordem estão mostradas nas Figuras 3.59 e 3.60, respectivamente.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 obtidas para a massa anômala total e coordenadas de centro de massa estão mostradas na Tabela 3.11. Como esperado, as estimativas pontuais de ordens 1 e 2 de m_0 e de z_{cm} são maiores do que os valores verdadeiros e do que as respectivas estimativas obtidas no Exemplo Gravimétrico 2 (Tabela 3.3). Além disso, observemos que as estimativas de ordem 2 de x_{cm} e y_{cm} são apenas aproximações razoáveis dos valores verdadeiros (Tabela 3.11).

A razão para estes fatos é que a adição de uma constante δ ao campo observado equivale

Tabela 3.11 - Exemplo Gravimétrico 10: resultados obtidos com o Algoritmo de Estimção Pontual para a massa anômala total e coordenadas do centro de massa.

parâmetro (unidade)	m_0 (10^{12} kg)	x_{cm} (km)	y_{cm} (km)	z_{cm} (km)
valor verdadeiro do prisma	19,20	14,00	16,00	5,00
estimativa pontual de ordem 1	20,99	13,92	15,68	5,02
estimativa pontual de ordem 2	26,03	15,02	17,09	7,48

a introduzir no modelo uma placa Bouguer, cujo contraste de densidade ρ e espessura h satisfizessem a relação $2\pi G\rho h = \delta$, o que viola a condição de fonte finita. Portanto, se a anomalia estivesse amostrada em todo o plano $x - y$, seria *impossível* estimar os momentos equivalentes, porque a massa total da placa é infinita e o seu centro de massa é indefinido, não importando quão pequeno seja δ . Tendo em vista esta impossibilidade teórica, concluímos que só foi possível obter estimativas de momentos equivalentes porque a anomalia está amostrada em uma *área finita* e, assim, a condição de massa anômala total finita é artificialmente introduzida. De fato, os momentos equivalentes passam a ser função da área de cobertura da anomalia. Por exemplo, se o espaçamento da malha fosse mudado de 1 km para 2 km, mantendo o mesmo número de pontos na malha, a estimativa pontual de ordem 2 de z_{cm} passaria a ser 9,91 km.

A estimativa pontual das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 3.61. Podemos observar, nesta figura, que esta estimativa ainda contém aproximações razoáveis das direções dos eixos principais verdadeiros. A explicação para este fato é que a adição de δ à anomalia não alterou os gradientes da mesma, nem de sua aproximação de 2a. ordem, de onde provém a identificação da atitude espacial da distribuição de massa equivalente.

Estes resultados evidenciam o acoplamento existente entre um termo constante presente na anomalia e parâmetros estimados para a sua fonte. Observemos que, na interpretação gravimétrica, muito pouco cuidado é em geral tomado com este acoplamento, o que pode resultar em erros.

É possível se alterar o método de inversão em estudo para adaptá-lo à presença de um campo regional superposto à anomalia isolada. Para tanto, basta se adicionar à série truncada uma componente regional para a anomalia, na forma de um polinômio de um dado grau, como apresentamos no Anexo III. Desse modo, os momentos e os coeficientes do polinômio podem ser estimados simultaneamente. Utilizando esta abordagem na anomalia deste exemplo é possível estimar, corretamente, como verificamos, tanto o valor 0,1 mGal para a constante δ ,

como a massa anômala total, coordenadas de centro de massa e direções dos eixos principais do prisma.

Todavia, a abordagem de estimar simultaneamente momentos e um regional, na forma de um polinômio, padece da deficiência de que o condicionamento da matriz associada a este problema é pior do que na situação em que apenas os momentos são estimados (veja Anexo III). Assim, para evitar instabilidade, a ordem do polinômio deve ser mantida baixa. Contudo, se o polinômio for de ordem baixa, o regional existente no campo observado pode não ser ajustado pelo mesmo e, assim, pode persistir o acoplamento dos momentos equivalentes com a componente regional da anomalia. Não obstante, acreditamos que se esta abordagem de estimação simultânea fosse utilizada em conjunto com um critério robusto de ajuste (HUBER, 1981) (entre o campo observado e a sua aproximação de 2a. ordem), ao invés do critério de mínimos quadrados, seria possível obter boas estimativas dos parâmetros da fonte residual. O critério robusto de ajuste permitiria identificar, através dos valores dos resíduos, as medidas de campo que não fossem compatíveis com o modelo postulado e, assim, virtualmente descartar os seus efeitos nas estimativas dos momentos. Em consequência, apenas as medidas de campo compatíveis com o modelo postulado seriam utilizadas e, desse modo, estimativas mais consistentes com as hipóteses feitas seriam obtidas.

Concluimos dos resultados deste exemplo que o efeito da adição de uma constante ao campo observado viola a condição de fonte finita, tornando teoricamente impossível a estimação de massa anômala total e de posição de centro de massa. Na prática, as estimativas destas grandezas passam a depender fortemente da área de cobertura da anomalia. Todavia, ainda é possível se obterem estimativas razoáveis das direções principais equivalentes, porque elas são mais fracamente dependentes da área de cobertura

3.5 COMPARAÇÃO ENTRE AS ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE ESTABILIDADE

Sob as premissas estatísticas: (1) que o erro contido no campo observado seja aditivo, (2) de média nula e (3) com matriz de covariância proporcional à matriz identidade e, além disso, (4) que as variáveis independentes não contenham erros e (5) que os momentos de fonte não sejam aleatórios, os parâmetros L e σ_C , que caracterizam as análises de sensibilidade e de estabilidade, respectivamente, podem ser relacionados por

$$L \approx \sqrt{\max_{i,j} [(\bar{\Psi}_e^T \bar{\Psi}_e)^{-1}]_{ij}} \cdot \sigma_C, \quad (3.48)$$

em que $\overline{\Psi}_e$ é a matriz de funções-bases normalizadas calculada no centro de massa equivalente e a operação de máximo se estende apenas aos elementos associados aos termos de 2a. ordem.

Na situação em que as premissas estatísticas acima sejam válidas e em que a equação (3.48) seja utilizada para relacionar L e σ_C , as análises de sensibilidade e de estabilidade das direções principais equivalentes apresentariam resultados semelhantes. Todavia, para que a equação (3.48) possa ser usada para calcular L , é necessário conhecer a priori uma estimativa de σ_C . Além do mais, as premissas estatísticas necessárias para assegurar validade à equação (3.48) são muito restritivas. Adicionalmente, a análise de sensibilidade é realizada no entorno de uma *particular* estimativa pontual das direções principais equivalentes e, por construção, ela é influenciada somente pelas incertezas contidas nas estimativas pontuais dos momentos de 2a. ordem equivalentes. Assim, a análise de sensibilidade reflete somente o grau de instabilidade do próprio método de estimação das direções principais equivalentes a partir dos momentos de 2a. ordem equivalentes.

Por outro lado, a análise de estabilidade reúne resultados de *várias* estimativas pontuais das direções principais equivalentes, que foram obtidas em condições diferentes. Desse modo, a análise de estabilidade reflete tanto as incertezas inerentes exclusivamente ao processo de estimação dessas direções (baseado nas estimativas dos momentos de 2a. ordem equivalentes), como as incertezas introduzidas por qualquer fator que tenha influenciado as estimativas dos momentos equivalentes. Em conseqüência, na hipótese de que a distribuição de massa equivalente seja uma boa aproximação da distribuição de massa verdadeira, a análise de estabilidade ambiciona conter dentro de suas três regiões de ambigüidade as direções principais verdadeiras. Portanto, de modo geral, as análises de sensibilidade e de estabilidade podem apresentar resultados diferentes.

A análise de sensibilidade pode ser aplicada a uma anomalia real, sem perda de qualidade das medidas de campo, ao contrário da análise de estabilidade. A explicação para este fato é que, para fazer a análise de estabilidade, temos que contaminar a anomalia observada com N seqüências diferentes de ruído pseudo-aleatório. Contudo, uma anomalia real já contém ruído, implicando o seu levantamento a realização de uma amostra particular da variável aleatória que descreve este ruído. Esta amostra particular impõe uma tendenciosidade nas estimativas pontuais obtidas da anomalia real e, assim, o seguinte problema pode ser colocado: qual deve ser o valor do desvio padrão σ_C , do ruído Gaussiano pseudo-aleatório usado na análise de estabilidade, de modo a permitir que as três regiões de ambigüidade obtidas contenham as respectivas direções verdadeiras? Na hipótese simplificadora de que o ruído já contido na anomalia seja também Gaussiano, de média nula e desvio padrão σ_O , verificamos heurísticamente que σ_C deve ser pelo menos da ordem de σ_O . Em conseqüência, a qualidade

das medidas de campo é diminuída, o que também diminui a resolução final das estimativas dos momentos equivalentes.

3.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Se a condição de fonte distante das observações está satisfeita, as estimativas de massa anômala total e de coordenadas de centro de massa são boas aproximações dos valores verdadeiros. Relativamente, as piores estimativas são as de z_{cm} , na situação em que o contraste de densidade não tem simetria em relação ao plano perpendicular a z . Por outro lado, para fazer boas estimativas das direções principais equivalentes, é preciso que a informação a priori seja válida, que o corpo anômalo tenha direções principais verdadeiras e que a anomalia tenha sido suficientemente influenciada pelos seus efeitos. Além disso, a estimativa de direção principal equivalente mais estável não está necessariamente associada à direção do eixo principal verdadeiro maior, mas sim, à direção do eixo principal verdadeiro que corresponde ao autovalor mais discrepante da matriz de espalhamento.

As estimativas de ordem 2 de massa anômala total e de coordenadas de centro de massa são sempre estáveis e têm praticamente a mesma qualidade estatística em situações bastante díspares de cobertura e de ruído adicionado à anomalia. Em particular, boas estimativas dessas grandezas podem ser obtidas tanto numa situação de boa cobertura da anomalia, ainda que os dados sejam de baixa qualidade, como numa situação de cobertura pobre, se os dados forem de muito boa qualidade. Por outro lado, quando o interesse é obter boas estimativas das direções principais equivalentes, é melhor dispor de uma cobertura esparsa da anomalia, se os dados forem de muita boa qualidade, do que dispor de uma excelente cobertura, mas com dados de baixa qualidade.

Nas situações adversas de fontes rasas interferentes, e de violação da condição de fonte finita (situação esta em que se tentaria estimar simultaneamente um regional na forma de um polinômio), sugerimos que a mudança do critério de ajuste, de mínimos quadrados para um critério robusto de ajuste, possa melhorar as estimativas obtidas com o método.

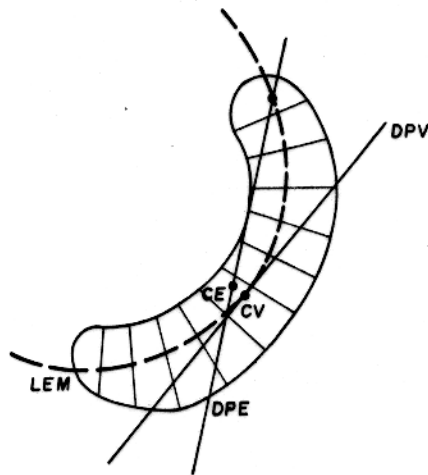


Figura 3.1 - Ilustração esquemática das linhas de espalhamento de massa (LEM), direções principais verdadeiras (DPV) e direções principais equivalentes (DPE). CV e CE indicam os centros de massa verdadeiro e equivalente, respectivamente.

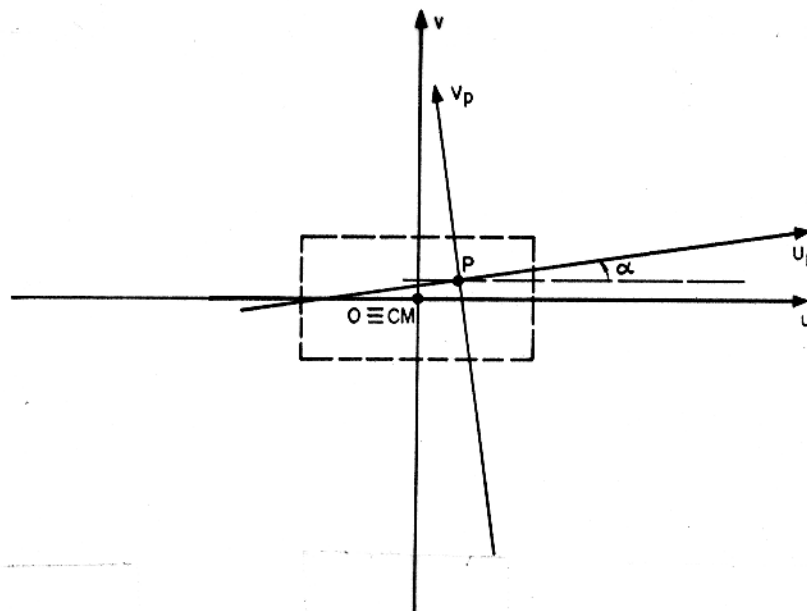


Figura 3.2 - Ilustração esquemática da dependência das direções principais com o centro de expansão. O eixo w está na interseção dos eixos u e v , saindo do plano da figura. O mesmo acontece com w_p em relação a u_p e v_p .

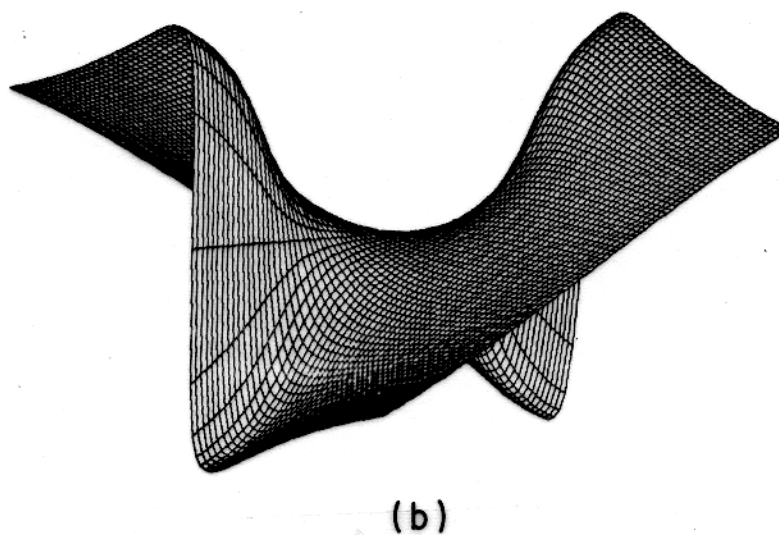
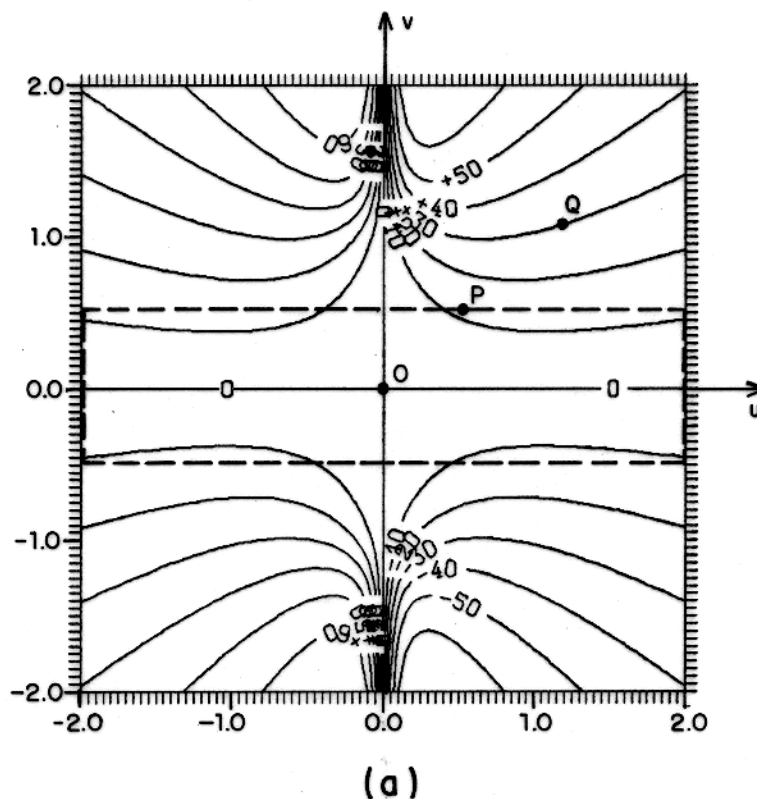
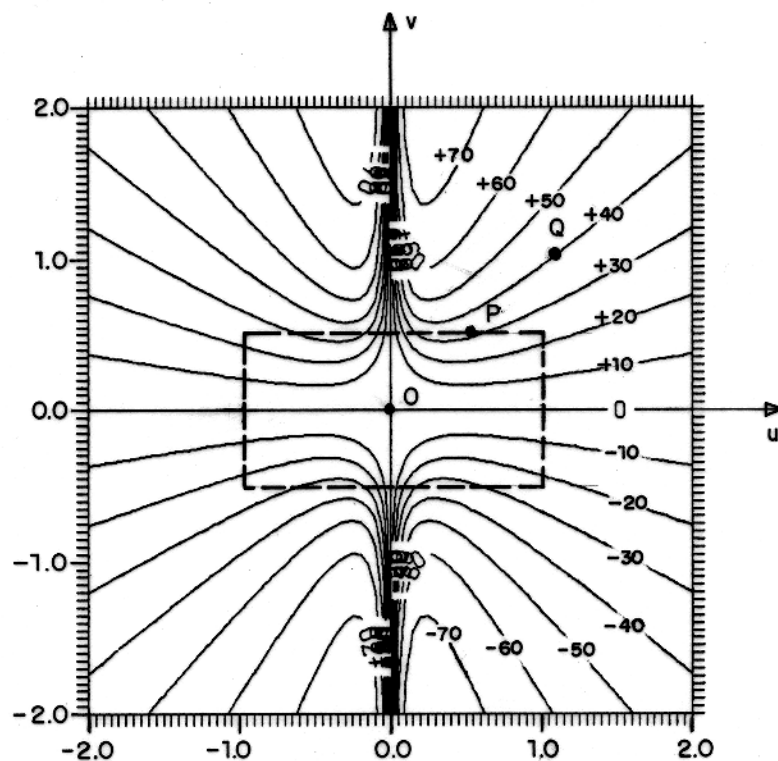
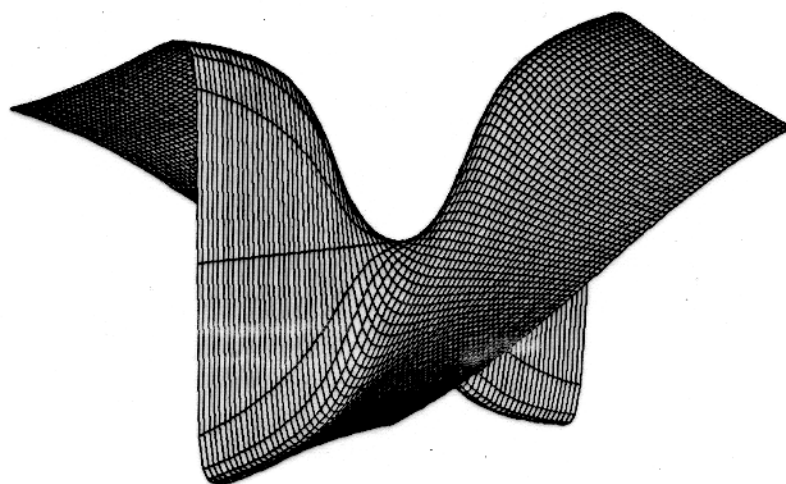


Figura 3.3 - Superfície da função $\alpha \equiv \alpha(u', v')$, definida pelas equações 3.41 e 3.42, para uma placa retangular (em linha tracejada), com razão entre seus lados igual a 4. (a) Curvas de isovalores em grau. (b) Bloco diagrama para um observador situado no ponto $(2, -2)$.



(a)



(b)

Figura 3.4 - Superfície da função $\alpha \equiv \alpha(u', v')$, definida pelas equações 3.41 e 3.42, para uma placa retangular (em linha tracejada), com razão entre seus lados igual a 2. (a) Curvas de isovalores em grau. (b) Bloco diagrama para um observador situado no ponto $(2, -2)$.

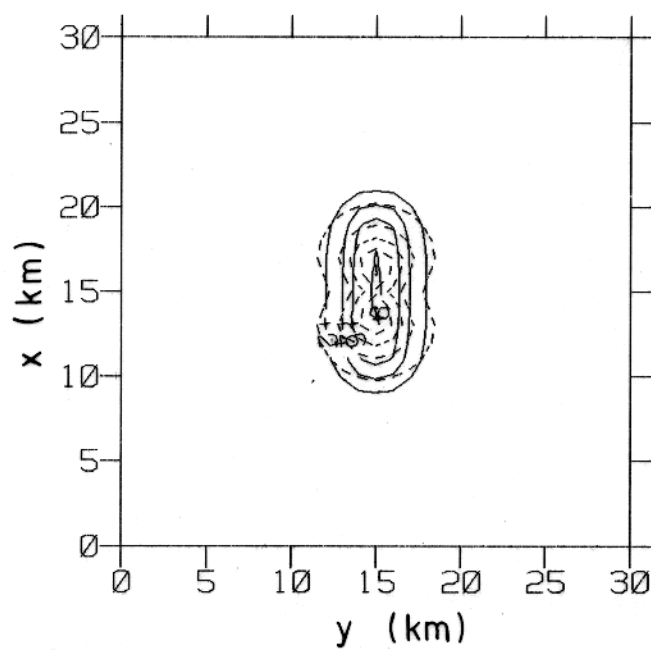


Figura 3.5 - Exemplo Gravimétrico 1: Anomalia do prisma gerada com $z_{cm} = 1,5$ km (linha cheia) e sua aproximação de 2a. ordem (linha tracejada). Intervalo de contorno de 2 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km.

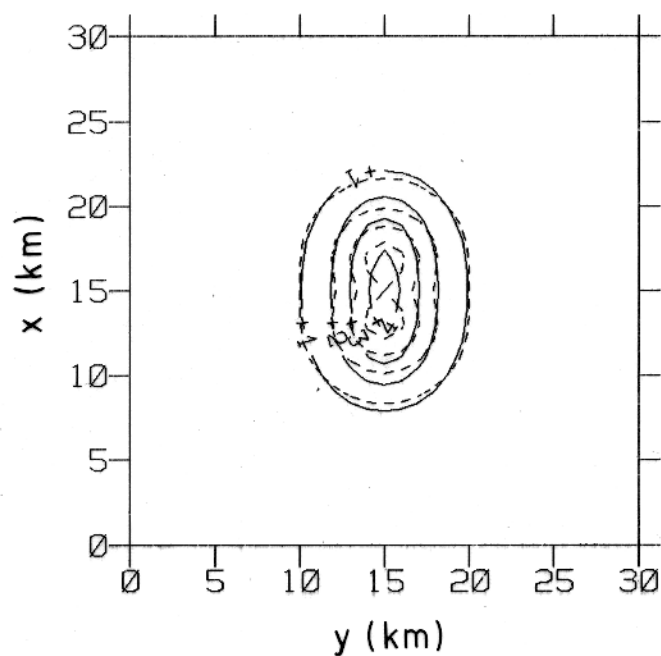


Figura 3.6 - Exemplo Gravimétrico 1: Anomalia do prisma gerada com $z_{cm} = 3,0$ km (linha cheia) e sua aproximação de 2a. ordem (linha tracejada). Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km.

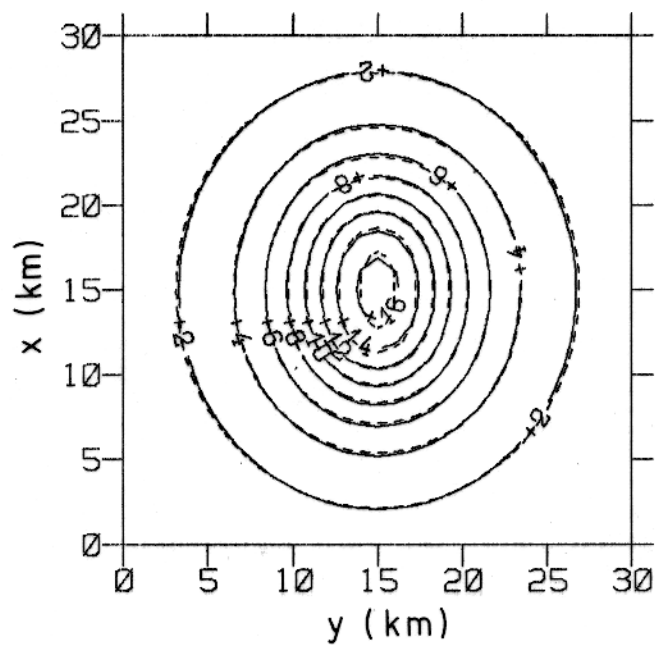


Figura 3.7 - Exemplo Gravimétrico 1: Anomalia do prisma gerada com $z_{cm} = 6,0$ km (linha cheia) e sua aproximação de 2a. ordem (linha tracejada). Intervalo de contorno de 0,2 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km.

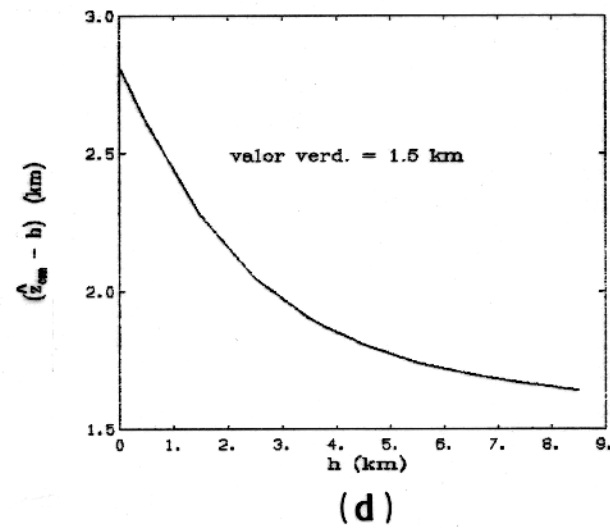
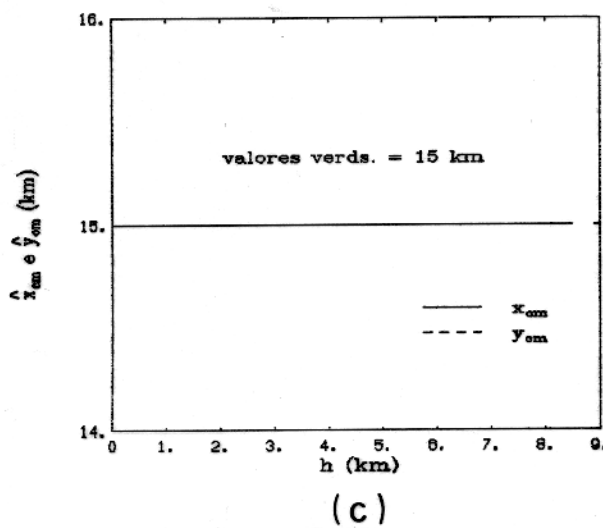
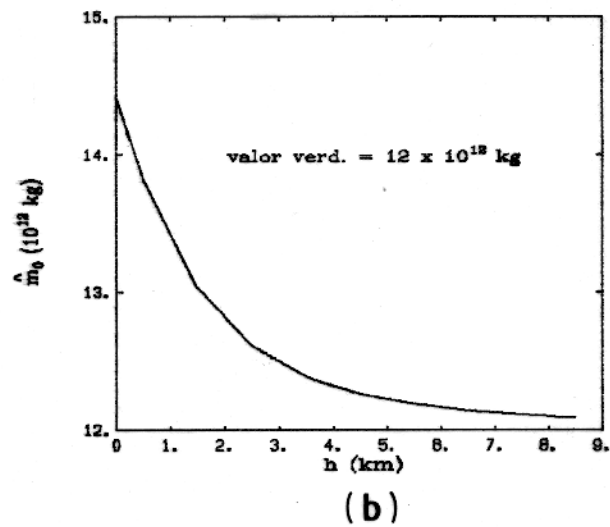
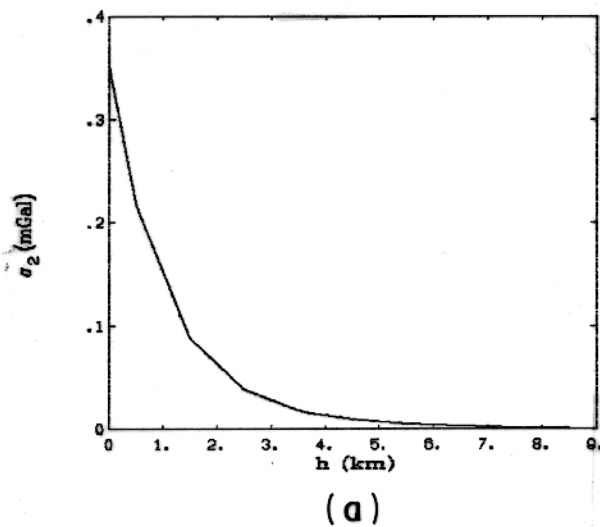
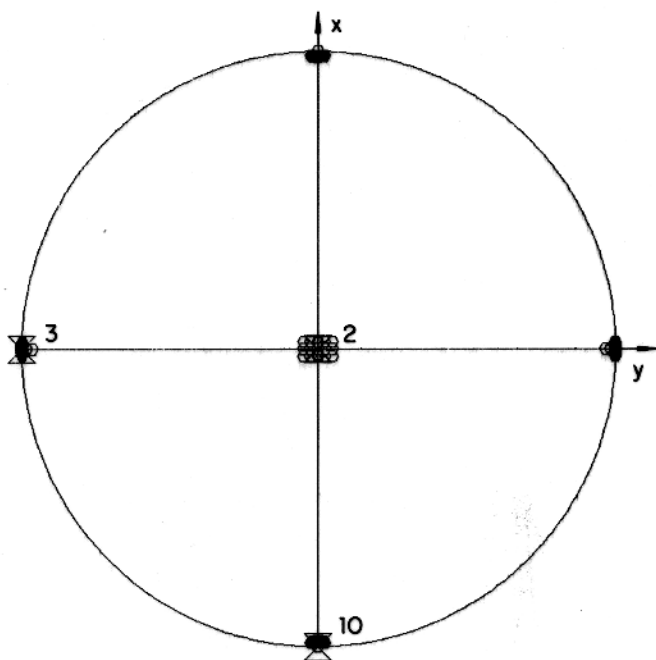


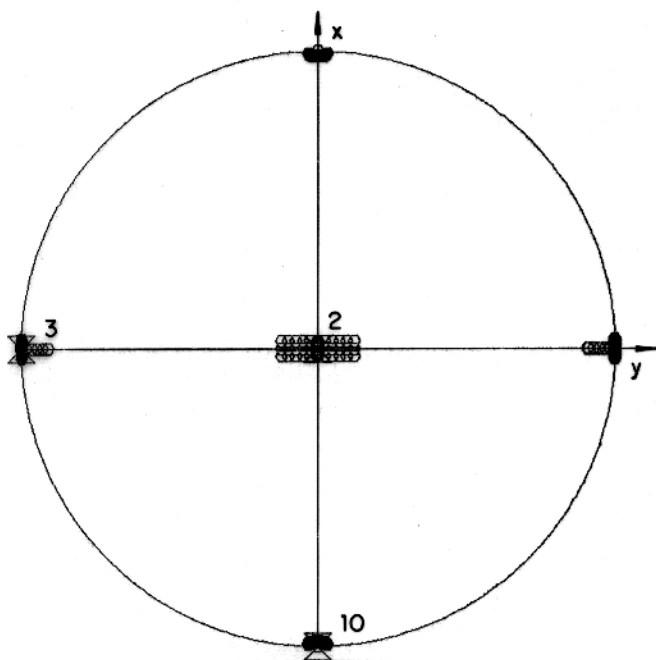
Figura 3.8 - Exemplo Gravimétrico 1: Comportamentos de (a) σ_2 e das estimativas pontuais de ordem 2 para: (b) m_0 , (c) x_{cm} e y_{cm} e (d) $z_{cm} - h$, em função da altitude h de continuação para cima da anomalia do prisma gerada com $z_{cm} = 1,5$ km.



LEGENDA

l
 : direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 3$ e 10 .

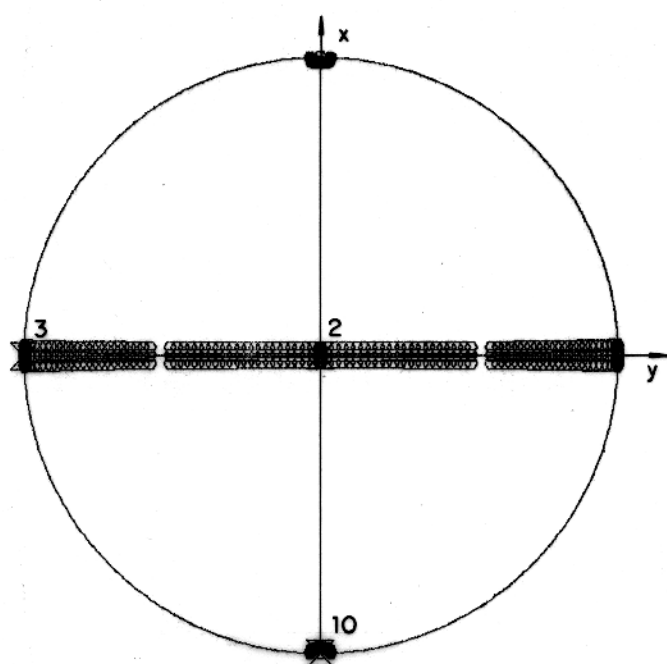
Figura 3.9 - Exemplo Gravimétrico 1: Estereograma de igual área mostrando a Análise de Sensibilidade da estimativa pontual das direções principais equivalentes para $h = 0,0$ km.



LEGENDA

l
 : direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 3$ e 10 .

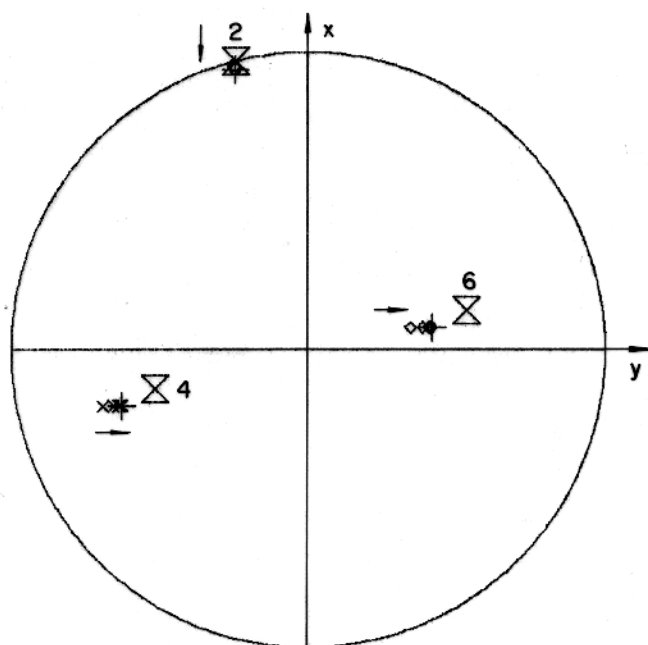
Figura 3.10 - Exemplo Gravimétrico 1: Análise de Sensibilidade da estimativa pontual das direções principais equivalentes para $h = 1,5$ km.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 3$ e 10 .

Figura 3.11 - Exemplo Gravimétrico 1: Análise de Sensibilidade da estimativa pontual das direções principais equivalentes para $h = 4,5$ km.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 3.12 - Exemplo Gravimétrico 2: Direções principais verdadeiras e estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 30 iterações.

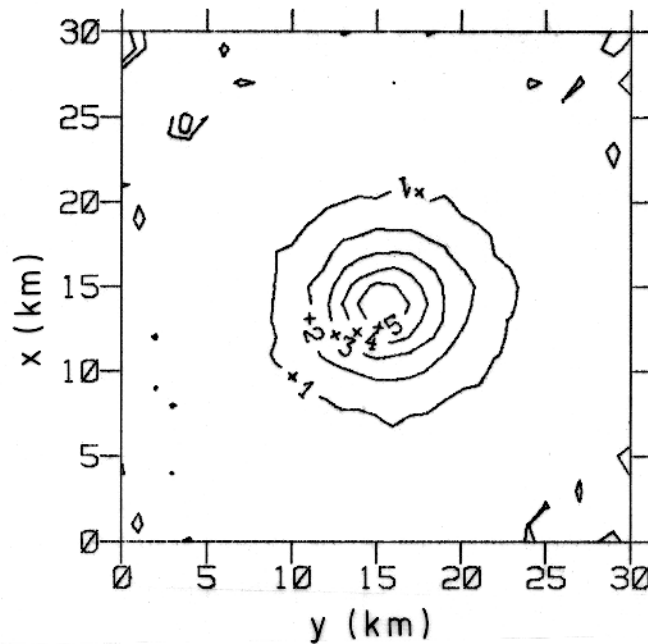


Figura 3.13 - Exemplo Gravimétrico 2: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 0,1 mGal.

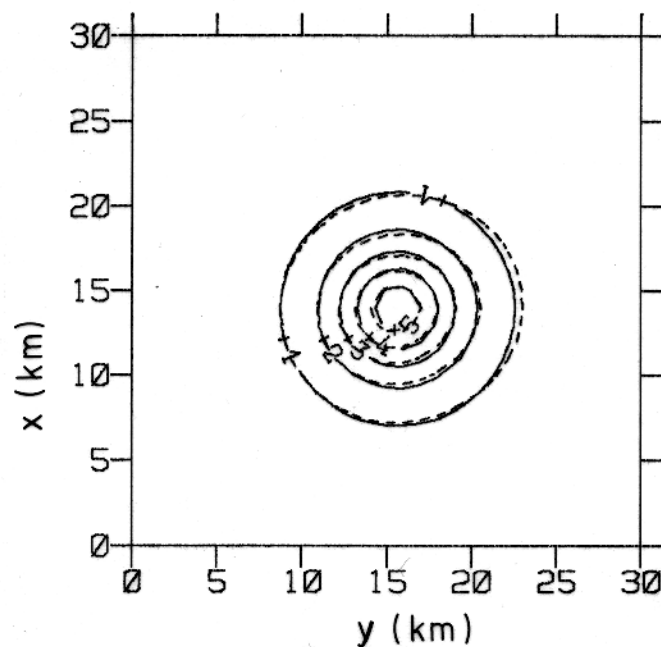
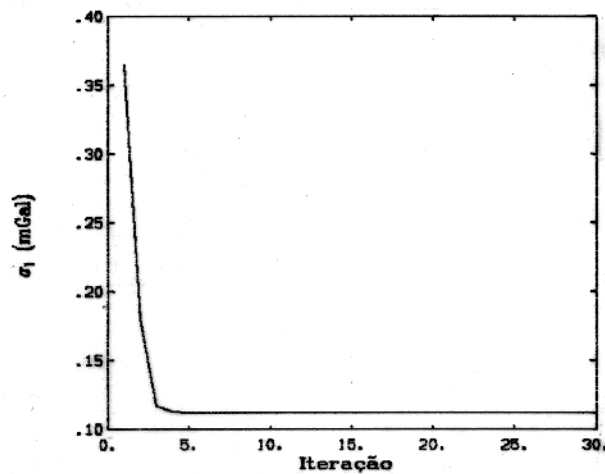
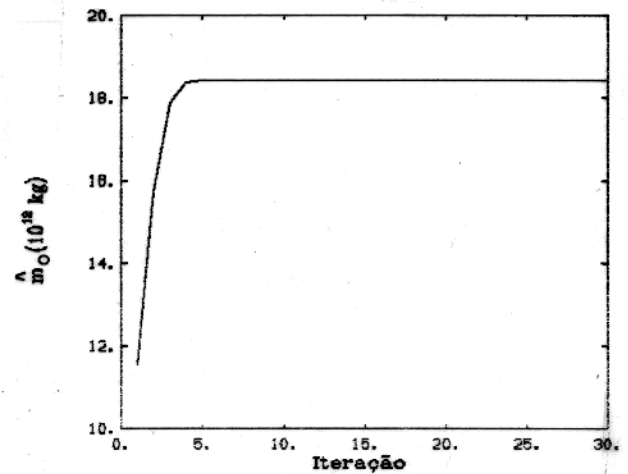


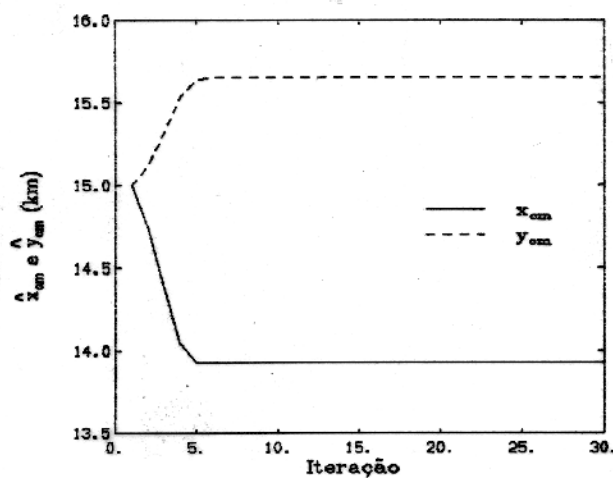
Figura 3.14 - Exemplo Gravimétrico 2: Aproximações de 1a. ordem (linha cheia) e de 2a. ordem (linha tracejada) para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal.



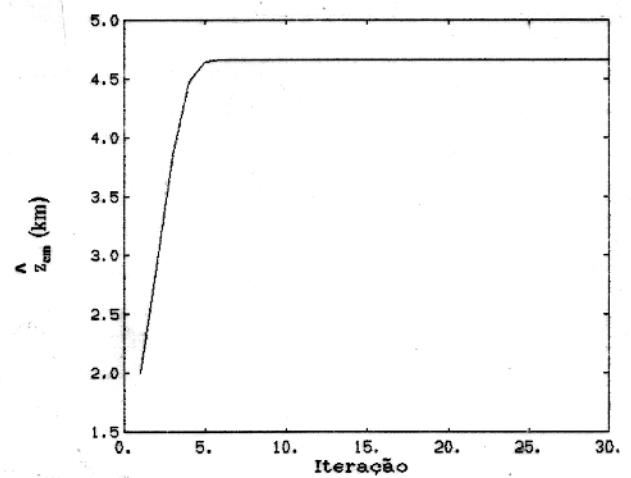
(a)



(b)

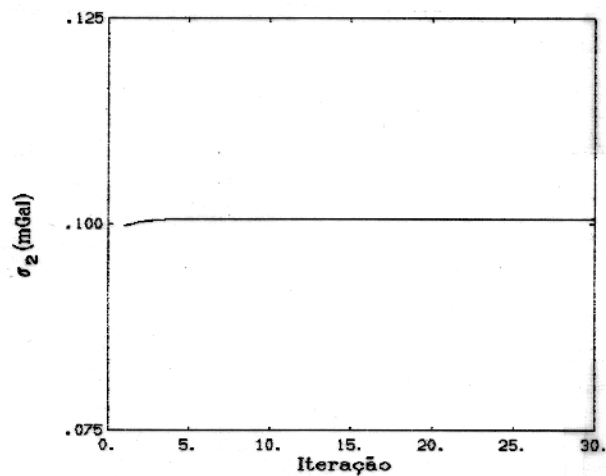


(c)

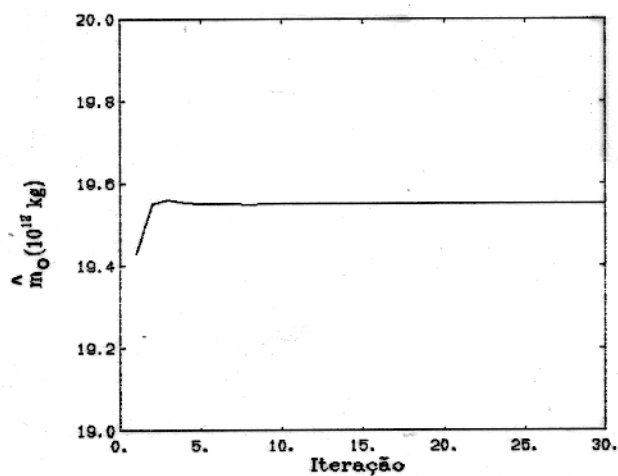


(d)

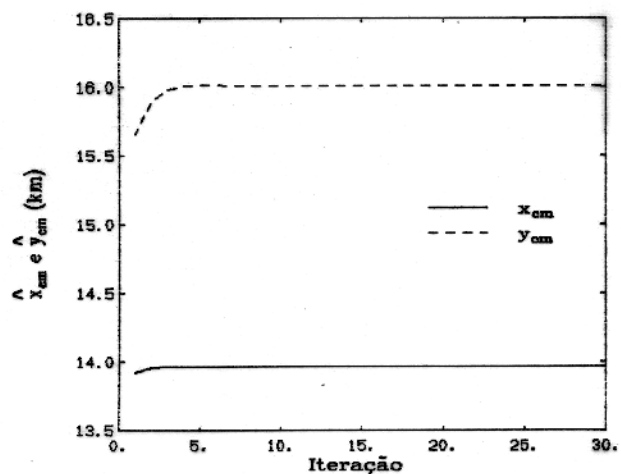
Figura 3.15 - Exemplo Gravimétrico 2: Evoluções de (a) σ_1 e das estimativas de ordem 1 para: (b) m_0 , (c) x_{cm} e y_{cm} e (d) z_{cm} , resultadas do Algoritmo de Estimação Pontual.



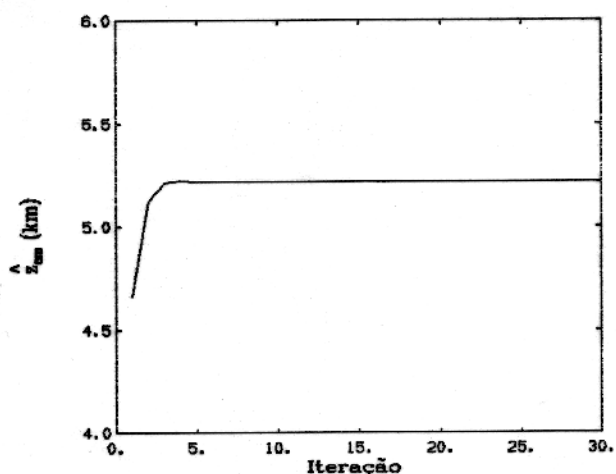
(a)



(b)

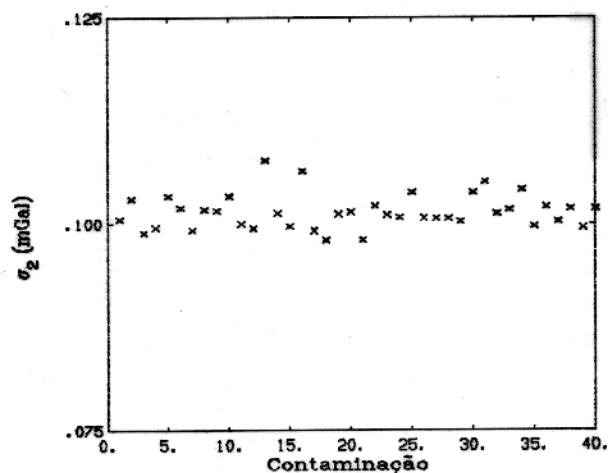


(c)

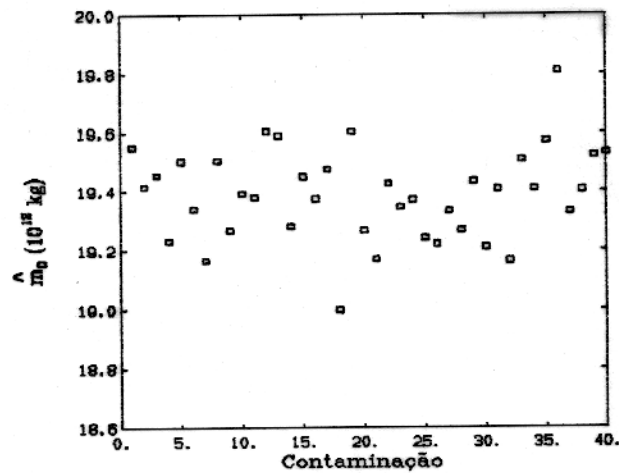


(d)

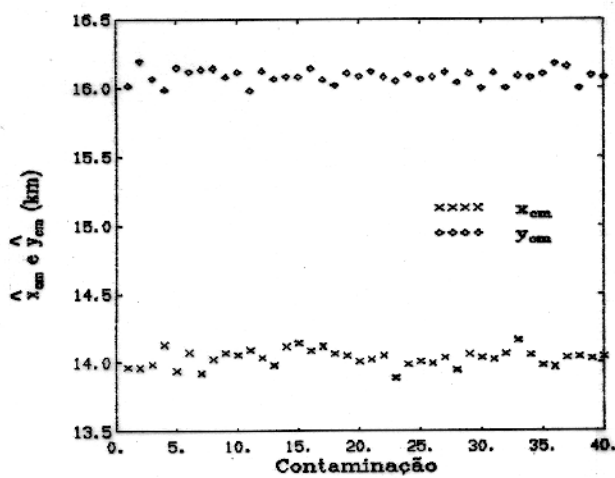
Figura 3.16 - Exemplo Gravimétrico 2: Evoluções de (a) σ_2 e das estimativas de ordem 2 para: (b) m_0 , (c) x_{cm} e y_{cm} e (d) z_{cm} , resultadas do Algoritmo de Estimação Pontual.



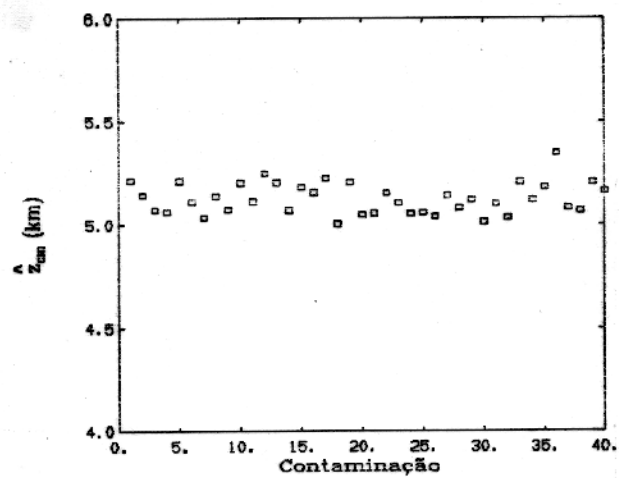
(a)



(b)

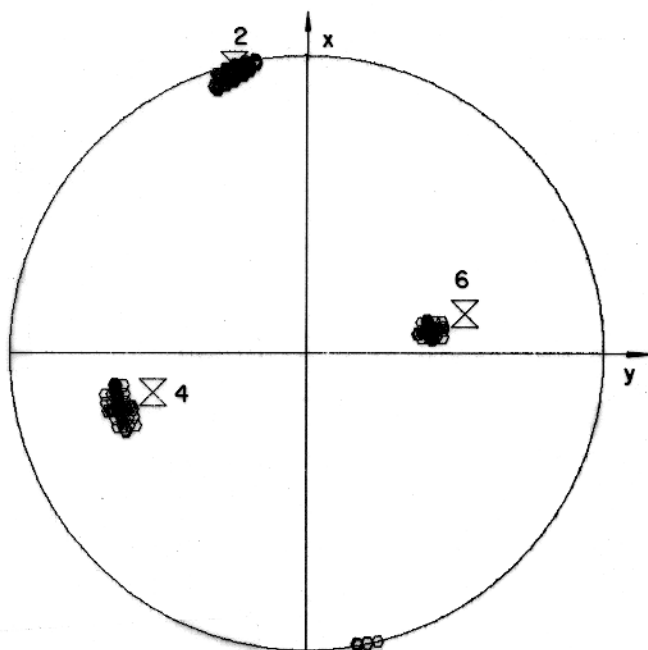


(c)



(d)

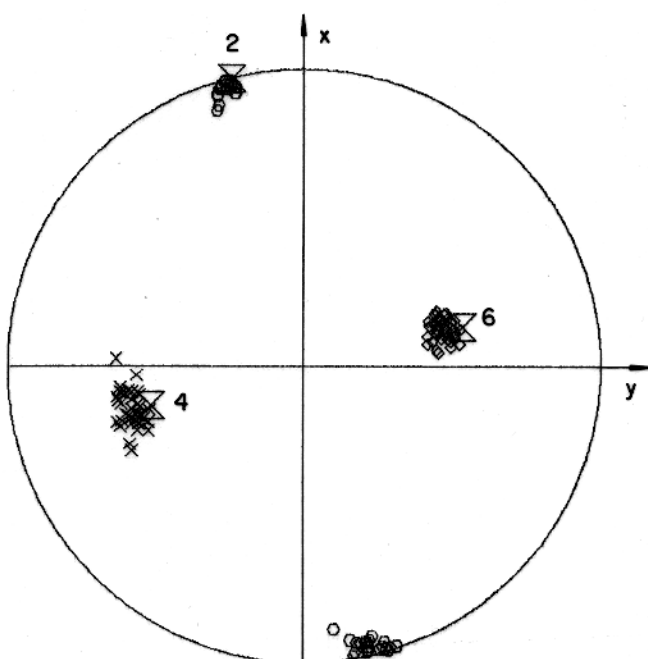
Figura 3.17 - Exemplo Gravimétrico 2: Resultados do Algoritmo de Análise de Estabilidade para (a) σ_2 e estimativas de ordem 2 para: (b) m_0 , (c) x_{cm} e y_{cm} e (d) z_{cm} .



LEGENDA

$\triangle$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

Figura 3.18 - Exemplo Gravimétrico 2: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

$\triangle$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, repectivamente.

Figura 3.19 - Exemplo Gravimétrico 2: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

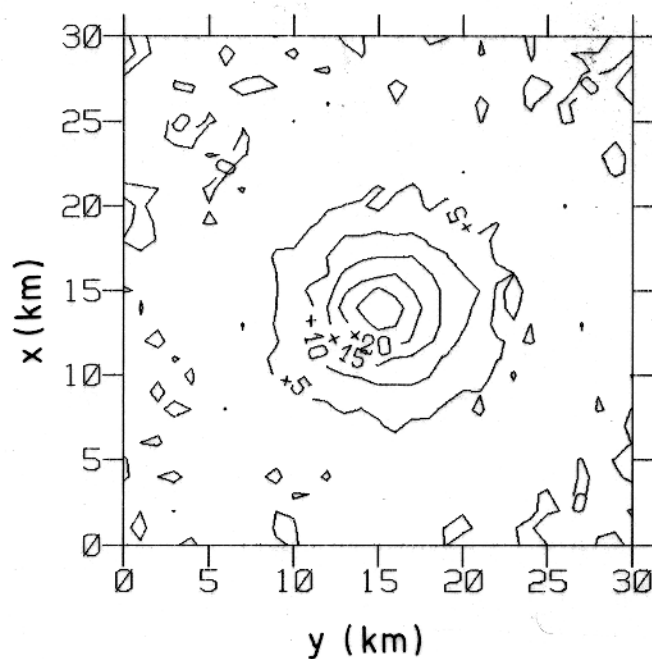


Figura 3.20 - Exemplo Gravimétrico 3: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 0,5 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 0,1 mGal.

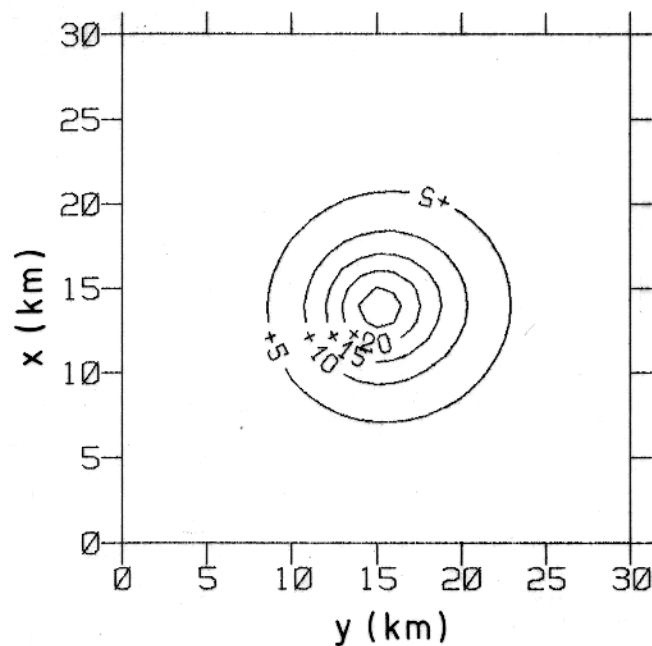
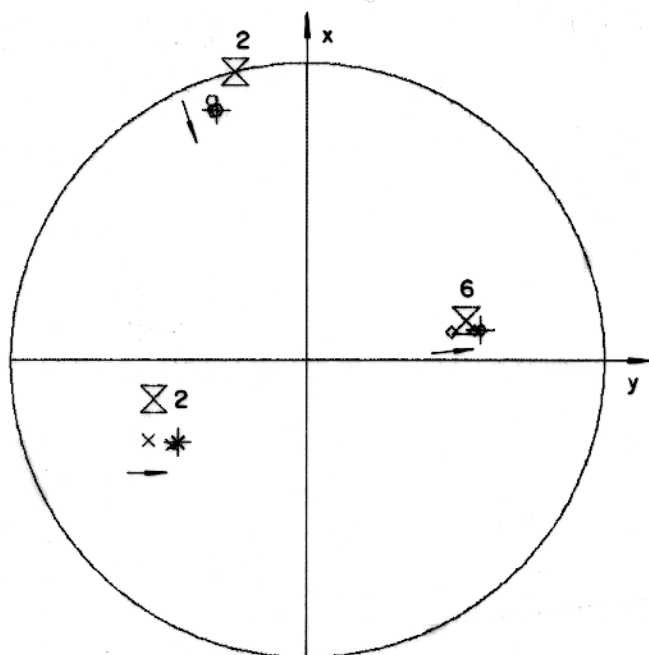


Figura 3.21 - Exemplo Gravimétrico 3: Aproximação de 2a. ordem para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 0,5 mGal.

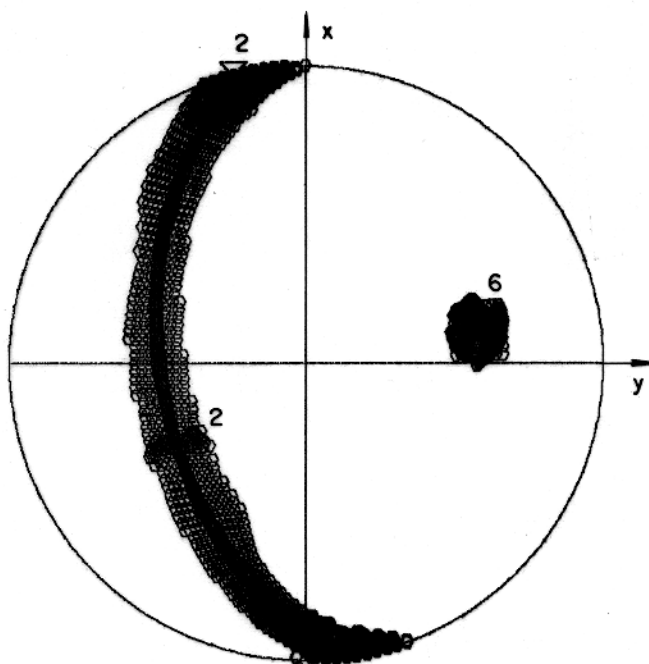


LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 2$ e 6 .

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 3.22 - Exemplo Gravimétrico 3: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 30 iterações.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 2$ e 6 .

Figura 3.23 - Exemplo Gravimétrico 3: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.

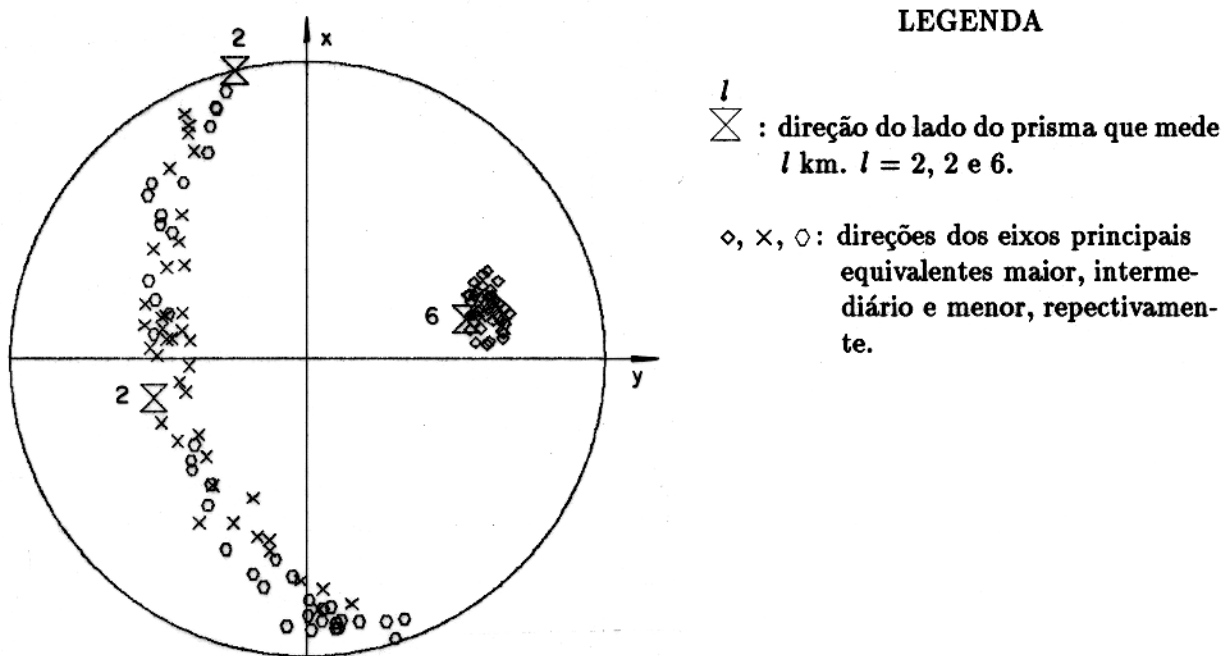


Figura 3.24 - Exemplo Gravimétrico 3: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

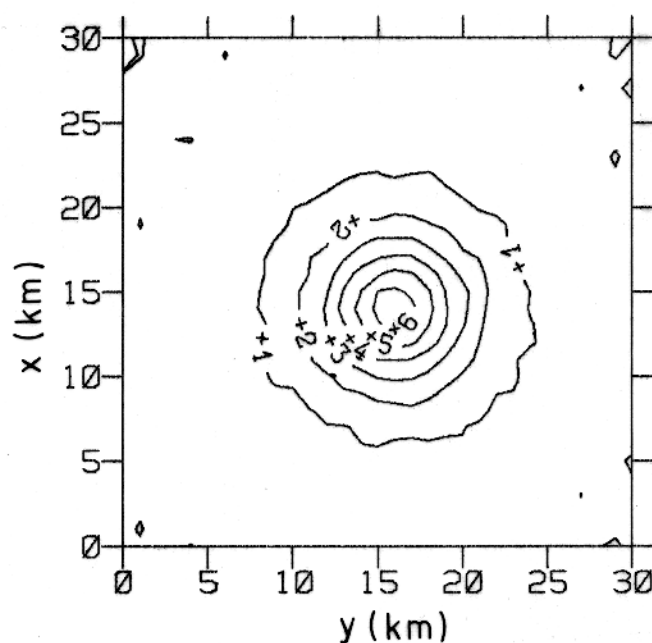


Figura 3.25 - Exemplo Gravimétrico 4: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 0,1 mGal.

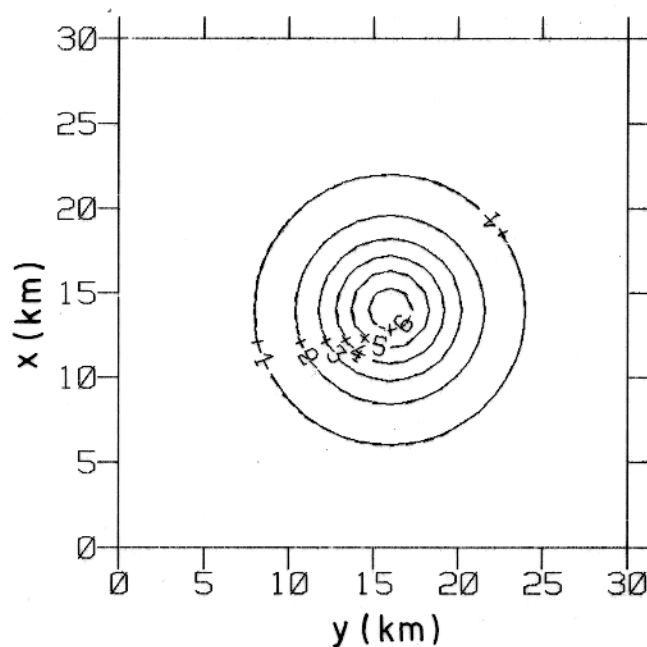


Figura 3.26 - Exemplo Gravimétrico 4: Aproximações de 1a. ordem (linha cheia) e de 2a. ordem (linha tracejada) para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal.

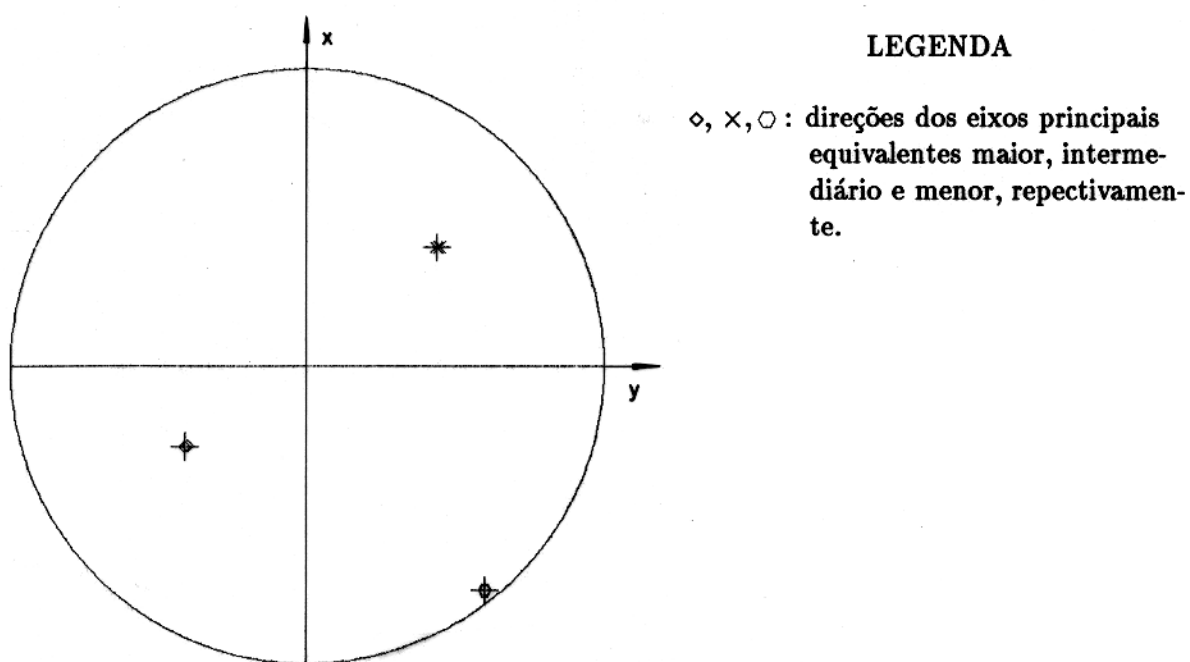


Figura 3.27 - Exemplo Gravimétrico 4: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+).

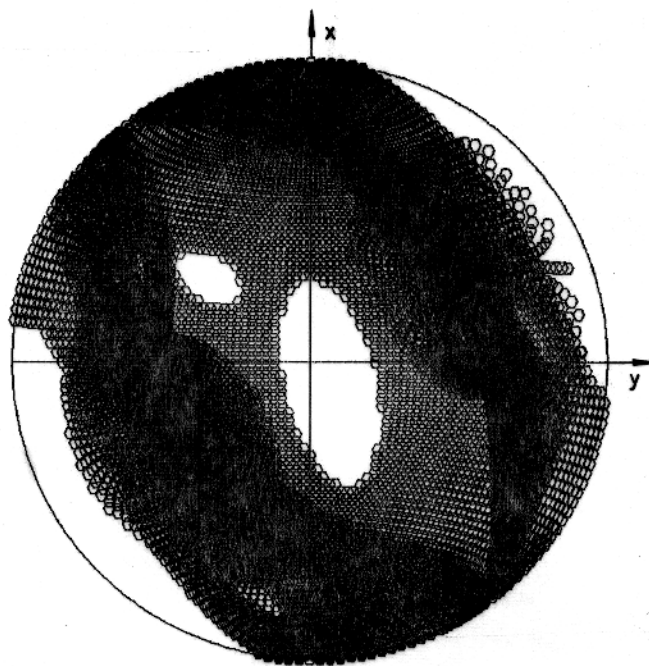


Figura 3.28 - Exemplo Gravimétrico 4: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.

LEGENDA

◇, ×, ○ : direções dos eixos principais equivalentes maior, intermédio e menor, respectivamente.

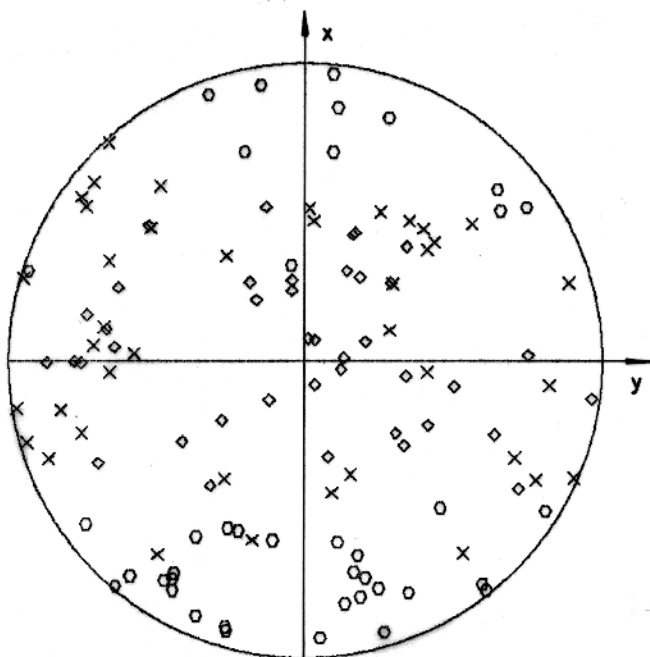


Figura 3.29 - Exemplo Gravimétrico 4: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

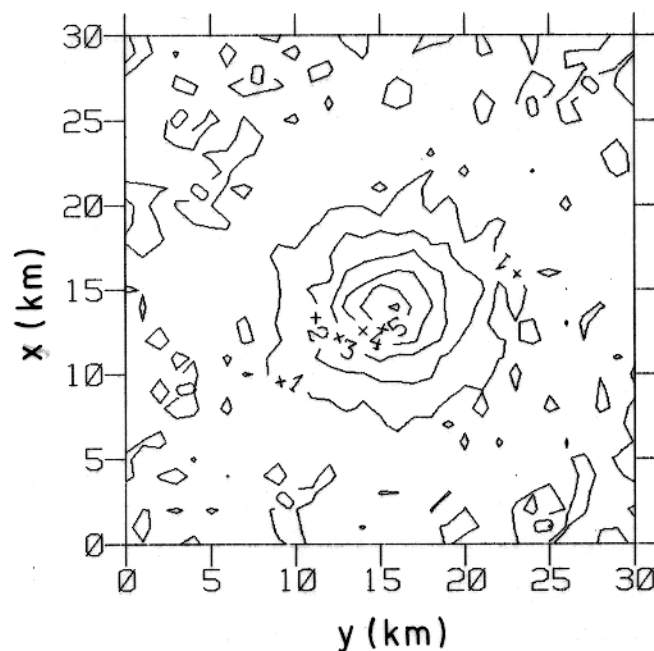


Figura 3.30 - Exemplo Gravimétrico 5: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 0,3 mGal.

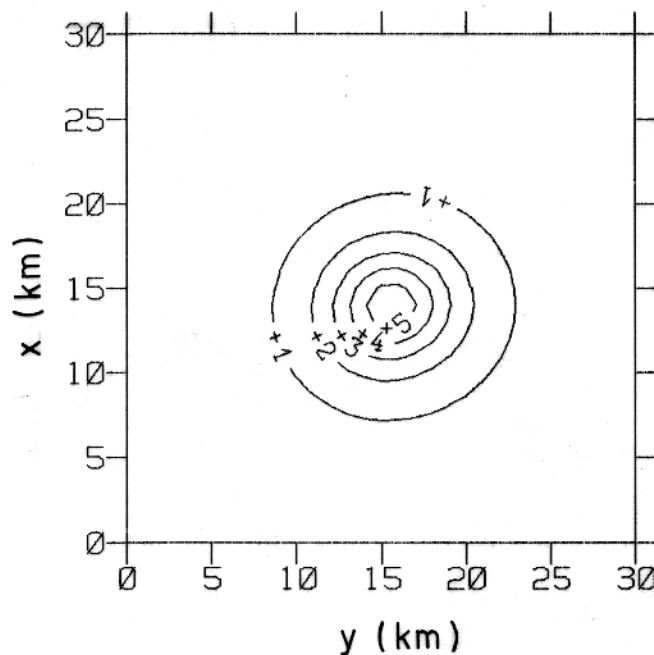


Figura 3.31 - Exemplo Gravimétrico 5: Aproximação de 2a. ordem para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal.

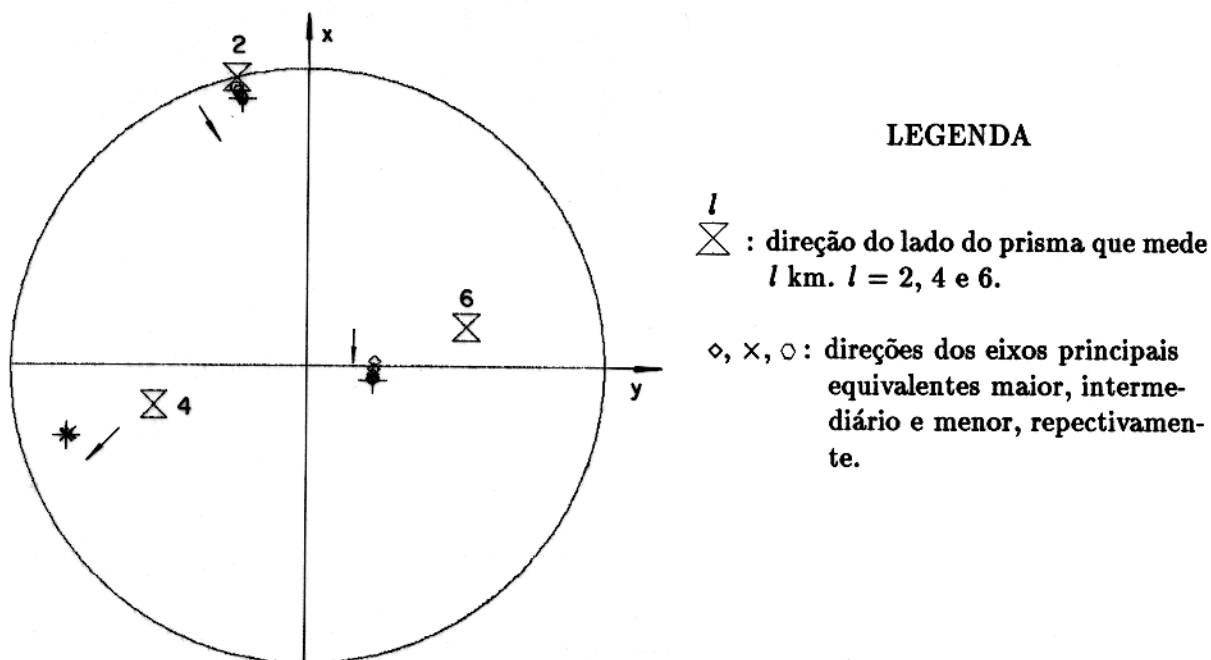


Figura 3.32 - Exemplo Gravimétrico 5: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 30 iterações.

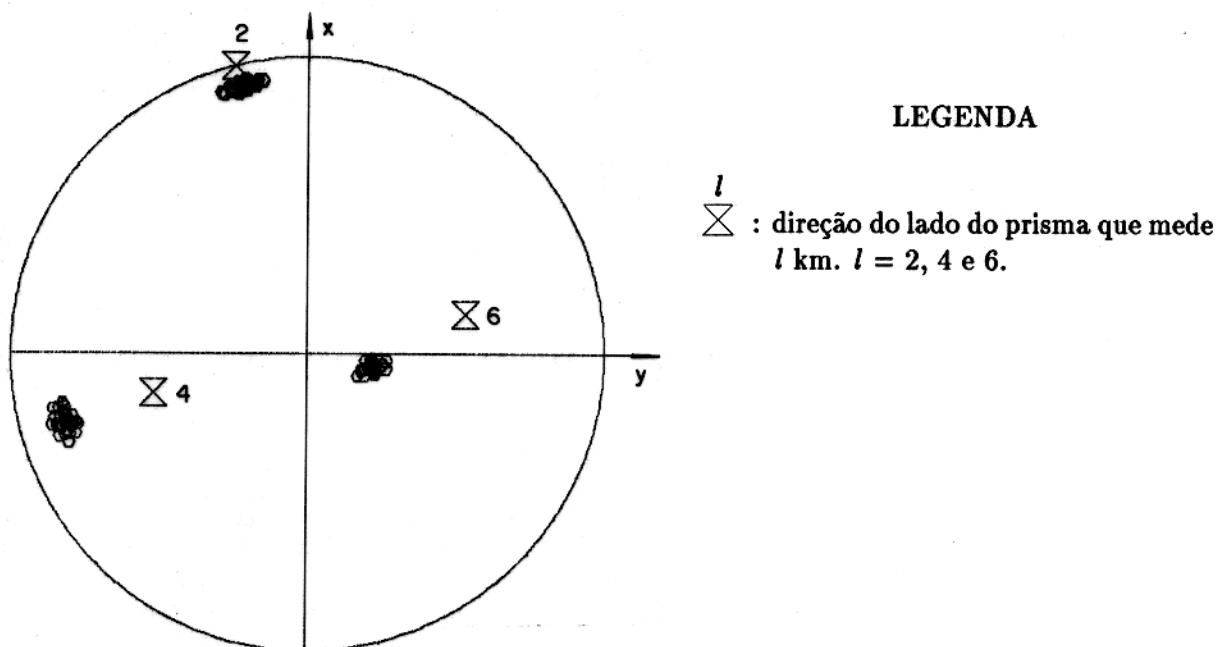


Figura 3.33 - Exemplo Gravimétrico 5: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.

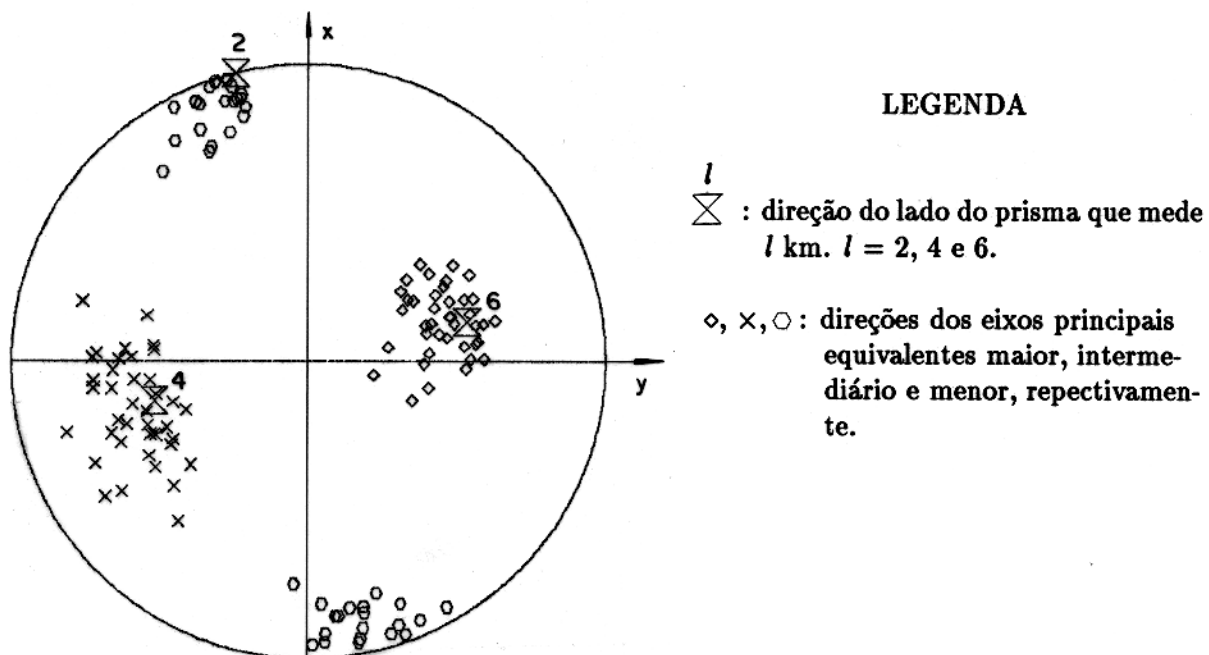


Figura 3.34 - Exemplo Gravimétrico 5: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

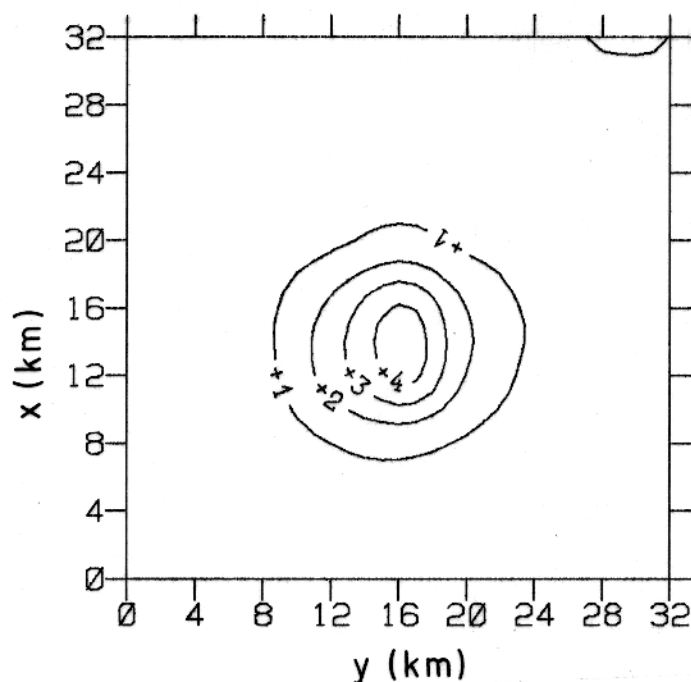


Figura 3.35 - Exemplo Gravimétrico 6: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 9×9 pontos, igualmente espaçados de 4 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 0,05 mGal.

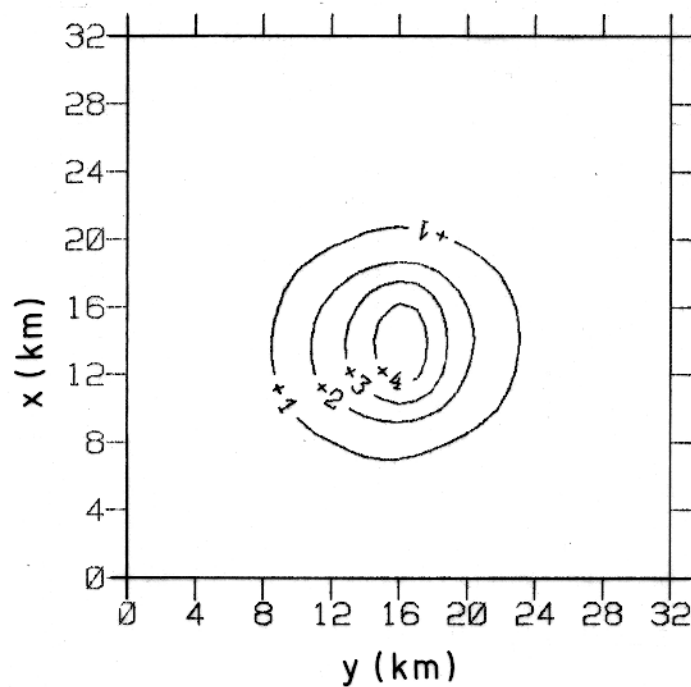
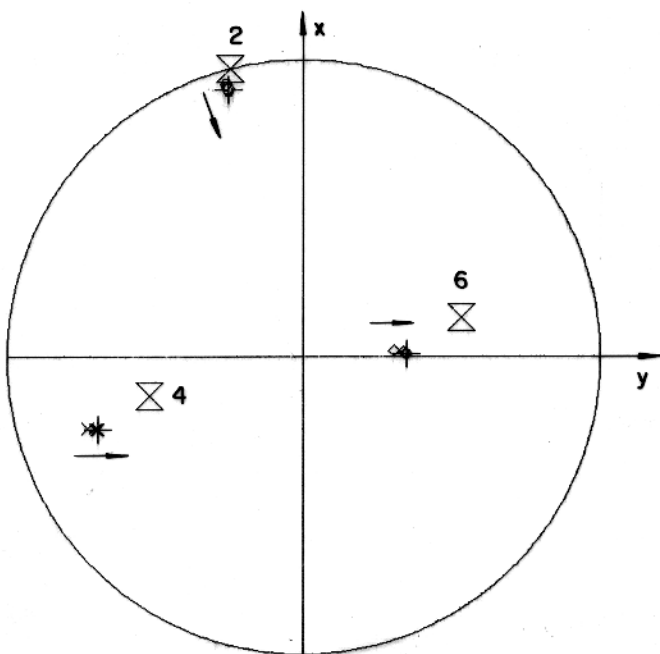


Figura 3.36 - Exemplo Gravimétrico 6: Aproximação de 2a. ordem. Intervalo de contorno de 1 mGal.

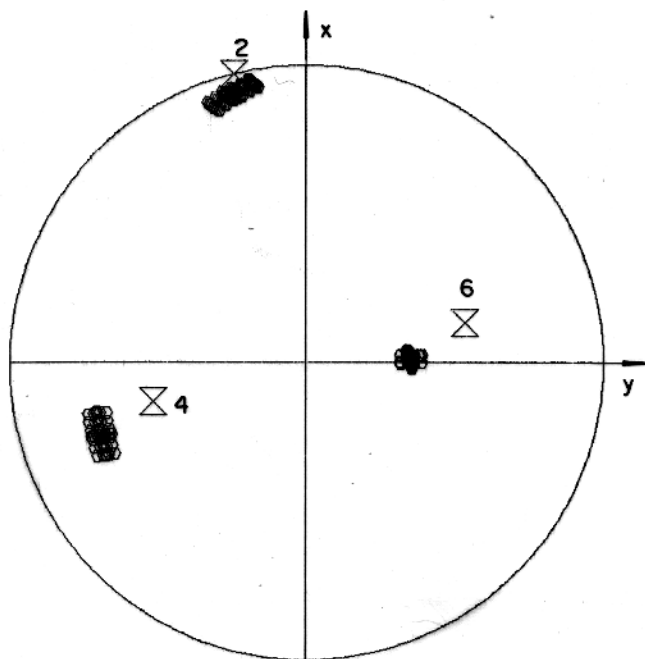


LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

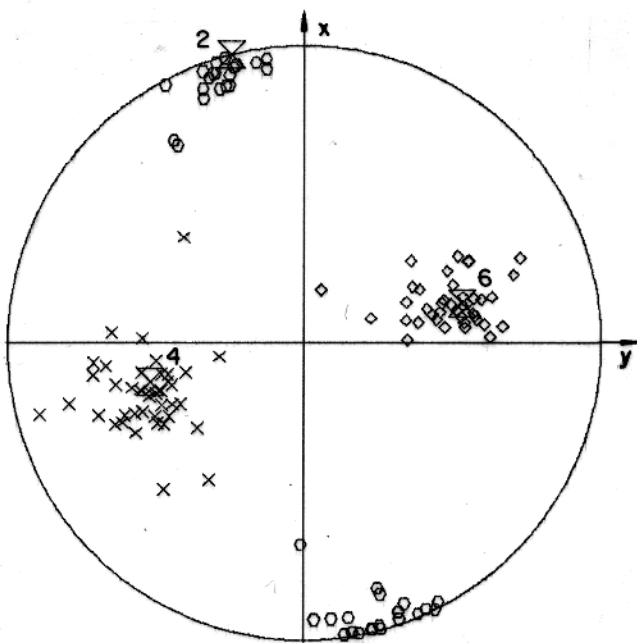
Figura 3.37 - Exemplo Gravimétrico 6: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 30 iterações.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

Figura 3.38 - Exemplo Gravimétrico 6: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.

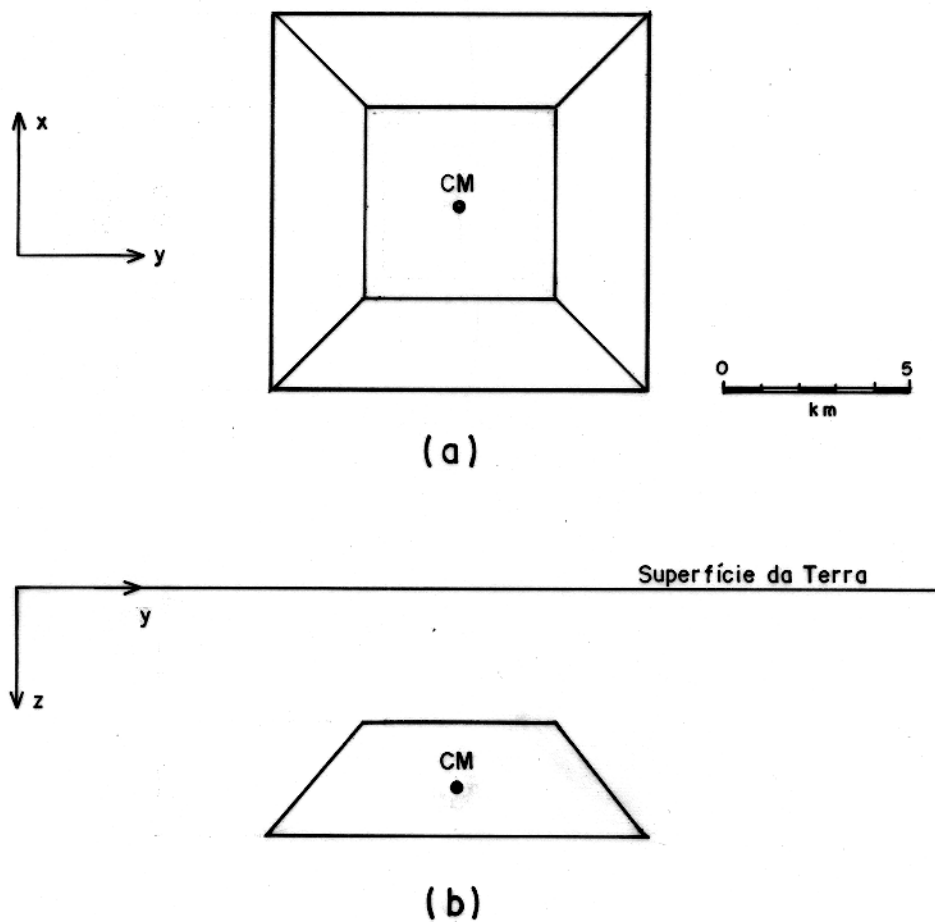


LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 3.39 - Exemplo Gravimétrico 6: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.



$\rho = 0,2 \text{ g/cm}^3$
 $\text{CM} = (14,00; 16,00; 5,32) \text{ km}$

Figura 3.40 - Exemplo Gravimétrico 7: Tronco de pirâmide usado como corpo anômalo. (a) Planta. (b) Corte vertical paralelo ao eixo y passando pelo centro de massa (CM).

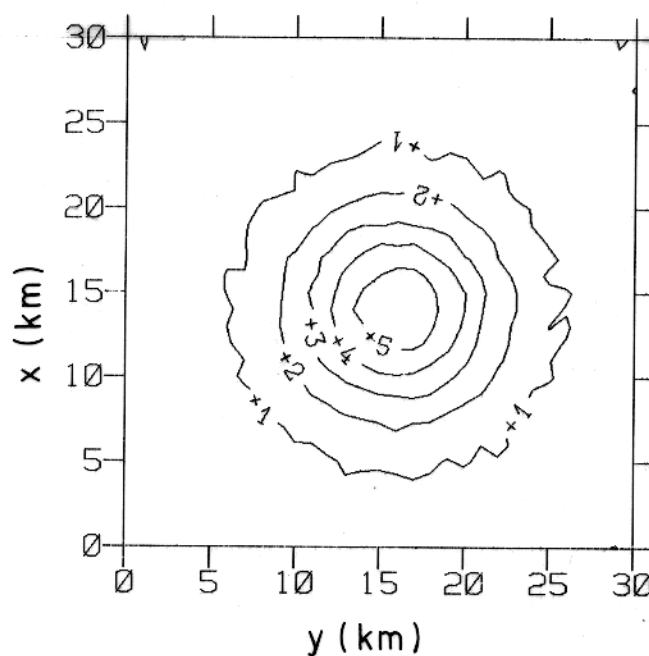


Figura 3.41 - Exemplo Gravimétrico 7: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 0,1 mGal.

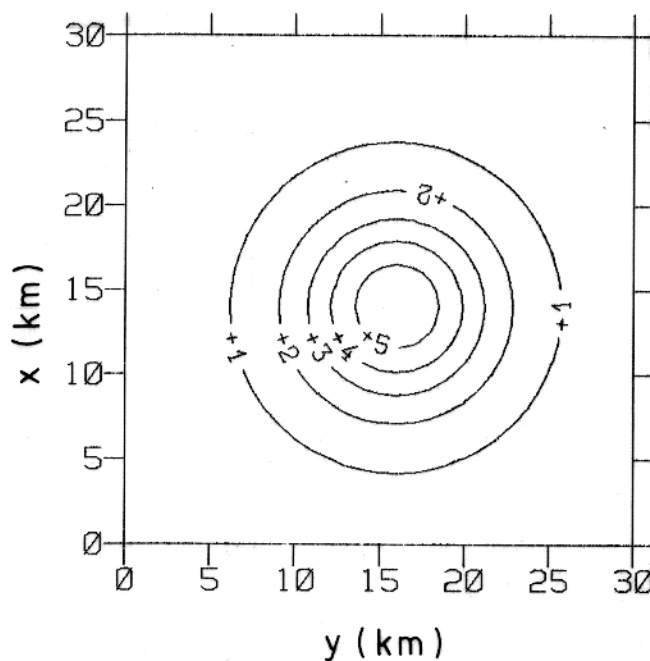
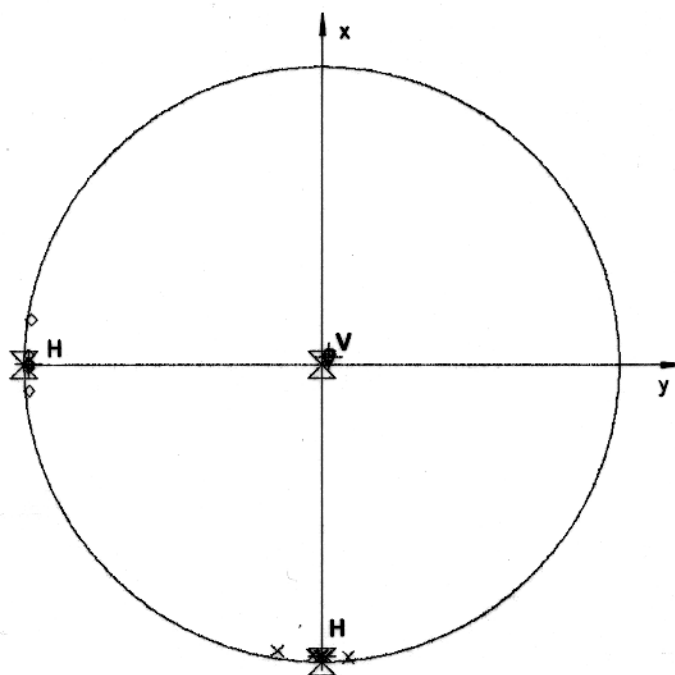


Figura 3.42 - Exemplo Gravimétrico 7: Aproximação de 2a. ordem. Intervalo de contorno de 1 mGal.

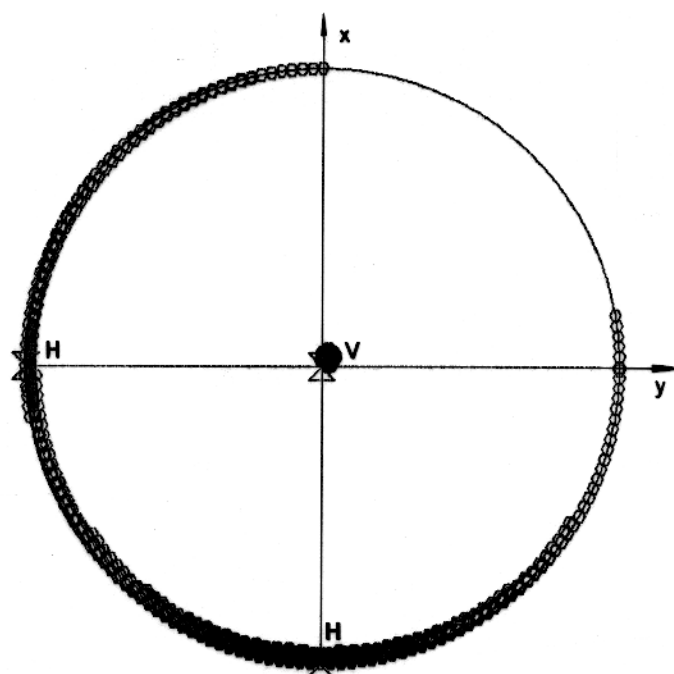


LEGENDA

$\begin{array}{c} l \\ \times \end{array}$: direções dos lados horizontais
($l = H$) e vertical ($l = V$) do
tronco de pirâmide.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais
equivalentes maior, interme-
diário e menor, repectivamen-
te.

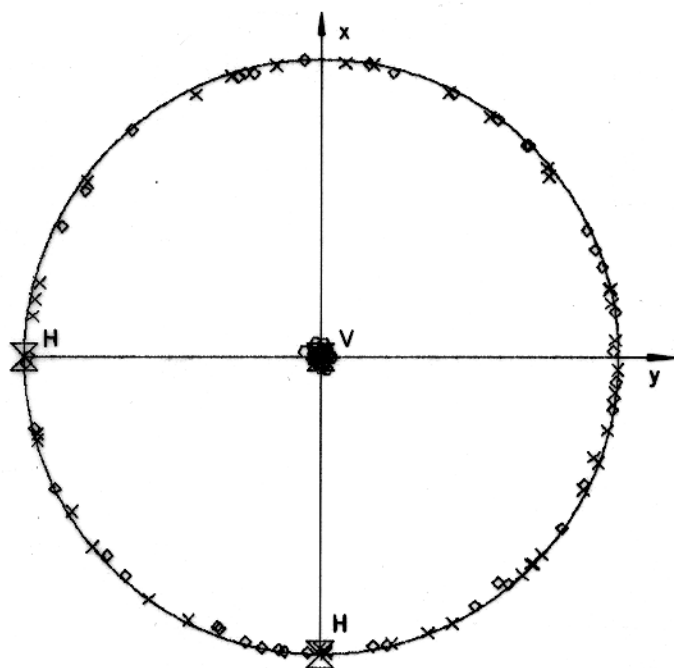
Figura 3.43 - Exemplo Gravimétrico 7: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+).



LEGENDA

$\begin{smallmatrix} l \\ \times \end{smallmatrix}$: direções dos lados horizontais ($l = H$) e vertical ($l = V$) do tronco de pirâmide.

Figura 3.44 - Exemplo Gravimétrico 7: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

$\begin{smallmatrix} l \\ \times \end{smallmatrix}$: direções dos lados horizontais ($l = H$) e vertical ($l = V$) do tronco de pirâmide.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 3.45 - Exemplo Gravimétrico 7: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

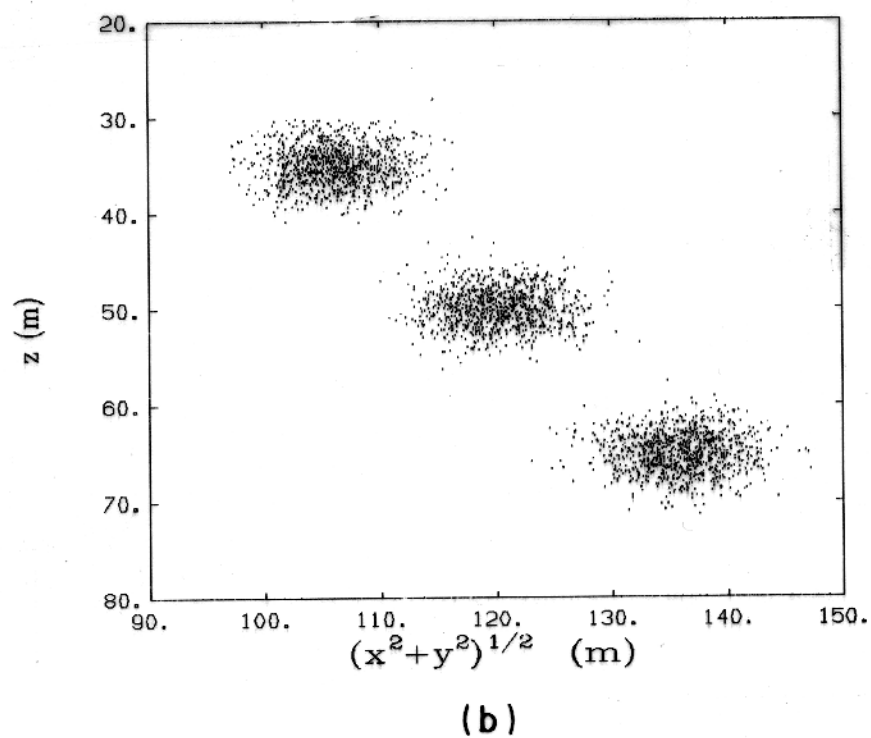
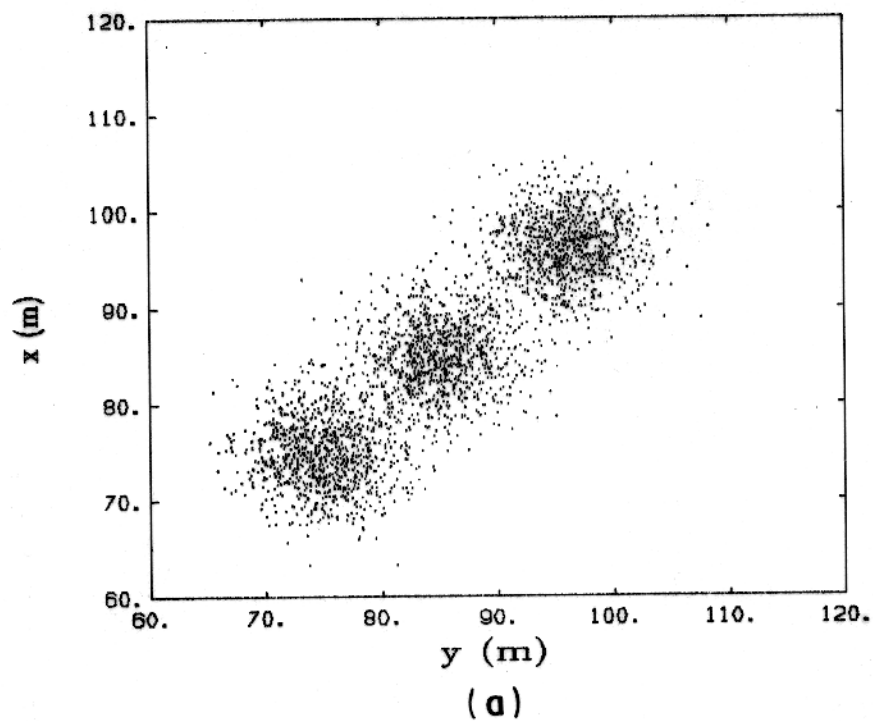
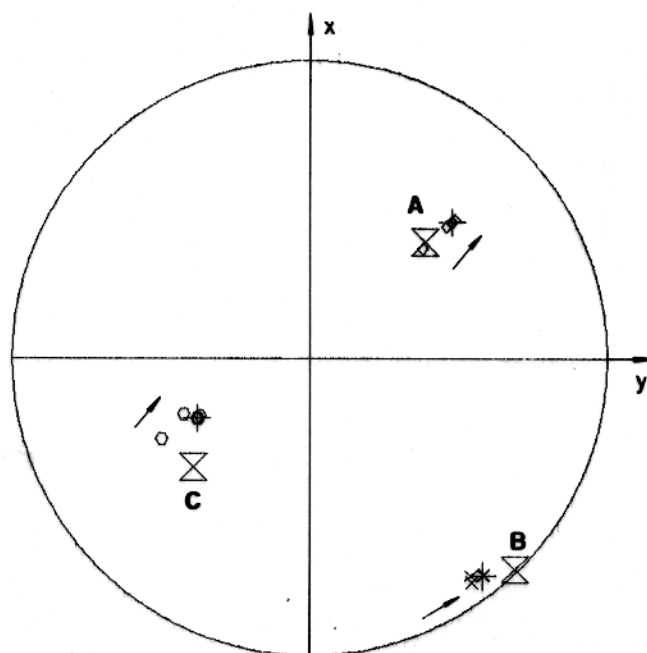


Figura 3.46 - Exemplo Gravimétrico 8: Distribuições aleatórias de massas pontuais usadas como corpo anômalo. (a) Planta. (b) Corte vertical ao longo da diagonal que passa pelo centro das nuvens.



LEGENDA

$\begin{smallmatrix} l \\ \times \end{smallmatrix}$: direções dos eixos verdadeiros
maior ($l=A$), intermediário ($l=B$)
e menor ($l=C$).

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais
equivalentes maior, interme-
diário e menor, repectivamen-
te.

Figura 3.47 - Exemplo Gravimétrico 8: Direções principais verdadeiras e estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 30 iterações.

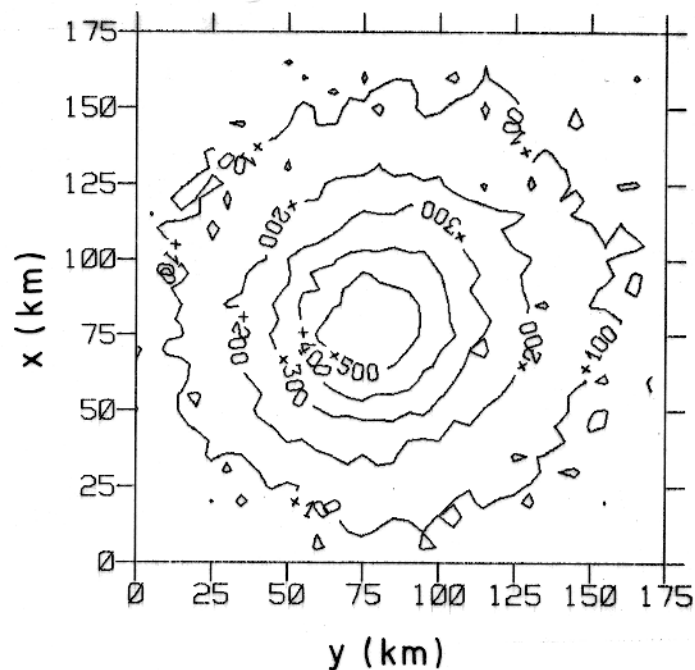


Figura 3.48 - Exemplo Gravimétrico 8: Anomalia observada. Intervalo de contorno de $100 \mu\text{Gal}$. A malha de geração contém 35×35 pontos, igualmente espaçados de 5 m, e o desvio padrão do ruído adicionado é $20 \mu\text{Gal}$.

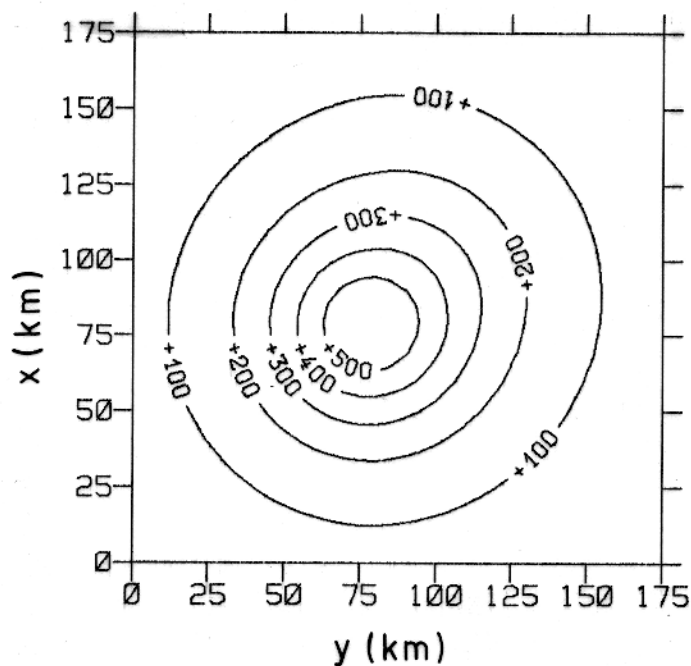
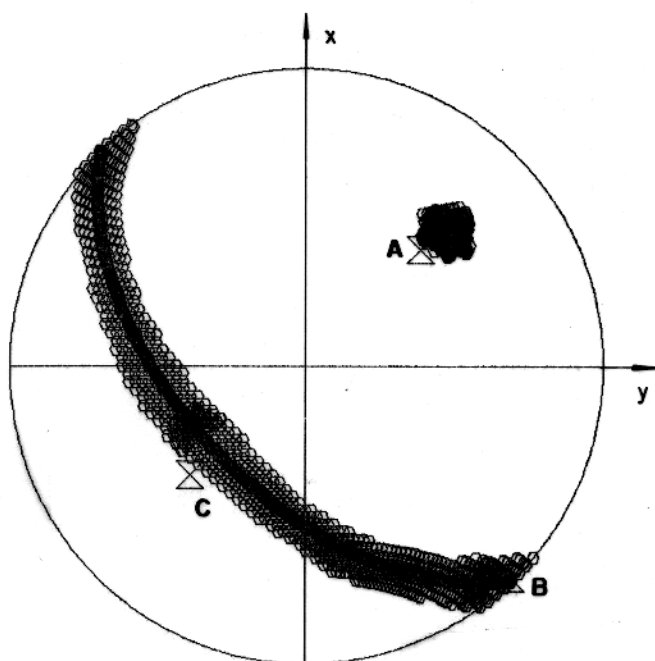


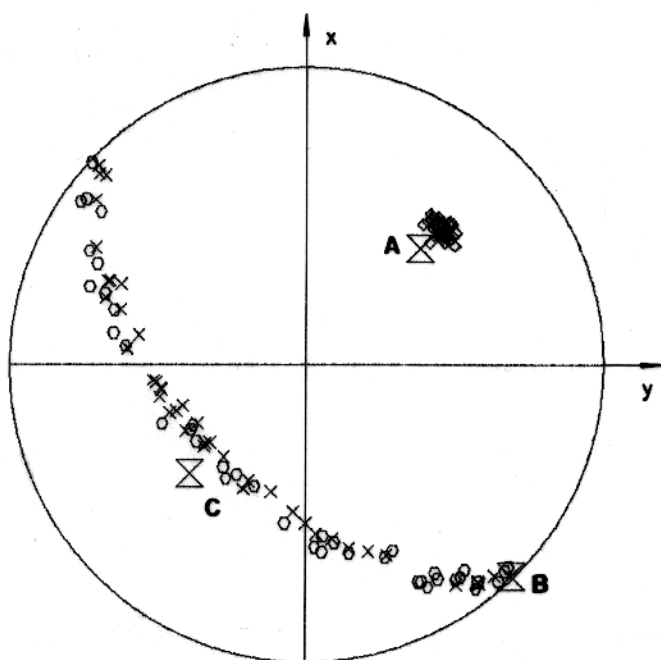
Figura 3.49 - Exemplo Gravimétrico 8: Aproximação de 2a. ordem. Intervalo de contorno de $100 \mu\text{Gal}$.



LEGENDA

l
 $\otimes$: direções dos eixos verdadeiros
maior ($l=A$), intermediário ($l=B$)
e menor ($l=C$).

Figura 3.50 - Exemplo Gravimétrico 8: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

l
 $\otimes$: direções dos eixos verdadeiros
maior ($l=A$), intermediário ($l=B$)
e menor ($l=C$).

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais
equivalentes maior, interme-
diário e menor, repectivamen-
te.

Figura 3.51 - Exemplo Gravimétrico 8: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

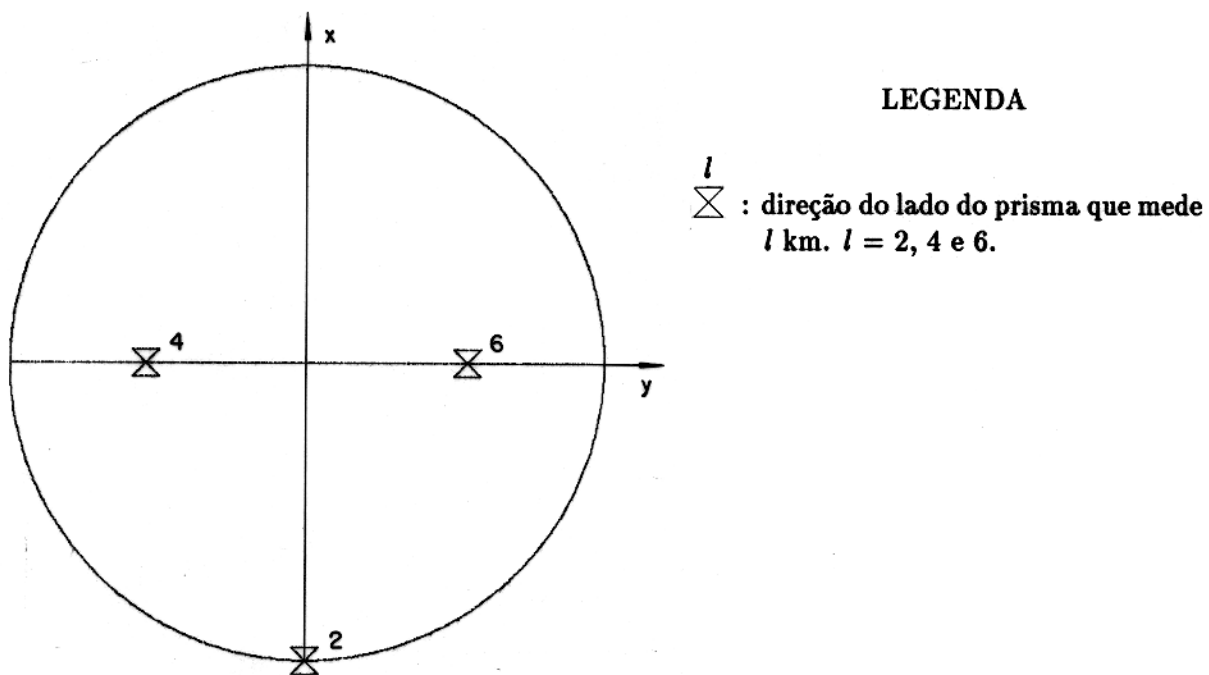


Figura 3.52 - Exemplo Gravimétrico 9: Direções principais verdadeiras do prisma.

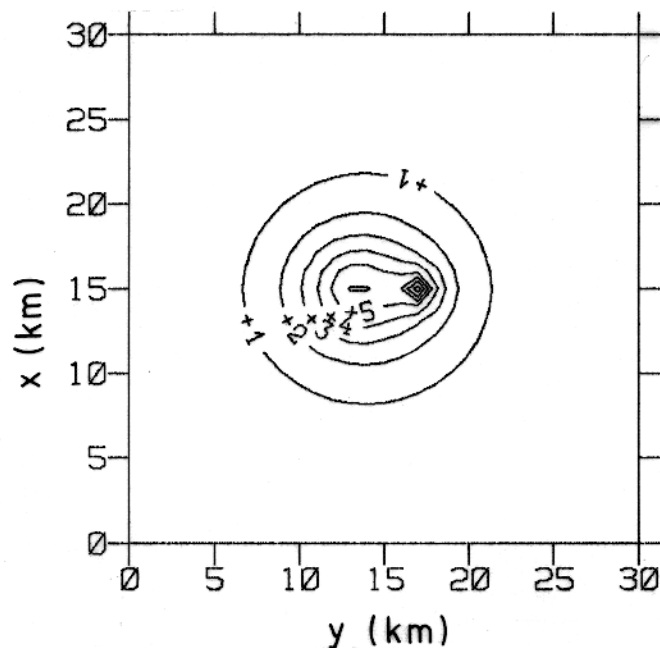


Figura 3.53 - Exemplo Gravimétrico 9 – caso 1: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km. A anomalia não está contaminada com ruído.

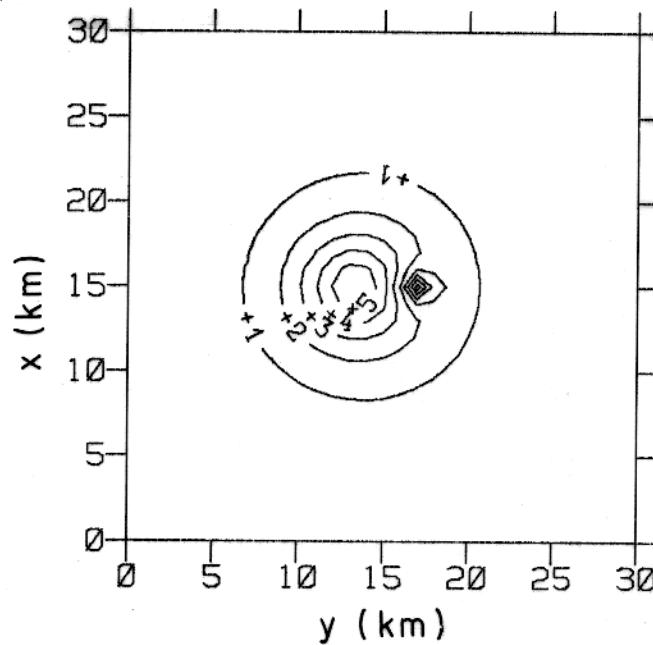


Figura 3.54 - Exemplo Gravimétrico 9 – caso 2: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 1 mGal. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km. A anomalia não está contaminada com ruído.

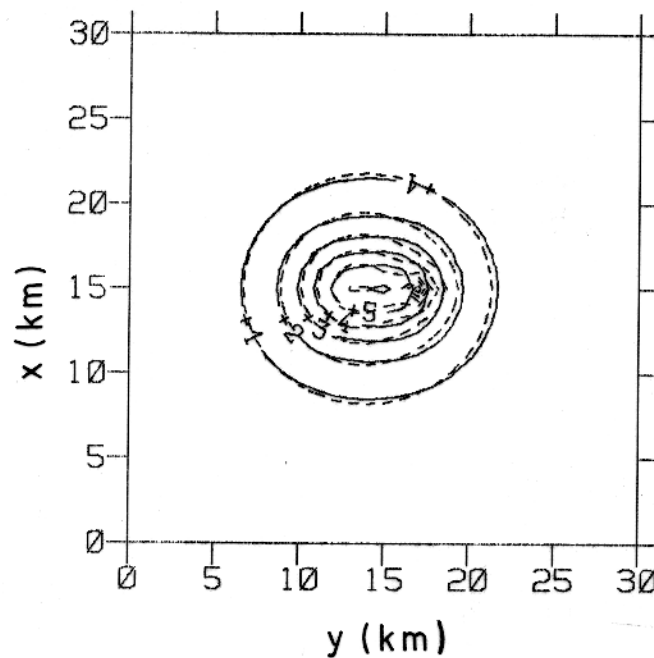


Figura 3.55 - Exemplo Gravimétrico 9 – caso 1: Aproximação de 2a. ordem (linha cheia) e anomalia observada (linha tracejada). Intervalo de contorno de 1 mGal.

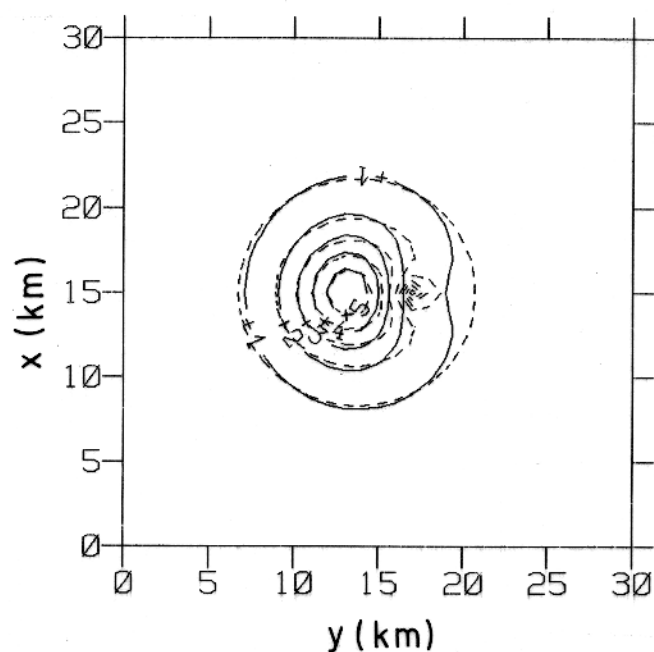
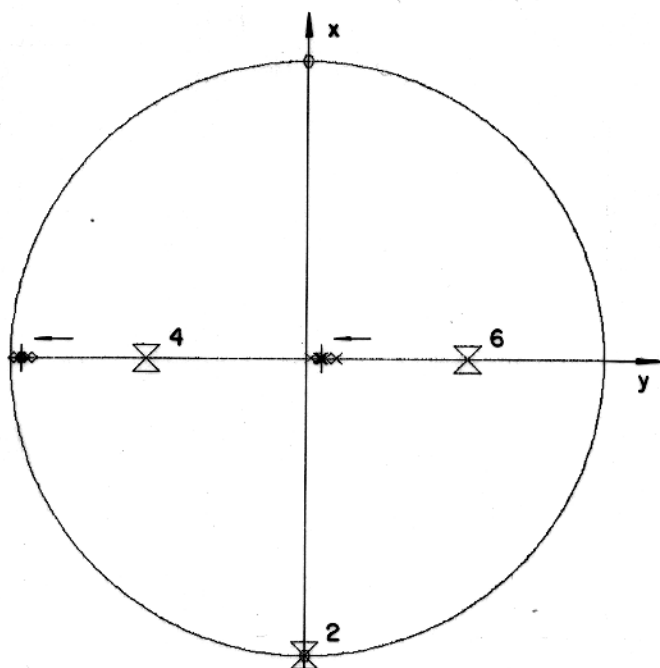


Figura 3.56 - Exemplo Gravimétrico 9 – caso 2: Aproximação de 2a. ordem (linha cheia) e anomalia observada (linha tracejada). Intervalo de contorno de 1 mGal.



LEGENDA

- $\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .
- $\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 3.57 - Exemplo Gravimétrico 9 – caso 1: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 50 iterações.

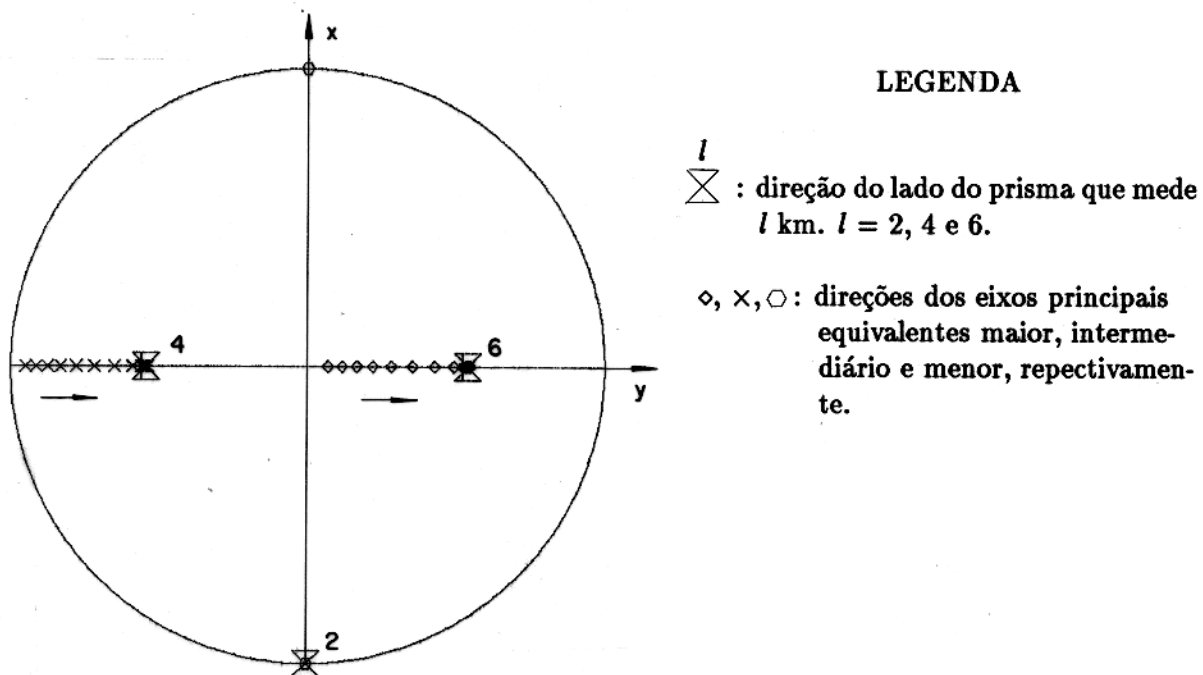


Figura 3.58 - Exemplo Gravimétrico 9 – caso 2: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 50 iterações.

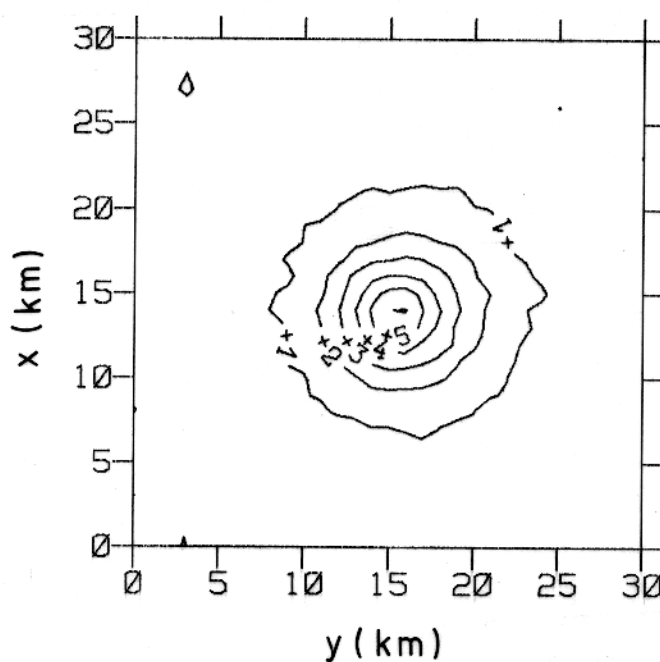


Figura 3.59 - Exemplo Gravimétrico 10: Anomalia observada (obtida somando-se 0,1 mGal à anomalia observada do Exemplo Gravimétrico 2). Intervalo de contorno de 1 mGal.

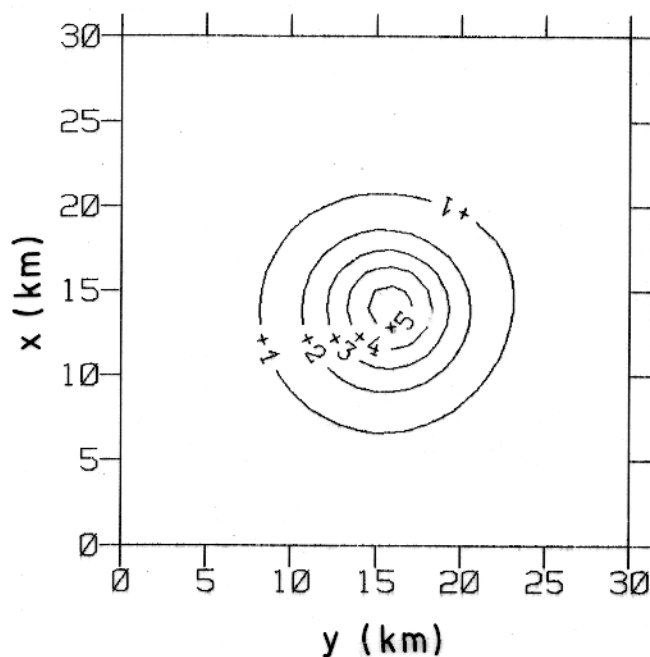


Figura 3.60 - Exemplo Gravimétrico 10: Aproximação de 2a. ordem. Intervalo de contorno de 1 mGal.

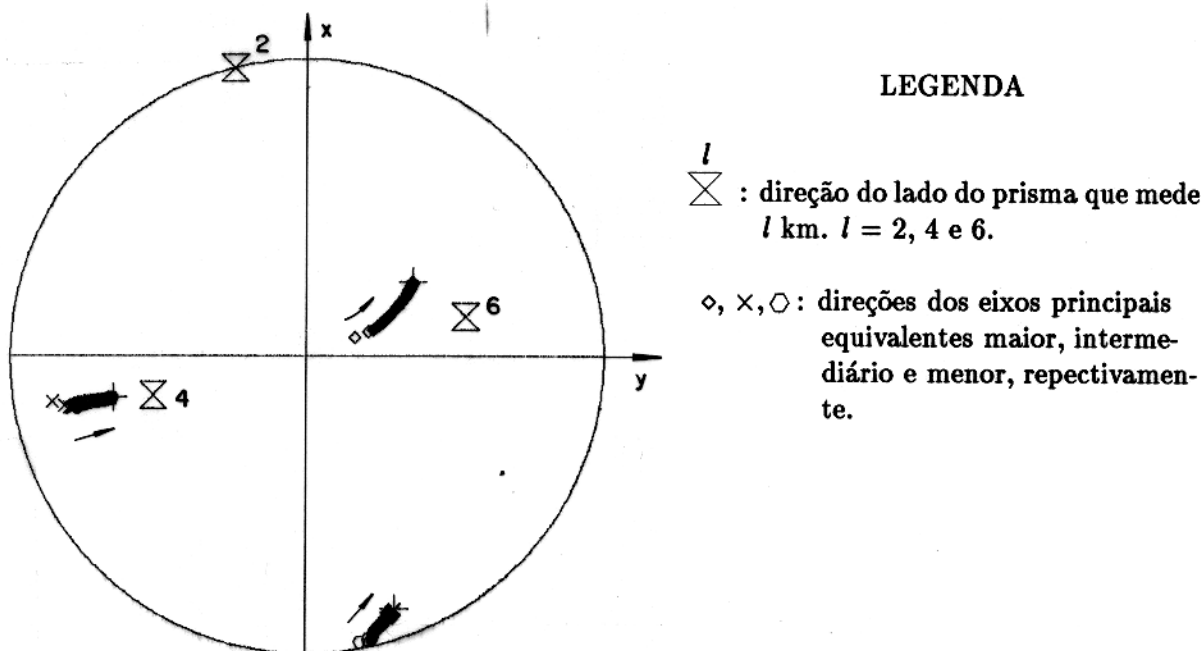


Figura 3.61 - Exemplo Gravimétrico 10: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 1000 iterações.

ANEXO III - ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DE UMA COMPONENTE REGIONAL E DE MOMENTOS DE FONTE DO CAMPO ANÔMALO

É possível se alterar o método de inversão de momentos, que se baseia na série truncada obtida da expansão em multipolos do potencial, para estimar *simultaneamente* com os momentos um regional superposto à anomalia isolada. Esta alteração é apresentada, a seguir, para o caso gravimétrico.

Vamos adicionar à série truncada em momentos de 2a. ordem, dada pela equação (3.4), uma componente regional na forma de um polinômio $p \equiv p(x, y)$, por exemplo, do segundo grau. Assim fazendo, obtemos a seguinte expressão para o campo gravimétrico:

$$g = \Psi^0 \mu_0 + \Psi^x \mu_x + \Psi^y \mu_y + \Psi^z \mu_z + \Psi^{xy} \mu_{xy} + \Psi^{xz} \mu_{xz} + \frac{1}{2} \Psi^{yy} (\mu_{yy} - \mu_{xx}) \\ + \Psi^{yz} \mu_{yz} + \frac{1}{2} \Psi^{zz} (\mu_{zz} - \mu_{xx}) + a_0 + a_x x + a_y y + a_{xy} xy + a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2, \quad (\text{III.1})$$

em que $a_0, a_x, \dots, a_{yy}$ são os coeficientes do polinômio $p(x, y)$ e, por simplicidade, o índice k , referente à identificação do ponto de medida do campo na superfície da Terra, não foi conservado na passagem da equação (3.4) para a equação (III.1).

Antes de usar a equação (III.1), é conveniente aplicar aos termos do polinômio $p(x, y)$ o mesmo tipo de normalização que foi utilizado no na Seção 3.1 para obter a equação (3.4). Para tanto, basta reescrever $p(x, y)$ como:

$$p = a_0 + (a_x l) \left(\frac{x}{l} \right) + (a_y l) \left(\frac{y}{l} \right) + (a_{xy} l^2) \left(\frac{x \cdot y}{l^2} \right) + (a_{xx} l^2) \left(\frac{x^2}{l^2} \right) + (a_{yy} l^2) \left(\frac{y^2}{l^2} \right),$$

em que l é a mesma distância utilizada para normalizar os momentos na equação (3.2). Podemos agora definir os novos coeficientes $\alpha_0, \alpha_x, \dots, \alpha_{yy}$ do polinômio normalizado $p_N(x, y)$ como sendo $a_0, (a_x l), \dots, (a_{yy} l^2)$, respectivamente. Além disso, podemos definir as funções-bases P^i (com $i = 0, x, y, xy, xx, yy$) do polinômio normalizado $p_N(x, y)$ como sendo:

$$P^0 = 1, \quad (\text{III.2})$$

$$P^x = \frac{x}{l}, \quad (\text{III.3})$$

$$P^y = \frac{y}{l}, \quad (\text{III.4})$$

em direção e sentido, mas não em módulo, e que a distribuição espacial do módulo da magnetização tenha três planos mutuamente ortogonais de simetria. Todas as hipóteses, exceto a de direção de magnetização constante, são conseqüências do truncamento da expansão em multipolos em momentos de 2a. ordem.

O uso de momentos torna independente da forma geométrica e predominantemente linear a estimação dos parâmetros de uma fonte magnética, desde que esta satisfaça as hipóteses acima. Assim, o método poderá ser aplicado a uma ampla classe de anomalias magnéticas tridimensionais, a exemplo daquelas cujas fontes possam ser aproximadas por prismas, elipsóides, cilindros, esferas e até mesmo distribuições aleatórias simétricas de fontes pontuais.

A expansão em multipolos do campo magnético foi efetuada utilizando a componente vertical ao invés da componente total. Além da simplicidade na dedução, a razão da escolha da componente vertical foi a de obter a situação análoga à do caso gravimétrico, que também se baseia nas medidas da componente vertical do campo gravimétrico. Assim, os resultados obtidos no Capítulo 2, para o caso gravimétrico, são mais facilmente adaptados para o caso magnético.

Ressaltemos que o uso da componente vertical, ao invés da componente total, não se constitui numa restrição ao método. Primeiro, porque toda a dedução que se segue pode ser generalizada para campo total. Segundo, porque existem operações estáveis (pelo menos em regiões distantes do equador magnético), que transformam anomalias de campo vertical em anomalias de campo total, e vice-versa (GUNN, 1975), indicando-nos que estes dois campos contêm a mesma informação sobre os momentos de fonte. Por fim, porque mostraremos neste capítulo que os campos magnético vertical e gravimétrico são descritos por combinações lineares das mesmas funções-bases, o que implica que qualquer componente de campo magnético, inclusive a componente total, é também descrita por combinações lineares das mesmas funções-bases. Isso indica, mais uma vez, que as informações sobre os momentos contidas na componente total (ou em qualquer outra componente) estão também contidas na componente vertical.

4.1 EXPANSÃO EM MULTIPOLOS DO CAMPO MAGNÉTICO VERTICAL

Seja um corpo anômalo de volume finito v_0 , submetido a um contraste de magnetização $\vec{M}$ constante em direção e sentido, mas podendo variar em módulo. A componente vertical V do campo magnético anômalo gerada por $\vec{M}$ é dada por (GUNN, 1975):

$$V \equiv V(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial m} \int_{v_0} M(\vec{r}') \Phi(\vec{r}, \vec{r}') dv_0, \quad (4.1)$$

em que

$$\Phi \equiv \Phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{z - z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.2)$$

é a função de Green, sendo $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ um ponto arbitrário de medida e $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$ um ponto dentro do volume das fontes, ambos no sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) em que $x - y$ é a superfície plana da Terra e z é positivo para baixo. Além disso

$$\frac{\partial}{\partial m} \equiv \cos d \cos i \frac{\partial}{\partial x} + \sin d \cos i \frac{\partial}{\partial y} + \sin i \frac{\partial}{\partial z} \equiv a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.3)$$

é a derivada na direção de $\vec{M}$, definida pelo **azimute** d em relação ao eixo x e pela **inclinação** i .

Seguindo GOL'TSMAN (1970), vamos expandir $\Phi(\vec{r}, \vec{r}')$, dada pela equação (4.2), numa série de Taylor no entorno de $\vec{r}' = \vec{r}_0' \equiv (x_0', y_0', z_0')$, retendo momentos até 2a. ordem inclusive. Presumindo que a direção de magnetização é desconhecida, obtemos a seguinte aproximação para o campo V definido na equação (4.1):

$$\begin{aligned} V = & \Phi^x M_0^x + \Phi^y M_0^y + \Phi^z M_0^z + \Phi^{xy} (M_x^y + M_y^x) + \Phi^{xz} (M_x^z + M_z^x) + \Phi^{yy} (M_y^y - M_x^x) \\ & + \Phi^{yz} (M_y^z + M_z^y) + \Phi^{zz} (M_z^z - M_x^x) + \Phi^{xyy} (M_{xy}^y + D_{yx}^x) + \Phi^{xyz} (M_{xy}^z + M_{xz}^y + M_{yz}^x) \\ & + \Phi^{xxx} (M_{xz}^z + D_{zx}^x) + \Phi^{yyy} (D_{yx}^y - M_{xy}^x) + \Phi^{yyz} (D_{yx}^z + M_{yz}^y - M_{xz}^x) \\ & + \Phi^{yzz} (D_{zx}^y + M_{yz}^z - M_{xy}^x) + \Phi^{zzz} (D_{zx}^z - M_{xz}^x), \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que

$$\Phi^x = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0'}, \quad (4.5)$$

analogamente para Φ^y e Φ^z ,

$$\Phi^{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial y'} \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0'}, \quad (4.6)$$

analogamente para Φ^{xz} , Φ^{yy} , Φ^{yz} e Φ^{zz} , e

$$\Phi^{xyz} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x' \partial y' \partial z'} \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0'}, \quad (4.7)$$

analogamente para Φ^{xyy} , Φ^{xxx} , Φ^{yyy} , Φ^{yyz} , Φ^{yzz} e Φ^{zzz} . Além disso, os valores *verdadeiros* dos momentos são definidos como:

$$M_0^x = M_0 \cdot a, \quad (4.8)$$

$$M_0^y = M_0 \cdot b, \quad (4.9)$$

$$M_0^z = M_0 \cdot c, \quad (4.10)$$

estando os **cossenos diretores** da magnetização a , b e c implicitamente definidos na equação (4.3), e sendo

$$M_0 = \int_{v_0} M(\vec{r}') dv_0, \quad (4.11)$$

$$M_x^x = M_x \cdot a, \quad (4.12)$$

$$M_x^y = M_x \cdot b, \quad (4.13)$$

$$M_x^z = M_x \cdot c, \quad (4.14)$$

$$M_x = \int_{v_0} (x' - x'_0) M(\vec{r}') dv_0, \quad (4.15)$$

analogamente para M_y^x , M_y^y , M_y^z , M_z^x , M_z^y e M_z^z ,

$$D_{yx}^x = \frac{1}{2} (M_{yy} - M_{xx}) \cdot a, \quad (4.16)$$

$$D_{yx}^y = \frac{1}{2} (M_{yy} - M_{xx}) \cdot b, \quad (4.17)$$

$$D_{yx}^z = \frac{1}{2} (M_{yy} - M_{xx}) \cdot c, \quad (4.18)$$

$$M_{xx} = \int_{v_0} (x' - x'_0)^2 M(\vec{r}') dv_0, \quad (4.19)$$

$$M_{yy} = \int_{v_0} (y' - y'_0)^2 M(\vec{r}') dv_0,$$

analogamente para D_{zx}^x , D_{zx}^y e D_{zx}^z , e

$$M_{xy}^x = M_{xy} \cdot a, \quad (4.20)$$

$$M_{xy}^y = M_{xy} \cdot b, \quad (4.21)$$

$$M_{xy}^z = M_{xy} \cdot c, \quad (4.22)$$

$$M_{xy} = \int_{v_0} (x' - x'_0)(y' - y'_0) M(\vec{r}') dv_0, \quad (4.23)$$

analogamente para M_{xz}^x , M_{xz}^y , M_{xz}^z , M_{yz}^x , M_{yz}^y e M_{yz}^z .

Podemos identificar M_0 , na equação (4.11), como o módulo do momento de dipolo total, bem como relacionar M_x , M_y e M_z , na equação (4.15) e similares, com as coordenadas do centro de momento de dipolo x_{CM} , y_{CM} e z_{CM} por

$$x_{CM} = \frac{M_x}{M_0} + x'_0, \quad (4.24)$$

$$y_{CM} = \frac{M_y}{M_0} + y'_0, \quad (4.25)$$

$$z_{CM} = \frac{M_z}{M_0} + z'_0,$$

em que (x'_0, y'_0, z'_0) é o centro de expansão. Além disso, podemos obter as direções dos eixos principais a partir das condições necessárias para diagonalizar a matriz de espalhamento

$$\overline{\overline{E}} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{xy} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{xz} & M_{yz} & M_{zz} \end{pmatrix},$$

estando os termos de $\overline{\overline{E}}$ definidos nas equações (4.19), (4.23) e similares. Observemos que estas definições são análogas às do caso gravimétrico.

Ressaltemos que a rigor deveríamos acrescentar o índice * na notação dos momentos magnéticos, presentes na série truncada dada pela equação (4.4), para distingui-los dos momentos verdadeiros que compõem a expansão em multipolos exata contendo infinitos termos. Todavia, para não carregar ainda mais a notação matemática, isso não foi feito.

Presumindo que o campo magnético é conhecido apenas num conjunto de N pontos da superfície da Terra, podemos escrever a equação (4.4) como

$$\overline{V} = \overline{\overline{\Phi}} \overline{M}, \quad (4.26)$$

em que $\overline{V}$ é um vetor de N elementos, sendo o k -ésimo deles, V_k , a componente vertical do campo anômalo medido em $(x_k, y_k, 0)$ e $\overline{M}$ é o vetor de momentos, ou combinações de momentos, arranjados na seqüência em que aparecem na equação (4.4). Além disso, $\overline{\overline{\Phi}}$ é a matriz $N \times 15$, cujo elemento $\Phi_{k,j}$ é a função Φ^j calculada no ponto $(x_k, y_k, 0)$, sendo Φ^j , (com $j = x, y, z, \dots, zzz$) definida por uma das equações (4.5), (4.6), (4.7) e análogas.

4.2 NORMALIZAÇÃO DAS FUNÇÕES-BASES E DOS MOMENTOS

Vamos reescrever a equação (4.4) como

$$\begin{aligned} T = & (\Phi^x l^3) \cdot (M_0^x / l^3) + \dots + (\Phi^{xy} l^4) \cdot [(M_x^y + M_y^x) / l^4] + \dots \\ & + (\Phi^{zzz} l^5) [(D_{zz}^z - M_{zz}^x) / l^5], \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que l é uma distância de normalização pre-especificada, de mesma ordem de grandeza que z'_0 .

Definindo Ψ^x e μ_0^x como

$$\Psi^x = \Phi^x l^3$$

e

$$\mu_0^x = M_0^x / l^3,$$

e agindo de modo similar para os demais termos da equação (4.27), podemos reescrever a equação (4.26) como

$$\bar{V} = \bar{\bar{\Psi}} \bar{\mu}. \quad (4.28)$$

Os elementos da linha k de $\bar{\bar{\Psi}}$ são dados por:

$$\Psi_k^x = 3c_x c_z \lambda^3, \quad (4.29)$$

$$\Psi_k^y = 3c_y c_z \lambda^3, \quad (4.30)$$

$$\Psi_k^z = (3c_z^2 - 1) \lambda^3, \quad (4.31)$$

$$\Psi_k^{xy} = 15c_x c_y c_z \lambda^4, \quad (4.32)$$

$$\Psi_k^{xz} = 3c_x (5c_z^2 - 1) \lambda^4, \quad (4.33)$$

$$\Psi_k^{yy} = 3c_z (5c_y^2 - 1) \lambda^4, \quad (4.34)$$

$$\Psi_k^{yz} = 3c_y (5c_z^2 - 1) \lambda^4, \quad (4.35)$$

$$\Psi_k^{zz} = 3c_z (5c_z^2 - 3) \lambda^4, \quad (4.36)$$

$$\Psi_k^{xyy} = 15c_x c_z (7c_y^2 - 1) \lambda^5, \quad (4.37)$$

$$\Psi_k^{xyz} = 15c_x c_y (7c_z^2 - 1) \lambda^5, \quad (4.38)$$

$$\Psi_k^{xzz} = 15c_x c_z (7c_z^2 - 3) \lambda^5, \quad (4.39)$$

$$\Psi_k^{yyy} = 15c_y c_z (7c_y^2 - 3) \lambda^5, \quad (4.40)$$

$$\Psi_k^{yyz} = 3 \left[(5c_y^2 - 1)(5c_z^2 - 1) + 10c_y^2 c_z^2 \right] \lambda^5, \quad (4.41)$$

$$\Psi_k^{yzz} = 15c_y c_z (7c_z^2 - 3) \lambda^5, \quad (4.42)$$

$$\Psi_k^{zzz} = 3 \left[(5c_z^2 - 3)(5c_z^2 - 1) + 10(c_z^2 - 1)c_z^2 \right] \lambda^5, \quad (4.43)$$

em que

$$c_x = \frac{x_k - x'_0}{R},$$

$$c_y = \frac{y_k - y'_0}{R},$$

$$c_z = -\frac{z'_0}{R},$$

$$\lambda = \frac{l}{R}$$

e

$$R = \sqrt{(x_k - x'_0)^2 + (y_k - y'_0)^2 + z'_0{}^2},$$

sendo $(x_k, y_k, 0)$ um ponto de observação e (x'_0, y'_0, z'_0) o centro de expansão.

Observemos que os elementos de $\bar{\Psi}$ são adimensionais e que todos os elementos de $\bar{\mu}$ têm a mesma dimensão, que é a dimensão de campo magnético. Em todos os exemplos de inversão a serem apresentados, utilizaremos sempre a equação (4.28), ao invés da equação (4.26), pois a primeira permite maior estabilidade numérica (do que a segunda) nas estimativas dos momentos e seus resultados são de mais fácil interpretação pelo fato de seus momentos terem a mesma dimensão.

4.3 GENERALIZAÇÃO PARA O CASO MAGNÉTICO DOS RESULTADOS OBTIDOS NO CAPÍTULO 2

Os campos magnético e gravimétrico são descritos por combinações lineares das *mesmas* funções—bases. Esta afirmação pode ser constatada comparando-se as definições das funções—bases, dadas pelas equações (4.29) a (4.43) no caso magnético, e equações (3.6) a (3.14) no caso gravimétrico. Todas estas funções são originadas por derivações sucessivas de uma única função, cujo comportamento básico é o decaimento com o inverso da distância às fontes. Em consequência, existe uma identidade matemática subjacente entre os campos magnético e gravimétrico. Esta identidade será utilizada nesta seção para sugerir ou generalizar, para o caso magnético, os resultados obtidos no Capítulo 2 sobre a inversão de momentos de fonte gravimétrica.

4.3.1 Inversão de momentos conhecendo-se apenas a anomalia magnética

A identificação dos momentos, ou combinações de momentos magnéticos, que podem ser determinados conhecendo-se apenas a anomalia magnética, pode ser feita através da adaptação para o caso magnético da metodologia desenvolvida na Seção 2.2 para o caso gravimétrico. Todavia, não faremos nesta tese esta generalização, pois optamos por dar ênfase e atenção ao fato novo no caso magnético, que é o desacoplamento dos efeitos nos momentos provocados pela direção da magnetização. Não obstante, com o objetivo de proporcionar uma fonte de intuição para futuras investigações, no caso magnético, na linha de inversão sem o uso de informação a priori, vamos aqui fazer alguns comentários sobre a inversão de momentos magnéticos nesta situação. Por simplicidade, vamos descartar a ocorrência das distribuições patológicas de magnetização.

No caso da hipótese feita na Seção 2.4 estar correta, a determinação de um dado momento

sem o uso de informação a priori, seria uma consequência apenas das propriedades da função-base da qual ele atua como coeficiente na expansão em multipolos. No restante desta seção, vamos admitir a validade desta hipótese e verificar quais são as suas consequências no caso magnético.

Podemos sugerir, a partir do exame da equação (4.4), que os momentos, ou combinações de momentos magnéticos, até 2a. ordem, que podem ser estimados sem a necessidade de informação a priori são: M_0^x , M_0^y , $M_x^y + M_y^x$, $M_y^y - M_x^x$, $M_{xy}^y + D_{yx}^x$ e $D_{yx}^y - M_{xy}^x$. Além disso, podemos reconhecer que o coeficiente de Φ^0 é sempre nulo, uma vez que esta função não está presente na equação (4.4).

Os dois primeiros momentos da lista acima (M_0^x e M_0^y) são as componentes no plano $x - y$ do momento de dipolo total. Além disso, o fato do coeficiente de Φ^0 ser sempre nulo é uma consequência da inexistência de *monopolos* magnéticos. Para as demais combinações da lista acima não temos interpretação. Contudo, podemos identificar que: (1) não é possível se determinar o momento de dipolo total, já que M_0^z não pode ser determinado, e (2) não é possível tampouco se determinar a projeção no plano $x - y$ do centro de momento de dipolo, definido pelas equações (4.24) e (4.25), porque as componentes M_x^z e M_y^z de M_x e M_y , respectivamente, não podem ser determinadas. Tomados em conjunto, estes resultados sugerem que é bastante pobre, do ponto de vista geofísico, o conjunto de informações sobre as fontes anômalas que é possível se retirar do campo magnético sem que *nenhum* vínculo sobre as fontes seja introduzido.

Observemos que na interpretação geofísica é comum se fazer a analogia entre densidade e magnetização, nos casos gravimétrico e magnético, respectivamente, o que equivale a fazer a analogia entre massa anômala total e momento de dipolo total. Todavia, do ponto de vista físico esta analogia é infundada, pois a massa anômala total é um escalar e o momento de dipolo total é um vetor, sendo estas grandezas dadas por coeficientes de funções-bases *diferentes* nas respectivas expansões em multipolos. Assim, do ponto de vista físico não existe equivalente magnético da massa anômala total, pois não existem monopolos magnéticos; o vetor momento de dipolo total é equivalente ao vetor formado pelos momentos gravimétricos de 1a. ordem e o tensor de ordem 2 magnético, que é formado por momentos de 1a. ordem, é o equivalente da matriz de espalhamento de massa.

Sob o ponto de vista acima, o momento de dipolo total não pode ser determinado porque não é possível se estimar a sua componente z , pois ela é a equivalente do momento m_z gravimétrico que não pode ser determinado. O mesmo raciocínio se aplica à projeção no plano $x - y$ do centro de momento de dipolo, pois as grandezas necessárias para defini-la são equivalentes aos momentos de 2a. ordem gravimétricos, a maioria dos quais não podem ser

determinados.

Observemos que as sugestões feitas nesta seção não estão em contradição com os resultados possíveis de serem obtidos, no caso magnético, com a aplicação da relação de Poisson. Isto acontece porque esta relação não é válida para todas as distribuições de magnetização e o seu uso implica, assim, o uso de informação a priori.

4.3.2 Inversão de momentos a partir da série truncada

Ao contrário dos resultados da seção anterior, os resultados a serem apresentados nesta seção são realmente adaptações para o caso magnético de resultados já obtidos no caso gravimétrico. Ou seja, estes resultados estão fundamentados em demonstrações matemáticas.

Na equação (4.4) os momentos foram agrupados de tal forma a forçar que o Laplaciano da função de Green Φ e as suas derivadas aparecessem como candidatos a serem funções-bases da expansão em multipolos. Como mostramos na Seção 2.3.2, após a eliminação desses candidatos, as funções restantes formam uma base (desde que a série seja finita), para funções potenciais definidas no plano $x - y$, em termos da qual o campo $V(x, y)$ pode ser representado de forma aproximada. Em consequência, a matriz de Gram $\overline{\overline{\Phi}}^T \overline{\overline{\Phi}}$, associada a $\overline{\overline{\Phi}}$ na equação (4.26), é positivo definida (DAVIS, 1975), o que garante a *unicidade* na determinação da estimativa do vetor $\overline{M}$.

Na Tabela 4.1 apresentamos a decomposição em valores singulares (LANCZOS, 1961) da matriz $\overline{\overline{\Psi}}$, definida na equação (4.28). A matriz utilizada foi calculada numa malha com 31 x 31 elementos, igualmente espaçados de 1 km, e usando o ponto (15, 15, 5), em km, como centro de expansão. Observemos que a razão entre os valores singulares extremos de $\overline{\overline{\Psi}}$ é menor que 272 (Tabela 4.1), revelando assim que esta matriz é bem condicionada, embora que esta razão já seja bem maior que o valor 32 que foi obtido para a matriz $\overline{\overline{\Psi}}$, do caso gravimétrico, calculada para a mesma grade e centro de expansão. Contudo, como mostraremos no Capítulo 5, ainda é possível se obter *estabilidade* na estimação dos momentos magnéticos.

Como no caso gravimétrico, a decomposição em valores singulares de $\overline{\overline{\Psi}}$ (Tabela 4.1) revela possíveis acoplamentos entre os momentos magnéticos. Estes acoplamentos são consequências da não ortogonalidade entre as funções-bases geradoras de $\overline{\overline{\Psi}}$. De acordo com a Tabela 4.1, a base de funções apresenta quatro subespaços ortogonais entre si, condicionando o aparecimento de quatro grupos de momentos, ou combinações de momentos, internamente acoplados. São eles: grupo 1 formado por M_0^x , $M_x^z + M_z^x$, $M_{xy}^y + D_{yx}^x$ e $M_{xz}^z + D_{zx}^x$; grupo 2 formado por M_0^y , $M_y^z + M_z^y$, $D_{yx}^y - M_{xy}^x$ e $D_{zx}^y + M_{yz}^z - M_{xy}^x$; grupo 3 formado por M_0^z ,

Tabela 4.1 - Resultados da decomposição em valores singulares da matriz $\bar{\Psi}$. Em cada coluna da tabela, os quinze primeiros elementos expressam uma coluna da matriz ortogonal $\bar{V}$ (LANCZOS, 1961) e o décimo sexto elemento é o valor singular associado a esta coluna de $\bar{V}$. Os elementos de $\bar{V}$ estão multiplicados por 10^4 .

momentos	1	2	3	4	5	6	7	8
M_0^x	0	0	-167	0	0	-49	0	0
M_0^y	0	-136	0	0	0	0	123	0
M_0^z	-151	0	0	0	-84	0	0	2896
$M_x^y + M_y^x$	0	0	0	1212	0	0	0	0
$M_x^z + M_z^x$	0	0	1172	0	0	322	0	0
$M_y^z - M_z^y$	-588	0	0	0	1060	0	0	4572
$M_y^z + M_z^y$	0	957	0	0	0	0	-792	0
$M_z^z - M_x^x$	1060	0	0	0	588	0	0	-8322
$M_{xy}^y + D_{yx}^x$	0	0	2547	0	0	-9670	0	0
$M_{xy}^z + M_{xz}^y + M_{yz}^x$	0	0	0	-9926	0	0	0	0
$M_{xz}^z + D_{zx}^x$	0	0	-9598	0	0	-2526	0	0
$D_{yx}^y - M_{xy}^x$	0	6124	0	0	0	0	7906	0
$D_{yx}^z + M_{yz}^y - M_{xz}^x$	4811	0	0	0	-8682	0	0	558
$D_{zx}^y + M_{yz}^z - M_{xy}^x$	0	-7846	0	0	0	0	6071	0
$D_{zx}^z - M_{xz}^x$	-8681	0	0	0	-4810	0	0	-1067
valor singular	4492	3529	2901	1405	1243	675,6	555,5	229,6

momentos	9	10	11	12	13	14	15
M_0^x	-3280	2	0	0	0	-9445	-8
M_0^y	-2	-3280	0	0	0	8	-9445
M_0^z	0	0	0	1752	-9408	0	0
$M_x^y + M_y^x$	0	0	-9926	0	0	0	0
$M_x^z + M_z^x$	9369	-7	0	0	0	-3276	-3
$M_y^z - M_z^y$	0	0	0	-8807	-232	0	0
$M_y^z + M_z^y$	7	9366	0	0	0	3	-3276
$M_z^z - M_x^x$	0	0	0	-4231	-3372	0	0
$M_{xy}^y + D_{yx}^x$	14	0	0	0	0	0	0
$M_{xy}^z + M_{xz}^y + M_{yz}^x$	0	0	-1212	0	0	0	0
$M_{xz}^z + D_{zx}^x$	1205	-1	0	0	0	-235	0
$D_{yx}^y - M_{xy}^x$	0	42	0	0	0	0	0
$D_{yx}^z + M_{yz}^y - M_{xz}^x$	0	0	0	-1076	-28	0	0
$D_{zx}^y + M_{yz}^z - M_{xy}^x$	1	1233	0	0	0	0	-236
$D_{zx}^z - M_{xz}^x$	0	0	0	-547	-248	0	0
valor singular	145,6	145,6	68,75	61,61	23,94	16,55	16,55

$M_y^y - M_x^x$, $M_z^z - M_x^x$, $D_{yx}^z + M_{yz}^y - M_{xz}^x$ e $D_{zx}^z - M_{xz}^x$ e grupo 4 formado por $M_x^y + M_y^x$ e $M_{xy}^z + M_{yz}^y + M_{xz}^x$. Podemos identificar, nos três primeiros grupos, que uma componente do momento de dipolo total está acoplada com componentes dos momentos de 1a. ordem (dos quais retiramos as coordenadas de centro de momento de dipolo), a exemplo de M_0^x com M_x^z e M_z^x no grupo 1. Além disso, em cada um dos três primeiros grupos estão presentes também componentes das correlações e das diferenças entre dispersões, a exemplo de M_{xy}^y e D_{yx}^x no grupo 1. Estes acoplamentos podem ser globalmente interpretados como sendo uma dependência da posição do centro de momento de dipolo com a direção da magnetização e com a atitude espacial do corpo anômalo. Contudo, não temos (infelizmente) uma explicação completa e detalhada para estes acoplamentos, que são de difícil interpretação física.

Ao substituir, na equação (4.4), o campo $V(x, y)$ por uma combinação linear das funções—bases, estamos implicitamente definindo, através dos momentos que são os pesos em cada base, uma distribuição de magnetização **equivalente**, cujo campo contém contribuições não desprezíveis somente de momentos até 2a. ordem e melhor reproduz, de acordo com o critério de ajuste estabelecido, o campo $V(x, y)$ produzido pela distribuição real de magnetização. Lembremos que os valores obtidos para a distribuição de magnetização equivalente *não coincidem*, em geral, com os valores verdadeiros da distribuição real de magnetização. No entanto (como mostraremos no Capítulo 5), os valores estimados se constituem em boas estimativas dos valores verdadeiros, desde que o corpo anômalo seja convexo e tenha volume finito, que ele esteja suficientemente distante do plano de medida, que a magnetização seja constante em direção e sentido e que a distribuição do módulo da magnetização seja simétrica em relação a três planos mutuamente ortogonais. Esta última condição, da mesma forma que no caso gravimétrico, é consequência da otimização da representação do campo pela série truncada em momentos de 2a. ordem, que exige *simetria* na distribuição do módulo da magnetização.

Os **momentos magnéticos equivalentes** da distribuição de magnetização equivalente são caracterizados, como no caso gravimétrico, através da solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem. As estimativas dos momentos magnéticos equivalentes são também obtidas através do Algoritmo de Gol'tsman (que foi apresentado na Seção 2.3.1). A única diferença do caso magnético, em relação ao caso gravimétrico, é que agora em cada iteração do Algoritmo de Gol'tsman são necessárias as operações de desacoplamento dos momentos, a serem definidas na próxima seção, antes do cálculo do momento de dipolo total, centro de momento de dipolo e direções dos eixos principais. Pelas mesmas razões apresentadas na Seção 2.3.3 para o caso gravimétrico, a estimação dos momentos magnéticos equivalentes tem as propriedades de unicidade e de estabilidade assintótica.

Observemos que em consequência de $\nabla^2\Phi$ ser nulo, em toda região onde o campo magnético é amostrado, as componentes das dispersões magnéticas M_{xx} , M_{yy} e M_{zz} não podem ser determinadas. No entanto, as componentes de suas diferenças $M_{yy} - M_{xx}$, $M_{zz} - M_{xx}$ e $M_{zz} - M_{yy}$, juntamente com as componentes das correlações magnéticas, M_{xy} , M_{xz} e M_{yz} , podem ser determinadas, o que é suficiente para estimar as direções dos eixos principais da distribuição equivalente de magnetização. O fato de M_{xx} , M_{yy} e M_{zz} não poderem ser determinados é uma consequência da impossibilidade de separar, sem uma informação a priori independente, a magnetização e o volume, a partir do produto dos dois que é o momento de dipolo total.

4.4 OBTENÇÃO DE MOMENTOS NÃO DEPENDENTES DA DIREÇÃO DE MAGNETIZAÇÃO

Observemos que $\overline{M}$, na equação (4.26), contém os *produtos* de momentos, ou combinações lineares de momentos, pelos cossenos diretores a , b e c da direção da magnetização. Nesta seção, vamos mostrar como obter estimativas dos momentos que estão definidos nas equações (4.11), (4.15), (4.19), (4.23) e análogas, fazendo o que definimos como **operações de desacoplamento** dos efeitos nos momentos causados pela direção da magnetização. Por brevidade, passaremos a denominar de **momentos desacoplados** os momentos resultantes destas operações de desacoplamento.

4.4.1 Desacoplamento do momento de dipolo total

Utilizando a definição dos cossenos diretores da direção da magnetização a , b e c , na equação (4.3), e as equações (4.8) a (4.10), podemos calcular a inclinação i e o azimute d da magnetização total *equivalente* como

$$i = \arctan \left[\frac{M_0^z}{\sqrt{(M_0^x)^2 + (M_0^y)^2}} \right] \quad (4.44)$$

e

$$d = \arctan \left(\frac{M_0^y}{M_0^x} \right). \quad (4.45)$$

Uma vez conhecidos i e d , M_0 pode ser calculado por uma das três expressões a seguir:

$$M_0 = \frac{M_0^x}{\cos d \cos i}, \quad (4.46)$$

$$M_0 = \frac{M_0^y}{\sin d \cos i}, \quad (4.47)$$

$$M_0 = \frac{M_0^z}{\sin i}. \quad (4.48)$$

Observemos que as equações (4.44) e (4.45) podem conter indeterminações. Assim, alguns cuidados numéricos devem ser tomados para identificar situações limites, como a de magnetização vertical, e evitar a introdução de erros grosseiros no posterior cálculo dos momentos desacoplados. Por exemplo, o cálculo de M_0 , por uma das três equações (4.46) a (4.48), deve ser feito com a equação que contém como denominador o maior valor, em módulo, dentre os valores dos cossenos diretores da direção da magnetização.

4.4.2 Desacoplamento da posição de centro de momento de dipolo

Utilizando as definições dos momentos de 1a. ordem, nas equações (4.12) a (4.15) e análogas, e identificando as combinações dos momentos de 1a. ordem que podem ser estimadas a partir da equação (4.4), podemos construir a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ -a & b & 0 \\ 0 & c & b \\ -a & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x^y + M_y^x \\ M_x^z + M_z^x \\ M_y^y - M_x^x \\ M_y^z + M_z^y \\ M_z^z - M_x^x \end{pmatrix},$$

ou, abreviadamente,

$$\overline{\overline{A}}_1 \overline{m}_1 = \overline{M}_1. \quad (4.49)$$

Uma vez que $\overline{M}_1$ e $\overline{\overline{A}}_1$ são conhecidos, $\overline{m}_1$ pode ser estimado pois $\overline{\overline{A}}_1$ tem posto 3, como mostramos no Anexo IV. Assim, por simplicidade, podemos expressar $\overline{m}_1$, através do estimador de mínimos quadrados, como

$$\overline{m}_1 = \overline{\overline{D}}_1 \overline{M}_1, \quad (4.50)$$

em que

$$\overline{\overline{D}}_1 = \left(\overline{\overline{A}}_1^T \overline{\overline{A}}_1 \right)^{-1} \overline{\overline{A}}_1^T \quad (4.51)$$

e os superescritos T e -1 representam, respectivamente, as operações de transposição e de inversão de matrizes.

Desse modo, a equação (4.50) é a operação de desacoplamento da direção de magnetização nos momentos de 1a. ordem. Esta operação permite obter o vetor $\Delta \vec{r}_{CM} = 1/M_0(M_x, M_y, M_z)^T$, o qual fornece a translação necessária para se atingir o centro de momento de dipolo da distribuição equivalente partindo-se do centro de expansão (Figura 4.1). Podemos assim interpretar a matriz $\overline{\overline{D}}_1$, na equação (4.51), como o operador de desacoplamento nos momentos de 1a. ordem entre a direção de magnetização total e a direção de translação ao centro de momento de dipolo.

4.4.3 Desacoplamento das direções dos eixos principais

Utilizando as definições dos momentos de 2a. ordem, nas equações (4.16) a (4.23) e análogas, e identificando as combinações dos momentos de 2a. ordem que podem ser estimadas a partir da equação (4.4), podemos construir a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ c & b & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & a \\ -a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & c & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & c & b \\ 0 & -a & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{xy} \\ M_{xz} \\ D_{yx} \\ M_{yz} \\ D_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xy}^y + D_{yx}^x \\ M_{xy}^z + M_{xz}^y + M_{yz}^x \\ M_{xz}^z + D_{zx}^x \\ D_{yx}^y - M_{xy}^x \\ D_{yz}^z + M_{yz}^y - M_{xz}^x \\ D_{zx}^y + M_{yz}^z - M_{xy}^x \\ D_{zx}^z - M_{xz}^x \end{pmatrix},$$

ou, abreviadamente,

$$\overline{\overline{A}}_2 \overline{m}_2 = \overline{M}_2. \quad (4.52)$$

Uma vez que $\overline{M}_2$ e $\overline{\overline{A}}_2$ são conhecidos, $\overline{m}_2$ pode ser estimado pois $\overline{\overline{A}}_2$ tem posto 5, como mostramos no Anexo IV. Assim, por simplicidade, podemos expressar $\overline{m}_2$, através do estimador de mínimos quadrados, como

$$\overline{m}_2 = \overline{\overline{D}}_2 \overline{M}_2, \quad (4.53)$$

em que

$$\overline{\overline{D}}_2 = \left(\overline{\overline{A}}_2^T \overline{\overline{A}}_2 \right)^{-1} \overline{\overline{A}}_2^T. \quad (4.54)$$

Desse modo, a equação (4.53) é a operação de desacoplamento da direção de magnetização nos momentos de 2a. ordem, possibilitando assim que estimativas das direções dos eixos principais sejam feitas (Figura 4.1). Podemos, pois, interpretar a matriz $\overline{\overline{D}}_2$, na equação

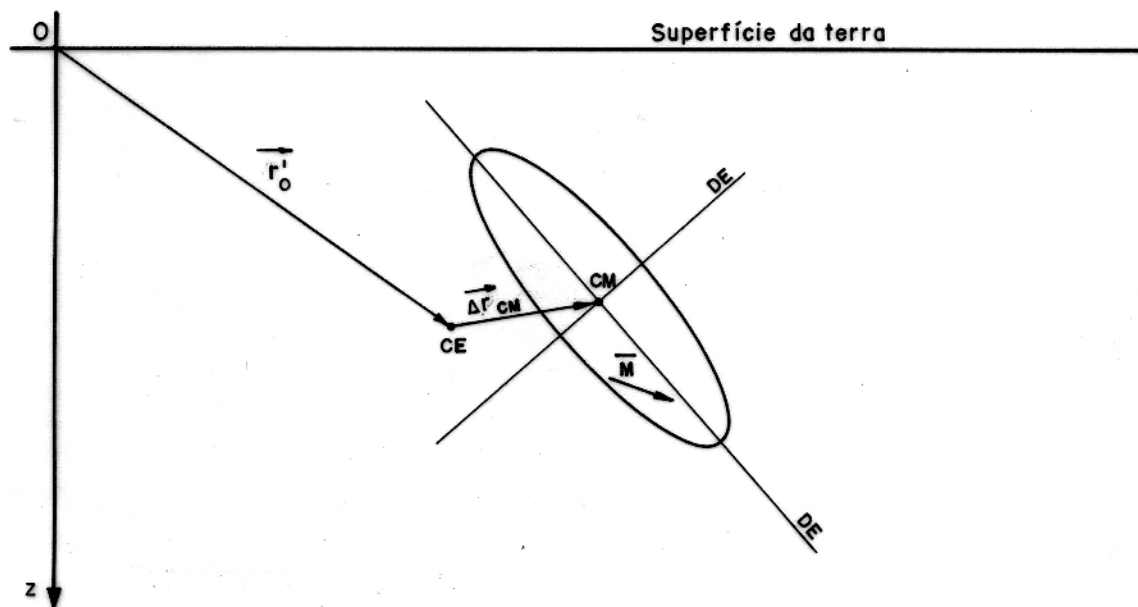
(4.54), como o operador de desacoplamento nos momentos de 2a. ordem entre a direção de magnetização total e as direções dos eixos principais equivalentes.

No Anexo IV mostramos que as operações de desacoplamento, definidas pelas equações (4.49) e (4.52), são estáveis independentemente da direção da magnetização total. Todavia, a estabilidade como um todo das estimativas de momento de dipolo total, centro de momento de dipolo e direções principais equivalentes dependem, também, da estabilidade nas estimativas das componentes dos momentos, que são obtidas através da solução da equação (4.28). Uma vez que estas componentes formarão os vetores de entrada das equações (4.49) e (4.52), a estabilidade das operações de desacoplamento apenas garante que novos erros não serão introduzidos no cálculo dos momentos desacoplados, mas os erros já contidos nas estimativas das componentes dos momentos serão transmitidos aos momentos desacoplados. Em consequência, existem situações em que as estimativas das direções principais equivalentes, por exemplo, são instáveis. Uma situação típica em que isso ocorre é aquela em que o corpo anômalo é uma esfera, como mostraremos no próximo capítulo.

Por fim, observemos que no início deste capítulo estabelecemos como condições, para poder desenvolver $V(x, y)$ em multipolos, que o corpo anômalo tivesse volume finito e magnetização constante em direção e sentido. A análise acima mostrou que estas condições são *suficientes* para assegurar o desacoplamento entre as direções dos eixos principais e do vetor magnetização total. (Lembremos que as direções dos eixos principais coincidem com os eixos geométricos do corpo quando este tem forma regular e a magnetização é constante não só em direção e sentido, mas também em módulo.)

4.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, fizemos a adaptação para o caso magnético da abordagem modificada de inversão de momentos de GOL'TSMAN (1970), gerando um método que permite a estimação *simultânea* da direção da magnetização total e da atitude espacial do corpo anômalo. Como hipóteses, supõe-se que o corpo anômalo seja convexo e tenha volume finito, que ele esteja suficientemente distante das observações, que a magnetização total seja constante em direção e sentido (mas não em módulo), e que a distribuição espacial do módulo da magnetização tenha três planos mutuamente ortogonais de simetria. O uso de momentos torna independente da forma geométrica e predominantemente linear a estimação dos parâmetros de uma fonte magnética, desde que esta satisfaça as hipóteses acima.



LEGENDA

CE = Centro de expansão dado por $\vec{r}_0$.

CM = Centro de momento de dipolo.

DE = Direções dos eixos principais.

$\vec{M}$ = Vetor magnetização.

$\Delta \vec{r}_{CM}$ = Translação de CE a CM.

Figura 4.1 - Direções a serem desacopladas.

5 - EXEMPLOS DE INVERSÃO DE ANOMALIAS MAGNÉTICAS SINTÉTICAS

Neste capítulo, apresentamos resultados da inversão de anomalias magnéticas tridimensionais sintéticas, através da aproximação das mesmas pela série truncada em momentos de 2a. ordem. Dada a identidade matemática subjacente entre os campos magnético e gravimétrico, a inversão de momentos magnéticos tem basicamente as mesmas características que a de momentos gravimétricos, tanto as positivas quanto as negativas. Assim, por brevidade, não repetimos aqui todas as situações apresentadas no Capítulo 3 para o caso gravimétrico, pois optamos por enfatizar situações típicas do caso magnético, como as de magnetização variável.

Os algoritmos utilizados são inteiramente análogos aos apresentados na Seção 3.3, para o caso gravimétrico, e, por isso, não serão descritos. A única diferença reside no fato de que as operações de desacoplamento dos momentos precisam ser inseridas em cada iteração do Algoritmo de Gol'tsman, como mostraremos a seguir.

5.1 ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO DE GOL'TSMAN PARA O CASO MAGNÉTICO

O Algoritmo de Gol'tsman é utilizado nas duas fases do Algoritmo de Estimação Pontual para se obterem as estimativas de ordens 1 e 2 dos momentos equivalentes. Estas estimativas dos momentos equivalentes são obtidas através de um processo iterativo exigindo-se, em cada iteração, o ajuste, no sentido dos mínimos quadrados, entre os campos observado e calculado. Começando-se com um centro de expansão a priori $\vec{r}_0' \equiv (x'_0, y'_0, z'_0)$, a solução da equação (4.28) (ou de sua similar com momentos até a 1a. ordem), produz estimativas para as *componentes* dos momentos, ou combinações de momentos, que são os elementos do vetor $\vec{\mu}$. Utilizando as operações de desacoplamento dos momentos magnéticos, definidas na Seção 4.4, é possível se obter estimativas dos momentos magnéticos desacoplados. Estas, por sua vez, levam a estimativas $\hat{x}_{CM}$, $\hat{y}_{CM}$ e $\hat{z}_{CM}$ através das equações

$$\begin{aligned}\hat{x}_{CM} &= \frac{\hat{\mu}_x}{\hat{\mu}_0} \cdot l + x'_0, \\ \hat{y}_{CM} &= \frac{\hat{\mu}_y}{\hat{\mu}_0} \cdot l + y'_0,\end{aligned}$$

e

$$\hat{z}_{CM} = \frac{\hat{\mu}_z}{\hat{\mu}_0 + C} \cdot l + z'_0, \quad (5.1)$$

em que $\hat{\mu}_0$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ e $\hat{\mu}_z$ sãs as estimativas dos momentos de dipolo total e de 1a. ordem em x , y e z normalizados, respectivamente, l é a distância de normalização e C é uma constante de mesmo sinal que $\hat{\mu}_0$. Estas estimativas definem um novo centro de expansão $\vec{r}'_1$, que substitui $\vec{r}'_0$, e o processo é repetido até que $\hat{x}_{CM}$, $\hat{y}_{CM}$ e $\hat{z}_{CM}$ não mudem substancialmente. De acordo com o valor de C na equação (5.1), podemos ter duas versões do Algoritmo de Estimacão Pontual: não amortecida se $C = 0$ e amortecida se $C \neq 0$.

5.2 EXEMPLOS DE INVERSÃO COM DADOS SINTÉTICOS

Apresentamos, nesta seção, cinco exemplos de inversão empregando dados sintéticos. Nestes exemplos, as anomalias magnéticas foram geradas por prismas, esferas, troncos de pirâmides e distribuições aleatórias de dipolos magnéticos.

As anomalias geradas com os corpos de geometria regular podem simular, por exemplo, anomalias causadas por grandes intrusões básicas. Em especial, o caso do tronco de pirâmide pode simular a anomalia causada por um monte submarino. Por outro lado, o exemplo com as distribuições aleatórias de dipolos magnéticos pode simular um caso de prospecção mineral. Em todos os exemplos, exceto no exemplo do tronco de pirâmide, as profundidades dos centros dos corpos são suficientemente grandes para que a condição de fonte distante das observações esteja satisfeita. Esta condição foi definida na Seção 3.4.1 e também vale para o caso magnético.

5.2.1 Exemplo Magnético 1: prisma de lados diferentes

O prisma usado tem magnetização total uniforme de 2,5 A/m, com declinação de 20° e inclinação de 30°. Além disso, todos os parâmetros geométricos do prisma, da malha de geração do campo e de controle dos algoritmos são iguais aos do Exemplo Gravimétrico 2, com excessão de L . As direções principais verdadeiras do prisma, calculadas em seu centro, juntamente com a direção da magnetização total, estão mostradas na Figura 5.1. A anomalia magnética do prisma, que está mostrada na Figura 5.2, foi calculada com o algoritmo de OKABE (1979) e contaminada com ruído de média nula e desvio padrão σ_C igual a 1 nT. Como no caso gravimétrico, vamos definir σ_1 e σ_2 como os erros médios quadráticos dos resíduos entre o campo observado e as suas aproximações de 1a. e 2a. ordens, respectivamente.

As evoluções de σ_2 e das estimativas pontuais de ordem 2 do módulo do vetor momento de dipolo total e das coordenadas de centro de momento de dipolo estão apresentadas nas Figuras 5.3.a a 5.3.d. Comparando estas figuras com as Figuras 3.16.a a 3.16.d, constatamos que as evoluções das estimativas pontuais dos momentos magnéticos são mais lentas que no caso gravimétrico.

As aproximações de 1a. e de 2a. ordens para o campo observado estão mostradas na Figura 5.4. Os valores obtidos para σ_1 e σ_2 são iguais a 2,1 nT e 1,4 nT, respectivamente. Estes valores são boas aproximações do valor de σ_C , que foi 1,0 nT, revelando, assim, que ambas aproximações fornecem bons ajustes para o campo observado. Além disso, a proximidade entre estes erros revela que o critério de ajuste entre o campo observado e a sua aproximação de uma dada ordem é um critério necessário, mas não suficiente, para estimar os momentos equivalentes.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 do vetor momento de dipolo total e das coordenadas de centro de momento de dipolo, juntamente com os resultados da análise de estabilidade, estão apresentados na Tabela 5.1. Observemos que a declinação e inclinação, associadas na Tabela 5.1 à média das estimativas de ordem 2, foram obtidas a partir da direção do vetor momento de dipolo total médio. Este vetor, por sua vez, foi calculado com a fórmula da média amostral para dados situados sobre uma esfera (MARDIA et al., 1979), utilizando as estimativas de ordem 2. A variância esférica amostral (MARDIA et al., 1979) para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2 e sobre uma esfera de raio unitário, é igual a $1,2 \times 10^{-4}$. O domínio da variância esférica amostral, para uma esfera de raio unitário, é o intervalo $[0, 2]$, correspondendo o limite inferior a dados com uma única direção e o limite superior a dados completamente aleatórios sobre a esfera.

De acordo com a Tabela 5.1, todas as estimativas pontuais estão bastante próximas dos valores verdadeiros, além de serem estáveis. Além disso, as estimativas pontuais de ordem 2 estão, em geral, mais próximas dos valores verdadeiros do que as de ordem 1. As estimativas pontuais de ordem 2 das direções de magnetização total e dos eixos principais equivalentes estão mostradas na Figura 5.1. Como se pode constatar nesta figura, estas estimativas pontuais são muito boas aproximações dos valores verdadeiros.

Para decidir que estimativas (ordem 1 ou ordem 2) serão adotadas, devemos proceder da mesma forma que no caso gravimétrico, baseando-nos nos critérios: primeiro, se houve diferenças significativas entre estimativas pontuais de ordem 2, em relação às de ordem 1, de uma mesma grandeza, e segundo, se houve insensibilidade ou estabilidade nas estimativas das direções principais equivalentes. As análises de sensibilidade e de estabilidade das direções principais equivalentes estão mostradas nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente. Esta análise

Tabela 5.1 - Exemplo Magnético 1: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^9 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (km)	y_{CM} (km)	z_{CM} (km)
valor verdadeiro	120,00	20,00	30,00	14,00	16,00	5,00
est. pontual de ordem 1	97,05	16,31	33,19	13,93	15,37	4,19
est. pontual de ordem 2	123,92	20,56	25,91	14,38	16,37	5,06
média das est. de ordem 2	123,08	20,42	26,42	14,33	16,38	5,06
σ_A das est. de ordem 2	0,89	—	—	0,06	0,05	0,04

de sensibilidade foi realizada utilizando-se $L = 10^{-2}$ nT para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47).

Em relação aos dois critérios acima, observemos que as estimativas pontuais de ordens 1 e 2 de z_{CM} (Tabela 5.1) são bastante diferentes e que a estimativa pontual das direções principais equivalentes é pouco sensível a presença de erros nos momentos de 2a. ordem equivalentes (Figura 5.5), além de serem estáveis (Figura 5.6). Portanto, podemos concluir que as estimativas pontuais de ordem 2 dos momentos equivalentes são preferíveis às de ordem 1.

Ressaltemos que os fatores que podem afetar a qualidade dos resultados apresentados neste exemplo estão relacionados, apenas, à malha de geração do campo, ao desvio padrão do ruído e à profundidade e dimensões do prisma utilizados. Desse modo, estimativas de mesma qualidade que as aqui apresentadas são obtidas utilizando-se qualquer direção para a magnetização total e qualquer posicionamento espacial para o corpo anômalo.

5.2.2 Exemplo Magnético 2: esfera

Vamos usar agora uma esfera de raio igual a 2,46 km. Todos os demais parâmetros do modelo, bem como de controle dos algoritmos, são iguais aos do Exemplo Magnético 1. A anomalia observada está mostrada na Figura 5.7 e as suas aproximações de 1a. e de 2a. ordens estão mostradas na Figura 5.8.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 para o vetor momento de dipolo total, e para

Tabela 5.2 - Exemplo Magnético 2: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^9 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (km)	y_{CM} (km)	z_{CM} (km)
valor verdadeiro	155,90	20,00	30,00	14,00	16,00	5,00
est. pontual de ordem 1	156,54	20,32	29,80	14,01	16,00	5,01
est. pontual de ordem 2	157,46	20,36	29,61	14,02	16,01	5,04
média das est. de ordem 2	155,96	20,07	29,95	14,00	16,00	5,01
σ_A das est. de ordem 2	0,96	—	—	0,02	0,02	0,03

as coordenadas de centro de momento de dipolo, são praticamente iguais entre si, além de serem muito próximas dos valores verdadeiros, como se pode ver na Tabela 5.2. A análise de estabilidade para as estimativas de ordem 2 do vetor momento de dipolo total, e coordenadas de centro de momento de dipolo, está sintetizada na Tabela 5.2. A variância esférica amostral para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2, é igual a $5,1 \times 10^{-5}$. Podemos concluir dos resultados da análise de estabilidade que as estimativas de ordens 1 e 2 para o vetor momento de dipolo total e coordenadas de centro de momento de dipolo são estáveis.

A estimativa pontual das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 5.9. Como no caso gravimétrico, as análises de sensibilidade e de estabilidade, mostradas nas Figura 5.10 e 5.11, respectivamente, revelam que a estimativa pontual das direções principais equivalentes não tem significado.

5.2.3 Exemplo Magnético 3: tronco de pirâmide

Vamos usar agora como corpo anômalo o tronco de pirâmide mostrado na Figura 5.12. A magnetização do tronco de pirâmide tem módulo igual a 0,5 A/m, declinação de 30° e inclinação de 45°. A malha de geração da anomalia, o ruído de contaminação da mesma e todos os parâmetros de controle dos algoritmos são iguais aos do Exemplo Magnético 1. A anomalia observada e a sua aproximação de 2a. ordem estão mostradas nas Figura 5.13 e 5.14, respectivamente.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 para o vetor momento de dipolo total, e para

Tabela 5.3 - Exemplo Magnético 3: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^9 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (km)	y_{CM} (km)	z_{CM} (km)
valor verdadeiro	105,00	30,00	45,00	14,00	16,00	3,04
est. pontual de ordem 1	515,68	28,79	41,55	14,19	15,97	8,55
est. pontual de ordem 2	410,09	28,69	41,76	14,13	16,03	7,00
média das est. de ordem 2	409,11	28,80	41,91	14,13	16,03	7,00
σ_A das est. de ordem 2	1,13	—	—	0,01	0,01	0,01

as coordenadas de centro de momento de dipolo, estão mostradas na Tabela 5.3, juntamente com os resultados da análise de estabilidade para as estimativas de ordem 2. A variância esférica amostral para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2, é igual a $2,1 \times 10^{-5}$. Dos resultados apresentados, podemos constatar que todas as estimativas pontuais de ordem 2 são estáveis e que, à exceção das estimativas de M_0 e z_{CM} , estas estimativas estão bastante próximas dos valores verdadeiros. Além disso, observemos que mesmo as estimativas pontuais de ordem 1 da direção da magnetização total são boas aproximações dos valores verdadeiros (Tabela 5.3).

As estimativas pontuais das direções de magnetização total e dos eixos principais equivalentes estão mostradas na Figura 5.15. Podemos constatar, nesta figura, que a direção do eixo vertical do tronco de pirâmide, que corresponde à direção do eixo principal equivalente menor, foi bem estimada e que as outras duas estimativas de direções principais equivalentes se situam aproximadamente sobre o plano horizontal.

As análises de sensibilidade e de estabilidade das direções principais equivalentes estão mostradas nas Figuras 5.16 e 5.17, respectivamente. Destas figuras podemos concluir que, ao contrário do caso gravimétrico, não foi possível identificar que o tronco de pirâmide tem base quadrada. Todavia, é possível que a direção de imantação tenha influenciado as estimativas das direções dos eixos principais equivalentes maior e intermediário, de maneira a mascarar a identificação do (esperado) plano de degenerescência.

Como resumo deste exemplo, podemos concluir que o método de inversão em estudo produz boas estimativas da direção de magnetização total, mesmo numa situação em que a distribuição espacial do módulo da magnetização não seja simétrica em relação a três planos

mutuamente ortogonais, e em que a condição de fonte distante das observações não esteja satisfeita. Além disso, a direção principal associada ao autovalor mais discrepante é em geral bem estimada.

5.2.4 Exemplo Magnético 4: distribuições aleatórias de dipolos magnéticos

Para simular uma situação de prospecção mineral, vamos usar novamente o modelo de “nuvens” de pontos, mostrado na Figura 3.46, sem mudar nenhum parâmetro geométrico deste modelo. As pequenas esferas serão imantadas com uma magnetização variável, cujos módulo, declinação e inclinação seguem distribuições Gaussianas independentes, com médias iguais a 2,5 A/m, -20° e 30° , respectivamente, e com desvios padrões iguais a 0,5 A/m, 10° e 10° , respectivamente. O agrupamento formado pelas três mil direções de magnetização está mostrado na Figura 5.18 e a média dessas direções, juntamente com as direções principais verdadeiras, estão mostradas na Figura 5.19. O campo anômalo gerado pelo modelo, após a adição de uma sequência de ruído de média nula e desvio padrão $\sigma_C = 5$ nT, está mostrado na Figura 5.20. A aproximação de 2a. ordem obtida para este campo está mostrada na Figura 5.21.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 obtidas para o vetor momento de dipolo total, e para as coordenadas de centro de momento de dipolo, estão mostradas na Tabela 5.4, juntamente com os resultados do Algoritmo de Análise de Estabilidade. A variância esférica amostral para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2, é igual a $1,9 \times 10^{-4}$. Podemos concluir do conjunto destes resultados que as estimativas pontuais de ordem 2 estão muito próximas dos valores verdadeiros, além de serem estáveis. Além disso, observemos que a estimativa pontual de ordem 1 do vetor momento de dipolo total já é uma boa aproximação do vetor verdadeiro (Tabela 5.4).

A estimativa pontual das direções principais equivalentes está mostrada na Figura 5.19. Podemos observar, nesta figura, que a direção do eixo principal verdadeiro maior foi razoavelmente estimada. Por outro lado, as direções dos eixos principais verdadeiros intermediário e menor não foram bem estimadas. Além disso, a análise de sensibilidade das direções principais equivalentes, mostrada na Figura 5.22, não evidencia a (esperada) presença de um plano de degenerescência associado aos eixos principais equivalentes intermediário e menor. Todavia, a análise de estabilidade para as direções principais equivalentes, mostrada na Figura 5.23, confirma que a distribuição de magnetização equivalente tem eixos principais intermediário e menor realmente diferentes dos correspondentes eixos verdadeiros.

Em resumo, para este conjunto complexo de dipolos magnéticos que viola a condição de

Tabela 5.4 - Exemplo Magnético 4: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 20 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^5 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (m)	y_{CM} (m)	z_{CM} (m)
valor verdadeiro	251,39	-20,00	30,00	85,29	85,35	49,90
est. pontual de ordem 1	205,91	-29,61	34,93	77,93	77,15	43,26
est. pontual de ordem 2	231,62	-22,57	31,21	84,59	83,31	46,43
média das est. de ordem 2	231,43	-23,15	31,16	83,97	83,87	46,75
σ_A das est. de ordem 2	2,36	-	-	0,36	0,40	0,39

magnetização constante, mas que obedece de forma aproximada à condição de simetria na distribuição espacial do módulo da magnetização, foi possível obter boas estimativas do vetor momento de dipolo total, das coordenadas de centro de momento de dipolo e da direção do eixo principal verdadeiro maior.

5.2.5 Exemplo Magnético 5: direção de magnetização variável

Nesta seção, vamos apresentar resultados da inversão de anomalias geradas com modelos que violam fortemente a condição de direção de magnetização constante. Nos dois casos a serem apresentados, o módulo da magnetização e as dimensões do prisma usado, a malha de geração do campo, o ruído de contaminação das anomalias e os parâmetros de controle dos algoritmos são iguais aos do Exemplo Magnético 1.

Os modelos dos dois casos estão esquematizados nas Figuras 5.24 e 5.25. Para esclarecer como estas figuras caracterizam cada caso, vamos descrever o modelo do caso 1 com base na Figura 5.24: os lados do prisma que medem 2 km, 4 km e 6 km estão paralelos aos eixos x , y e z , respectivamente; o centro do prisma $\vec{r}_{CM}$ está em (14, 16, 4) em km; a declinação é constante e igual a 45° em todo o volume do prisma e, por fim, a inclinação é variável (dentro do volume do prisma) e igual a 10° na sexta parte de volume mais rasa, 60° nos três sextos de volume de profundidade intermediária e 45° nos dois sextos de volume mais profundos. As anomalias observadas estão mostradas nas Figuras 5.26 e 5.27, para os casos 1 e 2, respectivamente. As aproximações de 2a. ordem obtidas para estes campos estão mostradas nas Figuras 5.28 e 5.29, para os casos 1 e 2, respectivamente.

Tabela 5.5 - Exemplo Magnético 5 – caso 1: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo. Em relação à inclinação da magnetização total, entenda-se valor verdadeiro como média ponderada por volume desta grandeza. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 10 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^9 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (km)	y_{CM} (km)	z_{CM} (km)
valor verdadeiro	120,00	45,00	46,67	14,00	16,00	4,00
est. pontual de ordem 1	92,02	53,72	48,15	13,89	15,81	3,06
est. pontual de ordem 2	94,00	43,06	52,76	13,34	15,77	3,45
média das est. de ordem 2	93,52	42,60	52,86	13,35	15,77	3,43
σ_A das est. de ordem 2	0,34	—	—	0,02	0,01	0,02

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 do vetor momento de dipolo total e das coordenadas de centro de momento de dipolo, bem como os resultados da análise de estabilidade para as estimativas de ordem 2, estão apresentados nas Tabelas 5.5 e 5.6, para os casos 1 e 2, respectivamente. As variâncias esféricas amostrais para as direções de momento de dipolo total, obtidas das estimativas de ordem 2 nos casos 1 e 2, são iguais a $3,5 \times 10^{-5}$ e $2,4 \times 10^{-4}$, respectivamente. Podemos concluir do conjunto destes resultados que, nos dois casos, foi possível se obterem, de maneira estável, boas estimativas de ordem 2 do vetor momento de dipolo total (especialmente de sua direção) e das coordenadas de centro de momento de dipolo. Além disso, observemos que as estimativas pontuais de ordem 1 da direção do momento de dipolo total já são bastante boas (Tabelas 5.5 e 5.6).

As evoluções das estimativas pontuais de ordem 2 das direções do momento de dipolo total e dos eixos principais equivalentes estão mostradas nas Figuras 5.30 e 5.31, para os casos 1 e 2, respectivamente. Destas figuras, podemos concluir que a estimativa pontual das direções principais equivalentes contém, em geral, aproximações ruins dos valores verdadeiros. Além disso, ressaltamos que por vezes o eixo principal verdadeiro que é melhor estimado não é o eixo principal maior como, por exemplo, na Figura 5.31.

As análises de sensibilidade e de estabilidade das direções principais equivalentes estão mostradas, para os casos 1 e 2, nas Figuras 5.32 e 5.33 e Figuras 5.34 e 5.35, respectivamente. Do exame destas figuras, podemos concluir que nos dois casos a distribuição de magnetização equivalente tem, realmente, três eixos principais e que as estimativas obtidas para estes eixos

Tabela 5.6 - Exemplo Magnético 5 – caso 2: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo. Em relação à declinação e inclinação da magnetização total, entendam-se valores verdadeiros como médias ponderadas por volume destas grandezas. A média e o desvio padrão foram obtidos a partir de 20 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade. As estimativas pontuais apresentadas são aquelas obtidas com a primeira contaminação do campo. σ_A é o desvio padrão amostral.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^9 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (km)	y_{CM} (km)	z_{CM} (km)
valor verdadeiro	120,00	38,33	36,67	14,00	16,00	5,00
est. pontual de ordem 1	101,70	47,53	31,78	14,23	16,55	4,43
est. pontual de ordem 2	114,93	34,05	40,90	13,70	15,79	5,09
média das est. de ordem 2	113,51	34,44	41,27	13,71	15,81	5,03
σ_A das est. de ordem 2	0,63	—	—	0,03	0,04	0,03

são estáveis. Contudo, observemos que as direções principais verdadeiras não estão contidas dentro do conjunto de direções admissíveis em nenhuma das duas análises. Este resultado revela claramente que estabilidade não é sinônimo de veracidade.

Em resumo, quando a condição de direção de magnetização constante é fortemente violada, é ainda possível se obterem boas estimativas do vetor momento de dipolo total e das coordenadas de centro de momento de dipolo. Em geral, as direções principais verdadeiras não são bem estimadas pelas direções principais equivalentes, mesmo quando estas são estáveis.

5.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Podemos concluir dos resultados deste capítulo que o método de inversão em estudo tem grandes potencialidades para ser aplicado à inversão de anomalias magnéticas tridimensionais, para as quais sejam válidas as condições de volume finito, de fonte distante das observações, de direção de magnetização constante, e em que a distribuição anômala do módulo da magnetização apresente aproximadamente três planos mutuamente ortogonais de simetria. Satisfeitas estas condições, o método permite obter, de maneira estável, boas estimativas do vetor momento de dipolo total, das coordenadas de centro de momento de dipolo e das direções dos eixos principais.

Nas situações adversas de fonte rasa e de violação da condição de simetria, o método permite obter, pelo menos, boas estimativas da direção da magnetização total. Além disso,

para os casos em que a direção de magnetização não é constante, o método permite obter também, pelo menos, boas estimativas da direção de magnetização total *média*.

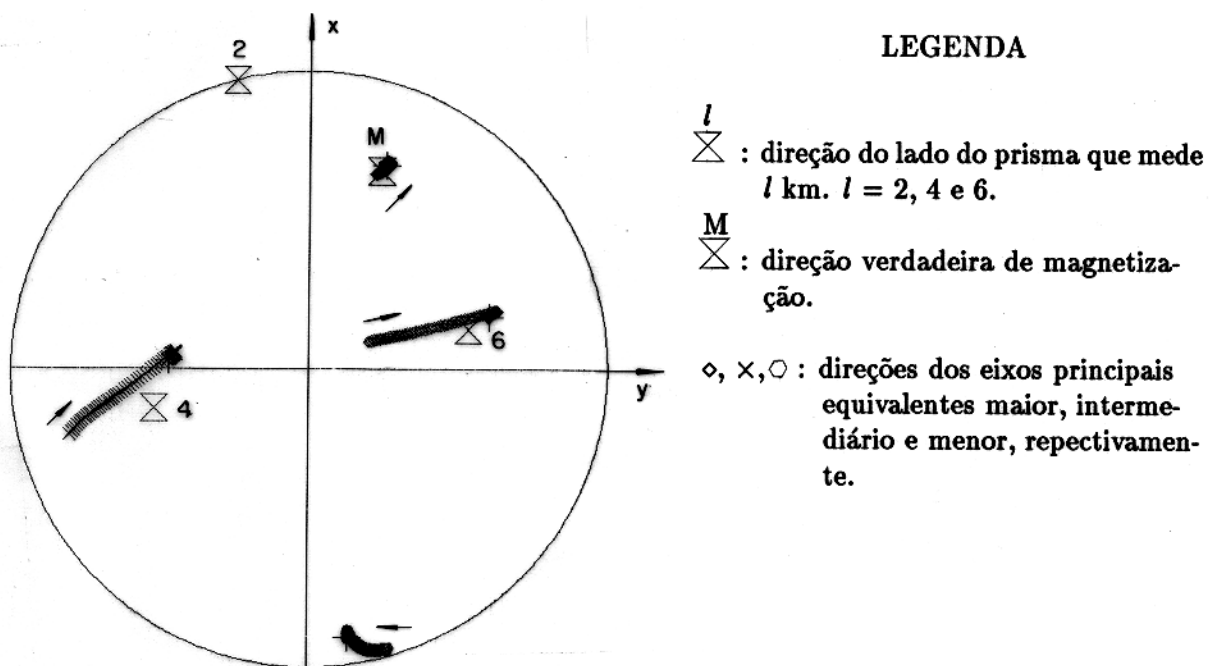


Figura 5.1 - Exemplo Magnético 1: Direções verdadeiras de magnetização e dos eixos principais e estimativas pontuais das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 150 iterações.

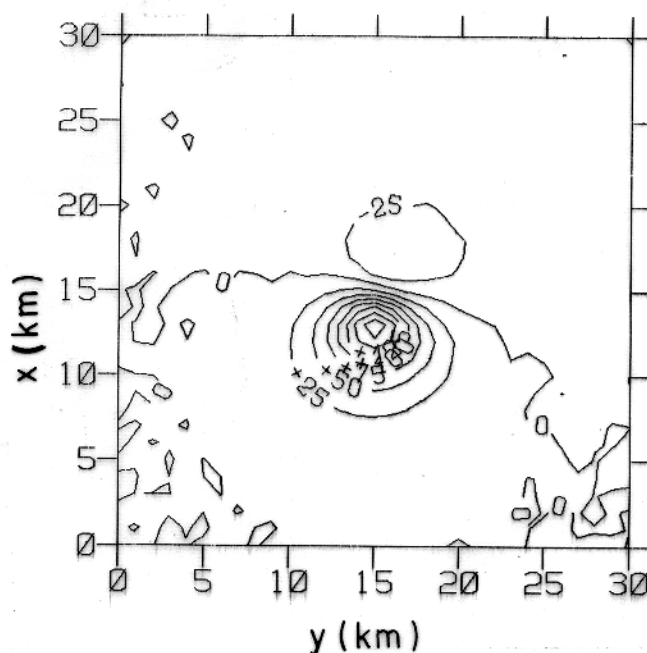
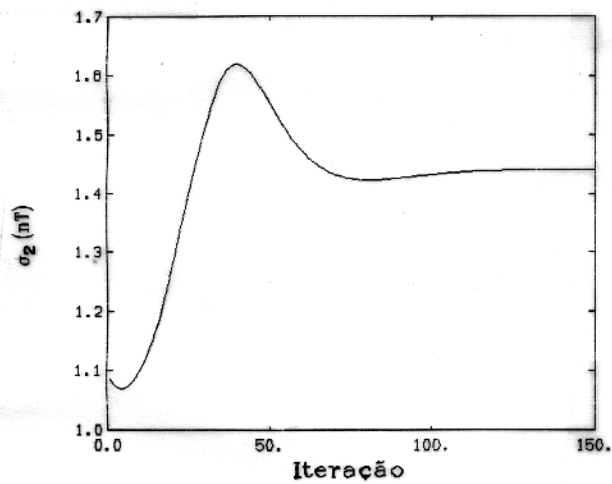
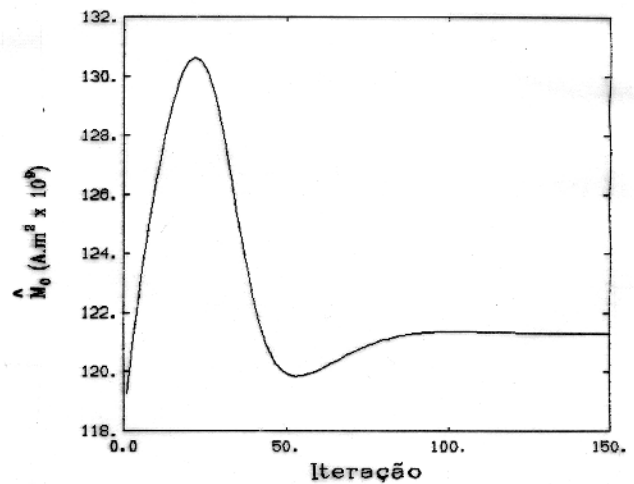


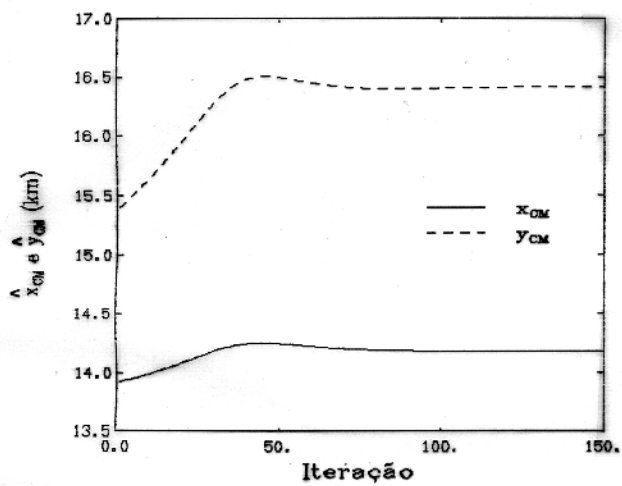
Figura 5.2 - Exemplo Magnético 1: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 1 nT.



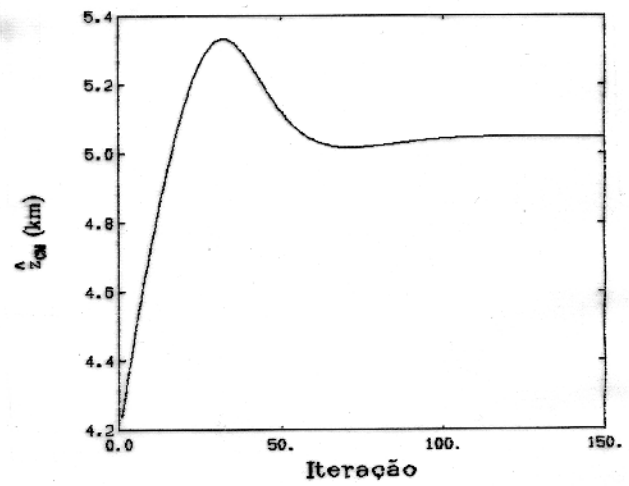
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.3 - Exemplo Magnético 1: Evoluções de (a) σ_2 e das estimativas de ordem 2 para: (b) M_0 , (c) x_{CM} e y_{CM} e (d) z_{CM} , resultadas do Algoritmo de Estimação Pontual.

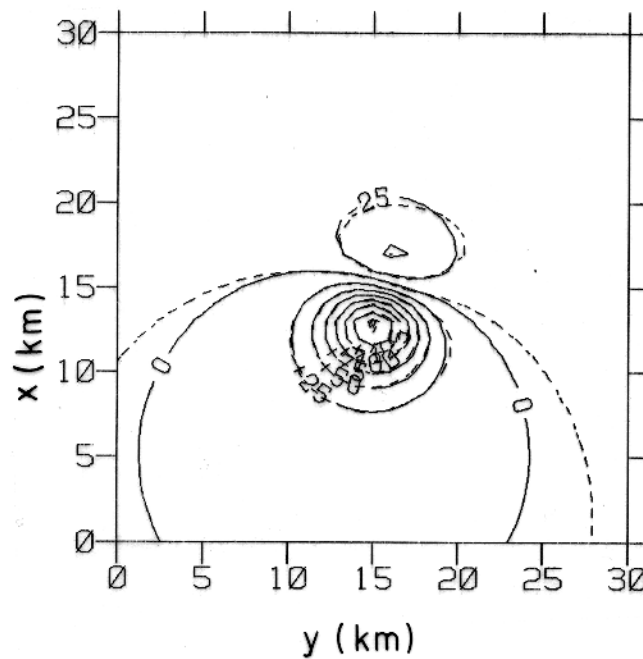


Figura 5.4 - Exemplo Magnético 1: Aproximações de 1a. ordem (linha cheia) e de 2a. ordem (linha tracejada) para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT.

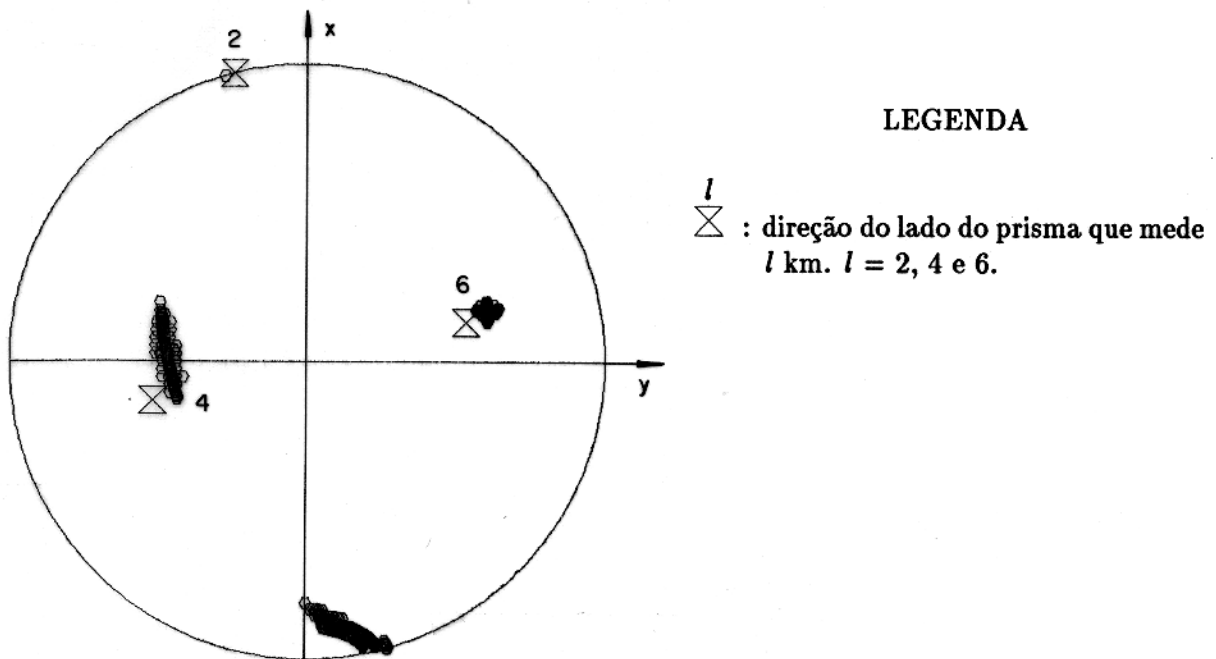
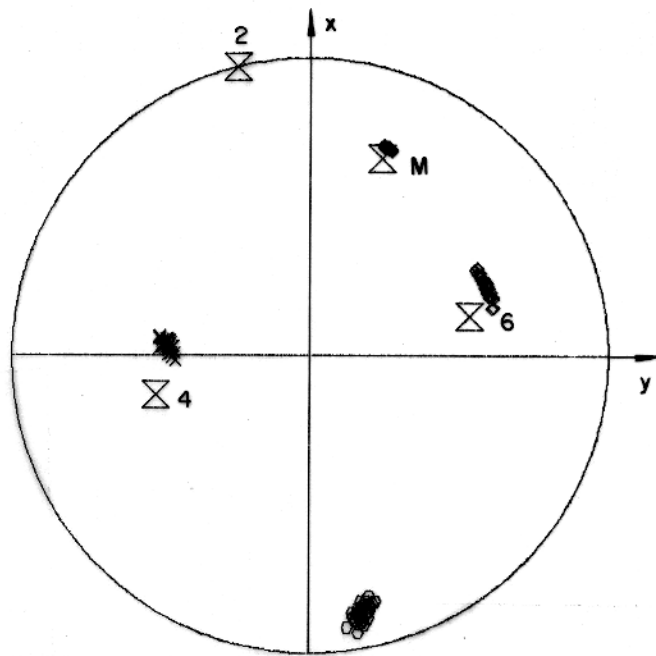


Figura 5.5 - Exemplo Magnético 1: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

- $\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .
- $\frac{M}{\times}$: direção verdadeira de magnetização.
- $\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.6 - Exemplo Magnético 1: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes.

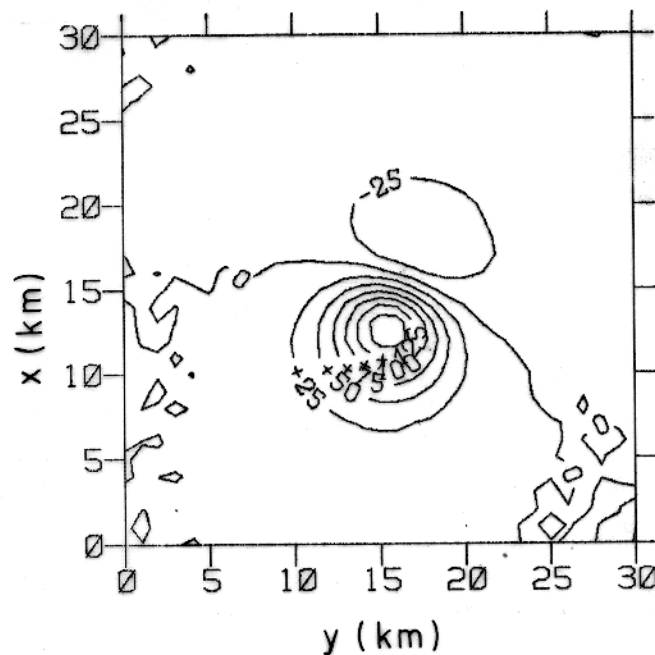


Figura 5.7 - Exemplo Magnético 2: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 1 nT.

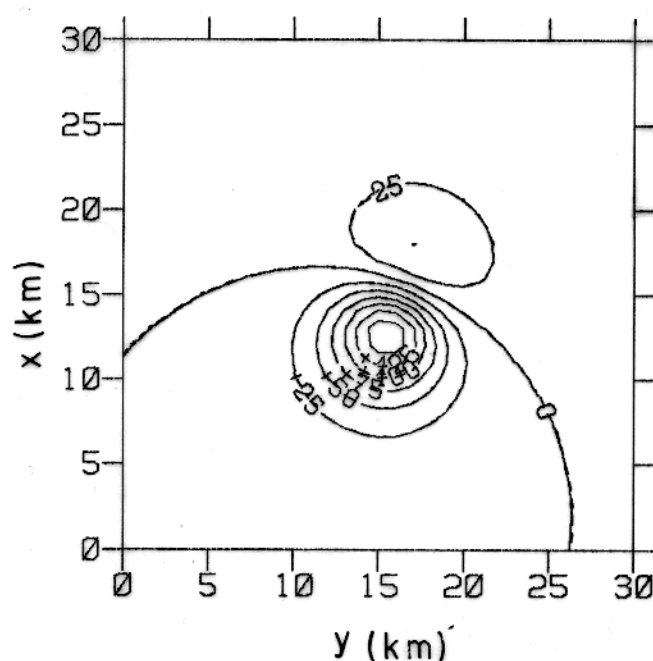


Figura 5.8 - Exemplo Magnético 2: Aproximações de 1a. ordem (linha cheia) e de 2a. ordem (linha tracejada) para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT.

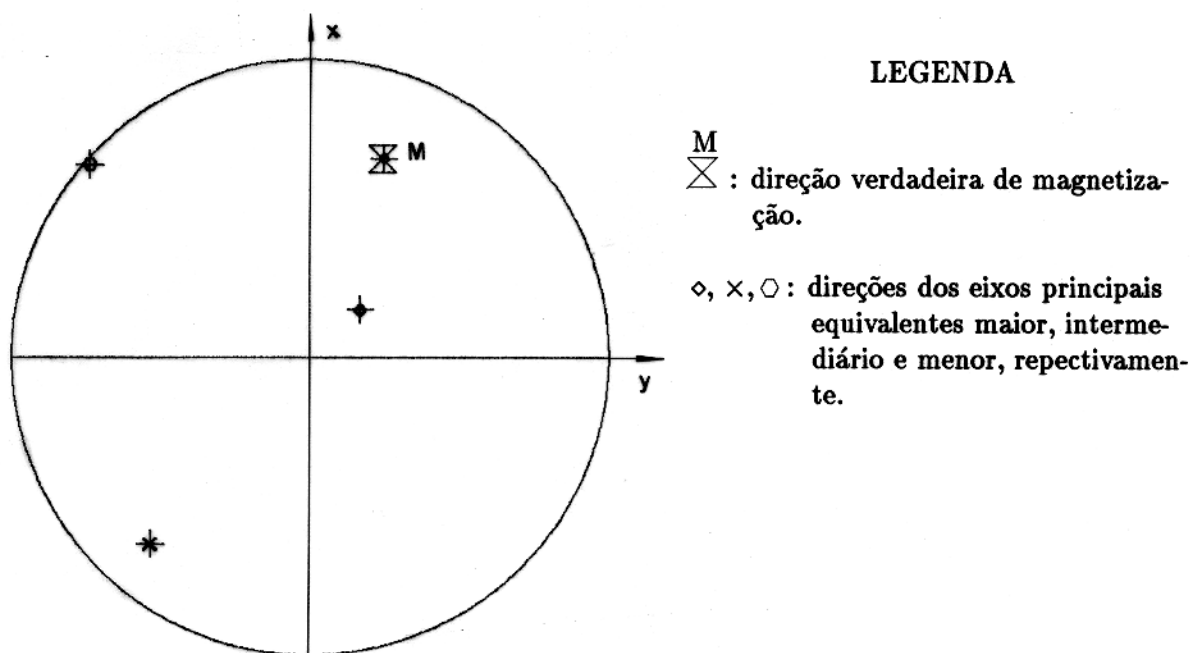


Figura 5.9 - Exemplo Magnético 2: Estimativas pontuais das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes (+).

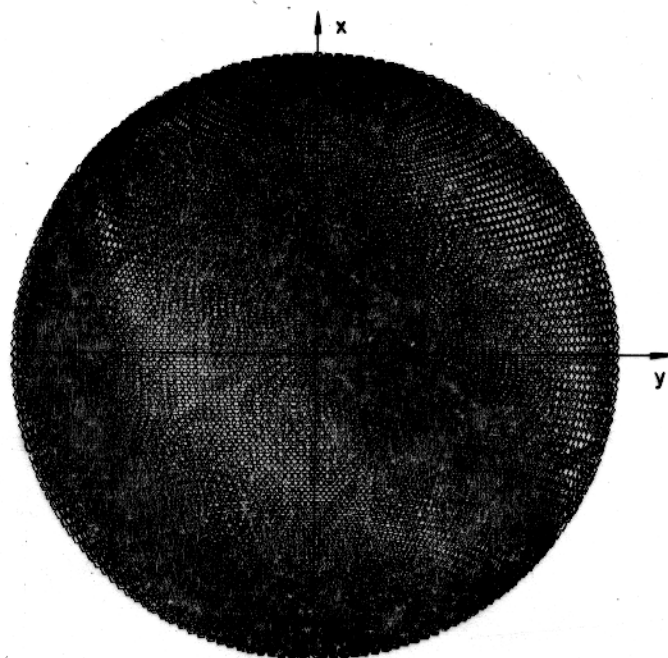
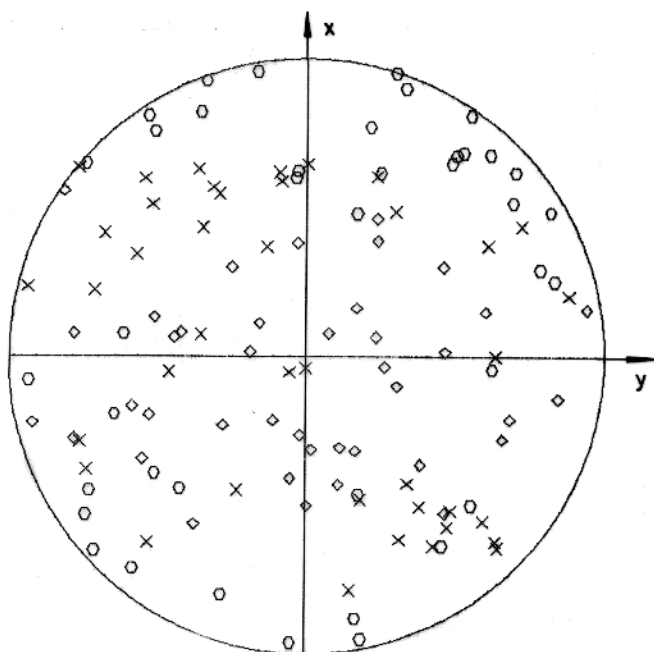


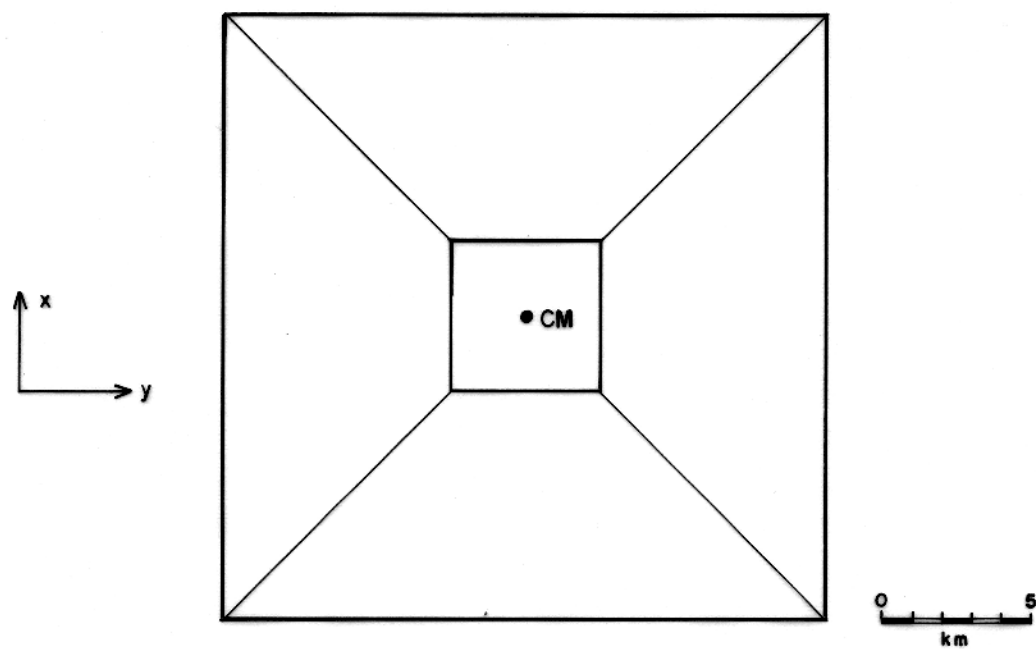
Figura 5.10 - Exemplo Magnético 2: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



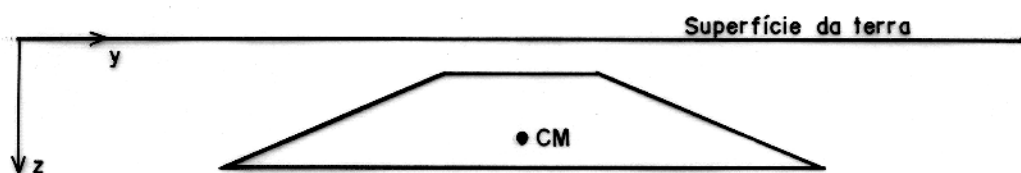
LEGENDA

◇, x, ○: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, repectivamente.

Figura 5.11 - Exemplo Magnético 2: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.



(a)



$$CM = (14; 16; 3.036) \text{ km}$$

$$|\vec{M}| = 0,5 \text{ A/m}, d = 30^\circ, i = 45^\circ$$

(b)

Figura 5.12 - Exemplo Magnético 3: Tronco de pirâmide usado como corpo anômalo. (a) Planta. (b) Corte vertical paralelo ao eixo y passando pelo centro de momento de dipolo (CM).

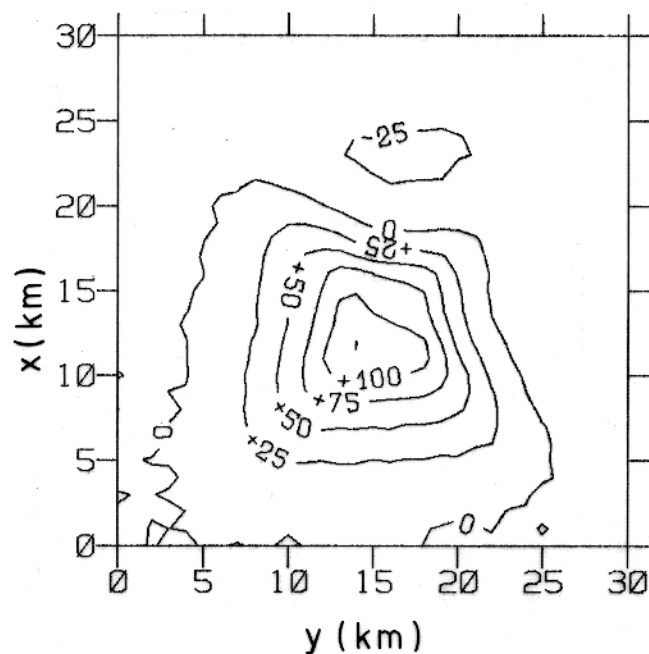


Figura 5.13 - Exemplo Magnético 3: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 1 nT.

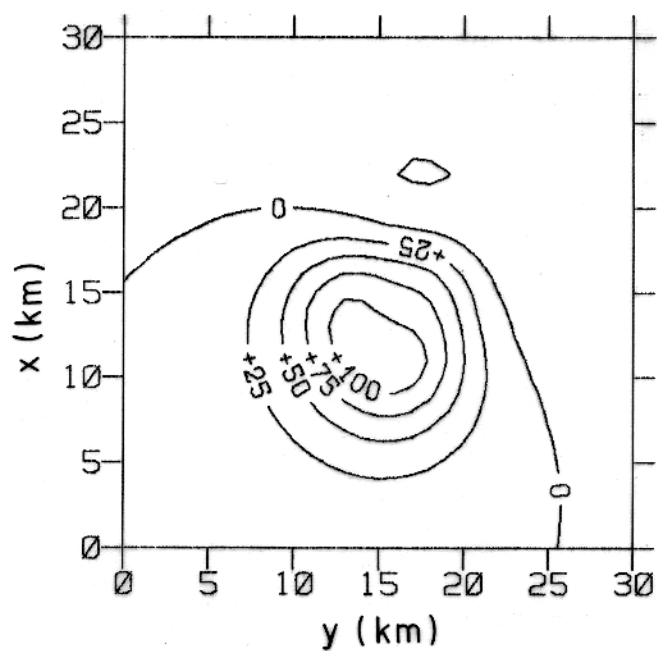
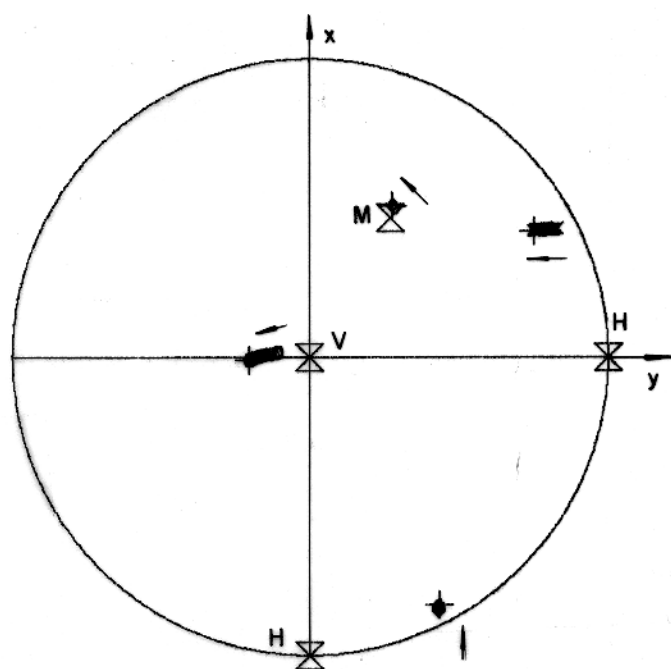


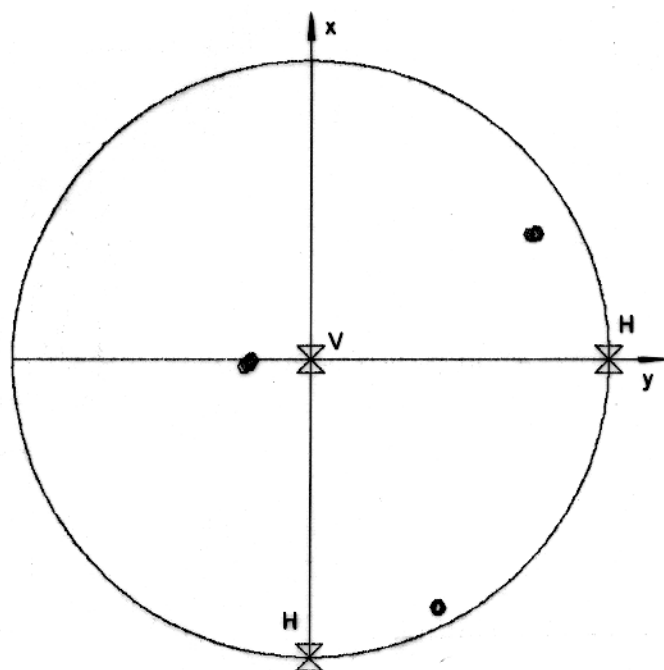
Figura 5.14 - Exemplo Magnético 3: Aproximação de 2a. ordem para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT.



LEGENDA

- $\frac{l}{\times}$: direções dos lados horizontais ($l = H$) e vertical ($l = V$) do tronco de pirâmide.
- $\frac{M}{\times}$: direção verdadeira de magnetização.
- $\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

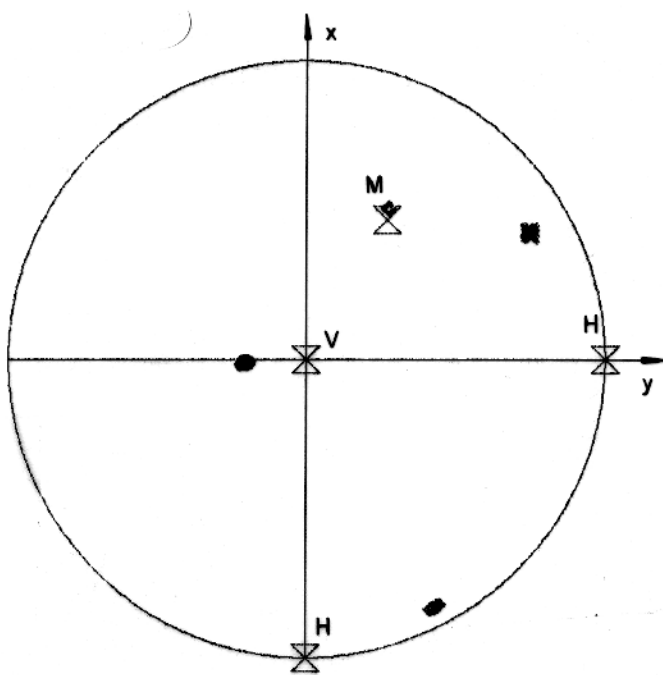
Figura 5.15 - Exemplo Magnético 3: Estimativas pontuais das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 200 iterações.



LEGENDA

- $\frac{l}{\times}$: direções dos lados horizontais ($l = H$) e vertical ($l = V$) do tronco de pirâmide.
- $\frac{M}{\times}$: direção verdadeira de magnetização.
- $\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.16 - Exemplo Magnético 3: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

- $\frac{l}{\times}$: direções dos lados horizontais ($l = H$) e vertical ($l = V$) do tronco de pirâmide.
- $\frac{M}{\times}$: direção verdadeira de magnetização.
- $\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.17 - Exemplo Magnético 3: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes.

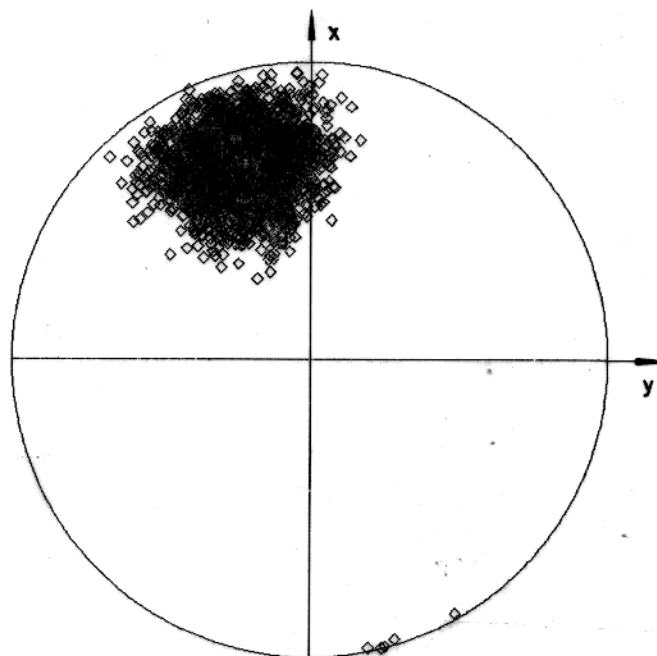
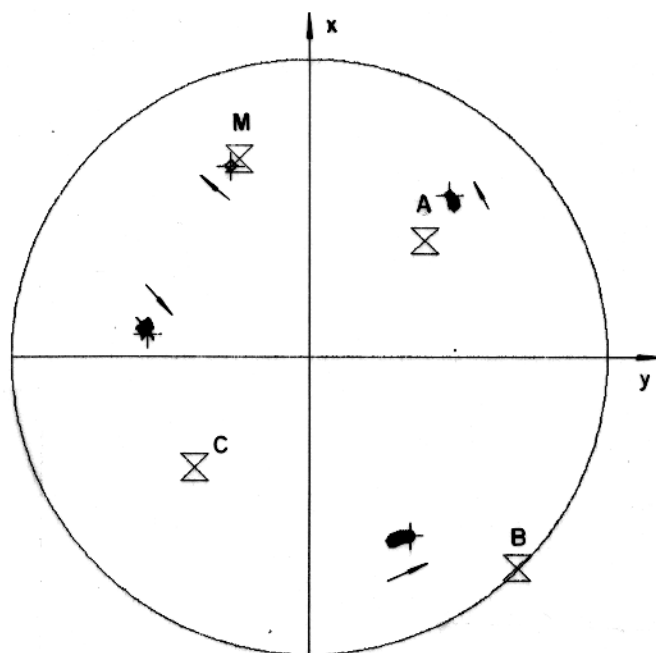


Figura 5.18 - Exemplo Magnético 4: Direções de magnetização das três mil esferas que compõem o modelo de nuvens.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direções dos eixos verdadeiros
maior ($l=A$), intermediário ($l=B$)
e menor ($l=C$).

$\frac{M}{\times}$: direção média de magnetização.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais
equivalentes maior, interme-
diário e menor, repectivamen-
te.

Figura 5.19 - Exemplo Magnético 4: Direção média da magnetização, direções principais verdadeiras e estimativas pontuais das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 200 iterações.

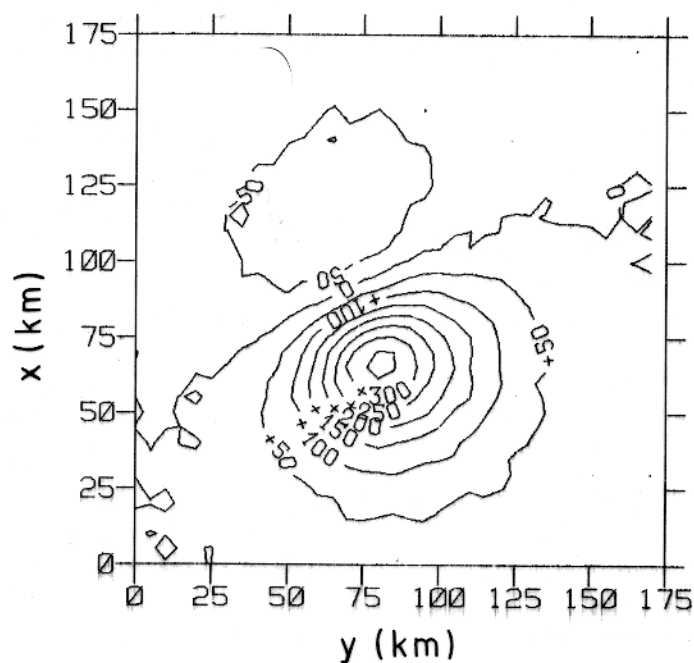


Figura 5.20 - Exemplo Magnético 4: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 50 nT. A malha de geração contém 35 x 35 pontos, igualmente espaçados de 5 m, e o desvio padrão do ruído adicionado é 5 nT.

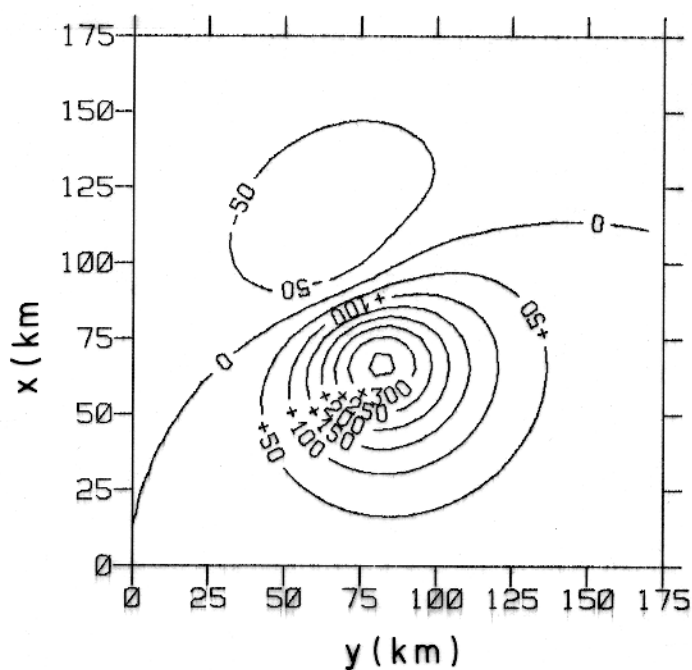
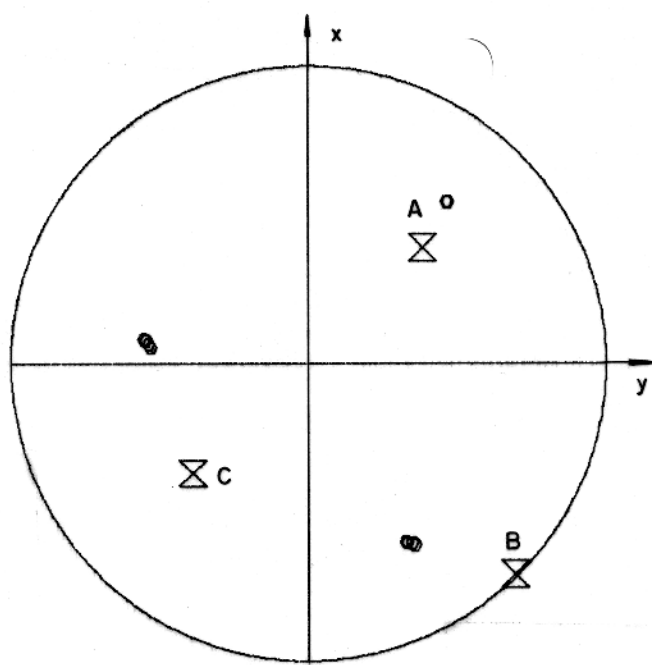


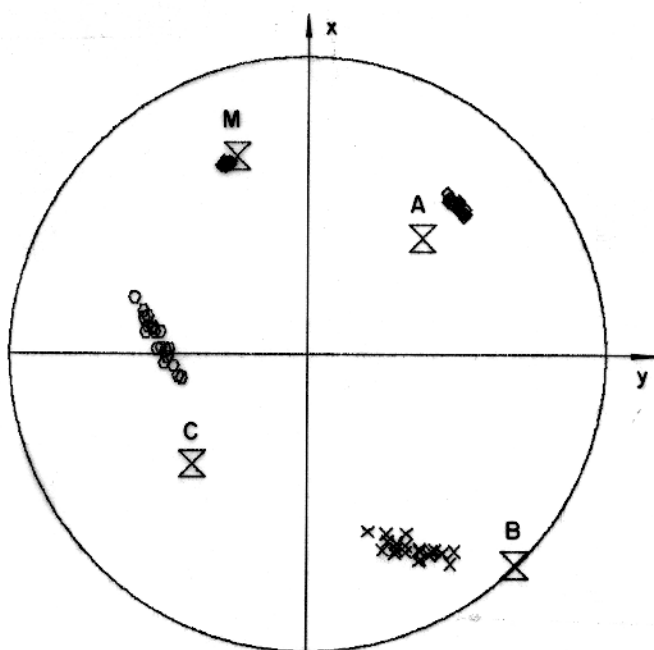
Figura 5.21 - Exemplo Magnético 4: Aproximação de 2a. ordem para a anomalia observada. Intervalo de contorno de 50 nT.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direções dos eixos verdadeiros maior ($l=A$), intermediário ($l=B$) e menor ($l=C$).

Figura 5.22 - Exemplo Magnético 4: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



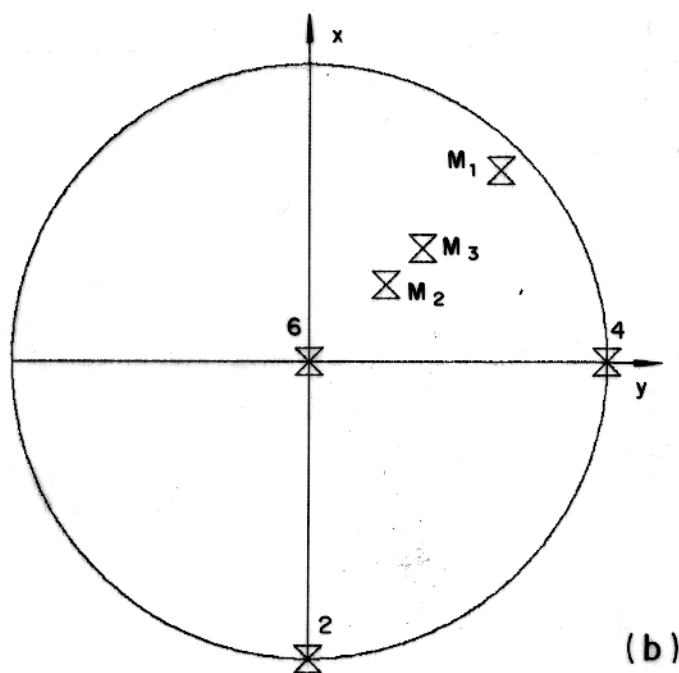
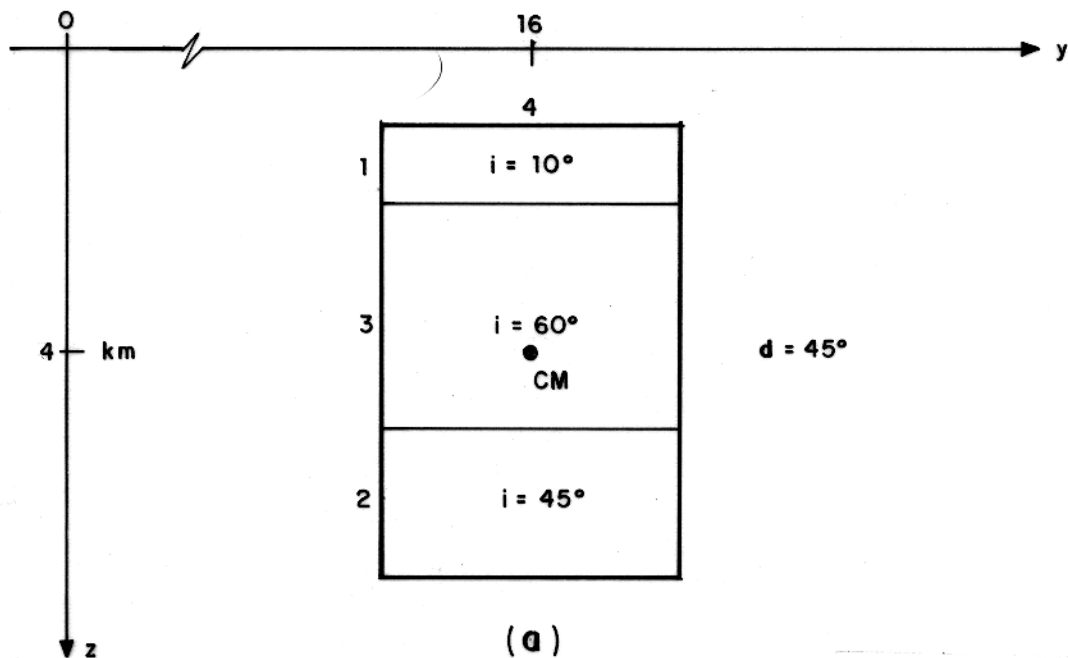
LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direções dos eixos verdadeiros maior ($l=A$), intermediário ($l=B$) e menor ($l=C$).

$\frac{M}{\times}$: direção verdadeira de magnetização.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.23 - Exemplo Magnético 4: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes.

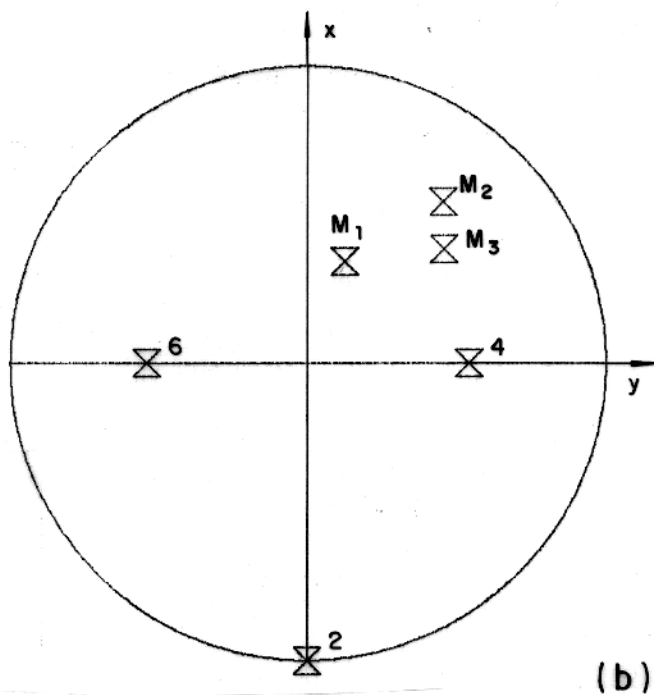
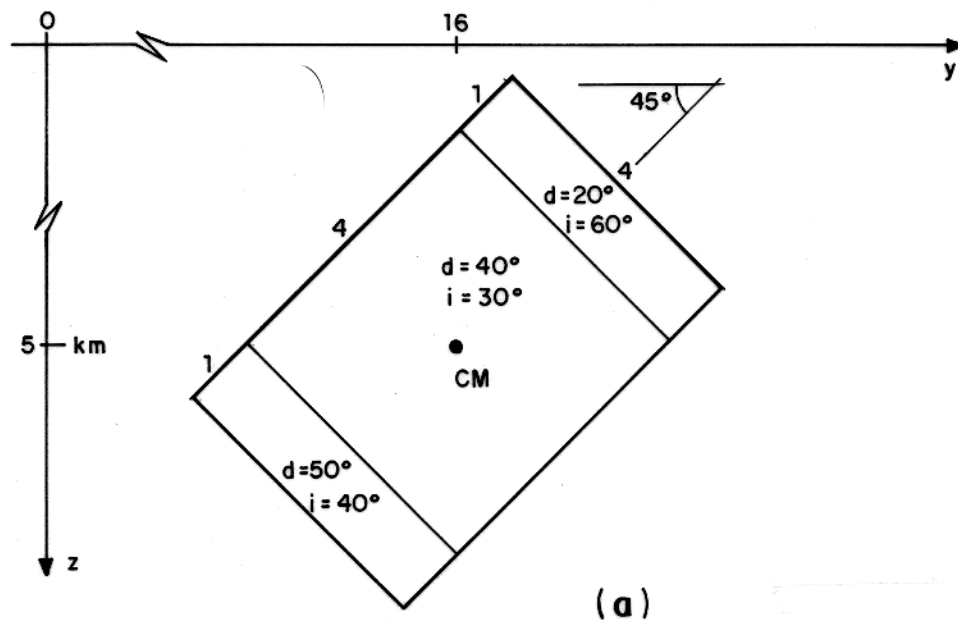


LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\frac{M}{\times}$: direções verdadeiras de magnetização da porção de volume rasa ($M=M_1$), intermediária ($M=M_2$) e profunda ($M=M_3$) do prisma.

Figura 5.24 - Exemplo Magnético 5 – caso 1: (a) Distribuição da magnetização dentro do prisma. (b) Direções verdadeiras de magnetização e dos eixos principais. O prisma tem centro em (14, 16, 4), em km, e magnetização de módulo 2,5 A/m e declinação 45°.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\frac{M}{\times}$: direções verdadeiras de magnetização da porção de volume rasa ($M=M_1$), intermediária ($M=M_2$) e profunda ($M=M_3$) do prisma.

Figura 5.25 - Exemplo Magnético 5 – caso 2: (a) Distribuição da magnetização dentro do prisma. (b) Direções verdadeiras de magnetização e dos eixos principais. O prisma tem centro em (14, 16, 5), em km, e magnetização de módulo 2,5 A/m.

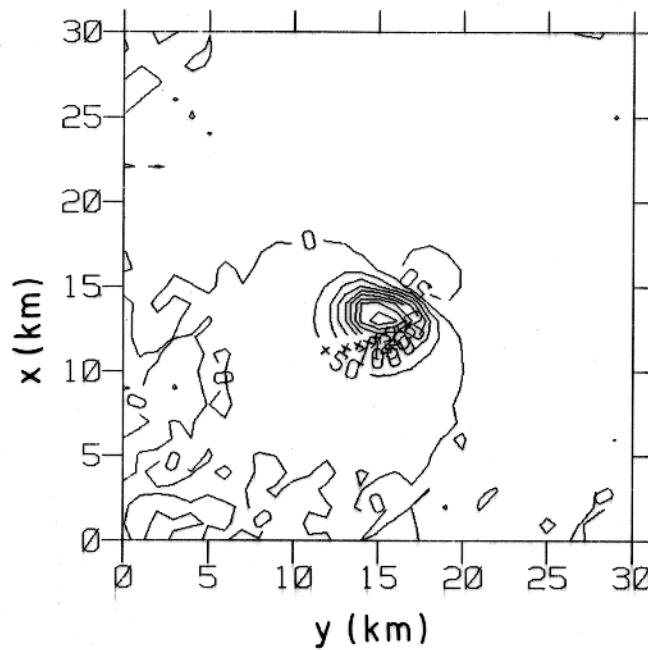


Figura 5.26 - Exemplo Magnético 5 – caso 1: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 1 nT.

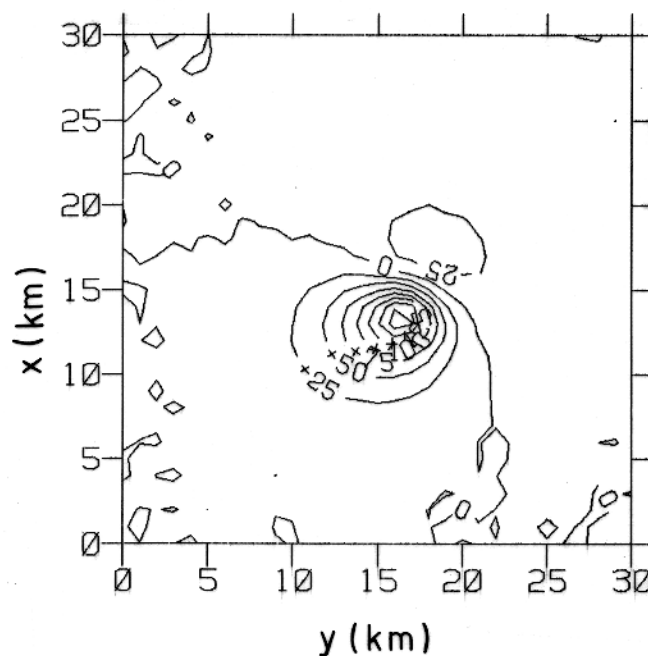
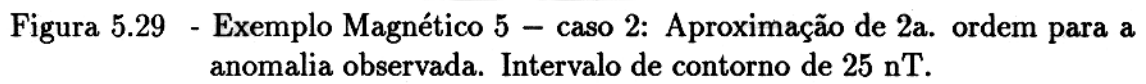
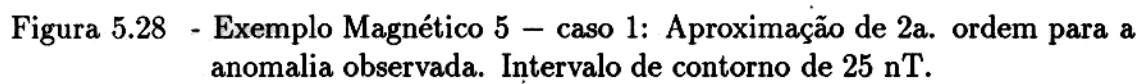
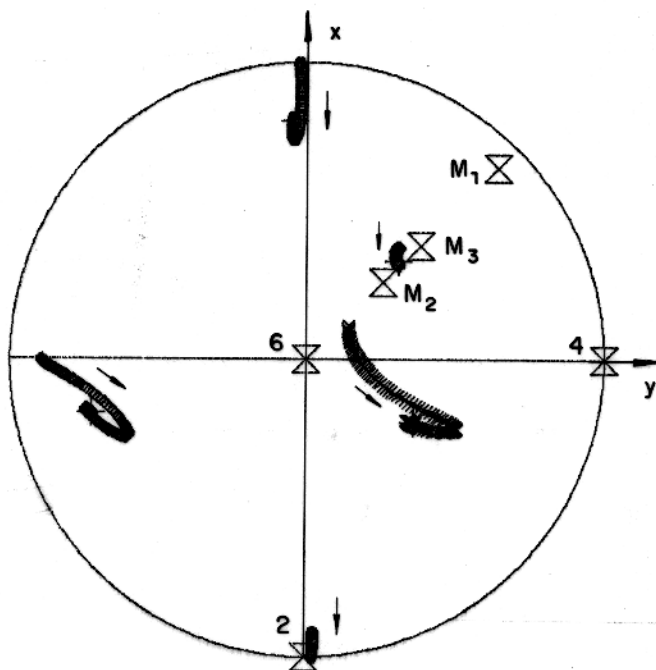


Figura 5.27 - Exemplo Magnético 5 – caso 2: Anomalia observada. Intervalo de contorno de 25 nT. A malha de geração contém 31 x 31 pontos, igualmente espaçados de 1 km, e o desvio padrão do ruído adicionado é 1 nT.





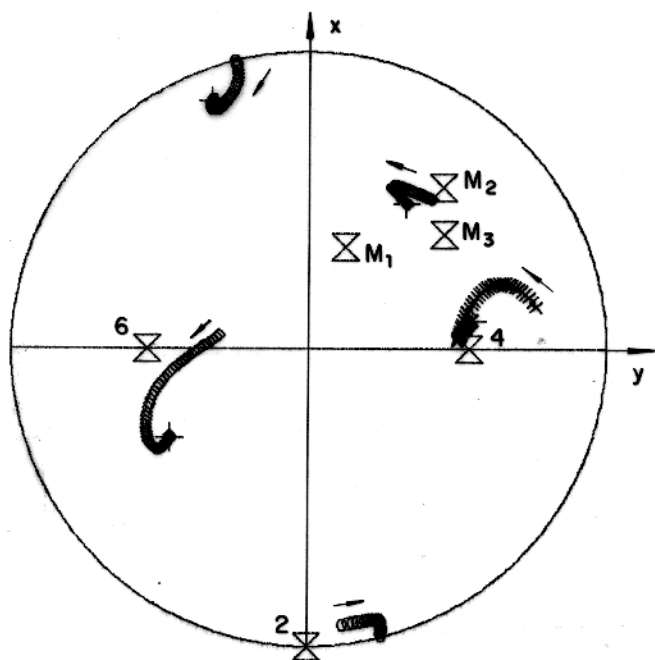
LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\frac{M}{\times}$: direções verdadeiras de magnetização da porção de volume rasa ($M=M_1$), intermediária ($M=M_2$) e profunda ($M=M_3$) do prisma.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.30 - Exemplo Magnético 5 – caso 1: Estimativas pontuais das direções principais equivalentes e de magnetização (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 500 iterações.



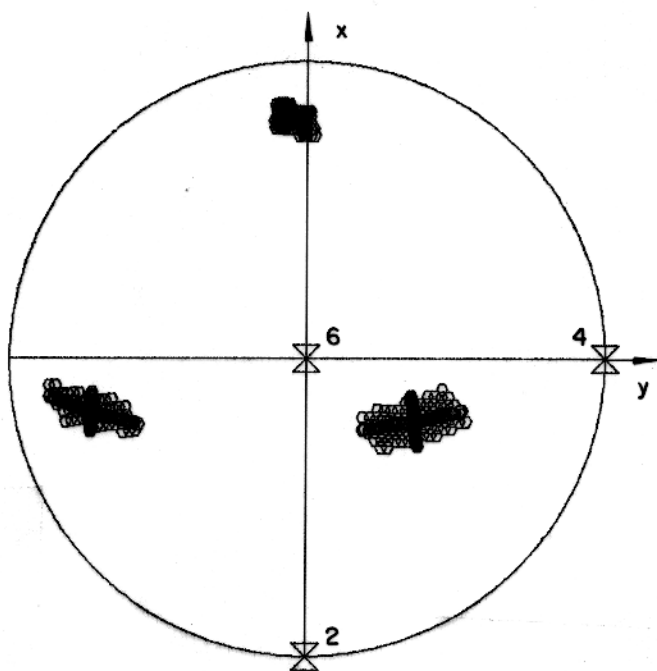
LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

$\frac{M}{\times}$: direções verdadeiras de magnetização da porção de volume rasa ($M=M_1$), intermediária ($M=M_2$) e profunda ($M=M_3$) do prisma.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

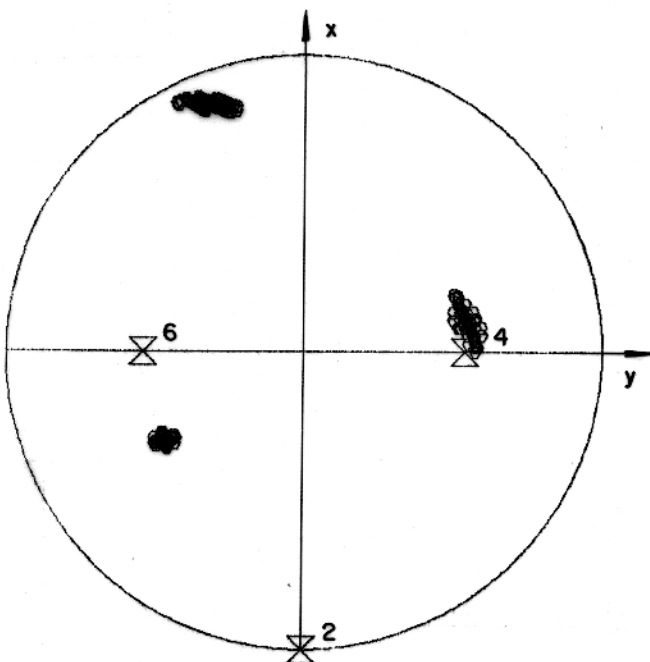
Figura 5.31 - Exemplo Magnético 5 – caso 2: Estimativas pontuais das direções principais equivalentes e de magnetização (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 250 iterações.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

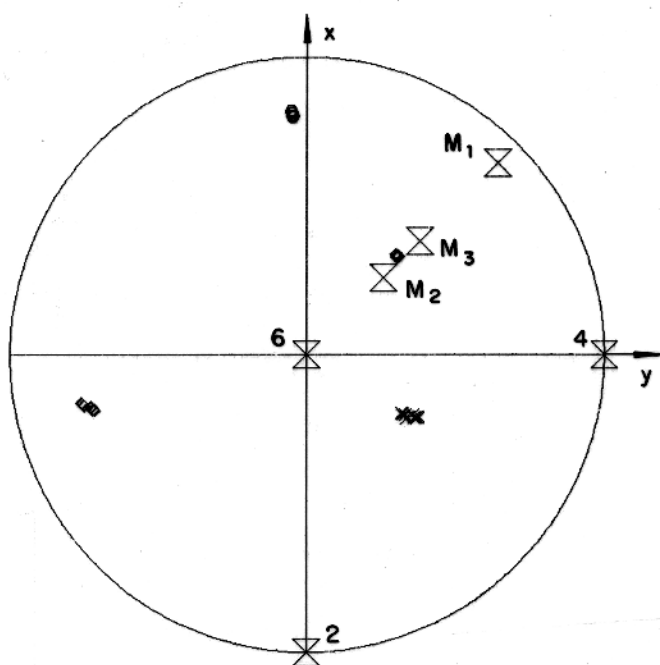
Figura 5.32 - Exemplo Magnético 5 – caso 1: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

$\frac{l}{\times}$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

Figura 5.33 - Exemplo Magnético 5 – caso 2: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



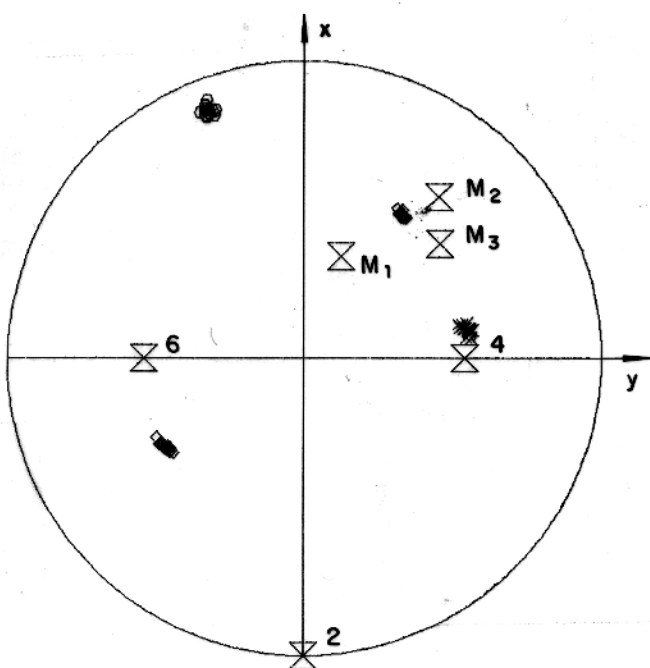
LEGENDA

l
 $\times$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

M
 $\times$: direções verdadeiras de magnetização da porção de volume rasa ($M=M_1$), intermediária ($M=M_2$) e profunda ($M=M_3$) do prisma.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.34 - Exemplo Magnético 5 – caso 1: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes.



LEGENDA

l
 $\times$: direção do lado do prisma que mede l km. $l = 2, 4$ e 6 .

M
 $\times$: direções verdadeiras de magnetização da porção de volume rasa ($M=M_1$), intermediária ($M=M_2$) e profunda ($M=M_3$) do prisma.

$\diamond, \times, \circ$: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 5.35 - Exemplo Magnético 5 – caso 2: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções de magnetização e dos eixos principais equivalentes.

6 - APLICAÇÃO A DADOS REAIS

Neste capítulo, aplicamos a anomalias reais o método de inversão de momentos que se baseia na aproximação do campo anômalo pela expansão em multipolos retendo momentos até 2a. ordem. A anomalia gravimétrica utilizada situa-se no estado da Bahia e é presumivelmente causada por um batólito de granito (USSAMI & BOTT, 1989). A anomalia magnética utilizada situa-se no Golfo da Guiné e é causada por um monte submarino (HARRISON, 1971).

6.1 CASO GRAVIMÉTRICO

O levantamento gravimétrico do estado da Bahia, realizado por GOMES & MOTTA (1978), descobriu na região centro-sul desse estado uma anomalia negativa de cerca de 50 mGal de amplitude e cobrindo aproximadamente 25.000 km² de área. Estes autores propuseram duas hipóteses para explicar esta anomalia. A primeira hipótese é que a anomalia teria origem num batólito de granito não aflorante e a segunda hipótese é que a anomalia seria causada por um espessamento local da crosta. Posteriormente, USSAMI & BOTT (1989) aplicaram a esta anomalia as técnicas de estimação da máxima profundidade ao topo das fontes (BOTT & SMITH, 1958) e de modelamento bidimensional. Como resultado, USSAMI & BOTT (1989) descartaram a hipótese de que a anomalia seja causada por um espessamento local da crosta e propuseram, para sua origem, um batólito de granito subaflorante. Na hipótese de que a anomalia seja causada por um batólito de granito, vamos aplicar à mesma o método de inversão de momentos, visando demonstrar que este método pode ser utilizado para substanciar interpretações de gênese de corpos de granito.

6.1.1 Mapa de anomalias Bouguer

A distribuição das estações gravimétricas do levantamento de GOMES & MOTTA (1978), na região central da Bahia, está mostrada na Figura 6.1. Nesta região o campo gravimétrico foi medido em 1.159 estações. As altitudes mínima, média e máxima dessas estações em relação ao nível do mar são iguais a 439 m, 594 m e 1.360 m, respectivamente.

Os valores de gravidade Bouguer que dispomos para estas estações resultaram do tratamento dos dados originais efetuado por USSAMI & BOTT (1989). Este tratamento consistiu de correções de latitude utilizando a Fórmula Internacional da Gravidade de 1967, correções de altitude, correções Bouguer utilizando o valor $2,67 \text{ g/cm}^3$ para a densidade da crosta e correções de topografia. O erro máximo nos valores de gravidade Bouguer é de cerca de 6 mGal, que resultou, principalmente, de incertezas nas altitudes das estações (USSAMI & BOTT, 1989).

A partir dos valores Bouguer das estações, confeccionamos o mapa mostrado na Figura 6.2, usando a técnica de interpolação de MENDONÇA (1992). A malha utilizada contém 56×56 pontos, igualmente espaçados de 10,1 km nas direções N-S e E-W, e a altitude de interpolação utilizada foi 1,5 km medidos a partir do nível do mar. A folga no ajuste da interpolação foi de 6 mGal.

A anomalia de interesse está localizada na parte central inferior do mapa Bouguer (Figura 6.2). Para caracterizar geologicamente os resultados de sua inversão, vamos fazer, a seguir, uma sucinta descrição da geologia da área.

6.1.2 Geologia da área

O estado da Bahia foi dividido por INDA & BARBOSA (1978) em sete domínios geotectônico-geocronológicos (Figura 6.3). A área de interesse está centrada no domínio Sistema de Dobramentos do Espinhaço (III) e cobre parcialmente os domínios Bacia do São Francisco (II) e Bacia de Lençóis (IV). Em geral, admite-se que os domínios II e IV tenham adquirido condições de ortoplateforma a partir do Proterozóico Médio. O domínio III, no entanto, embora esteja situado dentro do Cráton do São Francisco, foi afetado por eventos do Proterozóico Médio e Inferior constituídos principalmente de intrusões ígneas. No Proterozóico Médio, eventos tectônicos intracratônicos formaram o Sistema de Dobramentos do Espinhaço e a Chapada Diamantina (INDA & BARBOSA, 1978).

O domínio Bacia do São Francisco (II na Figura 6.3) corresponde ao segmento ocidental do Cráton do São Francisco. O domínio Bacia de Lençóis (IV na Figura 6.3) inclui quase que totalmente a região fisiográfica denominada de Chapada Diamantina. O domínio Sistema de Dobramentos do Espinhaço (III na Figura 6.3) constitui um conjunto de entidades tectônicas ensiálicas no Cráton do São Francisco (INDA & BARBOSA, 1978). Este domínio é uma faixa longa, com margens subparalelas e delimitadas por falhas de direção NNW com os domínios II e IV.

O domínio Sistema de Dobramentos do Espinhaço foi dividido em quatro subdomínios

por INDA & BARBOSA (1978) (Figura 6.3): A – Zona do Espinhaço Setentrional, B – Bloco do Paramirim, C – Bloco do Gavião e D – Zona da Chapada Diamantina Ocidental. As duas zonas são constituídas de quartzitos, micaxistos, filitos, calcáreos e pelitos. O Bloco Paramirim é predominantemente formado por gnaisses e migmatitos e intrusões graníticas são muito comuns no mesmo (INDA & BARBOSA, 1978). O Bloco Gavião é formado por gnaisses, migmatitos e complexos vulcano-sedimentares. No limite entre estes dois blocos e dentro do Bloco Gavião, encontra-se uma unidade litológica denominada Região da Lagoa Real, na qual existem intrusões generalizadas de corpos graníticos (INDA & BARBOSA, 1978).

Um modelo de evolução para a área da Chapada Diamantina e Faixa Santo Onofre, que corresponde aproximadamente ao domínio III de INDA & BARBOSA (1978), foi proposto por SÁ (1981). Este modelo é baseado numa tectônica vertical de blocos e consta das cinco etapas esquematizadas na Figura 6.4, que podem ser assim resumidas:

Etapa 1: estado inicial da crosta no Proterozóico Inferior. Na base da crosta ocorreu a formação de uma zona de fusão devido à presença de um ponto quente (“hot spot”). Em consequência, dá-se o aparecimento de uma camada instável infracrustal.

Etapas 2 e 3: na Etapa 2, o Bloco Paramirim foi levantado através de falhas verticais, em consequência da subida de diápiros de granito. Em seguida, iniciam-se os processos de erosão (Etapas 2 e 3) e sedimentação (Etapa 3) de bacias.

Etapas 4 e 5: estabelecimento de um regime compressivo (Etapa 4) e retorno ao regime extensional (Etapa 5).

6.1.3 Interpretação qualitativa do mapa Bouguer

O campo Bouguer mostrado na Figura 6.2 resulta basicamente da superposição de três componentes de anomalias. A componente 1 é a anomalia de grande extensão, com cerca de 600 km na direção N–S e 300 km na direção W–E, que se situa na porção oriental do mapa Bouguer (Figura 6.2). Pode-se perceber a presença desta componente, realçando-se a linha de isovalor –80 mGal deste mapa. A componente 2 é a anomalia de extensão intermediária, com cerca de 250 km na direção N–S e 120 km na direção W–E, espacialmente contida pela componente 1 (Figura 6.2). Finalmente, a componente 3 é formada pelas anomalias de pequena extensão, com cerca de 40 km e menores, superpostas às componentes 1 e 2, a exemplo das anomalias identificadas pelas letras A, B e C na Figura 6.2.

A componente 1 é causada basicamente pela compensação isostática devido ao carregamento das massas da Chapada Diamantina (USSAMI & BOTT, 1989). Assim, caso seja válido para a área o modelo de compensação de Airy, a componente 1 tem origem na base da crosta. Em relação à geologia de superfície, a componente 1 corresponde aproximadamente aos domínios III e IV de INDA & BARBOSA (1978) (Figura 6.3).

A componente 2 é a anomalia de interesse. Segundo USSAMI & BOTT (1989), uma anomalia gravimétrica de tais dimensões geralmente é causada por bacias sedimentares ou por batólitos de granito. A geologia da área descarta a existência de uma bacia sedimentar que possa ser identificada como origem dessa anomalia. No entanto, a área contém muitos afloramentos de intrusões graníticas (INDA & BARBOSA, 1978) e, assim, a geologia de superfície não descarta a interpretação de que a componente 2 seja causada por corpos de granito não aflorantes (USSAMI & BOTT, 1989).

Finalmente, as anomalias da componente 3 apresentam boa correlação com pequenos corpos ou afloramentos mapeados na escala 1:1.000.000 por INDA & BARBOSA (1978). Assim, do ponto de vista da interpretação das componentes 1 e 2, a componente 3 constitui o "ruído geológico" de corpos rasos.

6.1.4 Separação regional-residual

Para aplicar o método de inversão de momentos à componente 2 do mapa Bouguer (Figura 6.2), temos que separá-la das componentes 1 e 3, de modo que, após a separação, a componente 2 conserve a *característica* mínima do campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada. Presumindo que o contraste de densidade é uniforme, esta característica é a de que o campo deve decair monotonicamente a zero, a partir de seu ponto de maior amplitude, em todas as direções do plano de medida. Desse modo, a integral do campo sobre o plano de medida é não nula e finita.

A dificuldade desta separação reside no fato de que não existe, pelo menos de nosso conhecimento, nenhum método automático de separação regional-residual que incorpore, na anomalia residual, a característica do campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada. Além disso, a separação manual dessas componentes foi por nós descartada, face à sua subjetividade e demanda de tempo. A reprodução aproximada da característica do campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada, para a anomalia resultante da separação da componente 2 das componentes 1 e 3, foi obtida a partir do tratamento que constou das três etapas a seguir descritas.

A primeira etapa consistiu em separar a componente 1 da soma das componentes 2 e 3,

usando todo o mapa Bouguer (Figura 6.2). A componente 1 foi considerada como sendo a anomalia "regional" e a soma das componentes 2 e 3 como sendo as anomalias "residuais". Esta etapa foi realizada com o método de BELTRÃO et al. (1991), que aproxima a componente regional por um polinômio bidimensional e utiliza um critério robusto de ajuste para estimar os coeficientes do polinômio. O uso do critério robusto de ajuste assegura, pelo menos, que a anomalia residual tenha integral não nula sobre o plano de medida. De modo a otimizar os compromissos competitivos de que as componentes 2 e 3 fossem individualizadas e não tivessem suas amplitudes e gradientes deformados, selecionamos ordem 4 para o polinômio ajustante da componente 1. A correlação da componente 3 com a geologia de superfície foi utilizada como um critério auxiliar para selecionar a ordem do polinômio. As anomalias regional e residual resultantes estão mostradas nas Figuras 6.5 e 6.6, respectivamente.

A segunda etapa consistiu em separar as componentes 2 e 3, da anomalia residual resultante da primeira etapa. Nesta segunda etapa, usamos apenas os pontos da malha contidos dentro do retângulo em linha tracejada na Figura 6.6. Além disso, usamos o método de BELTRÃO et al. (1991), considerando a componente 2 como a anomalia "regional" e as anomalias A, B e C da componente 3 (Figura 6.6) como as anomalias "residuais". Empregando critérios análogos aos empregados na primeira etapa, selecionamos ordem 8 para o polinômio ajustante da componente 2. As anomalias regional e residual resultantes estão mostradas nas Figuras 6.7 e 6.8, respectivamente.

Observemos que a característica definida para o campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada não está presente na anomalia mostrada na Figura 6.7. A terceira etapa consistiu pois em modificar a componente 2 acima obtida, de modo que esta característica fosse a ela incorporada. Para tanto: (1) atribuímos valor zero aos pontos da malha da Figura 6.7 cujos valores de campo fossem positivos, ou negativos, mas cujas posições não estivessem espacialmente conectadas à componente 2; (2) extendemos a malha de cerca de 1° em cada borda e atribuímos valor zero aos pontos adicionados; (3) adicionamos aos valores de campo da malha estendida ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão 1,0 mGal e, por fim, (4) utilizando os valores finais de campo da malha estendida como "observações de campo" no algoritmo de interpolação de MENDONÇA (1992), obtivemos os valores da anomalia, na altitude de 1,5 km acima do nível do mar, usando uma nova malha com 56 x 45 pontos espaçados de aproximadamente 10 km em ambas as direções. A folga no ajuste da interpolação foi de 2,5 mGal. A partir desta nova malha, obtivemos o mapa mostrado na Figura 6.9. Observemos que o objetivo dos itens (3) e (4) acima descritos foi restaurar gradientes suaves no caimento a zero da anomalia, pois os itens (1) e (2) haviam introduzido uma transição brusca de valores negativos para valores nulos na anomalia.

6.1.5 Inversão da anomalia

O formato alongado e de cantos bem definidos, especialmente na borda norte, da anomalia mostrada na Figura 6.9, sugere que a condição de fonte distante das observações não está satisfeita. Assim, é necessário fazer não só a inversão desta anomalia, mas também das anomalias obtidas de sua continuação para cima, de modo a verificar o comportamento das estimativas obtidas com a altitude de continuação. Além disso, dado o formato muito alongado da anomalia (Figura 6.9), que descarta o seu ajuste com o campo da esfera, trabalhamos apenas com a aproximação de 2a. ordem. As continuações para cima da anomalia mostrada na Figura 6.9 foram realizadas com o algoritmo de MENDONÇA (1992). Uma vez conhecido o subconjunto de valores de campo da componente 2, que reproduz com folga de 2,5 mGal o conjunto total de valores de campo desta componente (o que foi determinado no item (4) da terceira etapa da separação regional-residual), o algoritmo de MENDONÇA (1992) permite efetuar a continuação para cima da componente 2 bastando, para tanto, especificar a altitude de interpolação desejada.

A altitude h do plano de interpolação foi variada desde 10 km até 100 km, de 10 em 10 km. A altitude zero é o nível do mar. Utilizando o Algoritmo de Estimção Pontual, obtivemos as curvas de variação com h do erro médio quadrático do resíduo entre o campo observado e a sua aproximação de 2a. ordem (σ_2) e das estimativas pontuais de ordem 2 da massa anômala total, das coordenadas x_{cm} e y_{cm} , e da diferença $z_{cm} - h$, mostradas nas Figuras 6.10.a a 6.10.d, respectivamente. Para cada valor de h , o centro de expansão inicial foi o ponto (330, 220, $h+10$) em km. As Figuras 6.11 e 6.12 mostram as superposições da anomalia observada e suas aproximações de 2a. ordem, para os casos $h = 1,5$ km e $h = 100$ km, respectivamente.

À medida que h aumenta, a Figura 6.10.a mostra progressiva diminuição do valor de σ_2 ; a Figura 6.10.b mostra convergência para m_0 ; a Figura 6.10.c mostra relativa constância nas estimativas de x_{cm} e y_{cm} e, por fim, a Figura 6.10.d mostra convergência para as estimativas de $z_{cm} - h$. Em conjunto, as Figuras 6.10.a a 6.10.d apresentam comportamentos semelhantes aos obtidos no Exemplo Gravimétrico 1 (Figuras 3.8.a a 3.8.d). Do exame da Figura 6.10.d, e das superposições da anomalia observada e suas aproximações de 2a. ordem em diferentes níveis h (a exemplo das Figuras 6.11 e 6.12), concluímos que a condição de fonte distante das observações está aproximadamente satisfeita em $h = 100$ km. Desse modo, adotamos como estimativa para a profundidade do centro de massa o valor de cerca de 20 km, obtido em $h = 100$ km.

Em todas as altitudes, as estimativas pontuais obtidas para as direções principais equivalentes (não mostradas) revelam que o eixo principal equivalente maior é subhorizontal e tem

direção NNW, como é razoável se esperar do exame da Figura 6.2. Este eixo concorda com a direção estrutural dominante na área (INDA & BARBOSA, 1978). Além disso, as estimativas obtidas para as direções dos eixos principais intermediário e menor são subhorizontais de direção WSW e subverticais, respectivamente.

As análises de sensibilidade das estimativas pontuais das direções principais equivalentes, nas altitudes $h = 20$ km e $h = 100$ km, estão mostradas nas Figuras 6.13.a e 6.13.b, respectivamente. Estas análises foram realizadas utilizando o valor $L = 0,01$ mGal para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47). Do exame das Figuras 6.13.a e 6.13.b, podemos constatar que há boa resolução na definição de todos os três eixos principais equivalentes. Observemos que este mesmo resultado foi obtido em todas as outras altitudes. Desse modo, as análises de sensibilidade revelam que os momentos de inércia equivalentes, medidos em torno dos eixos principais equivalentes, são muito diferentes.

Devido ao fato das diferenças entre os momentos de inércia principais equivalentes serem muito grandes, conforme foi revelado pelas análises de sensibilidade em diferentes níveis h , bem como devido à consistência de todos os resultados obtidos nos diferentes níveis h , concluímos que as estimativas apresentadas são relevantes. Assim sendo, não julgamos necessário efetuar, nesta aplicação, a análise de estabilidade.

Dos resultados desta seção, concluímos que a fonte equivalente à que gerou a componente 2 tem centro de massa no entorno do ponto ($13^{\circ}08' S$, $42^{\circ}46' W$, 20 km), tem deficiência total de massa de cerca de $1,9 \times 10^{16}$ kg e tem eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor subhorizontal de direção NNW, subhorizontal de direção WSW e subvertical, respectivamente. Além disso, concluímos que os momentos de inércia equivalentes, medidos em torno dos eixos principais equivalentes, são muito diferentes.

Por fim, queremos registrar duas necessidades metodológicas por nós não satisfeitas, que dificultaram esta inversão com dados reais. A primeira é a necessidade de criar um método automático de separação regional-residual, que produza anomalias residuais conservando a característica definida para o campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada. A segunda necessidade é a de construir um algoritmo de estimação de momentos, mais versátil que o por nós construído, que se adaptasse mais facilmente às características específicas de uma dada anomalia. Este algoritmo deveria permitir: (a) a opção por um critério de ajuste robusto entre os campos; (b) a introdução de momentos de 3a. ordem e superiores e (c) a estimação bidimensional de momentos de fonte. Em particular, o item (c) proporcionaria um teste adicional nos parâmetros estimados, no caso de anomalias muito alongadas como neste exemplo.

6.1.6 Discussão dos resultados

Vamos discutir os resultados acima obtidos, tendo em vista tanto a influência do tratamento da separação regional-residual como a geologia da área.

A estimativa de 20 km, em relação ao nível do mar, para a profundidade do centro de massa das heterogeneidades intracrustais não é incompatível com a estimativa, também de 20 km, que foi obtida para a máxima profundidade de seu topo por USSAMI & BOTT (1989). Todavia, é possível que a estimativa de 20 km para a profundidade do centro de massa seja um pouco superior ao valor verdadeiro, devido à lenta convergência de $\hat{z}_{cm} - h$ com a altitude de continuação e à possibilidade de que tenha havido “vazamento” de parte da componente 1 para a componente 2 na separação destas componentes.

Admitida a possibilidade do vazamento, vamos avaliar a conseqüência e o erro por ele introduzido na estimativa de 20 km para a profundidade do centro de massa. A conseqüência é que esta estimativa estaria situada entre as profundidades de dois centros de massa: a menor delas correspondendo às deficiências de massas graníticas intra-crustais e a maior delas, às deficiências de massa situadas na base da crosta, geradoras da parte da componente 1 que vazou para a componente 2. Nesta situação, o valor de 20 km seria uma estimativa da profundidade máxima do centro das massas graníticas.

Para avaliar o erro introduzido pelo vazamento, fizemos a inversão da anomalia mostrada na Figura 6.9, e de algumas das anomalias obtidas de sua continuação para cima, utilizando o algoritmo de inversão simultânea de momentos de fonte e de um regional na forma de um polinômio de 2a. ordem (Anexo III). Verificamos assim que as estimativas dos momentos obtidas com este algoritmo são praticamente iguais às estimativas apresentadas, que foram obtidas com o Algoritmo de Estimção Pontual. Particularmente, a maior diferença obtida entre estimativas da profundidade de centro de massa, com este dois algoritmos, foi 20%. Desse modo, se houve vazamento, o mesmo deve ter sido pequeno.

Presumindo que um único corpo de densidade uniforme gerou a anomalia, as análises de sensibilidade revelam que as dimensões mutuamente ortogonais deste corpo são muito diferentes. Em particular, a sua espessura é muito menor que a sua dimensão ENE-WSW. Uma vez que a forma geométrica de um granito não deformado é uma gota invertida de dimensões equitativas (PITCHER, 1979), sugerimos que as massas de granito geradoras da anomalia foram estiradas na direção NNW e adelgadas na direção vertical. Segundo VIGNERESSE (1990), o padrão de deformação de granitos que envolve estiramento numa direção horizontal e adelgaçamento na direção vertical é característico da intrusão de granitos durante um regime compressivo. Desse modo, sugerimos que as massas de granito geradoras

da anomalia foram deformadas durante o regime compressivo que originou o Sistema de Dobramentos do Espinhaço, que corresponde à Etapa 4 do modelo de evolução de SÁ (1981) para a área (Figura 6.4).

Por outro lado, na hipótese de que as massas de granito não tenham sido deformadas, as análises de sensibilidade revelam que a fonte geradora da anomalia é formada por um conjunto de corpos e não por um único corpo. Este conjunto de corpos formaria uma espécie de cinturão granítico, estruturalmente controlado na direção NNW, dentro do Bloco Paramirim.

Dado um contraste de densidade para as massas de granito, em relação à crosta encaixante, podemos fazer uma estimativa do volume de granito injetado no Bloco Paramirim, com base na estimativa de massa anômala total. Por exemplo, para um contraste de $-0,10 \text{ g/cm}^3$, o volume de granito é cerca de $1,9 \times 10^5 \text{ km}^3$. Na hipótese de corpo único e usando os valores 210 km e 85 km das semi-larguras da anomalia nas direções NNW e WSW, respectivamente, como medidas das dimensões horizontais do corpo, obtemos que a sua espessura é aproximadamente 11 km. Além disso, utilizando o valor 30 km como a máxima espessura admissível para o corpo, obtemos que o seu contraste de densidade mínimo é igual a $-0,03 \text{ g/cm}^3$.

6.2 CASO MAGNÉTICO

A inversão de anomalias magnéticas sobre montes submarinos tem sido extensivamente utilizada, desde a introdução da teoria da tectônica de placas, com o objetivo de estimar as direções médias de magnetização total dos montes submarinos, pois, uma vez conhecidas estas direções, é possível estimar as direções dos paleopolos magnéticos atuantes durante a formação dos montes (Uyeda & Richards, 1966 e Vacquier & Uyeda, 1967, apud PARKER et al., 1987; FRANCHETEAU et al., 1970; HARRISON, 1971; EMILIA & MASSEY, 1974; MCNUTT, 1986; PARKER et al., 1987 e PARKER, 1991). As hipóteses comumente utilizadas neste problema estão discutidas em FRANCHETEAU et al. (1970) e se resumem em basicamente três. A primeira hipótese é que a componente induzida da magnetização total é desprezível quando comparada com a componente remanente desta magnetização. Esta hipótese se baseia no fato experimental (OPDYKE & HEKINIAN, 1967) de que a razão de Koenigsberger das rochas formadoras dos montes submarinos é, em geral, muito grande, com média em torno de 30. A segunda hipótese é que toda a magnetização remanente tem origem termo-remanente. A terceira hipótese é que o paleopolo magnético atuante durante o período de formação do monte submarino foi gerado por um dipolo magnético terrestre axial ao eixo de rotação.

O método mais utilizado para estimar a direção de magnetização total de montes submarinos, a partir da sua anomalia magnética, foi proposto por TALWANI (1965). Este método pressupõe que a magnetização é uniforme para todo o monte submarino. Para estimar as três componentes desta magnetização, o monte submarino é modelado, de acordo com a sua batimetria, por "fatias" de bases horizontais e faces poligonais e a anomalia observada é ajustada com a anomalia gerada pelo modelo do monte através do critério dos mínimos quadrados. Uma variante do método de TALWANI (1965), proposta por EMILIA & MASSEY (1974), é a de considerar constantes a direção e o sentido da magnetização, em todo o monte submarino, mas deixar variar nas suas fatias o módulo da magnetização.

Devido à ambigüidade intrínseca da inversão de anomalias magnéticas, a estimação da direção média de magnetização total de montes submarinos é um problema muito difícil (PARKER et al., 1987). O uso do método de TALWANI (1965) e mesmo de técnicas mais sofisticadas, incorporando suavidade na distribuição da magnetização, têm, muitas vezes, produzido resultados insatisfatórios quando aplicadas a esse problema (PARKER et al., 1987).

Nesta seção, vamos aplicar o método de inversão de momentos à anomalia magnética gerada por um monte submarino situado no Golfo da Guiné (0,4°N e 2,6°E). Esta anomalia foi interpretada por HARRISON (1971) utilizando o método de TALWANI (1965), e por EMILIA & MASSEY (1974). O nosso objetivo é evidenciar que o método de inversão de momentos pode produzir boas estimativas da direção média de magnetização total de montes submarinos.

6.2.1 Obtenção da anomalia de campo vertical

A anomalia magnética de campo total do monte submarino do Golfo da Guiné está mostrada na Figura 6.14. Esta anomalia foi obtida por HARRISON (1971), após a retirada de uma componente regional na forma de um plano para o campo observado. A batimetria do monte submarino está mostrada na Figura 6.15. Observemos que o sistema de coordenadas $x - y$ representado nas Figuras 6.14 e 6.15 não é o sistema original utilizado por HARRISON (1971) e EMILIA & MASSEY (1974).

Uma vez que desenvolvemos a expansão em multipolos apenas para a componente vertical de campo magnético, precisamos obter a anomalia desta componente, a partir da anomalia de componente total, para poder aplicar o método. O campo magnético terrestre atuante no Golfo da Guiné em 1967, o ano do levantamento (HARRISON, 1971), tinha aproximadamente -10° de declinação e -21° de inclinação (FABIANO et al., 1983). Para esta inclinação, a transformação de anomalias de campo total em anomalias de campo vertical é estável.

A transformação da anomalia de campo total mostrada na Figura 6.14 em uma anomalia de campo vertical foi feita através do seguinte procedimento: (1) a partir da ampliação xerográfica do desenho desta anomalia no artigo de EMILIA & MASSEY (1974), fizemos a digitalização automática de suas curvas de contorno reproduzindo-as com 820 pontos; (2) com os pontos digitalizados, utilizamos o algoritmo de interpolação de MENDONÇA (1992) para produzir o mapa de campo total que está mostrado na Figura 6.16. Este mapa está na mesma altitude do mapa original (Figura 6.14) e foi interpolado com erro máximo de 10 nT numa malha com 41 x 41 pontos, espaçados de aproximadamente 1,1 km nas direções x (S-N) e y (W-E). Por fim, (3) com os valores de campo total da malha, utilizamos o método de LEÃO & SILVA (1989) para obter a anomalia de campo vertical mostrada na Figura 6.17. Observemos que a malha desta anomalia contém apenas 29 x 29 pontos, porque o método de LEÃO & SILVA (1989) trunca as bordas da malha do campo de entrada. Assim, a área da Figura 6.17 corresponde ao retângulo tracejado da Figura 6.16.

6.2.2 Inversão da anomalia de campo vertical

Nesta seção, vamos apresentar os resultados da inversão da anomalia de campo vertical mostrada na Figura 6.17.

Para inicializar o Algoritmo de Estimção Pontual, usamos como centro de expansão o ponto (20, 20, 5) em km. A aproximação de 2a. ordem para o campo observado está mostrada na Figura 6.18. O erro médio quadrático do resíduo entre estes dois campos (σ_2) foi 56,5 nT. Este erro é compatível tanto com o intervalo 43,7 nT a 71,7 nT, obtido por HARRISON (1971) em 17 modelos do monte submarino, quanto com o erro obtido por EMILIA & MASSEY (1974) que foi 36,0 nT.

As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 obtidas para o vetor momento de dipolo total e para as coordenadas de centro de momento de dipolo estão mostradas na Tabela 6.1. As estimativas pontuais de ordem 2 de x_{CM} e y_{CM} são compatíveis com a batimetria do monte submarino (Figura 6.15). No entanto, a estimativa pontual de ordem 2 de z_{CM} (Tabela 6.1) é superior à profundidade do sopé do monte submarino (Figura 6.15). A provável superestimção de z_{CM} indica a possibilidade de que a condição de fonte distante das observações não esteja satisfeita. Esta possibilidade não é descartada pela batimetria do monte submarino, pois o raio da esfera de menor volume que contém o monte é superior à profundidade do sopé do monte, incluindo ou não os níveis batimétricos adicionais propostos por HARRISON (1971) (Figura 6.15). Desse modo, este raio é maior que a profundidade do centro de momento de dipolo do monte. Observemos ainda que as estimativas pontuais de ordens 1 e 2 da direção de magnetização total são bastante semelhantes (Tabela 6.1).

Tabela 6.1 - Caso Magnético: resultados obtidos para o vetor momento de dipolo total e coordenadas do centro de momento de dipolo do monte submarino do Golfo da Guiné. As estimativas pontuais de ordens 1 e 2 foram obtidas sem adicionar ruído ao campo. A média e o desvio padrão, que se referem às estimativas de ordem 2, foram calculados a partir de 40 estimativas resultantes do Algoritmo de Análise de Estabilidade, adicionando-se ruído ao campo.

parâmetro (unidade)	M_0 (10^9 A.m ²)	d (grau)	i (grau)	x_{CM} (km)	y_{CM} (km)	z_{CM} (km)
est. pontual de ordem 1	3564,59	142,57	17,28	17,15	20,88	8,57
est. pontual de ordem 2	2791,11	142,19	20,82	16,90	20,77	6,84
média amostral	2820,17	141,81	20,79	16,89	20,75	6,88
desvio padrão amostral	12,91	—	—	0,02	0,02	0,02

Tomadas em conjunto, as estimativas apresentadas na Tabela 6.1 são qualitativamente semelhantes a aquelas obtidas no Exemplo Magnético 3. Neste exemplo com dados sintéticos, o tronco de pirâmide utilizado como corpo anômalo tem forma assemelhada à de um monte submarino (compare as Figuras 5.12 e 6.15). Na verdade, as dimensões deste tronco de pirâmide foram inspiradas na própria batimetria do monte submarino do Golfo da Guiné. Desse modo, o Exemplo Magnético 3 pode servir de base para avaliar os resultados desta inversão com dados reais. Neste sentido, observemos que as estimativas de z_{CM} obtidas no Exemplo Magnético 3 são superiores ao valor verdadeiro, devido à condição de fonte distante das observações não está satisfeita, bem como devido à assimetria do tronco de pirâmide em relação a um plano horizontal. Todavia, mesmo nesta situação, as estimativas obtidas para a direção de magnetização total são boas aproximações do valor verdadeiro (Tabela 5.3), o que nos permite acreditar que este fato também tenha ocorrido no caso real.

A evolução das estimativas das direções principais equivalentes esta mostrada na Figura 6.19. Nesta figura, constatamos que a estimativa da direção do eixo principal equivalente menor é subvertical e que o plano formado pelas direções dos eixos principais equivalentes maior e intermediário é subhorizontal. Como um todo, estas estimativas são consistentes com a batimetria do monte submarino, mostrada na Figura 6.15. Todavia, analisando esta figura e a Figura 6.19, constatamos que a *ordem* relativa das estimativas das direções dos eixos principais equivalentes maior e intermediário do monte não é consistente com a sua batimetria ou, pelo menos, com a sua batimetria incluindo os níveis batimétricos sob a sua base propostos por HARRISON (1971).

A análise de sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes

está mostrada na Figura 6.20. Para fazer esta análise, usamos $L=0,5$ nT para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47). A Figura 6.20 mostra que todos os três eixos principais são bem definidos. Todavia, tendo por base apenas os resultados da inversão, não podemos descartar a possibilidade de que o plano subhorizontal (Figura 6.20) seja um plano de degenerescência. Esta possibilidade se deve ao fato de que no Exemplo Magnético 3 a análise de sensibilidade não foi capaz de revelar, para os eixos principais equivalentes maior e intermediário, a (esperada) sensibilidade a erros nos momentos de 2a. ordem equivalentes.

Para evidenciar que a estimativa pontual acima apresentada é estável, vamos apresentar os resultados de uma análise de estabilidade. Para fazer esta análise, adicionamos ao campo mostrado na Figura 6.17 ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão 10 nT. Os resultados desta análise, para as estimativas de ordem 2 do vetor momento de dipolo total e coordenadas de centro de momento de dipolo, estão resumidos na Tabela 6.1. Observemos que a declinação e inclinação, associadas na Tabela 6.1 à média das estimativas de ordem 2, foram obtidas a partir da direção do vetor momento de dipolo total médio. Este vetor, por sua vez, foi calculado com a fórmula da média amostral para dados situados sobre uma esfera (MARDIA et al., 1979), utilizando as estimativas de ordem 2. A variância esférica amostral (MARDIA et al., 1979) para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2, é igual a $6,9 \times 10^{-5}$. Para as direções principais equivalentes, o resultado da análise de estabilidade está mostrado na Figura 6.21. Podemos concluir do conjunto destes resultados que a estimativa pontual apresentada é estável.

Por fim, observemos que não há (pelo menos aparentemente) influências nos resultados apresentados devido a um possível "vazamento" de uma parte da componente regional do campo magnético para a anomalia residual utilizada. Isso é de certa forma esperado, pois o monte submarino é isolado e, nesta situação, o regional do campo magnético é geralmente mais fácil de ser retirado do que no caso gravimétrico.

6.2.3 Discussão dos resultados

Nesta seção, vamos primeiro comparar a nossa estimativa para a direção média de magnetização total com as estimativas obtidas por HARRISON (1971) e por EMILIA & MASSEY (1974) para esta direção. Em seguida, vamos testar, com uma técnica independente, a consistência destas três estimativas de direção média de magnetização total. Por último, vamos discutir quais são as conseqüências das estimativas dos demais parâmetros, por nós obtidas, para a caracterização geofísica do monte submarino do Golfo da Guiné.

A - Comparação das estimativas de direção média de magnetização total

está mostrada na Figura 6.20. Para fazer esta análise, usamos $L=0,5$ nT para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47). A Figura 6.20 mostra que todos os três eixos principais são bem definidos. Todavia, tendo por base apenas os resultados da inversão, não podemos descartar a possibilidade de que o plano subhorizontal (Figura 6.20) seja um plano de degenerescência. Esta possibilidade se deve ao fato de que no Exemplo Magnético 3 a análise de sensibilidade não foi capaz de revelar, para os eixos principais equivalentes maior e intermediário, a (esperada) sensibilidade a erros nos momentos de 2a. ordem equivalentes.

Para evidenciar que a estimativa pontual acima apresentada é estável, vamos apresentar os resultados de uma análise de estabilidade. Para fazer esta análise, adicionamos ao campo mostrado na Figura 6.17 ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão 10 nT. Os resultados desta análise, para as estimativas de ordem 2 do vetor momento de dipolo total e coordenadas de centro de momento de dipolo, estão resumidos na Tabela 6.1. Observemos que a declinação e inclinação, associadas na Tabela 6.1 à média das estimativas de ordem 2, foram obtidas a partir da direção do vetor momento de dipolo total médio. Este vetor, por sua vez, foi calculado com a fórmula da média amostral para dados situados sobre uma esfera (MARDIA et al., 1979), utilizando as estimativas de ordem 2. A variância esférica amostral (MARDIA et al., 1979) para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2, é igual a $6,9 \times 10^{-5}$. Para as direções principais equivalentes, o resultado da análise de estabilidade está mostrado na Figura 6.21. Podemos concluir do conjunto destes resultados que a estimativa pontual apresentada é estável.

Por fim, observemos que não há (pelo menos aparentemente) influências nos resultados apresentados devido a um possível "vazamento" de uma parte da componente regional do campo magnético para a anomalia residual utilizada. Isso é de certa forma esperado, pois o monte submarino é isolado e, nesta situação, o regional do campo magnético é geralmente mais fácil de ser retirado do que no caso gravimétrico.

6.2.3 Discussão dos resultados

Nesta seção, vamos primeiro comparar a nossa estimativa para a direção média de magnetização total com as estimativas obtidas por HARRISON (1971) e por EMILIA & MASSEY (1974) para esta direção. Em seguida, vamos testar, com uma técnica independente, a consistência destas três estimativas de direção média de magnetização total. Por último, vamos discutir quais são as conseqüências das estimativas dos demais parâmetros, por nós obtidas, para a caracterização geofísica do monte submarino do Golfo da Guiné.

A - Comparação das estimativas de direção média de magnetização total

está mostrada na Figura 6.20. Para fazer esta análise, usamos $L=0,5$ nT para encontrar soluções do sistema de inequações (3.46) e (3.47). A Figura 6.20 mostra que todos os três eixos principais são bem definidos. Todavia, tendo por base apenas os resultados da inversão, não podemos descartar a possibilidade de que o plano subhorizontal (Figura 6.20) seja um plano de degenerescência. Esta possibilidade se deve ao fato de que no Exemplo Magnético 3 a análise de sensibilidade não foi capaz de revelar, para os eixos principais equivalentes maior e intermediário, a (esperada) sensibilidade a erros nos momentos de 2a. ordem equivalentes.

Para evidenciar que a estimativa pontual acima apresentada é estável, vamos apresentar os resultados de uma análise de estabilidade. Para fazer esta análise, adicionamos ao campo mostrado na Figura 6.17 ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão 10 nT. Os resultados desta análise, para as estimativas de ordem 2 do vetor momento de dipolo total e coordenadas de centro de momento de dipolo, estão resumidos na Tabela 6.1. Observemos que a declinação e inclinação, associadas na Tabela 6.1 à média das estimativas de ordem 2, foram obtidas a partir da direção do vetor momento de dipolo total médio. Este vetor, por sua vez, foi calculado com a fórmula da média amostral para dados situados sobre uma esfera (MARDIA et al., 1979), utilizando as estimativas de ordem 2. A variância esférica amostral (MARDIA et al., 1979) para a direção de momento de dipolo total, obtida das estimativas de ordem 2, é igual a $6,9 \times 10^{-5}$. Para as direções principais equivalentes, o resultado da análise de estabilidade está mostrado na Figura 6.21. Podemos concluir do conjunto destes resultados que a estimativa pontual apresentada é estável.

Por fim, observemos que não há (pelo menos aparentemente) influências nos resultados apresentados devido a um possível "vazamento" de uma parte da componente regional do campo magnético para a anomalia residual utilizada. Isso é de certa forma esperado, pois o monte submarino é isolado e, nesta situação, o regional do campo magnético é geralmente mais fácil de ser retirado do que no caso gravimétrico.

6.2.3 Discussão dos resultados

Nesta seção, vamos primeiro comparar a nossa estimativa para a direção média de magnetização total com as estimativas obtidas por HARRISON (1971) e por EMILIA & MASSEY (1974) para esta direção. Em seguida, vamos testar, com uma técnica independente, a consistência destas três estimativas de direção média de magnetização total. Por último, vamos discutir quais são as conseqüências das estimativas dos demais parâmetros, por nós obtidas, para a caracterização geofísica do monte submarino do Golfo da Guiné.

A - Comparação das estimativas de direção média de magnetização total

Tabela 6.2 - Caso magnético: estimativas da direção média de magnetização total e do paleopolo magnético do monte submarino do Golfo da Guiné. *Lat* e *Long* são a latitude e a longitude do paleopolo, respectivamente.

parâmetro (unidade)	<i>d</i> (grau)	<i>i</i> (grau)	<i>Lat</i> (grau)	<i>Long</i> (grau)
HARRISON (1971)	155,5	23,9	62,5 <i>S</i>	63,8 <i>E</i>
EMILIA & MASSEY (1974)	142,0	26,5	49,7 <i>S</i>	70,1 <i>E</i>
esta tese	142,2	20,8	50,8 <i>S</i>	74,9 <i>E</i>

Na Tabela 6.2, reproduzimos a nossa estimativa pontual de ordem 2 para a direção média de magnetização total, juntamente com as estimativas obtidas por HARRISON (1971) e por EMILIA & MASSEY (1974) para esta direção. Observemos que estas três estimativas de direção de magnetização são bastante semelhantes e que as discrepâncias entre elas estão dentro dos limites aceitos para a resolução de estimativas de direção de magnetização de montes submarinos, obtidas de inversões de anomalias magnéticas (PARKER, 1991). Em consequência, as três estimativas para a direção do paleopolo com elas calculadas são também muito semelhantes (Tabela 6.2).

B - Teste de consistência das estimativas de direção média de magnetização total

É necessário um teste de consistência para as estimativas de direção média de magnetização total mostradas na Tabela 6.2. Todavia, não temos condições de aplicar à anomalia magnética do monte submarino o teste de convergência das estimativas dos momentos equivalentes com a altura de continuação para cima da anomalia, porque a área de cobertura da mesma é muito pequena. Além disso, não dispomos de nenhum dado geológico ou paleomagnético da área, que nos permitisse avaliar a consistência das estimativas de direção média de magnetização total com estes dados.

Para fazer, então, um teste de consistência, optamos por aplicar à anomalia de campo total a técnica de redução ao polo, utilizando as três estimativas de direção média de magnetização total apresentadas na Tabela 6.2. Se estas três estimativas de direção de magnetização forem boas aproximações do valor verdadeiro e se o monte submarino tiver dois planos verticais de simetria, as três anomalias reduzidas ao polo devem apresentar dois eixos horizontais de simetria. Utilizando a abordagem de LEÃO & SILVA (1989) para fazer a redução ao polo, obtivemos as três anomalias reduzidas ao polo mostradas nas Figuras 6.22 a 6.24, empregando as estimativas de direção média de magnetização total obtidas por HARRISON (1971), por EMILIA & MASSEY (1974) e nesta tese, respectivamente. Podemos observar nestas três

figuras que há aproximadamente dois eixos de simetria em cada uma delas, de modo que podemos concluir que as três estimativas de direção média de magnetização total devem ser aproximações razoáveis do valor verdadeiro.

Não obstante, do ponto de vista de otimização da simetria na anomalia reduzida ao polo, ainda é possível se obterem estimativas melhores para a direção média de magnetização total que as três estimativas em questão. Por exemplo, fixando a declinação em $142,5^\circ$ e variando a inclinação de 10° até 45° , com incremento de $2,5^\circ$, obtivemos por seleção visual que a anomalia reduzida ao polo que otimiza a simetria em relação a dois eixos horizontais tem inclinação igual a $37,5^\circ$. Esta anomalia está mostrada na Figura 6.25.

C - Consequências para a caracterização geofísica do monte submarino

Conhecendo-se estimativas para o módulo do momento de dipolo total M_0 e para o volume de matéria magnetizada do monte submarino, é possível estimar a intensidade média de magnetização do monte submarino. No nosso caso, a dificuldade de estimar M_0 reside no fato de que é provável que a condição de fonte distante das observações não esteja satisfeita. Nesta situação, de acordo com o Exemplo Magnético 3, não podemos usar diretamente as estimativas de ordens 1 e 2 para M_0 , pois sabemos que elas são muito maiores que o valor verdadeiro de M_0 . Todavia, comparando as estimativas mostradas nas Tabelas 5.3 e 6.1, constatamos que as razões entre as estimativas de ordens 1 e 2 para M_0 , nos casos sintético e real respectivamente, são praticamente iguais. Para corpos uniformemente magnetizados, esta razão depende basicamente da forma do corpo e de sua distância ao plano de medida. Devido à semelhança destas duas condições nos casos sintético e real, é razoável supor que a razão entre as estimativas de ordem 2 e os valores verdadeiros de M_0 sejam também praticamente iguais nos dois casos. Desse modo, podemos estimar o valor $714,5 \times 10^9 \text{ A.m}^2$ para o módulo do momento de dipolo total verdadeiro do monte submarino do Golfo da Guiné.

Uma estimativa do volume de matéria magnetizada do monte submarino pode ser feita utilizando a batimetria do monte. Aproximando o monte por fatias horizontais, estimamos que este volume está compreendido entre $89,95 \text{ km}^3$ e $402,88 \text{ km}^3$. Estes limites inferior e superior foram obtidos não incluindo e incluindo, respectivamente, os níveis batimétricos adicionais propostos por HARRISON (1971) para o monte submarino (Figura 6.15). Utilizando estes limites e a estimativa acima obtida para o módulo do momento de dipolo total verdadeiro do monte submarino, obtemos que sua intensidade média de magnetização está compreendida entre $1,8 \text{ A/m}$ e $7,9 \text{ A/m}$. Na hipótese de que a estimativa de momento de

dipolo total seja válida, o limite inferior para a magnetização média (que foi obtido considerando os níveis batimétricos propostos por HARRISON (1971)) é incompatível com as intensidades médias de magnetização de montes submarinos que geralmente são obtidas da inversão de suas anomalias magnéticas (MCNUTT, 1986).

Comparando as Tabelas 5.3 e 6.1, constatamos que as razões entre as estimativas de ordens 1 e 2 para a profundidade do centro de momento de dipolo, nos casos sintético e real respectivamente, são também praticamente iguais. De maneira análoga à que foi acima descrita para estimar o valor verdadeiro de M_0 , podemos agora obter o valor 3,0 km como sendo uma estimativa de z_{CM} verdadeiro do monte submarino do Golfo da Guiné. Por outro lado, utilizando a batimetria do monte e a hipótese de magnetização uniforme, podemos estimar que a profundidade de seu centro de momento de dipolo está compreendida entre 3,9 km e 4,8 km. Estes limites inferior e superior foram obtidos não incluindo e incluindo, respectivamente, os níveis batimétricos adicionais propostos por HARRISON (1971) para o monte submarino (Figura 6.15). Desse modo, a estimativa de 3,0 km para z_{CM} do monte submarino está mais próxima da estimativa de z_{CM} que foi obtida de sua batimetria sem considerar os níveis batimétricos adicionais propostos por HARRISON (1971) para o monte.

As anomalias de campo total reduzidas ao polo (Figuras 6.22 a 6.25) sugerem que o volume de matéria magnetizada esteja alongado na direção NE–SW. Este alongamento é consistente com as análises de sensibilidade e de estabilidade para as direções principais equivalentes, mostradas nas Figuras 6.20 e 6.21, respectivamente. Por outro lado, as anomalias reduzidas ao polo não são consistentes com a interpretação de HARRISON (1971), que propôs níveis batimétricos para o monte submarino, de forma que o seu volume de matéria magnetizada ficasse alongado na direção NW–SE. Contudo, não podemos descartar a possibilidade de que o alongamento presente na anomalia reduzida ao polo seja resultado da incapacidade do algoritmo de LEÃO & SILVA (1989) em remover totalmente a assimetria presente na anomalia medida na latitude original.

Unindo os resultados acima obtidos para a intensidade média de magnetização, profundidade de centro de momento de dipolo e direções principais equivalentes do monte submarino, sugerimos que os níveis batimétricos propostos por HARRISON (1971) não estejam corretos e que não exista contraste de magnetização expressivo abaixo da base do monte submarino. Neste sentido, observemos que os níveis batimétricos propostos por HARRISON (1971) foram inferidos da análise de resíduos entre a anomalia observada e anomalias calculadas com modelos do monte, em que estes níveis foram incluídos. Desse modo, é possível que estes modelos reflitam apenas a ambigüidade inerente à inversão magnética tridimensional sem vínculos e não uma característica verdadeira do monte submarino.

Para finalizar, concluimos que o método de inversão de momentos reúne qualidades suficientes para ser aplicado, com sucesso, na inversão de anomalias magnéticas de montes submarinos. Comparado com os métodos comumente utilizados neste problema, ele tem a vantagem de fornecer soluções com unicidade e estabilidade asseguradas, além da facilidade e rapidez de aplicação, uma vez que não é necessário se conhecer a batimetria do monte. Como desvantagem, o método de momentos (empregando o critério de mínimos quadrados para o ajuste) só deve produzir bons resultados se o monte submarino for isolado.

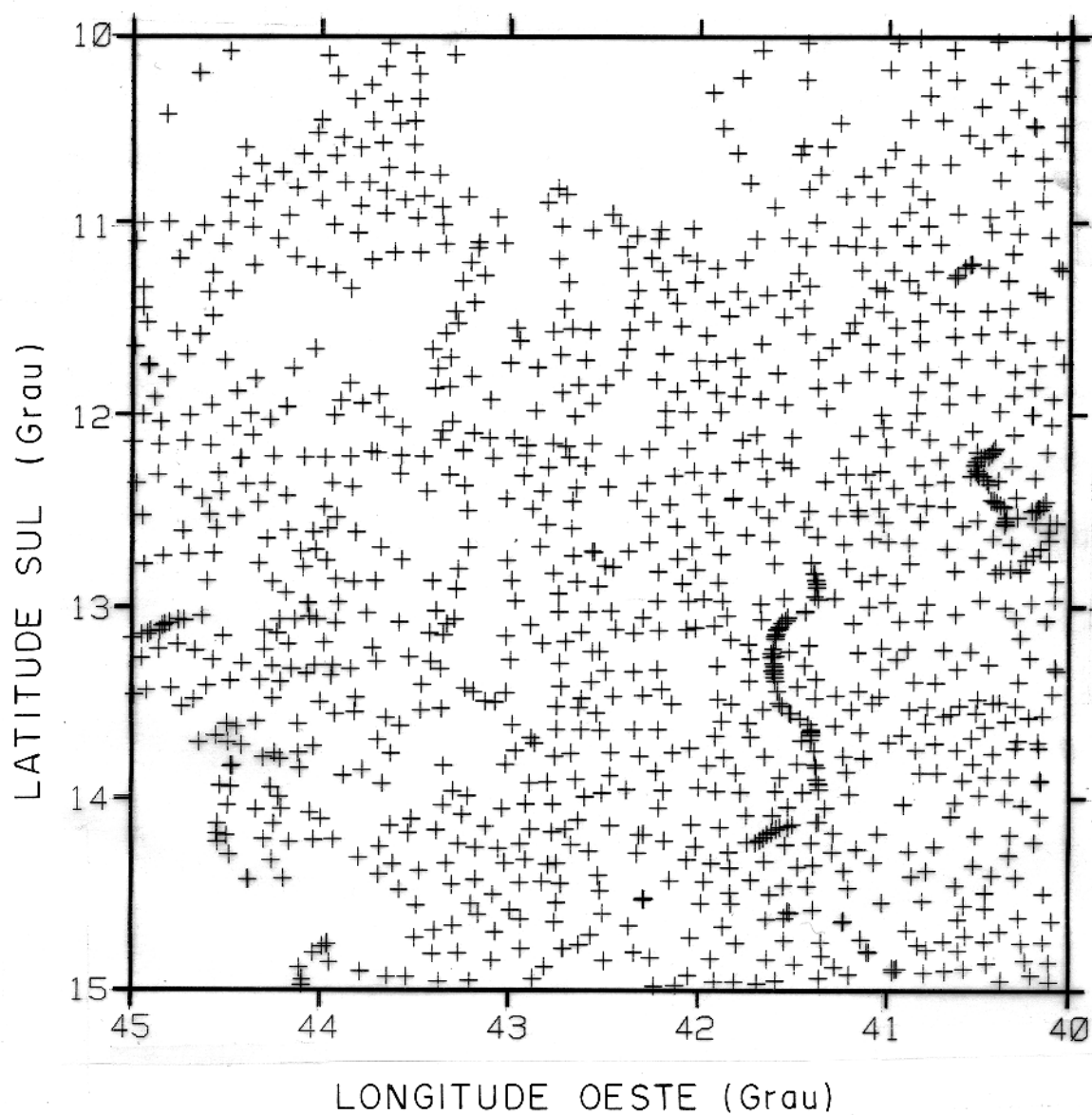


Figura 6.1 - Caso gravimétrico: Estações gravimétricas do levantamento de GOMES & MOTTA (1978) situadas na região central da Bahia.

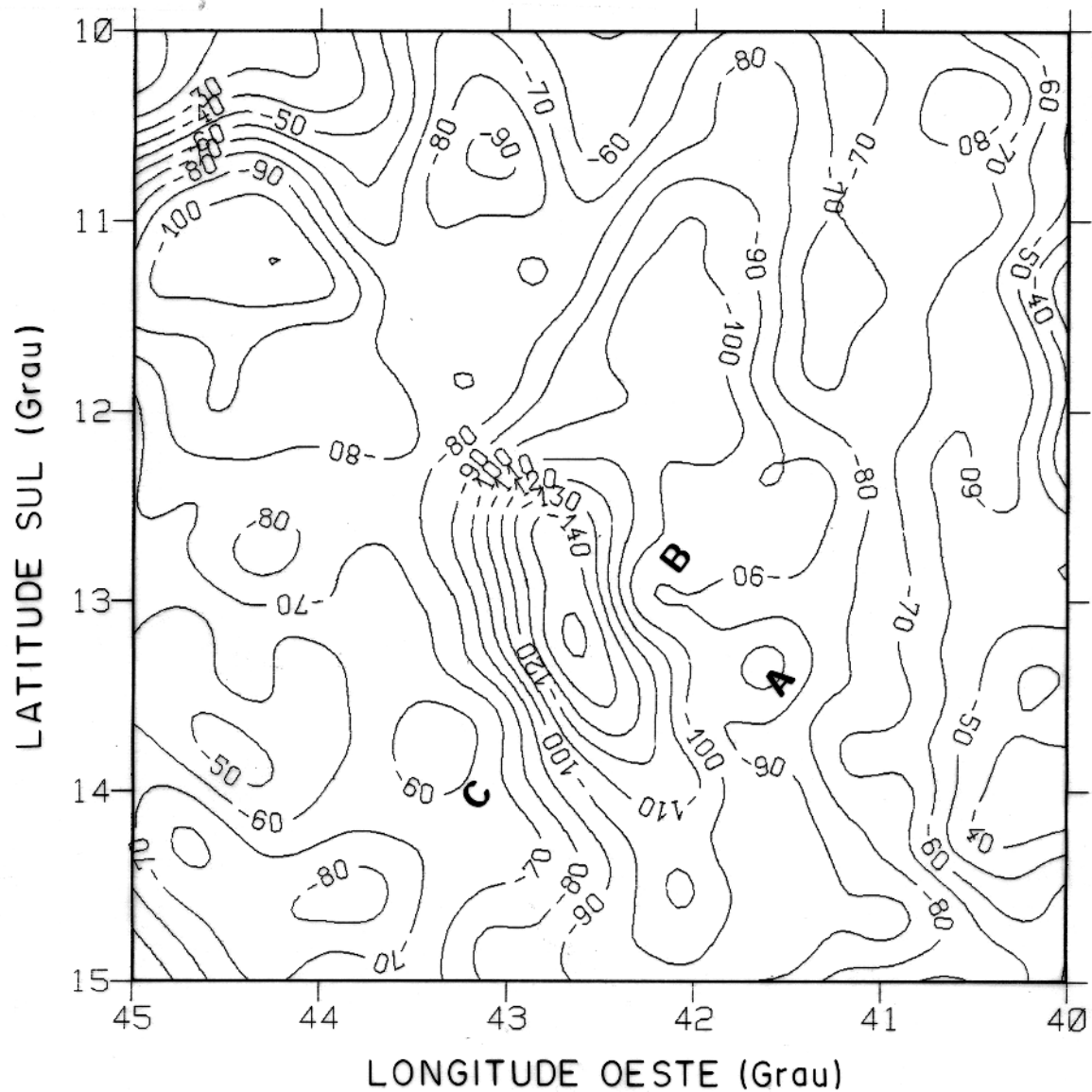


Figura 6.2 - Caso gravimétrico: Mapa Bouguer da região central da Bahia. A malha de interpolação contém 56 x 56 pontos igualmente espaçados de 10,1 km e a altitude de interpolação é igual a 1,5 km. Intervalo de contorno de 10 mGal.

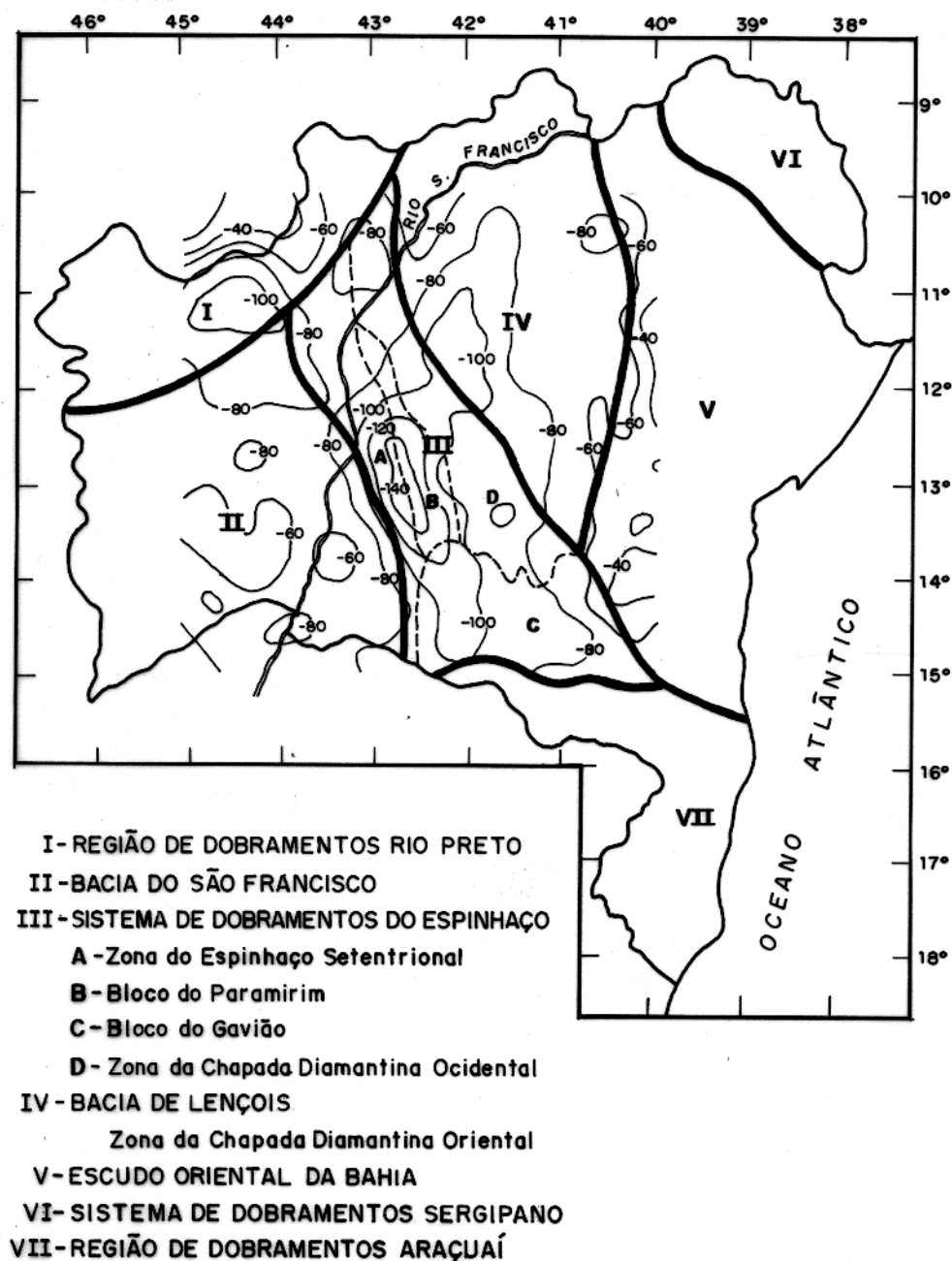


Figura 6.3 - Caso gravimétrico: Divisão do estado da Bahia em domínios geotectônico-geocronológicos segundo INDA & BARBOSA (1978). O mapa Bouguer com intervalo de contorno de 20 mGal foi superposto.

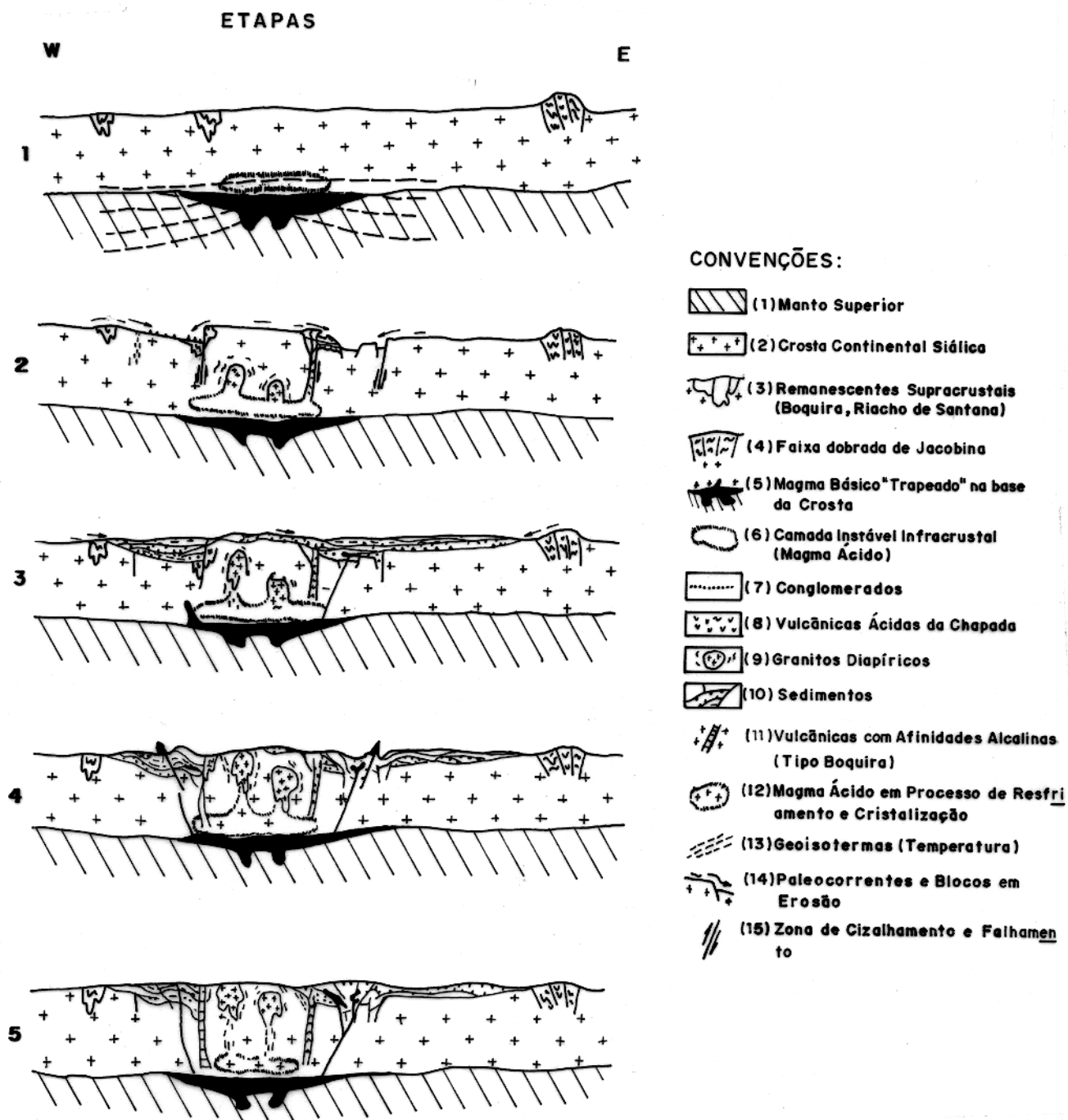


Figura 6.4 - Caso gravimétrico: Evolução geológica proposta por SÁ (1981) para a área da Chapada Diamantina e Faixa Santo Onofre. Sem escala.

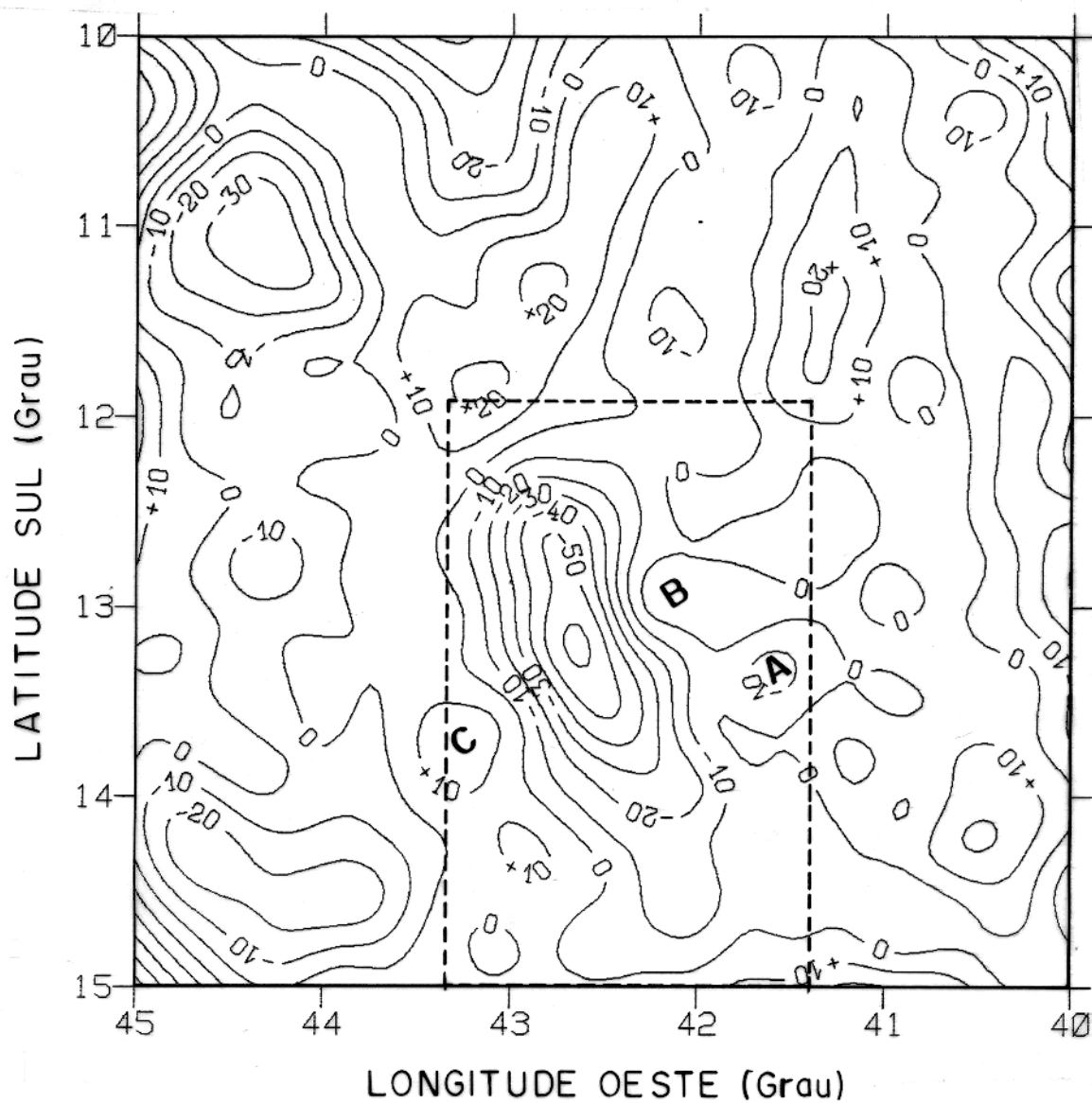


Figura 6.6 - Caso gravimétrico: Anomalia residual (componente 2 + componente 3) resultante da separação regional-residual do Mapa Bouguer da Figura 6.2. Intervalo de contorno de 10 mGal. O retângulo em linha tracejada identifica a área que foi utilizada na 2a. etapa do tratamento de separação da componente 2.

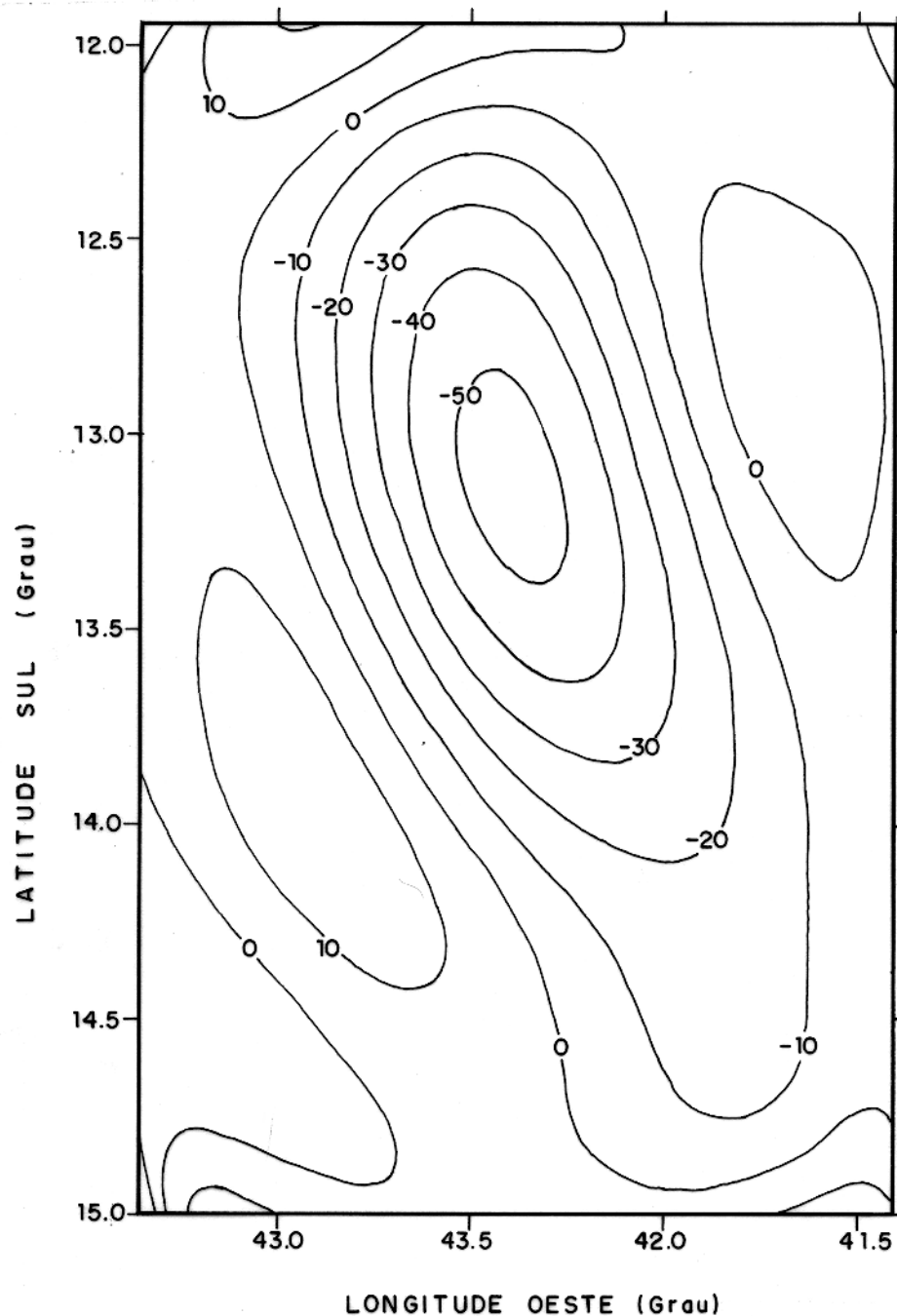


Figura 6.7 - Caso gravimétrico: Anomalia regional (componente 2) resultante da separação regional-residual das anomalias contidas no retângulo em linha tracejada da Figura 6.6. A ordem do polinômio ajustante é igual a 8. Intervalo de contorno de 10 mGal.

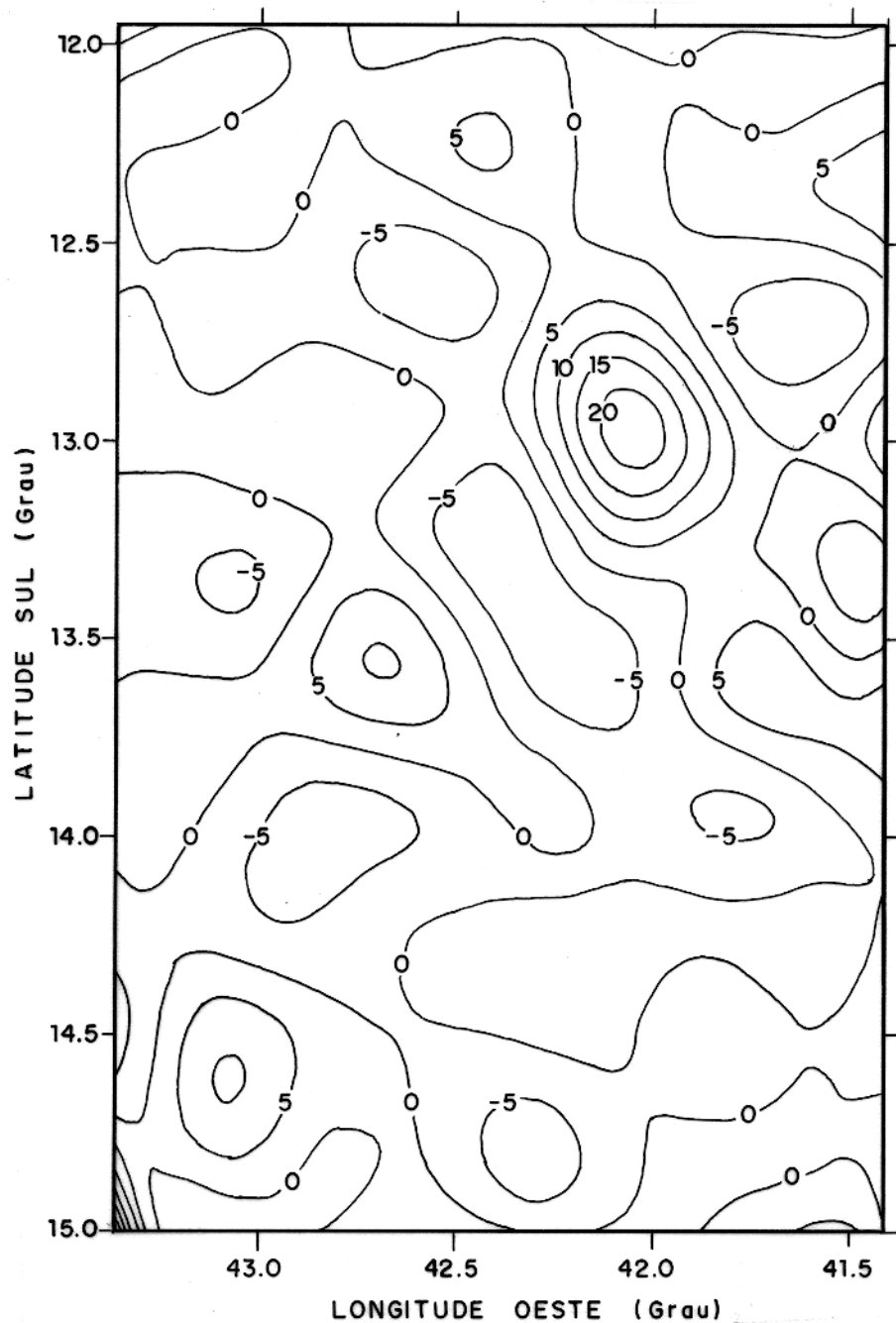


Figura 6.8 - Caso gravimétrico: Anomalia residual (componente 3) resultante da separação regional-residual das anomalias contidas no retângulo em linha tracejada da Figura 6.6. Intervalo de contorno de 5 mGal.

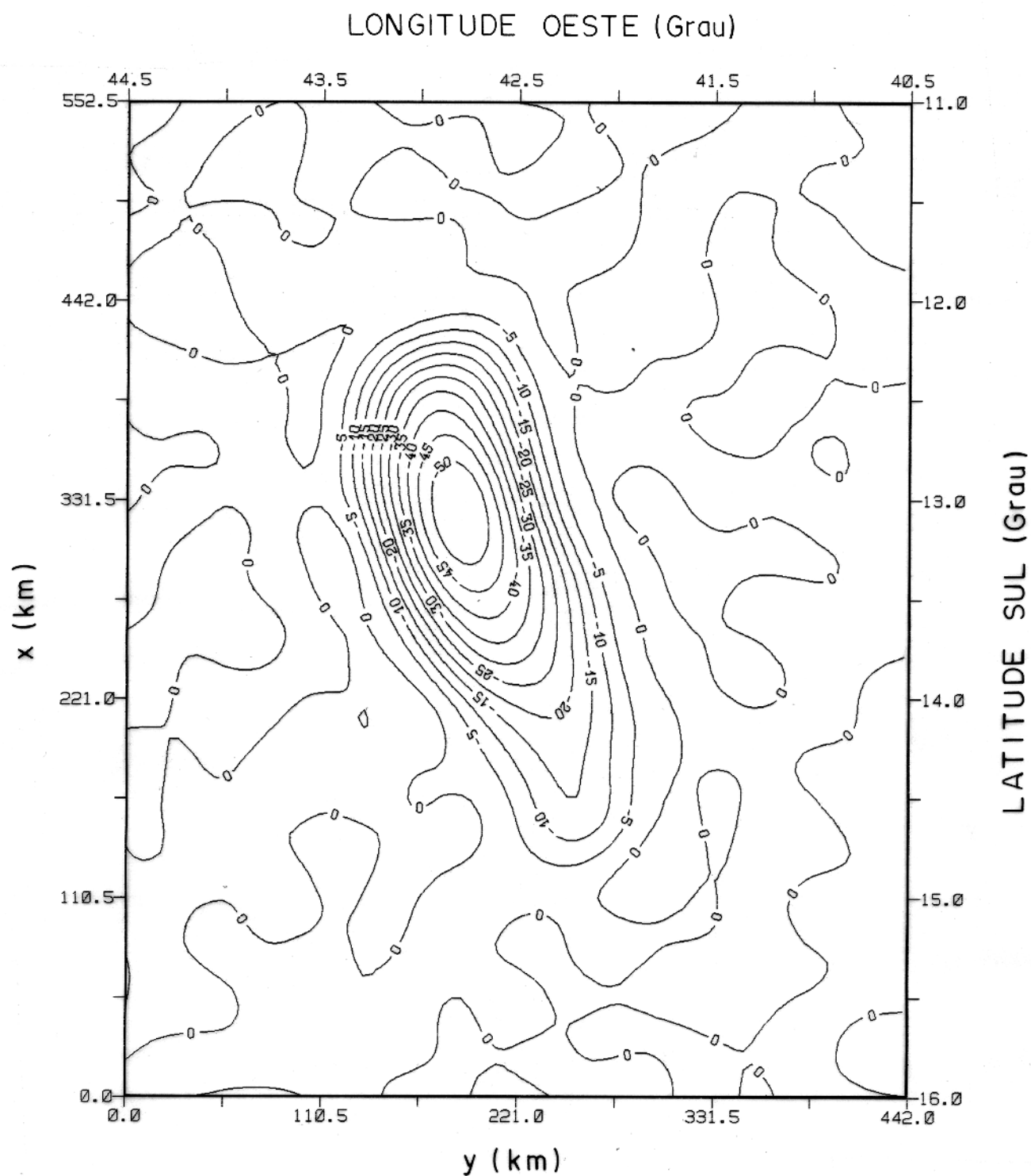
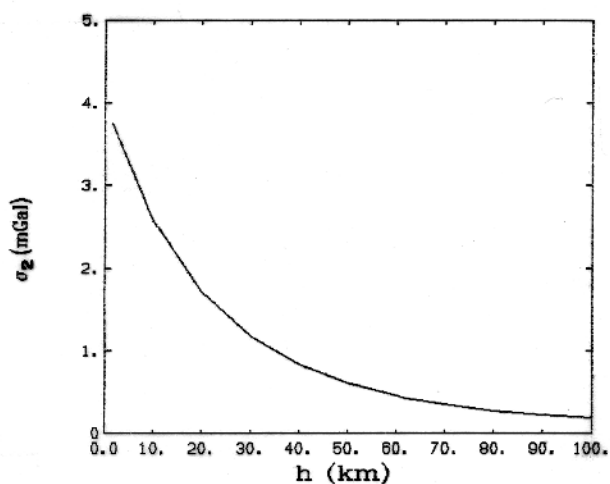
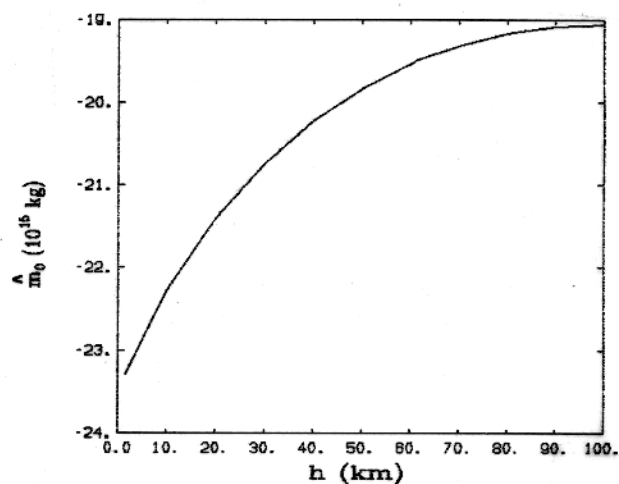


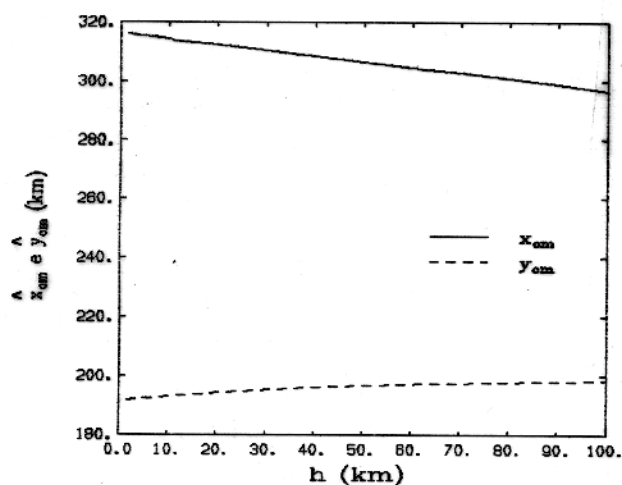
Figura 6.9 - Caso gravimétrico: Componente 2 do mapa Bouguer satisfazendo aproximadamente a característica do campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada. Intervalo de contorno de 5 mGal.



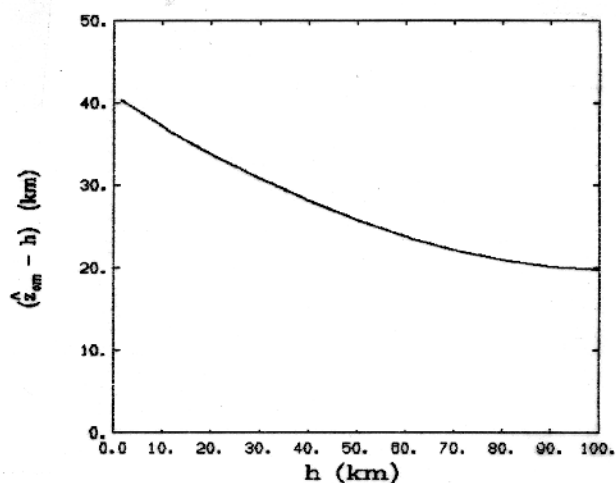
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.10 - Caso gravimétrico: Comportamentos de σ_2 e das estimativas pontuais de ordem 2 para: (b) m_0 , (c) x_{cm} e y_{cm} e (d) $z_{cm} - h$, em função da altitude h de interpolação. As estimativas correspondentes à altitude $h = 1,5$ km foram incluídas.

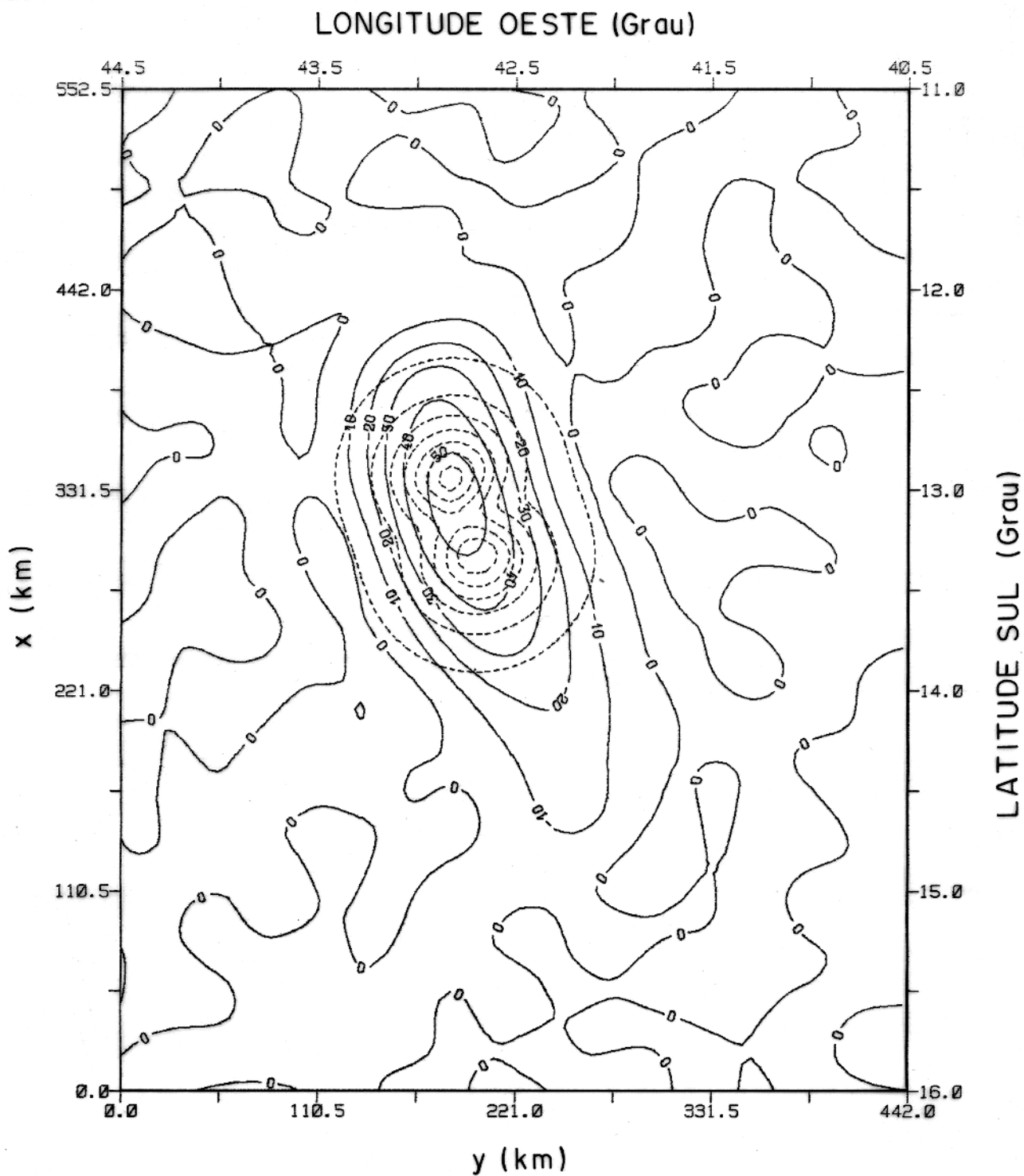


Figura 6.11 - Caso gravimétrico: Altitude de interpolação $h=1,5$ km: anomalia observada (linha cheia) e a sua aproximação de 2a. ordem (linha tracejada). Intervalo de contorno de 10 mGal.

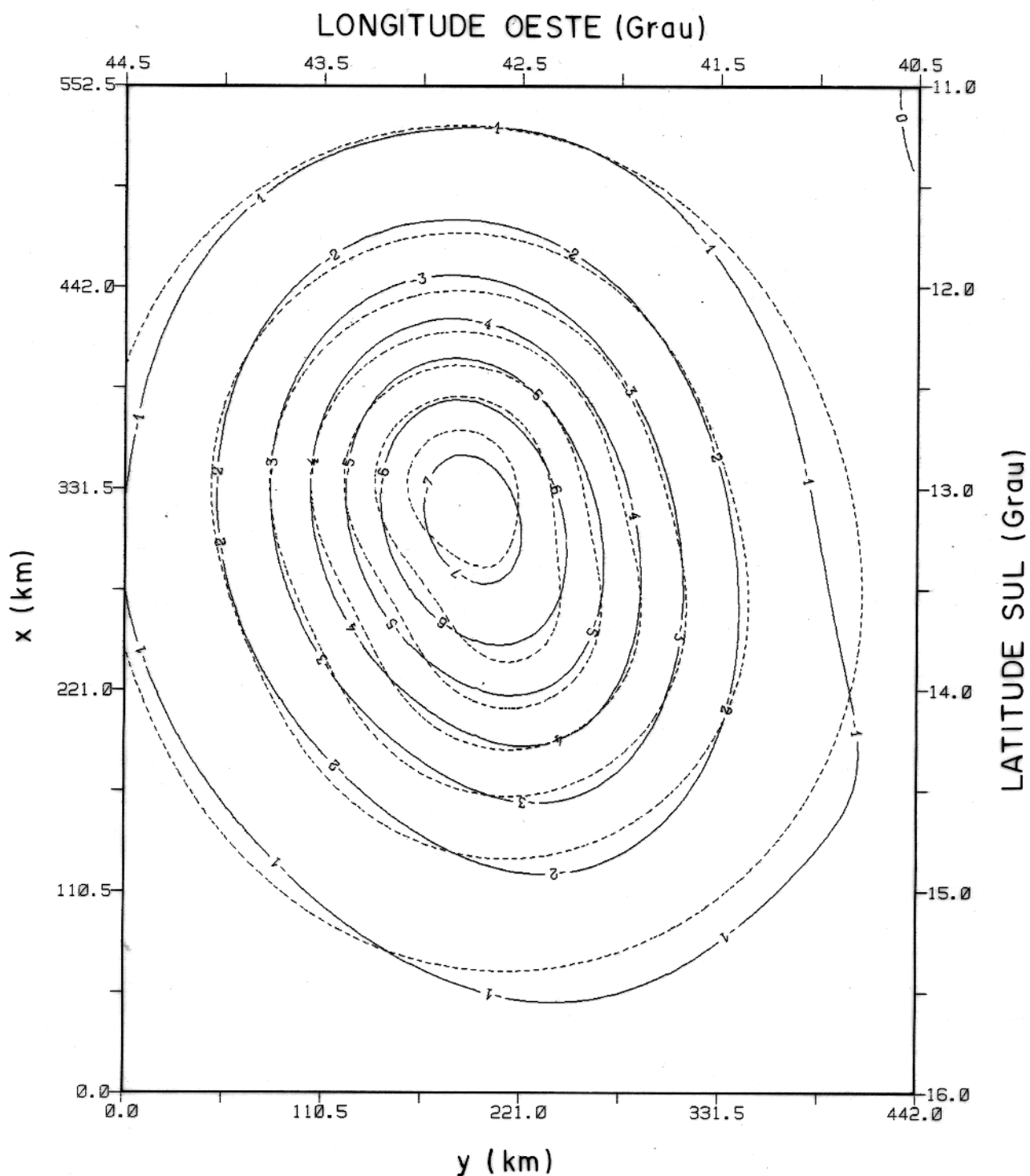


Figura 6.12 - Caso gravimétrico: Altitude de interpolação $h=100$ km: anomalia observada (linha cheia) e a sua aproximação de 2a. ordem (linha tracejada). Intervalo de contorno de 1 mGal.

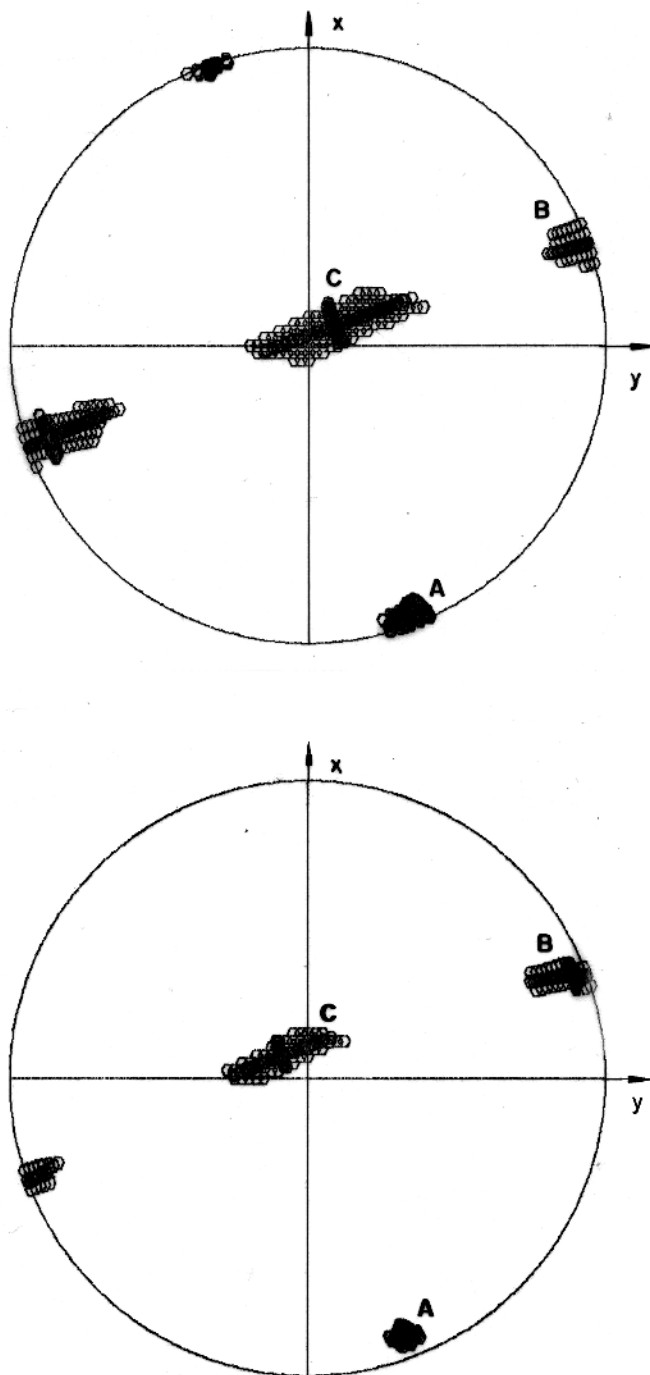


Figura 6.13 - Caso gravimétrico: Análise de sensibilidade das direções principais equivalentes (componente 2), para as altitudes de interpolação: (a) $h=20$ km e (b) $h=100$ km. A, B e C identificam as direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

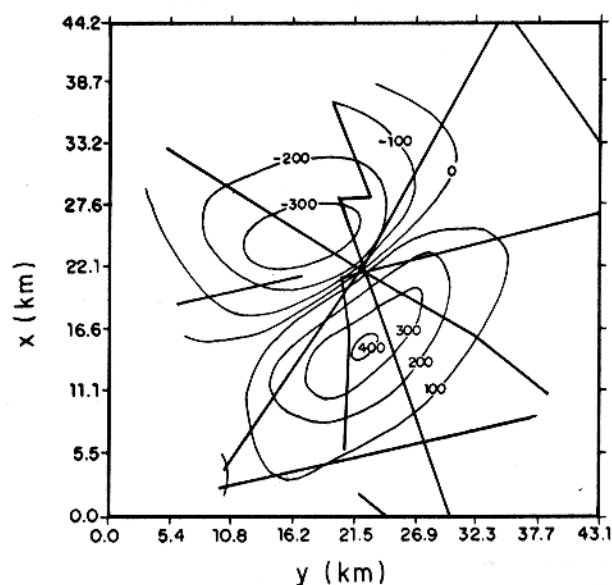


Figura 6.14 - Caso magnético: Anomalia de campo total do monte submarino do Golfo da Guiné (EMILIA & MASSEY, 1974). Intervalo de contorno de 100 nT. As linhas retas representam a trajetória do navio.

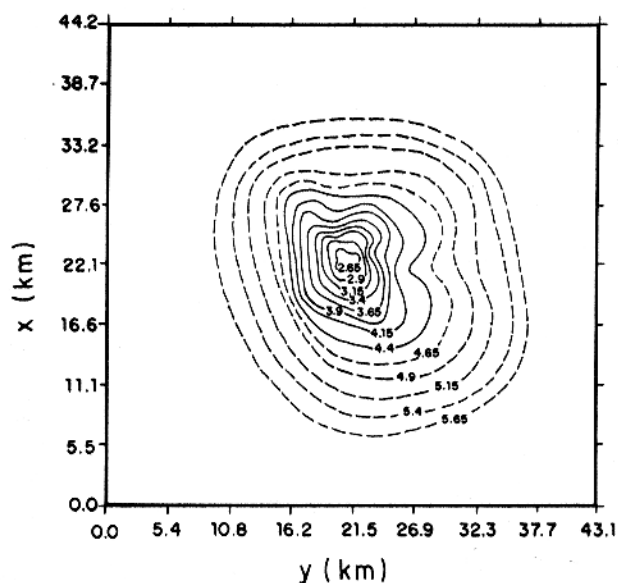


Figura 6.15 - Caso magnético: Batimetria do monte submarino do Golfo da Guiné (HARRISON, 1971). Intervalo de contorno de 0,25 km. As linhas tracejadas representam a estrutura do monte abaixo de seu sopé inferida por HARRISON (1971).

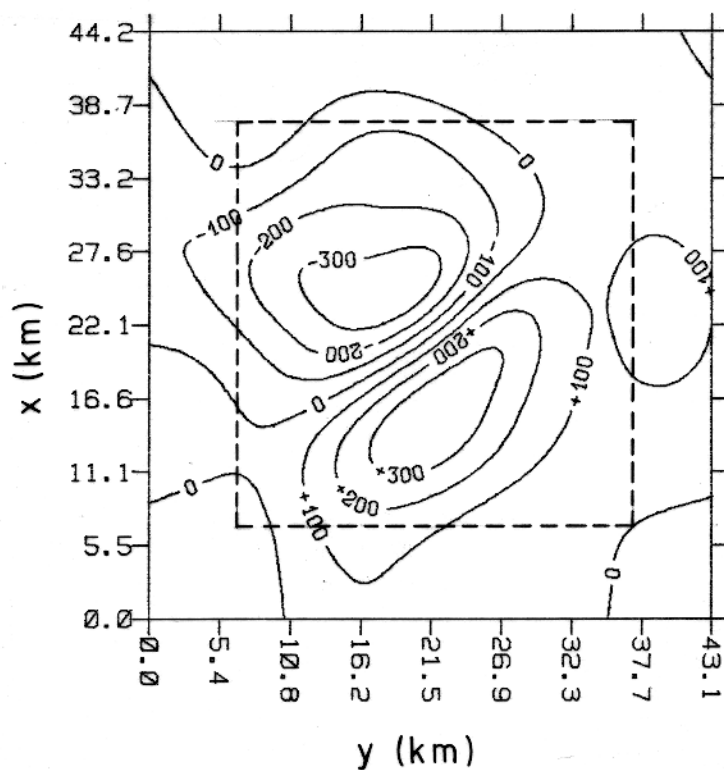


Figura 6.16 - Caso magnético: Anomalia de campo total do monte submarino do Golfo da Guiné interpolada pelo método de MENDONÇA (1992). Intervalo de contorno de 100 nT.

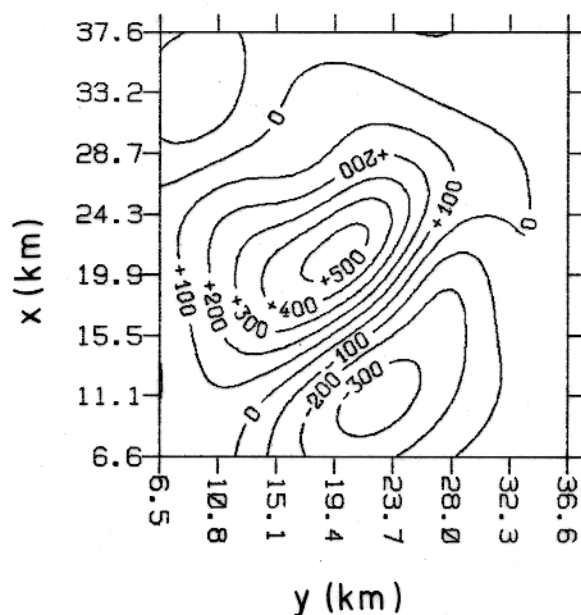


Figura 6.17 - Caso magnético: Anomalia de campo vertical do monte submarino do Golfo da Guiné obtida pelo método de LEÃO & SILVA (1989). Intervalo de contorno de 100 nT.

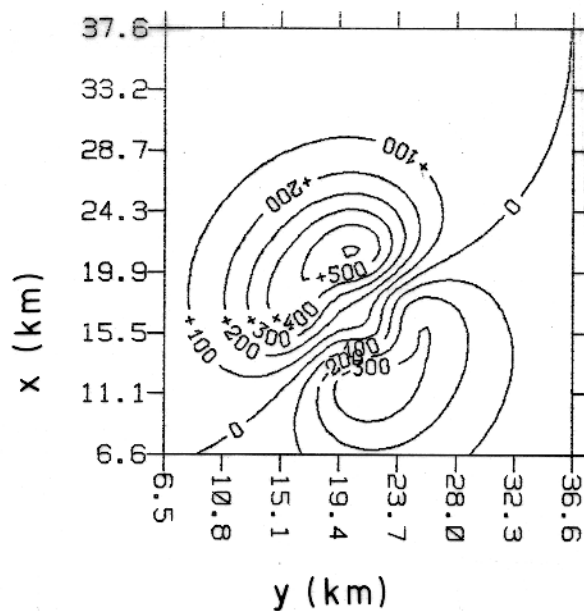
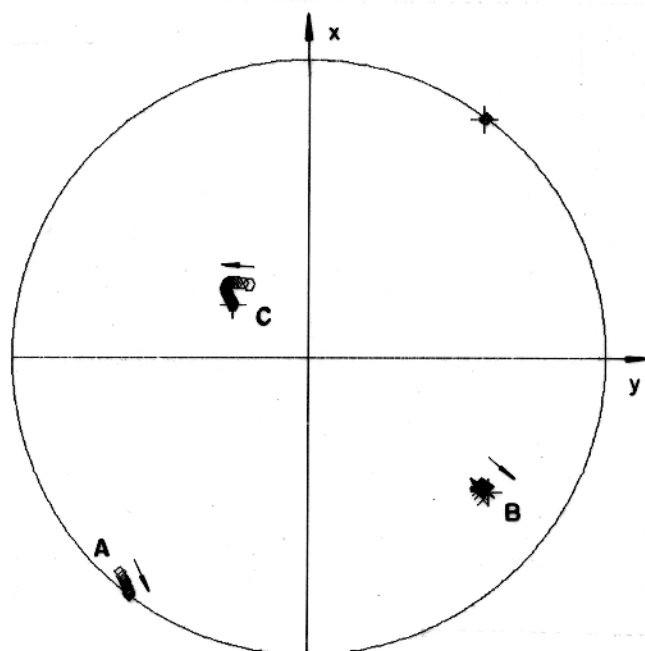


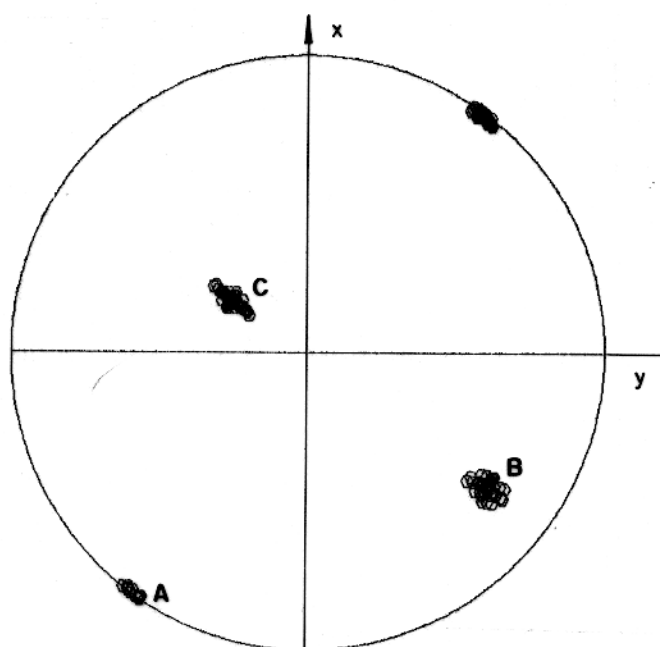
Figura 6.18 - Caso magnético: Aproximação de 2a. ordem para a anomalia de campo vertical do monte submarino do Golfo da Guiné. Intervalo de contorno de 100 nT.



LEGENDA

A, B, C: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

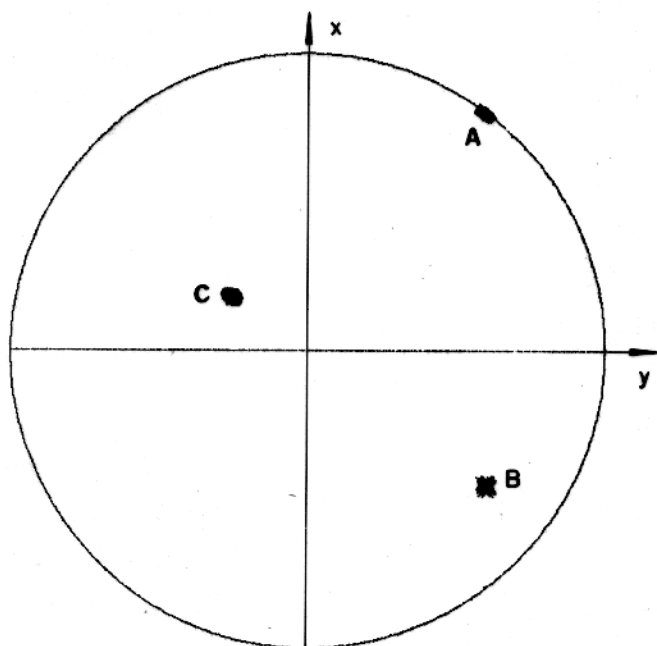
Figura 6.19 - Caso magnético: Estimativa pontual das direções principais equivalentes (+). As setas indicam os sentidos das evoluções das estimativas ao longo de 100 iterações.



LEGENDA

A, B, C: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 6.20 - Caso magnético: Análise de Sensibilidade para a estimativa pontual das direções principais equivalentes.



LEGENDA

A, B, C: direções dos eixos principais equivalentes maior, intermediário e menor, respectivamente.

Figura 6.21 - Caso magnético: Análise de Estabilidade para as estimativas das direções principais equivalentes.

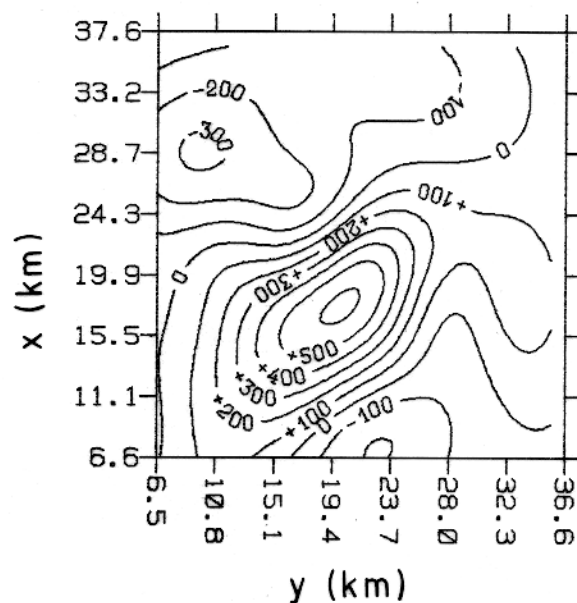


Figura 6.22 - Caso magnético: Redução ao polo da anomalia de campo total do Golfo da Guiné, utilizando a estimativa de direção média de magnetização total obtida por HARRISON (1971).

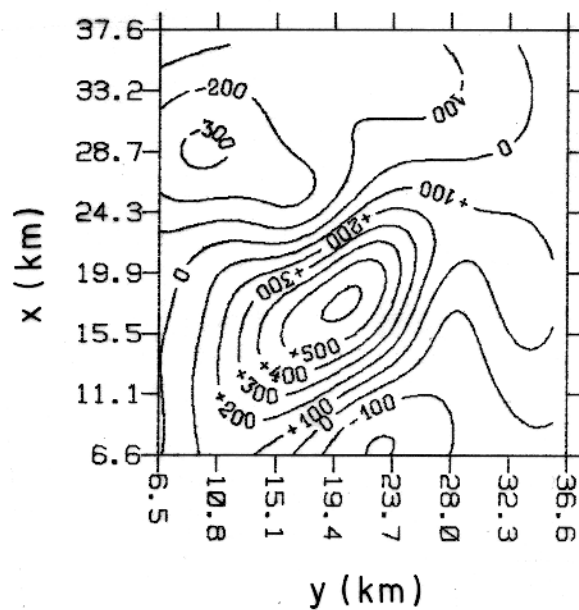


Figura 6.23 - Caso magnético: Redução ao polo da anomalia de campo total do Golfo da Guiné, utilizando a estimativa de direção média de magnetização total obtida por EMILIA & MASSEY (1974).

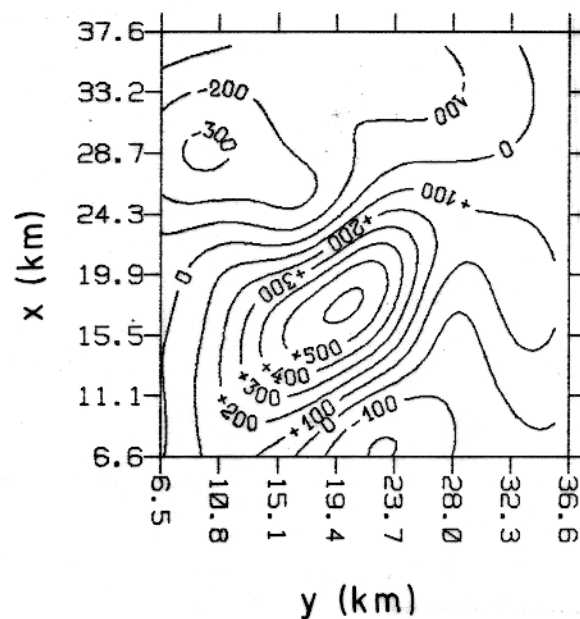


Figura 6.24 - Caso magnético: Redução ao polo da anomalia de campo total do Golfo da Guiné, utilizando a estimativa de direção média de magnetização total obtida nesta tese.

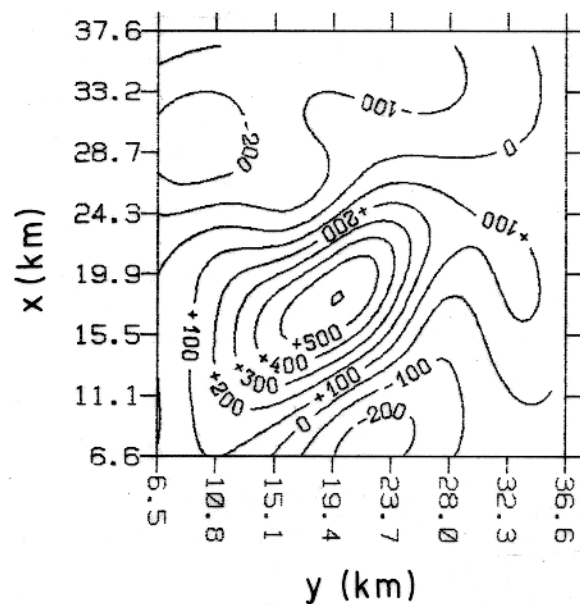


Figura 6.25 - Caso magnético: Redução ao polo da anomalia de campo total do Golfo da Guiné, utilizando declinação igual a $142,5^\circ$ e inclinação igual a $37,5^\circ$ para a direção média de magnetização total.

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O resultado de natureza mais ampla desta tese foi evidenciar que existe uma maneira implícita e determinística de se introduzir informação a priori, sobre as fontes anômalas, em métodos potenciais. Esta maneira é decorrência do fato de que um campo potencial pode ser aproximado pela série obtida de sua expansão em multipolos, truncada em uma dada máxima ordem. Foi demonstrado que esta aproximação impõe, implicitamente, uma condição de regularização para as superfícies equipotenciais do corpo anômalo, o que implica o uso de informação a priori a seu respeito. Desse modo, quando se faz o truncamento da série em uma dada máxima ordem, é postulada uma distribuição espacial de massa, ou de magnetização, equivalente à real, sendo o critério de equivalência especificado pela condição de ajuste entre os campos observado e calculado com a série truncada. Para o caso da série retendo momentos até 2a. ordem, por exemplo, o critério de equivalência implica que a fonte real deva satisfazer os vínculos de ser convexa, ter volume finito, de estar suficientemente distante das observações, e de apresentar três planos mutuamente ortogonais de simetria na distribuição espacial da propriedade física.

O resultado de natureza mais específica desta tese foi tornar viável e implementar computacionalmente a proposta de GOL'TSMAN (1970) para a inversão tridimensional de momentos de fonte. Esta proposta teórica se baseia na aproximação do campo observado pela série retendo momentos até 2a. ordem e contém um erro na sua formulação original. Foi demonstrado que, após uma recombinação dos momentos contidos na série, tal que o Laplaciano da função de Green e suas derivadas sejam eliminadas como candidatas a serem funções da base da expansão em multipolos, os momentos, ou combinações lineares de momentos remanescentes, podem ser univocamente estimados. Além disso, foi mostrado também que a proposta modificada de GOL'TSMAN (1970) pode ser adaptada para o caso magnético, sem que haja a necessidade de se conhecer, de antemão, a direção de magnetização total. Para este caso (magnético), foi mostrado que apenas a hipótese de magnetização total de direção e sentido constantes, embora desconhecidos, aliada aos demais vínculos impostos pelo truncamento da série em momentos de 2a. ordem, já é suficiente para a inversão única e estável dos momentos magnéticos. É importante ressaltar que o método assim obtido permite a estimação simultânea da direção da magnetização total e da atitude espacial do corpo anômalo.

A aplicação da inversão tridimensional de momentos de fonte a dados sintéticos, com base na série retendo momentos até 2a. ordem, revelou que é possível se obterem, em conjunto e de maneira estável, boas estimativas de massa, ou de momento de dipolo anômalo total (inclusive direção e sentido), centro de massa ou de momento de dipolo e direções dos eixos principais da matriz de espalhamento de massa ou de momento de dipolo, desde que o corpo anômalo satisfaça as condições exigidas para o truncamento da série em momentos de 2a. ordem. Além disso, mesmo nos casos em que o corpo anômalo não satisfaz as condições de estar distante das observações, e de simetria na distribuição espacial da propriedade física, é possível se obterem, pelo menos, boas estimativas da massa anômala total, ou da direção de magnetização total, e da projeção no plano de medida do centro de massa ou de momento de dipolo. Quando a direção de magnetização total não é constante, é possível se obterem, pelo menos, boas estimativas da direção média de magnetização total e da projeção no plano de medida do centro de momento de dipolo.

A condição de fonte distante das observações não é muito restritiva, em métodos potencias, porque é sempre possível aumentar artificialmente e de maneira estável a distância entre as fontes e o plano de observação através da operação de continuação para cima dos campos observados. Assim, esta condição em geral pode ser atingida e identificada, mesmo com uma anomalia real. Desse modo, utilizando uma combinação das operações de continuação para cima e de inversão, é possível se obterem também boas estimativas da profundidade do centro de massa, ou de momento de dipolo, mesmo quando a fonte geradora dos dados não satisfaz a condição de estar distante das observações.

Na presença de ruído geológico produzido por fontes rasas interferentes, a estimação dos parâmetros da fonte principal pode ser prejudicada, especialmente a estimação das direções dos eixos principais. Todavia, este fato é muito mais uma consequência do critério de ajuste adotado nesta tese para os campos observado e calculado, que foi o de mínimos quadrados, do que uma limitação intrínseca do método de inversão de momentos. Contudo, o método de inversão de momentos tem uma limitação intrínseca, que é a sensibilidade à violação da premissa de volume finito para as fontes. Embora a condição de volume infinito não seja fisicamente admissível, ela pode ser introduzida artificialmente nas anomalias residuais, como uma deficiência dos métodos de separação regional-residual, que não incorporam nas anomalias residuais as características físicas do campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada. Neste caso, a estimação dos momentos se torna teoricamente impossível e, na prática, dependente da área de cobertura da anomalia.

O método de inversão tridimensional de momentos de fonte, com base na série retendo momentos até 2a. ordem, foi também aplicado nesta tese a anomalias reais, tanto no caso

gravimétrico como no caso magnético. No caso gravimétrico, utilizamos uma anomalia situada no estado da Bahia, que se supõe ser causada por um batólito de granito. Com base nos resultados, sugerimos que as massas graníticas geradoras desta anomalia tenham sido estiradas na direção NNW e adelgadas na direção vertical durante o evento compressivo que causou a orogênese do Sistema de Dobramentos do Espinhaço. Além disso, estimamos que a profundidade do centro de massa da fonte geradora está em torno de 20 km. No caso magnético, utilizamos a anomalia de um monte submarino situado no Golfo da Guiné. Com base nos resultados, estimamos que o paleopolo magnético do monte submarino tem latitude $50^{\circ}48'S$ e longitude $74^{\circ}54'E$ e sugerimos que não existe contraste de magnetização expressivo abaixo da base do monte submarino.

No processo de obtenção dos resultados acima descritos, outros resultados de natureza mais teórica foram alcançados. O primeiro deles se refere à inversão de momentos de fonte gravimétrica sem o uso de informação a priori. Para esta situação, uma expressão integral foi deduzida envolvendo um momento genérico e a anomalia gravimétrica. A partir desta expressão, foi provado que pode ser univocamente determinado, sem o uso de informação a priori, todo momento, ou combinação linear de momentos, que seja função apenas das coordenadas Cartesianas que definem o plano de medida e que tenha Laplaciano nulo. Particularmente, dentre os momentos até 2a. ordem, podem ser assim determinados, além da massa anômala total e da projeção do centro de massa no plano de medida (o que já era conhecido), o produto de inércia e a diferença entre momentos de inércia, que são medidos em torno de um par de eixos mutuamente ortogonais contidos no plano de medida. Além disso, mostramos que nenhum momento cujo núcleo polinomial tenha Laplaciano não nulo pode ser determinado.

O segundo resultado, que é de natureza metodológica, foi evidenciar que as linhas de inversão com e sem informação a priori não são conflitantes ou concorrentes. Na verdade, os resultados obtidos por estas duas linhas são complementares. Isto acontece porque a identificação de quais são as grandezas que podem ser univocamente estimadas sem informação a priori, além de ser um fato importante em si, tem outras funções que são tão importantes quanto esta. Por exemplo, esta identificação pode servir ao pesquisador como um guia para inferir quais são os vínculos que poderiam ser acrescentados ao problema de inversão, no caso dele querer desenvolver um método para estimar uma grandeza, que não possa ser estimada sem informação a priori. Além disso, na hipótese de que o método exista e funcione, mas não se saiba exatamente porque ele funciona, o pesquisador pode usar a identificação acima referida para inferir qual é a informação a priori implicitamente introduzida pelo método. Esta segunda abordagem foi utilizada, nesta tese, para identificar qual é a informação a priori contida na inversão de momentos de fonte, quando se faz uso da série truncada em momentos

de 2a. ordem.

O terceiro resultado foi a extensão do problema de estimação dos momentos equivalentes para o problema de determinação da solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem. Esta extensão, inspirada em VEMURI & CHEN (1974), pode também ser usada para caracterizar, do mesmo modo, os métodos de inversão que possam ser formulados como casos específicos do método da regularização de Tikhonov (TIKHONOV & ARSENIN, 1977), a exemplo dos métodos de LAST & KUBIK (1983), GUILLEN & MENICHETTI (1984) e BARBOSA (1991). Com base nesta extensão, foi possível caracterizar o algoritmo de estimação de momentos, proposto por GOL'TSMAN (1970), como sendo uma versão de passo variável do algoritmo de Euler–Cauchy para determinar a solução de um sistema de equações diferenciais lineares. Esta caracterização permitiu construir versões de passo mais lento do algoritmo de Gol'tsman, as quais são necessárias para se inverterem anomalias geradas por corpos anômalos, que se afastam muito das condições para eles supostas pelo truncamento da série em momentos de 2a. ordem.

Observemos que a ligação destes problemas de inversão, com o problema de encontrar a solução estacionária de um sistema de equações diferenciais lineares de 1a. ordem, é potencialmente geradora de muitos resultados importantes em teoria da inversão. Esta ligação estabelece uma linguagem em comum com um dos campos mais estudados da matemática, possibilitando, assim, o acesso a um grande número de teoremas de unicidade, de condições de estabilidade, etc. Além disso, esta ligação permite ver o problema da instabilidade em inversão como um problema de caos determinístico, que é atualmente uma das áreas de pesquisa mais férteis em toda a Ciência.

Por último, deixaremos aqui algumas sugestões para futuros trabalhos na linha de inversão de momentos de fonte. A primeira sugestão é que a abordagem de inversão aqui desenvolvida seja adaptada para outras técnicas geofísicas baseadas em campos de natureza potencial.

A segunda sugestão é a de se incorporarem momentos de 3a. ordem e superiores à expansão em multipolos, respeitado o compromisso resolução versus estabilidade. Este procedimento é o ideal, quando a fonte anômala está próxima do plano de medida, pois a incorporação sucessiva de momentos permitiria adaptar a máxima ordem dos momentos contidos na série à anomalia em estudo, ao invés de adaptar a distância fontes—observações à série retendo momentos até 2a. ordem, através da continuação para cima da anomalia, como foi feito nesta tese.

A terceira sugestão é a de se desenvolver uma versão bidimensional da inversão de momentos de fonte. Esta versão poderia fornecer um teste adicional na interpretação de anomalias muito alongadas, como a anomalia gravimétrica real utilizada nesta tese. Usando a versão

bidimensional da expansão em multipolos, a condição de fonte distante das observações para uma anomalia muito alongada é mais facilmente atingida e, assim, a profundidade e as direções dos eixos principais intermediário e menor de sua fonte poderiam ser estimadas com melhor resolução. Além disso, a eliminação do regional, de modo a produzir uma anomalia residual sem violar a premissa de volume finito para as fontes, seria mais objetiva.

A quarta sugestão é a de se usar um critério estatístico robusto para o ajuste entre os campos observado e calculado, ao invés do critério utilizado nesta tese que foi o de mínimos quadrados. Esta mudança do critério de ajuste possibilitaria a obtenção de estimativas melhores para a fonte principal, no caso de sua anomalia estar deformada pela presença de pequenos corpos subaflorantes. Além disso, se esta mudança de critério de ajuste fosse incorporada ao problema da estimação simultânea de momentos de fonte e de um regional, na forma de um polinômio bidimensional, possivelmente diminuiria a já referida sensibilidade do método à violação da premissa de volume finito para as fontes.

Finalmente, a quinta e última sugestão é a de que sejam desenvolvidos métodos automáticos de separação regional-residual que incorporem, na componente residual, as características do campo de uma fonte convexa de volume finito e isolada, cujo contraste de densidade seja uniforme. Estes métodos poderiam fornecer vínculos físicos adicionais a esta separação de componentes que, em geral, é muito difícil de ser realizada. Além disso, estes métodos de separação poderiam resolver, na origem, o problema da sensibilidade do método de inversão de momentos à violação da premissa de volume finito para as fontes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL-CHALABI, M. 1970. Interpretation of two-dimensional magnetic profiles by non-linear optimization. **Boll. Geofis. Teor. Appl.**, 12(1): 3 – 20.
- AL-CHALABI, M. 1971. Interpretation of gravity anomalies by non-linear optimisation. **Geophys. Prosp.**, 20(1): 1 – 16.
- ANDER, M.E. & HUESTIS, S.P. 1987. Gravity ideal bodies. **Geophysics**, 52(9): 1265 – 1278.
- ANDERSEN, F.H. & PEDERSEN, L.B. 1979. Some relations between potential fields and the strength and center of their sources. **Geophys. Prosp.**, 27(4): 761 – 774.
- ANDERSON, K.R. 1982. Robust earthquake location using M-estimates. **Physics of the Earth and Plan. Int.**, 30(2–3): 119 – 130.
- ARNOLD, V. 1985. **Equações diferenciais ordinárias**. Moscou, MIR. 327p.
- BACKUS, G.E. & GILBERT, F. 1967. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. **Geophys. J. R. Astr. Soc.**, 13(3): 247 – 276.
- BACKUS, G.E. & GILBERT, F. 1968. The resolving power of gross Earth data. **Geophys. J. R. Astr. Soc.**, 16(1–2): 169 – 205.
- BARBOSA, V.C.F. 1991. **Reconstituição gravimétrica compacta**. Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências,. 94p. Tese (Mestrado em Geofísica) - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1991.
- BECK, J.V. & ARNOLD, K.J. 1977. **Parameter estimation in engineering and science**. New York, John Wiley & Sons. 501p.
- BELTRÃO, J.F.; SILVA, J.B.C.; COSTA, J.C. 1991. Robust polynomial fitting method for regional gravity estimation. **Geophysics**, 56(1): 80 – 89.
- BHATTACHARYYA, B.K. 1966. A method for computing the total magnetization vector and the dimensions of a rectangular block-shaped body from magnetic anomalies. **Geophysics**, 31(1): 74 – 96.

- BHIMASANKARAM, V.L.S.; MOHAN, N.L.; SESHAGIRI RAO, S.V. 1978. Interpretation of magnetic anomalies of dikes using Fourier transforms. *Geoexploration*, 16(4): 259 – 266.
- BOTT, M.H.P. & SMITH, R.A. 1958. The estimation of the limiting depth of gravitating bodies. *Geophys. Prosp.*, 6(1): 1 – 10.
- BOTT, M.H.P.; SMITH, R.A.; STACEY, R.A. 1966. Estimation of the direction of magnetization of a body causing a magnetic anomaly using a pseudo-gravity transformation. *Geophysics*, 31(4): 803 – 811.
- BRODSKY, M.A. 1981. The solution of the inverse gravity potential problem for cylindrical bodies. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 66(3): 727 – 732.
- CHURCHILL, R.V. 1960. *Complex variables and applications*. New York, McGraw-Hill. 297p.
- COURANT, R. 1966. *Cálculo diferencial e integral*. Porto Alegre, Editora Globo. Vol 2, 685p.
- DAVIS, P.J. 1975. *Interpolation and approximation*. New York, Dover. 393p.
- EMILIA, D.A. & MASSEY, R.L. 1974. Magnetization estimation for nonuniformly magnetized seamounts. *Geophysics*, 39(2): 223 – 231.
- EMILIA, D.A. & MASSEY, R.L. 1975. Magnetization-inclination estimation from prism-like anomaly profiles. *Geophysics*, 40(3): 443 – 450.
- FABIANO, E.B.; PEDDIE, N.W.; BARRACLOUGH, D.R.; ZUNDE, A. K. 1983. International Geomagnetic Reference Field 1980 – Charts and Grid Values. (IAGA Bulletin no. 47). 142 p. (*Geological Survey Circular*, 873).
- FANSELAU, G.; BALLANI, L.; BÖTTGER, A. 1980. Approximative solution of ambiguity problems in inverse interpretation. *Acta Geodaet. Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung.*, 15(2–4): 221 – 234.
- FORSYTHE, G.E.; MALCOLM, M.A. & MOLER, C.B. 1977. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. 259p.
- FRANCHETEAU, J.; HARRISON, C.G.A.; SCLATER, J.G.; RICHARDS, M.L. 1970. Magnetization of Pacific seamounts: a preliminary polar curve for the Northeastern Pacific. *Jour. Geophys. Res.*, 75(11): 2035 – 2061.

- GASTIL, G.; NOZAWA, T.; TAINOSHO, Y. 1991. The tectonic implications of asymmetrically zoned plutons. **Earth and Plan. Sc. Lett.**, 102(3 – 4): 302 – 309.
- GLASKO, V.B.; LITVINENKO, O.K.; MUDRETSOVA, YE.A.; STRAKHOV, V.N.; FEDYNSKIY, V.V. 1977. Tikhonov's regularization method in modern geophysical prospecting. **Bull. Acad. of Sci. USSR, Phys. of the Solid Earth**, 13(1): 14 – 24.
- GLASKO, V.B.; MUDRETSOVA, E.A.; STRAKHOV, V.N. 1987. Inverse problems in gravimetry and magnetometry. In: TIKHONOV., A.N. & GONCHARSKY, A.V. eds. **Ill-Posed problems in the natural sciences**. Moscow, MIR. p. 115 – 129.
- GOLDSTEIN, H. 1959. **Classical Mechanics**. Reading, Addison–Wesley. 399p.
- GOL'TSMAN, F.M. 1970. Estimates of moments of complex source distributions. **Bull. Acad. of Sci. USSR, Phys. of the Solid Earth**, 6(12): 768 – 773.
- GOMES, R.A.A.D & MOTTA, A.C. 1978. **Projeto levantamento gravimétrico no Estado da Bahia**. Relatório Preliminar. Salvador, DNPM/CPRM. 139p.
- GRANT, F.S. & WEST, G.F. 1965. **Interpretation theory in applied geophysics**. New York, McGraw–Hill. 583p.
- GUILLEN, A. & MENICHETTI, V. 1984. Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional. **Geophysics**, 49(8): 1354 – 1360.
- GUNN, P.J. 1975. Linear transformations of gravity and magnetic fields. **Geophys. Prosp.**, 23(2): 300 – 312.
- HADAMARD, J. 1902. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. **Bull. Princeton Univ.**, 13(1): 1 – 20.
- HARRISON, C.G.A. 1971. A seamount with a nonmagnetic top. **Geophysics**, 36(2): 349 – 357.
- HELBIG, K. 1963. Some integrals of magnetic anomalies and their relation to the parameters of the disturbing body. **Zeitschr. f. Geophys.**, 29(1): 83 – 96.
- HJELT, S.-E. 1975. On the possibilities of determining dip in magnetic interpretation with the infinitely deep plate model. **Geophys. Prosp.**, 23(2): 323 – 334.
- HUBER, P.J. 1981. **Robust statistics**. New York, John Wiley & Sons. 502p.

- INDA, H.A.V & BARBOSA, J.F. 1978. **Texto explicativo para o mapa geológico do Estado da Bahia. Escala 1:1.000.000.** Salvador, CPM/SME. 137p.
- ISAACSON, E. & KELLER, H.B. 1966. **Analysis of numerical methods.** New York, John Wiley & Sons. 541p.
- JACKSON, J.D. 1983. **Eletrodinâmica Clássica.** Rio de Janeiro, Guanabara Dois. 648p.
- JUPP, D.L.B. & VOZOFF, K. 1975. Stable iterative methods for the inversion of geophysical data. **Geophys. J. R. Astr. Soc.**, 42(3): 957 – 976.
- KALININA, T.B. 1976. Statistical algorithms for interpreting magnetic and gravitational anomalies. **Bull. Acad. of Sci. USSR, Phys. of the Solid Earth**, 12(8): 518 – 521.
- KELLOG, O. D. 1953. **Foundations of potential theory.** New York, Dover. 384p.
- LANCZOS, C. 1961. **Linear differential operators.** Amsterdam, D. Van Nostrand Co. 564p.
- LAST, B. J. & KUBIK, K. 1983. Compact gravity inversion. **Geophysics**, 48(6): 713 – 721.
- LAWSON, C.L. & HANSON, R.J. 1974. **Solving least squares problems.** Englewood Cliffs, Prentice-Hall. 340p.
- LEÃO, J.W.D. & SILVA, J.B.C. 1989. Discrete linear transformations of potential field data. **Geophysics**, 54(4): 497 – 507.
- LEHMANN, H.-J. 1971. A control of two-dimensional magnetic interpretation by three-dimensional model body anomalies. **Geophys. Prosp.**, 19(1): 133 – 155.
- MARDIA, K.V.; KENT, J.T. & BIBBY, J.M. 1979. **Multivariate analysis.** New York, Academic Press. 521p.
- MCNUTT, M. 1986. Nonuniform magnetization of seamounts: a least squares approach. **Jour. Geophys. Res.**, 91(B3): 3686 – 3700.
- MEDEIROS, W.E.; SILVA, J.B.C.; LOURES, L.G.C.L. 1992. Symmetric and directionally smooth gravity inversion. In: SEG Annual International Meeting, 62, New Orleans, 1992. **Expanded Abstract:** p. 529 – 532.
- MENDONÇA, C.A. 1992. **Interpolação de dados de campo potencial através da camada equivalente.** Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências. 169p. Tese (Doutorado em Geofísica) - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1992.

- MOO, J.K.C. 1965. Analytical aeromagnetic interpretation the inclined prism. **Geophys. Prosp.**, 13(2): 203 – 224.
- OKABE, M. 1979. Analytical expressions for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translations into magnetic anomalies. **Geophysics**, 44(4): 730 – 741.
- OPDYKE, N.D. & HEKINIAN, R. 1967. Magnetic properties of some igneous rocks from the Mid-Atlantic ridge. **Jour. Geophys. Res.**, 72(8): 2257 – 2260.
- PARKER, R.L. 1974. Best bounds on density and depth from gravity data. **Geophysics**, 39(5): 644 – 649.
- PARKER, R.L. 1975. The theory of ideal bodies for gravity interpretation. **Geophys. J. R. Astr. Soc.**, 42(2) :315 – 334.
- PARKER, R.L. 1991. A theory of ideal bodies for seamount magnetism. **Jour. Geophys. Res.**, 96(B10): 16101 – 16112.
- PARKER, R.L.; SHURE, L.; HILDEBRAND, J.A. 1987. The application of inverse theory to seamount magnetism. **Reviews of Geophysics.**, 25(1): 17 – 40.
- PITCHER, W.S. 1979. The nature, ascent and emplacement of granitic magmas. **Jour. Geol. Soc. London**, 136: 627 – 662.
- POHÁNKA, V. 1988. Optimum expression for computation of the gravity field of a homogeneous polyhedral body. **Geophys. Prosp.**, 36(7): 733 – 751.
- POWELL, D.W. 1967. A rapid method of determining dip or magnetization inclination from magnetic anomalies due to dike-like bodies. **Geophys. Prosp.**, 15(2): 197 – 202.
- RAINVILLE, E.D. 1967. **Infinite Series**. New York, The Macmillan Co. 265 p.
- RALSTON, A. & RABINOWITZ, P. 1978. **A first course in numerical analysis**. New York, McGraw–Hill. 556p.
- RAO, B.S.R.; PRAKASA RAO, T.K.S.; KRISHNA MURTHY, A.S. 1977. A note on magnetized spheres. **Geophys. Prosp.**, 25(4): 746 – 757.
- REITZ, J.R. & MILFORD, F.J. 1964. **Foundations of Electromagnetic Theory**. Reading, Addison–Wesley. 387 p.

- RICHARD, V.; BAYER, R.; CUER, M. 1984. An attempt to formulate well-posed questions in gravity: Application of linear inverse techniques to mining exploration. **Geophysics**, 49(10): 1781 – 1793.
- RIETSCH, E. 1988. The maximum entropy approach to the inversion of one-dimensional seismograms. **Geophys. Prosp.**, 36(4): 365 – 382.
- SÁ, E.F.J. 1981. A Chapada Diamantina e Faixa Santo Onofre: um exemplo de tectônica intraplaca no Proterozóico Médio do Cráton do São Francisco. In: INDA, H.A.V.; MARINHO, M.M.; DUARTE, F.B. Orgs. **Geologia e recursos minerais do Estado da Bahia**. Salvador, CPM/SME p. 111 – 120.
- SCHNETZLER, C.C. & TAYLOR, P.T. 1984. Evaluation of an observational method for estimation of remanent magnetization. **Geophysics**, 49(3): 282 – 290.
- SILVA, J.B.C. & CUTRIM, A.O. 1989. A robust maximum likelihood method for gravity and magnetic interpretation. **Geoexploration**, 26(1): 1 – 31.
- STEPHANSSON, O. 1975. Polydiapirism of granitic rocks in the Svecofennian of Central Sweden. **Precambrian Research**, 2(2): 189 – 214.
- STRAKHOV, V.N. 1975. Bipolar analysis of two-dimensional potential fields. **Bull. Acad. of Sci. USSR, Phys. of the Solid Earth**, 11(8): 514 – 522.
- STRAKHOV, V.N. & LAPINA, M.I. 1975. Determination of integral characteristics of anomalous masses by an approximate method in gravimetry and magnetometry problems. **Bull. Acad. of Sci. USSR, Phys. of the Solid Earth**, 11(4): 240 – 250.
- TALWANI, M. 1965. Computation with the help of a digital computer of magnetic anomalies caused by bodies of arbitrary shape. **Geophysics**, 30(5): 797 – 817.
- TARANTOLA, A. 1987. **Inverse Problem Theory: methods for data fitting and model parameter estimation**. Amsterdam, Elsevier. 613p.
- TIJONOV, A.N. & SAMARSKY, A.A. 1980. **Ecuaciones de la Fisica Matematica**. Moscu, MIR. 824p.
- TIKHONOV, A.N. & ARSENIN, V.Y. 1977. **Solutions of ill-posed problems**. Washington D.C., V.H. Winston & Sons. 258p.
- ULRYCH, T.J.; BASSREI, A.; LANE, M. 1990. Minimum relative entropy inversion of 1D data with applications. **Geophys. Prosp.**, 38: 465 – 487.

- USSAMI, N. & BOTT, H.P.M. 1989. A gravity study of the Paramirim granite, Bahia state, Brazil. **Rev. Bras. Geoc.**, 19(2): 170 – 176.
- VEMURI, V. & CHEN, F-P. 1974. An initial value method for solving Fredholm integral equation of the first kind. **Journal of the Franklin Institute**, 297(3): 187 – 200.
- VIGNERESSE, J.L. 1990. Use and misuse of geophysical data to determine the shape at depth of granitic intrusions. **Geological Journal**, 25: 249 – 260.

ANEXO I - ANÁLISE DO RESÍDUO DEFINIDO PELA EQUAÇÃO (2.27)

Neste anexo, vamos mostrar que, sob o limite $\Gamma \rightarrow \infty$ e sob as condições $\partial P/\partial z = 0$ e $\nabla^2 P = 0$, $Res(f)$ é nulo, em que f e $Res(f)$ estão definidos nas equações (2.25) e (2.27), respectivamente.

Seja A a superfície lisa que é a união das superfícies D e U como mostra a Figura 2.1. A partir da equação (2.27), podemos escrever o limite de $Res(f)$ como

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} Res(f) = \frac{1}{2} \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \left[\int_{D(\Gamma)} \left(\frac{\partial P}{\partial \Gamma} \int_{v_0} \rho \sigma dv_0 - P \int_{v_0} \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} dv_0 \right) dD - \int_{U(\Gamma)} \left(\frac{\partial P}{\partial \Gamma} \int_{v_0} \rho \sigma dv_0 - P \int_{v_0} \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} dv_0 \right) dU \right], \quad (I.1)$$

em que Γ é normal a A e aponta para fora da mesma e $\rho \equiv \rho(\vec{r})$, $P \equiv P(\vec{r}, \vec{r}_0)$, $\sigma \equiv \sigma(\vec{r}, \vec{r}')$ e $\partial \sigma / \partial \Gamma \equiv \partial \sigma(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \Gamma$ são o contraste de densidade, o núcleo polinomial dos momentos e as funções de Green do potencial e do campo normal a A , respectivamente. Além disso, $\vec{r}$ é um ponto de observação sobre A , $\vec{r}_0$ é o centro de expansão e $\vec{r}'$ é um ponto dentro do volume das fontes v_0 .

Na equação (I.1) todas as funções envolvidas são seccionalmente contínuas em suas respectivas regiões de integração. Além disso, observemos que a integral sobre v_0 não é imprópria pois este volume e a profundidade do centro de massa são finitos. Nestas condições, segundo COURANT (1966), a seqüência das integrais pode ser trocada desde que a integral imprópria seja uniformemente convergente para todo ponto pertencente ao domínio da integral definida. Assim sendo, vamos investigar se a integral imprópria é convergente para um elemento de massa situado num ponto *arbitrário* de v_0 . Se ela for convergente para este elemento, então ela será também convergente para a soma sobre v_0 , pois o campo da distribuição contínua ρ pode ser aproximado, com precisão arbitrária, pelo campo de um conjunto discreto e finito de massas. Isto é possível, matematicamente, porque existe uma representação para o integrando da integral imprópria, na forma de uma seqüência (baseada na expansão em multipolos), que aproxima este integrando com precisão arbitrária. Fisicamente, isto equivale a investigar o comportamento do limite de $Res(f)$ em presença de um elemento de massa m' situada no ponto arbitrário $\vec{r}'$. Nesta situação, substituiremos $Res(f)$ por $Res'(f)$ e a equação (I.1) se

reduz a

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} Res'(f) = \frac{m'}{2} \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \left[\int_{D(\Gamma)} \left(\frac{\partial P}{\partial \Gamma} \sigma - P \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \right) dD - \int_{U(\Gamma)} \left(\frac{\partial P}{\partial \Gamma} \sigma - P \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \right) dU \right]. \quad (I.2)$$

Por definição, a superfície lisa A (Figura 2.1) deve satisfazer *apenas* os vínculos de conter a fonte e de separar D e U através do plano S . Desse modo, vamos escolher A como sendo a esfera de raio Γ' com centro no ponto O' definido por $\vec{r}'$ (Figura I.1). De agora em diante, $\Gamma \equiv \Gamma'$ e, além disso, trabalharemos na condição $\Gamma' \gg z'$, em que z' é a coordenada z de $\vec{r}'$.

A fim de obter uma expressão para o limite de $Res'(f)$, vamos decompor D em duas superfícies, como mostra a Figura I.1: a primeira superfície (D_1) é a zona centrada em O' , cuja área A_1 vale

$$A_1 = 4\pi z' \Gamma', \quad (I.3)$$

e a segunda superfície (D_2) é a calota de mesma área que U . Sob a condição $\partial P / \partial z = 0$, P e $\partial P / \partial \Gamma'$ são invariantes por translação ao longo do eixo z e, portanto, são simétricos em relação a qualquer plano paralelo à superfície da Terra. Desse modo, por simetria do integrando de $Res'(f)$ em relação ao plano paralelo a S e contendo O' (S') (Figura I.1), obtemos que

$$\lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} \left[\int_{D_2(\Gamma')} \left(\frac{\partial P}{\partial \Gamma'} \sigma - P \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma'} \right) dD_2 - \int_{U(\Gamma')} \left(\frac{\partial P}{\partial \Gamma'} \sigma - P \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma'} \right) dU \right] = 0.$$

Assim, a equação (I.2) se reduz a

$$\lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} Res'(f) = \frac{m'}{2} \lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} \int_{D_1(\Gamma')} \left[\frac{\partial P(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\partial \Gamma'} \sigma(\vec{r}, \vec{r}') - P(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial \sigma(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \Gamma'} \right] dD_1. \quad (I.4)$$

Usando coordenadas polares sobre S' , podemos expressar P como

$$P = P(\Gamma_0, \theta_0) = \Gamma_0^N p(\theta_0), \quad (I.5)$$

em que N é a ordem de P , Γ_0 e θ_0 estão definidos na Figura I.2 e, por simplicidade, omitimos a dependência de P com $\vec{r}$. Para operar com P e $\partial P / \partial \Gamma'$ na equação (I.4), é conveniente expressar estas grandezas em função de $\vec{r}'$. Usando as grandezas definidas na Figura I.2, obtemos que

$$\Gamma_0 = \Gamma' \left[1 - \frac{\delta \cos \alpha}{\Gamma'} + O^2 \left(\frac{\delta}{\Gamma'} \right) \right] \quad (I.6)$$

e

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left[\cos \theta' + \frac{\delta}{\Gamma'} \sin \alpha \sin \theta' + O^2 \left(\frac{\delta}{\Gamma'} \right) \right], \quad (I.7)$$

em que

$$\delta = |\vec{r}_0 - \vec{r}'|$$

e $O^2(\delta/\Gamma')$ representa o resto cujo termo dominante é o quadrado da razão entre δ e Γ' .

Usando as equações (I.5), (I.6) e (I.7), obtemos que

$$P = \Gamma'^N \left[1 - \frac{N\delta}{\Gamma'} \cos \alpha + O^2 \left(\frac{\delta}{\Gamma'} \right) \right] p(\theta') \quad (\text{I.8})$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \Gamma'} = N\Gamma'^{N-1} \left[1 - \frac{N\delta}{\Gamma'} \cos \alpha + O^2 \left(\frac{\delta}{\Gamma'} \right) \right] p(\theta'). \quad (\text{I.9})$$

Para avaliar o limite de $Res'(f)$, reescremos a equação (I.4) como

$$\lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} Res'(f) = \frac{m'}{2} \lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} \bar{f} A_1, \quad (\text{I.10})$$

em que $\bar{f}$ é o valor médio do integrando de $Res'(f)$ sobre D_1 , cuja área A_1 é dada pela equação (I.3). Agora, usando as definições de σ e $\partial\sigma/\partial\Gamma'$ e as equações (I.3), (I.8), (I.9) e (I.10), obtemos que

$$\lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} Res'(f) = m' z' \lim_{\Gamma' \rightarrow \infty} \bar{p} \left[(1 - N) + O^2 \left(\frac{\delta}{\Gamma'} \right) \right] \Gamma'^{N-1}, \quad (\text{I.11})$$

em que $\bar{p}$ é o valor médio de $p(\theta')$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Além disso, para obter a equação (I.11), usamos o fato de que o valor médio de $\cos \alpha$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é zero. Isso significa que, sob o limite $\Gamma' \rightarrow \infty$, as propriedades de simetria de P (ou $\partial P/\partial\Gamma'$) em torno de $\vec{r}_0$ podem ser atribuídas, com precisão arbitrária, a P (ou $\partial P/\partial\Gamma'$) em torno de $\vec{r}'$.

Pelo fato de P satisfazer a equação de Laplace, ele admite, para todo N , uma representação em que $p(\theta')$ seja dado por uma série de Fourier em função de θ' . Além disso, por definição de P , esta série só tem termo constante se $N = 0$ (i.e. $P = 1$). Em consequência, $\bar{p} = 0$ para todo $N \geq 1$. Assim sendo (e levando em conta que, no caso particular $N = 0$, Γ'^{-1} converge para zero), concluímos da equação (I.11) que o limite de $Res'(f)$ é nulo para todo P tal que $\partial P/\partial z = 0$ e $\nabla^2 P = 0$. Em consequência, concluímos que estas condições são suficientes para que o limite de $Res(f)$ seja nulo.

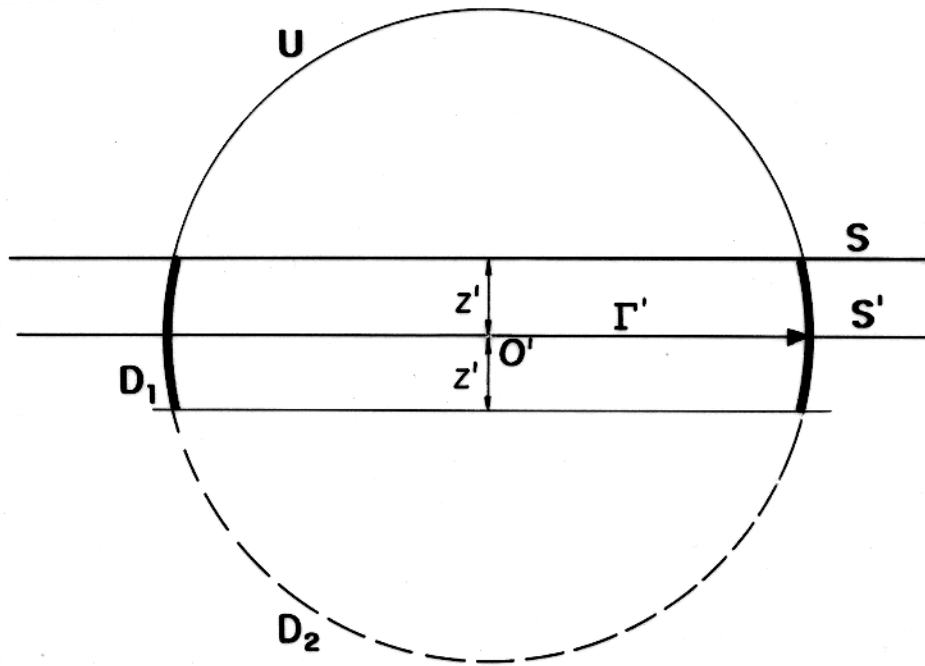


Figura I.1 - Seção mostrando as superfícies de integração utilizadas para avaliar o limite de $Res'(f)$. O' é o ponto dentro de v_0 definido por $\vec{r}'$. U , D_1 e D_2 são as superfícies representadas pelas linhas contínua fina, contínua grossa e tracejada, respectivamente. D é a união de D_1 e D_2 . S é a superfície da Terra e S' é o plano paralelo a S e que contém O' .

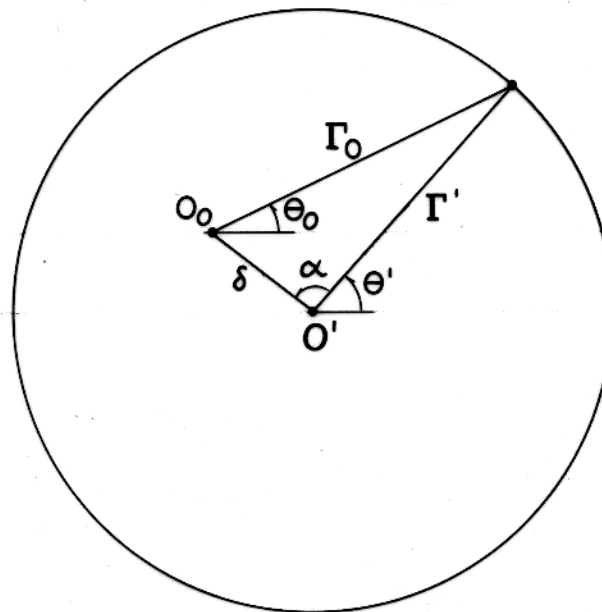


Figura I.2 - Planta sobre S' mostrando a geometria utilizada para expressar $P(\vec{r}, \vec{r}_0)$ em função de $\vec{r}'$. S' é o plano paralelo a S e que contém O' . O' e O_0 são os pontos definidos por $\vec{r}'$ e $\vec{r}_0$, respectivamente.

ANEXO II - SINAL DA TANGENTE DEFINIDA PELAS EQUAÇÕES (3.41) E (3.42)

Para caracterizar o sinal de $\tan \alpha$ no plano $u - v$, vamos identificar como é a dependência deste sinal com as coordenadas u' e v' de um ponto qualquer sobre este plano. Para tanto, vamos subdividir o plano $u - v$ em regiões analiticamente identificadas, nas quais nós possamos assegurar que o sinal de $\tan \alpha$ é igual ao sinal do produto $u' \cdot v'$ usando, de acordo com a conveniência, ora a equação (3.41), ora a equação (3.42). Assim, de acordo com a Figura II.1, e usando o fato de que $\delta \geq 0$ conforme a equação (3.40), obtemos que

- (1) Para $u' = 0$ ou $v' = 0$, pela equação (3.41), $\tan \alpha = 0$ sobre os eixos u e v .
- (2) Para $v'^2 = u'^2$, pela equação (3.41), $\tan \alpha > 0$ sobre a reta $v' = u'$ e $\tan \alpha < 0$ sobre a reta $v' = -u'$.
- (3) Para $v'^2 < u'^2$, uma vez definidos os octantes 1, 4, 5 e 8, pela equação (3.41), $\tan \alpha > 0$ nos octantes 1 e 5 e $\tan \alpha < 0$ nos octantes 4 e 8.
- (4) Para $v'^2 > u'^2$ e $2m_0(v'^2 - u'^2) < (M_{uu} - M_{vv})$, uma vez definidas as subregiões a do octante 2 e c do octante 3 (limitadas pelas retas $v' = u'$ e $v' = -u'$, e pelo ramo superior da hipérbole H), e uma vez definidas também as regiões e do octante 6 e g do octante 7 (limitadas pelas retas $v' = u'$ e $v' = -u'$, e pelo ramo inferior da hipérbole H), pela equação (3.41), $\tan \alpha > 0$ nas subregiões a e e , e $\tan \alpha < 0$ nas subregiões c e g .
- (5) Finalmente, para $v'^2 > u'^2$ e $2m_0(v'^2 - u'^2) \geq (M_{uu} - M_{vv})$, uma vez definidas as subregiões b do octante 2 e d do octante 3 (limitadas pelo ramo superior da hipérbole H), e uma vez definidas também as subregiões f do octante 6 e h do octante 7 (limitadas pelo ramo inferior da hipérbole H), de tal forma que se assegura, para esta subregiões, que $\delta > 1$, obtém-se, pela equação 3.42, que $\tan \alpha > 0$ nas subregiões b e f e que $\tan \alpha < 0$ nas subregiões d e h .

Desse modo, podemos concluir que o sinal de $\tan \alpha$ é igual ao sinal do produto $u' \cdot v'$, em todo o plano $u - v$.

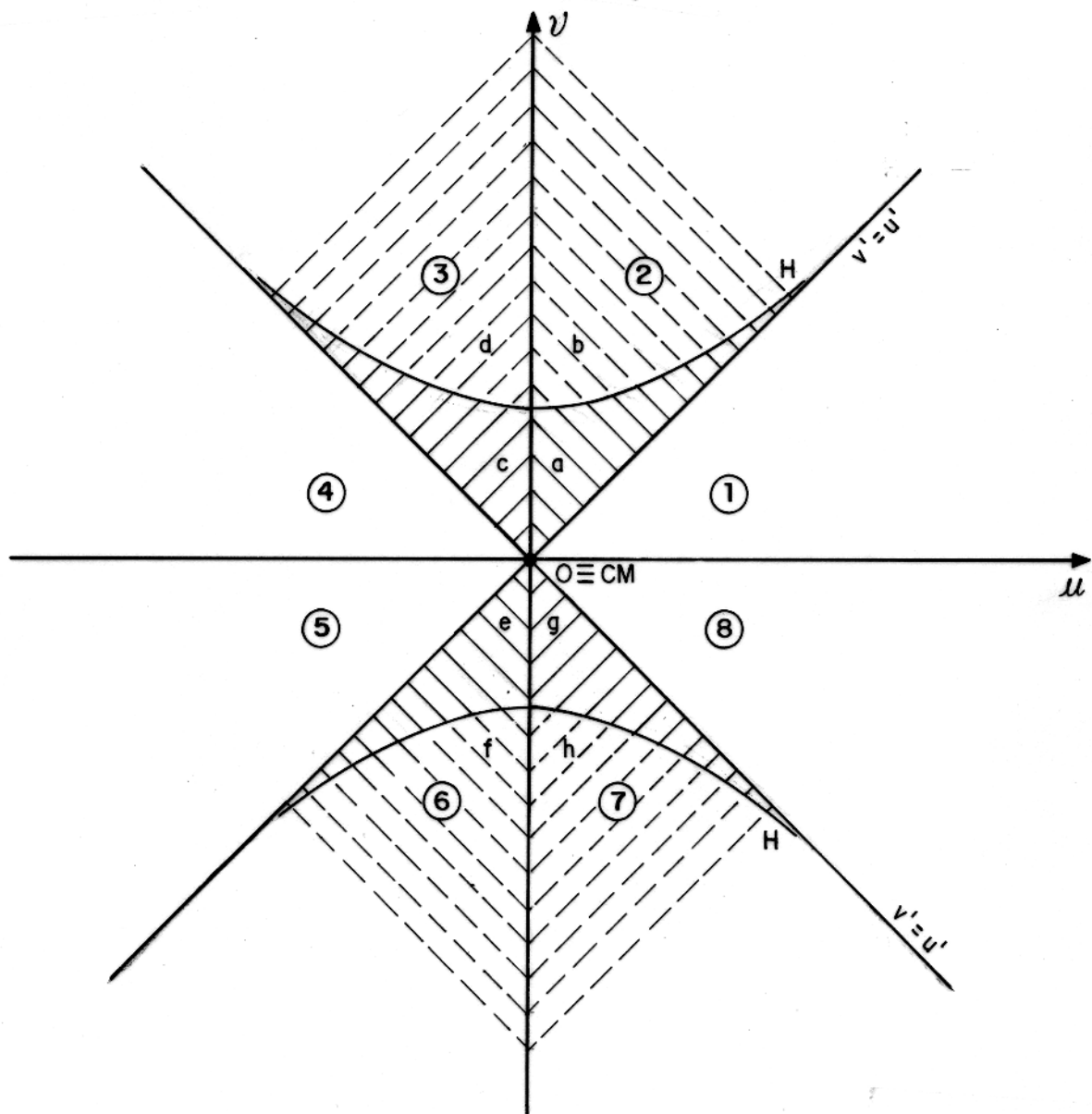


Figura II.1 - Subdivisão do plano $u - v$ para a análise do sinal de $\tan \alpha$ dada pelas equações (3.41) e (3.42). A curva H é a hipérbole cuja equação é dada por $v'^2 - u'^2 = [(M_{uu} - M_{vv})/2m_0]^{1/2}$. O número dentro do círculo refere-se ao octante respectivo.

4 - ADAPTAÇÃO PARA O CASO MAGNÉTICO

A interpretação de anomalias magnéticas tridimensionais (3D), mesmo presumindo-se modelos interpretativos com formas geométricas simples, não é um problema fácil (BHATTACHARYYA, 1966), por causa da dificuldade de se levar em conta a possível existência de magnetização remanente e da dependência não linear da anomalia com os parâmetros geométricos do modelo. Para simplificar o problema, costumam-se fazer hipóteses severas, como a de fonte bidimensional (2D), aliada ao conhecimento da direção da magnetização, visando determinar o mergulho do corpo anômalo (BHIMASANKARAM et al., 1978; HJELT, 1975; POWELL, 1967; MOO, 1965). Alternativamente, é possível fixar o mergulho do corpo anômalo, buscando estimar a magnetização total (POWELL, 1967). Outra abordagem, também 2D, é a abdicação de conhecer a geometria da fonte buscando a determinação apenas dos parâmetros da magnetização (EMILIA & MASSEY, 1975; BOTT et al., 1966). No entanto, a interpretação 2D tem limitações, como a de possibilitar estimativas apenas da componente da magnetização normal à orientação geométrica da fonte (EMILIA & MASSEY, 1975) e da possível ocorrência de erros grosseiros na estimação do mergulho da fonte (LEHMANN, 1971). Extensões para o caso 3D foram feitas, mas restringindo-se à estimação da magnetização total, na hipótese da fonte ser um prisma vertical (SCHNETZLER & TAYLOR, 1984 e BHATTACHARYYA, 1966), uma esfera (RAO et al., 1977), ou ainda, da fonte ser discretizada numa geometria fixa (EMILIA & MASSEY, 1974).

Neste capítulo, faremos a adaptação para o caso magnético da abordagem modificada de GOL'TSMAN (1970) para a inversão de momentos de fonte. Esta abordagem se baseia na aproximação da anomalia magnética pela série obtida de sua expansão em multipolos retendo momentos até 2a. ordem. O método permite a estimação, em conjunto, do vetor momento de dipolo total, do centro de momento de dipolo e da atitude espacial do corpo anômalo, conforme fornecida pelos três eixos principais da matriz de espalhamento do módulo da magnetização. Ressaltemos que, ao contrário de aplicações anteriores da abordagem de GOL'TSMAN (1970), a exemplo de KALININA (1976), não serão feitas aqui as hipóteses de que a fonte é 2D e que a direção da magnetização é conhecida. Assim, será possível se fazer a estimação *simultânea* da direção de magnetização total e da atitude espacial do corpo anômalo. Como hipóteses, supõe-se que o corpo anômalo seja convexo e tenha volume finito, que ele esteja suficientemente distante das observações, que a magnetização seja constante

$$P^{xy} = \frac{x \cdot y}{l^2}, \quad (\text{III.5})$$

$$P^{xx} = \frac{x^2}{l^2}, \quad (\text{III.6})$$

$$P^{yy} = \frac{y^2}{l^2}, \quad (\text{III.7})$$

em que (x, y) é um ponto da superfície da Terra.

Introduzindo a normalização acima definida (para o polinômio) na expressão do campo gravimétrico, dada pela equação (III.1), obtemos:

$$\begin{aligned} g = & \Psi^0 \mu_0 + \Psi^x \mu_x + \Psi^y \mu_y + \Psi^z \mu_z + \Psi^{xy} \mu_{xy} + \Psi^{xz} \mu_{xz} + \frac{1}{2} \Psi^{yy} (\mu_{yy} - \mu_{xx}) + \Psi^{yz} \mu_{yz} \\ & + \frac{1}{2} \Psi^{zz} (\mu_{zz} - \mu_{xx}) + \alpha_0 P^0 + \alpha_x P^x + \alpha_y P^y + \alpha_{xy} P^{xy} + \alpha_{xx} P^{xx} + \alpha_{yy} P^{yy}. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Considerando o conjunto de todas as medidas do campo anômalo, a equação (III.8) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\bar{g} = \bar{A} \bar{b}, \quad (\text{III.9})$$

em que $\bar{g}$ é o vetor de dimensão N cujo k -ésimo elemento é o campo gravimétrico observado no ponto $(x_k, y_k, 0)$ e $\bar{b}$ é o vetor de dimensão 15, cujos elementos são os 9 momentos, ou combinações de momentos, e os 6 coeficientes do polinômio, arranjados na seqüência em que eles aparecem na equação (III.8). Além disso, $\bar{A}$ é a matriz $N \times 15$ cujo elemento $A_{k,j}$ calculado no ponto $(x_k, y_k, 0)$ é igual a: (a) Ψ^j , com $j = \{0, x, y, z, \dots, zz\}$ (definida nas equações (3.6) a (3.14)), se $1 \leq j \leq 9$, ou (b) P^j , com $j = \{0, x, y, xx, xy, zz\}$ (definido nas equações (III.2) a (III.7)), se $10 \leq j \leq 15$.

A decomposição em valores singulares (LANCZOS, 1961) da matriz $\bar{A}$, definida na equação (III.9), realizada com a mesma grade e centro de expansão utilizados para decompor a matriz $\bar{\Psi}$ (veja a Tabela 3.1), revela que a razão entre os valores singulares extremos de $\bar{A}$ é menor que 231. Assim sendo, $\bar{A}$ ainda é uma matriz bem-condicionada. Todavia, houve um aumento considerável da razão entre os valores singulares extremos de $\bar{A}$, em relação ao de $\bar{\Psi}$, que era de apenas 34.

ANEXO IV - UNICIDADE E ESTABILIDADE DAS OPERAÇÕES DE DESACOPLAMENTO DOS MOMENTOS MAGNÉTICOS

Para mostrar que $\bar{\bar{A}}_1$, na equação (4.49), tem posto 3, provaremos que a matriz de Gram associada $\bar{\bar{G}}_1 = \bar{\bar{A}}_1^T \bar{\bar{A}}_1$ tem posto completo e é, portanto, não singular. Ora, é possível obter que o determinante de $\bar{\bar{G}}_1$, $\det(\bar{\bar{G}}_1)$, vale

$$\det(\bar{\bar{G}}_1) = (1 + a^2)(1 - b^2 c^2).$$

Da definição dos cossenos diretores da magnetização a , b e c , na equação (4.3), temos que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad (\text{IV.1})$$

com $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$ e $|c| \leq 1$, o que determina que se $|b| = 1$ então $c = 0$, e vice-versa. Isso é suficiente para assegurar que $\det(\bar{\bar{G}}_1) > 0$ e, em consequência, garantir que $\bar{\bar{A}}_1$ tem posto 3.

A demonstração de que $\bar{\bar{A}}_2$, na equação (4.52), tem posto 5, bem como que a matriz de Gram associada $\bar{\bar{G}}_2 = \bar{\bar{A}}_2^T \bar{\bar{A}}_2$ é não singular, pode ser feita pelo mesmo processo partindo-se do fato de que

$$\det(\bar{\bar{G}}_2) = (1 + a^2)(1 - b^2 c^2)[(1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2].$$

Para que haja garantia de estabilidade nas operações de desacoplamento definidas nas equações (4.50) e (4.53), é preciso, respectivamente, que $\bar{\bar{G}}_1$ e $\bar{\bar{G}}_2$ sejam matrizes bem condicionadas. O número de condição de uma matriz na norma 2 é a razão entre o maior e o menor autovalor da mesma.

Investiguemos o número de condição de $\bar{\bar{G}}_1$, $N_C(\bar{\bar{G}}_1)$. É possível mostrar que o determinante de $\bar{\bar{G}}_1$ e o traço de $\bar{\bar{G}}_1$, $\text{tr}(\bar{\bar{G}}_1)$, satisfazem, respectivamente,

$$\frac{3}{4} \leq \det(\bar{\bar{G}}_1) \leq 2 \quad (\text{IV.2})$$

e

$$3 \leq \text{tr}(\bar{\bar{G}}_1) \leq 4. \quad (\text{IV.3})$$

O máximo de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$ ocorre quando $b^2 = c^2 = 0$ (logo $a^2 = 1$) e o mínimo de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$, quando $b^2 = c^2 = 1/2$ (logo $a^2 = 0$). O máximo de $\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)$ ocorre quando $a^2 = 1$ (logo $b^2 = c^2 = 0$) e o mínimo de $\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)$, quando $a^2 = 0$, com b^2 e c^2 sendo valores quaisquer satisfazendo a equação (IV.1) e condições subsequentes. Para o $\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)$ estes resultados são imediatos, uma vez que $\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1) = a^2 + 3$. Para $\det(\overline{\overline{G}}_1)$ eles podem ser obtidos através das seguintes etapas: (1) usando argumentos de simetria, mostrar que os extremos de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$ estão sobre a reta $b^2 = c^2$ definida sobre o plano $b^2 - c^2$, (2) utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, mostrar que os extremos de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$ estão fora da região fisicamente admissível para os cossenos diretores, (3) mostrar que a derivada direcional de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$, sobre a reta $b^2 = c^2$, é estritamente negativa e, por fim, (4) unindo os resultados das etapas anteriores, concluir que os extremos vinculados de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$ estão sobre as interseções da reta $b^2 = c^2$ com as fronteiras da região fisicamente admissível para b^2 e c^2 .

Definindo α_1 , α_2 e α_3 como os autovalores de $\overline{\overline{G}}_1$, em ordem decrescente, e usando as inequações (IV.2) e (IV.3), é possível obter, por simples majoração, que

$$N_C(\overline{\overline{G}}_1) \equiv \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \leq \frac{\max_{a,b,c}(\alpha_1)}{\min_{a,b,c}(\alpha_3)} < \frac{\max_{a,b,c}[\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)]}{\min_{a,b,c}[\det(\overline{\overline{G}}_1)] \cdot \max_{a,b,c}^{-1}(\alpha_1\alpha_2)} < \frac{4 \cdot \max_{a,b,c}[\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)]}{\min_{a,b,c}[\det(\overline{\overline{G}}_1)] \cdot \max_{a,b,c}^{-2}[\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)]},$$

que fornece, após a substituição dos valores máximos e mínimos de $\det(\overline{\overline{G}}_1)$ e de $\text{tr}(\overline{\overline{G}}_1)$, contidos nas inequações (IV.2) e (IV.3), respectivamente, o limite

$$N_C(\overline{\overline{G}}_1) < \frac{64}{3} < 22.$$

Para $\overline{\overline{G}}_2$, obtém-se que

$$\frac{3}{8} \leq \det(\overline{\overline{G}}_2) \leq 4 \quad (\text{IV.4})$$

e

$$5 \leq \text{tr}(\overline{\overline{G}}_2) \leq 7, \quad (\text{IV.5})$$

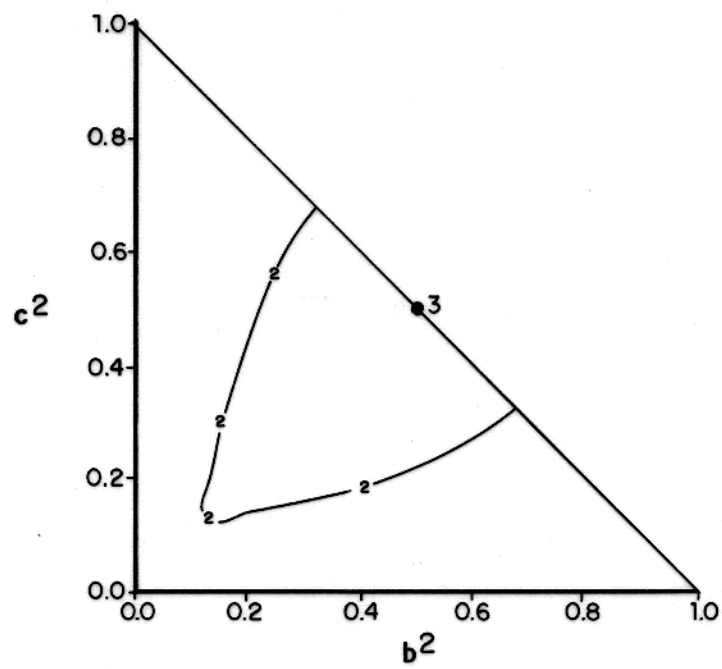
ocorrendo os máximos e mínimos dessas grandezas nas mesmas condições de a^2 , b^2 e c^2 que no caso de $\overline{\overline{G}}_1$ e, além disso, podendo serem obtidas da mesma forma.

Usando-se as inequações (IV.4) e (IV.5), pode-se provar, por um processo de majoração similar ao usada no caso de $\overline{\overline{G}}_1$, que

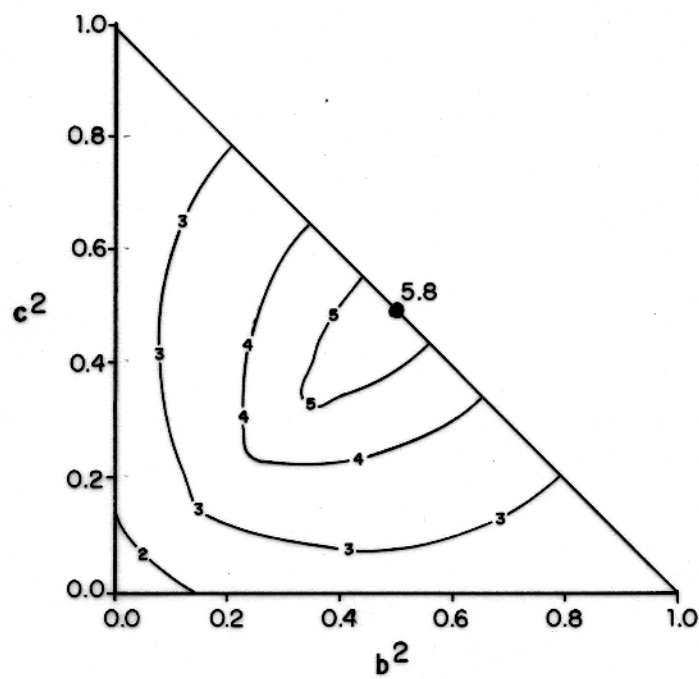
$$N_C(\overline{\overline{G}}_2) < \frac{1}{3} \left(\frac{7}{2}\right)^5 < 176.$$

Na realidade, como consequência do processo de majoração, estes limites superiores de $N_C(\overline{\overline{G}}_1)$ e de $N_C(\overline{\overline{G}}_2)$ são excessivamente pessimistas. Para revelar este fato, apresentamos nas Figuras IV.1a e IV.1b as curvas de isovalores de $N_C(\overline{\overline{G}}_1)$ e de $N_C(\overline{\overline{G}}_2)$, respectivamente, interpoladas a partir de valores calculados numa malha igualmente espaçada de 0,05, tanto em b^2 quanto em c^2 , cobrindo toda a região de definição dos cossenos diretores a , b e c . Admitindo-se que $N_C(\overline{\overline{G}}_1)$ e $N_C(\overline{\overline{G}}_2)$ sejam funções que variem suavemente com b^2 e c^2 , pode-se concluir, da Figura IV.1, que $N_C(\overline{\overline{G}}_1) \leq 3$ e que $N_C(\overline{\overline{G}}_2) \leq 5,8$.

De qualquer modo, seja dos valores obtidos pelo processo de majoração, seja dos valores calculados na malha, os limites acima obtidos para $N_C(\overline{\overline{G}}_1)$ e $N_C(\overline{\overline{G}}_2)$ nos permitem concluir que tanto $\overline{\overline{D}}_1$ quanto $\overline{\overline{D}}_2$, nas equações (4.51) e (4.54), respectivamente, possibilitam operações estáveis de desacoplamento entre a direção de magnetização e a direção de translação ao centro de momento de dipolo, no caso de $\overline{\overline{D}}_1$, e entre a direção de magnetização e as direções dos eixos principais, no caso de $\overline{\overline{D}}_2$.



(a)



(b)

Figura IV.1 - Número de condição das matrizes de Gram associadas aos operadores de desacoplamento dos momentos magnéticos. (a) matriz $\overline{G}_1$. (b) matriz $\overline{G}_2$.