

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANÁLISE DE SENSOR PLASMÔNICO NA CONFIGURAÇÃO EMISSÃO
ACOPLADA VIA FUNÇÃO DE GREEN 3D

ANDRÉ FELIPE SOUZA DA CRUZ

DM – 35/2018

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDRÉ FELIPE SOUZA DA CRUZ

ANÁLISE DE SENSOR PLASMÔNICO NA CONFIGURAÇÃO EMISSÃO
ACOPLADA VIA FUNÇÃO DE GREEN 3D

DM – 35/2018

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDRÉ FELIPE SOUZA DA CRUZ

ANÁLISE DE SENSOR PLASMÔNICO NA CONFIGURAÇÃO EMISSÃO
ACOPLADA VIA FUNÇÃO DE GREEN 3D

Dissertação submetida à Banca Examinadora
do Programa de Pós-Graduação em Engenharia elétrica da UFPA para a obtenção
do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica
na Área de Telecomunicações, Linha de
Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado.

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S719a Souza da Cruz, André Felipe
Análise de Sensor Plasmônico na Configuração Emissão Acoplada via Função de Green 3D / André Felipe Souza da Cruz. — 2018
149 f. : il. color
- Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa
Coorientação: Prof. Dr. Victor Alexandrovich Dmitriev.
1. Sensor SPCE. 2. Plasmônica. 3. Função de Green. 4. Representação Espectral. I. Queiroz da Costa, Karlo , *orient.* II. Título

CDD 621.3

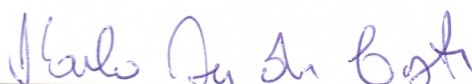
**“ANÁLISE DE SENSOR PLASMÔNICO NA CONFIGURAÇÃO EMISSÃO
ACOPLADA VIA FUNÇÃO DE GREEN 3D”**

AUTOR: ANDRE FELIPE SOUZA DA CRUZ

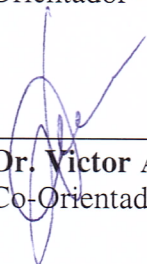
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO
COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO
JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA
ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM: 28//09/2018

BANCA EXAMINADORA:

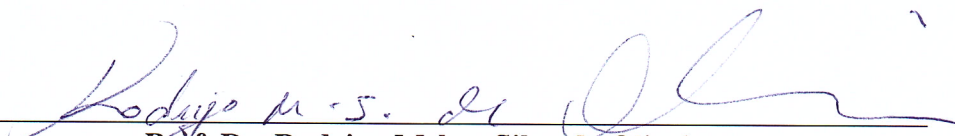


Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa
(Orientador – PPGEE/UFPA)

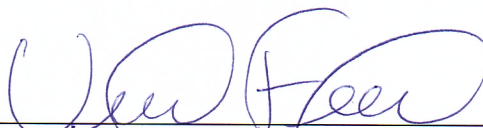


Prof. Dr. Victor Alexandrovich Dmitriev
(Co-Orientador – PPGEE/UFPA)

Prof. Dr. Marcos Benedito Caldas Costa
(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)



Prof. Dr. Rodrigo Melo e Silva de Oliveira
(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)



Prof. Dr. Vicente Ferrer Pureza Aleixo
(Avaliador Externo ao programa – FEEB/UFPA)

VISTO:

Prof.^a Dr.^a Maria Emília de Lima Tostes
(Coordenadora do PPGEE/ITEC/UFPA)

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por todas as bênçãos e oportunidades que colocou em meu caminho, pela visão e força para que fossem feitas as escolhas necessárias.

À Universidade Federal do Pará, aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, pelo conhecimento provido, sem o qual este trabalho não seria possível, em especial ao orientador deste trabalho Dr. Karlo Q. da Costa, pela paciência e disposição durante a orientação deste e outros trabalhos.

Ao professor Dr. Victor Dmtriev e aos integrantes do Laboratório de nanofotônica - Nanotribo.

Aos meus colegas de pesquisa Rafael Corrêa, Piaga Ferraz, Andrey Viana e Yago Gomes.

Aos Forasteiros dos Programas de Pós-Graduação em Ecologia e Zoologia.

À minha namorada Pâmela Virgolino, pelo companheirismo e paciência durante as longas horas que foram consumidas na produção deste trabalho.

À minha filha Eloisy e aos meus pais Eliane e Rosivaldo, por todo apoio e compreensão.

À toda minha família, e à todos que contribuíram de forma direta e indiretamente para realização desta etapa.

*"Somente um principiante que não sabe nada
sobre ciência diria que a ciência descarta a fé.
Se você realmente estudar a ciência, ela certamente
o levará para mais perto de Deus."*

JAMES CLERK MAXWELL

Resumo

No presente trabalho, é apresentado um estudo teórico sobre um sensor de ressonância plasmônica na configuração de Emissão Acoplada por Plasma de Superfície (SPCE). Acoplado à estrutura do sensor, está um canal microfluídico contendo em suspensão partículas-alvo (nanopartículas de ouro funcionalizadas para atrair moléculas fluorescentes), que quando excitadas e imobilizadas sobre a estrutura do sensor, podem ser eficientemente modeladas como um arranjo planar de dipolos induzidos. A modelagem eletromagnética do dispositivo foi realizada através do potencial magnético, definido por meio da Função de Green Periódica (PGF) 3D. Os campos eletromagnéticos são apresentados em termos da representação espectral discreta através da série complexa dupla de Fourier, e para reduzir o número de termos nas séries, é proposto utilizar-se a identidade de Euler. Primeiramente, são apresentados resultados paramétricos de campo na estrutura do sensor e, em seguida, é feita a análise espectral do campo potencial magnético, onde se verificou o surgimento dos polos SPP e SW no domínio espectral. Para validação do método, foram realizadas análises do caso limite, em que as partículas se encontram distantes umas das outras, sendo comparadas com trabalhos publicados. Por fim, são apresentados resultados e discussões sobre a convergência das séries na PGF cossenoidal. Os resultados apresentam boa concordância, demonstrando que o método teórico da PGF 3D é eficiente, e pode ser utilizado como ferramenta no projeto deste dispositivo de sensoriamento.

Palavras-chave: Sensor SPCE, Plasmônica, Função de Green, Representação Espectral.

Abstract

In the present work, a theoretical study on a plasmon resonance sensor in the Surface Plasmon Coupled Emission (SPCE) configuration is presented. Coupled to the sensor structure is a microfluidic channel containing suspended target particles (gold nanoparticles functionalized to attract fluorescent molecules), which when excited and immobilized upon the sensor structure can be efficiently modeled as a planar array of induced dipoles. The electromagnetic modeling of the device was performed by the magnetic potential, defined by means of the Periodic Green Function (PGF) 3D. The electromagnetic fields are presented in terms of the discrete spectral representation by the complex double Fourier series, and to reduce the number of terms in the series, it is proposed the use the Euler identity. Firstly, parametric field results are presented in the sensor structure, and then the spectral analysis of the magnetic potential field is performed, where the SPP and SW poles appear in the spectral domain. For the validation of the method, the limit case was analyzed, in which the particles are distant from each other, and compared with published works. Finally, results and discussions about the convergence of series in the cosine PGF are presented. The results show good agreement, showing that the theoretical method of PGF 3D is efficient, and can be used as a tool in the design of this sensing device.

Keywords: SPCE Sensor, Plasmonic, Green function, Spectral Representation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fotografia: Sensor plasmônico na configuração SPCE: (a) Visão frontal, (b) Resposta óptica. Adaptado de [19].	24
Figura 2 – Amostra concentrada de AuNps: (a) Esferas, (b) Core-Shell. Adaptado de [20].	24
Figura 3 – Placa metálica no espaço livre.	28
Figura 4 – Interação entre campo uniforme e placa metálica.	32
Figura 5 – SPP em uma interface metal/dielétrico.	33
Figura 6 – Excitação de ondas SPP por casamento de fase: Configuração Kretschmann.	35
Figura 7 – Excitação de ondas SPP por fonte próxima.	35
Figura 8 – Ilustração funcional do sensor SPCE acoplado a canal microfluídico. . .	37
Figura 9 – Emissão da radiação acoplada na forma de um cone de luz.	37
Figura 10 – Equivalente entre partícula alvo excitada e dipolo hertziano.	39
Figura 11 – Arranjo periódico de fontes $\mathbf{J}$ sobre a folha de ouro.	39
Figura 12 – Definição da célula de análise.	40
Figura 13 – Volume de análise (Célula unitária da estrutura periódica).	42
Figura 14 – Particularização do modelo eletromagnético equivalente do sensor SPCE. .	60
Figura 15 – Formas fechadas da função de Green correlacionadas ao problemas de Sturm-Liouville na estrutura do Sensor SPCE. (a) $g_{1mn}(z)$, (b) $\partial/\partial z\{g_{1mn}(z)\}$, (c) $g_{2mn}(z)$, (d) $\partial/\partial z\{g_{2mn}(z)\}$, (e) $g_{3mn}(z)$, (f) $\partial/\partial z\{g_{3mn}(z)\}$, $m=0,10$ e $n=0$	63
Figura 16 – PGF 3D, três células no plano xy em: (a) $z = z' = 4\mu m$ no meio 1, (b) $z = z' = 0\mu m$ no meio 2, (c) $z = z' = -4\mu m$ no meio 3.	64
Figura 17 – Componentes dos campos Elétrico e Magnético em uma única célula de dimensões $\Delta_c = 10nm$. Condição de Continuidade dos campos tangenciais: (a) $20 \log(Re\{E_x\})$, (b) $20 \log(Re\{E_y\})$, (c) $20 \log(Re\{H_x\})$, (d) $20 \log(Re\{H_y\})$. Condição de Continuidade dos fluxos normais: (e) $20 \log(Re\{E_1z; E_2z; E_3z\})$ (f) $20 \log(Re\{\varepsilon_1 E_1z; \varepsilon_2 E_2z; \varepsilon_3 E_3z\})$, (g) $20 \log(Re\{H_1z; H_2z; H_3z\})$ (h) $20 \log(Re\{\mu_1 H_1z; \mu_2 H_2z; \mu_3 H_3z\})$. . .	65
Figura 18 – Campo potencial magnético para $\theta' = 0^\circ$. A_x : (a) $\delta_g = 10nm$, (b) $\delta_g = 50nm$, (c) $\delta_g = 100nm$; A_z (d) $\delta_g = 10nm$, (e) $\delta_g = 50nm$, (f) $\delta_g = 100nm$	66
Figura 19 – Campo potencial magnético para $\theta' = 45^\circ$. A_x : (a) $\delta_g = 10nm$, (b) $\delta_g = 50nm$, (c) $\delta_g = 100nm$; A_z (d) $\delta_g = 10nm$, (e) $\delta_g = 50nm$, (f) $\delta_g = 100nm$	67

Figura 20 – Campo potencial magnético para $\theta' = 90^\circ$. A_x : (a) $\delta_g = 10nm$, (b) $\delta_g = 50nm$, (c) $\delta_g = 100nm$; A_z (d) $\delta_g = 10nm$, (e) $\delta_g = 50nm$, (f) $\delta_g = 100nm$	67
Figura 21 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para $\theta' = 0^\circ$. $20 \log Re\{ E_x \} $: (a) $h = 20nm$, (b) $h = 100nm$, (c) $h = 200nm$, $20 \log Re\{ E_z \} $: (d) $h = 20nm$, (e) $h = 100nm$, (f) $h = 200nm$, $20 \log Re\{ H_y \} $: (g) $h = 20nm$, (h) $h = 100nm$, (i) $h = 200nm$	69
Figura 22 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para $\theta' = 45^\circ$. $20 \log Re\{ E_x \} $: (a) $h = 20nm$, (b) $h = 100nm$, (c) $h = 200nm$, $20 \log Re\{ E_z \} $: (d) $h = 20nm$, (e) $h = 100nm$, (f) $h = 200nm$, $20 \log Re\{ H_y \} $: (g) $h = 20nm$, (h) $h = 100nm$, (i) $h = 200nm$	70
Figura 23 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para $\theta' = 90^\circ$. $20 \log Re\{ E_x \} $: (a) $h = 20nm$, (b) $h = 100nm$, (c) $h = 200nm$, $20 \log Re\{ E_z \} $: (d) $h = 20nm$, (e) $h = 100nm$, (f) $h = 200nm$, $20 \log Re\{ H_y \} $: (g) $h = 20nm$, (h) $h = 100nm$, (i) $h = 200nm$	70
Figura 24 – Distribuição espectral no plano mn para $ \tilde{R}_{12}^{TM} $: (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 10\mu m$, (c) $\Delta_c = 100\mu m$; e $ \tilde{T}_{23}^{TM} $: (d) $\Delta_c = 1\mu m$, (e) $\Delta_c = 10\mu m$, (f) $\Delta_c = 100\mu m$. Normalizados em 1.	73
Figura 25 – Distribuição espectral de $ \tilde{R}_{12}^{TM} $ e $ \tilde{T}_{23}^{TM} $ em m , com $n = 0$ para : (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 10\mu m$, (c) $\Delta_c = 100\mu m$. Normalizados em 1. . .	74
Figura 26 – Coeficientes espectrais $A_{zz}^{mn}(z)$ em $z = z_u$, com $u = 1, 2, 3$ e $n = 0$, para: (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 10\mu m$, (c) $\Delta_c = 100\mu m$	74
Figura 27 – Coeficiente generalizado de transmissão na interface ouro/prisma em função do ângulo de acoplamento θ	76
Figura 28 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no plano xz , em $y = 0$, por espectro. Célula com $\Delta_c = 1\mu m$, para $n = 0$, componente $Re\{E_z\}$: (a) $m = 1$, (b) $m = m_{SPP} = 2$, (c) $m = m_{SW} = 3$; $Re\{H_y\}$: (d) $m = 1$, (e) $m = m_{SPP} = 2$, (f) $m = m_{SW} = 3$	77
Figura 29 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no plano xz , em $y = 0$, por espectro. Célula com $\Delta_c = 10\mu m$, para $n = 0$, componente $Re\{E_z\}$: (a) $m = 7$, (b) $m = m_{SPP} = 17$, (c) $m = m_{SW} = 27$; $Re\{H_y\}$: (d) $m = 7$, (e) $m = m_{SPP} = 17$, (f) $m = m_{SW} = 27$	77
Figura 30 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no plano xz , em $y = 0$, por espectro. $\Delta_c = 100\mu m$, para $n = 0$, componente $Re\{E_z\}$: (a) $m = 40$, (b) $m = m_{SPP} = 165$, (c) $m = m_{SW} = 267$; $Re\{H_y\}$: (d) $m = 40$, (e) $m = m_{SPP} = 165$, (f) $m = m_{SW} = 267$	78
Figura 31 – Campos Elétrico e Magnético no plano xz , em $y = 0$, para $\Delta_c = 1\mu m$: (a) $20 \log Re\{E_z\} $, (b) $20 \log Re\{H_y\} $; $\Delta_c = 10\mu m$: (c) $20 \log Re\{E_z\} $, (d) $20 \log Re\{H_y\} $; $\Delta_c = 100\mu m$: (e) $20 \log Re\{E_z\} $, (f) $20 \log Re\{H_y\} $	79

Figura 32 – Campos Elétrico e Magnético no plano xz , em $y = 0$, para $\Delta_c = 1\mu m$: (a) $20 \log Re\{E_z\} $, (b) $20 \log Re\{H_y\} $; $\Delta_c = 10\mu m$: (c) $20 \log Re\{E_z\} $, (d) $20 \log Re\{H_y\} $; $\Delta_c = 100\mu m$: (e) $20 \log Re\{E_z\} $, (f) $20 \log Re\{H_y\} $.	80
Figura 33 – Componente E_z , Módulo (dB) ($20 \log Re\{E_z\} $): (a) PGF3D, (b) [16]; Fase (rad) ($angle\{E_z\}$): (c) PGF3D, (d) [16].	81
Figura 34 – Convergência de $A_z(0, 0, z)$ para: (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 1\mu m$ e (c) $\Delta_c = 1\mu m$	82

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores utilizados no modelo de Lorentz-Drude.	32
---	----

Lista de abreviaturas e siglas

PGF	Função de Green Periódica (Periodic Green Function);
SLP	Problema de Sturm-Liouville (Sturm-Liouville Problem);
SPR	Ressonância Plasmônica de Superfície (<i>Surface Plasmon Resonance</i>);
LSPR	Ressonância Plasmônica de Superfície Localizada (<i>Localized Surface Plasmon Resonance</i>);
SPP	Plasmon Polariton de Superfície (<i>Surface Plasmon Polariton</i>);
SW	Onda de Superfície (<i>Surface Wave</i>);
SPCE	Emissão Acoplada de Plasma de Superfície (<i>Surface Plasmon Coupled Emission</i>);
KR	Kretschmann;
AuNps	Nanopartículas de Ouro (Gold Nanoparticles);
CFGF	Forma Fechada da Função de Green (Closed-Form Green Function);
DCIM	Método das Imagens Complexas Discretas (Discrete Complex Images Method);
TE_z	Modo Transversal elétrico na direção z;
TM_z	Modo Transversal magnético na direção z;

Lista de símbolos

D	Densidade de Fluxo Elétrico (C/m^2);
B	Densidade de Fluxo Magnético (Wb/m^2);
E	Intensidade de Campo Elétrico (V/m);
H	Intensidade de Campo Magnético (A/m);
A	Intensidade de Campo Potencial Magnético (Wb/m);
J	Densidade de Corrente Elétrica (A/m^2);
M	Densidade de Corrente Magnética (V/m^2);
P	Polarização Elétrica (C/m^2);
K	Vetor de Onda ($1/m$);
r	Vetor Posição (m);
J_{int}	Densidade de Corrente Elétrica Interna (Corrente Interna ao Material)(A/m^2);
J_{ext}	Densidade de Corrente Elétrica Externa (Fonte Externa de Corrente)(A/m^2);
J(θ', ϕ')	Fonte de Corrente Dipolar Orientada pelos Ângulos Paramétricos de Azimute e Elevação (A/m^2);
n	Vetor Normal à Interface;
ϕ_m	Potencial Magnético Escalar (V);
ρ_e	Densidade Volumétrica de Cargas Elétricas (C/m^3);
ρ_m	Densidade Volumétrica de Cargas Magnéticas (Wb/m^3);
$\rho_{e_{int}}$	Densidade Volumétrica de Cargas Elétricas Internas a um Material (Ligadas e Livres)(C/m^3);
$\rho_{e_{ext}}$	Densidade Volumétrica de Cargas Elétricas Externas a um Material (Fonte Externa)(C/m^3);
j	Unidade Imaginária, $j = \sqrt{-1}$;
ρ_e	Densidade Volumétrica de Cargas Elétricas (C/m^3);
ω	Frequência Angular ($rads/s$);

σ	Condutividade Elétrica Complexa (S);
μ_0	Permeabilidade Magnética do Espaço Livre (H/m);
ε_0	Permissividade Elétrica do Espaço Livre (F/m);
ε_i	Constante Dielétrica do meio i ;
μ_i	Constante Diamagnética do meio i ;
η_i	Impedância Intrínseca do meio i (Ω);
k_i	Constante de Propagação no meio i ($1/m$);
k_x	Constante de Propagação na direção x ($1/m$);
k_y	Constante de Propagação na direção y ($1/m$);
k_z	Constante de Propagação na direção z ($1/m$);
k_ρ	Constante de Propagação na direção ρ ($1/m$);
k_0	Constante de Propagação no Espaço Livre ($1/m$);
k_{SPP}	Constante de Propagação Plasmônica ($1/m$);
λ	Comprimento de onda (m);
τ	Tempo de Relaxação (s);
γ, Γ	Frequência de Amortecimento ($1/s$);
m_e	Massa do Elétron (μg);
$p(t)$	Momento do Elétron;
e	Carga Elétron ($e = 1,60217662 \times 10^{-9}C$);
n	Densidade de Elétrons por Unidade de Volume ($1/m^3$);
ω_p	Frequência de Plasma (rad/s);
θ_{SPP}	Ângulo de Acoplamento Plasmônico ($^\circ$);
r_c	Raio do Núcleo Metálico da Core-Shell AuNps (m);
δ_s	Espessura da Camada Dielétrica do Core-Shell AuNp(m);
ε_c	Permissividade Elétrica do Núcleo Metálico da Core-Shell AuNp (F/m);
ε_s	Permissividade Elétrica da Camada Dielétrica da Core-Shell AuNp (F/m);

ε_m	Permissividade Elétrica do meio em que está inserida a Core-Shell AuNp (F/m);
$\varepsilon_{ouro}(\omega)$	Função Dielétrica do Ouro (Modelo de Lorentz-Drude);
ε_{prisma}	Constante Dielétrica do Prisma (Prisma Óptico BK7));
F	Fluorescência;
θ'	Ângulo Paramétrico de Elevação - Orientação dos Dipolos ($^\circ$);
ϕ'	Ângulo Paramétrico de Azimute - Orientação dos Dipolos ($^\circ$);
$f_v(\theta', \phi')$	Função Paramétrica da Componente Genérica v da Fonte de Corrente - Orientação dos Dipolos;
p_{eff}	Momento de Dipolo Efetivo da Nanopartícula Alvo (<i>Debye</i>);
p_{cs}	Momento de Dipolo Efetivo da Core-Shell AuNp(<i>Debye</i>);
α_{eff}	Polarizabilidade Efetiva da Core-Shell AuNp(Cm^2/V);
α_{ff}	Polarizabilidade Efetiva do Fluoróforo(Cm^2/V);
R_e^{ff}	Reação de Campo à Excitação dos Fluoróforos;
$I_0 l$	Momento de Corrente(Am);
$\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	Função Delta de Dirac;
l	Comprimento do Dipolo (m);
h	Localização do Dipolo em Relação a Origem - Eixo z (m);
d_1	Localização da Interface Amostra/Ouro d_1 em Relação a Origem - eixo z (m);
d_2	Localização da Interface Ouro/Prisma d_2 em Relação a Origem - eixo z (m);
δ_g	Espessura da Camada de Ouro (m);
$2a$	Período da Célula de análise em x (m);
$2b$	Período da Célula de análise em y (m);
Δ_c	Período da Célula de análise em xy (m);
c	Velocidade da luz no vácuo;

$R_{i,i+1}^{TE}$	Coeficiente de Reflexão de Fresnel entre a Camada i e i+1 do modo TE;
$R_{i,i+1}^{TM}$	Coeficiente de Reflexão de Fresnel entre a Camada i e i+1 do modo TM;
$T_{i,i+1}^{TE}$	Coeficiente de Transmissão entre a Camada i e i+1 do modo TE;
$T_{i,i+1}^{TM}$	Coeficiente de Transmissão entre a Camada i e i+1 do modo TE;
$\tilde{R}^{TM}$	Coeficiente Generalizado de Reflexão do modo TM;
$\tilde{R}^{TE}$	Coeficiente Generalizado de Reflexão do modo TE;
$\tilde{T}^{TM}$	Coeficiente Generalizado de Transmissão do modo TM;
$\tilde{T}^{TE}$	Coeficiente Generalizado de Transmissão do modo TE;
S^{TEM}	Coeficiente de Acoplamento dos modos TE e TM;
$\zeta_{i,i+1}$	Parâmetros de Acoplamento nas Interfaces entre os meios i e i+1;
Λ_{vidj}^{mn}	Termos Integrais que Acoplam a Componente Genérica v no meio i , na Interface d_j ;
Λ_{xidj}^{mn}	Termos Integrais que Acoplam a Componente x no meio i , na Interface d_j ;
Λ_{yidj}^{mn}	Termos Integrais que Acoplam a Componente y no meio i , na Interface d_j ;
Λ_{zidj}^{mn}	Termos Integrais que Acoplam a Componente z no meio i , na Interface d_j ;
ϵ_{mn}	Numero de Neumann Duplo;
$g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	Função de Green no meio i; ;
g_i^{mn}	Coeficiente (ou Componente) Espectral da Função de Green no meio i;
A_{vi}	Componente Genérica v do Campo Potencial no meio i;
A_{xi}	Componente x do Campo Potencial no meio i;
A_{yi}	Componente y do Campo Potencial no meio i;
A_{zi}	Componente z do Campo Potencial no meio i;
A_{vi}^{mn}	Coeficiente ou (Componente) espectral da componente genérica v do campo potencial no meio i;

A_{xi}^{mn}	Coeficiente ou (Componente) espectral da componente x do Campo Potencial no meio i ;
A_{yi}^{mn}	Coeficiente ou (Componente) espectral da componente y do Campo Potencial no meio i ;
A_{zi}^{mn}	Coeficiente ou (Componente) espectral da componente z do Campo Potencial no meio i ;
S_{ij}	Superfície j no meio i , do volume de análise;
$\mathcal{J}$	Conjunção;
m_{SPP}	Polo SPP no Domínio Espectral Discreto m ;
m_{SW}	Polo SW no Domínio Espectral Discreto m ;
x, y, z	Variáveis Espaciais;
m, n	Variáveis Espectrais (Indicies dos Somatórios Duplos na Representação Espectral);

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
2	FENÔMENO PLASMÔNICO NOS METAIS	27
2.1	Função Dielétrica Através do Modelo de Drude	29
2.2	Oscilação Natural e Plásmons de Volume	32
2.3	Plásmons de Superfície em Interface Metal/Dielétrico	33
3	SENSOR PLASMÔNICO NA CONFIGURAÇÃO SPCE	36
3.1	Descrição Funcional do Sensor SPCE	36
3.2	Modelo Eletromagnético do Sensor SPCE	38
4	MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN PERIÓDICA 3D	44
4.1	Problemas de Sturm-Liouville nas Três Camadas	44
4.2	Função de Green Periódica Através da Transformada da Série Complexa de Fourier	48
4.3	Campo Potencial Magnético Através do Método PGF 3D	50
4.4	Forma Alternativa da Representação Espectral da PGF	58
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
5.1	Verificação das Condições de Contorno e Fronteira no Modelo Eletromagnético Equivalente.	61
5.2	Análises Paramétricas de Campos na Estrutura do Sensor SPCE	66
5.3	Análise Espectral	71
5.4	Convergência e Validação do Método	80
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
6.1	Conclusões	83
6.2	Trabalhos Futuros	84
6.3	Trabalhos Publicados Durante o Mestrado	85
	Referências	86

APÊNDICES	89
ANEXOS	130
ANEXO A – ROTINAS DE CÁLCULO: CAMPO POTENCIAL MAGNÉTICO	131
ANEXO B – ROTINA DE CÁLCULO: CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO	136
ANEXO C – ROTINA DE CÁLCULO: COEFICIENTES GENERALIZADOS E COMPONENTES ESPECTRAIS	147

1 Introdução

O desenvolvimento de novos dispositivos ópticos baseados em nanoestruturas metálicas tem sido de grande interesse nas últimas duas décadas. Isso se deve à recente capacidade de miniaturização destes dispositivos e, principalmente, pela aplicabilidade das interessantes propriedades eletromagnéticas que os metais apresentam no regime óptico. O estudo destas propriedades tem possibilitado versáteis aplicações em sensoriamento, eletrônica, óptica e eletromagnetismo [1][2][3][4]. A interação entre metais e ondas eletromagnéticas, no espectro óptico, produz um comportamento oscilatório do gás de elétrons livres, em fase oposta ao campo incidente, resultando em uma onda de superfície com característica evanescente na interface metal/dielétrico, conhecida como onda plasmônica de superfície. Este fenômeno está diretamente relacionado à parte real negativa da função dielétrica do metal submetido a altas frequências (regime óptico) [5]. Em vista destas propriedades, tem se tornado frequente a aplicação de metais nobres em estruturas multicamadas no desenvolvimento de novos dispositivos baseados em ressonância de superfícies plasmônicas (SPR), e produção de nanopartículas metálicas (NPM) para aplicações utilizando ressonância de superfície plasmônica localizada (LSPR) [6][7][8].

Recentemente, pesquisas têm mostrado que, sobre condições particulares, através de ondas SPP (Surface Plasmon Polaritons), estruturas metálicas têm demonstrado muitos efeitos de intensificação e inibição de campos eletromagnéticos próximos, quando sintonizados para determinada aplicação [8]. Estes efeitos possibilitam o controle e a modulação da luz, desempenhando assim, papel principal em dispositivos fotônicos SPR, para aplicações em fotodetecção, biosensoriamento, espectroscopia e detecção de nanopoluentes metálicos produzidos por resíduos em processos de nanofabricação [9][10][11][12][13][14].

Um sensor SPR convencional, baseado na configuração SPCE (Surface Plasmon Coupled Emission), consiste em uma estrutura multicamadas, geralmente uma fina camada de um metal nobre (ouro ou prata) sobre um prisma dielétrico, excitada por uma fonte laser externa. Sobre a estrutura do dispositivo está acoplado um canal microfluídico contendo, entre outros compostos, fluoróforos, substâncias luminescentes que quando excitadas emitem radiação óptica [15][16][17]. O processo de sensoriamento se baseia na resposta óptica do dispositivo, na forma de um cone de luz na região do prisma, em função das propriedades eletromagnéticas da amostra no canal microfluídico (Fig. 1).

A fim de melhorar a sensibilidade destes sensores, o uso de nanopartículas metálicas tem sido relatado em vários estudos [9][11][16]. Na configuração SPCE, tem sido proposto o uso de nanopartículas de ouro (AuNps) funcionalizadas quimicamente para obter afinidade com fluoróforos em suspensão no canal microfluídico. E em seguida, estas AuNps se

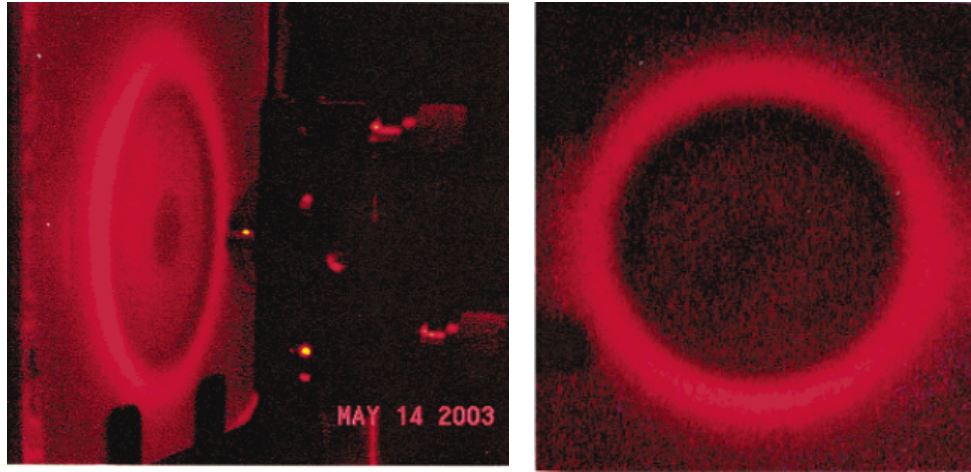


Figura 1 – Fotografia: Sensor plasmônico na configuração SPCE: (a) Visão frontal, (b) Resposta óptica. Adaptado de [19].

acoplam a ligantes químicos na superfície do sensor. A detecção de alta sensibilidade está associada ao aumento no campo próximo pela indução de plasmons localizados na nanopartícula, amplificando a luminescência dos fluoróforos e consequentemente, excitando ondas SPP na superfície metálica do sensor [16][17]. Estas AuNps utilizadas em laboratório geralmente possuem uma camada dielétrica externa (Core-Shell) (Fig. 2). A presença desta camada dielétrica altera a resposta ressonante das AuNps e, por isso, sua presença deve ser considerada nos modelos matemáticos. A resposta óptica destas partículas esféricas foi verificada em [6].

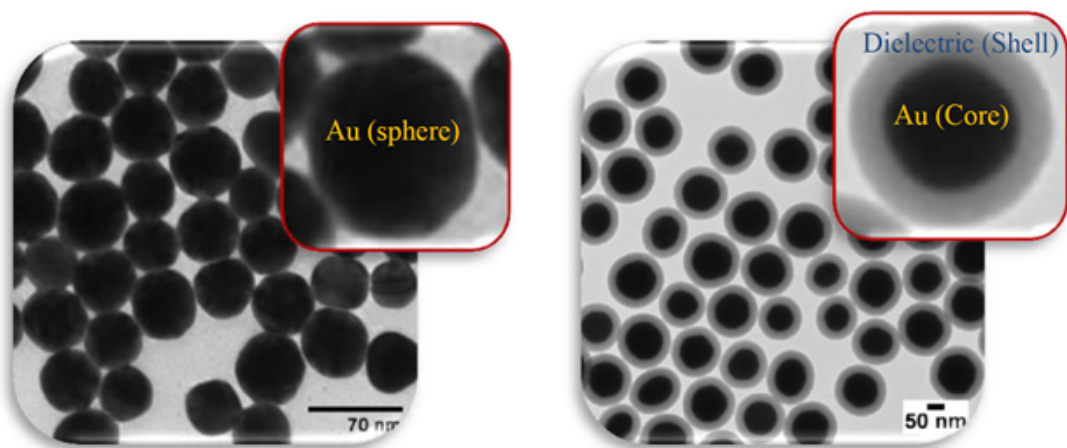


Figura 2 – Amostra concentrada de AuNps: (a) Esferas, (b) Core-Shell. Adaptado de [20].

Nanopartículas com dimensões menores que o comprimento de onda de excitação podem ser equivalentemente modeladas por nanodipolos ou por fontes de corrente elementar. Assim, o efeito do acoplamento óptico de um arranjo de nanopartículas pode ser equivalentemente descrito através da solução eletromagnética de um arranjo de nanodipolos [21][22].

Estudos teóricos sobre o sensor SPCE acoplado a uma amostra excitada por uma fonte externa (suprimida) foram realizados em [16][17]. Neste, foram feitas aproximações analíticas para uma única partícula imobilizada e, a partir disto, foram verificados, entre outros resultados, os campos radiados na estrutura em função da distância entre a amostra e a folha de ouro. Contudo, deve-se considerar a existência da interação eletromagnética de mais de uma partícula excitada pela fonte externa. No entanto, a modelagem da distribuição espacial randômica de AuNps em uma amostra é ainda um grande desafio. Uma forma coerente de aproximar esta distribuição é considerar que a amostra tenha a forma de um arranjo planar periódico de nanopartículas iguais regularmente distribuído sobre a folha de ouro, e então realizar análises teóricas [18].

Com esta justificativa, o objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático analítico para o sensor plasmônico na configuração SPCE, acoplado a um arranjo periódico planar de Core-Shell AuNps funcionalizadas com fluoróforos agregados. Para isso, foi utilizado o método da Função da Green Periódica (PGF), através da transformada espectral de Fourier, aplicado ao potencial magnético vetorial. No entanto, a representação do campo potencial em termos da série complexa dupla de Fourier pode demandar um grande número de iterações nas simulações. Por este motivo, propomos utilizar a identidade Euler para reduzir o custo computacional consumido no cálculo das séries. A partir do modelo eletromagnético obtido, foram feitas análises paramétricas de campo elétrico e magnético para diferentes concentrações de nanopartículas no arranjo, além de variar a espessura da camada de ouro sobre o prisma dielétrico e a altura relativa do arranjo sobre a superfície do sensor. Primeiramente, as simulações foram geradas para os dipolos equivalentes orientados coletivamente em três direções distintas. Em seguida, determinada a orientação de maior contribuição na excitação de ondas SPP, foram realizadas análises espectrais da representação do campo potencial magnético na estrutura do sensor, e dos coeficientes generalizados de transmissão e reflexão no modo TM. A partir destas, foi verificada a existência dos polos SPP e SW (Surface Waves) no domínio espectral mn (índices mn nas séries duplas), além da influência destes polos no domínio espacial.

A validação do método foi realizada através de comparações qualitativas com resultados do caso limite em [16], e análise da convergência relativa das séries na representação espectral do campo potencial magnético.

Metodologicamente, o trabalho é iniciado apresentando a abordagem clássica da interação entre ondas eletromagnéticas e metais, em regime de alta frequência, demonstrando os principais conceitos sobre a excitação de ondas plasmônicas. Em seguida, é apresentada a descrição funcional do sensor SPCE, juntamente com o modelo eletromagnético equivalente utilizado. Subsequentemente, é apresentada a etapa principal deste trabalho, a obtenção do campo potencial magnético através do método da PGF 3D aplicado ao modelo eletromagnético equivalente do sensor, e finalmente são apresentados os resultados

e discussões.

Para a fundamentação matemática, destacam-se as principais bibliografias consultadas na elaboração deste trabalho: *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory* por D. G. Dudley [30], *Mathematical Methods For Physicists* por G. B. Arfken [29] e *Antenna Theory: Analysis and Design* por C. A. Balanis [28]. Para o embasamento teórico a respeito dos efeitos plasmônicos e parâmetros de dispersão, foram utilizados *Plasmonics: Fundamentals and Applications* por S. A. Maier [5], e *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* por C. F. Bohren e D. R. Huffman [22]. Os coeficientes de reflexão e transmissão, tanto generalizados quanto os de Fresnel, foram modelados segundo a estrutura definida em *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* por W. C. Chew [31]. As principais demonstrações matemáticas são descritas nos Apêndices A-E. O trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos:

O capítulo 1 é introdutório, e nele são apresentados a justificativa, o objetivo geral, e a estruturação do trabalho.

O capítulo 2 resume a teoria dos fenômenos importantes que formam a base para o estudo de plasmons de superfície. Neste, a partir das equações de Maxwell, descrevemos a resposta eletromagnética nos metais em uma determinada faixa de frequência, introduzindo a excitação fundamental da condução do gás de elétrons em um metal, o plasmon. Por fim, realizamos uma breve revisão sobre as condições de excitação de ondas SPP em interfaces metal/dielétrico.

No capítulo 3, apresentamos o dispositivo de estudo neste trabalho, o sensor plasmônico na configuração SPCE. Neste capítulo é realizada a descrição funcional do sensor, e do modelo eletromagnético equivalente utilizado na análise.

No capítulo 4, descreveremos o método da Função de Green Periódica 3D, aplicada ao problema do potencial magnético, que define os campos no modelo eletromagnético equivalente do sensor SPCE, acoplado ao arranjo planar periódico de nanopartículas. Por fim, propomos utilizar a identidade de Euler para reduzir o custo computacional consumido no cálculo das séries.

O capítulo 5 apresenta os principais resultados numéricos.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais à vista dos resultados obtidos. Ademais se encontram as referências bibliográficas utilizadas para a elaboração do trabalho, os apêndices e os códigos-fonte dos principais programas utilizados nas simulações, nos anexos A-C.

2 Fenômeno Plasmônico nos Metais

A interação entre ondas eletromagnéticas e estruturas metálicas pode ser descrita através da teoria clássica e bem consolidada das equações de Maxwell. Mesmo estruturas na ordem de alguns nanômetros podem ser descritas sem a necessidade do uso de mecânica quântica, desde que a alta densidade de portadores livres na estrutura resulte em gaps de energia, comparados a excitações térmicas de energia $k_B T$ em temperatura ambiente [5][6].

Em baixa frequência (abaixo do espectro óptico), já é conhecido que os metais são altamente reflexivos, e assim, sendo empregados na construção de guias de ondas e ressonadores eletromagnéticos na faixa de micro-ondas. Neste regime, a aproximação de bom condutor (ou condutor perfeito) pode ser utilizada desde que a mínima fração de campo que penetra o metal seja negligenciada. No entanto, à medida que a frequência aumenta há uma considerável transmissão de campo na estrutura metálica, até que no regime de infravermelho e espectro visível, a taxa de penetração se torna tão significativa que não pode ser ignorada, levando a um aumento da energia dissipada na estrutura. A partir deste regime, os metais passam a possuir características dielétricas, permitindo a propagação de ondas eletromagnéticas em sua estrutura [5][6].

Para metais nobres, tais como ouro e prata, transições entre as bandas eletrônicas levam a uma forte absorção no regime óptico. Estas propriedades dispersivas podem ser descritas por meio da função dielétrica complexa $\varepsilon(\omega)$ equivalente, que descreve os fenômenos eletromagnéticos nos metais em alta frequência [5]. A definição desta função segue diretamente das equações de Maxwell (2.1) – (2.4) [23]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (2.4)$$

Estas equações formam a base do eletromagnetismo em termos dos campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$, densidades de corrente $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$, e cargas ρ_e e ρ_m . Na ausência de fontes magnéticas equivalentes, considera-se $\mathbf{M} = 0$ e $\rho_m = 0$. Por conveniência, separamos as densidades elétricas de corrente e carga em densidades externa (fontes externas $\mathbf{J}_{ext}, \rho_{ext}$), e interna (cargas livres e ligadas $\mathbf{J}_{int}, \rho_{int}$) a um determinado meio, de forma que $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{int}$

e $\rho_e = \rho_{ext} + \rho_{int}$ (Fig. 3). Considerando a estrutura não magnética ($\mu_r = 1$), linear, e isotrópica, os efeitos eletromagnéticos na estrutura podem ser descritos pelos efeitos da polarização elétrica $\mathbf{P}$, que relaciona o campo elétrico $\mathbf{E}$ e a densidade de fluxo elétrico $\mathbf{D}$ por meio de $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.

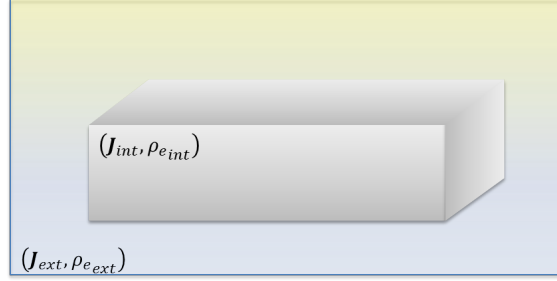


Figura 3 – Placa metálica no espaço livre.

A polarização elétrica $\mathbf{P}$ descreve o momento elétrico dipolar por unidade de volume dentro do material, causado pelo alinhamento dos dipolos microscópicos com o campo elétrico incidente. Esta polarização está relacionada à densidade interna de cargas por $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{int}$, de forma que, pela lei da conservação de cargas ($\nabla \cdot \mathbf{J}_{int} = -d\rho_{int}/dt$), podemos escrever:

$$\mathbf{J}_{int} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}] \quad (2.5)$$

Definindo a relação constitutiva (2.6) e a lei de Ohm (2.7).

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J}_{int} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

onde ε e σ são a permissividade e a condutividade elétrica complexa do material, respectivamente. Mostraremos agora que há uma íntima relação entre ε e σ , e que o fenômeno eletromagnético nos metais pode ser de fato descrito usando estas quantidades.

Já que a resposta óptica nos metais é claramente dependente da frequência (possivelmente do vetor de onda também), devemos considerar a não-localidade no tempo e espaço pelas relações lineares generalizadas:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int dt' d\mathbf{r}' \varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (2.8)$$

$$\mathbf{J}_{int}(\mathbf{r}, t) = \int dt' d\mathbf{r}' \sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (2.9)$$

De forma que os parâmetros construtivos descrevem a resposta impulsiva da relação linear. Implicitamente, assumimos que as relações (2.8) e (2.9) consideram que todas as

escalas de comprimento no material são muito maiores que qualquer descontinuidade no material, ou seja, a resposta impulsiva não depende necessariamente das coordenadas espaço-temporais, mas apenas de suas diferenças. Através da transformada de Fourier ($\int dt d\mathbf{r} e^{j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})}$) podemos eliminar as variáveis $\mathbf{r}$ e t através da decomposição dos campos em ondas planas individuais de vetor de onda $\mathbf{K}$ e frequência angular ω [5]. Levando assim, (2.8) e (2.9) ao domínio de Fourier:

$$\mathbf{D}(\mathbf{K}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{K}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{K}, \omega) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{J}_{int}(\mathbf{K}, \omega) = \sigma(\mathbf{K}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{K}, \omega) \quad (2.11)$$

Igualando as equações (2.11) e (2.5), reconhecendo que (d/dt) no domínio de Fourier equivale a $j\omega$, e substituindo o resultado em (2.10), obtém-se a desejada relação entre a permissividade relativa e a condutividade complexa [5], definida como a função dielétrica (2.12).

$$\varepsilon(\mathbf{K}, \omega) = 1 - j \frac{\sigma(\mathbf{K}, \omega)}{\omega \varepsilon_0} \quad (2.12)$$

Note que (2.12) é função das variáveis espectrais do espaço e tempo $(\mathbf{K}, \omega)$. Na interação de ondas ópticas e metais, a função dielétrica pode ser simplificada considerando apenas a resposta espacial local $\mathbf{K} = 0$, desde que o comprimento de onda λ da interação no metal seja suficientemente maior que qualquer característica dimensional na estrutura, resultando na função dielétrica $\varepsilon(\omega)$.

2.1 Função Dielétrica Através do Modelo de Drude

Historicamente, o primeiro modelo bem sucedido capaz de explicar algumas das propriedades eletromagnéticas que os metais apresentam, foi desenvolvido por Paul Drude (1863-1906) [24]. O modelo proposto considera as propriedades térmicas do gás de elétrons livres para explicar eficientemente as condutividades DC, AC e o efeito Hall [5][24]. Apesar do surgimento de outros fenômenos ópticos na interação entre metais e luz, de forma geral, apenas a avaliação das propriedades elétricas providencia informações satisfatórias para a modelagem e desenvolvimento de dispositivos fotônicos utilizando estruturas metálicas. Por este motivo, a utilização de (2.12) e do modelo de Drude tem sido proposto na descrição das propriedades eletromagnéticas de metais no regime óptico, sendo versatilmente utilizados na plasmônica [5][24].

Para descrever as propriedades eletromagnéticas dos metais, Drude formulou algumas hipóteses sobre o comportamento dos elétrons em um metal. Já era conhecido que os elétrons movem-se facilmente nos metais, limitados por uma resistência intrínseca da matéria. Por simplicidade, ele considerou que o movimento dos elétrons ocorria coletivamente

na forma de um gás ideal, sendo limitado pelo efeito das colisões entre os elétrons e os íons positivos fixos. Neste processo são desconsideradas as colisões elétron-elétron, sendo consideradas apenas as colisões elétron-íons, que ocorrem com uma frequência de $\gamma = 1/\tau$, sendo τ o tempo de relaxação do gás de elétrons livres [5].

Supondo uma força externa $f(t)$ aplicada aos elétrons com momento $p(t)$ em uma estrutura metálica genérica, e de posse das hipóteses de Drude, podemos descrever, de forma aproximada, o comportamento eletrônico segundo a equação do movimento (2.13).

$$\left[\frac{d}{dt} + \gamma \right] p(t) = f(t) \quad (2.13)$$

O momento dos elétrons pode ser expresso pela relação $p(t) = m_e d\mathbf{r}/dt$, onde m_e é a massa efetiva dos elétrons. Assumindo que o comprimento de penetração da radiação no metal é muito maior que o caminho médio livre dos elétrons, a força externa aplicada aos elétrons é descrita pela força de Lorentz, que no regime óptico é aproximadamente $f(t) = Re\{-eE_0 e^{j\omega t}\}$, onde $e = 1,6 \times 10^{-19} C$ é a carga do elétron [5][24]. Assim, fazendo as devidas substituições em (2.13), podemos expressar a equação diferencial do movimento harmônico do gás de elétrons:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} \right] m_e \mathbf{r}(t) = Re\{-eE_0 e^{j\omega t}\} \quad (2.14)$$

Aplicando a transformada temporal de Fourier em ambos os lados de (2.14), obtêm-se no domínio da frequência:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m_e(\omega^2 - j\gamma\omega)} \mathbf{E} \quad (2.15)$$

A contribuição para a polarização por parte do deslocamento dos elétrons é $\mathbf{P} = -ner$, sendo n a densidade de elétrons no gás por unidade de volume. Lembrando que $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, podemos escrever:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega} \right) \mathbf{E} \quad (2.16)$$

onde $\omega_p^2 = (ne^2)/(\varepsilon_0 m_e)$ é a frequência de plasma do gás e elétrons livres. Comparando (2.16) com a relação constitutiva (2.6), por analogia, verifica-se que a função dielétrica do gás de elétrons livres possui a forma:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega} \quad (2.17)$$

O modelo definido em (2.17) descreve o comportamento dos elétrons de condução, no entanto, os elétrons ligados ao íon positivo também contribuem de forma significativa na permissividade do material. Este efeito pode ser levado em consideração pela adição de

um termo $\omega_k^2 \mathbf{r}$ ao lado direito de (2.14), representando de forma aproximada o potencial de confinamento de elétrons no nível atômico k [24], de forma que:

$$\mathbf{r}_k = \frac{e/m_{e_k}}{\omega^2 - \omega_k^2 - j\gamma_k\omega} \mathbf{E} \quad (2.18)$$

Novamente, a contribuição para a polarização considerando os N níveis atômicos pode ser escrita por $\mathbf{P}_{bond} = -n_k e \mathbf{r}_k$. Por analogia, a contribuição dos elétrons ligados pode ser escrita na forma (2.19).

$$\varepsilon_{bond}(\omega) = 1 - \sum_{k=1}^N \frac{\omega_{p_k}^2}{\omega^2 - \omega_k^2 - j\gamma_k\omega} \quad (2.19)$$

onde $\omega_{p_k}^2 = (n_k e^2)/(\varepsilon_0 m_{e_k})$ é a frequência de plasma para cada nível atômico k , determinada experimentalmente. Valores típicos de ω_k podem surgir para os elétrons em vários níveis atômicos, abrangendo desde o espectro visível ao raio-X. Para interações no espectro visível, os termos associados aos elétrons ligados podem ser simplificados por $\varepsilon_{bond} = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_{p_k}^2 / \omega_0^2$, sendo ω_0 a frequência limite no espectro visível [5][24]. Por fim, definindo $\varepsilon_\infty = 1 + \varepsilon_{bond}$, podemos escrever (2.20) como a função dielétrica do metal pelo modelo clássico de Drude.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega} \quad (2.20)$$

A relação entre (2.12) e (2.17) é demonstrada no apêndice A.1, e demonstra a razão pela qual o modelo de Drude é conhecido como resposta óptica dos metais.

Com o devido ajuste dos valores de ω_p , γ e ε_∞ , o modelo de Drude pode descrever eficientemente o comportamento dos metais em frequências ópticas. Em geral, é muito comum utilizar metais nobres em aplicações na plasmônica, tais como ouro e prata, pois estes apresentam baixa absorção no regime óptico. No entanto, o modelo descrito em (2.20) é limitado à região de energia de intrabanda, divergindo na região de interbanda. Isso ocorre, pois a energia dos fótons incidentes é suficiente para excitar transições interbanda ($\hbar\omega > E_{interbanda}$), acarretando em uma considerável absorção no metal [24]. Para alguns metais nobres estes efeitos começam a surgir para energias acima de 1eV , correspondente ao comprimento de onda $\lambda = 1\mu\text{m}$, desta forma, estas interações precisam ser contabilizadas no modelo eletromagnético descrito pela função dielétrica [16].

Para que a função dielétrica possa descrever analiticamente transições interbanda exige-se uma descrição quântica do problema [24]. Contudo, uma boa forma de aproximar o efeito destas transições de interbanda, é através da adição dos termos do oscilador de Lorentz na forma (2.21) ao resultado dos elétrons livres (2.20) [5].

$$\frac{A_i}{\omega^2 - \omega_i^2 - j\gamma_i\omega} \quad (2.21)$$

onde A_i, ω_i e γ_i são determinados experimentalmente.

No espectro óptico, a permissividade relativa do ouro pode ser descrita pelo modelo de Lorentz-Drude (2.22), com excelente precisão [4][6].

$$\varepsilon_{ouro}(\omega) = \varepsilon_{\infty} - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 - j\Gamma\omega} - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - j\gamma\omega} \quad (2.22)$$

onde as frequências de plasma e de amortecimento para os termos de intrabanda e interbanda são discriminados na Tab. 1.

Tabela 1 – Valores utilizados no modelo de Lorentz-Drude [4][6].

Parâmetros	Valor	Unidade	Termo
ε_{∞}	7		Elétrons Livres
ω_{p1}	$13,8 \times 10^{15}$	rad/s	Intrabanda
ω_{p2}	45×10^{14}	rad/s	Interbanda
Γ	$1,075 \times 10^{14}$	s ⁻¹	Intrabanda
γ	9×10^{14}	s ⁻¹	Interbanda

2.2 Oscilação Natural e Plásmons de Volume

Considere a aplicação de um campo elétrico uniforme a uma placa metálica. Devido às flutuações na densidade de cargas n , há a formação de duas densidades superficiais de carga $\sigma = \pm neu$, provenientes da separação dos íons e dos elétrons na placa. Esta separação de cargas estabelece um campo elétrico uniforme de amplitude $E = neu/\varepsilon_0$, oposto ao campo de incidência (Fig.4).

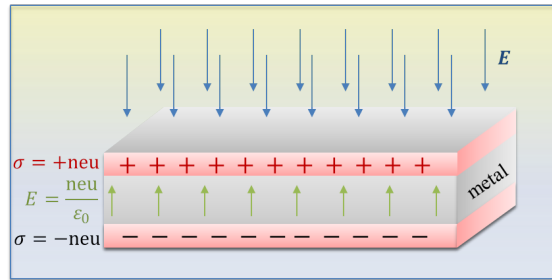


Figura 4 – Interação entre campo uniforme e placa metálica.

A dinâmica de oscilação destas cargas é descrita por:

$$(nm_e) \frac{d^2u}{dt^2} = -(ne)E \rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \omega_p^2 u = 0 \quad (2.23)$$

Analisando-se (2.23), verifica-se que a frequência de plasma ω_p pode ser reconhecida como a oscilação natural coletiva dos elétrons na placa, e, o quanta destas oscilações é denominado plásmon de volume [5][24]. Desta descrição, é notável que as cargas movem-se paralelamente ao campo aplicado, de forma que as oscilações induzidas são longitudinais. Devido os criteriosos requisitos necessários para excitação de plásmons de volume, suas aplicações não são de grande interesse na fotônica.

2.3 Plásmons de Superfície em Interface Metal/Dielétrico

Plásmons de superfície, ou plasmon-polaritons de superfície (Surface Plasmon Polariton, ou SPP), são excitações eletromagnéticas que surgem do acoplamento entre ondas eletromagnéticas e as oscilações do gás de elétrons livres na interface metal/dielétrico. Estas oscilações possuem característica evanescente e se propagam confinadas na direção perpendicular. O fenômeno de ondas SPP pode ser explicado através das soluções da equação de Maxwell aplicadas ao problema de um substrato dielétrico sobre um meio metálico (estrutura de duas camadas) (Fig. 5).

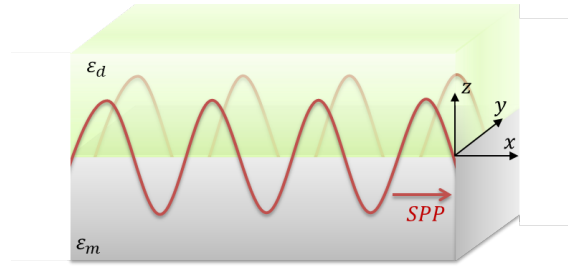


Figura 5 – SPP em uma interface metal/dielétrico.

Supondo a existência de uma onda eletromagnética na interface propagando-se na direção x e invariante em y . A equação diferencial homogênea de Helmholtz que descreve o comportamento da onda em cada lado da interface é dada por:

$$[\nabla_{xz}^2 + k_0^2 \varepsilon_{d,m}] \mathbf{H}(x, z) = 0 \quad (2.24)$$

onde $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ é a constante de propagação no espaço livre. Suponha que a variação de H na direção x ocorra de forma harmônica no espaço através de $H(x, z) = H(z) e^{\pm j k_x x}$, sendo k_x a constante de propagação na direção x , de forma que:

$$[\nabla_z^2 + k_0^2 \varepsilon_{d,m} - k_x^2] \mathbf{H}(k_x, z) = 0 \quad (2.25)$$

Devido à simetria das equações de Maxwell, existe também uma equação similar a (2.25) para o campo elétrico E . Matematicamente, E e H são autofunções do problema de autovalor (2.25), no entanto, fisicamente, estes campos devem satisfazer tanto as equações de Maxwell quanto as condições de contorno na interface metal/dielétrico. Considerando a variação harmônica temporal ($d/dt \rightarrow j\omega$), espacial em x ($x > 0, \partial/\partial x \rightarrow -jk_x$ para $\text{Im}\{k_x\} < 0$), e a independência com y , podemos montar dois conjuntos de equações através da expansão das leis de Faraday (2.3) e Ampere (2.4):

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu_0 H_x = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + jk_x H_z - j\omega\varepsilon_{d,m} E_y = 0, \quad -jk_x E_y + j\omega\mu_0 H_z = 0 \quad (2.26)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} - j\omega\varepsilon_{d,m} E_x = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + jk_x E_z + j\omega\mu_0 H_y = 0, \quad -jk_x H_y - j\omega\varepsilon_{d,m} E_z = 0 \quad (2.27)$$

As equações (2.26) e (2.27) sugerem a existência de dois possíveis modos de propagação, o modo TE_z e o modo TM_z , formados respectivamente, pelos conjuntos de equações. Devido à característica longitudinal dos campos gerados pelas flutuações de cargas na interface, o modo que se adequa a excitação plasmônica é o TM_z . Em (2.27), os campos E_x e E_z estão acoplados a H_y , dessa forma, podemos reduzir o problema à equação:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{z_{d,m}}^2 \right] H_y(k_x, z) = 0 \quad (2.28)$$

onde $k_{z_{d,m}}^2 = k_0^2 \varepsilon_{d,m} - k_x^2$ é a constante de propagação na direção z no dielétrico (k_{z_d}) e no metal (k_{z_m}). A solução geral para (2.28) nos dois meios é:

$$H_y(k_x, z) = \begin{cases} A_d e^{-jk_{z_d} z}, & z \geq 0 \\ A_m e^{+jk_{z_m} z}, & z < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

A continuidade de H_y e E_x na interface $z = 0$ requer que sejam atendidas as condições $A_d = A_m$ e $[k_{z_d}/\varepsilon_d + k_{z_m}/\varepsilon_m] = 0$, ou seja:

$$\frac{k_{z_d}}{k_{z_m}} = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \quad (2.30)$$

Pela definição da constante de propagação, sabe-se que $Re\{k_{z_{d,m}}\} > 0$. Como em dielétricos $Re\{\varepsilon_d\} > 0$, para que a onda seja confinada na interface, é necessário que $Re\{\varepsilon_m\} < 0$, em outras palavras, a onda SPP existe apenas em interfaces de materiais com permissividades com sinais opostos. Estes modos confinados ocorrem apenas em interfaces metal/dielétrico, pois em frequências ópticas a permissividade dos metais apresenta parte real negativa, eficientemente descrita pelo modelo de Drude. Por fim, elevando ao quadrado ambos os lados em (2.30) chegamos ao resultado principal desta seção, a relação de dispersão que define a constante de propagação plasmônica k_{SPP} :

$$k_{SPP} = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}} \quad (2.31)$$

Através de (2.31), podemos expressar $k_{z_{m,d}}$ em função das permissividades dos materiais:

$$k_{z_{d,m}} = k_0 \frac{|\varepsilon_{d,m}|}{\sqrt{\varepsilon_m + \varepsilon_d}} \quad (2.32)$$

Por ultimo, as constantes de propagação devem atender as condições de radiação e atenuação de modo que $Re\{k_{z_{d,m}}\} > 0$ e $Im\{k_{z_{d,m}}\} < 0$. Analisando-se (2.31) e (2.32), verifica-se que as condições são atendidas se $\varepsilon_m + \varepsilon_d < 0$ e $\varepsilon_m \varepsilon_d < 0$. Em resumo, para a excitação de plásmos de superfície em interfaces metal/dielétrico, é necessário que a parte real da permissividade do metal seja negativa, e em módulo, maior que a permissividade do dielétrico [5][24].

Ondas SPP que se propagam na interface entre metais e dielétricos são essencialmente oscilações eletromagnéticas bidimensionais [5]. O confinamento destas ondas é possível desde que k_{SPP} seja maior que a constante de propagação $k_0\sqrt{\epsilon_d}$ no dielétrico, levando a um decaimento evanescente em ambos os lados da interface. No entanto, a análise da característica de dispersão SPP mostra que a excitação por feixes de luz tridimensionais não é possível, a menos que técnicas de casamento de fase sejam empregadas [5]. Destas técnicas, destaca-se a deposição de um filme metálico sobre um prisma dielétrico. A utilização do prisma dielétrico altera a constante de propagação do feixe de luz que incide na interface e reflete simetricamente de volta ao prisma. Quando o ângulo de incidência ultrapassa o ângulo crítico, em uma determinada inclinação há a reflexão mínima de forma que um campo evanescente no metal excita ondas SPP na interface metal/dielétrico (Fig.6). Esta estrutura é conhecida como configuração Kretschmann [16][24].

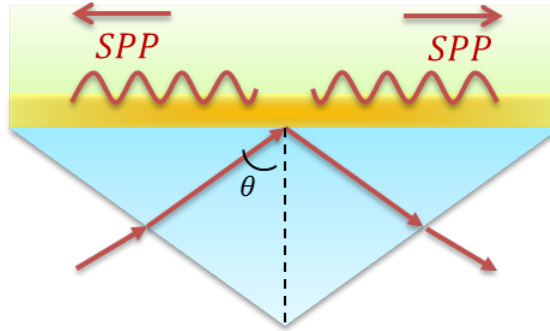


Figura 6 – Excitação de ondas SPP por casamento de fase: Configuração Kretschmann.

Quando a fonte de excitação é muito pequena, como no caso de nanopartículas excitadas, o casamento de fase pode não ser um problema a ser considerado [24]. A utilização de nanopartículas para excitar ondas SPP em um filme de ouro (Fig. 7) é possível devido à natureza do campo espalhado por estas nanopartículas quando interagem com a luz, gerando assim conjuntos de vetores de onda (wave vector) que incluem subconjuntos de k_{SPP} . Em outras palavras, a nanopartícula não acopla preferencialmente um modo de excitação SPP, mas sim toda uma faixa contínua de modos que excitam o modo SPP, no espectro visível [25]. Os modos SPP que não podem ser excitados diretamente por feixes de luz são denominados plásmons escuros (dark plasmons). Estes modos não se acoplam ao campo distante e são excitados apenas por radiação de campo próximo [26].

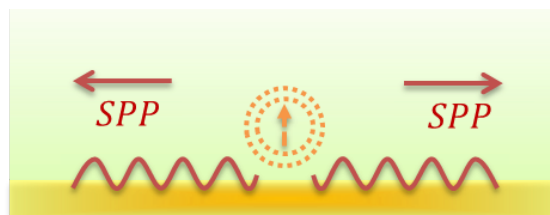


Figura 7 – Excitação de ondas SPP por fonte próxima.

3 Sensor Plasmônico na Configuração SPCE

Dos dispositivos fotônicos baseados no fenômeno plasmônico, destacam-se os sensores SPR. Recentemente, pesquisas têm mostrado que, sobre condições particulares, ondas SPP têm sido eficientemente utilizadas na intensificação (ou inibição) de campos eletromagnéticos próximos, quando sintonizados para determinada aplicação de sensoriamento [7]. Um sensor SPR convencional baseado na configuração SPCE (Surface Plasmon Coupled Emission) é constituído de uma estrutura multicamadas acoplada a um canal microfluídico contendo biomoléculas e fluoróforos (moléculas fluorescentes), imobilizados sobre a estrutura do sensor, excitado por uma fonte laser externa [17]. O processo de sensoriamento se baseia na resposta óptica do dispositivo, proveniente das moléculas fluorescentes, em função das propriedades eletromagnéticas da amostra. A fim de melhorar a sensibilidade destes sensores, o uso de nanopartículas metálicas tem sido relatado atualmente [16][17].

Nanopartículas de ouro (AuNps) que são excitadas por fontes ópticas têm seus campos próximos eficientemente amplificados pelo fenômeno de LSPR [5][6]. Fluoróforos que interagem com o campo próximo destas AuNps têm suas fluorescências amplificadas, melhorando assim a resposta óptica do sensor.

Nanopartículas metálicas (NPM) utilizadas em laboratório e aplicações na fotônica geralmente possuem uma fina camada dielétrica de cobertura (Core-Shell). A presença desta camada dielétrica tem como principal finalidade proteção mecânica e proporcionar estabilidade química. Em análises utilizando esta NPM, a existência desta camada dielétrica deve ser considerada, pois sua presença altera a curva de ressonância em relação ao caso sem camada [6].

3.1 Descrição Funcional do Sensor SPCE

O princípio de funcionamento do sensor SPCE se baseia na interação do campo re-irradiado pela partícula alvo (nanopartícula metálica agregada com fluoróforo) imobilizada sobre a estrutura do sensor, excitando modos plasmônicos que acoplam ondas propagantes polarizadas na saída do sensor [15][16][17]. Como partícula alvo, propõe-se utilizar Core-Shell AuNps funcionalizadas quimicamente para atrair fluoróforos, intensificando a resposta óptica do sensor. A ilustração funcional do sensor SPCE é demonstrada na Fig. 8.

A estrutura física do sensor se resume a uma camada de ouro depositada sobre um prisma dielétrico, e acoplado à superfície metálica, está um canal microfluídico onde estão presentes em suspensão multi-compostos, fluoróforos e Core-Shell AuNps. Sobre a camada de ouro há a presença de uma substância ligante com afinidade ouro/partícula

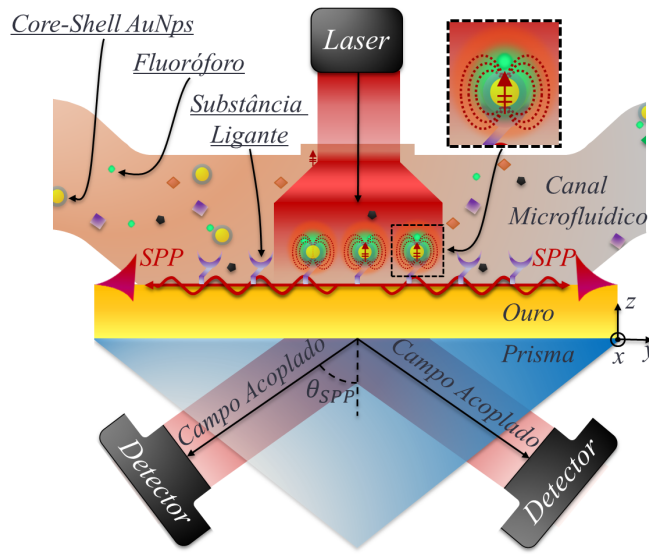


Figura 8 – Ilustração funcional do sensor SPCE acoplado a canal microfluídico.

alvo, e desta forma, as AuNps agregadas com fluoróforos são imobilizadas na superfície do sensor. Esta substância, considerada eletricamente inerte, é utilizada como espaçador químico e age separando as partículas imobilizadas e a camada de ouro.

A excitação, realizada por um laser óptico monocromático com comprimento de onda $\lambda = 632,8nm$, ocorre diretamente aplicada à amostra sobre a folha de ouro, excitando as partículas alvo, que conseqüentemente re-irradiam campos que excitam ondas SPP na interface. A componente paralela do padrão de radiação da partícula excitada se acopla ao modo SPP. Dessa forma, parte da onda plasmônica é transmitida através da folha de ouro, acoplando na região do prisma uma onda transversal magnética em função da onda SPP. A formação desta onda TM proporciona um diagrama de campo distante em forma de um cone de luz na região do prisma (θ_{SPP} é o ângulo plasmônico característico)(Fig.9).

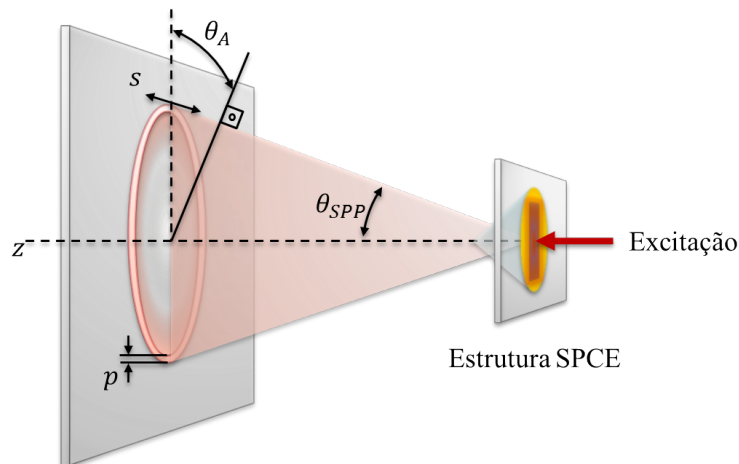


Figura 9 – Emissão da radiação acoplada na forma de um cone de luz.

Apesar da radiação espalhada pela partícula alvo não ser polarizada, o campo que se acopla na região do prisma é altamente polarizado em TM. Esta característica pode ser entendida pelo processo contrário, que ocorre na excitação de ondas SPP através de ondas planas, exclusivamente polarizadas em TM, como na configuração Kretschmann. Por este motivo, o sensor SPCE funciona como um filtro natural para a polarização TM.

Dependendo das características eletromagnéticas da amostra formada pelos multi-compostos, em outras palavras, das características dielétricas do ambiente formado pelo meio e multi-compostos, no canal microfluídico, a intensidade, geometria e ângulo θ_{SPP} do cone de luz, mensurados por um detector, são alterados, definindo assim a saída do sensor (Fig. 8).

3.2 Modelo Eletromagnético do Sensor SPCE

A interação eletromagnética entre a fonte laser e as nanopartículas metálicas pode ser modelada através do espalhamento quase estático de Rayleigh, desde que o comprimento de onda da fonte é muito maior que as dimensões da partícula [6], assim, a radiação espalhada pela NPM é descrita pelo momento dipolar fundamental $p_{cs} = \alpha_{cs}E_0$, caracterizado pela polarizabilidade (3.1).

$$\alpha_{eff} = 4\pi\epsilon_m(r_c + \delta_s)^3 \left[\frac{f(\epsilon_c - \epsilon_m)(2\epsilon_s + \epsilon_m) + (2\epsilon_s + \epsilon_c)(\epsilon_s - \epsilon_m)}{f(\epsilon_c - \epsilon_m)(2\epsilon_s - 2\epsilon_m) + (2\epsilon_s + \epsilon_c)(\epsilon_s + 2\epsilon_m)} \right] \quad (3.1)$$

sendo $f = r_c^3/(r_c + \delta_s)^3$ a fração do volume total da partícula ocupada pelo núcleo, r_c e δ_s o raio do núcleo e a espessura da capa da nanopartícula, respectivamente, ϵ_c , ϵ_s e ϵ_m as permissividades do núcleo, capa e meio onde estão inseridas as NPM. De maneira análoga, a emissão espectral da fluorescência para o comprimento de onda da luz de excitação pode ser modelada através da polarizabilidade do Fluoróforo α_{ff} [27].

Devido as dimensões das Core-Shell AuNps e dos fluoróforos, podemos caracterizar a partícula alvo excitada por um momento de dipolo efetivo:

$$p_{eff} = p_{cs} + \alpha_{ff}R_e^{ff} \quad (3.2)$$

onde R_e^{ff} é a reação de campo à excitação do fluoróforo, que é função da intensidade de excitação e da Fluorescência F . A partir de (3.2), as partículas-alvo excitadas pela fonte externa (suprimida) são modeladas como fontes de corrente elétrica concentrada J (dipolos hertzianos), com momentos de corrente $I_0l = j\omega p_{eff}$ na direção $\hat{a}_r$ orientada pelos ângulos de elevação θ' e azimuth ϕ' :

$$\mathbf{J}(\theta', \phi') = j\omega p_{eff}\delta(x)\delta(y)\delta(z - h)\hat{a}_r(\theta', \phi') \quad (3.3)$$

A equivalência é demonstrada na Fig. 10.

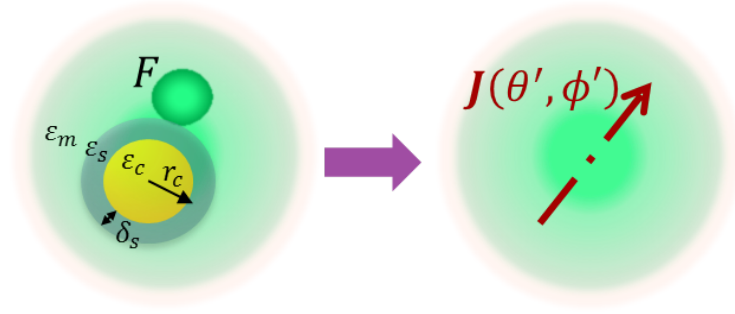


Figura 10 – Equivalente entre partícula alvo excitada e dipolo hertziano.

No canal microfluídico as nanopartículas alvo e multi-compostos estão distribuídas aleatoriamente no espaço. Devido à baixa concentração de nanopartículas-alvo na amostra, e ao fato destas serem imobilizadas próxima a superfície de ouro, podemos aproximar a amostra como um arranjo planar de dipolos hertzianos uniformemente distribuído sobre a substância ligante, igualmente afastados da superfície do sensor, com permissividade efetiva ε_1 e permeabilidade μ_1 (Fig. 11).

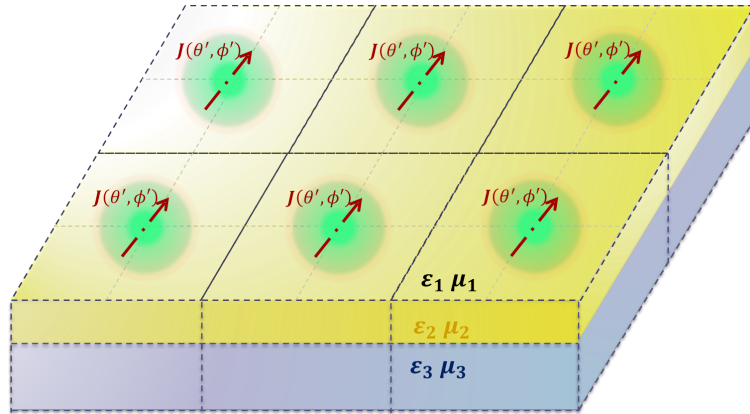


Figura 11 – Arranjo periódico de fontes $\mathbf{J}$ sobre a folha de ouro.

Como modelo eletromagnético equivalente, é proposto modelar o sensor como uma estrutura de três camadas, sendo o meio 1 (ε_1, μ_1) definido como a região semi-infinita sobre a folha de ouro em $z \geq d_1$, onde está distribuído o arranjo planar, o meio 2 (ε_2, μ_2) a região interna a folha de ouro em $d_1 > z \geq d_2$, e o meio 3 (ε_3, μ_3) a região semi-infinita abaixo da folha de ouro em $z < d_2$. Devido à modelagem do arranjo como planar e periódico, podemos realizar a análise de campo definindo uma célula particular com largura $2a$ em x , $2b$ em y , e com a fonte de corrente localizada em uma altura h , pelo espaçador químico, do centro do sistema de coordenadas. A descrição da célula de análise é feita na Fig. 12.

Os campos elétrico e magnético na estrutura foram determinados através do método do potencial magnético. Da teoria clássica, é conhecido que a densidade de fluxo magnético possui características solenoidais, e por isso pode ser determinada através do rotacional de

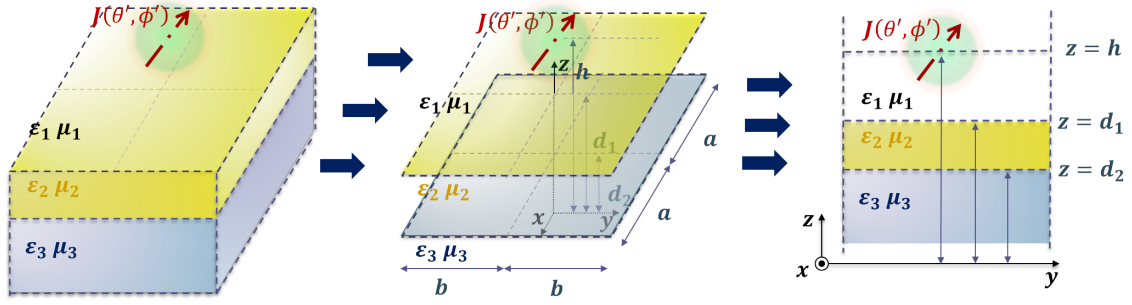


Figura 12 – Definição da célula de análise.

um campo arbitrário $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.4)$$

Na ausência de fontes magnéticas, a lei de Faraday (2.3), na forma fasorial, torna-se:

$$\nabla \times [\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}] = 0 \quad (3.5)$$

Através de identidades vetoriais [28], pode se verificar que o rotacional de um campo conservativo é nulo, e qualquer campo com tais características pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar $-\phi_m$, de forma que $\nabla \times [-\nabla\phi_m] = 0$. Comparando este ultimo resultado com (3.5), obtém-se:

$$\mathbf{E} = -[\nabla\phi_m + j\omega\mathbf{A}] \quad (3.6)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados de (3.4), utilizando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, e comparando com a lei de Ampere, na forma fasorial, obtém-se a relação $\mu(\mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Ao substituir (3.6) nesta ultima relação, chegamos a:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu \varepsilon \phi_m) \quad (3.7)$$

Até este ponto definimos apenas o rotacional de $\mathbf{A}$, dessa forma, para simplificar (3.7), e desde que $\mathbf{A}$ é arbitrário, podemos escolher o divergente de $\mathbf{A}$ como $\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu \varepsilon \phi_m$, e assim, definindo o potencial magnético escalar em (3.8).

$$\phi_m = -\frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.8)$$

Tau escolha é possível já que apenas o rotacional de $\mathbf{A}$ foi definido em (3.4), e pelo fato do divergente ser uma operação totalmente independente. A equação definida em (3.8) é conhecida como condição de Lorentz. Definindo a constante de propagação (ou número de onda) k , onde $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$, e, substituindo a condição de Lorentz em (3.7), obtém-se:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3.9)$$

(3.9) é conhecida como equação vetorial não-homogênea de Helmholtz, e $\mathbf{A}$ é definido como potencial magnético vetorial, possuindo propriedades divergentes e solenoidais [28]. Uma vez conhecido $\mathbf{A}$, podemos determinar os campos elétrico e magnético através de (3.10) e (3.11).

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega\mathbf{A} \quad (3.11)$$

Para que os campos elétrico e magnético atendam as condições de contorno na estrutura do sensor, precisamos determinar as condições de contorno para o campo potencial magnético vetorial. Devido à periodicidade bidimensional definida na célula de análise na Fig. 12, o campo eletromagnético deve ser periódico em relação ao eixo x , no intervalo $-a \leq x \leq a$, e no eixo y , no intervalo $-b \leq y \leq b$, matematicamente, torna-se necessário assegurar que, ou (3.12), ou (3.13) sejam atendidos.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}|_{x=-a} &= \mathbf{H}|_{x=a}, & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}|_{x=-a} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}|_{x=a} \\ \mathbf{H}|_{y=-b} &= \mathbf{H}|_{y=b}, & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}|_{y=-b} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}|_{y=b} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|_{x=-a} &= \mathbf{E}|_{x=a}, & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}|_{x=-a} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}|_{x=a} \\ \mathbf{E}|_{y=-b} &= \mathbf{E}|_{y=b}, & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y}|_{y=-b} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y}|_{y=b} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para que o campo eletromagnético atenda as condições de contorno periódicas, o campo potencial magnético também deve obedecer condições periódicas do tipo (3.14).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}|_{x=-a} &= \mathbf{A}|_{x=a}, & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}|_{x=-a} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}|_{x=a} \\ \mathbf{A}|_{y=-b} &= \mathbf{A}|_{y=b}, & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}|_{y=-b} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}|_{y=b} \end{aligned} \quad (3.14)$$

A demonstração das condições periódicas do potencial magnético em (3.14) é deixada no Apêndice B.1. Para atender a condição física de campo eletromagnético nulo no infinito, por exemplo, em uma dada direção no eixo z , torna-se necessário aplicar condições de limite. Contudo, é fácil ver que esta condição física é atendida quando são impostas condições de limite ao campo potencial magnético:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \mathbf{A} = 0 \quad (3.15)$$

Na presença de dois meios separados por uma interface em $z = d_u$, os campos elétrico e magnético nos meios $[u+1]$ e $[u]$ devem atender as condições de fronteira dos campos tangenciais em (3.16) e (3.17), e fluxos normais em (3.18) e (3.19).

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_{u+1} - \mathbf{H}_u)|_{z=d_u} = 0 \quad (3.16)$$

As condições definidas em (3.14) e (3.15) sugerem que o campo potencial nas superfícies $S_{v1}, S_{v2}, S_{v3}, S_{v4}$ deve atender (3.22) no meio $[v] = 1, 2, 3$, e em regiões distantes da fonte, como nas superfícies S_{15} e S_{36} o campo potencial deve atender as condições de limite (3.23).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{[v]}(a, y, z)|_{S_{[v]1}} &= \mathbf{A}_{[v]}(-a, y, z)|_{S_{[v]2}}, & \frac{\partial \mathbf{A}_{[v]}}{\partial x}(a, y, z)|_{S_{[v]1}} &= \frac{\partial \mathbf{A}_{[v]}}{\partial x}(-a, y, z)|_{S_{[v]2}} \\ \mathbf{A}_{[v]}(x, b, z)|_{S_{[v]3}} &= \mathbf{A}_{[v]}(x, -b, z)|_{S_{[v]4}}, & \frac{\partial \mathbf{A}_{[v]}}{\partial y}(x, b, z)|_{S_{[v]3}} &= \frac{\partial \mathbf{A}_{[v]}}{\partial y}(x, -b, z)|_{S_{[v]4}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{A}_1(x, y, z)|_{S_{15}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{A}_3(x, y, z)|_{S_{36}} = 0 \quad (3.23)$$

Nas interfaces $z = d_{[u]}$, onde $[u] = 1, 2$, formadas pelas superfícies $S_{[u]6}$ e $S_{[u+1]5}$, o campo potencial deve obedecer (3.24) e (3.25), para que sejam atendidas às condições de fronteira (3.16)-(3.19).

$$\begin{aligned} A_{x_{[u+1]}, y_{[u+1]}}|_{z=d_{[u]}} &= A_{x_{[u]}, y_{[u]}}|_{z=d_{[u]}} \\ \frac{1}{\mu_{[u+1]}} \frac{\partial}{\partial z} [A_{x_{[u+1]}, y_{[u+1]}}]|_{z=d_{[u]}} &= \frac{1}{\mu_{[u]}} \frac{\partial}{\partial z} [A_{x_{[u]}, y_{[u]}}]|_{z=d_{[u]}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{[u+1]}} A_{z_{[u+1]}}|_{z=d_{[u]}} &= \frac{1}{\mu_{[u]}} A_{z_{[u]}}|_{z=d_{[u]}} \\ \frac{1}{\mu_{[u+1]}\varepsilon_{[u+1]}} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]})|_{z=d_{[u]}} &= \frac{1}{\mu_{[u]}\varepsilon_{[u]}} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]})|_{z=d_{[u]}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

A equação vetorial de Helmholtz produz três equações diferenciais escalares para as componentes A_x, A_y e A_z , com a mesma estrutura. Por isso, podemos resolver a equação diferencial escalar para uma componente genérica v e posteriormente estender os resultados para as componentes x, y e z .

Escrevendo (3.3) em termos de funções paramétricas $f(\theta', \phi')$ e dos vetores unitários do sistema de coordenadas retangular:

$$\mathbf{J}(\theta', \phi') = j\omega p_{eff} \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) [f_x(\theta', \phi') \hat{a}_x + f_y(\theta', \phi') \hat{a}_y + f_z(\theta', \phi') \hat{a}_z] \quad (3.26)$$

onde $f_x(\theta', \phi') = \cos \phi' \sin \theta'$, $f_y(\theta', \phi') = \sin \phi' \sin \theta'$ e $f_z(\theta', \phi') = \cos \theta'$. Podemos escrever a componente genérica v da fonte de corrente J na forma:

$$J_v(\theta', \phi') = j\omega p_{eff} \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) f_v(\theta', \phi') \quad (3.27)$$

As componentes do campo potencial magnético foram determinadas através do método da Função de Green Periódica 3D, via transformada da série complexa de Fourier nas variáveis x e y , e forma fechada da função de Green em z . O método da PGF 3D é descrito no próximo capítulo.

4 Método da Função de Green Periódica 3D

Neste capítulo descreveremos o método da Função de Green Periódica 3D, aplicada ao problema do potencial magnético, que define os campos elétrico e magnético no modelo eletromagnético equivalente do sensor SPCE.

Como foi explicado no final da seção 3.2, a equação vetorial de Helmholtz produz três equações diferenciais escalares com a mesma estrutura e condições de contorno, com exceção das condições de fronteira nas interfaces, dito isso, podemos determinar a solução através de uma componente genérica A_v , e posteriormente estendermos o resultado para as componentes A_x , A_y e A_z onde aplicaremos as condições de fronteira nas interfaces entre os meios.

4.1 Problemas de Sturm-Liouville nas Três Camadas

Para uma componente genérica A_{v1} do campo potencial magnético no meio 1, a equação diferencial (3.20) assume a forma:

$$-(\nabla^2 + k_1^2) A_{v1} = \mu_1 J_v \quad (4.1)$$

com condições de contorno homogêneas periódicas em xy , e mistas em z .

$$\begin{aligned} A_{v1}(a, y, z)|_{S_{11}} &= A_{v1}(-a, y, z)|_{S_{12}}, & \frac{\partial A_{v1}}{\partial x}(a, y, z)|_{S_{11}} &= \frac{\partial A_{v1}}{\partial x}(-a, y, z)|_{S_{12}} \\ A_{v1}(x, b, z)|_{S_{13}} &= A_{v1}(x, -b, z)|_{S_{14}}, & \frac{\partial A_{v1}}{\partial y}(x, b, z)|_{S_{13}} &= \frac{\partial A_{v1}}{\partial y}(x, -b, z)|_{S_{14}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} A_{v1}(x, y, z)|_{S_{15}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow d_1} \frac{\partial}{\partial z} A_{v1}(x, y, z)|_{S_{16}} \neq 0 \quad (4.3)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano em coordenadas cartesianas, definido em (4.4).

$$-\nabla^2 = -\nabla_x^2 - \nabla_y^2 - \nabla_z^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.4)$$

O operador laplaciano possui a estrutura do operador diferencial de segunda ordem aplicado às três coordenadas, e, na forma do operador de Sturm-Liouville, pode ser escrito como:

$$-\nabla^2 = \left[\frac{1}{w(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] + q(x) \right] + \left[\frac{1}{w(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[p(y) \frac{\partial}{\partial y} \right] + q(y) \right] + \left[\frac{1}{w(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[p(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] + q(z) \right] \quad (4.5)$$

onde $w(x) = w(y) = w(z) = 1$, $p(x) = p(y) = p(z) = 1$ e $q(x) = q(y) = q(z) = 0$. Já que o operador laplaciano pode ser escrito na forma de Sturm-Liouville, podemos caracterizar os problemas que o envolvem como problemas de Sturm-Liouville (SLP) [30].

O produto interno, entre duas funções quaisquer $u(\mathbf{r})$ e $v(\mathbf{r})$, no espaço de Hilbert definido para o operador laplaciano é:

$$\langle u|v \rangle = \iiint_V u(\mathbf{r})v(\mathbf{r})dV \quad (4.6)$$

sendo $\mathbf{r}$ um ponto (x, y, z) qualquer no espaço limitado por V . Para problemas com condições de contorno do tipo Neumann, Dirichlet, periódica e de limite, o operador laplaciano é considerado Auto-Adjunto [30]. Em problemas que envolvem operadores Auto-Adjuntos, a solução sempre pode ser obtida sem a necessidade da função de Green Adjunta [29][30].

Até este ponto, não conhecemos totalmente a condição de contorno na interface d_1 . Contudo, é conhecido que as condições de contorno da função de Green são idênticas às condições de A_{v1} homogêneas. Por este motivo, escolhemos arbitrariamente condições de Neumann homogêneas em $z = d_1$ para a função de Green. Assim, o problema da função de Green auxiliar ao problema de A_{v1} possui a forma:

$$-(\nabla^2 + k_1^2) g_1(x, y, z, x', y', z') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (4.7)$$

com condições de contorno periódicas em xy , e de Neumann e limite em z :

$$\begin{aligned} g_1(a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{11}} &= g_1(-a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{12}}, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{11}} &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(-a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{12}} \\ g_1(x, b, z, \mathbf{r}')|_{S_{13}} &= g_1(x, -b, z, \mathbf{r}')|_{S_{14}}, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, b, z, \mathbf{r}')|_{S_{13}} &= \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, -b, z, \mathbf{r}')|_{S_{14}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g_1(x, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{15}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow d_1} \frac{\partial}{\partial z} g_1(x, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{16}} = 0 \quad (4.9)$$

Aplicando o produto interno, definido em (4.6), entre $-(\nabla^2 + k_1^2) A_{v1}$ e g_1 , e através da identidade de Green [30]:

$$\langle -(\nabla^2 + k_1^2) A_{v1} | g_1 \rangle = \langle A_{v1} | -(\nabla^2 + k_1^2) g_1 \rangle + \mathcal{J}(A_{v1}, g_1)|_{S_1} \quad (4.10)$$

onde $\mathcal{J}(A_{v1}, g_1)|_{S_1}$ é a conjunção entre A_{v1} e g_1 definida em (4.11).

$$\mathcal{J}(A_{v1}, g_1)|_{S_1} = \oint_{S_1} [g_1 \nabla A_{v1} - A_{v1} \nabla g_1] \cdot \hat{n} dS \quad (4.11)$$

Quando o operador é auto-adjunto e o problema possui condições de contorno homogêneas, sendo estas então idênticas as da função de Green, a conjunção é nula. No entanto, a condição de Neumann de A_{v1} na interface $z = d_1$ é não homogênea, e por isso, o termo que possui $A_{v1}(x, y, d_1)$, e não é anulado por nenhuma outra condição, é o único termo não nulo da integral na conjunção.

$$\mathcal{J}(A_{v1}, g_1)|_{S_1} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a g_1(x, y, d_1, \mathbf{r}') \frac{\partial A_{v1}}{\partial z}(x, y, d_1) dx dy \quad (4.12)$$

Dessa forma, substituindo (4.1), (4.7) e (4.12) em (4.10), a solução genérica para A_{v1} é obtida através da identidade (4.13).

$$A_{v1}(\mathbf{r}') = \mu_1 \int_{d_1}^{+\infty} \int_{-b}^b \int_{-a}^a J_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV - \int_{-b}^b \int_{-a}^a g_1(x, y, d_1, \mathbf{r}') \frac{\partial A_{v1}}{\partial z}(x, y, d_1) dx dy \quad (4.13)$$

No meio 2, a solução para a componente genérica A_{v2} do campo potencial magnético é determinada através da solução do SLP homogêneo. Assim, a partir de (3.20):

$$-(\nabla^2 + k_2^2) A_{v2} = 0 \quad (4.14)$$

com condições homogêneas periódicas em xy , e de Neumann em z :

$$\begin{aligned} A_{v2}(a, y, z)|_{S_{21}} &= A_{v2}(-a, y, z)|_{S_{22}}, & \frac{\partial A_{v2}}{\partial x}(a, y, z)|_{S_{21}} &= \frac{\partial A_{v2}}{\partial x}(-a, y, z)|_{S_{22}} \\ A_{v2}(x, b, z)|_{S_{23}} &= A_{v2}(x, -b, z)|_{S_{24}}, & \frac{\partial A_{v2}}{\partial y}(x, b, z)|_{S_{23}} &= \frac{\partial A_{v2}}{\partial y}(x, -b, z)|_{S_{24}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\lim_{z \rightarrow d_1} \frac{\partial}{\partial z} A_{v2}(x, y, z)|_{S_{25}} \neq 0, \quad \lim_{z \rightarrow d_2} \frac{\partial}{\partial z} A_{v2}(x, y, z)|_{S_{26}} \neq 0 \quad (4.16)$$

Novamente, escolhemos arbitrariamente as condições de contorno homogêneas de Neumann nas interfaces d_1 e d_2 para o problema da função de Green auxiliar. Assim:

$$-(\nabla^2 + k_2^2) g_2(x, y, z, x', y', z') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (4.17)$$

com condições de contorno periódicas em xy , e de Neumann e limite em z :

$$\begin{aligned} g_2(a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{21}} &= g_2(-a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{22}}, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{21}} &= \frac{\partial g_2}{\partial x}(-a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{22}} \\ g_2(x, b, z, \mathbf{r}')|_{S_{23}} &= g_2(x, -b, z, \mathbf{r}')|_{S_{24}}, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, b, z, \mathbf{r}')|_{S_{23}} &= \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, -b, z, \mathbf{r}')|_{S_{24}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\lim_{z \rightarrow d_1} g_2(x, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{25}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow d_2} \frac{\partial}{\partial z} g_2(x, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{26}} = 0 \quad (4.19)$$

Aplicando a identidade de Green ao produto interno entre $-(\nabla^2 + k_2^2) A_{v2}$ e g_2 , e então substituindo (4.14) - (4.19), obtemos:

$$A_{v2}(\mathbf{r}') = -\mathcal{J}(A_{v2}, g_2)|_{S_2} \quad (4.20)$$

Na conjunção em (4.20), apenas os termos que possuem $A_{v2}(x, y, d_1)$ ou $A_{v2}(x, y, d_2)$, e não são anulados por outras condições, são não nulos. Desta forma, a solução para a componente genérica A_{v2} é definida através de (4.21).

$$A_{v2}(\mathbf{r}') = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left[g_2(x, y, d_1, \mathbf{r}') \frac{\partial A_{v2}}{\partial z}(x, y, d_1) - g_2(x, y, d_2, \mathbf{r}') \frac{\partial A_{v2}}{\partial z}(x, y, d_2) \right] dx dy \quad (4.21)$$

De maneira semelhante ao SLP no meio 2, a solução para a componente genérica A_{v3} é determinada através da solução do SLP:

$$-(\nabla^2 + k_3^2) A_{v3} = 0 \quad (4.22)$$

com condições de contorno periódicas em xy , e mistas em z .

$$\begin{aligned} A_{v3}(a, y, z)|_{S_{31}} &= A_{v3}(-a, y, z)|_{S_{32}}, & \frac{\partial A_{v3}}{\partial x}(a, y, z)|_{S_{31}} &= \frac{\partial A_{v3}}{\partial x}(-a, y, z)|_{S_{32}} \\ A_{v3}(x, b, z)|_{S_{33}} &= A_{v3}(x, -b, z)|_{S_{34}}, & \frac{\partial A_{v3}}{\partial y}(x, b, z)|_{S_{33}} &= \frac{\partial A_{v3}}{\partial y}(x, -b, z)|_{S_{34}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\lim_{z \rightarrow d_2} \frac{\partial}{\partial z} A_{v3}(x, y, z)|_{S_{35}} \neq 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial z} A_{v3}(x, y, z)|_{S_{36}} = 0 \quad (4.24)$$

Utilizando dos mesmos argumentos anteriores, o problema da função de Green auxiliar no meio 3 toma a forma:

$$-(\nabla^2 + k_3^2) g_3(x, y, z, x', y', z') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (4.25)$$

com condições de contorno periódicas em xy , e de Neumann e limite em z :

$$\begin{aligned} g_3(a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{31}} &= g_3(-a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{32}}, & \frac{\partial g_3}{\partial x}(a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{31}} &= \frac{\partial g_3}{\partial x}(-a, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{32}} \\ g_3(x, b, z, \mathbf{r}')|_{S_{33}} &= g_3(x, -b, z, \mathbf{r}')|_{S_{34}}, & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, b, z, \mathbf{r}')|_{S_{33}} &= \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, -b, z, \mathbf{r}')|_{S_{34}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\lim_{z \rightarrow d_2} g_3(x, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{35}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial z} g_3(x, y, z, \mathbf{r}')|_{S_{36}} = 0 \quad (4.27)$$

Aplicando a identidade de Green ao produto interno entre $-(\nabla^2 + k_3^2) A_{v3}$ e g_3 , e então substituindo (4.22) - (4.27), obtemos:

$$A_{v3}(\mathbf{r}') = -\mathcal{J}(A_{v3}, g_3)|_{S_3} \quad (4.28)$$

Na conjunção em (4.28), apenas os termos que possuem $A_{v3}(x, y, d_2)$, que não são anulados por outras condições, são não nulos. Desta forma, a solução para a componente genérica A_{v3} é definida através de (4.29).

$$A_{v3}(\mathbf{r}') = \int_{-b}^b \int_{-a}^a g_3(x, y, d_2, \mathbf{r}') \frac{\partial A_{v3}}{\partial z}(x, y, d_2) dx dy \quad (4.29)$$

Definidas as relações (4.13), (4.21) e (4.29) através da identidade de Green, o próximo passo se resume em determinar as funções de Green nos três meios.

4.2 Função de Green Periódica Através da Transformada da Série Complexa de Fourier

Os problemas da função de Green nos três meios possuem condições de contorno periódicas em xy , mistas em z e o mesmo operador diferencial. Devido ao fato dos problemas serem tridimensionais e não homogêneos (com fonte), a simples separação de variáveis no domínio espacial pode não ser possível. Desta forma, propõe-se utilizar um par de transformadas espectrais para reduzir o número de variáveis espaciais, resolver o problema unidimensional resultante, e então aplicar a transformada inversa para obter a solução de Green no domínio espacial tridimensional.

O par de transformadas da série complexa de Fourier é ideal para os problemas em questão. Isso, porque ele é definido através da representação espectral da função delta através da função de Green para o problema de Sturm-Liouville do tipo regular (SLP2), com condições de contorno periódicas e operador diferencial de segunda ordem [30]. A demonstração do SLP2 e da definição do par de transformadas através da representação espectral é deixada no Apêndice C.

Para um espaço bidimensional xy definido em $\mathcal{L}(-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b)$, o par de transformadas duplas da série complexa de Fourier é:

$$c_{mn}(z) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a h(x, y, z) \bar{u}_m(x) \bar{u}_n(y) dx dy \quad (4.30)$$

$$h(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) u_m(x) u_n(y) \quad (4.31)$$

onde $u_m(x)$ e $u_n(y)$ são as autofunções, com autovalores próprios k_x e k_y , referentes aos problemas periódicos com operadores diferenciais de segunda ordem nas coordenadas x e y , respectivamente:

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{jk_x x} \quad (4.32)$$

$$u_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{jk_y y} \quad (4.33)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (4.34)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (4.35)$$

O par de transformadas realiza a transição do domínio espacial contínuo xy , para o domínio espectral discreto mn . (4.30) e (4.31) são denominadas transformadas direta e inversa, respectivamente. É importante definir três transformadas através de (4.30):

$$\delta(x - x') \delta(y - y') \leftrightarrow \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.36)$$

$$g(x, y, z, x', y', z') \leftrightarrow g_{mn}(z, x', y', z') \quad (4.37)$$

$$- [\nabla^2 + k^2] g(x, y, z, x', y', z') \leftrightarrow - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - k_x^2 - k_y^2 \right] g_{mn}(z, x', y', z') \quad (4.38)$$

A transformada em (4.38) é bem característica, e surge sempre na forma do quadrado dos autovalores próprios, quando aplicamos a devida transformada ao problema de onde resultou a função de Green utilizada na representação espectral da função delta [30].

Aplicando a transformada direta aos problemas da função de Green em (4.7), (4.17) e (4.25), através das relações em (4.36) – (4.38), os problemas tridimensionais passam a ser unidimensionais em z , no domínio espectral mn . No meio 1, o problema da função de Green resultante possui condições de contorno de limite e Neumann, sendo caracterizado como problema de Sturm-Liouville singular (SLP3):

$$- (\nabla^2 + k_{z1}^2) g_{1mn}(z, \mathbf{r}') = \delta(z - z') \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.39)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g_{1mn}(z, \mathbf{r}')|_{S_{15}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow d_1} \frac{\partial}{\partial z} g_{1mn}(z, \mathbf{r}')|_{S_{16}} = 0 \quad (4.40)$$

No meio 2, o problema da função de Green resultante possui condições de contorno de Neumann, sendo caracterizado como SLP2.

$$- (\nabla^2 + k_{z2}^2) g_{2mn}(z, \mathbf{r}') = \delta(z - z') \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.41)$$

$$\lim_{z \rightarrow d_1} \frac{\partial}{\partial z} g_{2mn}(z, \mathbf{r}')|_{S_{25}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow d_2} \frac{\partial}{\partial z} g_{2mn}(z, \mathbf{r}')|_{S_{26}} = 0 \quad (4.42)$$

No meio 3, o problema da função de Green resultante possui condições de contorno de Neumann e limite, sendo caracterizado como SLP3.

$$- (\nabla^2 + k_{z3}^2) g_{3mn}(z, \mathbf{r}') = \delta(z - z') \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.43)$$

$$\lim_{z \rightarrow d_2} \frac{\partial}{\partial z} g_{3mn}(z, \mathbf{r}')|_{S_{35}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial z} g_{3mn}(z, \mathbf{r}')|_{S_{36}} = 0 \quad (4.44)$$

Sendo $k_{z[v]}$ a constante de propagação na direção z , nos meios $[v] = 1, 2, 3$:

$$k_{z[v]} = \sqrt{k_{[v]}^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (4.45)$$

A solução para os problemas de (4.39) a (4.45) foram determinadas através do método da Forma Fechada da Função de Green (CFGF), o procedimento é demonstrado no Anexo G. As soluções para os problemas através do método CFGF nos três meios são:

$$g_{1mn}(z, \mathbf{r}') = \frac{1}{2jk_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-z'|} + e^{-jk_{z1}(z+z'-2d_1)} \right] \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.46)$$

$$g_{2mn}(z, \mathbf{r}') = \left[\frac{\cos k_{z2}(|z - z'| + [d_2 - d_1]) + \cos k_{z2}([z' + z] - [d_2 + d_1])}{2k_{z2} \sin k_{z2}(d_2 - d_1)} \right] \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.47)$$

$$g_{3mn}(z, \mathbf{r}') = \frac{1}{jk_{z3}} \left[e^{-jk_{z3}|z' - z|} + e^{jk_{z3}(z + z' - 2d_2)} \right] \bar{u}_m(x') \bar{u}_n(y') \quad (4.48)$$

Por fim, aplicando as transformada inversa definida em (4.31) às funções de Green no domínio espectral mn (4.46) – (4.48), a Função de Green Periódica Tridimensional (PGF 3D) nos três meios é:

$$g_{1,2,3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{1,2,3mn}(z, \mathbf{r}') u_m(x) u_n(y) \quad (4.49)$$

4.3 Campo Potencial Magnético Através do Método PGF 3D

Agora, voltamos nossa atenção para as relações que definem a componente genérica (4.13), (4.21) e (4.29), do campo potencial nos três meios. Substituindo a PGF 3D e a componente genérica da fonte de corrente (3.27) nas relações, realizando a integral da fonte delta e intercambiando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}'$, tudo nesta ordem, a componente genérica toma a forma:

$$A_{v1,2,3}(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{v1,2,3}^{mn}(z) e^{-j[k_x x + k_y y]} \quad (4.50)$$

onde $A_{v1,2,3}^{mn}$ é a componente espectral mn da representação espectral da componente genérica v do campo potencial. Nos três meios, a componente espectral genérica possui as formas:

$$A_{v1}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab k_{z1}} \left(\mu_1(j\omega p_{eff}) f_v(\theta', \phi') \left[\bar{e}^{-jk_{z1}|z-h|} + \bar{e}^{jk_{z1}(z+h-2d_1)} \right] - 2\bar{e}^{jk_{z1}(z-d_1)} \Lambda_{v1d1}^{mn} \right) \quad (4.51)$$

$$A_{v2}^{mn}(z) = -2j \left[\frac{\left[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} \right] e^{jk_{z2}(z-d_1)} - \left[\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn} \right] \bar{e}^{jk_{z2}(z-d_2)}}{8ab k_{z2} [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.52)$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \Lambda_{v3d2}^{mn} \quad (4.53)$$

onde:

$$\Lambda_{v1d1}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \frac{\partial A_{v1}}{\partial z'}(x', y', d_1) dx' dy' \quad (4.54)$$

$$\Lambda_{v2d1}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \frac{\partial A_{v2}}{\partial z'}(x', y', d_1) dx' dy' \quad (4.55)$$

$$\Lambda_{v2d2}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \frac{\partial A_{v2}}{\partial z'}(x', y', d_2) dx' dy' \quad (4.56)$$

$$\Lambda_{v3d2}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \frac{\partial A_{v3}}{\partial z'}(x', y', d_2) dx' dy' \quad (4.57)$$

Os termos integrais em (4.54) – (4.57) acoplam os campos nos três meios. Podemos determina-los através das condições de fronteira nas interfaces d_1 e d_2 . A partir deste ponto passamos a tratar das componentes retangulares A_x , A_y e A_z do campo potencial magnético. Primeiramente, para as componentes tangenciais A_x e A_y utilizando as condições de fronteira (3.24), e posteriormente para a componente normal A_z utilizando as condições em (3.25). Devido ao fato das condições de fronteira para as componentes tangenciais serem as mesmas, primeiramente determinaremos A_x , e em seguida, por analogia A_y . As principais deduções (passo a passo das demonstrações) entre as equações estão descritas no Apêndice D.1. Aplicando a condição de continuidade de A_x na interface d_1 :

$$A_{x1}|_{z=d1} = A_{x2}|_{z=d1} \quad (4.58)$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} + \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \left[\frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \Lambda_{x2d1}^{mn} - 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{x2d2}^{mn}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] = \mu_1(j\omega p_{eff}) f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.59)$$

Em seguida, aplicando a condição de continuidade de A_x na interface d_2 :

$$A_{x2}|_{z=d2} = A_{x3}|_{z=d2} \quad (4.60)$$

$$\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{x2d1}^{mn} - \Lambda_{x2d2}^{mn} [e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + 1] \right) - \Lambda_{x3d2}^{mn} = 0 \quad (4.61)$$

Agora, aplicando a condição de descontinuidade magnética na interface d_1 , utilizando (4.54) e (4.55):

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{x2}}{\partial z} \Big|_{z=d1} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{x1}}{\partial z} \Big|_{z=d1} \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \Lambda_{x2d1}^{mn} = \frac{1}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn} \quad (4.63)$$

Aplicando a condição de descontinuidade magnética na interface d_2 , utilizando (4.55) e (4.56):

$$\frac{1}{\mu_3} \frac{\partial A_{x3}}{\partial z} \Big|_{z=d2} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{x2}}{\partial z} \Big|_{z=d2} \quad (4.64)$$

$$\frac{1}{\mu_3} \Lambda_{x3d2}^{mn} = \frac{1}{\mu_2} \Lambda_{x2d2}^{mn} \quad (4.65)$$

Substituindo (4.63) em (4.59), e, (4.63) e (4.65) em (4.61) de modo que as duas equações restantes forma um sistema de equações em termos de Λ_{x1d1}^{mn} e Λ_{x2d2}^{mn} :

$$\left(1 + \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{x1d1}^{mn} - \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{x2d2}^{mn} = b_1 \quad (4.66)$$

$$-\left(\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2^2}{\mu_1\mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \Lambda_{x1d1}^{mn} + \left(1 + \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \Lambda_{x2d2}^{mn} = 0 \quad (4.67)$$

onde $b_1 = \mu_1(j\omega p_{eff})f_x(\theta', \phi')e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$. Utilizando (4.66) e (4.67) para montar o sistema matricial (4.68).

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) & -\left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \\ -\left(\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2^2}{\mu_1\mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) & \left(1 + \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{x1d1}^{mn} \\ \Lambda_{x2d2}^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Os termos Λ_{x1d1}^{mn} e Λ_{x2d2}^{mn} são determinados diretamente da solução do sistema matricial em (4.68), e por fim, Λ_{x2d1}^{mn} e Λ_{x3d2}^{mn} pela substituição em (4.63) e (4.65). A inversão da matriz quadrada em (4.68) foi feita através da Regra de Cramer, sendo demonstrada no Apêndice D.1.

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \mu_1 \frac{(j\omega p_{eff})f_x(\theta', \phi')e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE}[1 - R_{23}^{TE}e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE}R_{23}^{TE}e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.69)$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \mu_2 \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \frac{(j\omega p_{eff})f_x(\theta', \phi')e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE}T_{23}^{TE}e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE}R_{23}^{TE}e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.70)$$

$$\Lambda_{x2d1}^{mn} = \mu_2 \frac{(j\omega p_{eff})f_x(\theta', \phi')e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE}[1 - R_{23}^{TE}e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE}R_{23}^{TE}e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.71)$$

$$\Lambda_{x3d2}^{mn} = \mu_3 \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \frac{(j\omega p_{eff})f_x(\theta', \phi')e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE}T_{23}^{TE}e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE}R_{23}^{TE}e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.72)$$

Substituindo os coeficientes de acoplamento (4.69) – (4.72) em (4.51) – (4.53), determinamos a componente espectral A_x^{mn} do campo potencial nos três meios:

$$A_{x1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_x \frac{1}{k_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TE} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \right] \quad (4.73)$$

$$A_{x2}^{mn}(z) = -j\mu_2 I_x \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.74)$$

$$A_{x3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_x \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TE} \quad (4.75)$$

onde $\tilde{R}_{12}^{TE}$ e $\tilde{T}_{23}^{TE}$ os coeficientes generalizados de Reflexão e Transmissão dos modos TE e I_x a densidade de corrente por célula.

$$I_x = \frac{(j\omega p_{eff})f_x(\theta', \phi')}{8ab} \quad (4.76)$$

$$\tilde{R}_{12}^{TE} = 1 - \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.77)$$

$$\tilde{T}_{23}^{TE} = \left[\frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.78)$$

Os coeficientes de Reflexão e Transmissão de Fresnel do modo TE seguem a seguinte estrutura [31]:

$$R_{ab}^{TE} = \frac{\mu_b k_{za} - \mu_a k_{zb}}{\mu_b k_{za} + \mu_a k_{zb}} \quad (4.79)$$

$$T_{ab}^{TE} = \frac{2\mu_b k_{za}}{\mu_b k_{za} + \mu_a k_{zb}} \quad (4.80)$$

Os coeficientes de Reflexão e Transmissão de Fresnel se relacionam por (4.81).

$$\begin{aligned} T_{ab}^{TE} &= 1 + R_{ab}^{TE} \\ \frac{\mu_a k_{zb}}{\mu_b k_{za}} T_{ab}^{TE} &= 1 - R_{ab}^{TE} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Como comentado anteriormente, para determinarmos a componente espectral de A_y nos três meios, podemos seguir os mesmos passos utilizados em A_x , contudo, como as condições de contorno de A_x e A_y na interface são idênticas, a solução para A_y^{mn} nos três meios segue diretamente de (4.73)-(4.75):

$$A_{y1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_y \frac{1}{k_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TE} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \right] \quad (4.82)$$

$$A_{y2}^{mn}(z) = -j\mu_2 I_y \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.83)$$

$$A_{y3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_y \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TE} \quad (4.84)$$

Por fim, substituindo as componentes espectrais A_x^{mn} e A_y^{mn} em (4.50), determinamos as componentes tangenciais A_x e A_y do campo potencial magnético. Para determinar a componente normal A_z , aplicamos a condição de descontinuidade magnética (3.25) do campo normal nas interfaces d_1 e d_2 , no entanto, esta condição também envolve as componentes tangenciais do campo potencial, e por isso, devemos tratá-la com um cuidado maior. As principais demonstrações entre as equações estão descritas no Apêndice D.2.

Primeiramente, aplicando a condição de descontinuidade magnética na interface d_1 :

$$\frac{1}{\mu_2} A_{z2}|_{z=d_1} = \frac{1}{\mu_1} A_{z1}|_{z=d_1} \quad (4.85)$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \left[\frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \Lambda_{z2d1}^{mn} - 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] = \mu_1 (j\omega p_{eff}) f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.86)$$

Em seguida, aplicando a condição de descontinuidade magnética na interface d_2 :

$$\frac{1}{\mu_3} A_{z3}|_{z=d_2} = \frac{1}{\mu_2} A_{z2}|_{z=d_2} \quad (4.87)$$

$$\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn} - \Lambda_{z2d2}^{mn} [e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + 1] \right) - \Lambda_{z3d2}^{mn} = 0 \quad (4.88)$$

Agora, expandindo o divergente de $\mathbf{A}$ em (3.25), a condição de fronteira de $\partial A_z / \partial z$ na interface d_1 :

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial z}|_{z=d_1} = \frac{1}{\varepsilon_2 \mu_2} \left[(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_2)|_{z=d_1} + \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial A_{z2}}{\partial z}|_{z=d_1} \right] \quad (4.89)$$

Note que a condição (4.89) também é função das componentes tangenciais A_x e A_y , mais especificamente, de suas derivadas em relação a x e y , respectivamente. Substituindo (4.54) e (4.55):

$$\Lambda_{z2d1}^{mn} = \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \Lambda_{z1d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \Lambda_{xy2d1}^{mn} \quad (4.90)$$

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \left[\frac{\partial A_{x2}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y2}}{\partial y'} \right] \Big|_{z=d_1} dx' dy' \quad (4.91)$$

De maneira semelhante, aplicando a condição de fronteira de $\partial A_z / \partial z$ na interface d_2 :

$$\frac{\partial A_{z2}}{\partial z}|_{z=d_2} = \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_3} \left[(\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_3 \mu_3) (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_3)|_{z=d_2} + \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial A_{z3}}{\partial z}|_{z=d_2} \right] \quad (4.92)$$

$$\Lambda_{z3d2}^{mn} = \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \Lambda_{z2d2}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \quad (4.93)$$

$$\Lambda_{xy3d2}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \left[\frac{\partial A_{x3}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y3}}{\partial y'} \right] \Big|_{z=d_2} dx' dy' \quad (4.94)$$

Como as componentes tangenciais A_x e A_y nos meios 2 e 3 foram determinadas anteriormente, podemos resolver as integrais em (4.91) e (4.94), e posteriormente, substituir os resultados nas condições de contorno (4.90) e (4.93). Utilizando as componentes espectrais A_{x2}^{mn} e A_{y2}^{mn} em (4.50), e substituindo em (4.91).

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[-j\beta_x A_{x2}^{pq}(d_1) - j\beta_y A_{y2}^{pq}(d_1) \right] \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[(k_x - \beta_x)x' + (k_y - \beta_y)y']} dx' dy' \quad (4.95)$$

onde $\beta_x = p\pi/a$ e $\beta_y = q\pi/b$. Lembrando que $k_x = m\pi/a$ e $k_y = n\pi/b$, e desde que p, q, m e n são sempre números inteiros, o resultado da integral em (4.91) é não nulo apenas quando $p = m$ e $q = n$, de forma que:

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[(k_x - \beta_x)x' + (k_y - \beta_y)y']} dx' dy' = \begin{cases} 0, & p \neq m, q \neq n \\ 4ab, & p = m, q = n \end{cases} \quad (4.96)$$

A demonstração da integral em (4.96) é deixada no Apêndice D.2. Ao Substituir (4.96) em (4.95), verificamos que todos os termos do somatório serão nulos para $p \neq m$ e $q \neq n$, dessa forma, resultando em:

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = 4ab \left[-jk_x A_{x2}^{mn}(d_1) - jk_y A_{y2}^{mn}(d_1) \right] \quad (4.97)$$

Por analogia, a integral em (4.94) resulta em:

$$\Lambda_{xy3d2}^{mn} = 4ab \left[-jk_x A_{x3}^{mn}(d_2) - jk_y A_{y3}^{mn}(d_2) \right] \quad (4.98)$$

Em posse dos resultados (4.97) e (4.98), substituindo (4.90) em (4.86), e, (4.90) e (4.93) em (4.88) de modo que as duas equações restantes forma um sistema de equações em termos de Λ_{z1d1}^{mn} e Λ_{z2d2}^{mn} . Novamente a demonstração é deixada no Apêndice D.2.

$$\left(1 + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{z1d1}^{mn} - \left(\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{z2d2}^{mn} = c_1 \quad (4.99)$$

$$- \left(\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{z1d1}^{mn} + \left(\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} + \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{z2d2}^{mn} = c_2 \quad (4.100)$$

onde:

$$c_1 = \mu_1(j\omega p_{eff})f_z(\theta', \phi')e^{-jk_{z1}(h-d_1)} - \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \quad (4.101)$$

$$c_2 = \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \quad (4.102)$$

Utilizando (4.99) e (4.100) para montar o sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) & - \left(\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \\ - \left(\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) & \left(\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} + \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{z1d1}^{mn} \\ \Lambda_{z2d2}^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Os termos Λ_{z1d1}^{mn} e Λ_{z2d2}^{mn} são determinados diretamente da solução do sistema matricial em (4.103), e por fim, Λ_{z2d1}^{mn} e Λ_{z3d2}^{mn} pela substituição em (4.90) e (4.93). A inversão da matriz quadrada em (4.103) foi feita através da Regra de Cramer, sendo demonstrada no Apêndice D.2.

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} c_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{1}{2} \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \quad (4.104)$$

$$\Lambda_{z2d2}^{mn} = \frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} c_{1a} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \tilde{R}_{23}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \quad (4.105)$$

$$\Lambda_{z2d1}^{mn} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} c_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \left[[1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \quad (4.106)$$

$$\Lambda_{z3d2}^{mn} = \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_3}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} c_{1a} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{23}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \quad (4.107)$$

onde:

$$c_{1a} = \mu_1 (j\omega p_{eff}) f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.108)$$

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = -j4ab \frac{\mu_1}{k_{z1}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.109)$$

$$\Lambda_{xy3d2}^{mn} = -j4ab \frac{\mu_2}{k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TE} [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.110)$$

Os coeficientes generalizados de Reflexão e Transmissão do modo TM são:

$$\tilde{R}_{12}^{TM} = 1 - \left[\frac{T_{21}^{TM} [1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.111)$$

$$\tilde{R}_{32}^{TM} = 1 - \left[\frac{T_{23}^{TM} [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{23}^{TM} R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.112)$$

$$\tilde{T}_{23}^{TM} = \left[\frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \quad (4.113)$$

Os coeficientes de Reflexão e Transmissão de Fresnel do modo TM seguem a seguinte estrutura [31]:

$$R_{ab}^{TM} = \frac{\varepsilon_b k_{za} - \varepsilon_a k_{zb}}{\varepsilon_b k_{za} + \varepsilon_a k_{zb}} \quad (4.114)$$

$$T_{ab}^{TM} = \frac{2\varepsilon_b k_{za}}{\varepsilon_b k_{za} + \varepsilon_a k_{zb}} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} T_{ab}^{TM} &= 1 + R_{ab}^{TM} \\ \frac{\varepsilon_a k_{zb}}{\varepsilon_b k_{za}} T_{ab}^{TM} &= 1 - R_{ab}^{TM} \end{aligned} \quad (4.116)$$

Por fim, substituindo (4.108) – (4.110) em (4.104) – (4.107), e logo em seguida em (4.51) – (4.53), a componente espectral A_z^{mn} nos três meios é definida por (4.117) – (4.119). A demonstração é deixada no Apêndice D.2.

$$\begin{aligned} A_{z1}^{mn}(z) &= -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \right] \\ &\quad - \mu_1 [-jk_x I_x - jk_y I_y] S_{1d1}^{TEM} \frac{1}{k_{z1}} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$A_{z2}^{mn}(z) = -j\mu_2 I_z \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} - \mu_2 [-jk_x I_x - jk_y I_y] \frac{1}{k_{z2}} \left[S_{2d1}^{TEM} e^{jk_{z2}(z-d_2)} + S_{2d2}^{TEM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.118)$$

$$A_{z3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_z \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} \frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} - \mu_3 [-jk_x I_x - jk_y I_y] \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} S_{3d2}^{TEM} \quad (4.119)$$

onde S^{TEM} são os coeficientes de acoplamento dos modos TE e TM:

$$S_{1d1}^{TEM} = \frac{1}{2k_{z2}} \left[\zeta_{12} \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} [1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \frac{\mu_2}{\mu_3} \tilde{T}_{23}^{TM} \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \quad (4.120)$$

$$S_{2d1}^{TEM} = \frac{1}{2} \left[\zeta_{12} \frac{1}{k_{z1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \frac{1}{k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \quad (4.121)$$

$$S_{2d2}^{TEM} = \frac{1}{2} \left[\zeta_{12} \frac{1}{k_{z1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \frac{1}{k_{z2}} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{1}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \quad (4.122)$$

$$S_{3d2}^{TEM} = \frac{1}{2k_{z2}} \left[\zeta_{12} \frac{\mu_1 k_{z3}}{\mu_2 k_{z1}} \tilde{T}_{23}^{TM} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \frac{\mu_2}{\mu_3} [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \quad (4.123)$$

E ζ parâmetros de acoplamento nas interfaces entre os meios:

$$\zeta_{12} = \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \quad (4.124)$$

$$\zeta_{23} = \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \quad (4.125)$$

Por fim, substituindo (4.117) – (4.119) em (4.50), determinamos a componente normal A_z do campo potencial magnético. Primeiramente, verificamos que I_x e I_y excitam as componentes tangenciais A_x e A_y do campo potencial, no entanto, através de (4.117) – (4.119) verifica-se que elas também excitam a componente normal A_z . Devido à inexistência de bi correspondência entre as componentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{J}$, e a simetria entre as componentes de $\mathbf{A}$, faz-se uso da representação do campo potencial magnético na forma tensorial. Para isso, extraímos os termos I_x , I_y e I_z de forma a escrever o tensor $\mathbf{A}$ em termos dos elementos A_{ij} , cada um correspondendo a componente espectral i do campo potencial, excitada pela componente j da fonte de corrente.

$$\mathbf{A}_{1,2,3}(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{xx1,2,3}^{mn} & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy1,2,3}^{mn} & 0 \\ -jk_x A_{zx1,2,3}^{mn} & -jk_y A_{zy1,2,3}^{mn} & A_{zz1,2,3}^{mn} \end{bmatrix} \mathbf{I}(\theta', \phi') e^{-j[k_x x + k_y y]} \quad (4.126)$$

onde $\mathbf{I}(\theta', \phi')$ é a densidade de corrente por célula na forma vetorial:

$$\mathbf{I}(\theta', \phi') = \begin{bmatrix} I_x & I_y & I_z \end{bmatrix}^t \quad (4.127)$$

As componentes espectrais de (4.126) no meio 1 são:

$$A_{xx_1}^{mn}(z) = A_{yy_1}^{mn}(z) = -j\mu_1 \frac{1}{k_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TE} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \right] \quad (4.128)$$

$$A_{xz_1}^{mn}(z) = A_{yz_1}^{mn}(z) = -\mu_1 S_{1d1}^{TEM} \frac{1}{k_{z1}} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \quad (4.129)$$

$$A_{zz_1}^{mn}(z) = -j\mu_1 \frac{1}{k_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \right] \quad (4.130)$$

No meio 2:

$$A_{xx_2}^{mn}(z) = A_{yy_2}^{mn}(z) = -j\mu_2 \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.131)$$

$$A_{zx_2}^{mn}(z) = A_{zy_2}^{mn}(z) = -\mu_2 \frac{1}{k_{z2}} \left[S_{2d1}^{TEM} e^{jk_{z2}(z-d_2)} + S_{2d2}^{TEM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.132)$$

$$A_{zz_2}^{mn}(z) = -j\mu_2 \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \quad (4.133)$$

No meio 3:

$$A_{xx_3}^{mn}(z) = A_{yy_3}^{mn}(z) = -j\mu_3 \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TE} \quad (4.134)$$

$$A_{zx_3}^{mn}(z) = A_{zy_3}^{mn}(z) = -\mu_3 \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} S_{3d2}^{TEM} \quad (4.135)$$

$$A_{zz_3}^{mn}(z) = -j\mu_3 \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} \frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} \quad (4.136)$$

4.4 Forma Alternativa da Representação Espectral da PGF

O campo potencial magnético em (4.126) foi definido através da representação espectral via PGF 3D. O domínio espectral discreto é definido no plano infinito mn , por esta razão, a representação em termos discretos é realizada na forma de somatórios duplos de $-\infty$ a $+\infty$. Devemos ter em mente, que na representação discreta, os autovalores $k_x = m\pi/a$ e $k_y = n\pi/b$, assumem valores discretos definidos por $m = -\infty : +\infty$ e $n = -\infty : +\infty$.

A fonte dipolar no espaço livre possui infinitos eixos de simetria espacial esférica, no entanto, o dipolo em uma célula, proveniente de um arranjo planar, perde parte desta simetria, devido a característica retangular da célula. Posteriormente, mostraremos que no domínio espectral mn , os campos possuem simetria cilíndrica. Esta simetria espectral sugere a possibilidade da utilização de identidades para alterar a representação espectral da série complexa de Fourier, reduzindo o domínio espectral, e consequentemente, o numero de termos nas séries. De fato, a representação espectral discreta na PGF realizada na forma de somatórios duplos de $-\infty$ a $+\infty$, pode demandar um razoável custo computacional nas simulações. Para reduzir tal custo é proposto alterar os somatórios utilizando a identidade de Euler, desde que as componentes espectrais (4.128) – (4.136) nas expressões de campo obedeçam as seguintes condições:

$$\begin{aligned} c_{m,n}(z) &= c_{-m,-n}(z) = c_{m,-n}(z) = c_{-m,n}(z) \\ c_{m,0}(z) &= c_{-m,0}(z) \\ c_{0,n}(z) &= c_{0,-n}(z) \end{aligned} \quad (4.137)$$

ou seja, atenda as condições de paridade planar (simetria cilíndrica) no domínio espectral mn . Através da identidade de Euler, propõem-se as identidades para a representação espectral:

$$S(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) e^{-j[k_x x + k_y y]} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) \cos[k_x x] \cos[k_y y] \quad (4.138)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) [-jk_x] e^{-j[k_x x + k_y y]} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] \quad (4.139)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) [-jk_y] e^{-j[k_x x + k_y y]} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] \quad (4.140)$$

onde ϵ_{mn} é o numero de Neumann duplo:

$$\epsilon_{mn} = \begin{cases} 1, & m = 0, n = 0 \\ 2, & m = 0, n \neq 0 \\ 2, & m \neq 0, n = 0 \\ 4, & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases} \quad (4.141)$$

Note que o domínio espectral discreto mn é reduzido para $[0, \infty]$ ($m = 0 : +\infty$, $n = 0 : +\infty$), reduzindo assim o custo computacional em 4 vezes. A demonstração da identidade é deixada na forma do Apêndice A.2.

5 Resultados e Discussões

Nos capítulos anteriores, definimos a resposta do potencial magnético na estrutura do modelo eletromagnético equivalente do sensor SPCE. Os campos elétrico e magnético nas três camadas podem ser determinados através do potencial magnético em (4.126) aplicado às equações (3.11) e (3.10), respectivamente (Demonstração no Apêndice E). Neste capítulo são apresentados os principais resultados espaciais e espectrais obtidos a partir dos campos determinados através do método PGF 3D. São apresentados aqui os valores dos parâmetros utilizados nas simulações, assim como as características eletromagnéticas dos materiais. Em um primeiro momento, são apresentados gráficos da PGF 3D, demonstrando que esta atende às condições de contorno propostas pelos problemas de Sturm-Liouville, e condições periódicas, e em seguida, gráficos demonstrando que as condições de fronteira dos campos tangenciais e normais são atendidas.

Para verificarmos os resultados de campo, consideramos uma amostra-referência contendo apenas uma determinada concentração de Core-Shell AuNps funcionalizadas com fluoróforos. Assim, o meio 1 é formado pelo arranjo planar periódico de dipolos equivalentes, uniformemente distribuídos a uma distância h da superfície do sensor ($d_1 = 0$) pelo espaçador químico. A folha de ouro possui espessura δ_g ($d_2 = -\delta_g$). As Core-Shell AuNps são excitadas por uma fonte externa de $\lambda = 632,8nm$ (suprimida). Assim, o momento dipolar fundamental é excitado na direção $\hat{a}_r(\theta, \phi)$, re-irradiando ondas de mesmo comprimento. No arranjo periódico, por questões de simplicidade, consideramos o período das células em x e y iguais, de forma que $\Delta_c = 2a = 2b$ é o período da célula nas duas dimensões. A particularização do modelo eletromagnético equivalente é demonstrada na Fig. 14.

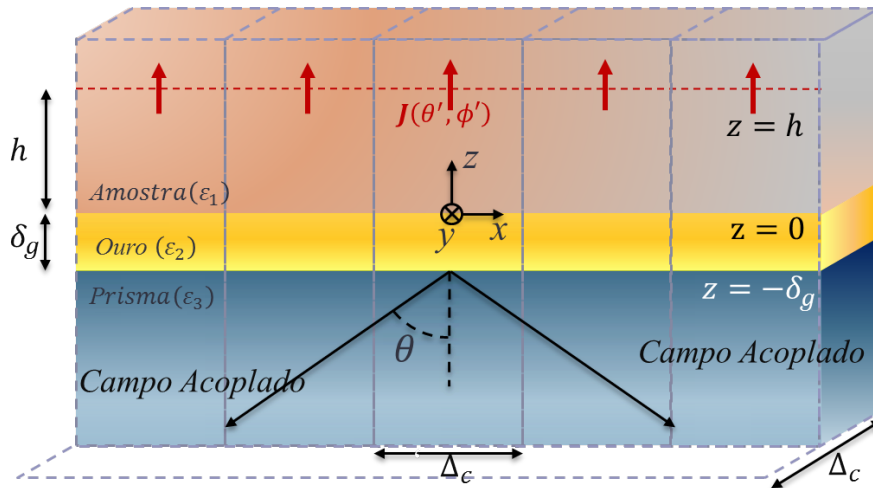


Figura 14 – Particularização do modelo eletromagnético equivalente do sensor SPCE.

Considerando o meio 1, onde as nanopartículas são imobilizadas, como o meio de referência e eletricamente inerte (ou seja, qualquer variação no índice de refração será comparada com o meio de referência), podemos aproximar sua permissividade relativa por $\varepsilon_1 = 1$. A estrutura não magnética ($\mu_r = 1$) é caracterizada eletricamente, no comprimento de onda em questão, pelas permissividades do prisma (vidro óptico BK7) $\varepsilon_{prisma} = 2,30$, e da camada de ouro $\varepsilon_{ouro} = -11,63 - 1,34j$, este último descrito pelo modelo de Lorentz-Drude com excelente precisão. Nesta etapa, não possuímos a intenção de verificar a influência das dimensões das AuNPs na resposta óptica do sensor, mas devemos ter em mente a amplificação de campo próximo já constatada que estas nanopartículas sofrem através da RSPL. Como momento de dipolo efetivo, encontramos $p_{eff} = 7.17 + j0.003$ Debye, aproximado através de (3.1) e (3.2), para uma partícula com núcleo de ouro e casca dielétrica $r_c = 20nm$, $\delta_c = 10nm$, respectivamente, agregada com um fluoróforo com momento de dipolo aproximadamente 7.1 ∓ 1.1 Debye. [32].

Definidas as características dimensionais e constitutivas do sensor plasmônico, foram obtidos resultados espaciais e espectrais por meio de simulações. Estas simulações foram realizadas através de rotinas desenvolvidas no software Matlab. Estas foram otimizadas para reduzir o consumo computacional de memória, e para reduzir o número de iterações, foram utilizadas as identidades propostas na seção 4.4. Por fim, buscando validar o método utilizado, foram realizadas comparações qualitativas do caso limite com resultados em trabalhos já publicados, subsequentemente, são apresentados resultados e discussões sobre a convergência dos campos potenciais nas séries da PGF 3D.

5.1 Verificação das Condições de Contorno e Fronteira no Modelo Eletromagnético Equivalente.

Na seção 4.2 definimos a PGF 3D a partir da transformada dupla série complexa de Fourier, aplicada aos problemas da Função de Green unidimensionais, com condições de contorno derivadas dos problemas de Sturm-Liouville nas três camadas do sensor. Para verificar se estas condições de contorno são atendidas, foram gerados gráficos das componentes espectrais g_{1mn} , g_{2mn} e g_{3mn} , e suas respectivas derivadas no espaço livre. Para fins de apreciação gráfica, foram escolhidos $d_1 = 2\mu m$, $d_2 = -2\mu m$, sendo $z' = 4\mu m$, $z' = 0\mu m$ e $z' = -4\mu m$, a localização dos impulsos das funções deltas nos problemas da Função de Green nos meios 1, 2 e 3, respectivamente. Contudo, apesar das componentes espectrais serem funções apenas da variável espacial z , devemos lembrar que elas também dependem das variáveis espectrais mn . Posteriormente, mostraremos que, por causa da simetria no plano mn , a análise espectral pode ser simplificada escolhendo-se um único valor para n e realizando a análise em função de m . Uma rápida inspeção mostra que para os valores de $m > 10$ as curvas apresentam as mesmas características. Dessa forma,

escolhemos arbitrariamente gerar os gráficos para $m = 0$ e $m = 10$, com $n = 0$.

A partir da Fig. 15, é verificado que as condições de Neumann nas interfaces d_1 e d_2 são atendidas respectivamente por g_{1mn} e g_{3mn} , e claramente, verifica-se que ambas obedecem a condição de limite quando $|z| \rightarrow \infty$. Contudo, esta última condição só é atendida quando consideramos uma pequena parte imaginária negativa na permissividade do espaço livre, ou seja, $\varepsilon_1 = 1 - 0.01j$. Isto é necessário, pois, a condição de limite é uma condição de um problema SLP3, em outras palavras, um problema singular, que só possui solução dentro do espaço de Hilbert, se for amarrada uma condição de existência física. No caso em questão, a condição física é que $Im\{k_{z1,3}\} < 0$, que é assegurada se $Im\{\varepsilon_{1,3}\} < 0$. Verifica-se também que g_{2mn} obedece às condições de Neumann em d_1 e d_2 , como foi proposto pelo método.

Até este ponto, o leitor deve se perguntar: por que optamos por condições de Neumann nas interfaces d_1 e d_2 , se não eram conhecidas as condições de fronteira nos problemas de Sturm-Liouville do potencial magnético? De fato, em um primeiro momento não conhecemos exatamente quais serão os campos potenciais nas interfaces e muito menos suas derivadas em z . Contudo, temos a plena noção de que estas condições serão não-homogêneas por causa das condições de fronteira dos campos tangenciais e fluxos normais. A única certeza que temos é que as condições do problema da Função de Green auxiliar serão homogêneas. Então, introduzindo mais um questionamento, poderíamos ter escolhido condições de Dirichlet no lugar das condições de Neumann? A resposta é simples e direta, sim, pois a escolha destas condições apenas nos auxilia no momento em que aplicamos as condições de fronteira nas interfaces entre os meios, de forma que a escolha de condições de Neumann foi ideal, já que evita que tenhamos que realizar operações de derivada aos campos potenciais em (4.51) – (4.53) na determinação dos coeficientes de acoplamento (4.54) – (4.57).

Em geral, para todos os gráficos na Fig. 15, verifica-se que as funções de Green são contínuas em $z = z'$, possuindo derivadas descontínuas nestes mesmos pontos, estando de acordo com o método proposto [30]. Lembrando que a PGF é dada na forma do somatório duplo das componentes espectrais g_{mn} , através da análise gráfica, podemos supor que os termos de $m = 0$ contribuirão mais efetivamente na PGF, que os termos de $m = 10$. Contudo, deixaremos esta discussão para as próximas seções, mais especificamente, para a seção de análise espectral.

Agora, tratando da PGF 3D, para verificarmos as condições de periodicidade bidimensional nos três meios, escolhemos arbitrariamente uma célula de $\Delta_c = 10\mu m$, sendo os gráficos bidimensionais gerados no plano xy em $z = z' = 4\mu m$ no meio 1, $z = z' = 0\mu m$ no meio 2 e $z = z' = -4\mu m$ no meio 3. Para melhor visualização das condições periódicas, optou-se por apresentar três células de análise nos gráficos da Fig. 16.

A partir da Fig. 16, verifica-se que as condições de contorno periódicas da PGF 3D,

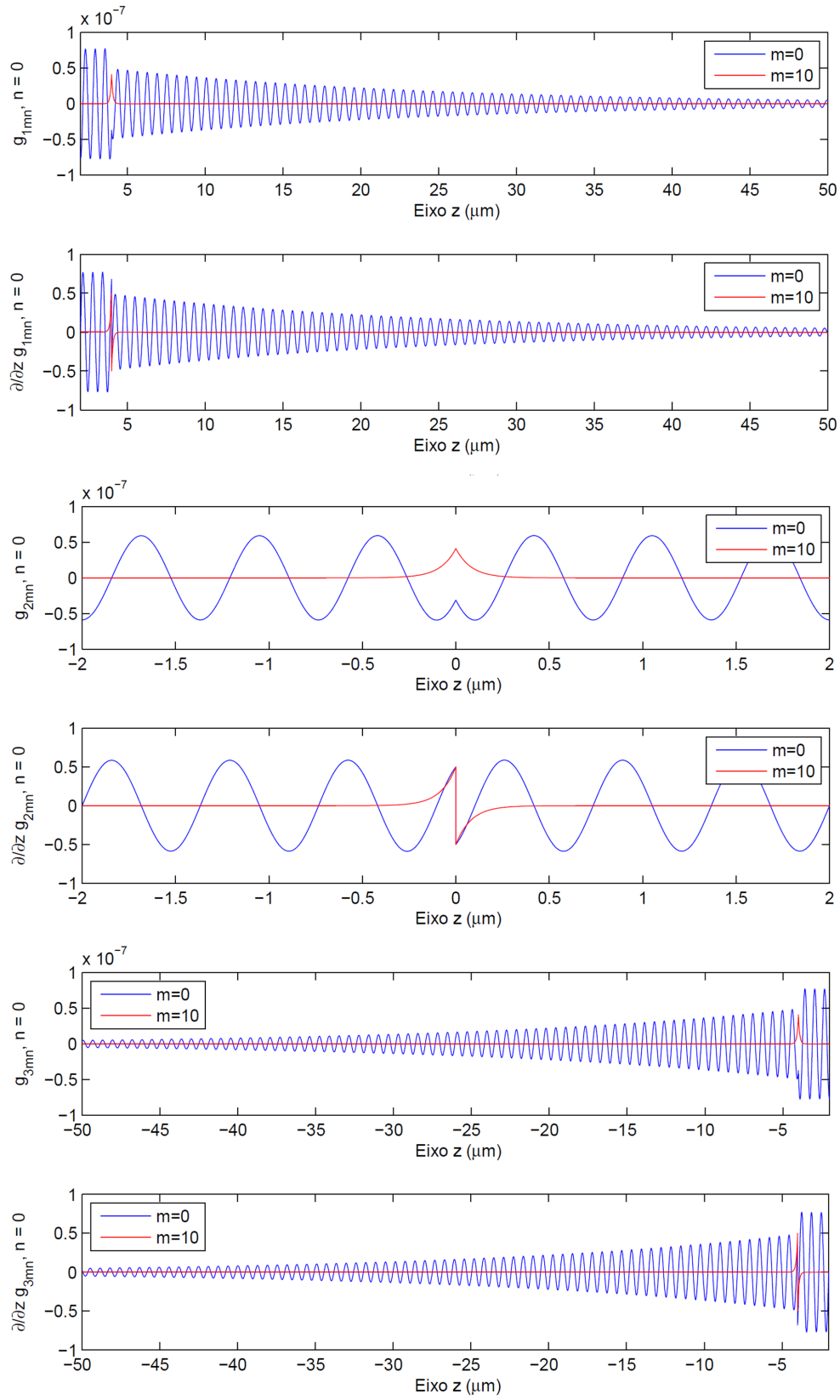


Figura 15 – Formas fechadas da função de Green correlacionadas ao problemas de Sturm-Liouville na estrutura do Sensor SPCE. (a) $g_{1mn}(z)$, (b) $\partial/\partial z\{g_{1mn}(z)\}$, (c) $g_{2mn}(z)$, (d) $\partial/\partial z\{g_{2mn}(z)\}$, (e) $g_{3mn}(z)$, (f) $\partial/\partial z\{g_{3mn}(z)\}$, $m=0,10$ e $n=0$.

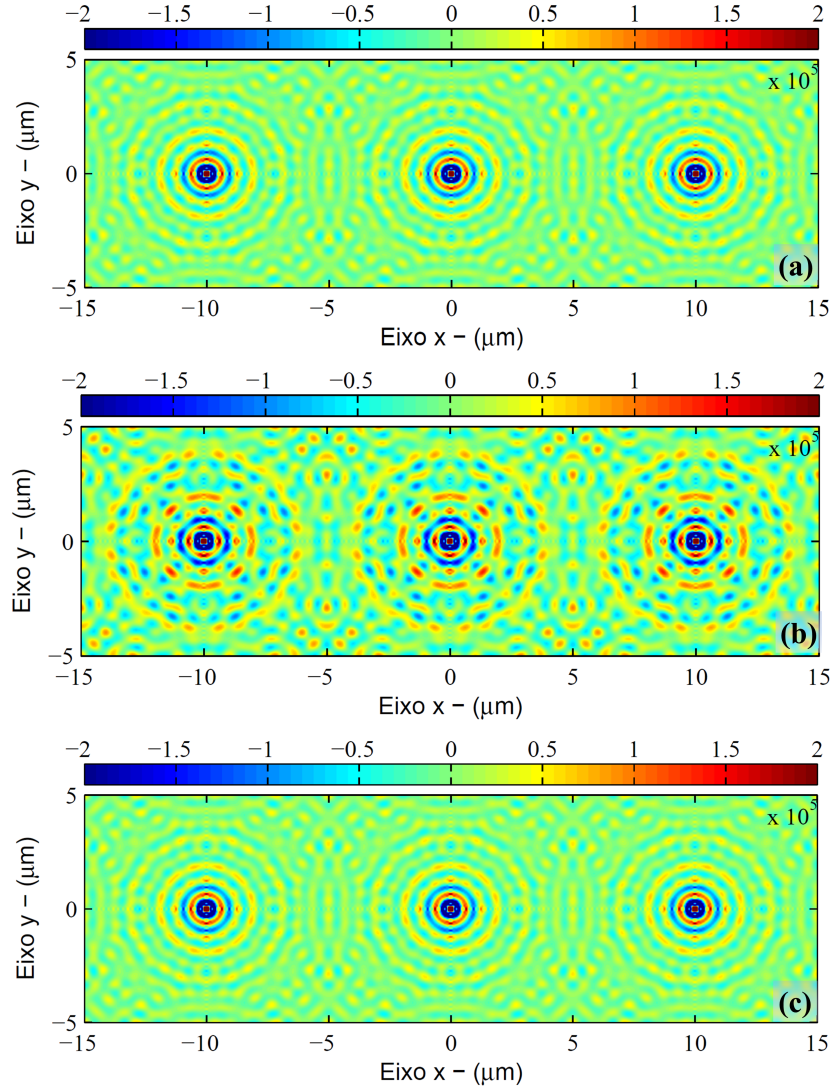


Figura 16 – PGF 3D, três células no plano xy em: (a) $z = z' = 4\mu m$ no meio 1, (b) $z = z' = 0\mu m$ no meio 2, (c) $z = z' = -4\mu m$ no meio 3.

são atendidas no plano xy . No apêndice A.2, demonstramos que g_{1mn} e g_{3mn} são funções de Green simétricas. De fato, esta característica pode ser visualizada nas Fig.15 e Fig.16. Perceba também que a distribuição espacial de g_{2mn} é levemente diferente, pois nesta, a fonte delta está confinado em um SLP2, ou seja, em uma região finita [30]. A característica impulsiva no centro da célula, através da PGF já era aguardada, pois a própria função de Green é definida muitas vezes como a resposta impulsiva de um sistema físico, que no caso tridimensional, equivale a um impulso tridimensional em cada meio da célula.

Em (3.27) definimos o modelo matemático que representa os dipolos infinitesimais nas células de análise, perceba que a fonte de corrente é modelada como uma função delta tridimensional, centralizada no plano xy da célula, a uma altura h da interface $d_1 = 0$. Desde que a fonte é caracterizada como uma função delta, então a própria PGF 3D é parte da resposta física do campo potencial no meio 1, sendo a outra parte obtida das condições de fronteira na junção (4.13). Estas duas partes que compõem a resposta

total no meio 1, são por muitas vezes denominadas resposta forçada e resposta natural do sistema físico, sendo respectivamente, a resposta da fonte de corrente introduzida, e a resposta dos modos naturais com condições de fronteira não nulas [30]. Nos meios 2 e 3 não há fontes de corrente, então a resposta do campo potencial nestes meios é proveniente apenas das condições de fronteira nas interfaces, ou seja, dos modos naturais.

Na Fig. 17, demonstramos que as condições de fronteira para os campos tangenciais e fluxos normais em (3.16) – (3.19) são atendidas. Apenas por questões de comprovar estas condições, escolhemos as permissividades e permeabilidades dos três meios como distintas, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$ e $\varepsilon_3 = 3$, e $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ e $\mu_3 = 3$. Para melhor visualização gráfica, escolhemos $h = 3nm$, $d_1 = 0nm$, $d_2 = -3nm$ e $\Delta_c = 10nm$.

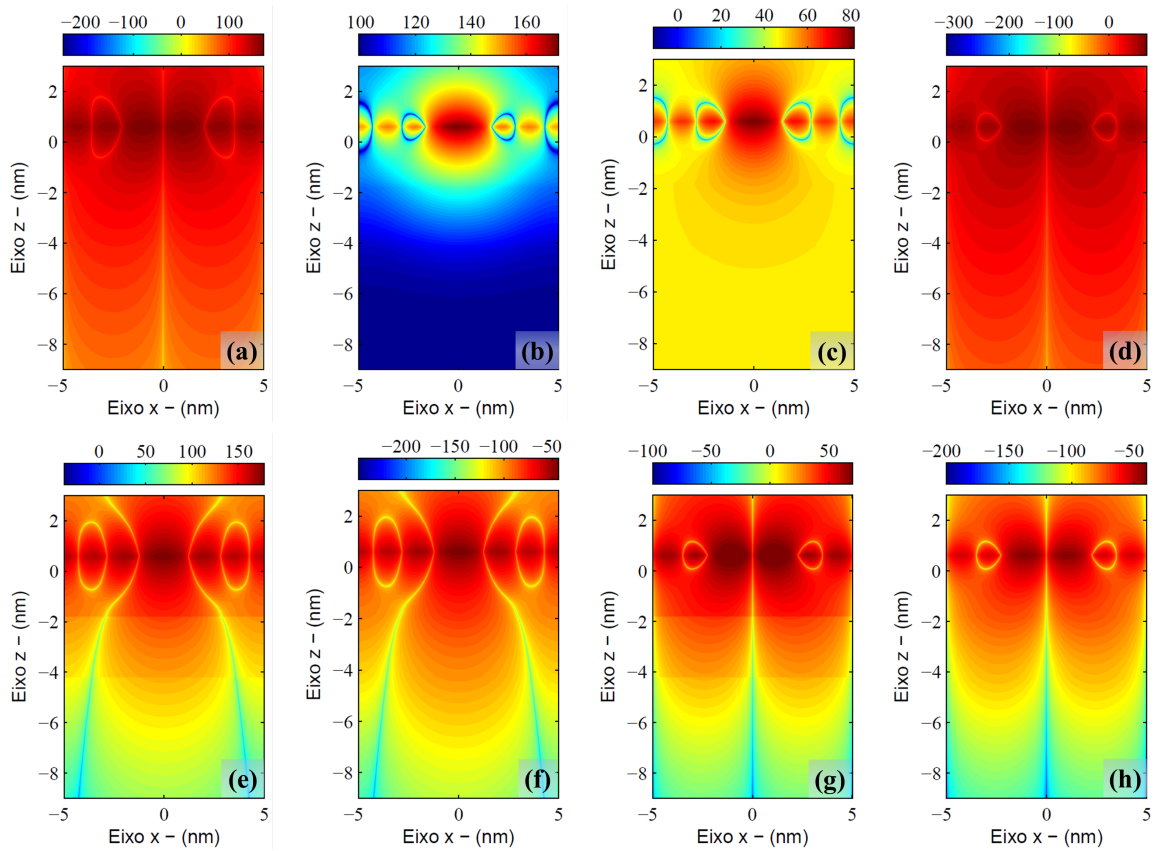


Figura 17 – Componentes dos campos Elétrico e Magnético em uma única célula de dimensões $\Delta_c = 10nm$. Condição de Continuidade dos campos tangenciais: (a) $20 \log(|Re\{E_x\}|)$, (b) $20 \log(|Re\{E_y\}|)$, (c) $20 \log(|Re\{H_x\}|)$, (d) $20 \log(|Re\{H_y\}|)$. Condição de Continuidade dos fluxos normais: (e) $20 \log(|Re\{E_1z; E_2z; E_3z\}|)$ (f) $20 \log(|Re\{\varepsilon_1 E_1z; \varepsilon_2 E_2z; \varepsilon_3 E_3z\}|)$, (g) $20 \log(|Re\{H_1z; H_2z; H_3z\}|)$ (h) $20 \log(|Re\{\mu_1 H_1z; \mu_2 H_2z; \mu_3 H_3z\}|)$.

Para estas simulações, os dipolos foram orientados de acordo com os ângulos paramétricos $\theta' = 45^\circ$ e $\phi' = 90^\circ$. Note que ambas as condições de continuidade de fluxo normais e campos tangenciais são atendidas, já que não há densidades superficiais de carga e de corrente nas interfaces. É claro, se estas condições são atendidas, naturalmente

as condições do campo potencial também são respeitadas. Verifica-se também que as condições de contorno periódicas são atendidas. Portanto, a PGF 3D atende muito bem todas as condições eletromagnéticas necessárias para descrever o modelo eletromagnético equivalente do sensor SPCE.

5.2 Análises Paramétricas de Campos na Estrutura do Sensor SPCE

Do modelo teórico apresentado no capítulo 4, podemos realizar as análises paramétricas de campo na estrutura do sensor. O principal objetivo destas análises é verificar quais as influências da espessura da camada de ouro δ_g , a altura relativa h entre o arranjo e a superfície do sensor, e a orientação dos dipolos equivalentes definida pelos ângulos θ' e ϕ' . Primeiramente, foi utilizado o campo potencial magnético (4.126) para verificar a influência da espessura da camada de ouro para $\delta_g = 10nm$, $50nm$ e $100nm$, com o dipolo na célula de análise de $\Delta_c = 10\mu m$ a uma altura $h = 200m$, orientado em três direções distintas, $\theta' = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° , com $\phi' = 0^\circ$. Os gráficos foram gerados no plano xz em $y = 0$, para a componente tangencial A_x e componente normal A_z , do campo potencial magnético. Note que se $\phi' = 0$, então $A_y = 0$. Para melhor visualização e análise, os gráficos foram normalizados em $[-2, 6] \times 10^{-14} Wb/m$, e limitados em $[-2, 2]\mu m$ em x e z .

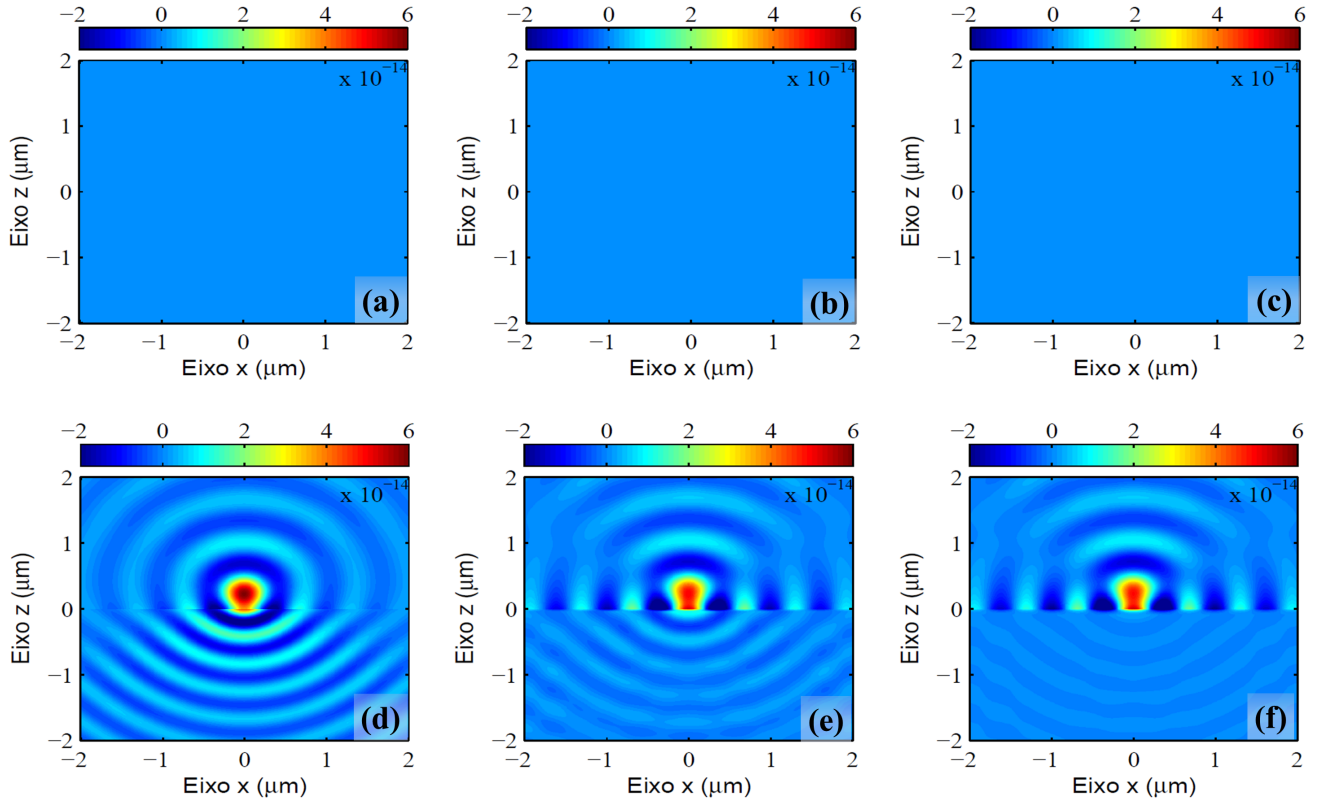


Figura 18 – Campo potencial magnético para $\theta' = 0^\circ$. A_x : (a) $\delta_g = 10nm$, (b) $\delta_g = 50nm$, (c) $\delta_g = 100nm$; A_z (d) $\delta_g = 10nm$, (e) $\delta_g = 50nm$, (f) $\delta_g = 100nm$.

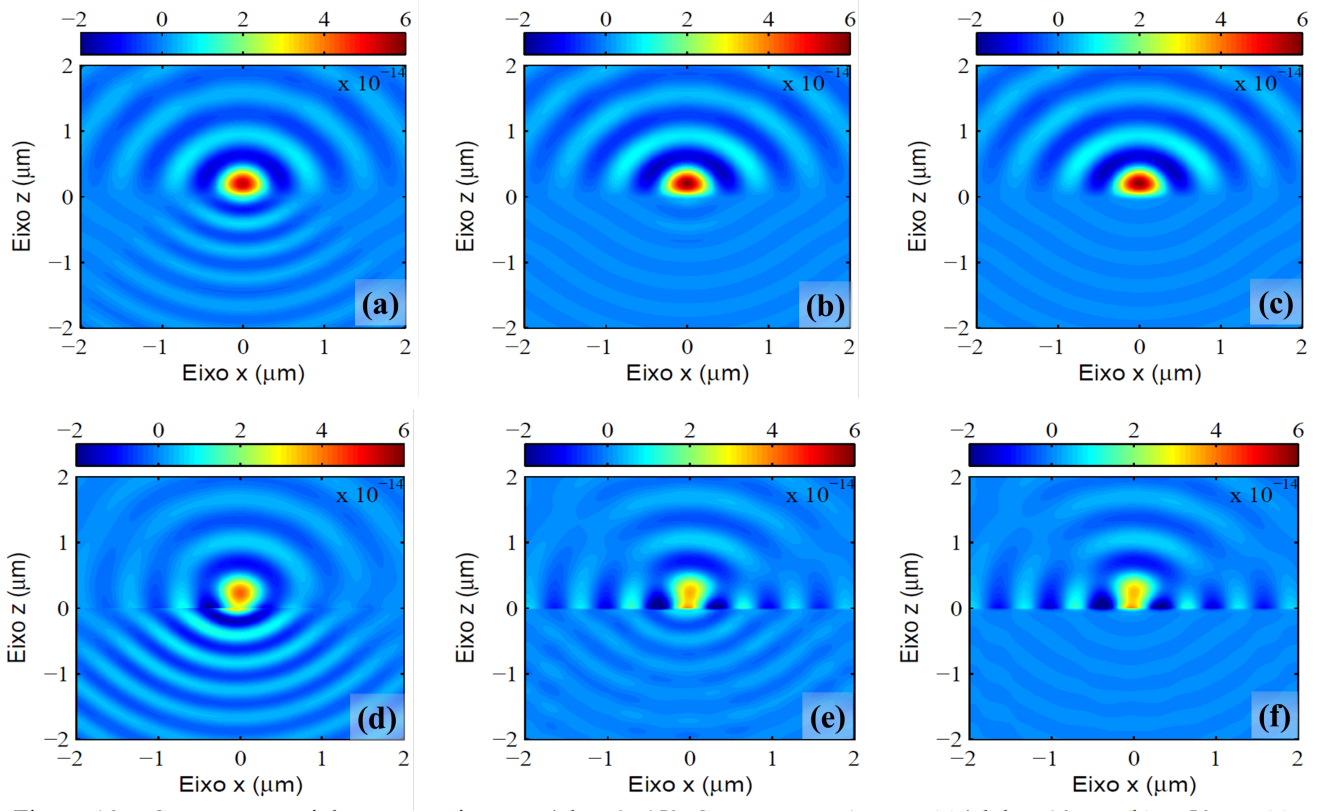


Figura 19 – Campo potencial magnético para $\theta' = 45^\circ$. A_x : (a) $\delta_g = 10nm$, (b) $\delta_g = 50nm$, (c) $\delta_g = 100nm$; A_z (d) $\delta_g = 10nm$, (e) $\delta_g = 50nm$, (f) $\delta_g = 100nm$.

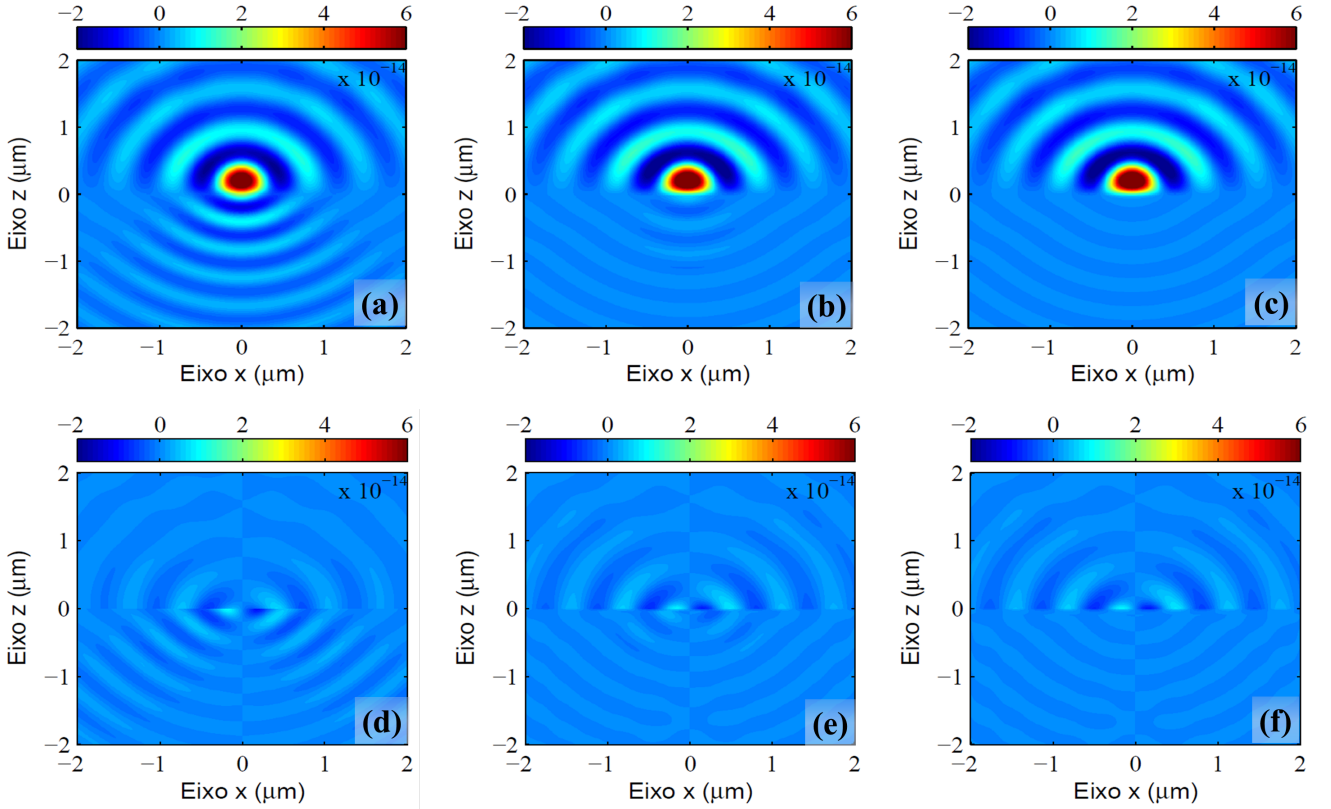
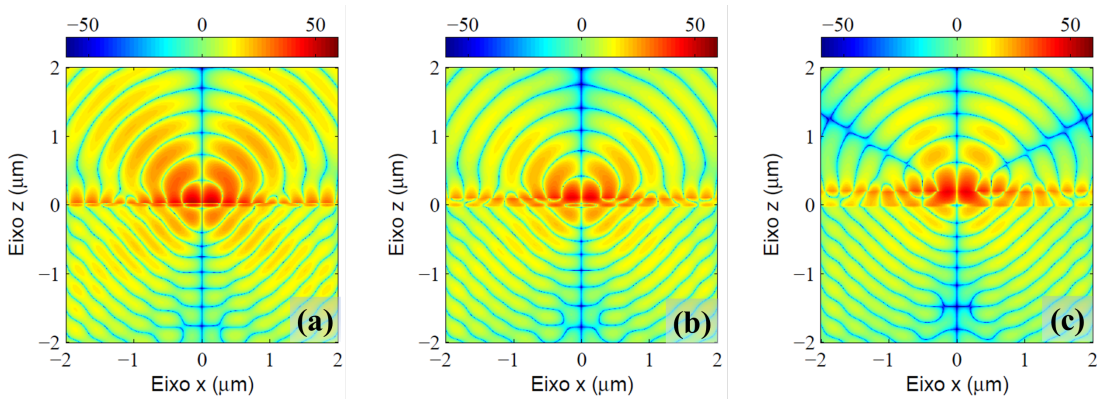


Figura 20 – Campo potencial magnético para $\theta' = 90^\circ$. A_x : (a) $\delta_g = 10nm$, (b) $\delta_g = 50nm$, (c) $\delta_g = 100nm$; A_z (d) $\delta_g = 10nm$, (e) $\delta_g = 50nm$, (f) $\delta_g = 100nm$.

A partir dos resultados gráficos podemos verificar que, para a orientação $\theta' = 0$ (VED- Dipolo Elétrico Vertical), a componente tangencial do campo potencial magnético é nula, ou seja, há predominância do modo TM. No caso intermediário, $\theta' = 45^\circ$, temos a contribuição de ambas as componentes na estrutura do sensor. Para a orientação $\theta' = 90^\circ$ (HED- Dipolo Elétrico Horizontal), a componente tangencial demonstra contribuir significativamente para os campos na estrutura, caracterizando predominância do modo TE. Para o caso do HED no espaço livre, só haveria contribuição da componente A_x . No entanto, na célula de análise a fonte dipolar esta orientada paralelamente à superfície do sensor. Assim, o campo A_z é excitado através dos coeficientes de acoplamento S^{TEM} . De forma geral, para todos os casos de orientação dipolar, temos uma melhor transmissão de campo na região do prisma dielétrico para $\delta_g = 10nm$. No caso em que $\delta_g = 100nm$, temos uma maior reflexão do campo na região da amostra, o que pode dificultar na leitura de sinal na saída do sensor SPCE. Entretanto, para esta espessura da camada de ouro, podemos verificar o surgimento de plamons de superfície, principalmente para a orientação vertical. Devemos ter em mente a importância destes plamons no acoplamento de campo radiado na região do prisma, sendo a característica que dá significado ao nome do sensor SPCE. Assim, a espessura de $\delta_g = 50nm$ parece ser ideal, sendo intermediária entre as duas necessidades básicas na estrutura do sensor, a capacidade considerável de transmissão das ondas através da folha de ouro e a excitação de plasmons de superfície da camada de ouro.

Para verificar a influência do separador químico (eletricamente inerte) foram realizadas análises de campo elétrico e magnético para $h = 20nm$, $100nm$ e $200nm$, novamente para os dipolos orientados em $\theta' = 0^\circ$, 45° e 90° , com $\phi' = 0$. Os gráficos foram gerados no plano xz em $y = 0$, para as componentes E_x , E_z e H_y utilizando $\delta_g = 50nm$ (melhor espessura da camada de ouro), $\Delta_c = 10nm$. Por causa da simetria dos campos, E_y , H_x e H_z são nulos em $y = 0$, para $\phi' = 0$. Para melhor visualização, os campos foram normalizados em $[-50, 50]dB$ e limitados em $[-2, 2]\mu m$ em x e z .



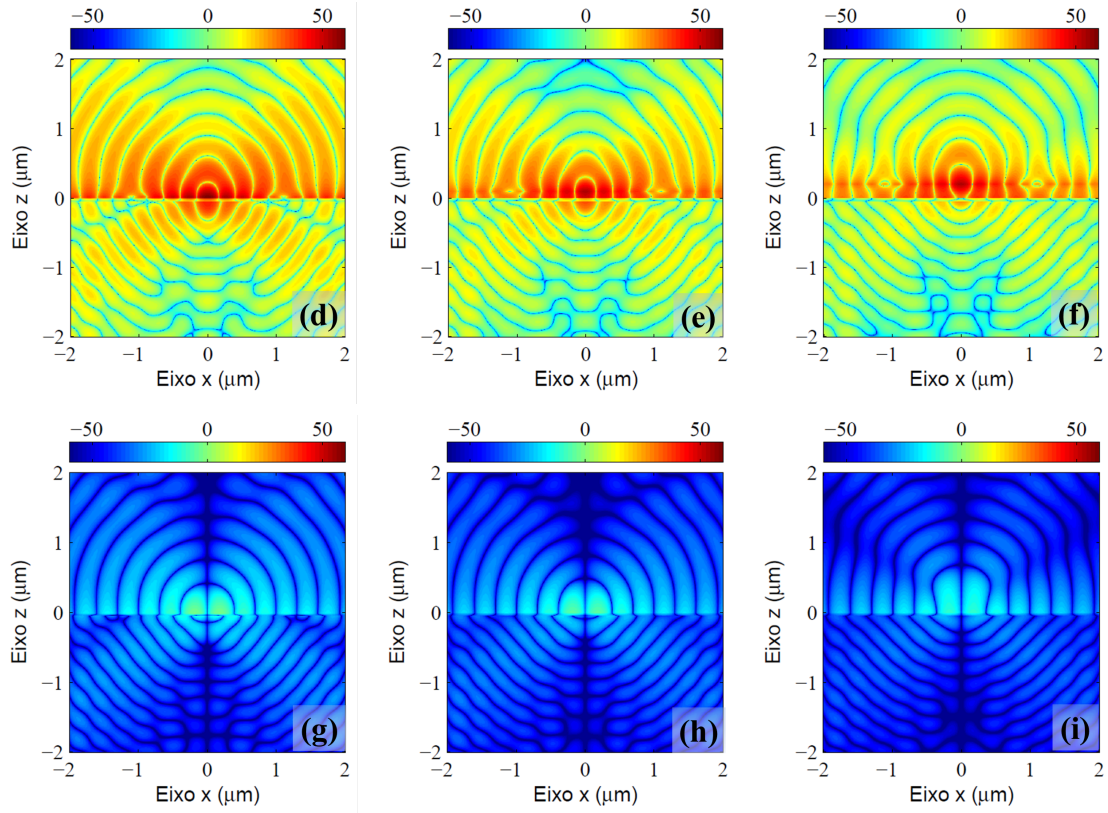
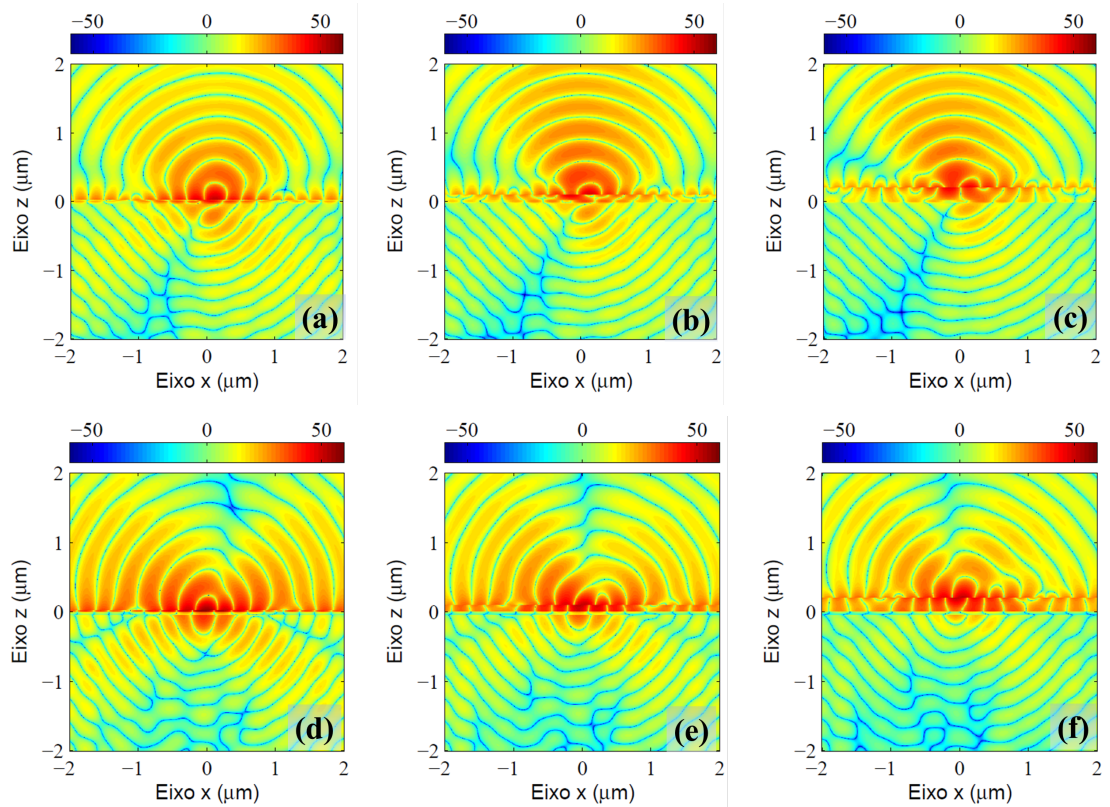


Figura 21 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para $\theta' = 0^\circ$. $20 \log |Re\{E_x\}|$: (a) $h = 20nm$, (b) $h = 100nm$, (c) $h = 200nm$, $20 \log |Re\{E_z\}|$: (d) $h = 20nm$, (e) $h = 100nm$, (f) $h = 200nm$, $20 \log |Re\{H_y\}|$: (g) $h = 20nm$, (h) $h = 100nm$, (i) $h = 200nm$.



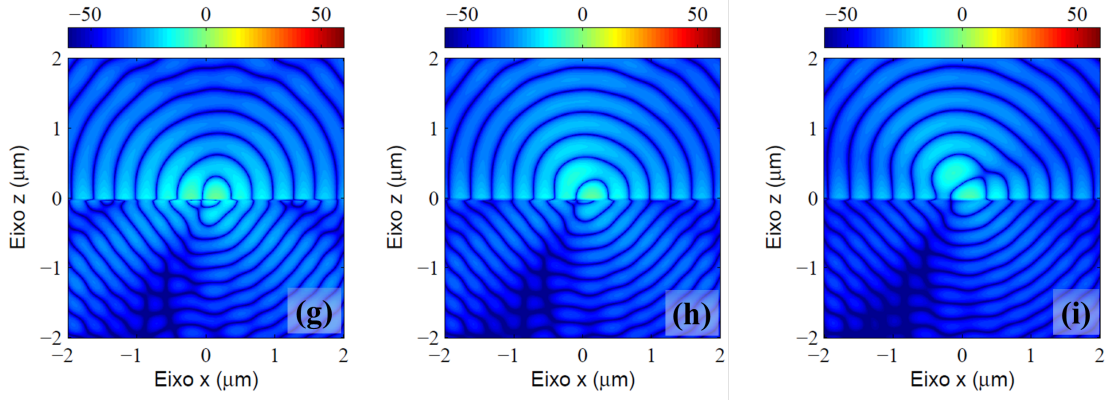


Figura 22 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para $\theta' = 45^\circ$. $20 \log |Re\{E_x\}|$: (a) $h = 20nm$, (b) $h = 100nm$, (c) $h = 200nm$, $20 \log |Re\{E_z\}|$: (d) $h = 20nm$, (e) $h = 100nm$, (f) $h = 200nm$, $20 \log |Re\{H_y\}|$: (g) $h = 20nm$, (h) $h = 100nm$, (i) $h = 200nm$.

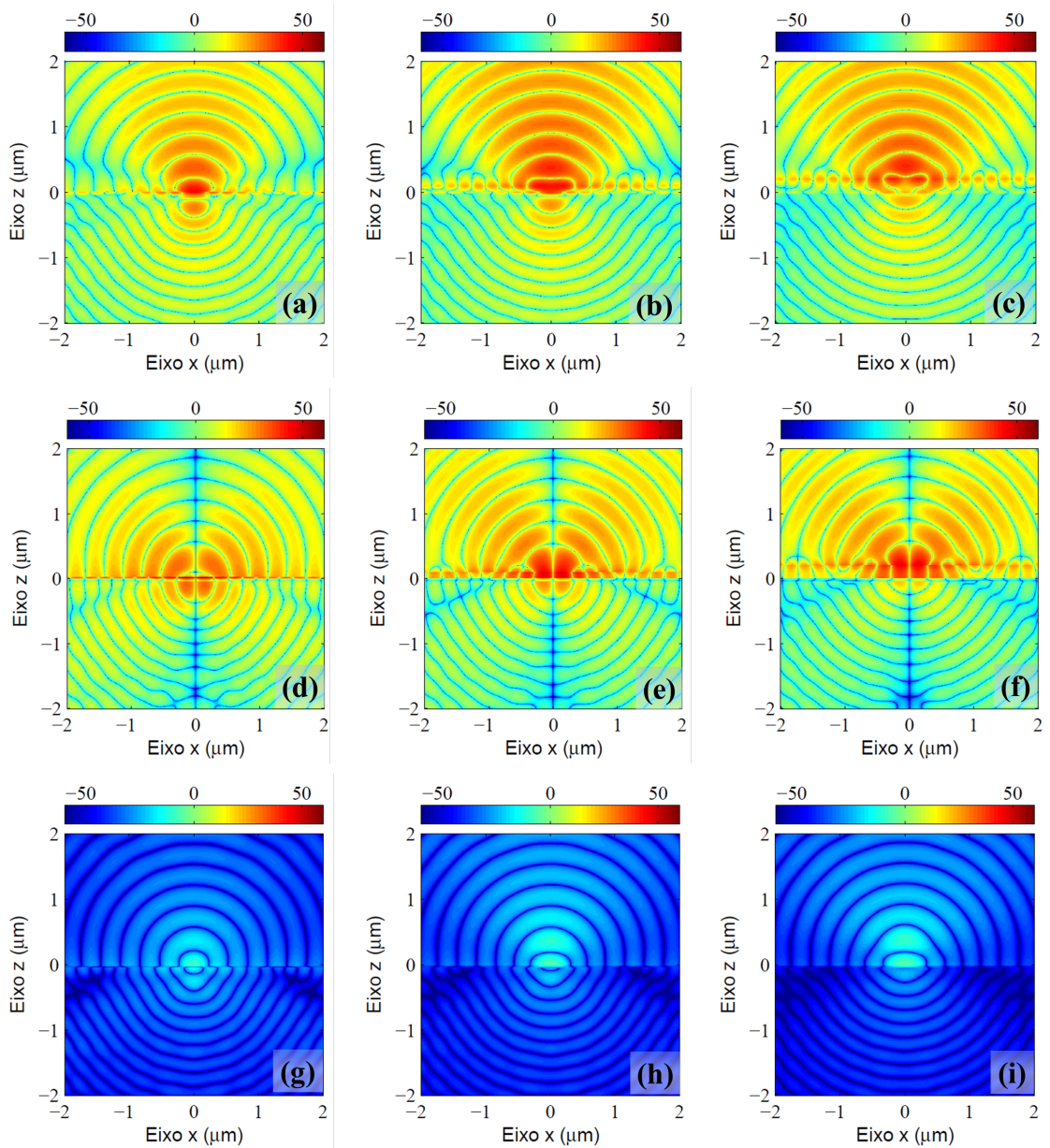


Figura 23 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para $\theta' = 90^\circ$. $20 \log |Re\{E_x\}|$: (a) $h = 20nm$, (b) $h = 100nm$, (c) $h = 200nm$, $20 \log |Re\{E_z\}|$: (d) $h = 20nm$, (e) $h = 100nm$, (f) $h = 200nm$, $20 \log |Re\{H_y\}|$: (g) $h = 20nm$, (h) $h = 100nm$, (i) $h = 200nm$.

A partir dos resultados obtidos, podemos constatar que de forma geral, o espaçamento h , entre as fontes dipolares e a folha de ouro, não introduz alterações significativas de campo próximo na região do prisma dielétrico, mas altera a distribuição de campo na região da amostra. Contudo, apesar de não ser tão significativo, o aumento da distância pode acarretar em uma excitação menos intensa de plasmons de superfície. Portanto, a partir deste ponto, consideramos $h = 20nm$ nas próximas análises.

Diferentemente dos resultados de potencial magnético, agora podemos verificar com mais exatidão a inclinação do dipolo equivalente para os casos VED, intermediário e HED. Para o caso HED, podemos notar uma considerável transmissão de campo na região do prisma. No entanto, note que não há excitação de plasmons de superfície na interface amostra/ouro, ou seja, o campo é proveniente apenas da radiação do dipolo, não possui característica direcional em função da excitação de ondas SPP. Para o caso intermediário, verifica-se a excitação considerável de plasmons de superfície e característica assimétrica de campo nos três meios. Na orientação VED, verifica-se que a radiação na região do prisma tem característica altamente direcional, sendo proveniente da radiação do dipolo vertical acoplada através da excitação dos plasmons de superfície, note também que nesta configuração, os plasmons são excitados com maior eficiência.

Em resumo podemos perceber que o modo HED, que excita de forma predominante modos TE, não excita eficientemente plasmons de superfície. Em contrapartida, o modo VED excita ativamente plasmons de superfície, acoplando ondas altamente polarizadas em TM na região do prisma, sendo este último o modo que apresenta melhor característica em relação ao sensor SPCE. A partir deste ponto, adotaremos a polarização VED como efetiva e consideraremos apenas o caso $\theta' = 0$.

5.3 Análise Espectral

Nas seções anteriores, definimos os valores de $h = 20nm$, $\delta_g = 50nm$ e $\theta' = 0^\circ$ como aproximadamente ideais na análise das principais características de campo no sensor SPCE equivalente. Note que a escolha de $\theta' = 0^\circ$ deixa as equações independentes de ϕ' . A escolha destes parâmetros, em especial a polarização VED, nos permite simplificar consideravelmente as equações de campo obtidas pelo método. Por conveniência, demonstramos que equações simplificadas assumem a forma:

$$\mathbf{A}_{1,2,3}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} A_{zz_{1,2,3}}^{mn}(z) \cos[k_x x] \cos[k_y y] \quad (5.1)$$

onde $k_x = [2\pi m/\Delta_c]$ e $k_y = [2\pi n/\Delta_c]$ são respectivamente os autovalores para o problema periódico em x e y , e ϵ_{mn} o número de Neumann duplo (4.141).

As componentes espectrais do campo potencial nos meios 1, 2 e 3, respectivamente, são:

$$A_{zz1}^{mn}(z) = -j\mu_0 \frac{1}{k_{z1}} \left[e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h)} \right] \quad (5.2)$$

$$A_{zz2}^{mn}(z) = -j\mu_0 \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z+\delta_g)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z+\delta_g)} \right] \frac{\varepsilon_2 \tilde{T}_{23}^{TM}}{\varepsilon_1 T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z1}h} \quad (5.3)$$

$$A_{zz3}^{mn}(z) = -j\mu_0 \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z+\delta_g) - k_{z1}h]} \frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} \quad (5.4)$$

onde os coeficientes generalizados de reflexão e transmissão do modo TM são:

$$\tilde{R}_{12}^{TM} = 1 - \left[\frac{T_{21}^{TM} [1 - R_{23}^{TM} e^{-2jk_{z2}\delta_g}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{-2jk_{z2}\delta_g}]} \right] \quad (5.5)$$

$$\tilde{T}_{23}^{TM} = \left[\frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}\delta_g}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{-2jk_{z2}\delta_g}]} \right] \quad (5.6)$$

Os coeficientes de Reflexão e Transmissão de Fresnel do modo TM foram definidos em (4.114) e (4.115). Note que (5.1) já foi escrita na forma da representação espectral em termos de funções cossenoidais, por meio da identidade definida na seção 4.4. Contudo, originalmente, a representação espectral da transformada inversa dupla série complexa de Fourier é realizada através do somatório duplo, de exponenciais complexas, de $m = -\infty : \infty$ e $n = -\infty : \infty$, definindo o domínio espectral discreto mn . Ao propor a representação em termos de funções cossenoidais através da identidade Euler, reduzimos o domínio espectral para $m = 0 : \infty$ e $n = 0 : \infty$. Dessa forma, devemos verificar a possibilidade de perda de informação no domínio espectral ao aplicarmos a identidade. Além disso, a análise dos termos espectrais A_{zz}^{mn} e dos coeficientes de transmissão e reflexão generalizados podem nos oferecer informações importantes a respeito dos termos dominantes na representação espectral do potencial magnético (5.1).

Nesta seção, verificaremos também a influência da concentração de Core-Shell AuNps no arranjo, sendo esta concentração caracterizada pela distância relativa entre estas nanopartículas. Três exemplos que refletem a concentração de nanopartículas no arranjo foram escolhidos: $\Delta_c = 1\mu m$, $\Delta_c = 10\mu m$ e $\Delta_c = 100\mu m$, sendo respectivamente da alta para a baixa concentração.

Na Fig. 24, é mostrada a distribuição espectral dos coeficientes de reflexão e transmissão generalizados no plano mn para $\Delta_c = 1\mu m$, $\Delta_c = 10\mu m$ e $\Delta_c = 100\mu m$. Para o caso de $\Delta_c = 1\mu m$, os termos de maior dominância estão próximos da origem, e os outros convergem rapidamente para valores fixos. À medida que o período da célula aumenta, os termos de maior dominância passam a ocorrer distante da origem, sendo caracterizados pelos evidentes picos de ressonância.

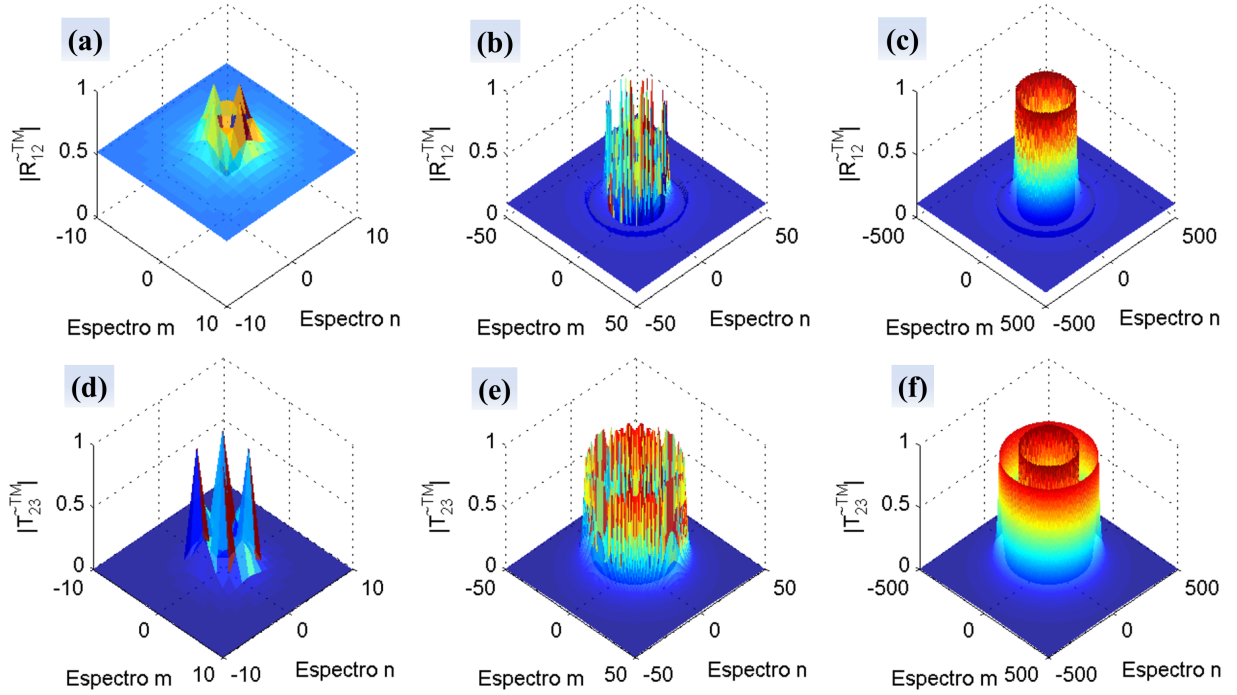


Figura 24 – Distribuição espectral no plano mn para $|\tilde{R}_{12}^{TM}|$: (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 10\mu m$, (c) $\Delta_c = 100\mu m$; e $|\tilde{T}_{23}^{TM}|$: (d) $\Delta_c = 1\mu m$, (e) $\Delta_c = 10\mu m$, (f) $\Delta_c = 100\mu m$. Normalizados em 1.

A partir da Fig. 24, um resultado fundamental é a característica de simetria cilíndrica que os termos espectrais apresentam no plano mn . Isto ocorre porque os autovalores k_x e k_y possuem a mesma estrutura e desempenham papéis similares na representação espectral. Devido à simetria, podemos expressar os autovalores através de $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ e escrever a constante de propagação k_z :

$$k_{zu} = \sqrt{k_u^2 - k_\rho^2} \quad (5.7)$$

Assim, dada a simetria, podemos limitar a análise espectral ao domínio mn $[0, +\infty]$. Portanto, para o caso em questão, torna-se possível aplicar a identidade de Euler sem perda de informação no domínio espectral. Em afirmação mais forte e útil, podemos fixar n em um valor qualquer, e realizar análises unidimensionais de m . Fixando $n = 0$, obtemos $k_\rho = [2\pi m/\Delta_c]$. Para os períodos $\Delta_c = 1\mu m$, $\Delta_c = 10\mu m$ e $\Delta_c = 100\mu m$, a Fig. 25 mostra os coeficientes generalizados do modo TM, e a Fig. 26 os coeficientes espectrais do campo potencial (5.1), todos no domínio espectral m , no intervalo $[0, M]$.

A Fig. 25 mostra o surgimento de dois picos de ressonância, estes surgem através dos polos dos coeficientes generalizados nas interfaces da estrutura. Por este motivo, a posição espectral destas ressonâncias é dependente da espessura da camada de ouro sobre o prisma dielétrico.

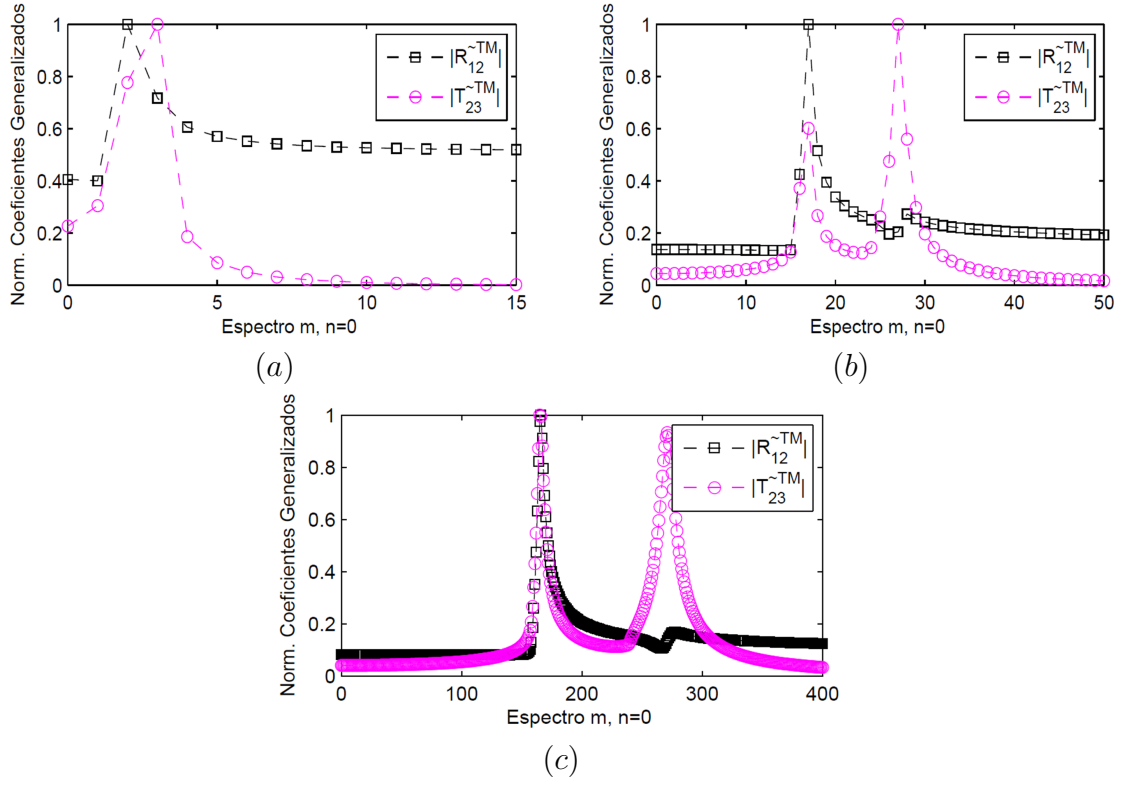


Figura 25 – Distribuição espectral de $|\tilde{R}_{12}^{TM}|$ e $|\tilde{T}_{23}^{TM}|$ em m , com $n = 0$ para : (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 10\mu m$, (c) $\Delta_c = 100\mu m$. Normalizados em 1.

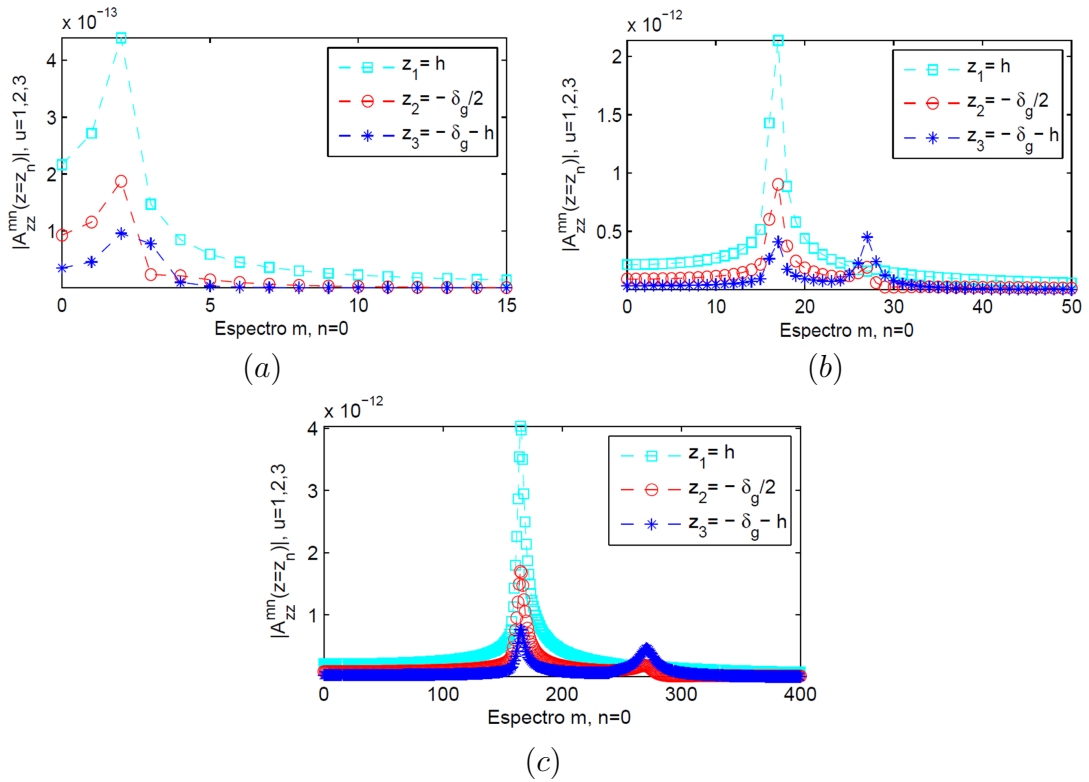


Figura 26 – Coeficientes espectrais $A_{zz}^{mn}(z)$ em $z = z_u$, com $u = 1, 2, 3$ e $n = 0$, para: (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 10\mu m$, (c) $\Delta_c = 100\mu m$.

Entretanto, [16] mostrou que para $\delta_g = 50nm$, os polos dos coeficientes generalizados e de Fresnel são praticamente os mesmos. Uma rápida análise mostra que a primeira ressonância vem do coeficiente de Fresnel R_{12}^{TM} , e está relacionado à constante de propagação plasmônica k_ρ^{SPP} através da relação de dispersão na interface amostra/ouro ($\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}$). A segunda ressonância resulta do coeficiente de Fresnel R_{23}^{TM} , estando relacionado ao modo de onda de superfície (Surface Wave) que aparece na interface ouro/prisma. Estes são os dois modos dominantes na representação espectral de (5.1). Uma forma aproximada de determinar a posição espectral destes polos em m é através da relação de dispersão nas interfaces, dada um n qualquer. Assim, os polos m_{SPP} e m_{SW} são localizados, respectivamente em:

$$m_{SPP} = Re \left\{ \frac{\Delta_c k_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r1}} - \left[\frac{2\pi n}{\Delta_c k_0} \right]^2} \right\} \quad (5.8)$$

$$m_{SW} = Re \left\{ \frac{\Delta_c k_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r3}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r2}} - \left[\frac{2\pi n}{\Delta_c k_0} \right]^2} \right\} \quad (5.9)$$

onde k_0 é a constante de propagação no espaço livre e ε_{r_u} a permissividade relativa do meio u . Desde que $k_\rho^{SPP} = (2\pi m_{SPP})/\Delta_c$, podemos aproximar o ângulo de ressonância plasmônica por:

$$\theta_{SPP} \simeq \sin^{-1} \left[\frac{k_\rho^{SPP}}{k_3} \right] \quad (5.10)$$

É também verificado que a medida que o período da célula Δ_c aumenta, há um deslocamento das ressonâncias para a direita, sugerindo a necessidade de um numero maior de termos significantes a serem computados na representação espectral.

Na Fig. 26, os resultados para os coeficientes espectrais do campo potencial magnético foram gerados em três pontos ao longo do eixo z (domínio espacial unidimensional), sobre a camada de ouro em $z = h$, dentro da folha de ouro $z = -\delta_g/2$ e abaixo da camada de ouro em $z = -(\delta_g + h)$. Para $\Delta_c = 1\mu m$, em $n = 0$, os polos SPP e SW apareceram em $m_{SPP} = 2$ e $m_{SW} = 3$, a constante de propagação plasmônica é $k_\rho^{SPP} = 1,2660$ com ângulo de acoplamento plasmônico $\theta_{SPP} = 56,57^\circ$. Para $\Delta_c = 10\mu m$, em $n = 0$, os polos SPP e SW surgiram em $m_{SPP} = 17$ e $m_{SW} = 27$, a constante de propagação plasmônica é $k_\rho^{SPP} = 1,0761$ com ângulo de acoplamento plasmônico $\theta_{SPP} = 45,18^\circ$. Neste, o campo total se mostrou mais intenso na ressonância plasmônica, e confinado na camada de ouro na segunda ressonância, o modo SW. Para $\Delta_c = 100\mu m$, em $n = 0$, os polos SPP e SW apareceram em $m_{SPP} = 165$ e $m_{SW} = 267$, a constante de propagação plasmônica é $k_\rho^{SPP} = 1,0444$ com ângulo de acoplamento plasmônico $\theta_{SPP} = 43,51^\circ$.

Com o aumento do período da célula, nos aproximamos cada vez mais do caso limite, onde a radiação total na célula é proveniente de uma única partícula isolada. Este caso foi estudado em [16], onde se obteve constante de propagação plasmônica

$k_p^{SPP} = 1.0458 - j0.0051$ e ângulo de acoplamento plasmônico $43,7^\circ$. Note que os resultados encontrados para $\Delta_c = 100\mu m$ são próximos aos obtidos no caso limite [16]. A partir das Fig. 25 e Fig. 26 é verificado também que o espectro discreto ganha característica de espectro contínuo à medida que nos aproximamos do caso limite.

Através da relação (5.10) torna-se possível realizar uma análise preliminar da variação do ângulo plasmônico em função da permissividade relativa no meio 1, para o sensor SPCE acoplado a um arranjo de nanopartículas com período $\Delta_c = 100nm$ (Deixamos claro que esta é uma análise preliminar por não ser o objetivo atual do trabalho). Na Fig. 27 é demonstrado o coeficiente transmissão generalizado em termos do ângulo de acoplamento θ .

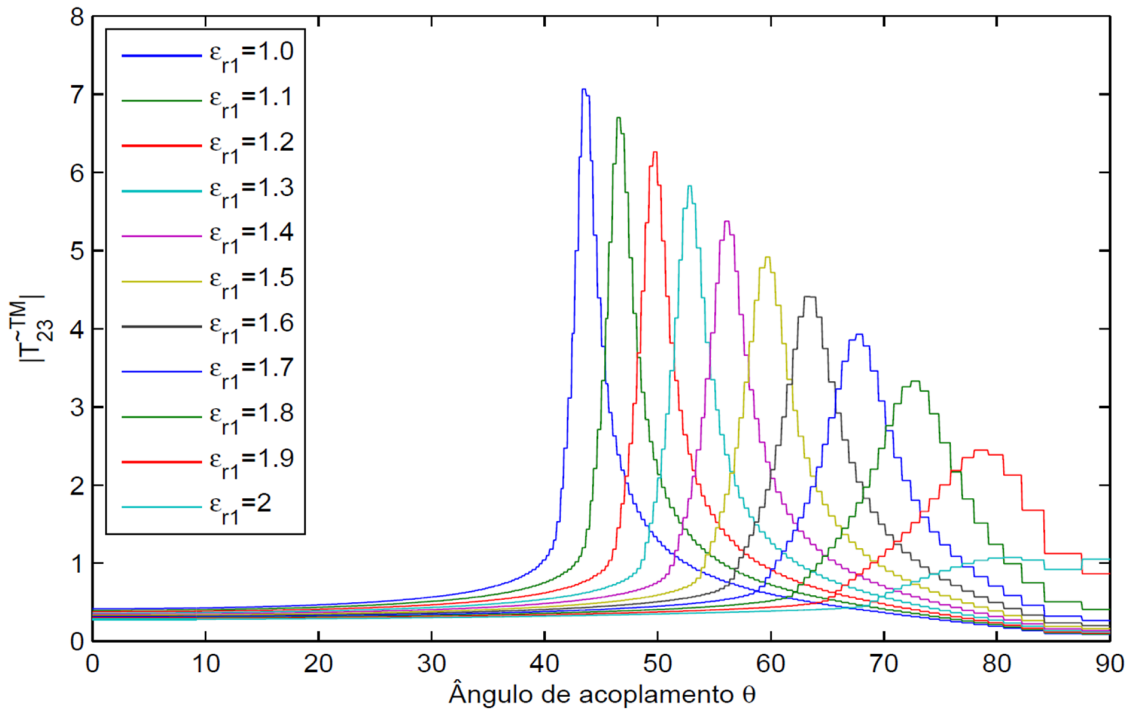


Figura 27 – Coeficiente generalizado de transmissão na interface ouro/prisma em função do ângulo de acoplamento θ

Em um primeiro momento, podemos verificar que com o aumento do índice de refração no meio 1, temos um deslocamento do ângulo de acoplamento na direção de 90° , e decaimento do sinal transmitido. Preliminarmente, podemos supor que estas serão as mudanças na resposta óptica do sensor.

Para verificar os efeitos dos polos SPP e SW, além da contribuição de um termo ordinário, no domínio espacial, foram gerados resultados gráficos de campo elétrico e magnético para $\Delta_c = 1\mu m$, utilizando os termos $m = 1$, $m_{SPP} = 2$ e $m_{SW} = 3$, para $\Delta_c = 10\mu m$, utilizando os termos $m = 7$, $m_{SPP} = 17$ e $m_{SW} = 27$, e para $\Delta_c = 100\mu m$, utilizando os termos $m = 40$, $m_{SPP} = 165$ e $m_{SW} = 267$. Para melhor visualização os gráficos foram gerados no plano xz em $[-2, 2]\mu m$.

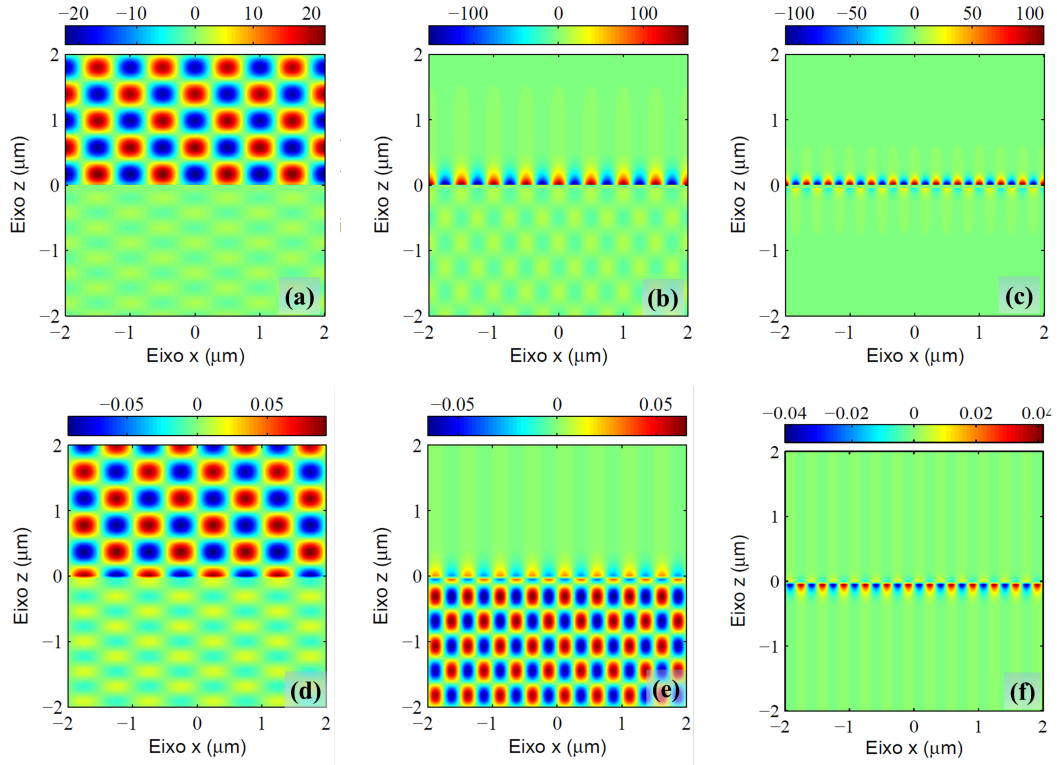


Figura 28 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no plano xz , em $y = 0$, por espectro. Célula com $\Delta_c = 1\mu m$, para $n = 0$, componente $Re\{E_z\}$: (a) $m = 1$, (b) $m = m_{SPP} = 2$, (c) $m = m_{SW} = 3$; $Re\{H_y\}$: (d) $m = 1$, (e) $m = m_{SPP} = 2$, (f) $m = m_{SW} = 3$.

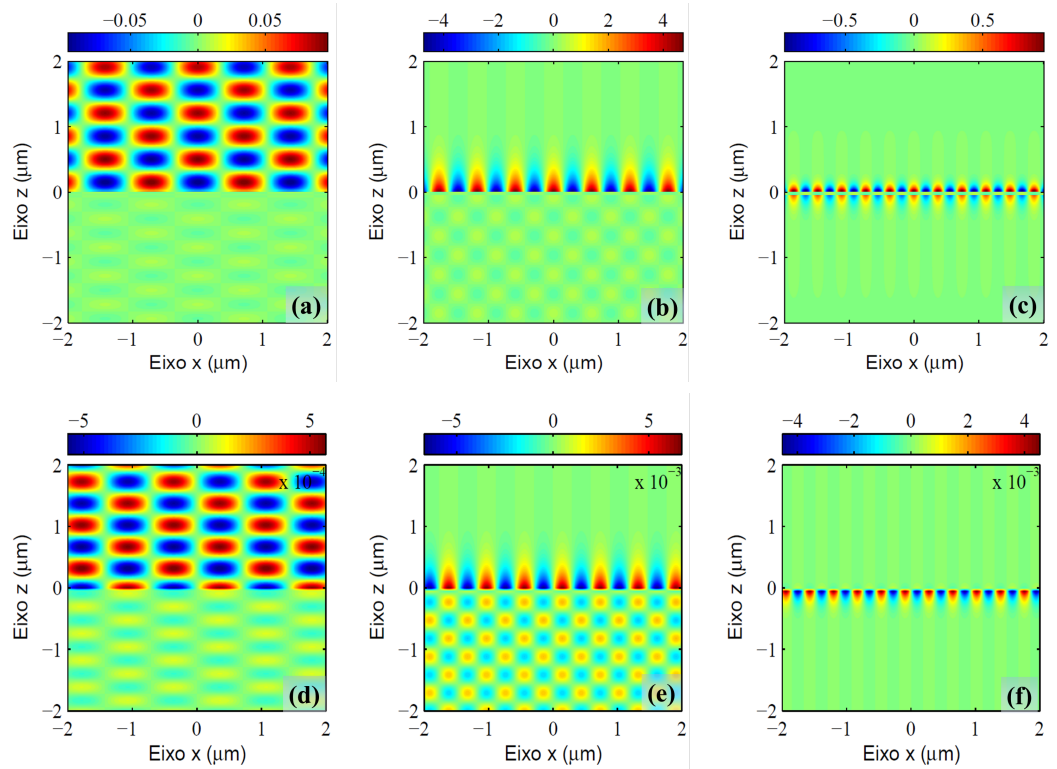


Figura 29 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no plano xz , em $y = 0$, por espectro. Célula com $\Delta_c = 10\mu m$, para $n = 0$, componente $Re\{E_z\}$: (a) $m = 7$, (b) $m = m_{SPP} = 17$, (c) $m = m_{SW} = 27$; $Re\{H_y\}$: (d) $m = 7$, (e) $m = m_{SPP} = 17$, (f) $m = m_{SW} = 27$.

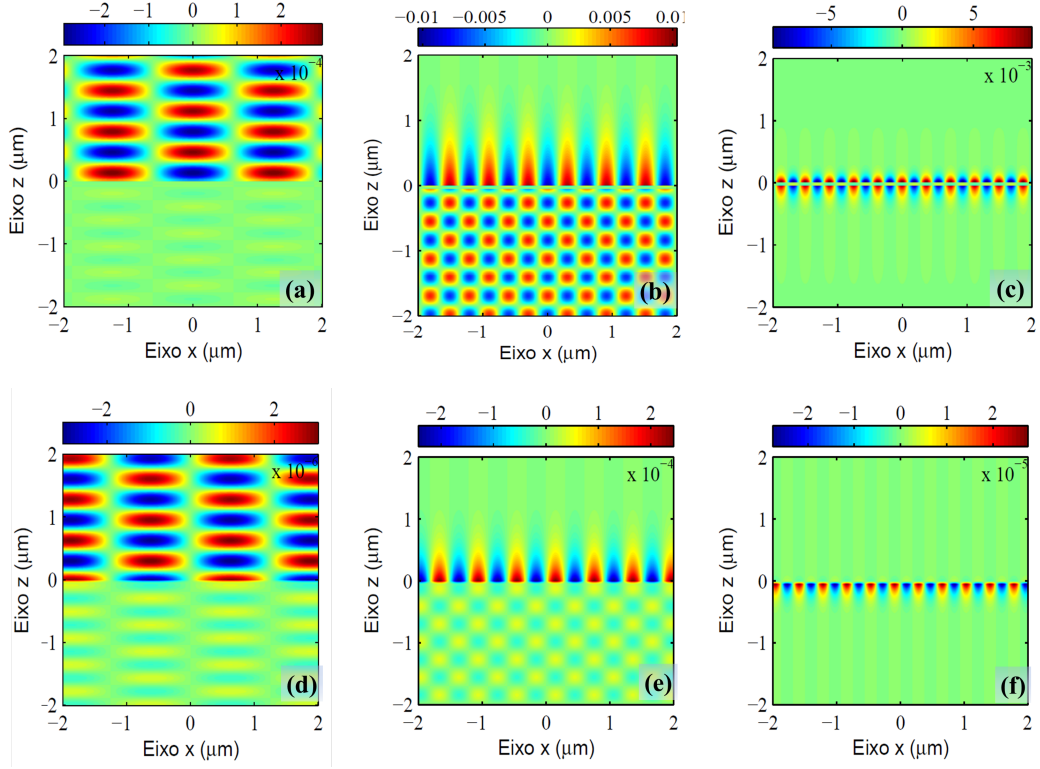


Figura 30 – Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no plano xz , em $y = 0$, por espectro. $\Delta_c = 100\mu m$, para $n = 0$, componente $Re\{E_z\}$: (a) $m = 40$, (b) $m = m_{SPP} = 165$, (c) $m = m_{SW} = 267$; $Re\{H_y\}$: (d) $m = 40$, (e) $m = m_{SPP} = 165$, (f) $m = m_{SW} = 267$.

Para os três casos de Δ_c , podemos verificar que os três tipos de polos contribuem de formas distintas para o campo total na estrutura do sensor. Os polos SW contribuem para a composição de ondas guiadas na camada de ouro, análogo a um guia de onda com paredes dielétricas. Os polos SPP contribuem com o acoplamento de campo na região do prisma, característica fundamental do sensor SPCE. Note que a distribuição de campo nestes casos, é equivalente a de ondas SPP excitadas através de ondas planas em interfaces metal/dielétrico, análogo ao que ocorre na configuração Kretschmann. Os termos m ordinários também desempenham um papel fundamental na distribuição de campo, em fatos, é a composição de diversos termos com variados comprimentos de onda que compõem o campo total, seja elétrico ou magnético, através da representação espectral, é claro, alguns destes termos contribuirão de forma mais significativa que outros. Através da análise gráfica da distribuição espectral nas Fig. 25 e Fig. 26, podemos notar que em suma, os termos espectrais $m > m_{SW}$ contribuem menos para a composição do campo total. Esta informação nos dá uma boa ideia do número de termos necessário para a representação de campo em uma célula Δ_c .

A seguir, são mostrados os campos elétrico e magnético no plano xz em $y = 0$ (Fig. 31) e no plano xy em $z = 0$ (Fig. 32), para $\Delta_c = 1\mu m$, $10\mu m$ e $100\mu m$, com as séries truncadas, respectivamente em, $M = 5, 20$ e 200 . Para melhor visualização, os resultados

foram gerados em $x[-3, 3]\mu m$ e $z[2, -2]\mu m$ na Fig. 31, e no plano $xy[-3, 3]\mu m$ na Fig. (32).

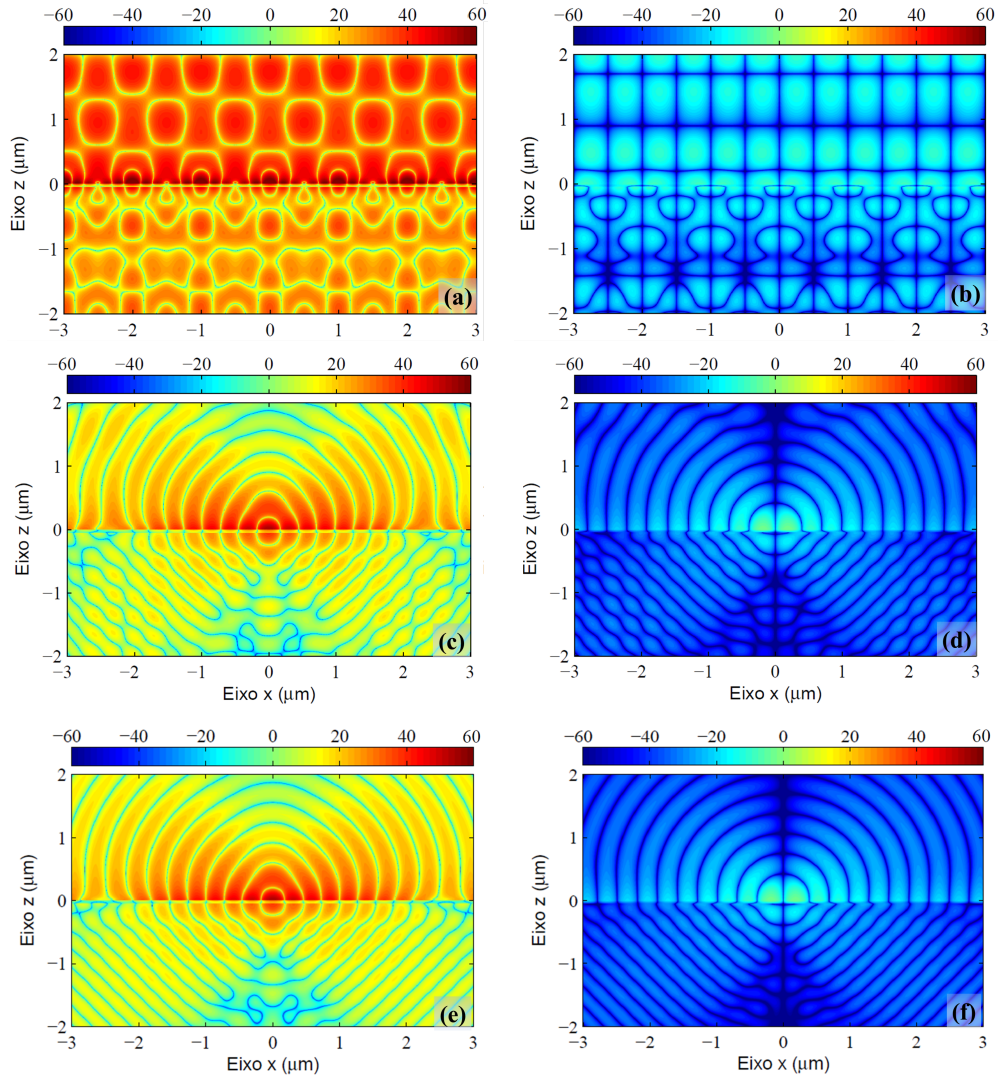
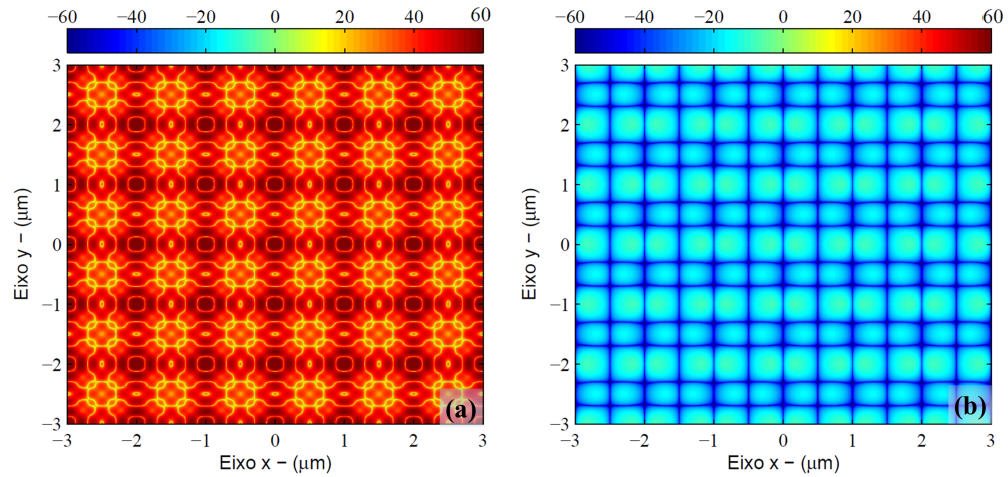


Figura 31 – Campos Elétrico e Magnético no plano xz , em $y = 0$, para $\Delta_c = 1\mu m$: (a) $20 \log |Re\{E_z\}|$, (b) $20 \log |Re\{H_y\}|$; $\Delta_c = 10\mu m$: (c) $20 \log |Re\{E_z\}|$, (d) $20 \log |Re\{H_y\}|$; $\Delta_c = 100\mu m$: (e) $20 \log |Re\{E_z\}|$, (f) $20 \log |Re\{H_y\}|$.



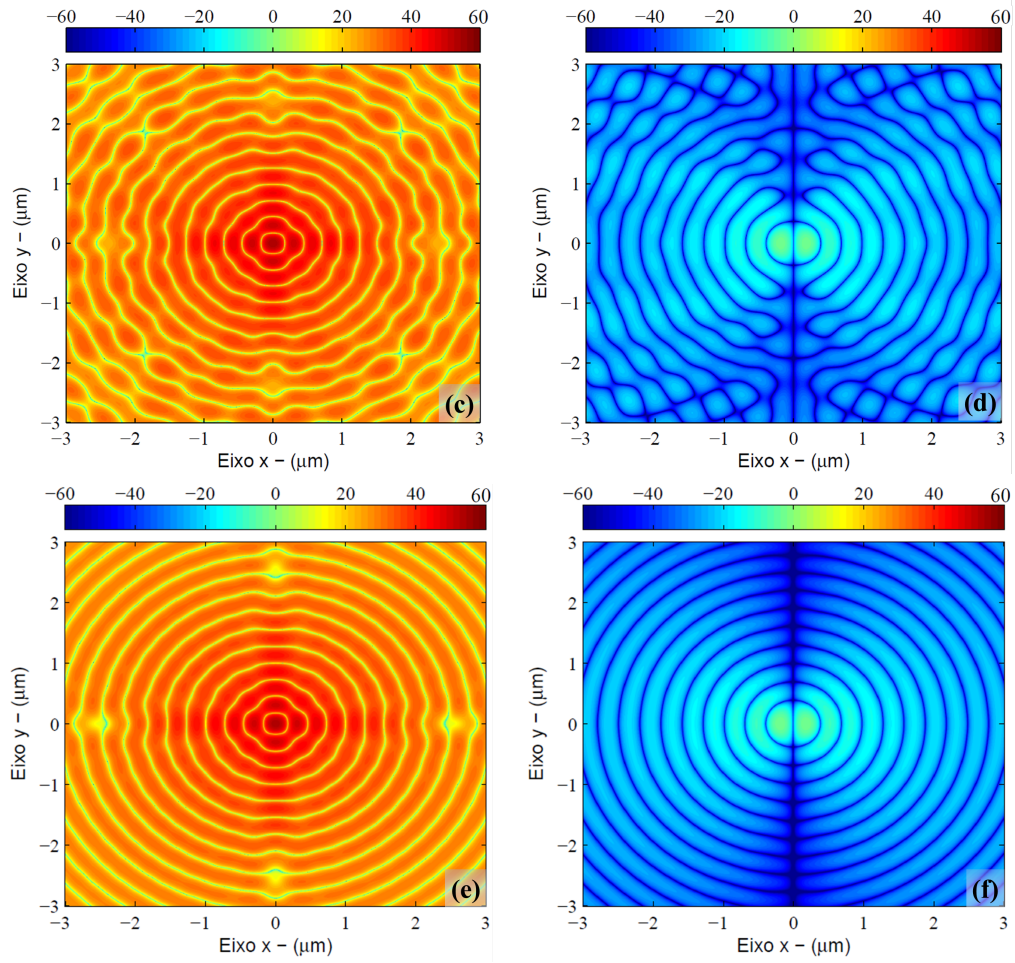


Figura 32 – Campos Elétrico e Magnético no plano xz , em $y = 0$, para $\Delta_c = 1\mu m$: (a) $20 \log |Re\{E_z\}|$, (b) $20 \log |Re\{H_y\}|$; $\Delta_c = 10\mu m$: (c) $20 \log |Re\{E_z\}|$, (d) $20 \log |Re\{H_y\}|$; $\Delta_c = 100\mu m$: (e) $20 \log |Re\{E_z\}|$, (f) $20 \log |Re\{H_y\}|$.

Em geral, as simulações foram geradas utilizando baixo custo computacional, realizando $(M + 1)^2$ iterações para o cálculo dos campos. A partir dos resultados na Fig. 31, é notável o surgimento de ondas SPP na interface amostra/metal, além da característica diretiva de ondas radiantes em TM na região do prisma, na direção θ_{SPP} em relação ao eixo z .

5.4 Convergência e Validação do Método

Até este ponto, demonstramos as características de campo na estrutura do sensor, avaliamos a contribuição dos termos na composição da representação espectral, e também verificamos que as condições de contorno e fronteira são atendidas na estrutura. Os resultados demonstraram coerência com a física que governa as interações eletromagnéticas na estrutura do sensor. Em [16], foram feitas análises do sensor SPCE, acoplado a uma única nanopartícula modelada como um dipolo hertziano com momento de corrente $I_0 l = 1 Am$,

utilizando o COMSOL Multiphysics, um software baseado no método dos elementos finitos, e o DCIM (Método das Imagens Complexas Discretas), um método semi-analítico utilizado na representação espectral dos campos na estrutura.

Para verificação da validade do método da PGF 3D, optamos por testar o caso limite, em que as nanopartículas encontram-se distantes umas das outras no arranjo planar, comparando a célula de análise com o caso estudado em [16]. Podemos utilizar essa abordagem, pois, no caso limite, a radiação eletromagnética individual de cada célula não interage com a célula vizinha, recaindo no problema de uma única nanopartícula excitada por uma fonte externa. Assim, as Core-Shell AuNps foram posicionadas em células de $\Delta_c = 60\mu m$, e tiveram seus momentos de corrente normalizados em 1. O módulo (dB) e fase de E_z são demonstrados na Fig. 33a e 33c através da PGF 3D, e nas Fig. 33b e 33d obtidos de [16], através do COMSOL Multiphysics.

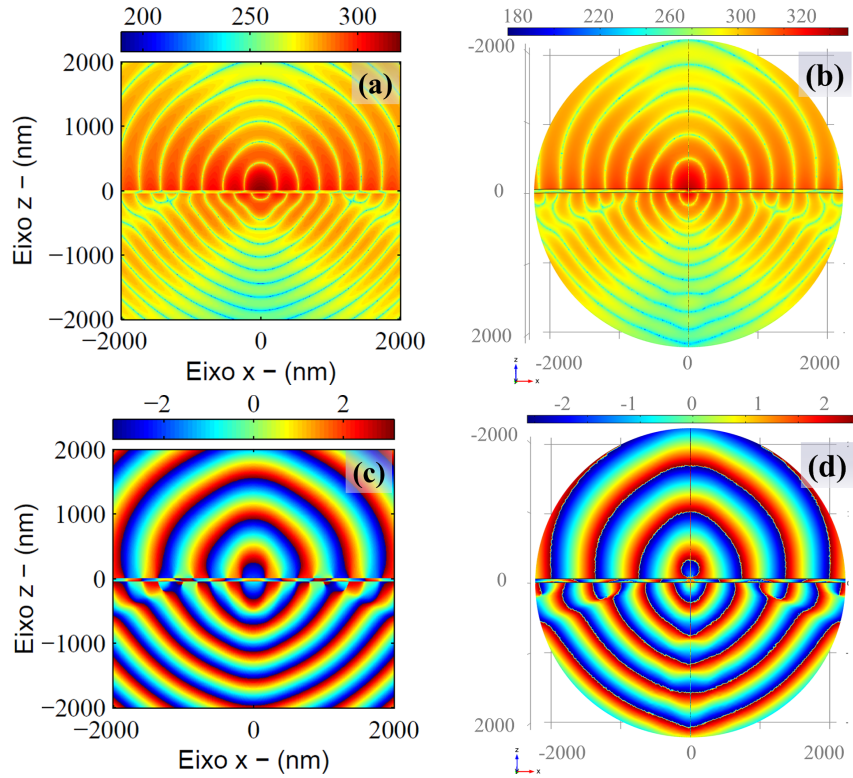


Figura 33 – Componente E_z , Módulo (dB) ($20 \log |Re\{E_z\}|$): (a) PGF3D, (b) [16]; Fase (rad) ($angle\{E_z\}$): (c) PGF3D, (d) [16].

A partir da Fig. 33, podemos verificar que os resultados obtidos através da PGF 3D se aproximam dos encontrados através da técnica numérica utilizada em [16]. Apesar de este ser um resultado qualitativo, devemos ter em mente que o método analítico utilizado na PGF3D está de acordo com uma bem fundamentada teoria envolvendo a representação de funções em espaços lineares, atendendo os requisitos do espaço de funções de quadrado integrável [8]. Como estas representações se encaixam no espaço de Hilbert, torna-se válido verificar como ultima análise a convergência destas séries.

Na Fig. 34, é demonstrada a convergência de $A_z(0,0,z)$ em termos do número de iterações $m \times n$. Para elucidar sobre a convergência nos três meios, escolhemos três pontos no espaço, sobre a superfície do sensor $z = h$, dentro da camada de ouro $z = -\delta_g/2$, e na região do prisma $z = \delta_g - h$. Como temos verificado até aqui, a posição dos polos de dominância na representação espectral é função do período da célula. Dessa forma, devemos verificar a convergência para os três casos de Δ_c até aqui analisados.

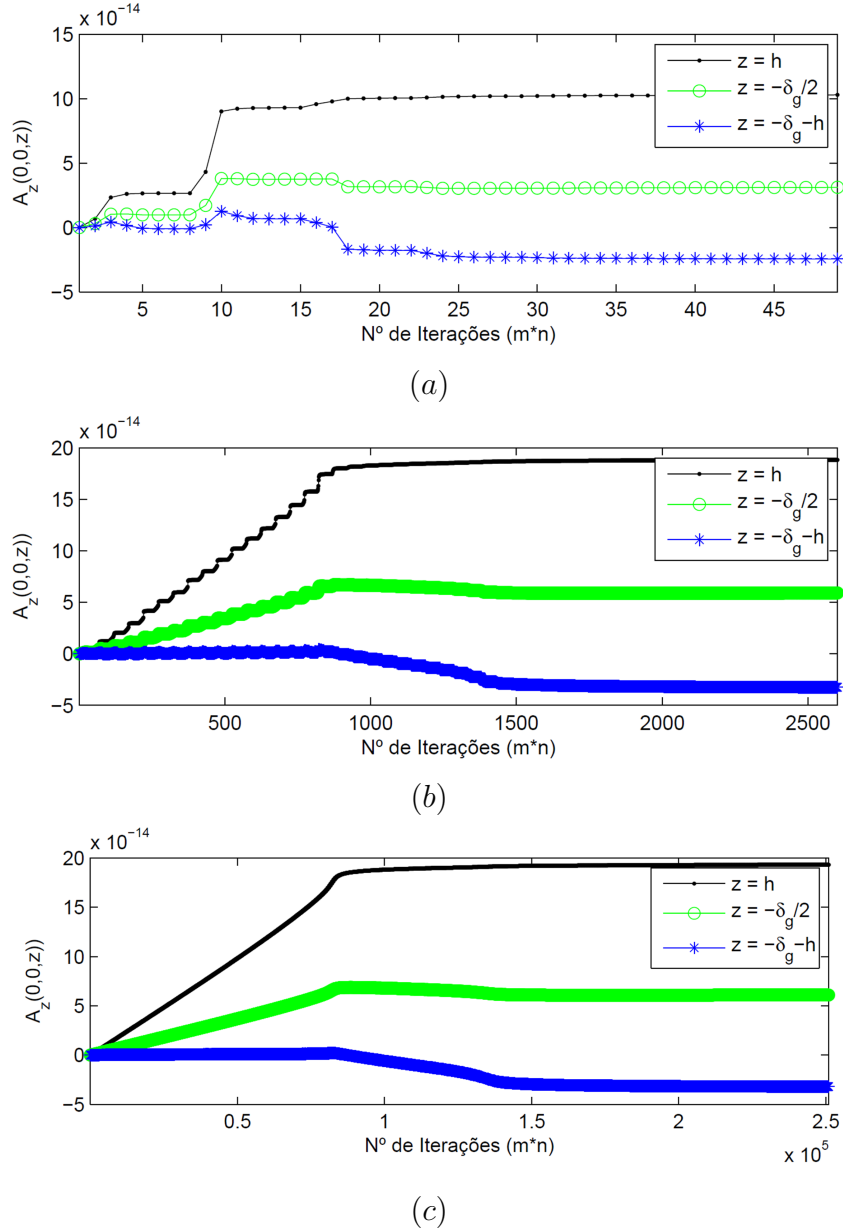


Figura 34 – Convergência de $A_z(0,0,z)$ para: (a) $\Delta_c = 1\mu m$, (b) $\Delta_c = 1\mu m$ e (c) $\Delta_c = 1\mu m$

A partir dos resultados gráficos da Fig. 34, verificamos que o campo potencial em todas as situações convergem, é claro, sendo necessário um número maior de termos na convergência do caso de maior célula. De fato, à medida que o período da célula de análise cresce, nos aproximamos cada vez mais do caso limite, onde a representação discreta passa a ser uma soma contínua infinita, ou seja, em termos de integrais.

6 Considerações Finais

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um modelo eletromagnético teórico para o sensor plasmônico na configuração SPCE, acoplado a um arranjo planar periódico de nanodipolos equivalentes. Para isso, utilizou-se o método da Função de Green Periódica (PGF) 3D aplicado ao potencial magnético vetorial, definido através do método da representação espectral da Série Complexa Dupla de Fourier. Para reduzir o número de termos nas representações espectrais, propôs-se utilizar a identidade de Euler, alterando a representação em termos de exponenciais complexas, para a representação em termos de funções cossenoidais, reduzindo assim o custo computacional em até quatro vezes.

Em um primeiro momento, foi verificado que o potencial magnético, na forma em que foi definido através do método da PGF, atende todas as condições de contorno e fronteira na estrutura do sensor, sendo estas condições de Neumann, Limite, Periódicas e de Continuidade dos Campos e Fluxos, Elétrico e Magnético.

Através do potencial magnético, foram realizadas simulações de campo na estrutura variando os parâmetros de h , δ_g , Δ_c , θ' e ϕ' . A partir dos resultados de campo potencial magnético, constatamos que $\delta_g = 50nm$ apresentou ser a espessura ideal da camada de ouro na estrutura do sensor para a frequência de operação. Os resultados de campo elétrico e magnético mostraram que a excitação de ondas plasmônicas, tal como o acoplamento de ondas altamente polarizadas em TM, surge com maior eficiência quando os dipolos equivalentes estão orientados em $\theta' = 0$ (VED). No caso da distância relativa entre o arranjo e a superfície do sensor, definida através do espaçador químico, não foram verificadas grandes alterações nos resultados para a variação do parâmetro h , apenas singelas alterações de intensidade na região do prisma. É claro, em um primeiro momento, consideramos que a substância é eletricamente inerte, e não sofre polarização elétrica.

Utilizando a análise espectral, verificamos o surgimento dos polos SPP e SW no domínio espectral mn , para três períodos de células. A análise espectral produziu resultados sobre a convergência das séries, além dos termos de maior contribuição na representação espectral da PGF. Apesar do surgimento do polo SW, proveniente do guiamento na região da camada de ouro, o polo SPP se mostrou contribuir dominantemente na representação espectral.

Através da análise espectral, podemos aproximar o ângulo de acoplamento plasmônico para uma determinada concentração de nanopartículas no arranjo periódico. Como análise preliminar, verificamos a alteração do ângulo plasmônico em função da permis-

sividade elétrica da amostra. A análise espectral também produziu resultados sobre a contribuição individual das principais componentes espectrais no domínio espacial, sendo este um resultado interessante sobre como o campo total, de uma fonte próxima, pode ser composto através de ondas planas de diferentes constantes de propagação.

À medida que o período da célula de análise na estrutura aumenta, nos aproximamos cada vez mais do caso limite, em que não há interação entre as nanopartículas no arranjo. A convergência do método se mostrou fortemente ligada ao período da célula de análise, sendo rápido para células relativamente menores, se tornando lento a medida que aumentamos o período da célula. Assim, constatamos a necessidade de um número maior de termos, na convergência do método, para períodos relativamente maiores. Nesta situação temos a transição do espectro discreto para o espectro contínuo, quando o somatório na representação espectral se torna uma integral. Contudo, a transição de espectro discreto para contínuo ainda encontra algumas dificuldades, desde que no espectro discreto, a constante de propagação k_ρ é puramente real, por outro lado, no espectro contínuo k_ρ apresenta uma pequena parte imaginária, como foi verificado por [16]. Esta pequena parte imaginária pode ser enxergada como as perdas no material.

[16] utilizou a identidade de Sommerfeld para alterar a representação espectral em termos de integrais infinitas de funções de Hankell, para integrais semi-infinitas de funções de Bessel. Análogo a essa técnica, aqui aplicamos a identidade de Euler para alterar a representação da PGF em termos de exponenciais complexas, para funções cossenoidais, reduzindo os somatórios infinitos a somatórios semi-infinitos.

Os resultados de campo demonstraram coerência e consistência, sendo observada a radiação de ondas polarizadas em TM, com alta diretividade na região do prisma, que em campo distante deve formar a característica da saída do sensor, o cone de luz. Em geral, os resultados obtidos apresentaram boa concordância, tanto matemática quanto física, demonstrando que o método da PGF 3D é eficiente, e pode ser utilizado como ferramenta auxiliar no projeto e otimização do sensor na configuração SPCE.

6.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros propomos verificar a possibilidade de cálculo de campo distante a partir do modelo eletromagnético obtido, verificando assim a diretividade e intensidade de campo distante em função das características refrativas da amostra. Além disso, verificar as características de decaimento temporal da radiação emitida pelos fluoróforos.

Propomos utilizar o método como ferramenta auxiliar na elaboração de um novo modelo eletromagnético, considerando um sensor na configuração SPCE, com uma fina camada de grafeno sobre um substrato dielétrico que separa a amostra da folha de ouro.

Para esta análise é proposto utilizar as funções Diádicas de Green aliadas ao método dos dipolos discretos (CDM), considerando um número finito de dipolos na amostra.

6.3 Trabalhos Publicados Durante o Mestrado

- 1 - A. F. S. Cruz, T. D. Rosso, V. A. Dmitriev & K. Q. Costa. Spectral Analysis of a Surface Plasmon Resonance Sensor of Nanoparticles by Periodic Green Function. Águas de Lindóia - SP: *SBFOTON Conference NCE 2018*, 2018.
- 2 - A. F. S. Cruz, N. W. P. Souza, V. A. Dmitriev & K. Q. Costa. Modelo Eletromagnético de Sensor Plasmônico Acoplado a Arranjo de Nanopartículas via PGF 3D. Santa Rita do Sapucaí - MG: *MOMAG 2018/13º CBMag, 18º SBMO/LAWOFS*, 2018.
- 3 - A. F. S. Cruz, N. W. P. de Souza & K. Q. Costa. Análise de Arranjo Periódico de Nanodipolos Sobre Plano de Ouro Através da Função de Green 3D. Campina Grande - PB: *SBrT 2018 - XXXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*, 2018.
- 4 - A. F. S. Cruz & K. Q. Costa. Extinction Efficiency and Electromagnetic Fields of Isolated and Coupled Core-Shell Nanoparticles. *JCIS - Journal of Communication and Information Systems*, v. 33, p. 12 - 21, 2018.
- 5 - N. W. P. Souza, J. S. Costa, R. C. Santos, A. F. S. Cruz, T. D. Rosso, & K. Q. Costa. Modal Analysis of Surface Plasmon Resonance Sensor Coupled to Periodic Array of Core-Shell Metallic Nanoparticles. *Cap.9, Resonance, Prof. Jan Awrejcewicz, InTech*, 2017.
- 6 - R. C. Santos, K. Q. Costa, J. S. Costa & A. F. S. Cruz. Análise do Efeito da Distância entre Nanopartículas de Ouro na Resposta de Sensores Plasmônicos. São Pedro - SP: *SBrT 2017 - XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*, 2017.

Referências

- 1 X. Huang, R. O'Connor and E. A. Kwizera. Gold Nanoparticle Based Platforms for Circulating Cancer Marker Detection. Sydney, NSW: *Nanotheranostics*, vol. 1, pp. 80-102, 2017. Citado na página [23](#).
- 2 D. W. Pohl, A. Alu, N. Engheta and F. Marquier. Optical Antennas. *Forthcoming Publications: Science*, PRL, 2013. Citado na página [23](#).
- 3 J. Homola. Surface Plasmon Resonance Based Sensors, ser. Springer Series on Chemical Sensors and Biosensors. New York: *Springer Berlin Heidelberg*, 2006. Citado na página [23](#).
- 4 K. Q. Costa, J. S. Costa, V. Dmitriev, T. D. Rosso, O. Pandoli and Q. R. Auelio. Analysis of surface plasmon resonance sensor coupled to periodic array of gold nanoparticles. in *IMOC 2015 SBMO/IEEE MTT-S International*, Nov 2015, pp. 1–5. Citado 2 vezes nas páginas [23](#) e [32](#).
- 5 S. A. Maier. Plasmonics: Fundamentals and Applications, 1st ed. New York, NY, USA: *Springer*, pp. 65–87, 2007. Citado 10 vezes nas páginas [23](#), [26](#), [27](#), [29](#), [30](#), [31](#), [32](#), [34](#), [35](#) e [36](#).
- 6 A. F. S. Cruz, R. C. Santos, P. F. Ferraz, J. S. Costa and K. Q. Costa, Estudo Analítico do Espalhamento de Rayleigh em Nanopartículas de Ouro do Tipo Core-Shell, Porto Alegre - RS: *MOMAG 2016/12º CBMag, 17º SBMO/LAWOFS*, 2016. Citado 6 vezes nas páginas [23](#), [24](#), [27](#), [32](#), [36](#) e [38](#).
- 7 L. A. Lyon, M. D. Musick, and M. J. Natan. Colloidal au-enhanced surface plasmon resonance immunosensing. *Analytical Chemistry*, vol. 70, 24: pp. 5177-5183, 1998. Citado 2 vezes nas páginas [23](#) e [36](#).
- 8 R. Marani, M. Grande, V. Petruzelli and A. D'Orazio. Plasmonic bandgaps in 1D arrays of slits on metal layers excited by out-of-plane sources, *International Journal of Optics*, Hindawi, 2012. Citado na página [23](#).
- 9 T. Sringer, M. L. Ermini, B. Spacková, J. Jablonku, and J. Homola. Enhancing Sensitivity of Surface Plasmon Resonance Biosensors by Functionalized Gold Nanoparticles: Size Matters. *Analytical Chemistry, American Chemical Society*, 2014. Citado na página [23](#).
- 10 M. A. Cooper. Optical biosensors in drug discovery. *Nature Reviews Drug Discovery* pp. 515-528, 2002. Citado na página [23](#).

- 11 J. S. Costa, A. F. S. Cruz, R. C. Santos and K. Q. Costa. Effect of Dielectric Shell on Gold Nanoparticles in a Surface Plasmon Resonance Sensor Response, Porto Alegre - RS: *MOMAG 2016/12º CBMag, 17º SBMO/LAWOFS*, 2016. Citado na página 23.
- 12 C. P. J. Rodríguez, M. M. Martínez, F. F. J. Rodríguez, N. B. Tomás, R. Ortuño, L. S. Peransí, and A. Martínez. Demonstration of near infrared gas sensing using gold nanodisks on functionalized silicon. *Opt. Express* 19, pp. 7664-7672, 2011. Citado na página 23.
- 13 O. Sqalli, I. Utke, P. Hoffmann and F. M.-Weible. Gold elliptical nanoantennas as probes for near field optical microscopy. *J. of Appl. Physics*, vol. 92, pp. 1078-1083, July 2002. Citado na página 23.
- 14 A. Ahmadi, S. Ghadarghadr, and H. Mosallaei. An optical reflectarray nanoantenna: The concept and design. *Opt. Express*, vol. 18, pp. 123-133, 2010. Citado na página 23.
- 15 J. Malicka, I. Gryczynski, Z. Gryczynski e J. R. Lakowicz. Use of Surface Plasmon-Coupled Emission to Measure DNA Hybridization. *Anal Biochem*, pp. 208-215, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 36.
- 16 N. W. P. Souza. Análise de Sensores Plasmônicos Baseados em Nano Estruturas Estratificadas Utilizando o Método das Imagens Complexas Discretas. Tese, Belém - PA: *Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE-UFPA*, 2018. Citado 11 vezes nas páginas 13, 23, 24, 25, 31, 35, 36, 75, 76, 80 e 81.
- 17 N. W. P. de Souza, J. S. Costa, R. C. Santos, A. F. S. da Cruz, T. D. Rosso, and K. Q. da Costa. Modal Analysis of Surface Plasmon Resonance Sensor Coupled to Periodic Array of Core-Shell Metallic Nanoparticles. *Cap.9, Resonance, Prof. Jan Awrejcewicz, InTech*, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 36.
- 18 A. F. S. Cruz, N. W. P. de Souza, V. A. Dmitriev and K. Q. Costa. Modelo Eletromagnético de Sensor Plasmônico Acoplado a Arranjo de Nanopartículas via PGF 3D. Santa Rita do Sapucaí - MG: *MOMAG 2018/13º CBMag, 18º SBMO/LAWOFS*, 2018. Citado na página 25.
- 19 I. Gryczynski, J. Malicka, Z. Gryczynski & J. R. Lakowicz. Surface plasmon-coupled emission with gold films. *The Journal of Physical Chemistry B*, vol.33, pp. 12568-12574, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 24.
- 20 NanoComposix. Disponível: <https://nanocomposix.com/>. Acessado em: 07/03/2016. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 24.

- 21 M. M. Tajdini, and H. Mosallaei. Characterization of large array of plasmonic nanoparticles on layered substrate: dipole mode analysis integrated with complex image method. *Applied EM and Optics Laboratory Northeastern University*, 2011. Citado na página 24.
- 22 C. F. Bohren and D. R. Huffman, Particles small compared with the wavelength, in Absorption and Scattering of Light by Small Particles. 1st ed. New York - NY: Wiley, 1983, pp. 130-154. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- 23 C. A. Balanis. Advanced engineering electromagnetics. *John Wiley & Sons*, 1999. Citado na página 27.
- 24 A. M. Amaral. Nanoestruturas plasmônicas para aplicações em Ótica Não Linear. Dissertação, *Departamento de Física - UFPE*, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 34 e 35.
- 25 J. J. Mock, R. T. Hill, A. Degiron, S. Zauscher, A. Chilkoti, & D. R. Smith. Distance-dependent plasmon resonant coupling between a gold nanoparticle and gold film. *Nano letters*, v.8, pp. 2245-2252, 2008. Citado na página 35.
- 26 M. Liu, T. W. Lee, S. K. Gray, O. Guyot-Sionnest, & M. Pelton. Excitation of dark plasmons in metal nanoparticles by a localized emitter. *Physical review letters*, 102, pp. 107401, (2009) Citado na página 35.
- 27 D. Marsh. Reaction fields in the environment of fluorescent probes: polarity profiles in membranes. *Biophysical journal*, v. 96, pp. 2549-2558, 2009. Citado na página 38.
- 28 C. A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design. MICROSTRIP ANTENNAS, third edition, John wiley sons,(2005). Citado 3 vezes nas páginas 26, 40 e 41.
- 29 G. B. Arfken and H. J. Weber. Mathematical Methods For Physicists. 6th ed. San Diego, CA, USA: Elsevier ,2005. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 45.
- 30 D. G. Dudley. Mathematical foundations for electromagnetic theory. New York: IEEE press, 1994. Citado 8 vezes nas páginas 26, 44, 45, 48, 49, 62, 64 e 65.
- 31 W. C. Chew. Waves and Fields in inhomogeneous media. *IEEE press* ,1995. Citado 3 vezes nas páginas 26, 53 e 56.
- 32 P. H. Chung, C. Tregidgo, & K. Suhling. Determining a fluorophore's transition dipole moment from fluorescence lifetime measurements in solvents of varying refractive index. *Methods and applications in fluorescence*, v.4, n.4, p. 045001, 2016. Citado na página 61.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstrações Gerais

A.1 Modelo de Drude: Resposta Óptica dos Metais.

Nesta seção demonstramos o motivo pelo qual o modelo de Drude é chamado de resposta óptica dos metais. Partindo de (2.13):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right] \mathbf{p} = -e\mathbf{E}$$

Aplicando a transformada de Fourier:

$$\mathbf{p} = -\mathbf{E} e/(j\omega + \gamma)$$

Lembrando que a condutividade complexa é dada por $\sigma = nep/m_e$, assim:

$$\sigma(\omega) = -j \frac{ne^2/m_e}{\omega - j\gamma}$$

Substituindo em (2.12):

$$\varepsilon(\mathbf{K}, \omega) = 1 + \frac{\sigma(\mathbf{K}, \omega)}{j\omega\varepsilon_0} = 1 - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} j \frac{ne^2/m}{\omega - j\gamma} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\gamma}$$

onde $\omega_p^2 = ne^2/\varepsilon_0 m$.

A.2 Forma Alternativa da PGF: Identidade de Euler

Nesta seção demonstramos que a PGF pode ser escrita em uma forma alternativa utilizando funções cossenoidais desde que os espectros $c_{mn}(z)$ de (4.31) obedeçam as seguintes condições de paridade:

$$c_{m,n}(z) = c_{-m,-n}(z) = c_{-m,n}(z) = c_{m,-n}; \quad c_{m,0}(z) = c_{-m,0}(z); \quad c_{0,n}(z) = c_{0,-n}(z)$$

$$h(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)}$$

Expandindo o somatório em n em três partes:

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + c_{m0}(z) e^{j\frac{m\pi}{a}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} \right]$$

Expandindo o somatório anterior em m em três partes:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sum_{m=-\infty}^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + c_{m0}(z) e^{j\frac{m\pi}{a}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} \right] \\ & + \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c_{0n}(z) e^{j\frac{n\pi}{b}y} + c_{00}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n}(z) e^{j\frac{n\pi}{b}y} \right] \\ & + \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + c_{m0}(z) e^{j\frac{m\pi}{a}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} \right] \end{aligned}$$

Reescrevendo e agrupando os termos:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} \right. \\ & + \sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{mn}(z) e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + \sum_{m=-\infty}^{-1} [c_{m0}(z) e^{j\frac{m\pi}{a}x}] + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{m0}(z) e^{j\frac{m\pi}{a}x}] \\ & \left. + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{0n}(z) e^{j\frac{n\pi}{b}y} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n}(z) e^{j\frac{n\pi}{b}y} + c_{00}(z) \right\} \end{aligned}$$

Trocando m por $-m$ e n por $-n$ nos somatórios em negrito, utilizando a condição de paridade e agrupando os somatórios semelhantes:

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) \left[\left(e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} + e^{-j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} \right) + \left(e^{j\pi\left(\frac{m}{a}x - \frac{n}{b}y\right)} + e^{-j\pi\left(\frac{m}{a}x - \frac{n}{b}y\right)} \right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} c_{m0}(z) \left(e^{j\frac{m\pi}{a}x} + e^{-j\frac{m\pi}{a}x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n}(z) \left(e^{j\frac{n\pi}{b}y} + e^{-j\frac{n\pi}{b}y} \right) + c_{00}(z) \right\}$$

Utilizando a identidade de Euler:

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{mn}(z) \left[\cos\left(\pi\left[\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right]\right) + \cos\left(\pi\left[\frac{m}{a}x - \frac{n}{b}y\right]\right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} 2c_{m0}(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{0n}(z) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + c_{00}(z) \right\}$$

Dessa forma:

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}(z) \frac{\epsilon_{mn}}{2} \left[\cos\left(\pi\left[\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right]\right) + \cos\left(\pi\left[\frac{m}{a}x - \frac{n}{b}y\right]\right) \right]$$

onde ϵ_{mn} é o numero de Neumann duplo:

$$\epsilon_{mn} = \begin{cases} 1, & m = 0, n = 0 \\ 2, & m \neq 0, n = 0 \\ 2, & m = 0, n \neq 0 \\ 4, & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Utilizando a identidade trigonométrica da soma dos cossenos:

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Analisando a forma alternativa obtida, podemos propor a mudança de x por $-x$, e y por $-y$, desde que a função cosseno é par, e dessa forma escrever a relação entre os somatórios:

$$S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) e^{-j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Assim como suas derivadas em relação a x e y :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) \left[-j\frac{m\pi}{a} \right] e^{-j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) \left[-\frac{m\pi}{a} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) \left[-j\frac{n\pi}{b} \right] e^{-j\pi\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} c_{mn}(z) \left[-\frac{n\pi}{b} \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Lembrando que as relações são validas apenas quando todas as condições de paridade do espectro $c_{mn}(z)$ são atendidas.

APÊNDICE B – Condições Eletromagnéticas para o Campo Potencial Magnético **A**

B.1 Condições Periódicas de **A**

Quando uma estrutura proporciona periodicidade do campo eletromagnético em relação ao eixo x , em um intervalo $-a \leq x \leq a$, matematicamente, torna-se necessário assegurar que:

$$\mathbf{H}|_{x=-a} = \mathbf{H}|_{x=a}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{H}|_{x=-a} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{H}|_{x=a}$$

ou

$$\mathbf{E}|_{x=-a} = \mathbf{E}|_{x=a}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}|_{x=-a} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}|_{x=a}$$

Substituindo (3.10) e (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \Big|_{x=-a} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \Big|_{x=a}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \times \mathbf{A} \Big|_{x=-a} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \times \mathbf{A} \Big|_{x=a} \\ \left[\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right] \Big|_{x=-a} \\ &= \left[\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right] \Big|_{x=a} \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right] \Big|_{x=-a} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right] \Big|_{x=a} \end{aligned}$$

Intercambiando a substituição $x = a$ nas derivadas em relação a y e z , obtemos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} A_x|_{x=-a} &= A_x|_{x=a}, & \frac{\partial}{\partial x} A_x|_{x=-a} &= \frac{\partial}{\partial x} A_x|_{x=a} \\ A_y|_{x=-a} &= A_y|_{x=a}, & \frac{\partial}{\partial x} A_y|_{x=-a} &= \frac{\partial}{\partial x} A_y|_{x=a} \\ A_z|_{x=-a} &= A_z|_{x=a}, & \frac{\partial}{\partial x} A_z|_{x=-a} &= \frac{\partial}{\partial x} A_z|_{x=a} \end{aligned}$$

Assim, para que o campo eletromagnético atenda as condições de contorno periódicas, o campo potencial magnético também deve obedecer tais condições periódicas do tipo:

$$\mathbf{A}|_{x=-a} = \mathbf{A}|_{x=a}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}|_{x=-a} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}|_{x=a}$$

Se as condições em y também são periódicas em um intervalo $-b \leq y < b$, então o campo potencial magnético também deve atender:

$$\mathbf{A}|_{y=-b} = \mathbf{A}|_{y=b}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{A}|_{y=-b} = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{A}|_{y=b}$$

B.2 Condições de Fronteira de **A**

Na presença de dois meios com propriedades eletromagnéticas distintas, os campos devem obedecer as condições de fronteira na interface d_u , e na ausência de cargas e fontes, os campos no meio $[u + 1]$ e $[u]$ devem

atender as condições dos campos tangenciais (3.16) e (3.17), e dos fluxos normais (3.18) e (3.19). As condições de fronteira de $\mathbf{A}$ na interface d_u , com vetor normal $-\hat{\mathbf{a}}_z$, que separa os campos $\mathbf{A}_{u+1}$ e $\mathbf{A}_u$ são determinadas através da substituição de (3.19) em (3.16):

$$\mathbf{H}_u = \frac{1}{\mu_u} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} A_{z[u]} - \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u]} \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \left[\frac{\partial}{\partial z} A_{x[u]} - \frac{\partial}{\partial x} A_{z[u]} \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} A_{y[u]} - \frac{\partial}{\partial y} A_{x[u]} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right\}$$

$$-\hat{\mathbf{a}}_z \times (\bar{\mathbf{H}}_{u+1} - \bar{\mathbf{H}}_u)|_{z=d_u} = [H_{y[u+1]} - H_{y[u]}] \hat{\mathbf{a}}_x - [H_{x[u+1]} - H_{x[u]}] \hat{\mathbf{a}}_y = 0$$

Intercambiando a substituição da variável $z = d_u$ nas derivadas em relação a x e y , obtemos as seguintes relações:

$$\left[\left(\frac{1}{\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{x[u+1]} \Big|_{z=d_u} - \frac{1}{\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{x[u]} \Big|_{z=d_u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_{u+1}} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d_u} - \frac{1}{\mu_u} A_{z[u]} \Big|_{z=d_u} \right) \right] \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_{u+1}} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d_u} - \frac{1}{\mu_u} A_{z[u]} \Big|_{z=d_u} \right) - \left(\frac{1}{\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u+1]} \Big|_{z=d_u} - \frac{1}{\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u]} \Big|_{z=d_u} \right) \right] \hat{\mathbf{a}}_y = 0$$

Consequentemente:

$$\frac{1}{\mu_{u+1}} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\mu_u} A_{z[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$\frac{1}{\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{x[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{x[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$\frac{1}{\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u]} \Big|_{z=d_u}$$

Aplicando a condição de descontinuidade do campo magnético normal definido em (48):

$$-\hat{\mathbf{a}}_z \cdot (\mu_{u+1} \mathbf{H}_{u+1} - \mu_u \mathbf{H}_u)|_{z=d_u} = -[\mu_{u+1} H_{z[u+1]} - \mu_u H_{z[u]}] = 0$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_{y[u+1]}|_{z=d_u} - A_{y[u]}|_{z=d_u}) - \frac{\partial}{\partial y} (A_{x[u+1]}|_{z=d_u} - A_{x[u]}|_{z=d_u}) \right] = 0$$

Utilizando os mesmo argumentos na substituição de $z = d_u$, obtemos:

$$A_{x[u+1]}|_{z=d_u} = A_{x[u]}|_{z=d_u}$$

$$A_{y[u+1]}|_{z=d_u} = A_{y[u]}|_{z=d_u}$$

Aplicando a condição de continuidade do campo elétrico tangencial pela substituição direta de (3.11) em (3.17):

$$\bar{\mathbf{E}}_u = -j\eta_u \frac{1}{k_u \mu_u} \left[\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x} A_{x[u]} + \frac{\partial}{\partial y} A_{y[u]} + \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]} \right) + k_u^2 (A_{x[u]} \hat{\mathbf{a}}_x + A_{y[u]} \hat{\mathbf{a}}_y + A_{z[u]} \hat{\mathbf{a}}_z) \right]$$

$$-\hat{\mathbf{a}}_z \times (\mathbf{E}_{u+1} - \mathbf{E}_u)|_{z=d_u} = [E_{y[u+1]} - E_{y[u]}] \hat{\mathbf{a}}_x - [E_{x[u+1]} - E_{x[u]}] \hat{\mathbf{a}}_y = 0$$

$$\left[-\frac{j\eta_{u+1}}{k_{u+1} \mu_{u+1}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) + k_{u+1}^2 A_{y[u+1]} \right]_{z=d_u} + \frac{j\eta_u}{k_u \mu_u} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) + k_u^2 A_{y[u]} \right]_{z=d_u} \right] \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$- \left[-\frac{j\eta_{u+1}}{k_{u+1} \mu_{u+1}} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) + k_{u+1}^2 A_{x[u+1]} \right]_{z=d_u} + \frac{j\eta_u}{k_u \mu_u} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) + k_u^2 A_{x[u]} \right]_{z=d_u} \right] \hat{\mathbf{a}}_y = 0$$

$$\left[\left[-j \frac{1}{\omega \varepsilon_{u+1} \mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) - j\omega A_{y[u+1]} \right]_{z=d_u} + \left[j \frac{1}{\omega \varepsilon_u \mu_u} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) + j\omega A_{y[u]} \right]_{z=d_u} \right] \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$- \left[\left[-j \frac{1}{\omega \varepsilon_{u+1} \mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) - j\omega A_{x[u+1]} \right]_{z=d_u} + \left[j \frac{1}{\omega \varepsilon_u \mu_u} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) + j\omega A_{x[u]} \right]_{z=d_u} \right] \hat{\mathbf{a}}_y = 0$$

Multiplicando ambos os lados por $j\omega$:

$$\left[\left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \right]_{z=d_u} + \omega^2 [A_{y[u+1]} - A_{y[u]}]_{z=d_u} \right] \hat{a}_x$$

$$- \left[\left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \right]_{z=d_u} + \omega^2 [A_{x[u+1]} - A_{x[u]}]_{z=d_u} \right] \hat{a}_y = 0$$

Substituindo:

$$\left[\left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \right]_{z=d_u} \right] \hat{a}_x$$

$$- \left[\left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \right]_{z=d_u} \right] \hat{a}_y = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \Big|_{z=d} \right] \right] \hat{a}_x$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \Big|_{z=d} \right] \right] \hat{a}_y = 0$$

Para que as igualdades sejam verdadeiras devemos assegurar que:

$$\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} (\nabla \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \Big|_{z=d} = 0$$

Dessa forma:

$$\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} + \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u+1]} = \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \Big|_{z=d} + \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]} = \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \Big|_{z=d} + \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u+1]}$$

Assim:

$$(\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} = \frac{\partial}{\partial x} A_{x[u+1]} \Big|_{z=d_u} + \frac{\partial}{\partial y} A_{y[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{\partial}{\partial x} A_{x[u]} \Big|_{z=d_u} + \frac{\partial}{\partial y} A_{y[u]} \Big|_{z=d_u} = (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u]}) \Big|_{z=d}$$

Assim:

$$\frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]} = \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} + \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u+1]}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]} \Big|_{z=d} = \left[\frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} - \frac{1}{\varepsilon_u\mu_u} \right] (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} + \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]} \Big|_{z=d} = \left[\frac{\varepsilon_u\mu_u - \varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \right] (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} + \frac{\varepsilon_u\mu_u}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d}$$

Por fim, esta ultima completa o conjunto de condições de fronteira do campo potencial magnético $\mathbf{A}$.

$$A_{x[u+1]} \Big|_{z=d_u} = A_{x[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$A_{y[u+1]} \Big|_{z=d_u} = A_{y[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$\frac{1}{\mu_{u+1}} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\mu_u} A_{z[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$\frac{1}{\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{x[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{x[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$\frac{1}{\mu_{u+1}} \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u+1]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\mu_u} \frac{\partial}{\partial z} A_{y[u]} \Big|_{z=d_u}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{z[u]} \Big|_{z=d_u} = \frac{1}{\varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}} \left[(\varepsilon_u\mu_u - \varepsilon_{u+1}\mu_{u+1}) (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_{[u+1]}) \Big|_{z=d} + \varepsilon_u\mu_u \frac{\partial}{\partial z} A_{z[u+1]} \Big|_{z=d_u} \right]$$

APÊNDICE C – Funções de Green: Métodos

C.1 Forma Fechada da Função de Green – Aplicada aos SLP com Condições de Neumann, Limite e Periódicas.

O problema da função de Green unidimensional com **condições de Neumann** (SLP2) no espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2(d_2, d_1)$ é definido por:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial}{\partial z} + k_z^2\right) g(z, z') &= \delta(z - z') \\ \frac{\partial}{\partial z} g(d_2, z') &= \frac{\partial}{\partial z} g(d_1, z') = 0 \end{aligned}$$

A solução de $g(z, z')$ na região $z \neq z'$ pode tomar a forma:

$$g(z, z') = \begin{cases} A(z') \sin k_z z + B(z') \cos k_z z & z < z' \\ C(z') \sin k_z z + D(z') \cos k_z z & z \geq z' \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno homogêneas de Neumann em $z = d_1$ e $z = d_2$:

$$A(z') \cos k_z d_2 - B(z') \sin k_z d_2 = 0, \quad A(z') = B(z') \frac{\sin(k_z d_2)}{\cos(k_z d_2)}$$

$$C(z') \cos k_z d_1 - D(z') \sin k_z d_1 = 0, \quad C(z') = D(z') \frac{\sin(k_z d_1)}{\cos(k_z d_1)}$$

Substituindo:

$$g(z, z') = \begin{cases} B(z') \frac{1}{\cos(k_z d_2)} \cos[k_z(z - d_2)] & z < z' \\ D(z') \frac{1}{\cos(k_z d_1)} \cos[k_z(z - d_1)] & z \geq z' \end{cases}$$

Aplicando a condição de salto e continuidade em $z = z'$:

$$B(z') = D(z') \frac{\cos(k_z d_2) \cos[k_z(z' - d_1)]}{\cos(k_z d_1) \cos[k_z(z' - d_2)]}$$

$$k_z \left[D(z') \frac{1}{\cos(k_z d_1)} \sin[k_z(z' - d_1)] - B(z') \frac{1}{\cos(k_z d_2)} \sin[k_z(z' - d_2)] \right] = 1$$

$$k_z \frac{D(z')}{\cos(k_z d_1) \cos[k_z(z' - d_2)]} [\sin[k_z(z' - d_1)] \cos[k_z(z' - d_2)] - \cos[k_z(z' - d_1)] \sin[k_z(z' - d_2)]] = 1$$

$$k_z \frac{D(z')}{\cos(k_z d_1) \cos[k_z(z' - d_2)]} \sin[k_z(z' - z' + d_2 - d_1)] = 1$$

Assim:

$$D(z') = \frac{\cos(k_z d_1) \cos[k_z(z' - d_2)]}{k_z \sin[k_z(d_2 - d_1)]}, \quad B(z') = \frac{\cos(k_z d_2) \cos[k_z(z' - d_1)]}{k_z \sin[k_z(d_2 - d_1)]}$$

Substituindo os coeficientes D e B , a função de Green para o operador Laplaciano unidimensional, com condições de fronteira de Neumann em $z = d_2$ e $z = d_1$, é:

$$g(z, z') = \frac{1}{k_z \sin[k_z(d_2 - d_1)]} \begin{cases} \cos[k_z(z - d_2)] \cos[k_z(z' - d_1)] & z < z' \\ \cos[k_z(z' - d_2)] \cos[k_z(z - d_1)] & z \geq z' \end{cases}$$

Forma alternativa:

$$g(z, z') = \frac{1}{2k_z S_{21}} [\cos k_z(|z - z'| + [d_2 - d_1]) + \cos k_z([z' + z] - [d_2 + d_1])]$$

O problema da função de Green unidimensional com **condições de limite** (SLP3) no espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$ é definido por:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2\right)g(z, z') = \delta(z - z')$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z, z') = 0$$

A solução de $g(z, z')$ na região $z \neq z'$ toma a forma:

$$g(z, z') = \begin{cases} A(z')e^{jk_z z} + B(z')e^{-jk_z z} & z < z' \\ C(z')e^{jk_z z} + D(z')e^{-jk_z z} & z \geq z' \end{cases}$$

Aplicando as condições de limite em $z \rightarrow \pm\infty$, assumindo que $\text{Im}(k_z) < 0$, temos $B(z') = C(z') = 0$. Substituindo em (16):

$$g(z, z') = \begin{cases} A(z')e^{jk_z z} & z < z' \\ D(z')e^{-jk_z z} & z \geq z' \end{cases}$$

Aplicando a condição de salto e continuidade em $z = z'$:

$$A(z')e^{jk_z z'} = D(z')e^{-jk_z z'}$$

$$-jk_z(D(z')e^{-jk_z z'} + A(z')e^{jk_z z'}) = -1$$

Resolvendo o sistema de equações:

$$A(z') = \frac{e^{-jk_z z'}}{2jk_z}, \quad D(z') = \frac{e^{jk_z z'}}{2jk_z}$$

Substituindo em (17), a função de Green para o operador Laplaciano unidimensional com condições de limite em $z \rightarrow \pm\infty$, na forma compacta:

$$g(z, z') = \frac{1}{2jk_z} e^{-jk_z |z - z'|}, \quad \text{com } \text{Im}(k_z) < 0$$

O problema da função de Green unidimensional com **condições de Neumann e Limite** (SLP3) no espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2(d, +\infty)$ é definido por:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial z} + k_z^2\right)g(z, z') = \delta(z - z')$$

$$\frac{\partial}{\partial z}g(d, z') = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z, z') = 0$$

A solução de $g(z, z')$ na região $z \neq z'$ toma a forma:

$$g(z, z') = \begin{cases} A(z') \sin k_z z + B(z') \cos k_z z & z < z' \\ C(z')e^{jk_z z} + D(z')e^{-jk_z z}, & z \geq z' \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno homogêneas de Neumann e Limite, obtemos $A = B \tan k_z d$ e $C = 0$. Substituindo o resultado:

$$g(z, z') = \begin{cases} \frac{B(z')}{\cos(k_z d)} \cos[k_z(z - d)] & z < z' \\ D(z')e^{-jk_z z} & z \geq z' \end{cases}$$

Aplicando as condições de salto e continuidade em $z = z'$, obtemos:

$$B(z') = \cos(k_z d) \frac{e^{-jk_z(z'-d)}}{jk_z}, \quad D(z') = \cos[k_z(z' - d)] \frac{e^{jk_z d}}{jk_z}$$

Substituindo os coeficientes B e D , a função de Green para o operador Laplaciano unidimensional, com condições de Neumann em $z = d$ e limite em $z \rightarrow +\infty$:

$$g(z, z') = \frac{1}{jk_z} \begin{cases} e^{-jk_z(z'-d)} \cos[k_z(z-d)] & z < z' \\ e^{-jk_z(z-d)} \cos[k_z(z'-d)] & z \geq z' \end{cases} \quad \text{com } \text{Im}(k_z) < 0$$

Através da identidade de Euler:

$$g(z, z') = \frac{1}{2jk_z} \begin{cases} e^{-jk_z[z'-z]} + e^{-jk_z[z+z'-2d]} & z < z' \\ e^{-jk_z[z-z']} + e^{-jk_z[z+z'-2d]} & z \geq z' \end{cases} \quad \text{com } \text{Im}(k_z) < 0$$

Assim:

$$g(z, z') = \frac{1}{2jk_z} [e^{-jk_z|z-z'|} + e^{-jk_z(z+z'-2d)}] \quad \text{com } \text{Im}(k_z) < 0$$

O problema da função de Green simétrica no espaço $\mathcal{L}_2(-\infty, d)$ com condições de limite em $z \rightarrow -\infty$ e Neumann em $z = d$, pode ser determinada diretamente do resultado da função de Green do problema anterior, trocando $(z - d)$ por $-(z - d)$, $(z' - d)$ por $-(z' - d)$ e z por z' :

$$g(z, z') = \frac{1}{2jk_z} \begin{cases} e^{jk_z(z'-d)} [e^{jk_z(z-d)} + e^{-jk_z(z-d)}] & z \geq z' \\ e^{jk_z(z-d)} [e^{jk_z(z'-d)} + e^{-jk_z(z'-d)}] & z < z' \end{cases} \quad \text{com } \text{Im}(k_z) < 0$$

Assim:

$$g(z, z') = \frac{1}{2jk_z} [e^{-jk_z|z'-z|} + e^{jk_z(z+z'-2d)}] \quad \text{com } \text{Im}(k_z) < 0$$

O problema da função de Green unidimensional com **condições periódicas** (SLP2) no espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2(-a, a)$ é definido por:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)g(x, x') &= \delta(x - x') \\ g(-a, x') &= g(a, x') \\ \frac{\partial}{\partial x}g(-a, x') &= \frac{\partial}{\partial x}g(a, x') \end{aligned}$$

Iniciamos resolvendo o problema na região $x \neq x'$:

$$\frac{d^2}{dx^2}g + k^2g = 0$$

A solução da EDO é conhecida, e para as condições de contorno em questão são escolhidas nas formas senoidais:

$$g(x, x') = \begin{cases} A(x') \sin kx + B(x') \cos kx & x < x' \\ C(x') \sin kx + D(x') \cos kx & x > x' \end{cases}$$

Aplicando as condições de fronteira periódicas:

$$A \sin -ka + B \cos -ka = C \sin ka + D \cos ka$$

$$k(A \cos -ka - B \sin -ka) = k(C \cos ka - D \sin ka)$$

Resolvendo o sistema de equações para $B(x')$ e $D(x')$:

$$B(x') = -\frac{C - A \cos k(-a - a)}{\sin k(-a - a)}, \quad D(x') = \frac{A - C \cos k(-a - a)}{\sin k(-a - a)}$$

Substituindo $B(x')$ e $D(x')$ em $g(x, x')$:

$$g(x, x') = \begin{cases} A(x') \sin kx - \frac{C - A \cos k(-a - a)}{\sin k(-a - a)} \cos kx & x < x' \\ C(x') \sin kx + \frac{A - C \cos k(-a - a)}{\sin k(-a - a)} \cos kx & x > x' \end{cases}$$

Escolhendo $w = -a - a = -2a$, e usando a identidade trigonométrica dos cossenos da soma e da diferença temos:

$$g(x, x') = \frac{1}{\sin kw} \begin{cases} A(x') \cos k(w - x) - C(x') \cos kx & x < x' \\ -C(x') \cos k(w + x) + A(x') \cos kx & x > x' \end{cases}$$

Aplicando a condição de continuidade em $x = x'$:

$$C(x')[\cos kx' - \cos k(w + x')] + A(x')[\cos kx' - \cos k(w - x')] = 0$$

Aplicando a condição de salto:

$$C(x')(\sin k(w + x') - \sin kx') - A(x')(\sin k(w - x') + \sin kx') = -\frac{\sin kw}{k}$$

Resolvendo o sistema de equações para $A(x')$ e $C(x')$:

$$C(x') = -\frac{(\cos k(w - x') - \cos kx')}{2k(\cos kw - 1)}; \quad A(x') = \frac{(\cos k(w + x') - \cos kx')}{2k(\cos kw - 1)}$$

Fazendo $w = -2\Delta$, ou seja, $\Delta = [a - (-a)]/2 = a$ e substituindo os resultados obtidos em (12) na função de Green:

$$g(x, x') = -\frac{1}{2k \sin k2\Delta} \begin{cases} \cos k(-2\Delta + x' - x) + \cos k(x' - x) & x < x' \\ \cos k(-2\Delta + x - x') + \cos k(x - x') & x > x' \end{cases}$$

Expandindo os arcos duplos:

$$g(x, x') = -\frac{1}{2k \sin k\Delta} \begin{cases} \cos k([x' - x] - \Delta) & x < x' \\ \cos k([x - x'] - \Delta) & x > x' \end{cases}$$

Por fim, a função de Green para o operador Laplaciano unidimensional com condições de fronteira periódicas no intervalo $-a \leq x \leq a$, na forma compacta:

$$g(x, x') = -\frac{[\cos k(|x - x'| - \Delta)]}{2k \sin k\Delta}$$

C.2 Transformada Dupla Série Complexa de Fourier

Para determinar o par de transformadas da série complexa de Fourier para problemas periódicos com operador diferencial de segunda ordem, partiremos da representação espectral da função delta no espaço $\lambda = k^2$:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint g(x, x', \lambda) d\lambda = -\frac{\delta(x - x')}{w(x)}$$

A função de Green referente ao problema com condições periódicas foi determinada em C.1, dessa forma, substituindo $g(x, \xi, \lambda)$ na integral, e analisando a possibilidade da existência de branch-cut ou polos dentro da região de contorno, primeiramente para $x < x'$:

$$-\frac{1}{2\pi j} \oint \cos \frac{[\sqrt{\lambda}(|x-x'|-\Delta)]}{2\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\Delta} d\lambda = -\frac{\delta(x-x')}{w(x)}$$

onde:

$$\lambda = |\lambda|e^{j\phi} \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad \sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2}e^{j\phi/2} \quad 0 < \phi < \pi$$

É conhecido que $\sqrt{\lambda}$ possui um branch cut no eixo real de λ , ao substituirmos os limites $\lim_{\phi \rightarrow 0} \sqrt{\lambda}$ e $\lim_{\phi \rightarrow 2\pi} \sqrt{\lambda}$, é fácil verificar que a função de Green é contínua no eixo real, consequentemente sem branch cut. Em seguida, verificamos os polos da função de Green, e desde que a função cosseno é contínua, o trabalho se resume a análise do denominador. Os polos da função de Green ocorrem em $2\sqrt{\lambda_m} \sin \sqrt{\lambda_m}\Delta = 0$, assim:

$$\sqrt{\lambda_m}\Delta = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A partir do denominador, os polos no plano complexo (Fig. 1) são localizados em:

$$\lambda_m = \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^2 \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Desde que $g(\lambda)$ é comportado e possui infinitos polos simples, podemos determinar a integral de contorno através do teorema dos resíduos:

$$\text{Res}\{g(\lambda), \lambda_m\} = \frac{p(\lambda_m)}{q'(\lambda_m)} = \cos[\sqrt{\lambda_m}(|x-x'|-\Delta)] (-1)^m \left(\frac{\epsilon_m}{2\Delta}\right)$$

onde ϵ_m é o numero de Neumann definido por:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\cos[\sqrt{\lambda}(|x-x'|-\Delta)]}{2\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\Delta} d\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}\{g(\lambda_m), \lambda_m\} = -\frac{\delta(x-x')}{w(x)} \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\epsilon_m}{2\Delta}\right) \left[\cos\left(\frac{m\pi}{\Delta}\right) |x-x'| (-1)^m\right] &= \delta(x-x') \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_m}{2\Delta}\right) \cos\left[\left(\frac{m\pi}{\Delta}\right) |x-x'|\right] &= \delta(x-x') \end{aligned}$$

Desde que o cosseno é uma função par, o resultado para $x < x'$ é também valido para $x \geq x'$. Aplicando a identidade de Euler na forma compacta da série cosseno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\Delta}\right) \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')} + e^{-j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')}\right) &= \delta(x-x') \\ \frac{1}{2\Delta} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\Delta}\right) e^{j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\Delta}\right) e^{-j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')} &= \delta(x-x') \end{aligned}$$

Trocando n por $-n$ no segundo somatório:

$$\frac{1}{2\Delta} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\Delta}\right) e^{j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')} + \sum_{n=-\infty}^{m=1} \left(\frac{1}{2\Delta}\right) e^{j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')} = \delta(x-x')$$

Assim, a representação espectral da função delta pela série complexa de Fourier:

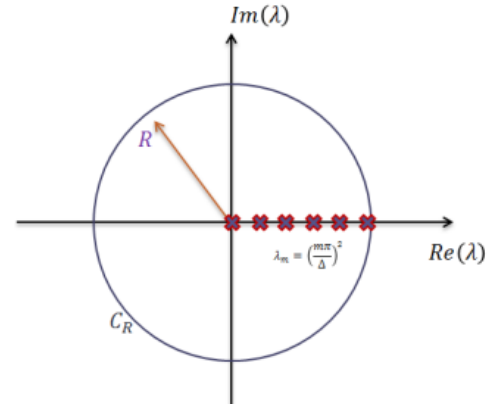


Figura C.1 - - Localização dos polos no plano complexo λ

$$\left(\frac{1}{2\Delta}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{m\pi}{\Delta}(x-x')} = \delta(x-x')$$

Inicialmente, definimos o espaço $\mathcal{L}_2(-a, a)$ para o operador diferencial de segunda ordem referente ao problema periódico, dessa forma, podemos substituir $\Delta = a$. Utilizando a relação:

$$f(x) = \int_{-a}^a f(x') \delta(x-x') dx'$$

Substituindo a representação espectral da função delta, podemos determinar o par de transformadas série complexa de Fourier para o operador $L = -d^2/dx^2$ com condições e fronteira periódicas no $\mathcal{L}_2(-a, a)$:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{j\frac{m\pi}{a}x}$$

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a f(x) e^{-j\frac{m\pi}{a}x} dx$$

onde a primeira equação é a transformada inversa do espectro a_m para o domínio espacial contínuo x , e a segunda equação é a transformada direta da função $f(x)$ para o domínio espectral discreto m .

De forma análoga, podemos definir o par de transformadas para o problema periódico com operador $L = \partial^2/\partial y^2$ no espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2(-b, b)$:

$$g(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{j\frac{n\pi}{b}y}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2b}} \int_{-b}^b g(y) e^{-j\frac{n\pi}{b}y} dy$$

onde a primeira equação é a transformada inversa do espectro b_n para o domínio espacial contínuo y , e a segunda equação é a transformada direta da função $g(y)$ para o domínio espectral discreto n .

Até este ponto, analisamos apenas problemas periódicos unidirecionais, contudo, podemos definir um par de transformadas para o operador laplaciano $-\nabla_{xy}^2$ no espaço $\mathcal{L}(-a, a; -b, b)$. Utilizando os pares de transformadas, para uma função $h(x, y, z)$, a transformada direta dupla da série de Fourier complexa em x e y :

$$c_{mn}(z) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a h(x, y, z) \bar{u}_m(x) \bar{u}_n(y) dx dy$$

$$h(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}(z) u_m(x) u_n(y)$$

onde $u_m(x)$ e $u_n(y)$ são as autofunções referentes aos operadores diferenciais nas coordenadas x e y , com autovalores k_x e k_y , respectivamente:

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{j\frac{m\pi}{a}x}$$

$$u_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{j\frac{n\pi}{b}y}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

APÊNDICE D – Principais Deduções Matemáticas

D.1 Demonstrações na Determinação dos Coeficientes de Acoplamento do MODO TE – Componentes Tangencias de **A**

Nesta sessão deixamos explicitas as deduções realizadas durante os cálculos das componentes tangenciais do campo potencial magnético.

Demonstração de (4.58) – (4.59):

$$\begin{aligned}
 A_{x1}|_{z=d_1} &= A_{x2}|_{z=d_1} \\
 \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_v(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} - \Lambda_{v1d1}^{mn} \} \\
 &= \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left([\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn}] - [\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn}] e^{-jk_{z2}(d_1-d_2)} \right) \\
 \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_v(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} - \Lambda_{v1d1}^{mn} &= \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(\Lambda_{v2d1}^{mn} + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} - \Lambda_{v2d2}^{mn} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right) \\
 \Lambda_{v1d1}^{mn} + \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{([1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \Lambda_{v2d1}^{mn} - 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn})}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} &= \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_v(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}
 \end{aligned}$$

Demonstração de (4.60) – (4.61):

$$\begin{aligned}
 A_{x2}|_{z=d_2} &= A_{x3}|_{z=d_2} \\
 \frac{1}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left([\Lambda_{x2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{x2d2}^{mn}] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} - [\Lambda_{x2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{x2d1}^{mn}] \right) &= \frac{1}{k_{z3}} \Lambda_{x3d2}^{mn} \\
 \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{x2d1}^{mn} - \Lambda_{x2d2}^{mn} [e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + 1] \right) - \Lambda_{x3d2}^{mn} &= 0
 \end{aligned}$$

Demonstração de (4.62) – (4.63):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial z} A_{x2} \Big|_{z=d_1} &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} A_{x1} \Big|_{z=d_1} \\
 \frac{1}{\mu_2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j(k_x x' + k_y y')} \frac{\partial}{\partial z} A_{x2}(x', y', d_1) dx' dy' &= \frac{1}{\mu_1} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j(k_x x' + k_y y')} \frac{\partial}{\partial z} A_{x1}(x, y, d_1) dx dy \\
 \frac{1}{\mu_2} \Lambda_{x2d1}^{mn} &= \frac{1}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn}
 \end{aligned}$$

Demonstração de (4.64) – (4.65):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial}{\partial z} A_{x3} \Big|_{z=d_2} &= \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial z} A_{x2} \Big|_{z=d_2} \\
 \frac{1}{\mu_3} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j(k_x x' + k_y y')} \frac{\partial}{\partial z} A_{x3}(x', y', d_2) dx' dy' &= \frac{1}{\mu_2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j(k_x x' + k_y y')} \frac{\partial}{\partial z} A_{x2}(x, y, d_2) dx dy \\
 \frac{1}{\mu_3} \Lambda_{x3d2}^{mn} &= \frac{1}{\mu_2} \Lambda_{x2d2}^{mn}
 \end{aligned}$$

Substituição de (4.63) em (4.59):

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{x2d1}^{mn} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn} \\
 \Lambda_{x1d1}^{mn} + \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{([1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{\mu_2}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn} - 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{x2d2}^{mn})}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} &= \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \\
 \left(1 + \frac{k_{z1} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \Lambda_{x1d1}^{mn} - \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{x2d2}^{mn} &= \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}
 \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{k_{z1} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \Lambda_{x1d1}^{mn} - \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \Lambda_{x2d2}^{mn} = \mu_1 [j\omega p_{eff}] f'_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

Substituição de (4.63) e (4.65) em (4.61):

$$\begin{aligned} \Lambda_{x2d1}^{mn} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn} \quad e \quad \Lambda_{x3d2}^{mn} = \frac{\mu_3}{\mu_2} \Lambda_{x2d2}^{mn} \\ \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} &\left(2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{\mu_2}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn} - \Lambda_{x2d2}^{mn} [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]\right) - \frac{\mu_3}{\mu_2} \Lambda_{x2d2}^{mn} = 0 \\ \frac{k_{z3} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} &\Lambda_{x1d1}^{mn} - \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{x2d2}^{mn} - \frac{\mu_3}{\mu_2} \Lambda_{x2d2}^{mn} = 0 \\ -\left(\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2^2}{\mu_1 \mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) &\Lambda_{x1d1}^{mn} + \left(\frac{k_{z3} \mu_2}{k_{z2} \mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} + 1\right) \Lambda_{x2d2}^{mn} = 0 \end{aligned}$$

Solução de (4.68) através da Regra de Cramer:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{k_{z1} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) & -\left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \\ -\left(\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2^2}{\mu_1 \mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) & \left(1 + \frac{k_{z3} \mu_2}{k_{z2} \mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{x1d1}^{mn} \\ \Lambda_{x2d2}^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{x1d1}^{mn} \\ \Lambda_{x2d2}^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pela regra de Cramer:

$$\begin{aligned} \Lambda_{x1d1}^{mn} &= \frac{b_1}{a_{22}} \frac{a_{12}}{a_{21}} \bigg/ \frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{a_{12}}{a_{22}} \\ \Lambda_{x2d2}^{mn} &= \frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{b_1}{0} \bigg/ \frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{a_{12}}{a_{22}} \end{aligned}$$

Primeiramente, o determinante da matriz A:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det A = \left(1 + \frac{k_{z1} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \left(1 + \frac{k_{z3} \mu_2}{k_{z2} \mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) - \left(\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2^2}{\mu_1 \mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right)$$

$$\det A = \left(1 + \frac{k_{z1} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \left(1 + \frac{k_{z3} \mu_2}{k_{z2} \mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) - \frac{k_{z3} k_{z1} \mu_2^2}{k_{z2}^2 \mu_1 \mu_3} \frac{4e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2}$$

$$\det A = 1 + \frac{k_{z1} \mu_2}{k_{z2} \mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} + \frac{k_{z3} \mu_2}{k_{z2} \mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} + \frac{k_{z1} k_{z3} \mu_2^2}{k_{z2}^2 \mu_1 \mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2} - \frac{k_{z3} k_{z1} \mu_2^2}{k_{z2}^2 \mu_1 \mu_3} \frac{4e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2}$$

$$\det A = 1 + \frac{\mu_2}{k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{k_{z1}}{\mu_1} + \frac{k_{z3}}{\mu_3}\right] + \frac{k_{z1} k_{z3} \mu_2^2}{k_{z2}^2 \mu_1 \mu_3} \left[\frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2 - 4e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2}\right]$$

$$\det A = 1 + \frac{\mu_2}{k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{k_{z1}}{\mu_1} + \frac{k_{z3}}{\mu_3}\right] + \frac{k_{z1} k_{z3} \mu_2^2}{k_{z2}^2 \mu_1 \mu_3} \left[\frac{1 + 2e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)} - 4e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]^2}\right]$$

$$\det A = 1 + \frac{\mu_2}{k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{k_{z1}}{\mu_1} + \frac{k_{z3}}{\mu_3}\right] + \frac{k_{z1} k_{z3} \mu_2^2}{k_{z2}^2 \mu_1 \mu_3} \left[\frac{1 - 2e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)}}{1 - 2e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)}}\right]$$

$$\det A = \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{\mu_2}{k_{z2}} \left[\frac{k_{z1}}{\mu_1} + \frac{k_{z3}}{\mu_3}\right] + \frac{\mu_2 k_{z1} \mu_2 k_{z3}}{\mu_1 k_{z2} \mu_3 k_{z2}} + 1$$

$$\det A = \frac{\mu_2}{k_{z2}} k_{z1} k_{z3} \left(\frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}\right) \left[\frac{1}{\mu_1 k_{z3}} + \frac{1}{\mu_3 k_{z1}}\right] + \left[\frac{\mu_2}{\mu_1 k_{z2} \mu_3} + \frac{k_{z2}}{k_{z1} \mu_2 k_{z3}}\right]$$

$$\det A = \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{k_{z1} \mu_2 k_{z3}}{k_{z2}} \left(\left[\frac{1}{\mu_3 k_{z1}} + \frac{1}{\mu_1 k_{z3}}\right] [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] + \left[\frac{\mu_2}{\mu_1 \mu_3 k_{z2}} + \frac{k_{z2}}{k_{z1} k_{z3} \mu_2}\right] [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]\right)$$

$$\det A = \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{k_{z1} \mu_2 k_{z3}}{k_{z2}} \left(\left[\frac{1}{\mu_3 k_{z1}} + \frac{1}{\mu_1 k_{z3}} + \frac{\mu_2}{\mu_1 \mu_3 k_{z2}} + \frac{k_{z2}}{k_{z1} k_{z3} \mu_2}\right] + \left[\frac{1}{\mu_3 k_{z1}} + \frac{1}{\mu_1 k_{z3}} - \frac{\mu_2}{\mu_1 \mu_3 k_{z2}} - \frac{k_{z2}}{k_{z1} k_{z3} \mu_2}\right] e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}\right)$$

$$\det A = \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{k_{z1}\mu_2k_{z3}}{k_{z2}} \left(\left[\frac{1}{\mu_2k_{z1}} + \frac{1}{\mu_1k_{z2}} \right] \frac{\mu_2}{\mu_3} + \left[\frac{1}{\mu_2k_{z1}} + \frac{1}{\mu_1k_{z2}} \right] \frac{k_{z2}}{k_{z3}} \right) + \left[\frac{1}{\mu_2k_{z1}} - \frac{1}{\mu_1k_{z2}} \right] \frac{\mu_2}{\mu_3} + \left[\frac{1}{\mu_1k_{z2}} - \frac{1}{\mu_2k_{z1}} \right] \frac{k_{z2}}{k_{z3}} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)$$

$$\det A = \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{k_{z1}\mu_2k_{z3}}{k_{z2}} \left(\left[\frac{1}{\mu_2k_{z1}} + \frac{1}{\mu_1k_{z2}} \right] \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} + \frac{k_{z2}}{k_{z3}} \right] + \left[\frac{1}{\mu_2k_{z1}} - \frac{1}{\mu_1k_{z2}} \right] \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} - \frac{k_{z2}}{k_{z3}} \right] e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)$$

$$\det A = \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{k_{z1}\mu_2k_{z3}}{k_{z2}} \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3k_{z1}k_{z2}k_{z3}} ([\mu_1k_{z2} + \mu_2k_{z1}][\mu_2k_{z3} + \mu_3k_{z2}] + [\mu_1k_{z2} - \mu_2k_{z1}][\mu_2k_{z3} - \mu_3k_{z2}]) e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\det A = 4 \frac{(k_{z1}\mu_2k_{z3})/(k_{z1}\mu_2k_{z3})}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{[\mu_1k_{z2} + \mu_2k_{z1}]}{2\mu_1k_{z2}} \frac{[\mu_3k_{z2} + \mu_2k_{z3}]}{2\mu_3k_{z2}} \left(1 - \frac{[\mu_1k_{z2} - \mu_2k_{z1}][\mu_3k_{z2} - \mu_2k_{z3}]}{[\mu_1k_{z2} + \mu_2k_{z1}][\mu_3k_{z2} + \mu_2k_{z3}]} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)$$

$$\det A = \frac{4}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{1}{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE}} [1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]$$

Agora o determinante de A_1 :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -\left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \\ 0 & \left(1 + \frac{k_{z3}\mu_2}{k_{z2}\mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \end{vmatrix} = b_1 \left(1 + \frac{k_{z3}\mu_2}{k_{z2}\mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right)$$

Agora o determinante de A_2 :

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{k_{z1}\mu_2}{k_{z2}\mu_1} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) & b_1 \\ -\left(\frac{k_{z3}\mu_2^2}{k_{z2}\mu_1\mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) & 0 \end{vmatrix} = - \left(\frac{k_{z3}\mu_2^2}{k_{z2}\mu_1\mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) b_1$$

Por fim:

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{b_1 \left(1 + \frac{k_{z3}\mu_2}{k_{z2}\mu_3} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right)}{\frac{4}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{1}{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE}} [1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \frac{b_1}{4} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} \left([1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] + \frac{k_{z3}\mu_2}{k_{z2}\mu_3} [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right)}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \frac{b_1}{4} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} \left(1 + \frac{\mu_2k_{z3}}{\mu_3k_{z2}} - \left[1 - \frac{\mu_2k_{z3}}{\mu_3k_{z2}} \right] e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \frac{b_1}{2} \frac{\mu_3k_{z2} + \mu_2k_{z3}}{2\mu_3k_{z2}} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} \left(1 - \frac{[\mu_3k_{z2} - \mu_2k_{z3}]}{[\mu_3k_{z2} + \mu_2k_{z3}]} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \frac{b_1}{2} \frac{T_{21}^{TE} \left(1 - \frac{[\mu_3k_{z2} - \mu_2k_{z3}]}{[\mu_3k_{z2} + \mu_2k_{z3}]} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \frac{b_1}{2} \frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \mu_1 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \frac{[T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

E:

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\left(\frac{k_{z3}\mu_2^2}{k_{z2}\mu_1\mu_3} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) b_1}{\frac{4}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{1}{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE}} [1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \mu_2 \frac{k_{z3}}{k_{z2}} \frac{\mu_2}{\mu_1\mu_3} \frac{b_1}{2} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \mu_2 \frac{\mu_2k_{z3}}{\mu_3k_{z2}} \frac{1}{\mu_1} \frac{b_1}{2} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \mu_2 \frac{\mu_2 k_{z3} [j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{\mu_3 k_{z2} 2} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Substituindo os resultados em (4.63) e (4.68).

$$\Lambda_{x2d1}^{mn} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \Lambda_{x1d1}^{mn} \quad e \quad \Lambda_{x3d2}^{mn} = \frac{\mu_3}{\mu_2} \Lambda_{x2d2}^{mn}$$

$$\Lambda_{x2d1}^{mn} = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

$$\Lambda_{x3d2}^{mn} = \mu_3 \frac{\mu_2 k_{z3} [j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{\mu_3 k_{z2} 2} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Dessa forma, os coeficientes de acoplamento do modo TE.

$$\Lambda_{x1d1}^{mn} = \mu_1 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \mu_2 \frac{\mu_2 k_{z3} [j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{\mu_3 k_{z2} 2} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{x2d1}^{mn} = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

$$\Lambda_{x3d2}^{mn} = \mu_3 \frac{\mu_2 k_{z3} [j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{\mu_3 k_{z2} 2} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Substituindo em (4.51) os coeficientes encontrados, no meio 1:

$$\begin{aligned} A_{v1}^{mn}(z) &= \frac{-j}{8ab k_{z1}} \left\{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_v(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \mu_1 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right\} \\ A_{v1}^{mn}(z) &= -j\mu_1 \frac{[j\omega p_{eff}] f_v(\theta', \phi')}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \left\{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \left(1 - \frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \right\} \end{aligned}$$

No meio 2:

$$A_{v2}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} ([\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn}] e^{jk_{z2}(z-d_1)} - [\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn}] e^{-jk_{z2}(z-d_2)})$$

Primeiro verificando que:

$$[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn}] = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

$$[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn}] = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} T_{21}^{TE} \left[\frac{1 - \left[R_{23}^{TE} + \left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] T_{23}^{TE} \right] e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

$$\text{Lembrando que } R_{23}^{TE} + \left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] T_{23}^{TE} = 1:$$

$$[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn}] = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] T_{21}^{TE}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

Agora para:

$$[\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn}] = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{\left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} - T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$[\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn}] = \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} T_{21}^{TE} \left[\frac{\left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] T_{23}^{TE} - 1 + R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

Lembrando que $\left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] T_{23}^{TE} - 1 = -R_{23}^{TE}$:

$$\begin{aligned} [\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn}] &= \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} T_{21}^{TE} \left[\frac{-R_{23}^{TE} + R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \\ [\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d1}^{mn}] &= -\mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] T_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \end{aligned}$$

Substituindo os resultados obtidos:

$$\begin{aligned} A_{v2}^{mn}(z) &= \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(\mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] T_{21}^{TE}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] e^{jk_{z2}(z-d_1)} \right. \\ &\quad \left. - \mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{2} \left[\frac{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] T_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right) \\ A_{v2}^{mn}(z) &= -j\mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}}{8ab} \frac{1}{k_{z2}} \left[\frac{1}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] ([T_{21}^{TE}] e^{jk_{z2}(z-d_1)} + [T_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}] e^{-jk_{z2}(z-d_2)}) \\ A_{x2}^{mn}(z) &= -j\mu_2 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi')}{8ab} \frac{1}{k_{z2}} \frac{1}{T_{23}^{TE}} \left[\frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} [e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \end{aligned}$$

No meio 3:

$$A_{v3}^{mn}(z) = -j\mu_3 \frac{[j\omega p_{eff}] f_x(\theta', \phi')}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Por fim, definindo os coeficientes de Reflexão generalizados e a densidade de corrente I_x :

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{[j\omega p_{eff}] f_v(\theta', \phi')}{8ab} \\ \tilde{R}_{12}^{TE} &= 1 - \left[\frac{T_{21}^{TE} [1 - R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \\ \tilde{T}_{23}^{TE} &= \frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \end{aligned}$$

A componente tangencial A_x do campo potencial magnético é:

$$\begin{aligned} A_{x1}^{mn}(z) &= -j\mu_1 I_x \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}|z+h-2d_1|} \tilde{R}_{12} \} \\ A_{x2}^{mn}(z) &= -j\mu_2 I_x \frac{1}{k_{z2}} [e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} \left[\frac{\mu_3 k_{z2}}{\mu_2 k_{z3}} \right] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \\ A_{x3}^{mn}(z) &= -j\mu_3 I_x \frac{1}{k_{z3}} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]} T_{23}^{TE} \end{aligned}$$

D.2 Demonstrações na Determinação dos Coeficientes de Acoplamento do MODO TM – Componente Normal de **A**

Demonstração de (4.85) a (4.86):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_2} A_{z2} \Big|_{z=d_1} &= \frac{1}{\mu_1} A_{z1} \Big|_{z=d_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} & \left([\Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}] - [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_1} \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') 2e^{-jk_{z1}(h-d_1)} - 2\Lambda_{z1d1}^{mn} \} \\ \Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} & ([1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \Lambda_{z2d1}^{mn} - 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}) = \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \end{aligned}$$

Demonstração de (4.87) a (4.88):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_3} \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \Lambda_{z3d2}^{mn} \\
&= \frac{1}{\mu_2} \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left([\Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}] e^{jk_{z2}(z-d_1)} - [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right) \\
\Lambda_{z3d2}^{mn} &= \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left([\Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} - [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] \right) \\
\Lambda_{z3d2}^{mn} &= \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn} - \Lambda_{z2d2}^{mn} + e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn} \right) \\
& \quad \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn} - [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \Lambda_{z2d2}^{mn} \right) - \Lambda_{z3d2}^{mn} = 0
\end{aligned}$$

Demonstração de (4.89) a (4.90):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} A_{z1} \Big|_{z=d_1} &= \frac{1}{\varepsilon_2 \mu_2} \left[(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_2) \Big|_{z=d_1} + \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial}{\partial z} A_{z2} \Big|_{z=d_1} \right] \\
\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\pi \left[\frac{m}{a} x' + \frac{n}{b} y' \right]} \frac{\partial}{\partial z} A_{z1} \Big|_{z=d_1} dx' dy' &= \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\pi \left[\frac{m}{a} x' + \frac{n}{b} y' \right]} \frac{\partial}{\partial z} A_{z2} \Big|_{z=d_1} dx' dy' \\
& \quad + \frac{(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)}{\varepsilon_2 \mu_2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\pi \left[\frac{m}{a} x' + \frac{n}{b} y' \right]} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_2) \Big|_{z=d_1} dx' dy' \\
\Lambda_{z1d1}^{mn} &= \left[\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \Lambda_{z2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \Lambda_{xy2d1}^{mn}
\end{aligned}$$

onde:

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \left[\frac{\partial A_{x2}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y2}}{\partial y'} \right] \Big|_{z=d_1} dx' dy'$$

Demonstração de (4.92) a (4.93):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} A_{z2} \Big|_{z=d_2} &= \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_3} \left[(\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_3 \mu_3) (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_3) \Big|_{z=d_2} + \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial}{\partial z} A_{z3} \Big|_{z=d_2} \right] \\
\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\pi \left[\frac{m}{a} x' + \frac{n}{b} y' \right]} \frac{\partial}{\partial z} A_{z2} \Big|_{z=d_2} dx' dy' &= \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\pi \left[\frac{m}{a} x' + \frac{n}{b} y' \right]} \frac{\partial}{\partial z} A_{z3} \Big|_{z=d_2} dx' dy' \\
& \quad + \frac{(\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_3 \mu_3)}{\varepsilon_3 \mu_3} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\pi \left[\frac{m}{a} x' + \frac{n}{b} y' \right]} (\nabla_{xy} \cdot \mathbf{A}_3) \Big|_{z=d_2} dx' dy' \\
\Lambda_{z2d2}^{mn} &= \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \Lambda_{z3d2} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn}
\end{aligned}$$

onde:

$$\Lambda_{xy3d2}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \left[\frac{\partial A_{x3}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y3}}{\partial y'} \right] \Big|_{z=d_2} dx' dy'$$

Demonstração de (4.91) a (4.96):

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x x' + k_y y']} \left[\frac{\partial A_{x2}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y2}}{\partial y'} \right] \Big|_{z=d_1} dx' dy'$$

onde:

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{x2}(x', y', d_1) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} -j\beta_x A_{x2}^{pq}(d_1) e^{-j[\beta_x x' + \beta_y y']}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_{y2}(x', y', d_1) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} -j\beta_y A_{y2}^{pq}(d_1) e^{-j[\beta_x x' + \beta_y y']}$$

$$A_{x2}^{mn}(d_1) = -j\mu_2 I_x \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(d_1-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_1-d_2)} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} \left[\frac{\mu_3 k_{z2}}{\mu_2 k_{z3}} \right] e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

$$A_{x2}^{mn}(d_1) = -j\mu_2 I_y \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(d_1-d_2)} + R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_1-d_2)} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} \left[\frac{\mu_3 k_{z2}}{\mu_2 k_{z3}} \right] e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

Assim:

$$\left[\frac{\partial A_{x2}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y2}}{\partial y'} \right] \Big|_{z=d_1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [-j\beta_x A_{x2}^{pq}(d_1) - j\beta_y A_{y2}^{pq}(d_1)] e^{-j[\beta_x x' + \beta_y y']}$$

Substituindo:

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [-j\beta_x A_{x2}^{pq}(d_1) - j\beta_y A_{y2}^{pq}(d_1)] \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x - \beta_x]x' + [k_y - \beta_y]y'} dx' dy'$$

Demonstração da integral em (4.95):

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x - \beta_x]x' + [k_y - \beta_y]y'} dx' dy' = \int_{-b}^b e^{j[k_x - \beta_x]x'} dx' \int_{-a}^a e^{j[k_y - \beta_y]y'} dy' = \frac{[e^{j[k_x - \beta_x]x'}]_{-a}^a}{j[k_x - \beta_x]} \frac{[e^{j[k_y - \beta_y]y'}]_{-b}^b}{j[k_y - \beta_y]}$$

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x - \beta_x]x' + [k_y - \beta_y]y'} dx' dy' = 4ab \frac{[e^{j[k_x - \beta_x]a} - e^{-j[k_x - \beta_x]a}]}{2j[k_x - \beta_x]a} \frac{[e^{j[k_y - \beta_y]b} - e^{-j[k_y - \beta_y]b}]}{2j[k_y - \beta_y]b}$$

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x - \beta_x]x' + [k_y - \beta_y]y'} dx' dy' = 4ab \frac{\sin a[k_x - \beta_x]}{[k_x - \beta_x]a} \frac{\sin b[k_y - \beta_y]}{[k_y - \beta_y]b}$$

Lembrando que $\beta_x = \frac{p\pi}{a}$, $\beta_y = \frac{q\pi}{b}$, $k_x = \frac{m\pi}{a}$ e $k_y = \frac{n\pi}{b}$:

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x - \beta_x]x' + [k_y - \beta_y]y'} dx' dy' = 4ab \frac{\sin \pi[m-p]}{[m-p]\pi} \frac{\sin \pi[n-q]}{[n-q]\pi} = 4ab \text{sinc}[m-p] \text{sinc}[n-q]$$

Como m, n, p e q são sempre inteiros, a solução para a integral:

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j[k_x - \beta_x]x' + [k_y - \beta_y]y'} dx' dy' = \begin{cases} 0 & p \neq m, q \neq n \\ 4ab & p = m, q = n \end{cases}$$

Em posse dos resultados (4.97) e (4.98), substituindo (4.90) em (4.86), e, (4.90) e (4.93) em (4.88) de modo que as duas equações restantes forma um sistema de equações em termos de Λ_{z1d1}^{mn} e Λ_{z2d2}^{mn} . Para a primeira equação:

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left([1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{\varepsilon_1 \mu_1} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right] - 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn} \right) \\ = \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} + \left(\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{\varepsilon_1 \mu_1} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right] - \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{z2d2}^{mn} \right) \\ = \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{z2d2}^{mn} \right] \\ = \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \Lambda_{z1d1}^{mn} - \frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{z2d2}^{mn} \right. \\
& \quad \left. = \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} - \frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right]
\end{aligned}$$

Para a segunda equação:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \Lambda_{z1d1}^{mn} + \frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right] - [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \Lambda_{z2d2}^{mn} \right) \\
& \quad - \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \Lambda_{z2d2}^{mn} + \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] = 0 \\
& \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \Lambda_{z1d1}^{mn} + \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \right] \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right] - \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{z2d2}^{mn} - \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{z2d2}^{mn} \\
& \quad = \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \\
& \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \Lambda_{z1d1}^{mn} - \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{z2d2}^{mn} - \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{z2d2}^{mn} \right. \\
& \quad \left. = - \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \right] \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{z1d1}^{mn} + \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} + \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right] \Lambda_{z2d2}^{mn} \right. \\
& \quad \left. = \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right.
\end{aligned}$$

A equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right) & - \left(\frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \\ - \left(\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right) & \left(\left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] + \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{z1d1}^{mn} \\ \Lambda_{z2d2}^{mn} \end{bmatrix} = b$$

onde:

$$\begin{aligned}
b_1 &= b_{1a} + b_{1b} = \left\{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \right\} + \left\{ - \left[\frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right\} \\
b_2 &= \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{z1d1}^{mn} \\ \Lambda_{z2d2}^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{x1d1}^{mn} &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
\Lambda_{x2d2}^{mn} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Primeiramente, o determinante da matriz A:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= \left(1 + \frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right) \left(\left[\frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_2 \mu_2]} \right] + \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right) \\
&\quad - \left(\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \right) \left(\frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right)
\end{aligned}$$

$$\det A = 4 \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM}} [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]$$

Agora o determinante de A_1 :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b_{1a} + b_{1b}) & -\left(\left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \\ b_2 & \left(\left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] + \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) \end{vmatrix}$$

$$\det A_1 = (b_{1a} + b_{1b}) \left(\left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] + \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) + \left(\left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) b_2$$

Agora o determinante de A_2 :

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(1 + \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) & (b_{1a} + b_{1b}) \\ -\left(\left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\det A_2 = \left(1 + \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) b_2 + \left(\left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) (b_{1a} + b_{1b})$$

Dessa forma:

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{(b_{1a} + b_{1b}) \left(\left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] + \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) + \left(\left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) b_2}{4 \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM}} [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{(b_{1a} + b_{1b}) \left(\left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] + \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right) [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] T_{21}^{TM} T_{23}^{TM}}{4 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} + \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} b_2$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{\left([1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] + \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z2}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right) T_{21}^{TM} T_{23}^{TM}}{4 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} (b_{1a} + b_{1b}) + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} b_2$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{\left(1 + \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z2}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] + \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z2}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] - 1 \right) e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} T_{21}^{TM} T_{23}^{TM}}{4 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} (b_{1a} + b_{1b}) + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} b_2$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_3 k_{z2}} ([\varepsilon_3 k_{z2} + \varepsilon_2 k_{z3}] - [\varepsilon_3 k_{z2} - \varepsilon_2 k_{z3}] e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}) T_{21}^{TM} T_{23}^{TM}}{4 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} (b_{1a} + b_{1b}) + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} b_2$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{\left[\frac{\varepsilon_3 k_{z2} + \varepsilon_2 k_{z3}}{2 \varepsilon_3 k_{z2}} \right] T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} \left(1 - \left[\frac{\varepsilon_3 k_{z2} - \varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2} + \varepsilon_2 k_{z3}} \right] e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right)}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} (b_{1a} + b_{1b}) + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} b_2$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{T_{21}^{TM} (1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)})}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} (b_{1a} + b_{1b}) + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{2 [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} b_2$$

Definindo os coeficientes generalizados de Reflexão e Transmissão do modo TM:

$$\tilde{R}_{12}^{TM} = 1 - \frac{T_{21}^{TM} [1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\tilde{T}_{23}^{TM} = \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Substituindo:

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \frac{1}{2} (b_{1a} + b_{1b}) + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} b_2 \frac{1}{2}$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \left[b_{1b} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + b_2 \begin{bmatrix} k_{z1} \\ k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_1 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} \right]$$

Expandindo b_{1b} e b_2 :

$$b_{1b} = - \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn}$$

$$b_2 = \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2} \right] \Lambda_{xy3d2}^{mn}$$

Substituindo $A_{x2}^{mn}(d_1)$, $A_{y2}^{mn}(d_1)$ e $A_{x3}^{mn}(d_2)$, $A_{y3}^{mn}(d_2)$ em Λ_{xy2d1}^{mn} e Λ_{xy3d2}^{mn} :

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = 4ab [-jk_x A_{x2}^{mn}(d_1) - jk_y A_{y2}^{mn}(d_1)]$$

$$\Lambda_{xy2d1}^{mn} = -j\mu_2 4ab \frac{1}{k_{z2}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} [e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} + R_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} [-jk_x I_x - jk_y I_y]$$

$$\Lambda_{xy3d2}^{mn} = 4ab [-jk_x A_{x3}^{mn}(d_2) - jk_y A_{y3}^{mn}(d_2)]$$

$$\Lambda_{xy3d2}^{mn} = -j\mu_3 4ab \frac{1}{k_{z3}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} [-jk_x I_x - jk_y I_y]$$

Seja:

$$\zeta_{12} = \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \quad e \quad \zeta_{23} = \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2} \right]$$

$$b_{1b} = - \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn}$$

$$b_2 = \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn}$$

Primeiramente, para Λ_{z1d1}^{mn} . Substituindo:

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) b_{1b} + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_1 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} b_2 \right]$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM})$$

$$+ \frac{1}{2} \left[- (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_1 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \left[- (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \zeta_{12} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right]$$

Por causa do tamanho das equações, a partir deste ponto iremos destacar as partes que sofreram modificações em vermelho. Ao final das manipulações algébricas, retornaremos a equação de partida.

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \left[- \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right]$$

$$\left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - 2\tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} + (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\
&= \left[\frac{T_{21}^{TM} [1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} - 2 \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right. \\
& \left. + \frac{T_{21}^{TM} [1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\
&= \left[1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - 2T_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right. \\
& \left. - R_{23}^{TM} e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\
&= \left[1 + \left(-R_{23}^{TM} - 2 \left\{ \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] T_{23}^{TM} \right\} + 1 \right) e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - R_{23}^{TM} e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}
\end{aligned}$$

$$\text{Aplicando } \frac{\varepsilon_a k_{zb}}{\varepsilon_b k_{za}} T_{ab}^{TM} = 1 - R_{ab}^{TM} :$$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\
&= \left[1 + (-R_{23}^{TM} - 2\{1 - R_{23}^{TM}\} + 1) e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - R_{23}^{TM} e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}
\end{aligned}$$

$$\left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = \left[1 + (R_{23}^{TM} - 1) e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - R_{23}^{TM} e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\
&= \left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - R_{23}^{TM} e^{4jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\
&= \left[[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] + [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}
\end{aligned}$$

$$\left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] 2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{T_{21}^{TM} [1 + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Retornando:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{z1d1}^{mn} &= \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \\
&+ \frac{1}{2} \left[-[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{T_{21}^{TM} [1 + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \\
&- \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{1}{2} \left[\frac{T_{21}^{TM} [1 + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right]$$

Somando e Subtraindo o termo $2 \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right]$:

$$\Lambda_{z1d1}^{mn} = \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{1}{2} \left[\left[\frac{T_{21}^{TM} [1 + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} - 2 \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \right] + 2 \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right]$$

$$\frac{T_{21}^{TM} [1 + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} - 2 \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] = \left[T_{21}^{TM} [1 + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - 2 \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right] \frac{1}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

Substituindo b_{1b} e b_2 :

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} - \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \mu_1 k_{z1} \\ \mu_2 k_{z2} \end{bmatrix} \zeta_{12} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \\ + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\begin{bmatrix} \mu_3 k_{z3} \\ \mu_2 k_{z2} \end{bmatrix} \zeta_{12} \frac{2e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{x2d2}^{mn} = & \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{23}^{TM} b_{1a} \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{23}^{TM} \frac{1}{T_{21}^{TM}} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[-T_{21}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right. \\ & \left. + [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \frac{2}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \end{aligned}$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{T_{21}^{TM}} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \left[-T_{21}^{TM} \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \frac{[\varepsilon_3 \mu_3]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{[\mu_1 k_{z1}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \zeta_{12} \frac{[1 + e^{2/jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2/jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right. \\ \left. + \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} 2\zeta_{12} \frac{[1 - R_{z1}^{TM} e^{2/jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - e^{2/jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} [1 - R_{21}^{TM} e^{2/jk_{z2}(d_2-d_1)}] e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]$$

$$\Lambda_{x^2d^2}^{mn} = \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} \\ + \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{T_{21}^{TM}} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[2 \left[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \right. \\ \left. - T_{21}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \left[1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \right] \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d^1}^{mn} \\ \left. - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d^2}^{mn} \left[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]$$

$$\left[2[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \left\{ \frac{[\mathcal{E}_2 k_{z1}]}{[\mathcal{E}_1 k_{z2}]} T_{21}^{TM} \right\} [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right] = \left[[2 - 2R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \{(1 - R_{21}^{TM})\} [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right]$$

$$\left[2[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \left\{ \frac{E_2 k_{z1}}{E_1 k_{z2}} \right\} T_{21}^{TM} \right] [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] = [2 - 2R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} + (R_{21}^{TM} - 1) + (R_{21}^{TM} - 1)e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]$$

$$\left[2[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \left\{ \frac{\{\mathcal{E}_2 k_{z1}\}}{\{\mathcal{E}_1 k_{z2}\}} T_{21}^{TM} \right\} [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right] = [1 + R_{21}^{TM} - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]$$

$$\left[2[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}] - \left\{ \frac{[\varepsilon_2 k_{z1}]}{[\varepsilon_1 k_{z2}]} T_{21}^{TM} \right\} [1 + e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}] \right] = [(1 + R_{21}^{TM}) - (1 + R_{21}^{TM}) e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}]$$

$$\left[2[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] - \left\{ \frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right\} T_{21}^{TM} \right] [1 + e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] = [1 + R_{21}^{TM}] [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]$$

Retornando:

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} \\ + \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{T_{21}^{TM}} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\left[[1 + R_{21}^{TM}] [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right] \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} \right. \\ \left. - \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \left[[1 + R_{21}^{TM}] \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{T_{21}^{TM}} \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{T_{21}^{TM}} [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

$$\Lambda_{x2d2}^{mn} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \mu_3 k_{z3} \\ \mu_2 k_{z2} \end{bmatrix} \\ \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1} - \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{\gamma_{21}^2} [1 - R_{21}^{TM} e^{j k_{z2} (d_2 - d_1)}] e^{-j k_{z2} (d_2 - d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{z3d2}^{mn} = \frac{[k_{z3}]}{[k_{z2}]} \frac{[\varepsilon_2 \mu_3]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

Dessa forma, os coeficientes de acoplamento nas interfaces são:

$$\begin{aligned}\Lambda_{z1d1}^{mn} &= \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \\ \Lambda_{z2d2}^{mn} &= \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \\ \Lambda_{z2d1}^{mn} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \left[[1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \\ \Lambda_{z3d2}^{mn} &= \left[\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_3}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]\end{aligned}$$

Agora expandindo Λ_{xy2d1}^{mn} e Λ_{xy3d2}^{mn} , substituindo $A_{x2}^{mn}(d_1)$, $A_{y2}^{mn}(d_1)$ e $A_{x3}^{mn}(d_2)$, $A_{y3}^{mn}(d_2)$ em Λ_{xy2d1}^{mn} e Λ_{xy3d2}^{mn} :

$$\begin{aligned}\Lambda_{xy2d1}^{mn} &= 4ab [-jk_x A_{x2}^{mn}(d_1) - jk_y A_{y2}^{mn}(d_1)] \\ \Lambda_{xy2d1}^{mn} &= -j\mu_2 4ab \frac{1}{k_{z2}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} [e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} + R_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} [-jk_x I_x - jk_y I_y] \\ \Lambda_{xy2d1}^{mn} &= -j\mu_2 4ab \frac{1}{k_{z2}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} [e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} + R_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{1}{T_{23}^{TE}} \frac{T_{21}^{TE} T_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} [-jk_x I_x - jk_y I_y] \\ \Lambda_{xy2d1}^{mn} &= -j\mu_2 4ab \frac{1}{k_{z2}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \frac{T_{21}^{TE} [1 + R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} [-jk_x I_x - jk_y I_y]\end{aligned}$$

Utilizando a identidade:

$$\begin{aligned}\left[\frac{T_{21}^{TE} [1 + R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{21}^{TE} R_{23}^{TE} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right] &= \left[\frac{\mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] \\ \Lambda_{xy2d1}^{mn} &= -j\mu_2 4ab \frac{1}{k_{z2}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] [-jk_x I_x - jk_y I_y] \\ \Lambda_{xy2d1}^{mn} &= -j4ab \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)}\end{aligned}$$

Agora para:

$$\begin{aligned}\Lambda_{xy3d2}^{mn} &= 4ab [-jk_x A_{x3}^{mn}(d_2) - jk_y A_{y3}^{mn}(d_2)] \\ \Lambda_{xy3d2}^{mn} &= -j\mu_3 4ab \frac{1}{k_{z3}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} [-jk_x I_x - jk_y I_y] \\ \Lambda_{xy3d2}^{mn} &= -j4ab \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)}\end{aligned}$$

A componente A_z^{mn} no meio 1:

$$\begin{aligned}A_{z1}^{mn}(z) &= \frac{-j}{8ab k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - 2e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \Lambda_{z1d1}^{mn} \} \\ A_{z1}^{mn}(z) &= \frac{-j}{8ab k_{z1}} \left\{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \left[\frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \right\} \\ A_{z1}^{mn}(z) &= \frac{-j}{8ab k_{z1}} \left\{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - 2e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \frac{1}{2} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right\}\end{aligned}$$

$$A_{z1}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \left\{ e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right\}$$

Substituindo b_{1a} :

$$\frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ = \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] \\ - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ = \frac{-j\mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi')}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ = -j\mu_1 \frac{[j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi')}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} - e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} \\ \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \{ \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') [e^{-jk_{z1}|z-h|} + e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}] - e^{-jk_{z1}(z-d_1)} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \} = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \}$$

Retornando:

$$A_{z1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \} \\ + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \left\{ e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right\}$$

Substituindo Λ_{xy2d1}^{mn} e Λ_{xy3d2}^{mn} :

$$A_{z1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \} \\ + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z1}} \left\{ e^{-jk_{z1}(z-d_1)} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \left(-j4ab \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \left(-j4ab \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \right) \right] \right\}$$

$$A_{z1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \} \\ + \frac{(-j)^2}{8ab} 4ab \frac{1}{k_{z1}} \left\{ e^{-jk_{z1}(z-d_1)} [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[[1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \right\}$$

$$A_{z1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \} \\ - \frac{1}{2k_{z1}} \left\{ [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \left[\frac{\mu_1 k_{z1}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\zeta_{12} [1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] + \zeta_{23} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \right\}$$

$$A_{z1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \} \\ - \mu_1 \frac{1}{2k_{z1}} \left\{ [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\zeta_{12} \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \right\}$$

A componente A_z^{mn} no meio 2:

$$A_{z2}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left([\Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}] e^{jk_{z2}(z-d_1)} - [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right)$$

Primeiramente verificando a relação entre colchetes:

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{v2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] b_{1a} (1 - \bar{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \left[[1 - \bar{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \bar{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right. \\ & \quad \left. - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \bar{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\bar{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \bar{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 k_{z1}]}{[\varepsilon_1 k_{z2}]} \left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \frac{[\varepsilon_1 k_{z2}]}{[\varepsilon_2 k_{z1}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right. \\ & \quad \left. - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \left[[1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right. \\ &\left. - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{\nu 2 d 1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{\nu 2 d 2}^{mn} \right] \\ &= \frac{1}{2} b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \left[\left(1 - \tilde{R}_{12}^{TM} \right) - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_2 \left[\frac{k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \left[\left[1 - \tilde{R}_{12}^{TM} \right] \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy 2 d 1}^{mn} - \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy 3 d 2}^{mn} \right] \\ &- e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{\mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy 2 d 1}^{mn} - \left[1 - \tilde{R}_{32}^{TM} \right] \zeta_{23} \Lambda_{xy 3 d 2}^{mn} \right] \end{aligned}$$

$$\left[(1 - \bar{R}_{12}^{TM}) - \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = \frac{\left[T_{21}^{TM} [1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right]}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} - \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\left[\left(1 - \tilde{R}_{12}^{TM} \right) - \frac{\left[\varepsilon_2 k_{z2} \right]}{\left[\varepsilon_3 k_{z2} \right]} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right] = \frac{\left[\left(1 - R_{23}^{TM} e^{2 j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right) - \left\{ \frac{\left[\varepsilon_2 k_{z3} \right]}{\left[\varepsilon_3 k_{z2} \right]} T_{23}^{TM} \right\} e^{2 j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right]}{\frac{T_{21}^{TM}}{\left[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2 j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right]}}$$

$$\left[\left(1 - \tilde{R}_{12}^{TM} \right) - \frac{\left[\varepsilon_2 k_{z2} \right]}{\left[\varepsilon_3 k_{z2} \right]} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right] = \left[\left(1 - R_{23}^{TM} e^{2 j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right) - \left(1 - R_{23}^{TM} \right) e^{2 j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{\left[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2 j k_{z2} (d_2 - d_1)} \right]}$$

$$\left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)} \right] = \left[1 - R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)} + -e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)} + R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)} \right] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}]}$$

$$\left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{T_{21}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\left[(1 - \bar{R}_{12}^{TM}) - \frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - \bar{P}_{21}^{TM} \bar{R}_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \frac{1}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\left[(1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] = \left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

Retornando:

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} \right] \\ &= \frac{1}{2} b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \right. \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_2 \left[\frac{k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \left[1 - \tilde{R}_{12}^{TM} \right] \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \left. \right] \\ &- e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{\mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[1 - \tilde{R}_{32}^{TM} \right] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{x2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn}] \\ &= \frac{1}{2} b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right]_{23}^{\tilde{T}TM} e^{-jk_{x2}(d_2-d_1)} [1 - e^{2jk_{x2}(d_2-d_1)}] \\ &+ \frac{1}{2} \left[1 - e^{2jk_{x2}(d_2-d_1)} \right] e^{-jk_{x2}(d_2-d_1)} \frac{\tilde{T}TM}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[(1 - \tilde{R}_{32}^{TM}) e^{jk_{x2}(d_2-d_1)} - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{x1}}{\varepsilon_1 k_{x2}} \right]_{23}^{\tilde{T}TM} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right]_{23} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \end{aligned}$$

$$\left[1 - \tilde{R}_{32}^{TM} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} = \left[1 - \tilde{R}_{32}^{TM} - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\begin{bmatrix} [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} - \frac{[\varepsilon_2 k_{z1}]}{[\varepsilon_1 k_{z2}]} \tilde{T}_{23}^{TM} \\ \tilde{T}_{23}^{TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{23}^{TM} [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \\ [1 - R_{23}^{TM} R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \\ [1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \end{bmatrix} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\left[1 - \tilde{R}_{32}^{TM} \right] e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} = \left[1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - \left\{ \frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right\} T_{21}^{TM} \right] \frac{T_{23}^{TM}}{\left[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\left[[1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)} - \frac{[\varepsilon_2 k_{21}]}{[\varepsilon_1 k_{22}]} \tilde{T}_{23}^{TM} \right] = [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)} - \{1 - R_{21}^{TM}\}] \frac{T_{23}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}]} e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)}$$

$$\left[1 - \bar{R}_{32}^{TM}\right] e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)} - \frac{\left[\varepsilon_2 k_{z1}\right]}{\left[\varepsilon_1 k_{z2}\right]} \bar{T}_{23}^{TM} = \left[-R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)} + R_{21}^{TM}\right] \frac{T_{23}^{TM}}{\left[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}\right]} e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)}$$

$$\left[[1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)} - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \right] = [1 - e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}]}$$

$$\left[1 - \tilde{R}_{32}^{TM}\right] e^{jk_{z2}(d_2 - d_1)} - \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}}\right] \tilde{T}_{23}^{TM} = \left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2 - d_1)}\right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TM}$$

Retornando:

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{v2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{v2d2}^{mn} \right] \\ &= \frac{1}{2} b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}] \\ &= \left\{ b_{1a} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} + \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right\} \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{2} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \end{aligned}$$

Agora para:

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn} \right] \\ &= \left[\frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right. \\ & \quad \left. - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left[\frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) + \frac{1}{2} \frac{[\varepsilon_2 k_{z1}]}{[\varepsilon_1 k_{z2}]} \left[[1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \frac{[\varepsilon_1 k_{z2}]}{[\varepsilon_2 k_{z1}]} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \tilde{T}_{23}^{TM} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] \\
&= \left[\frac{[\varepsilon_2 k_{z3}]}{[\varepsilon_3 k_{z2}]} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{1}{2} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_1 \mu_1]} \right] b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \right. \\
&+ \left. \left[\frac{1}{2} \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \right] \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{[\mu_3 k_{z3}]}{[\mu_2 k_{z2}]} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right. \right. \\
&- \left. \left. e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{1}{2} \left[\frac{[\varepsilon_2 k_{z1}]}{[\varepsilon_1 k_{z2}]} \right] \left[[1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \left[\frac{[\varepsilon_1 k_{z2}]}{[\varepsilon_2 k_{z1}]} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[\frac{[\varepsilon_2 \mu_2]}{[\varepsilon_3 \mu_3]} \right] \hat{\gamma} \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} b_{1a} (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} - (1 - \tilde{R}_{12}^{TM}) \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} b_{1a} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_1 \mu_1 \end{bmatrix} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\left[\tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} [1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \right] = -[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{1}{T_{23}^{TM}} \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\left[\tilde{T}_{23}^{TM} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z3} \\ \varepsilon_3 k_{z2} \end{bmatrix} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} [1 - \tilde{R}_{12}^{TM}] \right] = -[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}}$$

Retornando:

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] \\ &= -b_{1a} \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \\ &+ \frac{1}{2} \left[-[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] \\ &= -b_{1a} \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \\ &- \frac{1}{2} \left[[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - \left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = \left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} - \frac{T_{23}^{TM} [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}{[1 - R_{23}^{TM} R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \right]$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = \left[\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} T_{21}^{TM} \right\} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right] \frac{T_{23}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = \left[\{1 - R_{21}^{TM}\} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - [1 - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \right] \frac{T_{23}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = [e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)} - 1 + R_{21}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{T_{23}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = -[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{T_{23}^{TM}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]}$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = -[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{1}{T_{21}^{TM}} \frac{T_{21}^{TM} T_{23}^{TM} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)}}{[1 - R_{21}^{TM} R_{23}^{TM} e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\left[e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 k_{z1} \\ \varepsilon_1 k_{z2} \end{bmatrix} \tilde{T}_{23}^{TM} - [1 - \tilde{R}_{32}^{TM}] \right] = -[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)}$$

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] \\ &= -b_{1a} \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \\ &- \frac{1}{2} \left[[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] R_{23}^{TM} \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} - [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \end{aligned}$$

$$[\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] = \left\{ -b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} - \left[\frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right\} \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{2} [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]$$

Agora, substituindo os resultados obtidos:

$$A_{z2}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} ([\Lambda_{z2d1}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d2}^{mn}] e^{jk_{z2}(z-d_1)} - [\Lambda_{z2d2}^{mn} - e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \Lambda_{z2d1}^{mn}] e^{-jk_{z2}(z-d_2)})$$

$$\begin{aligned} A_{z2}^{mn}(z) &= \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z2}} \frac{1}{[1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}]} \left(\left(b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} + \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right) \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{2} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} [1 \right. \\ &\quad \left. - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] e^{jk_{z2}(z-d_1)} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ -b_{1a} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} - \left[\frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \mu_2 \\ \varepsilon_3 \mu_3 \end{bmatrix} \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right\} \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{2} [1 - e^{2jk_{z2}(d_2-d_1)}] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \\
&= \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \left[-j4ab \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \left[-j4ab \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \right] \right] \right] \\
& \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \\
&= -j4ab [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \right] \\
& \left[\frac{1}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right] \\
&= -j\mu_2 4ab [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]
\end{aligned}$$

Retornando:

$$\begin{aligned}
A_{z2}^{mn}(z) = & -j\mu_2 I_z e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \\
& + \frac{-j}{8ab k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} \left(-j\mu_2 4ab [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] \right. \right. \\
& + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left. \left. \frac{\mathcal{E}_2 \mu_2}{\mathcal{E}_3 \mu_3} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{jk_{z2}(z-d_2)} \\
& + \left. \left. \left[\frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \frac{\mathcal{E}_2 \mu_2}{\mathcal{E}_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right)
\end{aligned}$$

Substituindo Λ_{xy2d1}^{mn} e Λ_{xy3d2}^{mn} :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \\ & = -j4ab[-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} \right] \\ & \left[\frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \\ & = -j\mu_2 4ab[-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] \end{aligned}$$

Retornando:

$$\begin{aligned}
A_{z_2 z_2}^{mn}(z) = & -j\mu_2 I_z e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \frac{1}{k_{z2}} \left[e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right] \\
& + \frac{-j}{8ab k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} \left(-j\mu_2 4ab [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] \right. \right. \\
& + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \left. \right] e^{jk_{z2}(z-d_2)} \\
& + \left. -j\mu_2 4ab [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] \right. \right. \\
& + \left. \left. \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right)
\end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned}
A_{z_2}^{mn}(z) = & -j\mu_2 I_z e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{\varepsilon_1} \frac{1}{T_{23}^{TM}} \frac{1}{k_{z2}} [e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \right. \\
& - \mu_2 [-jk_x I_x \\
& - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \frac{1}{2k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} \left(\left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{jk_{z2}(z-d_2)} \right. \\
& \left. \left. + \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right] e^{-jk_{z2}(z-d_2)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Componente A_z^{mn} no meio 3:

$$A_{v3}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \Lambda_{v3d2}^{mn}$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{2}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \left[\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_3}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \frac{1}{2} \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} + \frac{1}{2} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right] \right]$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} \left[\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_3}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} b_{1a} e^{jk_{z3}(z-d_2)} + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

Substituindo b_{1a} :

$$A_{v3}^{mn}(z) = \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} \left[\frac{k_{z3}}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_3}{\varepsilon_1 \mu_1} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \mu_1 [j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi') e^{-jk_{z1}(h-d_1)} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \\ + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = -j\mu_3 \frac{[j\omega p_{eff}] f_z(\theta', \phi')}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} \\ + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_z \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} + \frac{-j}{8ab} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}(z-d_2)} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \Lambda_{xy2d1}^{mn} + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \Lambda_{xy3d2}^{mn} \right]$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_z \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} \\ - [-jk_x I_x - jk_y I_y] \frac{1}{2k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} \left[\tilde{T}_{23}^{TM} \left[\frac{\mu_3 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \zeta_{12} \left[\frac{\mu_1}{k_{z1}} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \zeta_{23} \left[\frac{\mu_2}{k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} \right]$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_z \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} \\ - \mu_3 [-jk_x I_x - jk_y I_y] \frac{1}{2k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} \left[\zeta_{12} \left[\frac{\mu_1 k_{z3}}{\mu_2 k_{z2}} \right] \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} \right] [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \tilde{T}_{23}^{TE} \right]$$

Por fim, o campo potencial nos três meios:

$$A_{z1}^{mn}(z) = -j\mu_1 I_z \frac{1}{k_{z1}} \{ e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \} - \mu_1 \frac{1}{k_{z1}} \{ [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} S_{1d1}^{TEM} \}$$

$$A_{z2}^{mn}(z) = -j\mu_2 I_z e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} \frac{1}{k_{z2}} [e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \\ - \mu_2 [-jk_x I_x - jk_y I_y] e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \frac{1}{k_{z2}} \tilde{T}_{23}^{TM} [S_{2d1}^{TEM} e^{jk_{z2}(z-d_2)} + S_{2d2}^{TEM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}]$$

$$A_{v3}^{mn}(z) = -j\mu_3 I_z \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} - \mu_3 [-jk_x I_x - jk_y I_y] \frac{1}{k_{z3}} e^{jk_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]} S_{3d2}^{TEM}$$

Onde os coeficientes de acoplamento dos modos TE e TM são:

$$S_{1d1}^{TEM} = \left[\frac{1}{2k_{z2}} \right] \left[\zeta_{12} \left[\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] [1 + \tilde{R}_{12}^{TM}] [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_3 k_{z2}} \right] \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} \tilde{T}_{23}^{TE} \right]$$

$$S_{2d1}^{TEM} = \frac{1}{2} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{1}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{R_{21}^{TM}}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]$$

$$S_{2d2}^{TEM} = \frac{1}{2} \left[\zeta_{12} \left[\frac{1}{k_{z1}} \right] \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \frac{R_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{1}{k_{z2}} \right] \left[\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_3 \mu_3} \right] \frac{1}{T_{21}^{TM}} \tilde{T}_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(d_2-d_1)} \right]$$

$$S_{3d2}^{TEM} = \left[\frac{1}{2k_{z2}} \right] \left[\zeta_{12} \left[\frac{\mu_1 k_{z3}}{\mu_2 k_{z1}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} [1 + \tilde{R}_{12}^{TE}] + \zeta_{23} \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} \right] [1 + \tilde{R}_{32}^{TM}] \tilde{T}_{23}^{TE} \right]$$

APÊNDICE E – Campos Elétrico e Magnético a partir de $\mathbf{A}$

E.1 Campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$

Expandindo o rotacional de $\mathbf{A}$ em (3.10), o campo magnético pode ser escrito por:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left(\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right)$$

Utilizando (3.11), o campo elétrico será:

$$\mathbf{E} = -j \frac{\eta}{k\mu} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + k^2 \mathbf{A}]$$

$$\mathbf{E} = -j \frac{\eta}{k\mu} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{A} - j\mu I_x k^2 A_\rho \right] \hat{\mathbf{a}}_x + \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{A} - j\mu I_y k^2 A_\rho \right] \hat{\mathbf{a}}_y + \left[\frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 [A_{zx} + A_{zy} + A_{zz}] \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\mu I_x \frac{\partial A_\rho}{\partial x} - j\mu I_y \frac{\partial A_\rho}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z}$$

E.2 Derivadas parciais e Divergente de $\mathbf{A}$

Aplicando a identidade proposta na seção 4.4 para modificar ao campo (4.126) definido via PGF 3D, as componentes do campo potencial magnético serão:

$$A_x(\mathbf{r}) = I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} \cos[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$A_y(\mathbf{r}) = I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} \cos[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$A_z(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_x A_{zx}^{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] + \\ I_y A_{zy}^{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] + \\ I_z A_{zz}^{mn}(z) \cos[k_x x] \cos[k_y y] \end{array} \right\}$$

A derivada em relação à x , $\partial/\partial x$:

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x(\mathbf{r}) = I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y(\mathbf{r}) = I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_z(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_x A_{zx}^{mn}(z) [-k_x^2] \cos[k_x x] \cos[k_y y] + \\ I_y A_{zy}^{mn}(z) [k_x k_y] \sin[k_x x] \sin[k_y y] + \\ I_z A_{zz}^{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] \end{array} \right\}$$

A derivada em relação à y , $\partial/\partial y$:

$$\frac{\partial}{\partial y} A_x(\mathbf{r}) = I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_y(\mathbf{r}) = I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_z(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_x A_{zx}^{mn}(z) [k_x k_y] \sin[k_x x] \sin[k_y y] + \\ I_y A_{zy}^{mn}(z) [-k_y^2] \cos[k_x x] \cos[k_y y] + \\ I_z A_{zz}^{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] \end{array} \right\}$$

A derivada em relação à z , $\partial/\partial z$:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x(\mathbf{r}) = I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} \cos[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_y(\mathbf{r}) = I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} \cos[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_z(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_x \frac{\partial}{\partial z} A_{zx}^{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] + \\ I_y \frac{\partial}{\partial z} A_{zy}^{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] + \\ I_z \frac{\partial}{\partial z} A_{zz}^{mn}(z) \cos[k_x x] \cos[k_y y] \end{array} \right\}$$

Agora definimos as Derivadas do Divergente de $\mathbf{A}$. O divergente de $\mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x(\mathbf{r}) = I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_y(\mathbf{r}) = I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_z(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_x \frac{\partial}{\partial z} A_{zx}^{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] + \\ I_y \frac{\partial}{\partial z} A_{zy}^{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] + \\ I_z \frac{\partial}{\partial z} A_{zz}^{mn}(z) \cos[k_x x] \cos[k_y y] \end{array} \right\}$$

Derivada do divergente de $\mathbf{A}$, em relação a x , $\partial/\partial x \nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x(\mathbf{r}) = I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_x^2] \cos[k_x x] \cos[k_y y]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_y(\mathbf{r}) = I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [k_x k_y] \sin[k_x x] \sin[k_y y]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_z(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_x \frac{\partial}{\partial z} A_{zx}^{mn}(z) [-k_x^2] \cos[k_x x] \cos[k_y y] + \\ I_y \frac{\partial}{\partial z} A_{zy}^{mn}(z) [k_x k_y] \sin[k_x x] \sin[k_y y] + \\ I_z \frac{\partial}{\partial z} A_{zz}^{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] \end{array} \right\}$$

Derivada do divergente de A, em relação a y, $\partial/\partial y \nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A_x(\mathbf{r}) &= I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [k_x k_y] \sin[k_x x] \sin[k_y y] \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_y(\mathbf{r}) &= I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_y^2] \cos[k_x x] \cos[k_y y] \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} A_z(\mathbf{r}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{aligned} &I_x \frac{\partial}{\partial z} A_{zx}^{mn}(z) [k_x k_y] \sin[k_x x] \sin[k_y y] + \\ &I_y \frac{\partial}{\partial z} A_{zy}^{mn}(z) [-k_y^2] \cos[k_x x] \cos[k_y y] + \\ &I_z \frac{\partial}{\partial z} A_{zz}^{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

Derivada do divergente de A, em relação a z, $\partial/\partial z \nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} A_x(\mathbf{r}) &= I_x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} A_{xx}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} A_y(\mathbf{r}) &= I_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} A_{yy}^{mn}(z) \epsilon_{mn} [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z(\mathbf{r}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{mn} \left\{ \begin{aligned} &I_x \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zx}^{mn}(z) [-k_x] \sin[k_x x] \cos[k_y y] + \\ &I_y \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zy}^{mn}(z) [-k_y] \cos[k_x x] \sin[k_y y] + \\ &I_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zz}^{mn}(z) \cos[k_x x] \cos[k_y y] \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

As derivadas em relação à z das componentes do campo potencial no domínio espectral. As componentes espectrais de (176) no meio 1 são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} A_{xx_1}^{mn} &= \frac{\partial}{\partial z} A_{yy_1}^{mn} = -\mu_1 \{ \text{sgn}[z-h] e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12} e^{-jk_{z1}[z+h-2d_1]} \} \\ \frac{\partial}{\partial z} A_{zx_1}^{mn} &= \frac{\partial}{\partial z} A_{zy_1}^{mn} = j\mu_1 S_{1d1}^{TEM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \\ \frac{\partial}{\partial z} A_{zz_1}^{mn}(z) &= -\mu_1 \{ \text{sgn}[z-h] e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)} \}\end{aligned}$$

No meio 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} A_{xx_2}^{mn} &= \frac{\partial}{\partial z} A_{yy_2}^{mn} = \mu_2 [e^{jk_{z2}(z-d_2)} - R_{23}^{TE} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \frac{\tilde{T}_{23}^{TE}}{T_{23}^{TE}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \\ \frac{\partial}{\partial z} A_{zx_2}^{mn} &= \frac{\partial}{\partial z} A_{zy_2}^{mn} = -j\mu_2 [S_{2d1}^{TEM} e^{jk_{z2}(z-d_2)} - S_{2d2}^{TEM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{-jk_{z1}(h-d_1)} \\ \frac{\partial}{\partial z} A_{zz_2}^{mn} &= \mu_2 [e^{jk_{z2}(z-d_2)} - R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)}\end{aligned}$$

No meio 3:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{xx_3}^{mn} = A_{yy_3}^{mn} = \mu_3 \left[\frac{\mu_2 k_{z3}}{\mu_3 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TE} e^{j[k_{z3}(z-d_2)-k_{z1}(h-d_1)]}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{zx_3}^{mn} = A_{zy_3}^{mn} = -j\mu_3 S_{3d2}^{TEM} e^{j[k_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]]}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{zz_3}^{mn} = \mu_3 \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{j[k_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]]}$$

onde $\text{sgn}[z - h]$ é a função signal definida por:

$$\text{sgn}[z - h] = \begin{cases} 1, & z \geq h \\ -1, & z < h \end{cases}$$

Segunda derivada de A_z no meio 1:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zx_1}^{mn} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zy_1}^{mn} = \mu_1 k_{z1} S_{1d1}^{TEM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zz_1}^{mn}(z) = j\mu_1 k_{z1} \{e^{-jk_{z1}|z-h|} + \tilde{R}_{12}^{TM} e^{-jk_{z1}(z+h-2d_1)}\}$$

No meio 2:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zx_2}^{mn} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zy_2}^{mn} = \mu_2 k_{z2} [S_{2d1}^{TEM} e^{jk_{z2}(z-d_2)} + S_{2d2}^{TEM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zz_2}^{mn} = j\mu_2 k_{z2} [e^{jk_{z2}(z-d_2)} + R_{23}^{TM} e^{-jk_{z2}(z-d_2)}] \left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right] \frac{\tilde{T}_{23}^{TM}}{T_{23}^{TM}} e^{-jk_{z1}(h-d_1)}$$

No meio 3:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zx_3}^{mn} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zy_3}^{mn} = \mu_3 k_{z3} S_{3d2}^{TEM} e^{j[k_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]]}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zz_3}^{mn} = j\mu_3 k_{z3} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{z3}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right] \tilde{T}_{23}^{TM} e^{j[k_{z3}[z-d_2]-k_{z1}[h-d_1]]}$$

Anexos

ANEXO A – Rotinas de Cálculo: Campo Potencial Magnético

```
% Escrito por André Felipe Souza da Cruz
%Calculo de Campo Potencial Magnético Vetorial via PGF3D, plano (xz).
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc,close all
lambda = 632.8e-9; %comprimento de Onda
M=150; %Somatorio em m
M=50; %Somatorio em m
phi_l=0;%Inclinação do dipolo em azimute 45
theta_l=90;%Inclinação do dipolo em elevação 54.55
N=M; %Somatorio em n
% L = 0.00399e-6;%Discretização da malha em z
L = 0.008e-6;%Discretização da malha em z
eps_0 =(1e-9)/(36*pi);% Permissividade do espaço livre
mu_0 = 4*pi*1e-7;% Permeabilidade do espaço livre
c = 3e8;%Velocidade da Luz
w = (2*pi*c)/lambda;%Frequência r
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Ouro:egold-----
wp1=1.3579e+016;%13.8e15;
wp2=4.4910e+015;%45e14;
G=9.9909e+013;%1.075e14;
g=8.9516e+014;%9e14;
lo = 450e-9;
wo=(2*pi*c)/lo;
einf = 7;
egold = einf - ((wp1^2)./(w.^2-j*G.*w))+((wp2^2)./(wo^2-w.^2+j*g.*w));
%-----Permissividade R. Silica:esilica-----
B1 = 0.6961663;
B2 = 0.4079426;
B3 = 0.8974794;
C1 = (0.0684043^2)*1e-12;
C2 = (0.1162414^2)*1e-12;
C3 = (9.896161^2)*1e-12;
esilica = (1+((B1*lambda.^2)./(lambda.^2-C1))+((B2*lambda.^2)./(lambda.^2-C2))+((B3*lambda.^2)./(lambda.^2-C3)));
%-----Permissividade R. Silica:esilica-----
eprisma = 2.3013;
%-----Paremetros Construtivos do Sensor:-----
eps1 = (1-0.01j)*eps_0;%Permissividade do meio 1
eps2 = (real(egold)+j*imag(egold))*eps_0;%Permissividade do meio 2
% eps2 = (-11.53-j*1.2)*eps_0
eps3 = (real(eprisma)-0.01j)*eps_0;%Permissividade do meio 3
mu1= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 1
mu2= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 2
mu3= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 3
eta1= sqrt(mu1/eps1);%Impedância do meio 1
eta2= sqrt(mu2/eps2);%Impedância do meio 2
eta3= sqrt(mu3/eps3);%Impedância do meio 3
k1 = w*sqrt(eps1*mu1)%Numero de Onda do meio 1
k2 = w*sqrt(eps2*mu2)%Numero de Onda do meio 2
k3 = w*sqrt(eps3*mu3)%Numero de Onda do meio 3
```

[illegible]

```

y= ycorde;
Delta_11 = round((ZMAX-h)/L);
Delta_12 = round((h-d1)/L);
Delta_2 = round((d1-d2)/L);
Delta_3 = round((d2-ZMIN)/L);
Delta =Delta_11+Delta_12+Delta_2+Delta_3;
[Delta_11+Delta_12+Delta_2+Delta_3 ; Delta]

x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z11 = linspace(h+ZGAP,ZMAX,Delta_11);
[x11 z11] = meshgrid(x,z11);

x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z12 = linspace(d1,h-ZGAP,Delta_12);
[x12 z12] = meshgrid(x,z12);

x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z2 = linspace(d2,d1,Delta_2);
[x2 z2] = meshgrid(x,z2);

x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z3 = linspace(ZMIN,d2,Delta_3);
[x3 z3] = meshgrid(x,z3);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% -----Calculo dos campos-----
Ax_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Ax_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Ax_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Ax_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);
Ay_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Ay_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Ay_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Ay_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);
Az_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Az_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Az_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Az_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);

emn = 1;
cont = 0;
for mm=1:M+1
    for nn=1:N+1
m=mm-1;
n=nn-1;
% -----Numero de Neumann-----
        if m==0 & n==0
            emn = 1;
        else
            emn = 4;
        end
        if m~=0 & n==0
            emn = 2;
        end
        if m==0 & n~=0
            emn = 2;
        end
%-----Constantens_mn-----
        cont = cont+1;
        kx = m*pi/a;
        ky = n*pi/b;
    end
end

```

```

kz1 = sqrt(k1.^2 -kx.^2 -ky.^2);
kz2 = sqrt(k2.^2 -kx.^2 -ky.^2);
kz3 = sqrt(k3.^2 -kx.^2 -ky.^2);

%-----Coeficientes de Reflexão TE -----
RTE_21 = (mu1*kz2-mu2*kz1)/(mu1*kz2+mu2*kz1);
RTE_23 = (mu3*kz2-mu2*kz3)/(mu3*kz2+mu2*kz3);
TTE_21 = (2*mu1*kz2)/(mu1*kz2+mu2*kz1);
TTE_23 = (2*mu3*kz2)/(mu3*kz2+mu2*kz3);
RgTE_12 = 1 - (TTE_21*(1-RTE_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1))))/(1-RTE_21*RTE_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));
TgTE_23 = (TTE_21*TTE_23*exp(j*kz2*(d2-d1)))/(1-RTE_21*RTE_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));

%-----Coeficientes de Reflexão TM -----
RTM_21 = (eps1*kz2-eps2*kz1)/(eps1*kz2+eps2*kz1);
RTM_23 = (eps3*kz2-eps2*kz3)/(eps3*kz2+eps2*kz3);
TTM_21 = (2*eps1*kz2)/(eps1*kz2+eps2*kz1);
TTM_23 = (2*eps3*kz2)/(eps3*kz2+eps2*kz3);
RgTM_12 = 1 - (TTM_21*(1-RTM_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1))))/(1-RTM_21*RTM_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));
RgTM_32 = 1 - (TTM_23*(1-RTM_21*exp(2*j*kz2*(d2-d1))))/(1-RTM_23*RTM_21*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));
TgTM_23 = (TTM_21*TTM_23*exp(j*kz2*(d2-d1)))/(1-RTM_21*RTM_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));

%-----Coeficientes de Acoplamento STEM-----
zeta_12 = (eps2*mu2-eps1*mu1)/(eps1*mu1);
zeta_23 = (eps3*mu3-eps2*mu2)/(eps2*mu2);
STEM_1d1 = (1/(2*kz2))*(zeta_12*((eps1*kz2)/(eps2*kz1))*(mu1/mu2)*(1+RgTM_12)*(1+RgTE_12)...
+ zeta_23*((eps2*kz1)/(eps3*kz2))*(mu2/mu3)*TgTM_23*TgTE_23);
STEM_2d1 = (1/2)*(zeta_12*(1/kz1)*(mu1/mu2)*(1/TTM_23)*(1+RgTE_12)...
+ zeta_23*(1/kz2)*((eps2*mu2)/(eps3*mu3))*(RTM_21/TTM_21)*TgTE_23*exp(j*kz2*(d2-d1)));
STEM_2d2 = (1/2)*(zeta_12*(1/kz1)*(mu1/mu2)*(RTM_23/TTM_23)*(1+RgTE_12)...
+ zeta_23*(1/kz2)*((eps2*mu2)/(eps3*mu3))*(1/TTM_21)*TgTE_23*exp(-j*kz2*(d2-d1)));
STEM_3d2 = (1/(2*kz2))*(zeta_12*((mu1*kz3)/(mu2*kz1))*TgTM_23*(1+RgTE_12)...
+ zeta_23*(mu2/mu3)*(1+RgTM_32)*TgTE_23);

%-----
%-----Componentes Espectrais A_mn-----
z=z11;
Ap_mn11 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTE_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));
Azp_mn11 = -mu1*(emn/kz1)*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
Azz_mn11 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

z=z12;
Ap_mn12 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTE_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));
Azp_mn12 = -mu1*(emn/kz1)*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
Azz_mn12 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

z=z2;
Ap_mn2 = -j*mu2*(emn/kz2)*(TgTE_23/TTE_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))+RTE_23*exp(-j*kz2*(z-d2)));
Azp_mn2 = -mu2*(emn/kz2)*TgTM_23*exp(-j*kz1*(h-d1))*(STEM_2d1*exp(j*kz2*(z-d2))+STEM_2d2*exp(-j*kz2*(z-d2)));
Azz_mn2 = -j*mu2*(emn/kz2)*(eps2/eps1)*(TgTM_23/TTM_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))...
+RTM_23*exp(-j*kz2*(z-d2)));

z=z3;
Ap_mn3 = -j*mu3*(emn/kz3)*TgTE_23*((mu2*kz3)/(mu3*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
Azp_mn3 = -mu3*(emn/kz3)*STEM_3d2*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
Azz_mn3 = -j*mu3*(emn/kz3)*TgTM_23*((eps2*kz3)/(eps1*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));

%-----
%-----Componentes Espaciais A-----
x =x11;
Ax_11(:, :, cont+1) = Ax_11(:, :, cont) + Ix.*Ap_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

```

```

Ay_11(:, :, cont+1) = Ay_11(:, :, cont) + Iy.*Ap_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_11(:, :, cont+1) = Az_11(:, :, cont) + (-kx*Ix).*Azp_mn11.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
    + (-ky*Iy).*Azp_mn11.*cos(kx*x).*sin(ky.*y) + Iz.*Azz_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

x =x12;
Ax_12(:, :, cont+1) = Ax_12(:, :, cont) + Ix.*Ap_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_12(:, :, cont+1) = Ay_12(:, :, cont) + Iy.*Ap_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_12(:, :, cont+1) = Az_12(:, :, cont) + (-kx*Ix).*Azp_mn12.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
    + (-ky*Iy).*Azp_mn12.*cos(kx*x).*sin(ky.*y) + Iz.*Azz_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

x =x2;
Ax_2(:, :, cont+1) = Ax_2(:, :, cont) + Ix.*Ap_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_2(:, :, cont+1) = Ay_2(:, :, cont) + Iy.*Ap_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_2(:, :, cont+1) = Az_2(:, :, cont) + (-kx*Ix).*Azp_mn2.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
    + (-ky*Iy).*Azp_mn2.*cos(kx*x).*sin(ky.*y) + Iz.*Azz_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

x =x3;
Ax_3(:, :, cont+1) = Ax_3(:, :, cont) + Ix.*Ap_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_3(:, :, cont+1) = Ay_3(:, :, cont) + Iy.*Ap_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_3(:, :, cont+1) = Az_3(:, :, cont) + (-kx*Ix).*Azp_mn3.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
    + (-ky*Iy).*Azp_mn3.*cos(kx*x).*sin(ky.*y) + Iz.*Azz_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

%-----Otimização de Memória-----
if cont ==1
    Ax_11(:, :, 1)=Ax_11(:, :, cont+1);
    Ax_12(:, :, 1)=Ax_12(:, :, cont+1);
    Ax_2(:, :, 1)=Ax_2(:, :, cont+1);
    Ax_3(:, :, 1)=Ax_3(:, :, cont+1);
    Ay_11(:, :, 1)=Ay_11(:, :, cont+1);
    Ay_12(:, :, 1)=Ay_12(:, :, cont+1);
    Ay_2(:, :, 1)=Ay_2(:, :, cont+1);
    Ay_3(:, :, 1)=Ay_3(:, :, cont+1);
    Az_11(:, :, 1)=Az_11(:, :, cont+1);
    Az_12(:, :, 1)=Az_12(:, :, cont+1);
    Az_2(:, :, 1)=Az_2(:, :, cont+1);
    Az_3(:, :, 1)=Az_3(:, :, cont+1);
    cont = 0;
end
    end
    m
end
Ax = [Ax_3(:, :, cont+1);Ax_2(:, :, cont+1);Ax_12(:, :, cont+1);Ax_11(:, :, cont+1)];
Ay = [Ay_3(:, :, cont+1);Ay_2(:, :, cont+1);Ay_12(:, :, cont+1);Ay_11(:, :, cont+1)];
Az = [Az_3(:, :, cont+1);Az_2(:, :, cont+1);Az_12(:, :, cont+1);Az_11(:, :, cont+1)];
close all, clc
lx = 6;
ly = 7;
imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, ((real(Ax))))
xlabel('Eixo x (\mum)')
ylabel('Eixo z (\mum)')
colormap(jet)
caxis([-2 6]*1e-14)
formatfig(10,5,lx,ly)
figure
imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, ((real(Az))))
xlabel('Eixo x (\mum)')
ylabel('Eixo z (\mum)')
colormap(jet)
caxis([-2 6]*1e-14)
formatfig(20,5,lx,ly)

```

ANEXO B – Rotina de Cálculo: Campos Elétrico e Magnético

```
% Escrito por André Felipe Souza da Cruz
%Calculo de Campo Elétrico e Magnético via PGF3D, plano (xz) e (xy).
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc,close all
lambda = 632.8e-9; %comprimento de Onda
M=150; %Somatorio em m
M=24; %Somatorio em m
N=M; %Somatorio em n
% L = 0.00399e-6;%Discretização da malha em z
L = 0.008e-6;%Discretização da malha em z
eps_0 = (1e-9)/(36*pi);% Permissividade do espaço livre
mu_0 = 4*pi*1e-7;% Permeabilidade do espaço livre
c = 3e8;%Velocidade da Luz
w = (2*pi*c)/lambda;%Frequência r
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Ouro:egold-----
wp1=1.3579e+016;%13.8e15;
wp2=4.4910e+015;%45e14;
G=9.9909e+013;%1.075e14;
g=8.9516e+014;%9e14;
lo = 450e-9;
wo=(2*pi*c)/lo;
einf = 7;
egold = einf - ((wp1^2)./(w.^2-j*G.*w))+((wp2^2)./(wo^2-w.^2+j*g.*w));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Silica:esilica-----
B1 = 0.6961663;
B2 = 0.4079426;
B3 = 0.8974794;
C1 = (0.0684043^2)*1e-12;
C2 = (0.1162414^2)*1e-12;
C3 = (9.896161^2)*1e-12;
esilica = (1+((B1*lambda.^2)./(lambda.^2-C1))+((B2*lambda.^2)./(lambda.^2-C2))+((B3*lambda.^2)./(lambda.^2-C3)));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Prisma-----
eprisma = 2.3013;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Parametros Construtivos do Sensor:-----
eps1 = (1-0.01j)*eps_0;%Permissividade do meio 1
eps2 = (real(egold)+j*imag(egold))*eps_0;%Permissividade do meio 2
% eps2 = (-11.53-j*1.2)*eps_0
eps3 = (real(eprisma)-0.01j)*eps_0;%Permissividade do meio 3
mu1= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 1
mu2= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 2
mu3= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 3
eta1= sqrt(mu1/eps1);%Impedância do meio 1
eta2= sqrt(mu2/eps2);%Impedância do meio 2
eta3= sqrt(mu3/eps3);%Impedância do meio 3
k1 = w*sqrt(eps1*mu1)%Numero de Onda do meio 1
k2 = w*sqrt(eps2*mu2)%Numero de Onda do meio 2
```

[illegible]


```

Ix = ((Io*I)/(8*a*b))*cosd(phi_1)*sind(theta_1);
Iy = ((Io*I)/(8*a*b))*sind(phi_1)*sind(theta_1);
Iz = ((Io*I)/(8*a*b))*cosd(theta_1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y= ycorte;
Delta_11 = round((ZMAX-h)/L);
Delta_12 = round((h-d1)/L);
Delta_2 = round((d1-d2)/L);
Delta_3 = round((d2-ZMIN)/L);
Delta =Delta_11+Delta_12+Delta_2+Delta_3;
[Delta_11+Delta_12+Delta_2+Delta_3 ; Delta]
x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z11 = linspace(h+ZGAP,ZMAX,Delta_11);
[x11 z11] = meshgrid(x,z11);
x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z12 = linspace(d1,h-ZGAP,Delta_12);
[x12 z12] = meshgrid(x,z12);
x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z2 = linspace(d2,d1,Delta_2);
[x2 z2] = meshgrid(x,z2);
x = linspace(-Laxis_x,Laxis_x,Delta);
z3 = linspace(ZMIN,d2,Delta_3);
[x3 z3] = meshgrid(x,z3);

% -----Calculo dos campos-----
Efx_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Efy_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Efz_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Efx_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Efy_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Efz_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Efx_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Efy_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Efz_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Efx_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);
Efy_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);
Efz_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);

Erx_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Ery_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Erz_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Erx_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Ery_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Erz_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Erx_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Ery_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Erz_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Erx_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);
Ery_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);
Erz_3(:, :, 1)=zeros(Delta_3,Delta);

Hx_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Hy_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Hz_11(:, :, 1)=zeros(Delta_11,Delta);
Hx_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Hy_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Hz_12(:, :, 1)=zeros(Delta_12,Delta);
Hx_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Hy_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);
Hz_2(:, :, 1)=zeros(Delta_2,Delta);

```

```

Hx_3(:, :, 1) = zeros(Delta_3, Delta);
Hy_3(:, :, 1) = zeros(Delta_3, Delta);
Hz_3(:, :, 1) = zeros(Delta_3, Delta);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
emn = 1;
cont = 0;
for mm=1:M+1
    for nn=1:N+1
m=mm-1;
n=nn-1;
% -----Numero de Neumann-----
        if m==0 & n==0
            emn = 1;
        else
            emn = 4;
        end
        if m~=0 & n==0
            emn = 2;
        end
        if m==0 & n~=0
            emn = 2;
        end
%-----Constantens_mn-----
        cont = cont+1;
        kx = m*pi/a;
        ky = n*pi/b;
        kz1 = sqrt(k1.^2 - kx.^2 - ky.^2);
        kz2 = sqrt(k2.^2 - kx.^2 - ky.^2);
        kz3 = sqrt(k3.^2 - kx.^2 - ky.^2);

%-----Coeficientes de Reflexão TE -----
        RTE_21 = (mu1*kz2-mu2*kz1)/(mu1*kz2+mu2*kz1);
        RTE_23 = (mu3*kz2-mu2*kz3)/(mu3*kz2+mu2*kz3);
        TTE_21 = (2*mu1*kz2)/(mu1*kz2+mu2*kz1);
        TTE_23 = (2*mu3*kz2)/(mu3*kz2+mu2*kz3);
        RgTE_12 = 1 - (TTE_21*(1-RTE_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1))))/(1-RTE_21*RTE_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));
        TgTE_23 = (TTE_21*TTE_23*exp(j*kz2*(d2-d1)))/(1-RTE_21*RTE_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));

%-----Coeficientes de Reflexão TM -----
        RTM_21 = (eps1*kz2-eps2*kz1)/(eps1*kz2+eps2*kz1);
        RTM_23 = (eps3*kz2-eps2*kz3)/(eps3*kz2+eps2*kz3);
        TTM_21 = (2*eps1*kz2)/(eps1*kz2+eps2*kz1);
        TTM_23 = (2*eps3*kz2)/(eps3*kz2+eps2*kz3);
        RgTM_12 = 1 - (TTM_21*(1-RTM_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1))))/(1-RTM_21*RTM_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));
        RgTM_32 = 1 - (TTM_23*(1-RTM_21*exp(2*j*kz2*(d2-d1))))/(1-RTM_23*RTM_21*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));
        TgTM_23 = (TTM_21*TTM_23*exp(j*kz2*(d2-d1)))/(1-RTM_21*RTM_23*exp(2*j*kz2*(d2-d1)));

%-----Coeficientes de Acoplamento STEM-----
        zeta_12 = (eps2*mu2-eps1*mu1)/(eps1*mu1);
        zeta_23 = (eps3*mu3-eps2*mu2)/(eps2*mu2);
        STEM_1d1 = (1/(2*kz2))*(zeta_12*((eps1*kz2)/(eps2*kz1))*(mu1/mu2)*(1+RgTM_12)*(1+RgTE_12)...
            + zeta_23*((eps2*kz1)/(eps3*kz2))*(mu2/mu3)*TgTM_23*TgTE_23);
        STEM_2d1 = (1/2)*(zeta_12*(1/kz1)*(mu1/mu2)*(1/TTM_23)*(1+RgTE_12)...
            + zeta_23*(1/kz2)*((eps2*mu2)/(eps3*mu3))*(RTM_21/TTM_21)*TgTE_23*exp(j*kz2*(d2-d1)));
        STEM_2d2 = (1/2)*(zeta_12*(1/kz1)*(mu1/mu2)*(RTM_23/TTM_23)*(1+RgTE_12)...
            + zeta_23*(1/kz2)*((eps2*mu2)/(eps3*mu3))*(1/TTM_21)*TgTE_23*exp(-j*kz2*(d2-d1)));
        STEM_3d2 = (1/(2*kz2))*(zeta_12*((mu1*kz3)/(mu2*kz1))*TgTM_23*(1+RgTE_12)...
            + zeta_23*(mu2/mu3)*(1+RgTM_32)*TgTE_23);
%-----
%-----Componentes Espectrais A_mn-----

```

```

%Meio 1 Acima da Fonte
z=z11;
sgn = 1; % Função Signal
Ap_mn11 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTE_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));
Azp_mn11 = -mu1*(emn/kz1)*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
Azz_mn11 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

dz_Ap_mn11 = -mu1*emn*(sgn*exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTE_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));
dz_Azp_mn11 = j*mu1*emn*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
dz_Azz_mn11 = -mu1*emn*(sgn*exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

d2z_Azp_mn11 = mu1*kz1*emn*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
d2z_Azz_mn11 = j*mu1*kz1*emn*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

%Meio 1 Abaixo da Fonte
z=z12;
sgn = -1; % Função Signal
Ap_mn12 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTE_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));
Azp_mn12 = -mu1*(emn/kz1)*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
Azz_mn12 = -j*mu1*(emn/kz1)*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

dz_Ap_mn12 = -mu1*emn*(sgn*exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTE_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));
dz_Azp_mn12 = j*mu1*emn*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
dz_Azz_mn12 = -mu1*emn*(sgn*exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

d2z_Azp_mn12 = mu1*kz1*emn*STEM_1d1*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1));
d2z_Azz_mn12 = j*mu1*kz1*emn*(exp(-j*kz1*abs(z-h)) + RgTM_12*exp(-j*kz1*(z+h-2*d1)));

%Meio 2
z=z2;
Ap_mn2 = -j*mu2*(emn/kz2)*(TgTE_23/TTE_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))+RTE_23*exp(-j*kz2*(z-d2)));
Azp_mn2 = -mu2*(emn/kz2)*TgTM_23*exp(-j*kz1*(h-d1))*(STEM_2d1*exp(j*kz2*(z-d2))+STEM_2d2*exp(-j*kz2*(z-d2)));
Azz_mn2 = -j*mu2*(emn/kz2)*(eps2/eps1)*(TgTM_23/TTM_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))+RTM_23...
*exp(-j*kz2*(z-d2)));

dz_Ap_mn2 = mu2*emn*(TgTE_23/TTE_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))-RTE_23*exp(-j*kz2*(z-d2)));
dz_Azp_mn2 = -j*mu2*emn*TgTM_23*exp(-j*kz1*(h-d1))*(STEM_2d1*exp(j*kz2*(z-d2))-STEM_2d2*exp(-j*kz2*(z-d2)));
dz_Azz_mn2 = mu2*emn*(eps2/eps1)*(TgTM_23/TTM_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))-RTM_23...
*exp(-j*kz2*(z-d2)));

d2z_Azp_mn2 = mu2*kz2*emn*TgTM_23*exp(-j*kz1*(h-d1))*(STEM_2d1*exp(j*kz2*(z-d2))+STEM_2d2*exp(-j*kz2*(z-d2)));
d2z_Azz_mn2 = j*mu2*kz2*emn*(eps2/eps1)*(TgTM_23/TTM_23)*exp(-j*kz1*(h-d1))*(exp(j*kz2*(z-d2))+RTM_23...
*exp(-j*kz2*(z-d2)));

%Meio 3
z=z3;
Ap_mn3 = -j*mu3*(emn/kz3)*TgTE_23*((mu2*kz3)/(mu3*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
Azp_mn3 = -mu3*(emn/kz3)*STEM_3d2*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
Azz_mn3 = -j*mu3*(emn/kz3)*TgTM_23*((eps2*kz3)/(eps1*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));

dz_Ap_mn3 = mu3*emn*TgTE_23*((mu2*kz3)/(mu3*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
dz_Azp_mn3 = -j*mu3*emn*STEM_3d2*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
dz_Azz_mn3 = mu3*emn*TgTM_23*((eps2*kz3)/(eps1*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));

d2z_Azp_mn3 = mu3*kz3*emn*STEM_3d2*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
d2z_Azz_mn3 = j*mu3*kz3*emn*TgTM_23*((eps2*kz3)/(eps1*kz2))*exp(j*(kz3*(z-d2)-kz1*(h-d1)));
%-----
%-----Componentes Espaciais A-----
% No meio 1 Acima da Fonte
x =x11;

```

```

Ax_11 = Ix.*Ap_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_11 = Iy.*Ap_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_11 = Ix.*(-kx).*Azp_mn11.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky).*Azp_mn11.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*Azz_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

dx_Ax_11 = Ix.*Ap_mn11.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Ay_11 = Iy.*Ap_mn11.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Az_11 = Ix.*(-kx^2).*Azp_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(kx*ky).*Azp_mn11.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*Azz_mn11.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dy_Ax_11 = Ix.*Ap_mn11.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Ay_11 = Iy.*Ap_mn11.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Az_11 = Ix.*(kx*ky).*Azp_mn11.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky^2).*Azp_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iz.*Azz_mn11.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dz_Ax_11 = Ix.*dz_Ap_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Ay_11 = Iy.*dz_Ap_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Az_11 = Ix.*(-kx).*dz_Azp_mn11.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky).*dz_Azp_mn11.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*dz_Azz_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

d2x_Ax_11 = Ix.*Ap_mn11.*(-kx^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dxdy_Ay_11 = Iy.*Ap_mn11.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
dxdz_Az_11 = Ix.*(-kx^2).*dz_Azp_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(kx*ky).*dz_Azp_mn11.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*dz_Azz_mn11.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dydx_Ax_11 = Ix.*Ap_mn11.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
d2y_Ay_11 = Iy.*Ap_mn11.*(-ky^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dydz_Az_11 = Ix.*(kx*ky).*dz_Azp_mn11.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky^2).*dz_Azp_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iz.*dz_Azz_mn11.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dzdx_Ax_11 = Ix.*dz_Ap_mn11.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dzdy_Ay_11 = Iy.*dz_Ap_mn11.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
d2z_Az_11 = Ix.*(-kx).*d2z_Azp_mn11.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky).*d2z_Azp_mn11.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*d2z_Azz_mn11.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

% No meio 1 Abaixo da Fonte
x =x12;
Ax_12 = Ix.*Ap_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_12 = Iy.*Ap_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_12 = Ix.*(-kx).*Azp_mn12.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky).*Azp_mn12.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*Azz_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

dx_Ax_12 = Ix.*Ap_mn12.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Ay_12 = Iy.*Ap_mn12.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Az_12 = Ix.*(-kx^2).*Azp_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
      +Iy.*(kx*ky).*Azp_mn12.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iz.*Azz_mn12.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dy_Ax_12 = Ix.*Ap_mn12.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Ay_12 = Iy.*Ap_mn12.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Az_12 = Ix.*(kx*ky).*Azp_mn12.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
      +Iy.*(-ky^2).*Azp_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...

```

```

+Iz.*Azz_mn12.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dz_Ax_12 = Ix.*dz_Ap_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Ay_12 = Iy.*dz_Ap_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Az_12 = Ix.*(-kx).*dz_Azp_mn12.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(-ky).*dz_Azp_mn12.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*dz_Azz_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

d2x_Ax_12 = Ix.*Ap_mn12.*(-kx^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dxdy_Ay_12 = Iy.*Ap_mn12.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
dxdz_Az_12 = Ix.*(-kx^2).*dz_Azp_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(kx*ky).*dz_Azp_mn12.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*dz_Azz_mn12.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dydx_Ax_12 = Ix.*Ap_mn12.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
d2y_Ay_12 = Iy.*Ap_mn12.*(-ky^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dydz_Az_12 = Ix.*(kx*ky).*dz_Azp_mn12.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iy.*(-ky^2).*dz_Azp_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iz.*dz_Azz_mn12.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dzdx_Ax_12 = Ix.*dz_Ap_mn12.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dzdy_Ay_12 = Iy.*dz_Ap_mn12.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
d2z_Az_12 = Ix.*(-kx).*d2z_Azp_mn12.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(-ky).*d2z_Azp_mn12.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*d2z_Azz_mn12.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

% No meio 2
x =x2;
Ax_2 = Ix.*Ap_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_2 = Iy.*Ap_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_2 = Ix.*(-kx).*Azp_mn2.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(-ky).*Azp_mn2.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*Azz_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

dx_Ax_2 = Ix.*Ap_mn2.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Ay_2 = Iy.*Ap_mn2.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Az_2 = Ix.*(-kx^2).*Azp_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(kx*ky).*Azp_mn2.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*Azz_mn2.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dy_Ax_2 = Ix.*Ap_mn2.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Ay_2 = Iy.*Ap_mn2.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Az_2 = Ix.*(kx*ky).*Azp_mn2.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iy.*(-ky^2).*Azp_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iz.*Azz_mn2.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dz_Ax_2 = Ix.*dz_Ap_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Ay_2 = Iy.*dz_Ap_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Az_2 = Ix.*(-kx).*dz_Azp_mn2.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(-ky).*dz_Azp_mn2.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*dz_Azz_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

d2x_Ax_2 = Ix.*Ap_mn2.*(-kx^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dxdy_Ay_2 = Iy.*Ap_mn2.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
dxdz_Az_2 = Ix.*(-kx^2).*dz_Azp_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
+Iy.*(kx*ky).*dz_Azp_mn2.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
+Iz.*dz_Azz_mn2.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dydx_Ax_2 = Ix.*Ap_mn2.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
d2y_Ay_2 = Iy.*Ap_mn2.*(-ky^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

```

```

dydz_Az_2 = Ix.*(kx*ky).*dz_Azp_mn2.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iy.*(-ky^2).*dz_Azp_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iz.*dz_Azz_mn2.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dzdx_Ax_2 = Ix.*dz_Ap_mn2.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dzdy_Ay_2 = Iy.*dz_Ap_mn2.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
d2z_Az_2 = Ix.*(-kx).*d2z_Azp_mn2.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iy.*(-ky).*d2z_Azp_mn2.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iz.*d2z_Azz_mn2.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

% No meio 3
x =x3;
Ax_3 = Ix.*Ap_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Ay_3 = Iy.*Ap_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
Az_3 = Ix.*(-kx).*Azp_mn3.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
        +Iy.*(-ky).*Azp_mn3.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
        +Iz.*Azz_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

dx_Ax_3 = Ix.*Ap_mn3.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Ay_3 = Iy.*Ap_mn3.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dx_Az_3 = Ix.*(-kx^2).*Azp_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iy.*(kx*ky).*Azp_mn3.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iz.*Azz_mn3.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dy_Ax_3 = Ix.*Ap_mn3.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Ay_3 = Iy.*Ap_mn3.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
dy_Az_3 = Ix.*(kx*ky).*Azp_mn3.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iy.*(-ky^2).*Azp_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iz.*Azz_mn3.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dz_Ax_3 = Ix.*dz_Ap_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Ay_3 = Iy.*dz_Ap_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dz_Az_3 = Ix.*(-kx).*dz_Azp_mn3.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iy.*(-ky).*dz_Azp_mn3.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iz.*dz_Azz_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

d2x_Ax_3 = Ix.*Ap_mn3.*(-kx^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dxdy_Ay_3 = Iy.*Ap_mn3.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
dxdz_Az_3 = Ix.*(-kx^2).*dz_Azp_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iy.*(kx*ky).*dz_Azp_mn3.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iz.*dz_Azz_mn3.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);

dydx_Ax_3 = Ix.*Ap_mn3.*(kx*ky).*sin(kx*x).*sin(ky.*y);
d2y_Ay_3 = Iy.*Ap_mn3.*(-ky^2).*cos(kx*x).*cos(ky.*y);
dydz_Az_3 = Ix.*(kx*ky).*dz_Azp_mn3.*sin(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iy.*(-ky^2).*dz_Azp_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iz.*dz_Azz_mn3.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);

dzdx_Ax_3 = Ix.*dz_Ap_mn3.*(-kx).*sin(kx*x).*cos(ky.*y);
dzdy_Ay_3 = Iy.*dz_Ap_mn3.*(-ky).*cos(kx*x).*sin(ky.*y);
d2z_Az_3 = Ix.*(-kx).*d2z_Azp_mn3.*sin(kx*x).*cos(ky.*y)...
            +Iy.*(-ky).*d2z_Azp_mn3.*cos(kx*x).*sin(ky.*y)...
            +Iz.*d2z_Azz_mn3.*cos(kx*x).*cos(ky.*y);

%-----Campo Magnético H(x,y,z)-----
Hx_11(:, :, cont+1) = Hx_11(:, :, cont) + (1/mu1)*(dy_Az_11 - dz_Ay_11);
Hy_11(:, :, cont+1) = Hy_11(:, :, cont) + (1/mu1)*(dz_Ax_11 - dx_Az_11);
Hz_11(:, :, cont+1) = Hz_11(:, :, cont) + (1/mu1)*(dx_Ay_11 - dy_Ax_11);

Hx_12(:, :, cont+1) = Hx_12(:, :, cont) + (1/mu1)*(dy_Az_12 - dz_Ay_12);

```

```

Hy_12(:, :, cont+1) = Hy_12(:, :, cont) + (1/mu1)*(dz_Ax_12 - dx_Az_12);
Hz_12(:, :, cont+1) = Hz_12(:, :, cont) + (1/mu1)*(dx_Ay_12 - dy_Ax_12);

Hx_2(:, :, cont+1) = Hx_2(:, :, cont) + (1/mu2)*(dy_Az_2 - dz_Ay_2);
Hy_2(:, :, cont+1) = Hy_2(:, :, cont) + (1/mu2)*(dz_Ax_2 - dx_Az_2);
Hz_2(:, :, cont+1) = Hz_2(:, :, cont) + (1/mu2)*(dx_Ay_2 - dy_Ax_2);

Hx_3(:, :, cont+1) = Hx_3(:, :, cont) + (1/mu3)*(dy_Az_3 - dz_Ay_3);
Hy_3(:, :, cont+1) = Hy_3(:, :, cont) + (1/mu3)*(dz_Ax_3 - dx_Az_3);
Hz_3(:, :, cont+1) = Hz_3(:, :, cont) + (1/mu3)*(dx_Ay_3 - dy_Ax_3);

%-----Campo Elétrico Reativo Er(x,y,z)-----
Erx_11(:, :, cont+1) = Erx_11(:, :, cont) + (1/(j*w*mu1*eps1))*(d2x_Ax_11+dx dy_Ay_11+dx dz_Az_11);
Ery_11(:, :, cont+1) = Ery_11(:, :, cont) + (1/(j*w*mu1*eps1))*(dy dx_Ax_11+d2y_Ay_11+dy dz_Az_11);
Erz_11(:, :, cont+1) = Erz_11(:, :, cont) + (1/(j*w*mu1*eps1))*(dz dx_Ax_11+dz dy_Ay_11+d2z_Az_11);

Erx_12(:, :, cont+1) = Erx_12(:, :, cont) + (1/(j*w*mu1*eps1))*(d2x_Ax_12+dx dy_Ay_12+dx dz_Az_12);
Ery_12(:, :, cont+1) = Ery_12(:, :, cont) + (1/(j*w*mu1*eps1))*(dy dx_Ax_12+d2y_Ay_12+dy dz_Az_12);
Erz_12(:, :, cont+1) = Erz_12(:, :, cont) + (1/(j*w*mu1*eps1))*(dz dx_Ax_12+dz dy_Ay_12+d2z_Az_12);

Erx_2(:, :, cont+1) = Erx_2(:, :, cont) + (1/(j*w*mu2*eps2))*(d2x_Ax_2+dx dy_Ay_2+dx dz_Az_2);
Ery_2(:, :, cont+1) = Ery_2(:, :, cont) + (1/(j*w*mu2*eps2))*(dy dx_Ax_2+d2y_Ay_2+dy dz_Az_2);
Erz_2(:, :, cont+1) = Erz_2(:, :, cont) + (1/(j*w*mu2*eps2))*(dz dx_Ax_2+dz dy_Ay_2+d2z_Az_2);

Erx_3(:, :, cont+1) = Erx_3(:, :, cont) + (1/(j*w*mu3*eps3))*(d2x_Ax_3+dx dy_Ay_3+dx dz_Az_3);
Ery_3(:, :, cont+1) = Ery_3(:, :, cont) + (1/(j*w*mu3*eps3))*(dy dx_Ax_3+d2y_Ay_3+dy dz_Az_3);
Erz_3(:, :, cont+1) = Erz_3(:, :, cont) + (1/(j*w*mu3*eps3))*(dz dx_Ax_3+dz dy_Ay_3+d2z_Az_3);

%-----Campo Elétrico Distante Ef(x,y,z)-----
Efx_11(:, :, cont+1) = Efx_11(:, :, cont) + -j*w*Ax_11;
Efy_11(:, :, cont+1) = Efy_11(:, :, cont) + -j*w*Ay_11;
Efz_11(:, :, cont+1) = Efz_11(:, :, cont) + -j*w*Az_11;

Efx_12(:, :, cont+1) = Efx_12(:, :, cont) + -j*w*Ax_12;
Efy_12(:, :, cont+1) = Efy_12(:, :, cont) + -j*w*Ay_12;
Efz_12(:, :, cont+1) = Efz_12(:, :, cont) + -j*w*Az_12;

Efx_2(:, :, cont+1) = Efx_2(:, :, cont) + -j*w*Ax_2;
Efy_2(:, :, cont+1) = Efy_2(:, :, cont) + -j*w*Ay_2;
Efz_2(:, :, cont+1) = Efz_2(:, :, cont) + -j*w*Az_2;

Efx_3(:, :, cont+1) = Efx_3(:, :, cont) + -j*w*Ax_3;
Efy_3(:, :, cont+1) = Efy_3(:, :, cont) + -j*w*Ay_3;
Efz_3(:, :, cont+1) = Efz_3(:, :, cont) + -j*w*Az_3;

%-----Otimização de Memória-----
if cont ==1
    Hx_11(:, :, 1)=Hx_11(:, :, cont+1);
    Hx_12(:, :, 1)=Hx_12(:, :, cont+1);
    Hx_2(:, :, 1)=Hx_2(:, :, cont+1);
    Hx_3(:, :, 1)=Hx_3(:, :, cont+1);
    Hy_11(:, :, 1)=Hy_11(:, :, cont+1);
    Hy_12(:, :, 1)=Hy_12(:, :, cont+1);
    Hy_2(:, :, 1)=Hy_2(:, :, cont+1);
    Hy_3(:, :, 1)=Hy_3(:, :, cont+1);
    Hz_11(:, :, 1)=Hz_11(:, :, cont+1);
    Hz_12(:, :, 1)=Hz_12(:, :, cont+1);
    Hz_2(:, :, 1)=Hz_2(:, :, cont+1);
    Hz_3(:, :, 1)=Hz_3(:, :, cont+1);

```

```

Erx_11(:,:,1) = Erx_11(:,:,cont+1);
Ery_11(:,:,1) = Ery_11(:,:,cont+1);
Erz_11(:,:,1) = Erz_11(:,:,cont+1);
Erx_12(:,:,1) = Erx_12(:,:,cont+1);
Ery_12(:,:,1) = Ery_12(:,:,cont+1);
Erz_12(:,:,1) = Erz_12(:,:,cont+1);
Erx_2(:,:,1) = Erx_2(:,:,cont+1);
Ery_2(:,:,1) = Ery_2(:,:,cont+1);
Erz_2(:,:,1) = Erz_2(:,:,cont+1);
Erx_3(:,:,1) = Erx_3(:,:,cont+1);
Ery_3(:,:,1) = Ery_3(:,:,cont+1);
Erz_3(:,:,1) = Erz_3(:,:,cont+1);
Efx_11(:,:,1) = Efx_11(:,:,cont+1);
Efy_11(:,:,1) = Efy_11(:,:,cont+1);
Efz_11(:,:,1) = Efz_11(:,:,cont+1);
Efx_12(:,:,1) = Efx_12(:,:,cont+1);
Efy_12(:,:,1) = Efy_12(:,:,cont+1);
Efz_12(:,:,1) = Efz_12(:,:,cont+1);
Efx_2(:,:,1) = Efx_2(:,:,cont+1);
Efy_2(:,:,1) = Efy_2(:,:,cont+1);
Efz_2(:,:,1) = Efz_2(:,:,cont+1);
Efx_3(:,:,1) = Efx_3(:,:,cont+1);
Efy_3(:,:,1) = Efy_3(:,:,cont+1);
Efz_3(:,:,1) = Efz_3(:,:,cont+1);
    cont = 0;
end
    end
    m
end
%
Hx = ([Hx_3(:,:,cont+1);Hx_2(:,:,cont+1);Hx_12(:,:,cont+1);Hx_11(:,:,cont+1)]);
Hy = ([Hy_3(:,:,cont+1);Hy_2(:,:,cont+1);Hy_12(:,:,cont+1);Hy_11(:,:,cont+1)]);
Hz = ([Hz_3(:,:,cont+1);Hz_2(:,:,cont+1);Hz_12(:,:,cont+1);Hz_11(:,:,cont+1)]);
Ex = ([Erx_3(:,:,cont+1)+Efx_3(:,:,cont+1);Erx_2(:,:,cont+1)+Efx_2(:,:,cont+1);...
    Erx_12(:,:,cont+1)+Efx_12(:,:,cont+1);Erx_11(:,:,cont+1)+Efx_11(:,:,cont+1)]);
Ey = ([Ery_3(:,:,cont+1)+Efy_3(:,:,cont+1);Ery_2(:,:,cont+1)+Efy_2(:,:,cont+1);...
    Ery_12(:,:,cont+1)+Efy_12(:,:,cont+1);Ery_11(:,:,cont+1)+Efy_11(:,:,cont+1)]);
Ez = ([Erz_3(:,:,cont+1)+Efz_3(:,:,cont+1);Erz_2(:,:,cont+1)+Efz_2(:,:,cont+1);...
    Erz_12(:,:,cont+1)+Efz_12(:,:,cont+1);Erz_11(:,:,cont+1)+Efz_11(:,:,cont+1)]);
close all
clc
lx = 6;
ly = 7;

imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, 20*log10(abs(real(Ex))))
xlabel('Eixo x (\mum)')
ylabel('Eixo z (\mum)')
colormap(jet)
caxis([-1 1]*60)
formatfig(5,10,lx,ly)
% figure
% imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, 20*log10(abs(real(Ey))))
% xlabel('Eixo x (\mum)')
% ylabel('Eixo z (\mum)')
% colormap(jet)
% caxis([-1 1]*60)
% formatfig(15,10,lx,ly)
figure
imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, 20*log10(abs(real(Ez))))
xlabel('Eixo x (\mum)')

```



```
ylabel('Eixo z (\mum)')
colormap(jet)
caxis([-1 1]*60)
formatfig(25,10,lx,ly)
figure

% imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, 20*log10(abs(real(Hx))))
% xlabel('Eixo x (\mum)')
% ylabel('Eixo z (\mum)')
% colormap(jet)
% caxis([-1 1]*60)
% formatfig(5,0,lx,ly)
% figure
imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, 20*log10(abs(real(Hy))))
xlabel('Eixo x (\mum)')
ylabel('Eixo z (\mum)')
colormap(jet)
caxis([-1 1]*60)
formatfig(15,0,lx,ly)
% figure
% imagesc([min(x),max(x)]./1e-6,[min(z3),max(z11)]./1e-6, 20*log10(abs(real(Hz))))
% xlabel('Eixo x (\mum)')
% ylabel('Eixo z (\mum)')
% colormap(jet)
% caxis([-1 1]*60)
% formatfig(25,0,lx,ly)
```

ANEXO C – Rotina de Cálculo: Coeficientes Generalizados e Componentes Espectrais

```
% Escrito por André Felipe Souza da Cruz
%Calculo de Coeficientes Generalizados e Componente Espectral.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc,close all
lambda = 632.8e-9; %comprimento de Onda
eps_0 = (1e-9)/(36*pi);% Permissividade do espaço livre
mu_0 = 4*pi*1e-7;% Permeabilidade do espaço livre
c = 3e8;%Velocidade da Luz
w = (2*pi*c)/lambda;%Frequência r
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Ouro:egold-----
wp1=1.3579e+016;%13.8e15;
wp2=4.4910e+015;%45e14;
G=9.9909e+013;%1.075e14;
g=8.9516e+014;%9e14;
lo = 450e-9;
wo=(2*pi*c)/lo;
einf = 7;
egold = einf - ((wp1^2)./(w.^2-j*G.*w))+((wp2^2)./(wo^2-w.^2+j*g.*w));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Silica:esilica-----
B1 = 0.6961663;
B2 = 0.4079426;
B3 = 0.8974794;
C1 = (0.0684043^2)*1e-12;
C2 = (0.1162414^2)*1e-12;
C3 = (9.896161^2)*1e-12;
esilica = (1+((B1*lambda.^2)./(lambda.^2-C1))+((B2*lambda.^2)./(lambda.^2-C2))+((B3*lambda.^2)./(lambda.^2-C3)));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Permissividade R. Prisma-----
eprisma = 2.3013;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Parametros Construtivos do Sensor:-----
eps1 = (1-0.01j)*eps_0;%Permissividade do meio 1
eps2 = (real(egold)+j*imag(egold))*eps_0;%Permissividade do meio 2
eps3 = (real(eprisma)-0.01j)*eps_0;%Permissividade do meio 3
mu1= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 1
mu2= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 2
mu3= 1*mu_0; %Permeabilidade do meio 3
eta1= sqrt(mu1/eps1);%Impedância do meio 1
eta2= sqrt(mu2/eps2);%Impedância do meio 2
eta3= sqrt(mu3/eps3);%Impedância do meio 3
k1 = w*sqrt(eps1*mu1);%Numero de Onda do meio 1
k2 = w*sqrt(eps2*mu2);%Numero de Onda do meio 2
k3 = w*sqrt(eps3*mu3);%Numero de Onda do meio 3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Parametros Construtivos da NPM:-----
eps_core = (real(egold)+j*imag(egold))*eps_0; %permissividade do nucleo
eps_shell = (real(esilica)-0.01j)*eps_0; %permissividade da casca
eps_m = eps1;%Permissividade do meio onde está inserida a NPM
```

```

r_core = 20e-9;%Raio do nucleo da NPM
delta_shell = 10e-9;%Espessura da camada
f = ((r_core)/(r_core+delta_shell))^3;
%Polarizabilidade efetiva da partícula
alpha_eff = 4*pi*eps_m*(r_core+delta_shell)^3*...
    ((f*(eps_core-eps_shell)*(2*eps_shell+eps_m)+(2*eps_shell+eps_core)*(eps_shell-eps_m))/...
    (f*(eps_core-eps_shell)*(2*eps_shell-2*eps_m)+(2*eps_shell+eps_core)*(eps_shell+2*eps_m)));
Eo = 1; %Amplitude do campo incidente sobre a NPM (Excitação suprimida)
% alpha_eff/3.33e-30
%Momento de dipolo Fluoroforo -----
p_fluof = 7*3.33e-30;
alpha_fluof = p_fluof/Eo; %Polarizabilidade
Re_ff = 1;%Reação ao campo
%-----
p_efetivo = (alpha_eff+ alpha_fluof*Re_ff)*Eo;
l = 2*(r_core+delta_shell); %Comprimento efetivo da NPM
Io = (j*w*p_efetivo)/l;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Jdipolo = Io*l
%-----Parametros Dimensionais:-----
h= 20e-9;%Altura da NPM em relação a origem
Delta_gold = 50e-9;
ycorte = 0e-9;
d1 = 0e-9;%Interface metal/ar
d2 = d1 - Delta_gold;%Interface prisma/metal

M = 30;
% M = 50;
% M = 400;

Period_Cell_X = 6e-6;
% Period_Cell_X = 10e-6;
% Period_Cell_X = 100e-6;

Period_Cell_Y = Period_Cell_X;
a = Period_Cell_X/2;%metade da célula em x
b = Period_Cell_Y/2;%metade da célula em y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Densidade de Corrente (A/m)
Iz = ((Io*l)/(8*a*b));
%Discretização da Malha:
z1=h;
z2 = -(d1-d2)/2;
% z2 = d2
z3 = d2-h;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n = 0;
m = 0:M;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----Espectros-----
kx = m*pi/a;
ky = n*pi/b;
kz1 = sqrt(k1.^2 -kx.^2 -ky.^2);
kz2 = sqrt(k2.^2 -kx.^2 -ky.^2);
kz3 = sqrt(k3.^2 -kx.^2 -ky.^2);
%-----Coeficientes de Reflexão TM -----
RTM_21 = (eps1.*kz2-eps2.*kz1)./(eps1.*kz2+eps2.*kz1);
RTM_23 = (eps3.*kz2-eps2.*kz3)./(eps3.*kz2+eps2.*kz3);
TTM_21 = (2*eps1.*kz2)./(eps1.*kz2+eps2.*kz1);
TTM_23 = (2*eps3.*kz2)./(eps3.*kz2+eps2.*kz3);

```

[illegible]