



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS

**O APRENDIZADO DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS: Uma análise à
luz de Wittgenstein**

KENJI BAIA ALVES

BELÉM – PA
2025

KENJI BAIA ALVES

O APRENDIZADO DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS: Uma análise à luz de Wittgenstein

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de concentração em Educação Matemática, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva

BELÉM – PA
2025

KENJI BAIA ALVES

O APRENDIZADO DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS: Uma análise à luz de Wittgenstein

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de concentração em Educação Matemática, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva

Defesa: Belém-PA, 29 de outubro de 2025.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva (Orientador) – PPGECEM

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma – PPGECEM

Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior – UFOPA

Profa. Dra. Daniana de Costa (Suplente) – UFPA

BELEM – PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B152a Baia Alves, Kenji.
O APRENDIZADO DO TEOREMA DE TALES E O DE
PITÁGORAS: Uma análise à luz de Wittgenstein / Kenji Baia
Alves. — 2019.
96 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Educação Matemática e Científica, 1, Belém, 2019.

1. Jogos de Linguagem, Teorema de Tales e o de
Pitágoras, Ver-cómo.. I. Título.

CDD 510

*Dedico este trabalho ao Grupo de Estudos e
Pesquisas em Linguagem Matemática – GELIM-IEMCI-UFPA*

AGRADECIMENTOS

A gratidão vai muito além de um simples obrigado! Sua origem no termo latim “gratia”, graça, bênção ou dádiva, e em “gratus”, agradecido, agradável, externalizam bem seu significado. A gratidão por essência é um sentimento de reconhecimento e valorização das coisas boas e as dádivas da vida, e por ser imensamente grato a vida, inicio os meus agradecimentos a Deus, por todas as maravilhas que têm feito em minha existência.

A Universidade Federal do Pará, ao Instituto de Educação Matemática e Científica e ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática por me proporcionarem este momento.

Agradeço ao legado deixado pelo filósofo Wittgenstein e a Professora Marisa Silveira, permitindo-me criar subsídios para a condução desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva pela orientação e contribuições no direcionamento desta pesquisa; aos professores membros da banca, Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Júnior e ao Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma.

A minha mãe Maria Elizete que sempre me incentivou nos estudos, possibilitando-me a identificação com o Magistério, desdobrando hoje no resultado desta pesquisa.

RESUMO

A presente pesquisa objetiva analisar o aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras; sob a lente da filosofia da linguagem Wittgensteiniana em três trabalhos acadêmicos: Bastian (2000); Pereira, Couto e Costa (2016); Pessanha (2017) e, em dois livros didáticos, Matemática Bianchini e Araribá Conecta Matemática, ambos do 9º ano do ensino fundamental. O embasamento para análise destes trabalhos, são as ideias sobre jogos de linguagem, o seguir regra, o treino e o ver como, apresentados por Wittgenstein na obra póstuma Investigações Filosóficas. O foco da pesquisa nos três trabalhos acadêmicos está direcionada ao aprendizado dos alunos em relação ao Teorema de Tales e o de Pitágoras, já nos dois livros didáticos mencionados, o olhar está voltado para os seus enunciados, suas demonstrações e os exercícios neles elencados. A metodologia adotada nesta pesquisa é a qualitativa com o auxílio bibliográfico, onde na análise em trabalhos acadêmicos e livros didáticos se busca um novo olhar sobre o aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras sob a perspectiva de suas linguagens. O principal referencial teórico desta pesquisa é o filósofo austríaco naturalizado britânico Wittgenstein e suas reflexões filosóficas sobre a linguagem. O objetivo nevrálgico desta pesquisa é analisar as dificuldades dos alunos no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras sob a perspectiva da não compreensão da linguagem “jogada” no ensino destes teoremas. Esta pesquisa trata a matemática como linguagem e como esta linguagem matemática é percebida pelos alunos; sugerindo como resultado que as dificuldades no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras seja em parte, consequências de uma não compreensão dos jogos de linguagem que envolvem os teoremas elencados. Essa possível não compreensão dos jogos de linguagem destes teoremas comprometem o avanço no aprendizado deles.

Palavras-chave: *Jogos de Linguagem, Teorema de Tales e o de Pitágoras, Ver-como.*

ABSTRACT

This research aims to analyze the learning of Thales' Theorem and Pythagoras' Theorem through the lens of Wittgensteinian philosophy of language in three academic works: Bastian (2000); Pereira, Couto, and Costa (2016); Pessanha (2017), and in two textbooks, Matemática Bianchini and Araribá Conecta Matemática, both for the 9th grade of elementary school. The basis for the analysis of these works are the ideas about language games, rule-following, training, and seeing how, presented by Wittgenstein in his posthumous work Philosophical Investigations. The focus of the research in the three academic works is directed at student learning in relation to the Theorems of Thales and Pythagoras, while in the two textbooks mentioned, the focus is on their statements, demonstrations, and the exercises listed in them. The methodology adopted in this research is qualitative with bibliographic assistance, where the analysis of academic works and textbooks seeks a new perspective on the learning of Thales' and Pythagoras' theorems from the perspective of their languages. The main theoretical reference for this research is the Austrian-born British philosopher Wittgenstein and his philosophical reflections on language. The key objective of this research is to analyze students' difficulties in learning Thales' and Pythagoras' theorems from the perspective of a lack of understanding of the language used in teaching these theorems. This research treats mathematics as language and how this mathematical language is perceived by students, suggesting as a result that the difficulties in learning Thales' and Pythagoras' theorems are partly a consequence of a lack of understanding of the language games involved in the listed theorems. This possible lack of understanding of the language games of these theorems compromises progress in learning them.

Keywords: *Language Games, Theorem of Thales and Pythagoras, See-how.*

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. O CAMINHO METODOLÓGICO.....	15
2.1 A ORIGEM DA PESQUISA.....	15
2.2 A JUSTICATIVA.....	16
2.3 A METODOLOGIA DA PESQUISA.....	19
2.4 OS OBJETIVOS.....	21
2.4.1 OBJETIVO GERAL.....	21
2.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	21
3. A LINGUAGEM MATEMÁTICA.....	23
3.1 A LINGUAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO.....	26
3.2 AS DIFICULDADES DOS ALUNOS COM A LINGUAGEM MATEMÁTICA.....	28
4. A FILOSOFIA DA LINGUAGEM DE WITTGENSTEIN.....	32
4.1 OS JOGOS DE LINGUAGENS SEGUNDO WITTGENSTEIN.....	34
4.2 O SEGUIR REGRAS EM WITTGENSTEIN.....	37
4.3 O TREINO EM WITTGENSTEIN.....	39
4.4 O VER COMO EM WITTGENSTEIN.....	40
5. TALES DE MILETO E PITÁGORAS DA SAMOS	44
5.1 TALES DE MILETO	46
5.2 O TEOREMA DE TALES	47
5.3 PITÁGORAS DE SAMOS.....	49
5.4 O TEOREMA DE PITÁGORAS	51
6. AS DIFICULDADES DISCENTES NO APRENDIZADO DO TEOREMA DE TALLES E O DE PITÁGORAS	54
6.1 A PESQUISA DE BASTIAN (2000)	55
6.2 A PESQUISA DE PEREIRA, COUTO E COSTA (2016)	60
6.3 A PESQUISA DE PESSANHA (2017)	64
7. COMO O TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS SÃO ABORDADOS EM DOIS LIVROS DIDATICOS	71
7.1 O LIVRO DIDÁTICO	71
7.2 A ABORDAGEM DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS NO LIVRO MATEMÁTICA BIANCHINI	73

7.3 O TEOREMA DE TALES EM BIANCHINI.....	74
7.4 TEOREMA DE PITÁGORAS EM BIANCHINI	78
7.5 A ABORDAGEM DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS NO LIVRO ARARIBÁ CONECTA MATEMÁTICA.....	81
7.6 TEOREMA DE TALES NA OBRA ARARIBÁ	83
7.7 TEOREMA DE PITÁGORAS NA OBRA ARARIBÁ	85
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	90
REFERÊNCIAS.....	93

1. INTRODUÇÃO

As demandas sociais na educação atual são complexas. Incluem combater desigualdades, promover inclusão, integrar tecnologias e desenvolver competências socioemocionais. Tais demandas, exigem da escola uma estrutura que abarque esses anseios, e exige do professor formação e preparação nunca vistas antes. Nesta engrenagem de ensino e de aprendizagem escolar, os conhecimentos são cada vez mais validados e precisam por parte do professor, um domínio que os permita trabalhar de forma segura e com bases robustas.

Neste itinerário, a formação do professor precisa contemplar esta educação desafiadora. Falamos em Inteligência Artificial, Ensino Híbrido, uso de tecnologias nos espaços escolares, enfim. Será que a formação do professor caminha passo a passo com essa nova realidade? Nesta conjuntura é um desafio ser professor. Faço estes questionamentos por ter vivenciado estas mudanças em sala de aula nestes primeiros 25 anos do século XXI. Minha formação inicial ocorreu no antigo curso técnico de Magistério, nível médio. Era uma formação profissionalizante que habilitava o profissional a atuar como professor na educação infantil e nos primeiros anos do ensino fundamental.

Depois da estabilidade no funcionalismo público que fui avançar na minha formação acadêmica, primeiramente com a Licenciatura em Matemática e posteriormente com a Licenciatura em Pedagogia, ou seja, procurei formação em nível superior depois de já estar com estabilidade, coisa impensável atualmente. Não posso dizer que meu percurso na educação fora planejado e tão pouco acreditar que foi obra do acaso ou do destino. O fato é, a atuação como professor no ensino fundamental por mais de duas décadas, proporcionaram-me momentos ímpares na educação.

As reflexões sobre a importância da educação na vida de um cidadão, sob os mais variados aspectos, acompanham-me nesta jornada. A educação escolar é fundamental para a difusão do conhecimento construído pela humanidade. O professor, no palco escolar, assume um papel de responsabilidade importantíssimo, o de intermediar conhecimentos no processo de ensino e de aprendizagem.

Por ser Licenciado em Pedagogia e Matemática, trabalho no ensino fundamental I e II, tendo assim familiaridade com a transição do aluno dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental. Essa vivência me possibilitou observar inúmeras situações envolvendo dificuldades dos alunos em compreender a matemática e a sua linguagem simbólica, fazendo-me olhar para a minha práxis e refletir em como dirimir as dificuldades na aprendizagem dos alunos. Sempre procurei abordar a importância do conhecimento

matemático, de se estudar matemática e sua linguagem. Tenho observado ao longo destes anos que a linguagem matemática acaba afastando os alunos da matemática. Sobre essa linguagem matemática, Otte e Barros, 2015, acreditam que:

Na sua maioria, os matemáticos puros são platonistas, não acreditam nas modalidades do conhecimento humano e, menos ainda, no valor dos símbolos e da linguagem. Eles crêem que a linguagem e a simbolização servem apenas para comunicar as ideias prontas e que não têm qualquer valor na criação da Matemática (Otte e Barros, 2015, p. 01).

Importante essa reflexão de Otte e Barros, 2015. A matemática em si tem uma construção, um aluno pode questionar como tal ideia matemática surgiu ou porque é argumentada simbolicamente de tal forma. Explicar uma situação hipotética matematicamente e formalmente, sem saber a origem deste conhecimento, pode ser um complicador frente a alunos que venham a questionar sua importância. Sendo assim, é importante dominar esta linguagem matemática e o porquê dela, para mostrar ao aluno que esta linguagem tem uma construção histórica e que passou por modificações ao longo do tempo.

Nestes anos, deparei-me com inúmeras situações que exigiam de mim mais que boa vontade profissional, exigiam formação continuada. Só o que foi assimilado nas graduações não eram mais o suficiente. As pesquisas precisam ser inerentes ao professor, uma vez que a práxis precisa de um olhar para além da sala de aula. Estas minhas dificuldades geraram inquietações no sentido de buscar metodologias que favorecessem meu ato de ensinar matemática, e por conseguinte, aprendizagem dos alunos. A qualificação profissional frente a este cenário educacional atual, torna-se fundamental, pois permite ao professor uma ampliação dos seus horizontes ao ser conectado com o que é produzido no meio acadêmico. Nesta perspectiva a sala de aula pode vir a ser um espaço de pesquisa científica e de produção acadêmica.

Por experiência em sala, poderia fazer um recorte de qualquer assunto matemático abordado no ensino fundamental e refletir sobre seu processo de aprendizagem. Especificamente um dos meus questionamentos era o porquê de os alunos terem dificuldades em aprender o Teorema de Tales de Mileto e o de Pitágoras de Samos? Por que os dois teoremas, aparentemente simples e com inúmeras aplicações práticas, geram essas dificuldades de aprendizado nos alunos? A priori, geralmente é creditado só no aluno essa dificuldade de aprendizado. Para possíveis respostas mais plausíveis, precisaria de subsídios para tais. Essas respostas não viriam apenas de um ato filosófico ou de observações dos erros dos alunos. Esses subsídios só vieram com meu ingresso no Mestrado, precisamente ao entrar em contato com a filosofia da linguagem Wittgensteiniana.

Ao iniciar meus estudos no Mestrado e deparar com as ideias de Wittgenstein, meu interesse pelo aprendizado do aluno direcionou-se para o viés da linguagem, vindo esse filósofo influenciar de forma decisiva toda esta pesquisa. Wittgenstein contribuiu significativamente com suas ideias sobre linguagem para o campo filosófico, porém, suas ideias também vêm ganhando campo nas pesquisas sobre o ensino da matemática e fortalecendo cada vez mais o argumento de que a matemática é uma linguagem. Nesse sentido, esta pesquisa no seu discurrir irá tratar a matemática como sendo uma linguagem formal, simbólica e abstrata, que precisa ser traduzida no processo de ensino para que haja aprendizado.

O Teorema de Tales de Mileto e o de Pitágoras de Samos tem suas abordagens dentro do ensino da Geometria. São tratados inicialmente no 9º Ano do Ensino Fundamental. Geralmente, os livros didáticos quando se referem a estes teoremas, apenas os conceituam, fazem suas demonstrações e logo em seguida apresentam sugestões de exercícios. Fazendo tais observações iniciais, ainda eram vagas as possíveis causas do não aprendizado destes teoremas.

Para o progresso desta pesquisa foram fundamentais três outros trabalhos, o de Bastian (2000); Pereira, Couto e Costa (2016) e Pessanha (2017). Estes três trabalhos acadêmicos fortaleceram ainda mais meu foco no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras. O aprendizado destes teoremas, enunciados, demonstrações e aplicações, a princípio soam como algo simples, porém, as dificuldades de aprendizado dos alunos são inúmeras, como por exemplo: a aplicação da igualdade do Teorema de Pitágoras em determinado triângulo retângulo, ou das retas paralelas de Tales para encontrar proporção em determinados seguimentos, enfim, poderia enumerar inúmeros erros, porém, o foco não é este, e sim o que ocasiona estes erros.

Pelo meu interesse direcionar a aprendizado, esta pesquisa abordará o Teoremas de Tales e o de Pitágoras sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein desenvolvida no livro póstumo Investigações filosóficas, onde ideias como: **jogos de linguagem, o seguir regras, o treino e o ver como**, são argumentados. Pela filosofia de Wittgenstein entendemos que não temos acesso ao pensamento do aluno, temos acesso apenas àquilo que é expresso por meio da fala e da escrita ou outras formas de expressão. Por isso uma atenção maior à linguagem é tão necessária (Silveira, 2008 apud Silva et al. 2022, p.173).

Nesse viés de analisar o aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras na perspectiva da linguagem, deixa-se de lado o que até então era tido como erro dos alunos no aprendizado destes teoremas, e consideramos também a possibilidade de estar havendo um

conflito linguístico entre o que é ensinado e como é apreendido pelos alunos. Um problema no uso da linguagem, que talvez não esteja sendo claro para o aluno. Obviamente que é um tema complexo por abordar sob uma única linha de dedução, a linguagem. Ciente desse desafio, lanço-me nos capítulos que se seguem, analisar em três pesquisas: Bastian (2000); Pereira, Couto e Costa (2016); Pessanha (2017) e, em dois livros didáticos, Matemática Bianchini e Araribá Conecta Matemática, o aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras sob a perspectiva da filosofia da linguagem Wittgensteiniana.

2. O CAMINHO METODOLÓGICO

2.1 A ORIGEM DA PESQUISA

Antes do contato com o Grupo de Pesquisa GELIM, Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática, já tinha em mente, como dito antes, a intenção de pesquisar as dificuldades dos alunos no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras. Porém, que embasamentos teóricos seriam utilizados? E quais fontes analisar? Respondendo o segundo questionamento, a princípio, os livros didáticos seriam as fontes da minha pesquisa, faltando assim, somente o primeiro questionamento, a base teórica. É no GELIM que surge a possibilidade, de sob o viés da linguagem, analisar o não aprendizado dos alunos sobre os teoremas em questão.

Analisar somente a linguagem matemática do Teorema de Tales e o de Pitágoras nos livros didáticos atuais, além de não me seduzir completamente, correria o risco apenas de demonstrá-los, ou como abordá-los sob o viés da filosofia da linguagem Wittgensteiniana. Como estava decidido a inclinar a pesquisa para o aprendizado do aluno sobre o Teorema de Tales e o de Pitágoras, precisaria de mais elementos que fortalecessem essa jornada.

Conhecendo as produções científicas do GELIM e tendo contato com as ideias de Wittgenstein sobre linguagem, passei a direcionar a minha pesquisa para uma possível não compreensão da linguagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras. As primeiras deduções começaram a surgir, talvez o aluno não compreendesse a linguagem dos teoremas descritas nos livros didáticos? Os elementos essenciais para a compreensão desses teoremas podem não estar sendo abordados simultaneamente? Como ideia sobre área, proporção, paralelismo. Tudo isso pensei. Sobre esses aspectos linguísticos Silveira e Silva (2019), esclarecem que:

As pesquisas em Educação Matemática do GELIM - Grupo de Estudos e Pesquisas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará - versam sobre a linguagem e utilizam os conceitos wittgensteinianos, tais como jogos de linguagem, seguir regras, gestos ostensivos, semelhanças de família, *ver* e *ver como* (Silveira e Silva 2019, p.82).

Compreender o que Wittgenstein quis dizer com jogos de linguagem, o seguir regra, o treino e ver como, passaram a ser um desafio e, serão abordados no Capítulo 4 deste trabalho acadêmico. No decorrer da pesquisa, observou-se ainda a necessidade de analisar obras, pesquisas ou trabalhos que abordassem as dificuldades dos alunos na aprendizagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras, assim se complementariam as ideias, o que é exposto nos

livros sobre o Teorema de Tales e o de Pitágoras e o que as pesquisas mostram como resultados no aprendizado sobre os tais teoremas.

Seguindo minhas pesquisas, deparei-me com três trabalhos que convergiam com minhas ideias a respeito das dificuldades dos alunos no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras. Todos os trabalhos não seguem esse viés da linguagem matemática, porém são materiais riquíssimos como fonte de pesquisas. A dissertação de mestrado; **O TEOREMA DE PITÁGORAS** de Bastian (2000), pesquisa aplicada em escolas de São Paulo; **ANÁLISE DE ERROS EM QUESTÕES DE TEOREMA DE PITÁGORAS: Um estudo com alunos do Ensino Fundamental** de Pereira, Couto e Costa (2016), pesquisa aplicada em uma escola pública da cidade de Belém do Pará e a dissertação de mestrado: **TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA** de Pessanha (2017), pesquisa aplicada a alunos do EJA de uma escola pública da Cidade do Rio de Janeiro.

As pesquisas acima me proporcionaram inúmeras possibilidades dissertativas frente a esse material. Porém, o aprofundamento na ideia de linguagem em Wittgenstein começaram a nortear o andamento deste trabalho. No GELIM, compreendi que a matemática é uma linguagem que precisa de uma língua materna para ganhar expressão. Logo, analisar a linguagem desses teoremas nos livros didáticos e o aprendizado apresentado nos trabalhos citados ganharam força. Nos livros didáticos serão analisados os enunciados, as demonstrações, os exercícios e como estes conhecimentos são articulados nestes livros. Nas pesquisas serão analisados o aprendizado dos alunos.

As pesquisas de Bastian (2000), Pereira, Couto e Costa (2016) e Pessanha (2017), foram fundamentais para as análises do aprendizado dos alunos, visto que, não fiz aplicação de testes em sala de aula. A priori, o que eu tinha em mente eram apenas suspeitas sobre as dificuldades dos alunos. Estas pesquisas vieram me fornecer o material do qual precisava, o aprendizado dos alunos. Vale ressaltar, que estas pesquisas aqui mencionados, trazem riquíssimas contribuições para pesquisas que procuram compreender melhor as dificuldades no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras.

2.2 A JUSTIFICATIVA

A inclinação desta pesquisa pelo aprendizado do Teorema de Tales de Mileto e o de Pitágoras de Samos tem uma escolha particular. Ambos têm suas abordagens iniciais no ensino fundamental, nível em que trabalho como professor; são os teoremas mais conhecidos,

estudados e demonstrados. São teoremas frutos de aplicações práticas, enfim. Há inúmeros argumentos favoráveis aos dois teoremas. Para se ter uma ideia, o Teorema de Pitágoras é o mais conhecido e demonstrado mundialmente. O livro, **The Pythagorean Proposition (A Proposição Pitagórica)**, do Professor estadunidense *Elisha Escott Loomis*, reúne a compilação de diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, edição de 1940, chegou a 370 demonstrações.

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou num livro, ao qual chamou “The Pythagorean Proposition” (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. Depois do falecimento do autor, o livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo “National Council of Teachers of Mathematics” daquele país. O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas “algébricas” (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas “geométricas” (baseadas em comparações de áreas). Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o Teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos porque a igualdade fundamental da Trigonometria, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, já é um caso particular daquele teorema.¹

Mesmo o Teorema de Tales e o de Pitágoras tendo um ensino amplamente difundidos nas escolas de ensino fundamental e médio, devido às suas importâncias fundamentais tanto na Geometria quanto Álgebra e suas inúmeras aplicabilidades em diversas situações práticas, sendo frequentemente utilizados em abordagens pedagógicas para introduzir conceitos matemáticos de forma dinâmica e interativa, ainda assim, muitos alunos não conseguem aprender estes teoremas. Nesse sentido, esta pesquisa busca analisar os motivos deste não aprendizado dos tais teoremas.

Para Roque (2012 2012, p. 20), a matemática que lemos nos livros já foi produzida há muito tempo e reorganizada inúmeras vezes. Entretanto, não se trata de um saber pronto e acabado. Fala-se muito, hoje, em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. E justamente porque a maioria das pessoas acha que a matemática é muito abstrata, ouvem-se pedidos para que ela se torne mais “concreta”, ligada ao “cotidiano”. Mas a

¹ <https://rpm.org.br/cdrpm/2/5.htm>

matemática também é vista como um saber abstrato por excelência. Como torná-la mais concreta? Essas questões aparecem frequentemente na experiência de ensinar matemática, bem como nas discussões sobre as dificuldades de seu ensino e de sua aprendizagem.

A linguagem matemática por ser abstrata, acaba gerando nos alunos inúmeras incompreensões sobre esta mesma linguagem. O Teorema de Tales e o de Pitágoras possuem uma construção histórica tanto nos seus enunciados, quanto em suas demonstrações. Nesse sentido, o aprendizado destes teoremas, talvez não devesse apresentar tantas dificuldades, como tal fato não acontece, estas dificuldades no aprendizado desperta meu interesse. Compreender esta problemática passa a ser o questionamento desta pesquisa. Segundo Roque (2012):

O modo de escrever o encadeamento das definições, dos teoremas e das demonstrações é, desde muitos séculos, uma preocupação fundamental da matemática. No entanto, não podemos deixar de perceber uma diferença crucial entre a ordem lógica da exposição, o modo como um texto matemático é organizado para ser apresentado, e a ordem da invenção, que diz respeito ao modo como os resultados matemáticos se desenvolveram (Roque, 2012, p. 18).

Definido o meu propósito de analisar o aprendizado dos alunos sobre o Teorema de Tales e o de Pitágoras, surgiram inúmeras possibilidades de se olhar essa problemática sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein. A princípio, os jogos de linguagem e o ver como, ideias apresentadas por Wittgenstein no livro *Investigações Filosóficas* (2004), foram ganhando força como embasamentos iniciais.

Na linguagem comunicativa, há uma perspectiva no uso da linguagem por quem profere e outra por quem escuta ou interpreta. Nesse sentido, o ensino dos teoremas para ser compreendido, precisaria que todos ou que a maioria tivesse a mesma compreensão que há em seus enunciados e suas demonstrações. Inúmeras incompreensões são apresentadas pelos alunos. Na maioria das vezes, sempre se credita no aluno este não aprendizado, porém, até que ponto essa dificuldade é somente do aluno? Não há como mensurar. Precisamos analisar a problemática sob outros olhares. No meu caso, este olhar, é sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein, como alternativa para compreender as origens do problema. Sob esse viés linguístico poderemos elucidar caminhos para um avanço na melhoria do ensino do Teorema de Tales e o de Pitágoras.

A linguagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras precisam ser traduzidas para os alunos. Estes teoremas possuem outras linguagens envolvidas na sua construção, logo, a tradução de todas estas linguagens envolvidas nestes conhecimentos são fundamentais para o aprendizado dos alunos, só assim eles serão incluídos nesta linguagem de conhecimento. Sobre isso, Silveira (2005) aponta que:

A disciplina de matemática apresenta ao aluno algumas imposições. Sua linguagem é cifrada, com símbolos que pretendem ser universais. A matemática e a língua materna se completam, pois ambas são simbólicas, mas na perspectiva do aluno, as representações visuais dos códigos matemáticos precisam ser traduzidas para a linguagem materna. Para tal, a intuição é constantemente convocada a auxiliar na condução de uma representação mental. Ao participar de um jogo com a linguagem matemática no contexto de sala de aula, o aluno deve seguir as regras que a disciplina impõe. Para seguir as regras, necessita ativar a sua capacidade de julgar, para que seus juízos coincidam com os juízos universalmente válidos, caso contrário, não participa mais do jogo de linguagem e é reprovado na escola (Silveira, 2005, p. 25).

Segundo Roque (2012, p. 21), possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais “concreta”, elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada desse modo, mais “concreto”, desde que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto. Isso não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações.

As reflexões filosóficas feitas por Wittgenstein na obra *Investigações Filosóficas* (2004), têm contribuído de forma ímpar, para problematizar o caráter universal pretendido pela matemática acadêmica e, em efeito, alicerçar as afirmações a respeito da existência de “diversos usos da matemática”. Ressalto aqui, que a matemática abordada nesta pesquisa sob a lente da linguagem, é a matemática ensinada nas instituições de ensino, simbólica e formal, porém, com adaptações para determinado nível de ensino. Segundo Danyluk (2015):

A matemática tem uma linguagem de abstração completa. Como qualquer sistema linguístico, a ciência matemática utiliza-se de signos comunicar significados matemáticos. Assim, a leitura da linguagem matemática ocorre a partir da compreensão e da interpretação dos signos e das relações implícitas naquilo que é dito de matemática (Danyluk, 2015, p. 25).

Nesse sentido, a abstração matemática precisa ser compreendida na linguagem materna. Caso contrário teremos conflitos linguísticos e a não compreensão por parte do aprendiz. Ora, se a linguagem é o elemento de articulação do Teorema de Tales e o de Pitágoras, precisamos atentar em suas abordagens a percepção do aluno sobre essa linguagem, como ele a vê de fato.

2.3 A METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia que da norte a esta pesquisa é a qualitativa, pois busca analisar três trabalhos acadêmicos e dois livros didáticos a fim de compreender o aprendizado do aluno em relação ao Teorema de Tales e o de Pitágoras. Por analisar trabalhos já publicados, esta pesquisa ganha um viés bibliográfico. A escolha pela pesquisa qualitativa se deu pelo seu

caráter de análise documental, onde procuro entender os aspectos mais subjetivos sobre o tema deste trabalho, que requer uma compreensão mais ampla, além do que apenas interpretar dados. A metodologia qualitativa, segundo Silveira e Córdova (2009), caracteriza-se em compreender a totalidade de um fenômeno, levando em consideração a subjetividade para se compreender e interpretar as experiências, bem como, o de destacar a importância das interpretações dos eventos em si.

Silveira e Córdova (2009), ainda destacam que:

As características da pesquisa qualitativa são: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever*, *compreender*, *explicar*, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (Silveira e Córdova, 2009, p.32).

Importante também destacar, as ideias de Garnica (2004), onde o mesmo elenca as seguintes características sobre a pesquisa qualitativa:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (Garnica, 2004, p. 86).

Já para Godoy (1995) a pesquisa qualitativa leva em consideração a perspectiva dos sujeitos envolvidos ao afirmar que a pesquisa qualitativa:

[...] não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo a medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (Godoy, 1995, p. 58).

Para Minayo (2001), a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. Aplicada inicialmente em estudos de Antropologia e Sociologia, como contraponto à pesquisa quantitativa dominante, tem alargado seu campo de atuação a áreas como a Psicologia e a Educação. A pesquisa qualitativa é criticada por seu empirismo, pela subjetividade e pelo envolvimento emocional do pesquisador (Minayo, 2001, p. 14).

Quanto aos procedimentos técnicos, esta pesquisa tem um viés bibliográfico apoiado em Gil (2008), que aponta a mesma, como sendo uma modalidade desenvolvida com base em material já elaborado: livros e artigos científicos. Onde serão analisados aqui, três trabalhos acadêmicos e dois livros didáticos. A escolha dos livros didáticos, foi baseada no critério de uso em sala de aula. Poderiam ser analisados quaisquer livro didático que aborde o Teorema de Tales e o de Pitágoras, porém, os aqui elencados, são utilizados como material didático pela rede municipal de educação de Portel/PA, município onde trabalho como professor.

As pesquisas que abordam o aprendizado dos alunos serão analisadas no Capítulo 6 desta pesquisa. As pesquisas são; a dissertação de mestrado de Bastian (2000), o artigo científico de Pereira, Couto e Costa (2016) e a dissertação de mestrado de Pessanha (2017). Estas pesquisas e as referências contidas neste trabalho, foram encontradas em pesquisas feitas na Capes e o Google Acadêmico. A análise feita nas obras citadas acima, serão feitas de forma complementar, por apresentarem em seus resultados, as dificuldades dos alunos na aprendizagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras.

Os livros didáticos serão analisados no Capítulo 7 deste trabalho. Os livros analisados são: Matemática Bianchini, 9ª edição de 2018, utilizado como recurso didático nos anos de 2020, 2021 e 2022, e o livro Araribá Conecta Matemática, 1ª edição de 2022, utilizado como recurso didático nos anos de 2023, 2024 e ainda vigente. Esta pesquisa propõe responder o seguinte questionamento: ***Quais as dificuldades encontradas por alunos na aprendizagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras, sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein?***

2.4 OS OBJETIVOS

2.4.1 OBJETIVO GERAL

Analisar as dificuldades encontradas por alunos no aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras, sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein.

2.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analisar se os jogos de linguagem do Teorema de Tales e de Pitágoras abordados nos livros Matemática Bianchini e Araribá Conecta Matemática propiciam entendimento claro sobre seus enunciados e suas demonstrações;

2. Verificar nos livros didáticos citados acima, se a regra ensinada nestes jogos de linguagem e o treino propiciam habilidades para a resolução dos exercícios propostos;
3. Observar se a linguagem destes teoremas nos livros didáticos pode influenciar no ver como dos alunos;
4. Refletir sobre os erros apresentados pelos alunos nas pesquisas elencadas.

3. A LINGUAGEM MATEMÁTICA

Segundo Grayling (2002), não há uma “lógica da linguagem”, mas muitas; a linguagem não tem nenhuma essência única, mas é uma vasta coleção de diferentes práticas, cada qual com sua própria lógica. O significado não consiste na relação entre palavras e coisas ou numa relação figurativa entre proposições e fatos; o significado de uma expressão é, antes, seu uso na multiplicidade de práticas que vão compor a linguagem. Além disso, a linguagem não é algo completo e autônomo que pode ser investigado independentemente de outras considerações, pois ela se entrelaça com todas as atividades e comportamentos humanos; consequentemente nossos inúmeros diferentes usos dela recebem conteúdo e significado de nossos afazeres práticos, nosso trabalho, nossas relações com as outras pessoas e com o mundo que habitamos.

Para Galileu Galilei (1564–1642), a matemática é a linguagem em que Deus escreveu o universo. Com isto, Galileu Galilei enfatizava que as leis do universo poderiam ser descritas e compreendidas através da linguagem matemática. Obviamente que esta afirmação permite outras inúmeras observações, fico aqui com a ideia de matemática como linguagem. Galileu Galilei estava muito avançado para o seu tempo, pois já tinha a dimensão de o quanto a matemática em si é uma linguagem, uma linguagem simbólica com regras próprias. Não há registro de que Galileu Galilei tenha feito algum estudo sobre a linguagem matemática, porém outros o fizeram.

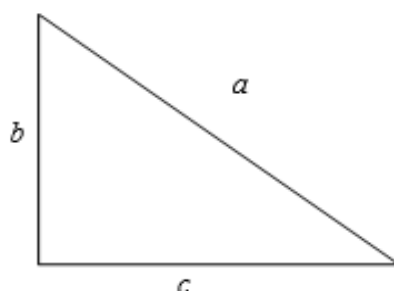
O presente capítulo aborda a linguagem matemática e seus desdobramentos no ensino e na aprendizagem. Antes, é preciso responder porque nesta pesquisa a matemática é considerada uma linguagem. Segundo os autores Otte e Barros (2015, p. 02), a matemática é considerada uma linguagem, não pelos matemáticos de criação, mas nos contextos de suas aplicações nas ciências, na tecnologia, na Filosofia, na Lógica e na Educação Matemática. De acordo com o pensamento destes autores, percebemos que a matemática é uma linguagem nas mais variadas situações em que ela ganha vida; e assim percebemos suas características como linguagem formal, abstrata, simbólica e que precisa muitas das vezes ser traduzida.

A linguagem matemática, construída pela humanidade ao longo dos anos com suas características próprias, regras, simbologias etc. precisa de uma língua materna, idioma, para ganhar escrita. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras, tanto enunciado como demonstração, precisam de uma língua materna para ganhar escrita e existência. Segundo Silveira (2020):

Os textos matemáticos podem ser escritos por meio da linguagem natural e/ou da linguagem matemática. A primeira é polissêmica e a segunda é codificada e pretende ter um sentido único. A linguagem matemática não possui oralidade e utiliza a linguagem natural para que o texto possa ser lido, ou seja, o texto escrito em linguagem matemática precisa ser traduzido para a linguagem natural, porém, ele possui um resíduo que fica subentendido no processo de codificação. Tal resíduo precisa ser interpretado para que o texto tenha sentido (Silveira, 2020, p. 05).

Nesse sentido, em nossa língua materna, o português, o enunciado do Teorema de Pitágoras tem a seguinte escrita: “em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”. Somente na língua materna, esse enunciado fica provavelmente mais difícil de se compreender. Já na linguagem matemática, o enunciado continua o mesmo, porém já se lança mão de figuras e símbolos a fim de facilitar essa compreensão. A linguagem matemática procura, nesse sentido, auxiliar a língua materna na compreensão deste teorema que na linguagem matemática fica representado pela expressão: $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 1 - Triângulo Retângulo



Fonte: O autor

A matemática é um patrimônio da humanidade, onde muitas civilizações fizeram contribuições importantes. Imaginemos, por exemplo, a Geometria sem a contribuição dos egípcios, babilônios e gregos? Ou, como seria a matemática sem a contribuição da ideia sobre o zero, feita pelos hindus? Ou, se os árabes não tivessem divulgado a descoberta da ideia sobre o zero e não contribuído com os seus estudos iniciais sobre a Álgebra? Em todas essas contribuições, a linguagem foi o fator determinante para a melhoria da matemática.

A linguagem matemática é importantíssima para representarmos o mundo, por possui uma estrutura organizada que permite ser manipulada nas mais variadas situações do dia a dia. Como resolveríamos determinadas situações sem cálculos, sem simbologias, ou que cada cultura fizesse uma matemática, como uma Torre de Babel? A linguagem matemática precisa da língua materna para existir, porém é inegável que muitas situações se tornam mais prática na linguagem matemática. Sobre isso, Farias e Costa argumentam que:

A combinação de símbolos na linguagem matemática, pode ser comparada a combinação de letras na linguagem natural. Assim como a combinação de letras para formar palavras depende de um sistema de regras e da validação social da palavra formada, a combinação de símbolos, na linguagem matemática, também segue regras que necessitam ser validas por uma comunidade da área e conhecidas pelos usuários da linguagem para que seja possível a comunicação (Farias e Costa 2020, p.156).

Para González (2018), em seu livro intitulado, *El lenguaje de las matemáticas Historias de sus símbolos*, é possível distinguir três períodos na história da matemática: a matemática retórica, a matemática anotada e a matemática atual, simbólica. Os textos matemáticos mais antigos, desde a primeira fase, resolvem problemas aritméticos ou algébricos usando apenas texto, sem símbolos, ou com um mínimo deles. Um exemplo citado em seu livro, tem o seguinte enunciado: *“Temos três quantidades em proporção contínua. Multiplicamos cada uma delas pela soma das outras duas e somamos os resultados. Esse resultado é dividido por duas vezes a soma das três quantidades e o resultado é sempre a segunda quantidade”*.

Para fins didático, seria mais difícil explicar a situação acima, somente na linguagem materna, já na linguagem matemática não. Esta situação fica mais evidente na linguagem matemática onde é possível esquematizá-la e compreendê-la de forma mais plausível. Fortalecendo assim, a importância de se dar ênfase aos símbolos matemáticos e a linguagem matemática atual, pois muitas situações precisam de uma linguagem simbólica que facilite sua compreensão. González (2018, p. 24), mostra a fórmula do enunciado acima. Notamos que ele se torna relativamente simples na linguagem matemática:

$$\text{Se } x/y = y/z, \text{ então } \frac{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)}{2(x+y+z)} = y$$

Ainda sobre esta questão, a linguagem matemática complementa a linguagem materna na representação de muitas ideias. A situação apresentada no enunciado, língua materna, ao ser complementado com uma outra linguagem simbólica, linguagem matemática, acaba articulando a compreensão do que estava no enunciado. A matemática torna-se uma alternativa de representação de algo escrito na língua materna. Nesse sentido, a linguagem matemática facilita a representação e comunicação entre estudiosos do assunto. Sobre isto, Viali e Sila (2007) argumentam:

Ler e escrever na língua materna não é a única forma de interpretar, explicar e analisar o mundo. A Matemática é outra dessas formas que tem seus códigos e linguagem própria e um sistema de comunicação e de representação da realidade construído ao longo de sua história. A linguagem matemática desempenha um papel significativo dentro da Matemática e da cultura, mas não sobrevive isolada, pois

prescinde do apoio da linguagem materna para a realização da comunicação (Viale e Silva 2007, p. 06).

Com as reflexões feitas até aqui sobre a linguagem matemática e sua importância no contexto social atual, é importante que esta linguagem seja compreendida e dominada. A escola é o espaço onde a linguagem matemática é democratizada, ou pelo menos deveria ser. Outrora, houve tempo em que essa democracia não era possível, apenas alguns privilegiados tinham acesso a esse importante conhecimento. Porém, mesmo com inúmeros estudos sobre o ensino da matemática, esta continua sendo tida como complexa e não assimilável por muitos alunos; afetando a autoestima e gerando aversão de muitos alunos em seu percurso escolar. Nessa perspectiva, Lira, Silva e Neto (2024), argumenta que:

[...] não basta apenas o aluno conhecer a importância da matemática para o desenvolvimento da sociedade e nem é suficiente que o aluno decore algumas fórmulas e procedimentos de resolução de cálculos. O aluno precisa enxergar algum significado em aprender matemática, compreendendo-a como fruto das suas construções cognitivas (Lira, Silva e Neto, 2024, p. 57).

A seguir, debruçaremos sobre a linguagem matemática no ensino escolar; fazendo reflexões sobre sua abordagem e os desafios de fazer da matemática um conhecimento acessível ao aluno, para que seja um instrumento usado corretamente nas práticas sociais. A difusão de metodologias educativas na área da matemática, é muito mais disseminada nos dias de hoje, tornando o ensino e aprendizagem da matemática, objetos de pesquisas sob diversas lentes, enriquecendo o debate sobre caminhos que proporcionem processos de ensino e aprendizagens que auxiliem alunos e professores.

3.1 A LINGUAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

O ensino da Matemática requer preparo. É crucial para quem vai ensinar, dominar a matemática e sua linguagem, assim terá melhores possibilidades de êxito no seu ensino. A matemática, sua linguagem e regras são validadas por uma comunidade afim de proporcionar seu entendimento nas diversas línguas maternas. Logo, seu ensino pode ser comparado ao ensino da língua materna, cabendo ressaltar, que o domínio da língua materna é pré-requisito para uma compreensão da linguagem matemática.

O preparo para o ensino da matemática ocorre no curso de Licenciatura em Matemática, curso que prepara para o ensino fundamental II e ensino médio. A atuação do profissional dependerá assim, da formação que obtiver no curso e de possíveis formações que

venha ter pós a graduação. Um outro fator que pode ser determinante no sucesso do ensino da matemática, diz respeito a tendência pedagógica que venha nortear a práxis do professor.

Esta pesquisa aborda a matemática como linguagem e, como tal, seu ensino deve partir desta perspectiva, de que o aluno seja ensinado a manipular esta linguagem matemática. Obviamente que nem todos comungam desta ideia, e o ensino da matemática acaba ganhando contornos decorrentes da visão pedagógica que o professor venha ter em sua prática educativa, acabando por influenciar positivamente ou não o aprendizado do aluno. Segundo as ideias de Silveira, Silva e Teixeira Júnior (2017):

Os problemas que os alunos enfrentam não são resolvidos a partir de uma tentativa de construção espontânea por parte dele ou a partir de contextualizações, mas sim, muitas vezes, a partir de uma maior habilidade com a linguagem matemática, que precisa ser ensinada (Silveira, Silva e Teixeira Júnior, 2017, p. 470).

Um exemplo claro de como a visão pedagógica influencia o aprendizado da matemática é a tendência tradicional de ensino. Nesta tendência a ideia do aprendizado está atrelado ao ato de decorar o que é ensinado, a matemática acaba excluindo muitos alunos à medida que eles não se adequam a esta estrutura de ensino. Talvez no ensino tradicional, encontremos as origens da aversão a matemática atualmente. Hoje, desmistificar a matemática passa a ser uma missão, não a “impossível”, porém, trabalhosa. Seu aprendizado precisa levar em consideração sua importância histórica e atual. Nesse sentido, para Rodrigues (2004):

É importante que a presença do conhecimento matemático seja percebida, e claro, analisada e aplicada às inúmeras situações que circundam o mundo, visto que a matemática desenvolve o raciocínio, garante uma forma de pensamento, possibilita a criação e amadurecimento de ideias o que traduz uma liberdade, fatores estes que estão intimamente ligados a sociedade. Por isso, ela favorece e facilita a interdisciplinaridade, bem como a sua relação com outras áreas do conhecimento (filosofia, sociologia, literatura, música, arte, política etc.) (Rodrigues, 2004, p. 05).

A matemática e sua linguagem só sentido para o aluno se ela tiver uma função social. E ela tem, não só uma e sim muitas. O que falta neste sentido é o aluno perceber essa relação, todo conhecimento matemático tem uma raiz histórica e um por quê de ser ensinado. Segundo as ideias de Silva e Silveira (2013 apud SILVA et al. 2015, p.04) aplicar a matemática no cotidiano não significa “fundar” uma nova matemática. Nossa Matemática é um produto cultural, isto é, histórico e social, acumulado ao longo do desenvolvimento da humanidade. Seu uso “civil” não implica outra matemática, ao contrário, esse uso no dia a dia é uma das “caras” da disciplina.

Importante também frisar que o ensino da matemática passa por processos de linguagem e complexidades de assuntos a ela relacionados. A linguagem matemática dos anos

iniciais é diferente da linguagem matemática dos anos finais, que será diferente da linguagem matemática do ensino médio e assim por diante. Seguindo esse pressuposto, Silva afirma que:

Ensinar matemática sob a perspectiva da linguagem significa compreender que aquela é possuidora de uma linguagem com características próprias, que estão muito além do uso dos termos da linguagem comum, o que a torna uma disciplina distinta. A linguagem matemática tem como característica principal ser uma linguagem exclusivamente escrita e constituída, basicamente, por símbolos, gráficos e expressões algébricas (Silva, 2022, p. 102).

Dominar os conceitos matemáticos dentro da sua linguagem passa a ser fundamental para uma compreensão ampla do que se está estudando. Imaginemos por exemplo: a aluno que esteja estudando sobre números. Saber contar e representar esta contagem através de símbolos, não significa que este aluno de fato saiba o que é número, o conceito de número vai muito além. Pela linguagem, o símbolo que representa uma quantidade, é fruto de uma convecção dentro de uma determinada regra que ao longo dos anos veio sendo melhorada. Se apropriar de um conceito de número para Lopes et al. (2019):

Significa, sim, apropriar-se de sua essência, expressa no controle de quantidades, que se desenvolveu por um longo caminho de contar pedras, fazer marcas, contar nos dedos, calcular com ábaco, até chegar à síntese dos algoritmos e de instrumentos como a calculadora e o computador (Lopes et al., 2019, p. 662).

Outro aspecto relevante a ser considerado está na natureza do trabalho pedagógico. As relações entre linguagem, ensino e aprendizagem, mudam. Por exemplo, explicar a matemática hoje somente de forma mecânica pode não funcionar como funcionou no passado. Inúmeros aplicativos que reproduzem a matemática em duas ou três dimensões, passam a ser utilizados como ferramentas que aproximam o saber matemático do aluno.

A linguagem matemática utiliza seus signos próprios e a língua materna para expressar seus conceitos, relações e operações matemáticas, para isto ela envolve símbolos, termos, regras e convenções que permitem a comunicação precisa e concisa de ideias matemáticas. No ensino, a linguagem matemática desempenha um papel crucial na compreensão e construção do conhecimento matemático, exigindo que os alunos dominem tanto a linguagem materna quanto a linguagem matemática.

3.2 AS DIFICULDADES DOS ALUNOS COM A LINGUAGEM MATEMÁTICA

A percepção da linguagem matemática por muito alunos no contexto escolar é preocupante. Dizer que muitos alunos não gostam da Matemática não precisa nem ser referenciado. Porém, as dinâmicas sociais atuais exigem que as pessoas dominem a

matemática, podem até não gostar, não podemos impor gostos, porém o aprendizado da matemática é uma necessidade. Logo, seu ensino é um desafio, pois para se aprender matemática, é preciso conhecer sua linguagem, seu simbolismo, suas regras e trazer esse conhecimento para uma contextualização nem sempre é uma tarefa fácil.

Para Silva (2011, p. 10), o ensino da matemática, como qualquer outra disciplina, é baseado na comunicação através da linguagem materna, seja nas explicações do professor, nas exposições do livro didático, nos enunciados dos problemas matemáticos ou ainda nas perguntas dos alunos. Assim, cabe questionar se as dificuldades dos alunos, nessa disciplina, não se devem, entre outros fatores, a questão relacionada a linguagem.

Segundo Silveira (2005, p. 45), é no diálogo entre a matemática, o professor e o aluno que poderemos resgatar os sentidos ausentes, que fazem esta disciplina carregar o mito de dificuldade. Assim compreendendo a matemática, conhecendo suas limitações e exigências, podemos interpretar os erros dos alunos e, quem sabe, aprimorar o diálogo entre professor e aluno, já que usamos a linguagem matemática em “simbiose” com a linguagem materna.

Geralmente nossas salas possuem um número elevado de alunos, dificultando o trabalho docente com a linguagem matemática. Como fazer, por exemplo, uma analogia plausível sobre a ideia de *Ponto, Reta e Plano* aos alunos de 6º Ano do ensino fundamental, para que estes realmente compreendam essas ideias primitivas da Geometria? Sendo estes conhecimentos abstratos são representados apenas por símbolos e que apenas os associamos com elementos do mundo material. Segundo as ideias de Feio:

o discurso que diz que a “Matemática é difícil”, veiculado entre os estudantes de todos os níveis de ensino, é corroborado pelas dificuldades que os alunos têm de lidar com o simbolismo e as regras inerentes a linguagem matemática. Isso porque essa linguagem dispõe de um conjunto de signos próprios que se relacionam segundo determinadas regras (Feio, 2009, p. 12).

Dos Anjos e Secafim (2018. p.79), afirmam que a dificuldade dos alunos em matemática é uma realidade muito presente no trajeto da vida estudantil de muitos estudantes, problema que costuma se apresentar na educação básica, por diversos motivos e os acompanham até a educação superior. Essas dificuldades as vezes influenciam na escolha do curso de graduação, fazendo com que esses estudantes optem por cursos que apresentem poucas disciplinas envolvendo matemática na matriz curricular. E em outra realidade há os casos em que os estudantes escolhem o curso por se identificarem com a área de atuação, porém estes apresentam uma considerável presença de disciplinas exatas que influenciam muito no desempenho desses estudantes no avanço e conclusão do curso escolhido.

Masola e Allevato (2019, p. 60), acrescentam que o termo dificuldade de aprendizagem matemática está se configurando num campo de pesquisa fértil e abundante. Ao avaliar as dificuldades dos alunos, sempre se analisa a atitude desses alunos mediante a tarefa e se procura compreender quais são as estratégias que mobilizam para efetua-las. Particularmente, em Matemática, é possível constatar com frequência que os alunos utilizam, muitas vezes de maneira não consciente, procedimentos que são pouco eficazes. Ou então, quando dominam uma determinada técnica, tendem a utilizá-la sem restrições, tendo dificuldade de considerar outras possibilidades e, na falha em escolher uma melhor estratégia, acometem os resultados em implicações danosas.

Lira, Silva e Neto (2024, p. 57), observam que o aluno vem aprendendo uma matemática mais mecânica, em que o foco está na reprodução, sem reflexão, de procedimentos e conceitos matemáticos. Esse mecanismo pode, de um lado, propiciar êxito em solucionar alguns problemas propostos em sala de aula, mas, de outro, o desenvolvimento de diversas dificuldades. Nessa linha de pensamento, observamos que não basta apenas o aluno conhecer a importância da matemática para o desenvolvimento da sociedade e nem é suficiente que o aluno decore algumas fórmulas e procedimentos de resolução de cálculos. O aluno precisa enxergar algum significado em aprender matemática, compreendendo-a como fruto das suas construções cognitivas.

A comunicação em sala aula, entre professor e aluno é fundamental para que a linguagem matemática seja compreendida de fato, caso contrário o ensino fica comprometido, o desinteresse do aluno e sua aversão pela matemática passam a ser estimulados. Isso se torna negativo, pois uma vez o aluno tendo uma aversão à matemática, fica mais difícil desmistificá-la e o trabalho comprometido em parte. Para Florenço Júnior (2014):

Muitas vezes, não se estabelece uma comunicação na aula de matemática entre professores e alunos em virtude da ampla utilização da simbologia matemática. Geralmente o formalismo rigoroso não é familiar ao estudante, sendo difícil a decodificação da mensagem. Para que haja compreensão desta, faz-se necessário, além de um contexto adequado, o desenvolvimento de atividades que estimulem a comunicação ou a verbalização do raciocínio (Florenço Júnior, 2014, p. 30).

Sobre isso, não havendo um diálogo entre professor e aluno, o aprendizado fica comprometido. Uma vez que a linguagem matemática é uma linguagem própria, com uma gramática e um código próprio. A escrita matemática não segue a mesma lógica que a escrita da língua materna, o que torna a sua compreensão um pouco mais complexa, pois exige muito mais que apenas exposição desse saber. Ora se o aluno não aprende a culpa é dele e o objetivo aqui não é o de encontrar culpados. Sobre isso Chabanne (2006) afirma que:

os termos utilizados para designar as dificuldades do aluno são inúmeros geralmente

ambíguos e podem gerar confusão. Por exemplo, devemos falar em “fracasso” ou em “dificuldade escolar”? As palavras correspondem à interpretação de uma situação (a de um aluno que não vai bem na escola). Elas constituem ao mesmo tempo os limites dessa interpretação e os limites da comunicação que elas possibilitam (Chabanne, 2006, p. 11).

Essa situação se deve em muito ao caráter punitivo que havia na educação, se o aluno não aprendia o percentual de culpa maior era dele. Ora, imaginemos como seria um encontro entre os pitagóricos para debater determinado saber? Havia avaliação? Tempo determinado para o aprendizado de tal saber? Obviamente não sabemos, o que sabemos é que determinado saber, construído em determinadas situações, são ensinados muitas das vezes sem se fazer essa ponte entre as circunstâncias e a produção deste conhecimento.

O capítulo a seguir: A Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, debruça nas ideias de Wittgenstein sobre: jogos de linguagem, o seguir regra, o treino e o ver como. Importante salientar que uso o termo ideias, pois Wittgenstein não atrelou nenhum conceito a estes termos, exemplo: para Wittgenstein não existe um único jogo de linguagem, e sim vários, e estes jogos ganham significados nos contextos em que são utilizados.

4. A FILOSOFIA DA LINGUAGEM DE WITTGENSTEIN

Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951). Nasceu na Áustria e posteriormente naturalizou-se britânico. Foi um filósofo com produção intelectual voltada para a linguagem e bastante influente na virada linguística do século XX. Segundo Silveira, Silva e Teixeira Júnior (2017, p. 463), essa virada linguística ocorre no final do século XIX e “passa a considerar o papel das nossas expressões linguísticas na constituição dos sentidos”. A "virada linguística" movimento que influenciou o pensamento filosófico e outras áreas do conhecimento, dá ênfase ao papel da linguagem na compreensão do mundo, do pensamento e da própria filosofia. A linguagem deixa de ser um mero instrumento para expressar ideias pré-existentes, e passa a moldar nossa forma de pensar, interagir com o mundo e construir conhecimento. Sobre a virada linguística Meira e Silveira (2019), afirmam que:

Após a Virada Linguística, a análise da linguagem se volta para os usos, os contextos, os falantes, os discursos. É, nesse momento, que a linguagem segue um caminho para a possível dissolução dos problemas filosóficos, que em oposição à filosofia da consciência exclui-se a subjetividade, no sentido de propriedade de um sujeito que apreende e representa o mundo a partir de suas próprias percepções (Meira e Silveira, 2019, p. 68).

Ainda segundo Meira e Silveira (2019, p. 68) a filosofia da Linguagem se instalou definitivamente a partir das ideias de Wittgenstein, para o qual o significado do uso da linguagem não é alcançado unicamente pela relação entre a palavra que designa e o objeto designado, resultado de uma suposta relação direta com a coisa nomeada, mas por pertencer ao sistema da língua, que é orientada por regras próprias, cujo funcionamento não depende de uma consciência individual, limitada a expressar o pensamento. A linguagem é uma atividade pública, ordinária, seus usos e regras possuem caráter pragmático, que não se restringe à forma lógica da proposição, embora seja suscetível a formalização, em função de seu uso contextual.

As contribuições de Wittgenstein feitas nos campos da lógica, filosofia da linguagem, filosofia da matemática e filosofia da mente, tem influenciado inúmeras pesquisas acadêmicas. Muitos pesquisadores o consideram o filósofo mais importante do século XX. Seu único livro de filosofia publicado em vida, o *Tractatus Logico-Philosophicus*, de 1922,

exerceu profunda influência no desenvolvimento do positivismo lógico². Mais tarde, as ideias por ele formuladas a partir de 1930 e difundidas em Cambridge e Oxford impulsionaram ainda outro movimento filosófico, a chamada filosofia da linguagem comum³.

Para efeito de estudos acadêmicos, o pensamento de Wittgenstein é dividido em duas fases. Sua produção na juventude é tida como a fase do Primeiro Wittgenstein e a obra posterior ao *Tractatus Logico-Philosophicus* é atribuída ao Segundo Wittgenstein, como se designassem autores distintos. A cada um desses períodos corresponde uma obra central na história da filosofia do século XX. À primeira fase, pertence o *Tractatus Logico-Philosophicus*, livro em que Wittgenstein foca em esclarecer as condições lógicas que o pensamento e a linguagem devem atender para poder representar o mundo. Já na segunda fase, com as *Investigações Filosóficas*, publicadas postumamente em 1953, Wittgenstein vai tratar tópicos similares ao do *Tractatus*, porém, sob uma perspectiva diferente. Ele avança em temas da filosofia da mente ao analisar conceitos como o de compreensão, intenção, dor e vontade. Para este segundo Wittgenstein, os problemas filosóficos não estão na linguagem, mas sim no pensamento confuso expresso linguisticamente devido ao dogmatismo quando aplicada a concepção referencial da linguagem (Moreno, 2010 apud Silva et al. 2022, p. 158).

Este desdobramento passa a ser importante também para o ensino, principalmente da Matemática, visto que ela é uma linguagem cheia de simbologias e regras, que se apropria da linguagem materna para ganhar existência linguística. Nesse viés é possível deduzir que a linguagem dependendo da forma como é expressa, pode vir a ser um fator determinante para seu êxito ou dificuldade na sua compreensão. Por este motivo, o Wittgenstein abordado nesta pesquisa será o segundo, visto que este aprofundou suas ideias no campo da filosofia da linguagem, influenciando inúmeros educadores e pesquisadores. Possibilitando um leque maior para o campo das pesquisas com foco na linguagem.

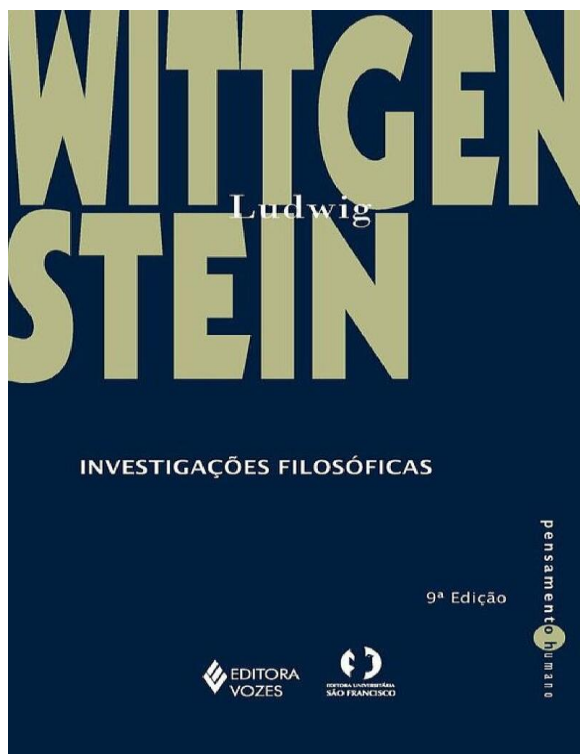
No livro *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein apresenta os termos: *jogo de linguagem*, *o seguir regras*, *o treino* e *o ver como*, entre outros. Estes serão os embasamentos da análise das obras abordadas neste trabalho. Digo ideias, pois Wittgenstein não conceituou os mesmos, o próprio criador dessas ideias era contra a ideia de conceituar, como algo pronto

² O positivismo lógico foi um movimento filosófico que surgiu entre os filósofos da linguagem e que defendia que a análise lógica da linguagem era a forma de solucionar todos os problemas.

³ A filosofia da linguagem comum é um ramo da filosofia que se dedica a estudar a linguagem ordinária e a formalizar logicamente a sua utilização.

e acabado. Os teoremas, aqui estudados à luz da filosofia da linguagem, são os passos iniciais de construção desta pesquisa.

Figura 2 – investigações Filosóficas



Ao revisar suas ideias filosóficas, Wittgenstein rompe com a visão da linguagem como representação lógica da realidade, e dá lugar ao que ficou conhecido como segundo Wittgenstein. Essa mudança de pensamento resultou em sua obra póstuma mais importante, *Investigações Filosóficas*. Publicado em 1953, dois anos após sua morte. Nessa obra, Wittgenstein propõe uma nova maneira de entender como as palavras adquirem significado, revolucionando seu pensamento ao argumentar que a linguagem não tem uma estrutura única, mas é um conjunto de "jogos de linguagem", cujo significado é determinado pelo uso prático e social em contextos específicos.

Investigações filosóficas de Ludwig Wittgenstein.
Capa da 9.ª Edição; Editora Vozes.

4.1 OS JOGOS DE LINGUAGENS SEGUNDO WITTGENSTEIN

A linguagem é um sistema estruturado de comunicação que consiste em gramática e vocabulário. É o principal meio pelo qual os seres humanos transmitem significado, tanto na forma falada quanto na escrita e pode ser transmitido por meio de línguas de sinais. A compreensão de Jogos de linguagens perpassa pela compreensão da linguagem referencial. A concepção de linguagem referencial está alicerçada na relação binária que tradicionalmente é empregada na compreensão da linguagem como indicativa e denotativa. Cada signo corresponde a uma ideia ou conceito no pensamento, ou seja, esta perspectiva propõe uma correspondência biunívoca entre linguagem e mundo. Outro aspecto importante, esta concepção pressupõe que os significados das palavras se referem a objetos que são externos à linguagem, o significado da palavra mesa seria o objeto que estaria sendo descrito, nesse sentido, o significado de uma palavra seria sua referência. Assim, a linguagem teria a função

de descrever ou comunicar os fatos do mundo, reduzindo-se à referência de objetos externos ou internos.

Para o segundo Wittgenstein a linguagem deixava de ser conceitual e passava a ser contextualizada. Nesse viés, a linguagem dependeria do contexto em que é empregada, havendo assim vários jogos de linguagem pois existem inúmeras situações em que podemos abordar a linguagem. Segundo Wittgenstein, "*jogo de linguagem*" também é a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada (Wittgenstein, 2009, p. 19).

Wittgenstein via a linguagem não como um sistema estático de representação da realidade, mas sim como uma ferramenta multifacetada. Para Wittgenstein o significado de uma linguagem está atrelado no seu uso, contexto, assim, como são usos diferentes da linguagem, dependendo do contexto, ele a compara a jogos. Assim como os jogos possuem suas regras a linguagem também possui as suas dependendo do contexto em que é utilizada. Segundo Taschetto e Duarte (2015), para este filósofo, existem jogos de linguagem, e estes estão articulados com as possibilidades de seus usos, nas formas de vida. Tal condição inviabiliza a possibilidade de afirmação de uma linguagem universal, ideal (Taschetto e Duarte, 2015, p. 191).

Os jogos de linguagens para Wittgenstein é o conjunto das articulações linguísticas usadas em nossa comunicação verbal ou não, esses jogos variam de acordo com a situação em que a linguagem é usada. Numa roda de conversa entre amigos, há um jogo de linguagem envolvido, na produção de um texto acadêmico, assim como há um jogo de linguagem em uma sala de aula na explicação de um teorema tanto no enunciado, que utiliza um jogo de linguagem, quanto na demonstração, que utiliza outro jogo de linguagem.

Wittgenstein compara a linguagem a um jogo. Todo jogo possui suas regras próprias, assim o uso da linguagem também é como um jogo possuindo suas regras. Nesse sentido um aspecto importante passa a ser levado em consideração, o vocabulário do usuário da linguagem. Quanto maior seu vocabulário e compreensão de mundo, maior será sua compreensão de determinados jogos de linguagens e melhor será sua articulação nos mais variados jogos de linguagem, assim como também ocorre o inverso, quanto menor seu vocabulário e entendimento sobre o mundo, menor as chances de ter uma melhor compreensão nos jogos de linguagens e articulações nesses jogos. Para Gottschalk (2004):

[..]com o conceito de "jogo de linguagem" Wittgenstein lança luz sobre relações de nossa linguagem, ao utilizar jogos como objetos de comparação, ou seja, através de suas semelhanças e diferenças, chama a atenção para os diferentes usos de nossos conceitos em nossas formas de vida sem recorrer a entidades extralinguísticas. São os próprios jogos de linguagem que constituem as relações de significação básica

(denominação) e são, portanto, os elos entre linguagem e realidade. Assim, o suposto abismo entre regras e sua aplicação é transposto por nossas práticas, *dentro de um jogo de linguagem* (Gottschalk, 2004, p. 319).

Essa concepção wittgensteiniana de jogos de linguagem, passa a dar à linguagem um caráter não apenas referencial, de informar ou referenciar algo. A palavra terá um sentido dependendo dos jogos em que ela está inserida. Exemplo: O triângulo na Matemática significa: polígono que possui três lados; enquanto no trânsito, pode ter diferentes significados como: um dispositivo de emergência que deve ser usado quando o veículo não pode andar; placa triangular invertida com fundo branco e borda vermelha que significa "dê a preferência" e um sinal de advertência que alerta os motoristas para condições perigosas à frente.

Nesta perspectiva, A linguagem para Wittgenstein depende do contexto em que a palavra estar sendo utilizada. Mudando o contexto o significado muda, o jogo muda. Essa compreensão é fundamental para o professor, pois o ensino deve levar em consideração o jogo de linguagem daquele momento. Ora, se eu falo o enunciado do Teorema de Tales, que envolve retas, paralelismo e proporcionalidade, em resumo, vários jogos de linguagens, eu preciso que o aluno compreenda esses jogos para só, enfim, eu representar esse enunciado verbal de uma outra forma, outro jogo de linguagem, a demonstração, nesse caso um jogo de linguagem simbólico. Nesse sentido Silveira e Silva (2019) afirmam que:

Wittgenstein compara os usos da linguagem com os diversos uso de um conjunto de ferramentas: as ferramentas guardam semelhanças entre si, mas cada uma tem sua função. Tal analogia visa evidenciar que a linguagem, semelhante a uma caixa de ferramentas, é usada para diferentes propósitos e não possui uma finalidade única. Os diversos contextos de aplicação nos quais a linguagem está inserida são chamados por Wittgenstein de *jogos de linguagem* (Silveira e Silva, 2019, p.84).

Na “segunda fase”, Wittgenstein aponta uma espécie de dissolução da lógica na linguagem, optando pela utilização do termo jogos de linguagens. Nessa perspectiva, o significado não seria mais estabelecido pela forma como é proposto conceitualmente, mas pelo uso que se faz das palavras, dos significantes, no interior de determinado contexto. Assim, em múltiplos contextos, a maneira como as palavras passam a ser empregadas é que torna uma série de distintas conotações possíveis – o que se torna perceptível quando afirmamos, por exemplo, que o significado de uma palavra emerge a partir de seu uso na linguagem. Segundo Silveira (2005), a ideia de:

Os jogos de linguagem de Wittgenstein contribuiu para a análise do relacionamento da matemática, do professor de matemática e do aluno, no contexto de sala de aula. É na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade da criação matemática. A demonstração feita pelo professor não é suficiente como técnica de ensino, ela sozinha não fornece uma explicação (Silveira, 2005, p.16)

Nesse sentido, é importantíssimo beber dessa fonte e ter a compreensão sobre o que a ideia de jogos de linguagem nos mostram. A compreensão sobre o Teorema de Tales e de Pitágoras perpassa pelo domínio dos jogos de linguagem que envolvem este saber. Vê esses teoremas em seus enunciados e demonstrações e compreender que envolve múltiplas articulações de jogos de linguagem pode potencializar o ensino e a aprendizagem. Logo, as possibilidades de abordagem desses teoremas, lançando-se mão das ideias de jogos de linguagem tende a um desdobramento sobre a avaliação da aprendizagem, abrindo novos horizontes sobre o olhar do professor frente ao seu ensino e o retorno do aluno enquanto aprendizagem.

4.2 O SEGUIR REGRAS EM WITTGENSTEIN

Segundo Sartori e Duarte (2021, p. 32), Todas as proposições matemáticas são gramaticais. A regra que advém da definição de triângulo caracteriza sua utilidade dentro do jogo de linguagem da matemática. Uma palavra só admite significado quando operamos e fazemos uso dela. A palavra triângulo pode ainda adquirir outros significados.

Para Gottschalk (2024, p. 321), o triângulo pode ser entendido como uma placa de trânsito, pertencente a um conjunto de regras que nos obriga a dirigir um automóvel em conformidade com elas. Podemos também associar essa palavra a um determinado timbre musical, característico dos instrumentos metálicos. Já dentro do jogo de linguagem da geometria euclidiana esta palavra designa uma figura geométrica definida através de termos característicos desse jogo de linguagem termos primitivos do sistema axiomático da geometria euclidiana.

A ideia de seguir regras segundo Wittgenstein está trelada aos jogos de linguagem. Suponhamos que um aluno leia os enunciados e as demonstrações do Teorema de Tales e de Pitágoras. Suponhamos também que procure resolver situações ou exercícios que exijam a aplicação destes teoremas. Seguindo este raciocínio, podemos deduzir que se o aluno compreendeu totalmente, conseguirá aplicar os teoremas porque compreendeu a regra ali atrelada aos jogos de linguagem. Se ele compreendeu parcialmente ou não compreendeu o que leu, terá inúmeras dificuldades de aplicar esses jogos de linguagem por não compreender ali a regra jogada.

Para Wittgenstein (2009, p. 45), “a regra pode ser um recurso de instrução no jogo. Ela é transmitida ao aprendiz e sua aplicação é treinada”. No caso da resolução de situações que

envolvam o Teorema de Tales e o de Pitágoras. O aluno que compreendeu os teoremas e soube aplicar as regras na solução das situações e exercícios, compreendeu a regra jogada nesse jogo de linguagem. O que aprendeu parcialmente e não compreendeu precisa ser ensinado como essas regras são articuladas nesse jogo de linguagem. Nesse caso a regra precisa ser treinada para que este aluno consiga compreender. Isso porque esses conhecimentos matemáticos possuem regras. Logo para se ter um domínio sobre eles, é necessário que se compreenda a regra ali acordada nesse jogo de Linguagem.

Para Wittgenstein, a compreensão de uma regra é uma habilidade que se domina por meio do treino e da aplicação de uma técnica. Logo, o ensino dos teoremas segue uma sequência lógica envolvendo os jogos de linguagem e a regra ali acordada, nesse sentido é preciso seguir a regra para que se haja aprendizagem. Para Silveira et al. (2017, p. 468), “é preciso que a linguagem do professor esclareça o significado dos símbolos matemáticos, bem como as regras que governam os textos matemáticos.” Essa tradução da linguagem matemática, da regra que envolve o jogo de linguagem de determinado conhecimento pode proporcionar de fato o aprendizado, caso contrário as incompreensões e os conflitos linguísticos persistirão.

Uma analogia bem conhecida de Wittgenstein, para falar de regra, é o jogo de xadrez. Se o jogo de xadrez for apresentado a alguém e essa pessoa não conhece as regras do jogo, essas regras devem ser ensinadas e treinadas, demonstrando-se como se joga o jogo de xadrez. Fazendo uma analogia com o Teorema de Tales e de Pitágoras, precisa-se mostrar as regras desse jogo de linguagem. O aluno conhecendo a regra dos jogos de linguagem do Teorema de Tales e de Pitágoras mais o treino desse jogo de linguagem seguindo a regra gera o aprendizado deles. Caso o aluno não compreenda a regra do jogo de linguagem nesse jogo, jogado, seu treino fica comprometido e esse aluno terá inúmeras dificuldades de compreender o Teorema de Tales e de Pitágoras. “*O jogo de linguagem é a analogia entre o jogo e a linguagem, e só pode jogar aquele que conhece as regras do jogo que está praticando*” (Wittgenstein, 1989, p. 122, apud Silveira et al. 2017).

Segundo Wittgenstein (2009, p. 61) uma regra está aí como uma placa de orientação Wittgenstein acreditava que compreender uma regra não era um fenômeno puramente mental, mas sim como uma prática social. Wittgenstein também acreditava que é impossível falar de uma linguagem privada, pois o que se aprende não é uma palavra que designa uma coisa, mas um conjunto de regras sociais para cada uso que fazemos da linguagem. Essa compreensão dos desdobramentos da linguagem gera inúmeros questionamentos no ensino, principalmente para o ensino da matemática.

4.3 O TREINO EM WITTGENSTEIN

Segundo Silveira e Silva (2019, p. 121), seguir uma regra pode envolver um processo de reflexão. Porém, Wittgenstein afirma que, quando estamos adestrados ao uso da regra, seguimos a regra sem refletir. Podemos perceber esta afirmação quando, por exemplo, aprendemos a dizer uma nova palavra. Nas primeiras vezes que a pronunciamos podemos ter certas dificuldades, inclusive em manter certa coerência com aquilo que dizemos. Muitas vezes, buscamos o significado de tal palavra no dicionário para sabermos empregá-la bem. Com o passar do tempo, temos condições de dizê-la sem mais consultar o dicionário. Este fato explica que após o treino – o uso da palavra em diferentes contextos – não precisamos mais refletir para empregá-la adequadamente, pois já conhecemos seu significado. Isto não exclui, entretanto, dúvidas em novos contextos de uso.

Para Gottschalk (2004, p. 332), as implicações educacionais de todas essas perspectivas têm como denominador comum a ojeriza de se ensinar através do *treino*, pois segundo todas elas os objetos matemáticos devem ser construídos *espontaneamente* pelos alunos ao longo das interações sociais ou com o mundo físico. No entanto, como vimos, a espontaneidade do aprendizado, o *fazer sem pensar*, só é possível através de um treino, pois quando passamos a negociar significados já intervém o ensino que recorre às *explicações*. Neste segundo momento, já não há mais um aprendizado “espontâneo” ou natural, mas sim um aprendizado que depende da *vontade* do aluno em aceitar ou não as razões e justificativas do professor. Acreditar que o processo de aprendizagem se reduza a apenas ao segundo momento revela uma atitude de certa forma ingênua de todas essas perspectivas construtivistas, principalmente na área de matemática, uma vez que o treino nesse jogo de linguagem é *condição* de significação.

Wittgenstein em sua filosofia aborda o treinamento, ou treino, não como um processo de transmissão de regras abstratas, mas como uma imersão em jogos de linguagem dentro de uma forma de vida. Nesse sentido o aprendizado ocorreria através da participação ativa e da prática contextualizada, onde a compreensão emerge do uso da linguagem em situações específicas, e não apenas da compreensão teórica. Importante essa ideia, pois se eu apresentar o enunciado do Teorema de Tales e demonstrar, não necessariamente estaria gerando ensino, tampouco aprendizagem. Agora se o aluno for envolvido nesses jogos de linguagem, regras e treinando o Teorema de Tales nas mais diversas situações em que pode ser aplicado, a possibilidade de aprendizado se tornaria mais concreta.

Para o ensino do Teorema de Tales e de Pitágoras, ou para a articulação desses jogos de linguagem, o treino é fundamental, pois é quem fundamentará e dará sentido ao saber envolvido no Teorema de Tales e de Pitágoras. O treino em variadas situações proporcionará o entendimento da regra envolvida. Nesse sentido Silveira e Silva (2019) argumentam que:

Uma regra matemática seja aprendida é preciso que esta seja considerada em diferentes contextos de aplicação, pois é no seu uso em meio a outras regras matemáticas que podemos encontrar o seu significado, ou seja, é necessário um uso constante e variado. Wittgenstein chama esse uso de treino. A função do treino é a conquista de uma autonomia do aluno, tal quando for capaz de seguir uma regra “sem refletir” (Silveira e Silva, 2019, p. 121).

Importante a compreensão de treino em Wittgenstein, uma vez que passamos a observar o saber sobre outra ótica, de que não será ensinado e sim treinado. Isso faz muita diferença, uma vez que eu passo a compreender que quando estou ensinando um saber estou apenas reproduzindo uma ideia que necessariamente pode não ser compreendida. O aprendizado só ganha vida na medida que eu convido esse aluno a refletir esse saber analisando sua estrutura, jogos de linguagem, regra e assim treinar esses elementos para o domínio desse saber. A seguir uma outra ideia de Wittgenstein será abordada, o *ver como*.

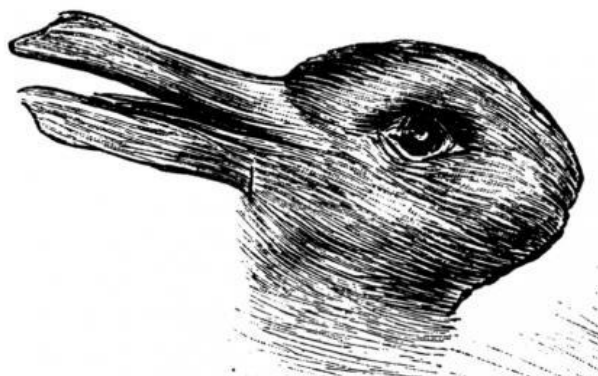
4.4 O VER COMO EM WITTGENSTEIN

Outro conceito importante em Wittgenstein é o *ver como*, sendo este um processo de percepção, entendimento sobre algo. Uma aula explicativa ou ilustrativa pode gerar diferentes percepções, mesmo na matemática. Isso é um fator que requer por parte de um autor de um livro didático ou professor, atenção a cerca desse aspecto. A apresentação de uma regra de um determinado jogo de linguagem a alguém gera um determinado entendimento, *ver como*, que é particular, pode convergir ou não com o que se está tratando. Para Silva e Silveira (2019):

O *ver-como* depende do domínio de técnicas, que em geral não são óbvias, mas que precisam ser aprendidas. Uma regra, por si só, não comporta suas aplicações, ela não nos diz quando, aplicá-la. Em geral, não nos são óbvias novas possibilidades de aplicação de uma regra que dominamos em determinado contexto (Silva e Silveira, 2014, p. 29)

Para ampliarmos a compreensão do *ver como* em Wittgenstein, utilizaremos a clássica figura do Pato-lebre de Jastrow (1901). É uma figura simbólica que permite compreender a ideia do *ver como*. Nessa figura, dependendo do olhar, poderemos observar dois animais, ora se vê um pato, ora se vê uma lebre. Isso dependerá se quem observa conhece o que é um pato ou o que é uma lebre.

Figura 3 - lebre-pato



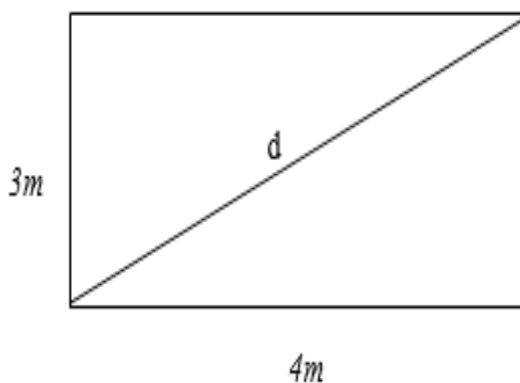
Joseph Jastrow (1901).

Segundo Dias (2023):

A aplicação do *ver* presente nas *Investigações Filosóficas* no uso da figura pato-lebre busca esclarecer que para *ver* imediatamente a figura como pato é necessário conhecer os conceitos que perpassam essa figura, em que quem *vê* consegue descrever suas características, comparar com outros patos, etc., e para *ver* o pato *como* lebre, há de acontecer um espanto (Uma lebre!), e assim também conhecer os conceitos de lebre e fazer conexões entre os conceitos primeiros e o novo conceito, seria o *ver* sob outro aspecto conceitual, realizando comparações, mostrando semelhanças (Dias, 2023, p. 82).

Na Matemática o *ver* como ganha uma importância fundamental na questão do aprendizado do aluno, uma vez que o seu *ver* como pode não está convergindo com os jogos de linguagem e a regra treinada, por exemplo, na explicação do Teorema de Tales ou o de Pitágoras. Supomos que seja pedido a um aluno para encontrar a diagonal de um retângulo, com medidas específicas, através do Teorema de Pitágoras, exemplo: Calcule a diagonal do retângulo a seguir, com as medidas descritas na figura.

Figura 4 – A diagonal de um retângulo



Fonte: O autor

Para um autor de livro de Matemática ou para o professor de matemática, é óbvio, que a diagonal do retângulo “gere” dois triângulos retângulos simétricos e, assim se aplicaria no retângulo o Teorema de Pitágoras, da seguinte forma: elevar-se-ia os catetos, comprimento e largura, ao quadrado, somar-se-ia os resultados e depois, extrair-se-ia a raiz. Porém, para o aluno, talvez ele nem veja um triângulo nessa relação de jogos de linguagem e assim não consiga aplicar a igualdade. Isso ocorre porque para ele não é óbvio, porém se for ensinado, talvez aprenda. Para Dias (2023. p. 83), “um *ver* seria imediato, enquanto o *ver como* aconteceria quando há a percepção da semelhança por meio da conexão dos conceitos primeiros com novos conceitos.” Essa percepção do *ver* imediato e o *ver como* é um intervalo que pode gerar ou não aprendizagem do aluno. Ainda segundo Dias (2023):

Quem nós dizemos que o vê o triângulo ora assim, ora de outro jeito, é alguém que declara isso de si mesmo, que profere ou ouve essas palavras dando sinais de que as entende; mas também que diz, por exemplo, “Agora o triângulo está apontando para esta direção, antes ele apontava para a outra”, e que, quando questionado sobre se o triângulo teve sua forma ou posição alterada, responde: não se trata disso e assim, por diante (Wittgenstein, 2008, p. 18, apud Dias, 2003, p. 84).

No caso acima é importante a dinâmica dos jogos de linguagem em situações variadas, *treinos*, para que o *ver como* do aluno possa aplicar o teorema nas mais diversas possibilidades. Se ensinar o teorema, apenas em situações limitadas, e esperar que os alunos tenham esse *ver como* em outras situações, logicamente seria o ideal, porém não é o que se percebe na prática. O triângulo retângulo pode aparecer em diversas situações e, são nessas situações que ele deve ser abordado. Se ensinado isoladamente, e depois esperar que seja visto em determinadas situações pode não se concretizar. Segundo Silva et al. (2015):

Quando estamos ensinando a respeito dos triângulos, desenhamos a figura de tal maneira e instruímos os alunos a ver o desenho de pontos de vista diferentes: dizemos que isto é a base e aquilo é o vértice; de outro ponto de vista, tomamos agora isto *como* vértice e aquilo *como* base. Dessa forma o aprendiz vê a figura de maneiras diferentes e vai aprendendo a aplicar o conceito de triângulo em diferentes situações (Silva, 2015. p.04).

Poderíamos refletir sobre inúmeras formas de abordagem do conhecimento matemático. A linguagem matemática de determinado saber ao ser “traduzido” precisa atentar para os conhecimentos prévios necessários a este saber. A construção do conhecimento matemático precisa ser claro ao aluno de que não é isolado. Difícil dominar o Teorema de Pitágoras sem dominar algebricamente equação e a ideia de área. O Teorema de Tales precisa dos conceitos primitivos da geometria: Ponto, Reta e Plano, além da ideia de paralelismo e proporcionalidade.

Os *jogos de linguagem, a regra, o treino e o ver como*, são importantes ideias com as quais podemos refletir o ensino da matemática sob a perspectiva da linguagem. As inúmeras linguagens que imbricam o Teorema de Tales e o de Pitágoras precisam ser claras aos alunos. O aprendizado pode ser efetivo dependendo dessa abordagem linguística que esclareça por que desses jogos de linguagem dos teoremas, treinar a regra sob diferentes aplicações, permitir ao aluno refletir e argumentar. Assim, o conhecimento pode seguir um percurso semelhante a construção desses teoremas.

No próximo capítulo, serão abordados a construção histórica do Teorema de Tales e o de Pitágoras, além de uma contextualização do tempo em que viveram Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. Ter a compreensão do caminho linguístico que esses teoremas tiveram e das contribuições que outros matemáticos deram em seus aperfeiçoamentos, fortalecem ainda mais a importância que devemos ter com relação ao aspecto linguístico do conhecimento e como articular essa linguagem no seu ensino.

5. TALES DE MILETO E PITÁGORAS DA SAMOS

Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, são classificados para fins de estudos filosóficos como filósofos pré-socráticos, que viveram na Grécia Antiga entre os séculos VI e V. Os filósofos pré-socráticos foram os primeiros pensadores gregos a buscarem explicações racionais para a natureza e o mundo, em contraste com as explicações mitológicas da época. Eles se concentraram em investigar a *physis* (natureza) e buscar a *arché*, o princípio primordial de todas as coisas.

Para Boyer (1974), o mundo grego por muitos séculos teve seu centro entre os mares Egeu e Jônico, mas a civilização helênica não estava só localizada ali. Em 600 A. C. Colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo e foi nessas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na matemática. Para isto os colonistas da beira-mar, especialmente na Jônia, tinham duas vantagens: tinham o espírito ousado e imaginativo típico de pioneiros e estavam mais próximos dos dois principais vales de rio de que se podia extrair conhecimentos. Tales de Mileto (624-548 A.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 A.C. aproximadamente) tinha ainda mais uma vantagem: estavam em condições de viajar aos centros antigos de conhecimento e lá adquirir informação de primeira mão sobre astronomia e matemática. No Egito diz-se que aprenderam geometria; na Babilônia, sob o esclarecido governante caldeu Nabucodonosor, Tales provavelmente entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Diz a tradição que em 585 A.C. Tales assombrou seus contemporâneos ao predizer o eclipse solar desse ano. A veracidade dessa tradição é muito discutível, especialmente porque um eclipse solar é visível só em pequena parte da Terra e não é provável que houvesse na Babilônia tabelas de eclipses solares que permitisse a Tales fazer tal predição.

Ainda segundo Boyer (1974), Pitágoras é uma figura pouco menos discutida que Tales, pois foi mais completamente envolto em lenda e hipótese. Tales era um homem de negócios, mas Pitágoras era um profeta e um místico nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar do nascimento de Tales. Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades. Alguma semelhança nos seus interesses pode ser facilmente explicada pelo fato de Pitágoras ter também viajado pelo Egito e Babilônia.

Figura 5 - Mapa



Fonte: Eves, 2011 p. 130

Interessante ressaltar aqui, na antiguidade Samos e Mileto eram cidades rivais envoltas a conflitos, em um desses conflitos, Atenas interveio em uma guerra entre Samos e Mileto e, para apoiar Samos, derrubaram o governo oligárquico de Mileto. Esse episódio acirrou ainda mais as relações entre Atenas e Esparta que se guerreavam no que ficou conhecido como Guerra de Peloponeso.

Nos tempos clássicos, o Mediterrâneo era o centro do mundo ocidental, uma vasta rede de civilizações que se estendiam da Europa à África e à Ásia Menor, incluindo os gregos, fenícios e romanos. A região era usada para o transporte, comércio e intercâmbio cultural, sendo fundamental para a expansão e o contato entre esses povos, tanto que os romanos o chamavam de "Mare Nostrum" (Nosso Mar)

Figura 6 - Gregos dos tempos clássicos

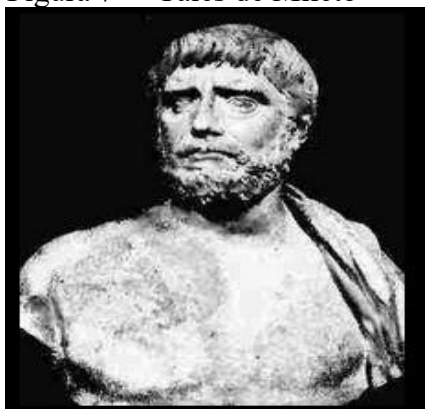
Alguns nomes gregos dos tempos clássicos		
Anaxágoras	Eudoxo	Papus
Antífon	Eutócio	Platão
Apolônio	Filolao	Polícrates
Arquimedes	Filon	Proclo
Arquitas	Herão	Ptolomeu
Aristeu	Hiparco	Pitágoras
Aristarco	Hipaso	Simplicio
Aristóteles	Hípias	Sócrates
Cônon	Hipócrates	Sólon
Demócrito	Hipátia	Tales
Dinostrato	Hipsicles	Teteto
Dioclés	Jâmblico	Teodoro
Diofanto	Menaccmo	Teodósio
Dositeu	Menelau	Têon
Eratóstenes	Metrôdoro	Timaridas
Euclides	Nicômaco	Xenócrates
Eudemo	Nicomedes	Zenão

Fonte: Eves, 2011 p. 131

Os principais filósofos gregos do Tempo Clássico (séculos V e IV a.C.) são Sócrates, Platão e Aristóteles, que focaram o pensamento filosófico no ser humano, na ética, na política e na sociedade. Outros filósofos importantes desse período incluem os sofistas (como Protágoras e Górgias), que se dedicaram à retórica e à argumentação, e Anaxágoras, que fez contribuições importantes à astronomia e à cosmologia. Tales e Pitágoras também são deste período clássico, e suas contribuições para a matemática são notórias.

5.1 TALES DE MILETO

Figura 7 - Tales de Mileto



Fonte: <https://www.pucsp.br/pos/cesima/schenberg/alunos/gustavopacheco/Tales%20de%20Mileto.htm>

Tales de Mileto, da era pré-socrática, descendente de fenícios, foi um destacado filósofo, astrônomo e matemático, nascido na Grécia, por volta do ano 624 a.C. - 558 a.C. Tales utilizou em seus estudos, os conhecimentos que sabia acerca de Geometria e proporcionalidade cujo objetivo foi determinar a altura de uma dada pirâmide. O Teorema de Tales segundo vários autores, tem sua origem ligada à resolução de problemas práticos envolvendo paralelismo e proporcionalidade, concentra-se na relação entre o geométrico e o numérico. Por isso, esse teorema significa muito na teoria da semelhança e consequentemente na trigonometria, onde justifica as definições de seno, cosseno e tangente de dado ângulo. Na Geometria espacial, o Teorema de Tales, aparece ao tratar das secções por um plano paralelo à base.

O que se sabe de fato sobre a vida e obra de Tales é realmente muito pouco. Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 A.C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz-se que ele tinha 78 anos quando morreu. No entanto, as sérias dúvidas sobre a autenticidade da história do eclipse tornam tais extrapolações arriscadas, a abalam nossa confiança quanto às descobertas atribuídas a Tales. A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um Homem da rara inteligência e como o primeiro filósofo – por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios. (Boyer, 1974, p. 34).

Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas (Eves, 2011, p. 95).

5.2 O TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales como é apresentado nos livros didáticos, passou por aperfeiçoamentos ao longo da história. A primeira demonstração do Teorema de Tales, como é conhecido hoje, não foi formalmente registrado por Tales de Mileto. A demonstração foi resultado de observações e experimentos práticos. A Tales é creditada por ter utilizado o conceito de semelhança de triângulos para calcular a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, comparando o comprimento de sua sombra com o de um objeto vertical.

Figura 8 – A pirâmide



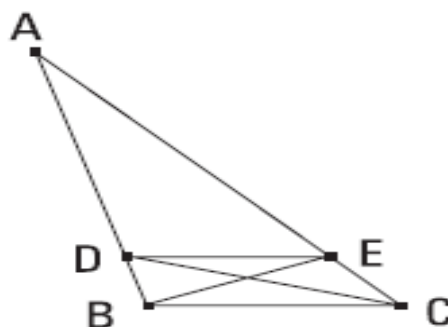
Fonte: <https://rodriguesdorea.wordpress.com/2020/07/29/teorema-de-tales/> 2025.

Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra quando esta era igual a altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide — isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (Eves, 2011, p. 115).

A ideia central de Tales que deu origem ao seu teorema, trata de proporcionalidades. A Tales muitos feitos foram atribuídos, como a de calcular a altura da pirâmide do Egito, a largura de um rio, a distância de um barco que se aproxima etc.), porém não se pode comprovar materialmente tais feitos. É possível que na época em que viveu Tales alguns conhecimentos já eram bem difundidos como as propriedades dos triângulos e a teoria da proporção que se baseia no resultado bem conhecido: se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em a e b são proporcionais.

O Teorema de Tales, que descreve a proporcionalidade entre segmentos formados por retas paralelas cortadas por transversais, aparece pela primeira vez na obra "Elementos" de Euclides, especificamente na Proposição 2 do Livro V: *Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo*. Apesar de levar o nome de Tales, a primeira demonstração formal do teorema foi feita por Euclides, cerca de três séculos após Tales de Mileto.

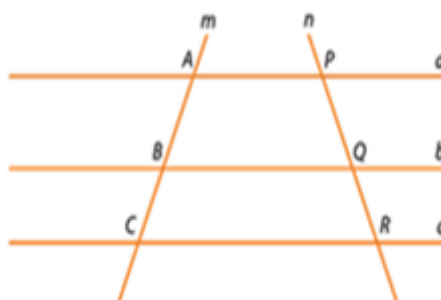
Figura 9 – Teorema de Tales segundo Euclides



Fonte: (Os elementos de Euclides, 2009, p. 233).

O enunciado do Teorema de Tales comum em livros didáticos de hoje, apresenta a seguinte linguagem: *duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma dessas transversais é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

Figura 10 – Parte da demonstração do Teorema de Tales



Fonte: Araribá Conecta Matemática (2022, p.135)

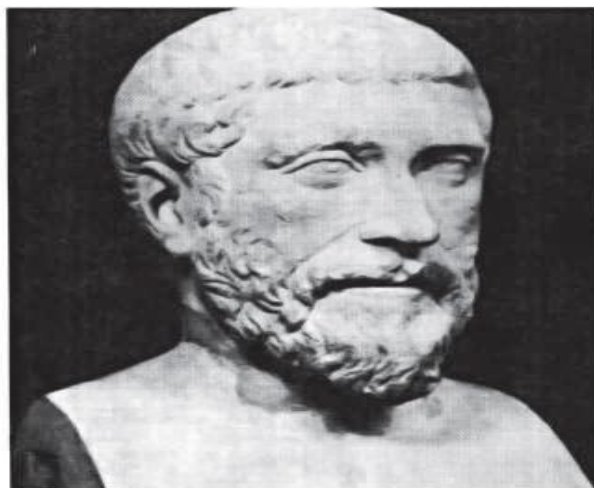
Seria interessante os livros relatarem que essa demonstração hoje bastante difundida, nem sempre foi dada desta forma. Não há um registro formal deixado por Tales sobre seu teorema, isso reforça que a compreensão de suas ideias sobre paralelismo e proporcionalidade são uma construção histórica feitas também por outros matemáticos e estudiosos do assunto. Importante também ressaltar a importância de Tales na abordagem inicial de procurar demonstrar este teorema, mesmo que de forma verbal. Essa construção histórica mostra o quanto a linguagem que envolve este teorema foi aprimorada ao longo da história. Reforçando minha ideia de que o Teorema de Tales precisa ser abordado como uma construção histórica.

5.3 PITÁGORAS DE SAMOS

Pitágoras nasceu em Samos, uma ilha próxima a Mileto. Reza a lenda que ele tinha muito de profeta e místico, pois foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-

Tsé. A localização geográfica permitiu a Pitágoras condições de viajar aos centros antigos do conhecimento onde teve contato com obras originais sobre astronomia, matemática e outros campos do conhecimento daquela época. No Egito aprendera geometria e na Babilônia teve contato com tabelas e instrumentos astronômicos.

Figura 11 – Pitágoras de Samos



Fonte: Coleção David Smith

Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Depois parece que residiu por algum tempo no Egito e pode mesmo ter-se abalçado a viagens mais extensas. Ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa; decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá ele fundou a famosa escola pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Com o tempo, a influência e as tendências aristocráticas da irmandade tornaram-se tão grandes que forças democráticas do sul da Itália destruíram os prédios da escola fazendo com que a confraria se dispersasse. Segundo um relato, Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu, talvez assassinado, com uma idade avançada entre 75 e 80 anos de idade. A irmandade, embora dispersa, continuou a existir por pelo menos mais dois séculos. (Eves, 2011, p. 98).

Pitágoras permanece uma figura muito obscura isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, inclusive uma de Aristóteles, mas se perderam. Uma outra dificuldade de caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era

comunitária além de secreta. Conhecimento e propriedades eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras, mas antes das contribuições dos Pitagóricos. (Boyer, 1974, p. 36).

O enunciado mais famoso associado ao nome de Pitágoras é o teorema que estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.” Hoje se sabe que essa relação era conhecida por diversos povos mais antigos do que os gregos e pode ter sido um saber comum na época de Pitágoras. No entanto, não é nosso objetivo mostrar que os pitagóricos não foram os primeiros na história a estabelecer tal relação. O objetivo é investigar de que modo esse resultado podia intervir na matemática praticada pelos pitagóricos, com as características anteriormente descritas. Ainda que a história do Teorema de Pitágoras tenha começado muito antes da civilização grega, foi na Grécia que ele foi estudado de forma mais generalista e foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração do teorema. (Roque, 2012, p. 95).

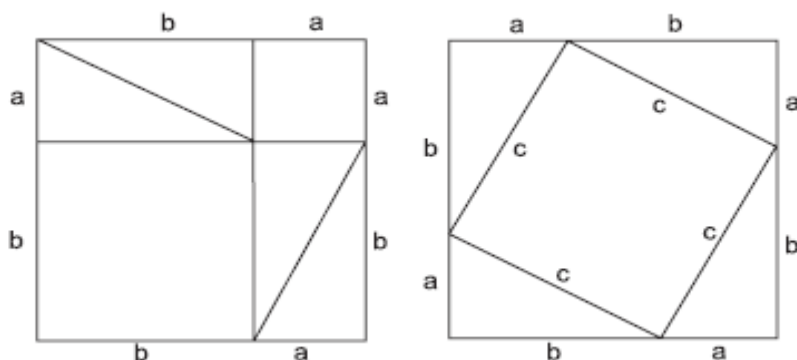
5.4 O TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras, historicamente é contestado sobre sua autoria, porém é inegável a contribuição de Pitágoras de Samos por sua sistematização e estudo formal. A história do teorema de Pitágoras começa muito antes da própria civilização grega, porém foi na Grécia que ele foi estudado de forma mais generalista.

A tradição é unanime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome - *que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados sobre os catetos*. Esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras. Muitas conjecturas têm sido feitas quanto a demonstração que Pitágoras poderia ter dado, mas ao que parece foi uma demonstração por decomposição como a que se segue. Denotemos por a , b e c os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideremos os dois quadrados, cada um de lados iguais a $a + b$. O primeiro quadrado está decomposto em seis partes – a saber, os dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes – a saber, o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. Subtraindo-se iguais

de iguais, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. (Eves, 2011, p. 103).

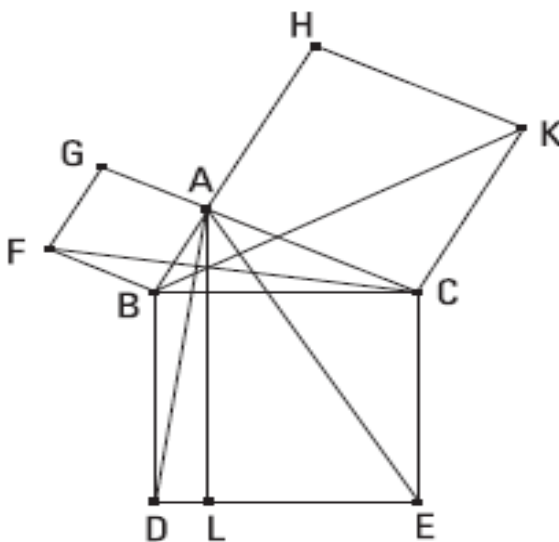
Figura 12 – Demonstração por decomposição do Teorema de Pitágoras



Fonte: (Eves, 2011, p. 103).

O Teorema de Pitágoras foi demonstrado também na Proposição 47 do Livro I dos Elementos de Euclides. Esta proposição afirma que: *nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.*

Figura 13 - Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides



Fonte: (Os elementos de Euclides, 2009, p. 133).

O Teorema de Pitágoras é o mais conhecido e demonstrado mundialmente. Como dito antes, o livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, contém a compilação de diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Loomis colecionou, de 1907 a 1927,

demonstrações desse teorema e as agrupou em seu livro. Na primeira edição, de 1927, continha 230 demonstrações, e a segunda edição, publicada em 1940, chegou a 370. Atualmente, o número de demonstrações conhecidas se aproxima de 400, porém não compilada em um único livro. O livro de Loomis é uma referência clássica sobre o assunto e abrange demonstrações geométricas e algébricas, dividindo as provas em categorias como comparações de áreas e relações métricas. Além disso, o livro é uma fonte importante para quem busca conhecer a história e a evolução do Teorema de Pitágoras.

Não há um registo formal sobre a demonstração feita pelo próprio Pitágoras ou o tempo que ele levou para formular esta demonstração. Provavelmente a demonstração tenha sido a de comparar as áreas dos catetos e a área da hipotenusa de um triângulo retângulo. Outro aspecto relevante a ser comentado que o teorema antes de Pitágoras era mais similar a uma técnica de resolução de um problema específico, o caráter sistemático é dado por Pitágoras, posso dizer sem sombra de dúvidas que o conhecimento em si, existia antes de Pitágoras, porém este além de sistematizar o divulga dentro de suas possibilidades.

Tales e Pitágoras, mesmo sem muitos registros históricos sobre os mesmos, tem seus nomes cravados na construção histórica da matemática. Em uma época sem os recursos tecnológicos que temos hoje, procurarem sistematizar em uma linguagem, conhecimentos que atravessaram o tempo e com importâncias diretas no desenvolvimento da Álgebra e Geometria, são dignos de estarem entre os grandes matemáticos.

No capítulo a seguir, se refletirá as dificuldades discentes frente ao aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras. O objetivo não é questionar o resultado apresentado na dissertação de mestrado de Bastian (2000), o artigo científico de Pereira, Couto e Costa (2016) e a dissertação de mestrado de Pessanha (2017), porém, verificar nelas quais dificuldades dos alunos podem ter reflexos na linguagem dos teoremas.

6. AS DIFICULDADES DISCENTES NO APRENDIZADO DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS

O presente capítulo aborda as dificuldades discentes no que tange ao aprendizado do Teoremas de Tales e o de Pitágoras. Dizer que os alunos apresentam dificuldades na compreensão destes teoremas não é o suficiente, pois nos perguntaríamos e quais são essas dificuldades de aprendizado dos tais teoremas? A resposta obviamente não é tão simples, porém há caminhos para a compreensão do porquê os alunos não aprenderem. Isto é decorrente de inúmeros fatores, um destes fatores é a linguagem, ou a não compreensão da linguagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras. Sobre isso Bastian (2000), observa que:

Alguns dos erros praticados pelos alunos quando da aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser provocados por fatores próprios da interpretação de problemas geométricos concernentes à apreensão operatória, tais como: fenômeno da não congruência entre enunciado $\leftrightarrow$ figura ou figura $\leftrightarrow$ Teorema de Pitágoras; obstáculo do desdobramento de objetos; interferência da rotação do triângulo no reconhecimento das unidades elementares (catetos e hipotenusa); fundo reticulado mascarando o caminho de resolução do problema (Bastian, 2000, p. 11).

A maioria das pesquisas são direcionadas a demonstrações do Teorema de Tales e o de Pitágoras. Como meu foco é o aprendizado e não a demonstração por demonstração, as possibilidades de encontrar pesquisas focadas no aprendizado são menores. O interesse no aprendizado do aluno ocorre justamente pelas inúmeras aplicações do Teoremas de Tales e o de Pitágoras, as demonstrações serão possibilidades decorrentes deste aprendizado.

Neste sentido, compreender os jogos de linguagem que envolve o Teorema de Tales e o de Pitágoras para o aluno pode ser o caminho de aprendizado deles, uma vez que a compreensão de todos os elementos que envolvem estes teoremas passa a ser compreendido, e não, decorado. Uma vez compreendido, o aluno poderá aplicá-lo nas mais diversas situações, uma vez decorado, o aluno, talvez, só aplicará em uma situação semelhante a treinada.

No decorrer desta pesquisa, deparei-me com três trabalhos que abordam o aprendizado do Teorema de Tales e o de Pitágoras. Dois trabalhos são dissertações de mestrado, com materiais riquíssimos para análise. A dissertação de mestrado de Bastian (2000), o artigo científico de Pereira, Couto e Costa (2016) e a dissertação de mestrado de Pessanha (2017). São trabalhos não direcionados a linguagem em Wittgenstein, porém com resultados que podem ser analisados aos olhos da linguagem e de conceitos filosóficos em Wittgenstein.

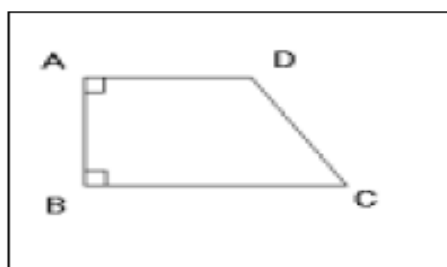
A seguir discorrerei sobre a pesquisa de Bastian (2000), O Teorema de Pitágoras, a julgar apenas pelo título, aparentemente mostra ser uma pesquisa que estaria voltada para a

construção e demonstração do teorema, contexto histórico e os rigores matemáticos, porém, não, é uma pesquisa ampla que mostra também as dificuldades dos alunos quando o assunto é Teorema de Pitágoras. Bastian foi orientada do professor Saddo Ag Almouloud e a base teórica de sua pesquisa é a Didática da Matemática.

6.1 A PESQUISA DE BASTIAN (2000)

A pesquisa de Bastian (2000), apresenta um material robusto que pode ser fonte de inúmeras pesquisas e um norte para a construção de um material didático voltado para o ensino do Teorema de Pitágoras. O embrião da pesquisa de Bastian (2000), é uma outra pesquisa da autora francesa Annie Berté (1995). Em sua pesquisa Berté fez um levantamento-diagnóstico e identificou os erros mais frequentes apresentados por alunos franceses. Segundo a pesquisadora, alguns dos erros citados por Berté (1995), foram:

1. utilização do teorema para calcular o terceiro lado de um triângulo não retângulo;
2. sendo c o comprimento da hipotenusa e a e b catetos, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, sem perceberem que essa conclusão contradiz a condição de existência de triângulo;
3. ao calcular um dos catetos, alguns alunos escrevem que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto;
4. os alunos escrevem essa relação corretamente (item 3), mas justificam dizendo que aplicaram o “recíproco” do Teorema;
5. na verificação para decidir se um triângulo é ou não retângulo, muitos alunos e mesmo alguns docentes (segundo Berté) afirmam ter aplicado o recíproco quando concluem que, se a relação não é verificada, o triângulo não é retângulo;
6. em classe do 3ème (alunos com aproximadamente 14 anos, o correspondente ao nosso 9º ano do ensino fundamental), foi proposto o seguinte exercício: “Dados AD, AB e BC, calcular DC”. Erro encontrado segundo o Teorema de Pitágoras, $DC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2$



Berté (1998, p. 119) questiona: “É um mau emprego da analogia? Ou o aluno não ‘viu’ o triângulo retângulo porque a projeção de D não figurava no desenho (...)”

Seguindo os passos da pesquisadora francesa, Bastian (2000), aplicou um questionário diagnóstico para alunos do 1º ano do ensino médio visando investigar as concepções dos alunos sobre o teorema de Pitágoras e verificar se alguns dos erros apontados na pesquisa de Berté (1995), seriam cometidos também pelos alunos brasileiros. Fato que realmente ocorreu, segundo o comentário feito por ela.

Na verdade, 14 alunos perceberam o triângulo retângulo, porém não conseguiram chegar à resposta em virtude de incorreções na transformação de unidades de comprimento ou na comparação no resultado obtido e a distância entre o teto e chão. Duas questões que exibiam configurações mais complexas apresentaram menor índice de acerto 23% para ambas (Bastian, 2000, p. 180).

Poderíamos traçar inúmeros comentários relacionados a estas pesquisas que apresentam dificuldades na compreensão do Teorema de Pitágoras, não só por alunos brasileiros como também franceses. Porém, a similaridade das dificuldades de alunos franceses e brasileiros corroboram com a possibilidade de estar havendo uma não compreensão linguística entre os jogos de linguagem que evolve o ensino do Teorema de Pitágoras, enunciado e demonstração, e o ver-como dos alunos, que talvez não tenham a preparação necessária para a compreensão do Teorema em si.

Uma outra questão é o treino, a abordagem em sala de aula. Para o aluno compreender o Teorema de Pitágoras ele precisa estar familiarizado com os elementos que envolvem esse Teorema. Não basta mostrar um triângulo, dizer que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa e acreditar fielmente que o aluno também terá esta compreensão de forma imediata. Sobre isso Berté (1995), observa que:

O Teorema de Pitágoras não é nada evidente. Portanto, a simples apresentação de sua fórmula não teria significado para o aluno, seria algo mais para “memorizar”. Por outro lado, fazer a verificação utilizando somente puzzles e colocando os resultados para a classe pode dar ao professor a falsa impressão de que ele proporcionou aos alunos uma chance para “agir”. Mas, na verdade, isso seria uma “institucionalização” prematura (Bastian, 2000, p. 22).

É importante também salientar aqui, a formação de professores que talvez não estejam contemplando de fato, um domínio sobre o conteúdo a ser ministrado por eles futuramente. Tal fato, torna-se relevante ser elencado, à medida que se esse professor, não domina com propriedade tal conteúdo; o trabalho de ensino acaba sendo comprometido, uma vez que ele trabalhará com linguagem matemática e com jogos de linguagens, que poderão ser ou não compreendido pelo aluno. Sobre tal colocação Almouloud (2007), faz os seguintes questionamentos:

Qual o nível de compreensão que professores da rede pública possuem a respeito desses processos matemáticos, como teoremas, provas e deduções? Os professores conseguem distinguir com clareza uma demonstração de uma generalização? (Almouloud, 2007, p. 01).

De fato, o professor precisa ter a compreensão do Teorema de Pitágoras e suas implicações para a aprendizagem dos alunos. A linguagem do Teorema de Pitágoras pode não ser clara ao aluno, ou ele pode não ter ainda, os elementos necessários para o domínio dessa linguagem. Neste caso, a intervenção dependerá do nível de aprendizagem destes alunos e dos mecanismos didáticos que serão utilizados nas atividades sobre Teorema de Pitágoras.

A pesquisa de Bastian (2000), foi dividida em duas etapas distintas. Na primeira etapa foi aplicado um questionário para alunos do 1º ano do Ensino Médio como o objetivo de se avaliar a aprendizagem desses alunos sobre o Teorema de Pitágoras. Sobre esse questionário Bastian (2000), explica que:

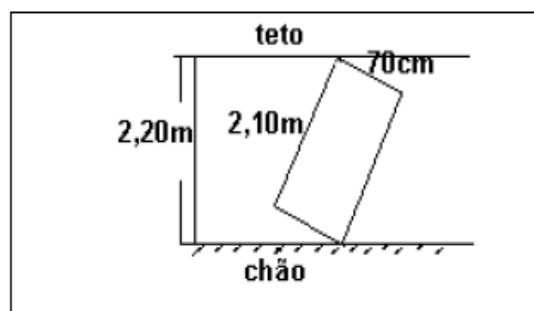
O teste foi aplicado, primeiramente, em uma turma constituída de 42 alunos de 1º colegial de uma escola estadual em São Paulo. Tratando-se de um colégio de 2º grau, agora nível médio, foi encontrada uma amostragem heterogênea, ou seja, cerca de 88% procediam de diversas escolas oficiais com qualidade de ensino bastante diversificada. Como consequência do elevado número de provas entregues totalmente em branco (50%), aplicou-se o teste em outra turma de 35 alunos de 1º colegial de uma escola particular da cidade de Santos, no Estado de São Paulo, em que havia apenas 15% de alunos oriundos de escolas públicas (Bastian, 2000, p. 91).

Deste questionário, trago a questão de número 06, por ser uma questão direta ao Teorema de Pitágoras e voltada para uma situação do cotidiano e que impactou na ideia de (Bastian, 2000, p. 97), cuja expectativa na análise a priori era de um número pequeno de soluções corretas, porém nenhum aluno conseguiu acertar.

Figura 14 – Questão

Questão 6) *Será que é possível colocar este armário em pé, isto é, na vertical?*

Suas dimensões são: altura = 2,10 m e profundidade = 0,70 m. Justifique a resposta.



Fonte: (Bastian, 2000, p. 98)

Figura 15 – Algumas respostas

Algumas respostas encontradas:

- 1) Não é possível colocar o armário em pé, pois a profundidade é menor que a altura e elas devem ficar mais ou menos na mesma proporção.
- 2) É possível, pois a altura do armário é 2,10 m e a altura da parede é de 2,20 m.
- 3) Sim, por 10 cm.
- 4) $2,10 \text{ m} \times 0,70 \text{ m} = 16,70 \text{ m}$.

Fonte: (Bastian, 2000, p. 99).

Como este questionário foi aplicado a alunos do ensino médio, supunha-se que os mesmos já tivessem tido contato com o Teorema de Pitágoras, porém, não é o que se observou. Como foi um questionário que buscava elementos para a continuidade da pesquisa de Bastian, podemos aferir que talvez os alunos não estivessem familiarizados com o Teorema de Pitágoras e assim não conseguiram associar a situação ao Teorema.

Seguindo seu trabalho de pesquisa, Bastian (2000), optou por aplicar uma sequência didática para alunos da 8ª série de uma escola estadual de São Paulo. Este teste piloto compreende as vinte atividades da sequência didática e daria um panorama de quantas aulas seriam possíveis para o seguimento da sequência didática. Se um resumo estratégico da sequência didática aplicada por Bastian (2000):

Figura 16 – Sequência didática

Atividade	
1	Condição de existência de triângulo
2	Ênfase para o caráter necessário e suficiente do Teorema de Pitágoras
3	Conjetura sobre a forma do Teorema, a partir da tema egípcia
4	Demonstração hindu por reconfiguração
5	Demonstração algébrica
6	Ênfase para o número mínimo de dados para a aplicação do Teorema
7	Relações métricas no triângulo retângulo a partir da demonstração de Euclides
8	Cálculo da medida da hipotenusa dadas as medidas dos catetos
9	Cálculo de medida de cateto dada a medida do outro cateto e da hipotenusa
10	Problema histórico (papiro do Cairo)
11	Problema da duplicação do quadrado
12	Justificação do “esquadro do pedreiro”

13	Altura de um triângulo isósceles; diagonal de um retângulo
14	Distância de dois pontos
15	Construção de segmentos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ a partir de a e b
16	Problema do cotidiano: área de telhado
17	Problema do cotidiano: altura de um caminhão x altura de um túnel
18	Problema do cotidiano: portal semicircular fechado com barras de ferro
19	Teorema de Pitágoras para resolver um “problema aberto”
20	Ternas pitagóricas

Fonte: (Bastian, 2000, p. 109).

Observa-se que com a aplicação da sequência didática, foi possível um resultado mais significativo em relação ao questionário aplicado aos alunos do 1º ano do ensino médio. Isso porque houve um contato maior com os alunos e com a abordagem do Teorema de Pitágoras. Permitindo-se saber o nível de percepção do Teorema de Pitágoras e intervenções a serem feitas.

Diante das constatações feitas no decorrer da experimentação e, posteriormente, por meio da avaliação individual, chega-se a algumas conclusões relacionadas às indagações iniciais. O fato de o aluno trabalhar previamente com a condição de existência de triângulo o auxilia a perceber que deve existir “algo mais”, isto é, alguma propriedade específica, no caso do triângulo retângulo. Assim, em vez de tomar conhecimento da igualdade pitagórica por meio de sua forma, como se observou nos livros didáticos analisados, o estudante tem a possibilidade de perceber sua utilidade e importância (Bastian, 2000, p. 180).

Observa-se também a linguagem adotada, direcionando a uma possibilidade maior de aprendizagem do Teorema de Pitágoras. Isso corrobora com minha ideia central de que a linguagem trabalhada no ensino do Teorema de Pitágoras pode ser um fator determinante para sua compreensão ou não. Bastian (2000); não entra no mérito da linguagem, porém, é notório o quanto a abordagem adotada no ensino do Teorema de Pitágoras pode ser um diferencial.

Os erros cometidos pelos alunos na aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser explicados como consequência da abordagem utilizada no processo ensino-aprendizagem, porém sem esquecer os fenômenos concernentes à apreensão operatória, reafirmando, assim, a segunda hipótese desta pesquisa (Bastian, 2000, p.181).

Na sequência didática aplicada por Bastian (2000), a atividade 10 cujo objetivo era o aluno visualizar o triângulo retângulo em uma situação descrita no Papiro do Cairo,

transformar o enunciado em uma igualdade algébrica e assim solucionar a questão. Observa nessa questão inúmeras situações, o jogo de linguagem relacionado a medida usado na antiguidade, o Teorema de Pitágoras, que até então ainda não era um teorema, e sim uma técnica de solução e, se o aluno possui subsídios teóricos para solucionar tal problema.

Figura 17 – Questão do Papiro do Cairo

No Papiro do Cairo, que data de 300 a.C., foram encontrados 40 problemas de Matemática. Um deles é o seguinte: “Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que altura a escada alcança?” (cúbito é uma medida antiga de comprimento; hoje há o metro, o centímetro etc.)

Fonte: (Bastian, 2000. p.137).

Esta situação matemática me permite aferir em parte a não compreensão do aluno referente a linguagem expressa na situação. Ora se não há compreensão dessa linguagem, desses jogos de linguagens, o ver como do aluno compromete seu entendimento. É dificuldade também do aluno? Pode ser que sim, porém, se eu conheço a regra jogada na situação, e tenho treinado essas situações ou similares, a chance de acerto, compreensão, é maior, caso contrário, não. Em resumo, o aluno precisa saber os embasamentos necessários para compreender o Teorema. Sobre isso, Bastian (2000), expõem o seguinte:

Surgiram também algumas variáveis de contexto de difícil administração, como, por exemplo, a falta ou escassez de conhecimentos disponíveis dos alunos, a dificuldade na interpretação e conversão dos enunciados, a falta de hábito em resolver questões encadeadas por vários itens e o despreparo no trato com a representação algébrica (Bastian, 2000, p. 181).

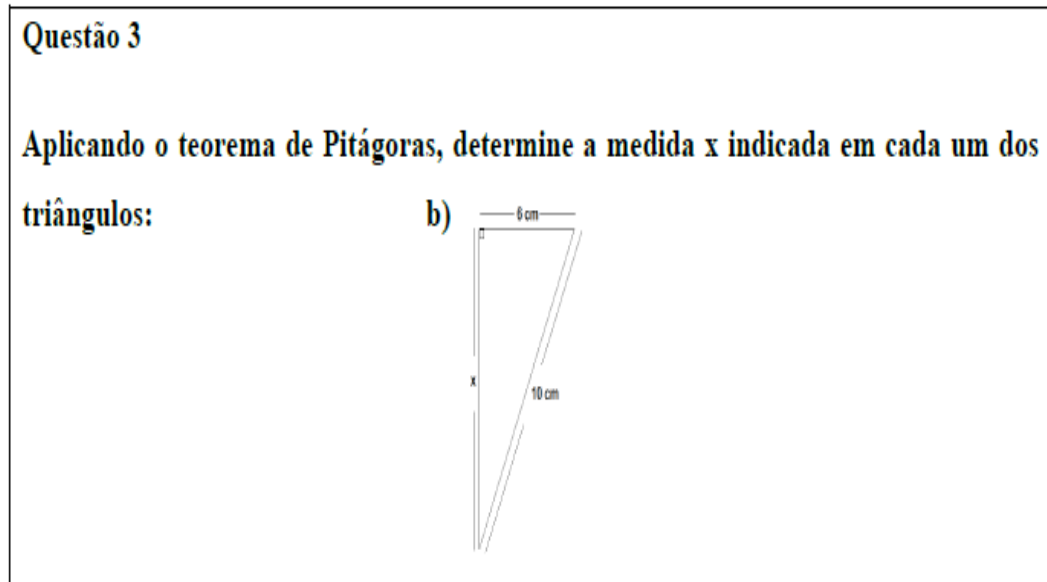
Como meu foco é a linguagem, acredito que solucionando os conflitos linguísticos de compreensão do Teorema de Pitágoras, estaremos no caminhando para a solução parte do problema, obviamente que a coisa é muito mais complexa, porém, não posso travar em todas as trincheiras. A seguir, será abordado um recorte da pesquisa de Pereira, Couto e Costa (2016).

6.2 A PESQUISA DE PEREIRA, COUTO E COSTA (2016)

Pereira, Couto e Costa (2016), realizaram um estudo cujo objetivo era fazer uma análise dos erros cometidos por alunos do ensino fundamental ao resolverem questões sobre Teorema de Pitágoras. As autoras aplicaram um teste, contendo 6 questões sobre o Teorema

de Pitágoras, à uma turma do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Belém do Pará. A seguir, dois recortes com questões e soluções apresentadas no trabalho de Pereira, Couto e Costa (2016).

Figura 18 – Comando da questão 3



Fonte: (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.6).

Figura 19 – Resposta de um dos alunos

Handwritten student work showing the application of the Pythagorean theorem:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$x^2 = 6^2 + 10^2$$

$$x = 36 + 100 = 136$$

The final result $x = 23$ is circled.

On the right, there is a vertical calculation of the square root of 136:

$$\begin{array}{r} 136 \overline{) 2} \\ 68 \overline{) 2} \\ 34 \overline{) 2} \\ 17 \overline{) 17} \\ 1 \overline{) 23} \end{array}$$

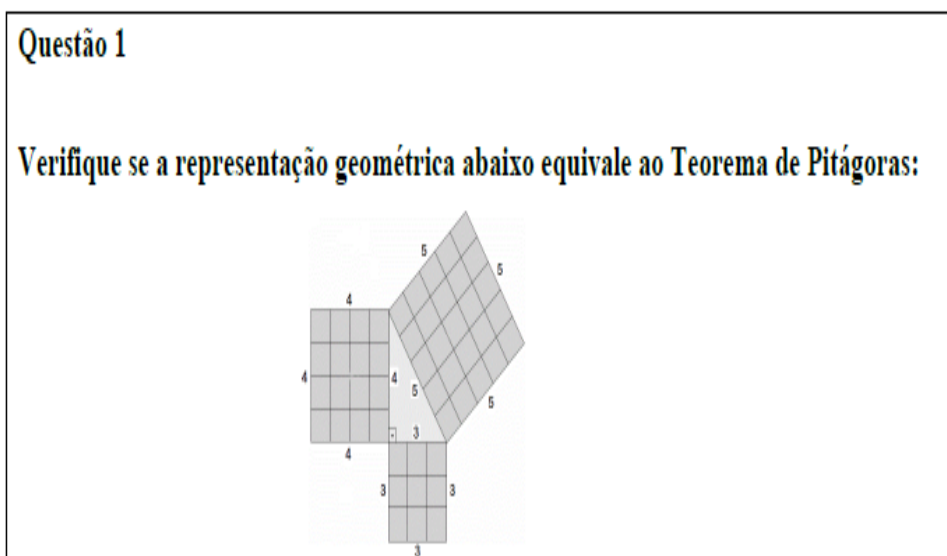
Fonte: (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.6).

O enunciado expresso na figura 20, retrata uma questão comum envolvendo o Teorema de Pitágoras, aparentemente uma questão simples de ser solucionadas. Porém, tendo como embasamento a linguagem em Wittgenstein, muitos conflitos na compreensão podem aparecer. Primeiro, para o aluno ver o Teorema, ver como uma igualdade que pode algebricamente ser solucionada pelo Teorema de Pitágoras, precisaria compreender os jogos de linguagem envolvendo enunciado e a figura. Sabemos que *os jogos de linguagem e o ver-cómo* são dois conceitos filosóficos complexos, porém, ambos trazidos para matemática; nos permitem uma compreensão dos Teoremas de Tales e Pitágoras.

Na figura 20, o fato de o aluno não ter conseguido aplicar a igualdade algébrica, nos mostra o quanto ela não é tão evidente assim. Essa situação do “erro” na resposta por parte do aluno; não pode ser deixada de lado como sendo apenas um “erro” e, tão pouco ser focado apenas na correção deste erro. Os jogos de linguagem no enunciado do problema e o ver-come por parte do aluno, do problema, pode ser um caminho para a compreensão das dificuldades no aprendizado. Podemos notar que o aluno usa o teorema ao aplicar a relação métrica dos lados de um triângulo retângulo, porém, intrinsecamente, é possível duas deduções: a de o aluno acreditar que tal relação; só aplica no caso de encontrar o valor da hipotenusa; ou de não ter compreendido que com tal relação métrica é possível encontrar os valores desconhecidos de qualquer lado do triângulo retângulo. Nesse sentido não analisemos com o viés de erro do aluno, e sim como um conflito linguístico de não compreensão do aluno sobre a regra do jogo de linguagem.

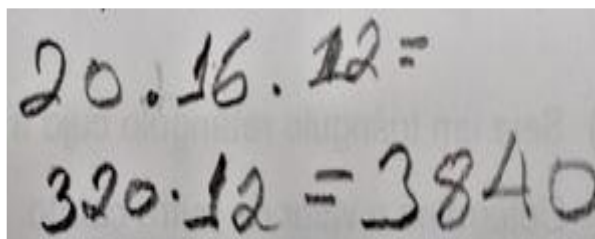
Segundo Pereira, Couto e Costa (2016, p. 06), o aluno troca os elementos do triângulo retângulo atribuindo o valor da hipotenusa como sendo um dos catetos, levando-o ao erro. Este é um dos principais erros cometidos pelos alunos ao resolverem questões envolvendo o Teorema de Pitágoras. Como este é um dos principais erros cometidos por alunos, podemos deduzir que tal fato ocorre pelo não domínio da regra desse jogo de linguagem. Nesse sentido, o treino dessa regra desse jogo precisa ser traduzido nas mais diversas situações que envolva o Teorema.

Figura 20 – Comando da questão 1



Fonte: (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.8).

Figura 21 – Resposta de um dos alunos



$$20 \cdot 16 \cdot 12 =$$

$$320 \cdot 12 = 3840$$

Fonte: (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.8).

Segundo as autoras, o objetivo desta questão foi verificar se o aluno conseguiria explicitar o Teorema de Pitágoras. Para esta questão, identificamos 55% de acertos, 25% de erros e 20% dos alunos deixaram a questão em branco. Uma das principais dificuldades apontadas pelos alunos é a compreensão do conceito de área relacionado aos lados do triângulo, tendo assim dificuldades em estabelecer o Teorema, isto é, “o quadrado da hipotenusa é soma do quadrado dos catetos”, no qual eles não associam a relação de área presente (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.8).

Grande parte dos problemas de aprendizagem de conteúdos da matemática está relacionada com a compreensão da escrita de seus enunciados, em que os significados dos símbolos devem ser interpretados. A linguagem matemática tem características próprias que a diferenciam da linguagem natural do aluno. Nesse sentido, é preciso que a linguagem do professor esclareça o significado dos símbolos matemáticos, bem como as regras que governam os textos matemáticos. Entendemos que não temos acesso ao pensamento do aluno, temos acesso apenas àquilo que é expresso em suas palavras, faladas e escritas, por isso uma atenção maior à linguagem é tão necessária (Silveira, Silva e Teixeira Júnior, 2017, p. 468).

Mesmo a questão sendo intuitiva, é possível verificar que o aluno não compreendeu esse jogo de linguagem e não soube articular uma resposta plausível. Nesta questão, as autoras já fornecem um dos gargalos na compreensão da demonstração do Teorema de Pitágoras, o domínio sobre a compreensão de área. É possível delimitar que um dos caminhos iniciais para o ensino do Teorema de Pitágoras é a constatação se os alunos dominam a compreensão sobre área, se conseguem elaborar conceitos sobre área, caso, contrário, o ensino sobre o Teorema de Pitágoras estará comprometido, uma vez que ele trabalha com relação métrica sobre área.

Figura 22 – Comando da questão 4

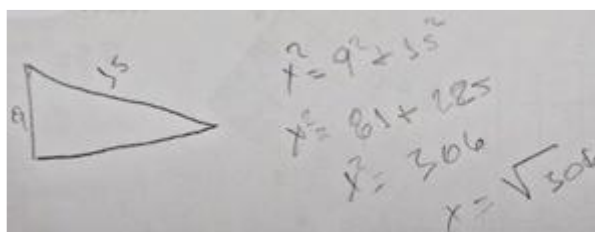
Questão 4

Seja um triângulo retângulo cujo a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos 9 cm.
Determine o valor do outro cateto.

Fonte: (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.7).

Para as autoras, essa questão tinha intuito de analisar a habilidade do aluno em construir um triângulo retângulo com as informações dadas no enunciado do problema e aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras. Os resultados para a questão 4 indicaram 45% de acertos, 35% de erros e 20% de respostas em branco (Pereira et al. 2016, p.7).

Figura 23 – Resposta do aluno A20 a questão 4



Fonte: (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.7).

Segundo as autoras, na análise da resolução do aluno A20, percebemos que apesar deste construir corretamente o triângulo retângulo e atribuir os valores fornecidos para hipotenusa e para cateto, o referido aluno comete um equívoco ao aplicar a fórmula do Teorema admitindo o valor a ser encontrado, no caso um dos catetos, no lugar da hipotenusa, calculando que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.7).

Nessa questão fica claro também que o equívoco do aluno A20 foi cometido devido ao uso inadequado da regra desse jogo de linguagem. O treino em variadas situações que envolva o Teorema de Pitágoras pode ser um caminho para dirimir essa falha linguística. Uma outra situação é que este tipo de questão pode fornecer ao professor um espelho da turma sobre o aprendizado do Teorema e assim focar em dirimir as falhas linguísticas. A seguir discorrerei sobre um recorte dos resultados obtidos pela pesquisa de Pessanha (2017).

6.3 A PESQUISA DE PESSANHA (2017)

Pessanha (2017); desenvolveu sua pesquisa de mestrado sobre o Teorema de Tales com uma turma de alunos da EJA no Colégio Estadual General Dutra, localizado na Avenida

Souza Mota, s/n, bairro Fundão, no município de Campos dos Goytacazes, estado do Rio de Janeiro. A base teórica de sua pesquisa foi a Teoria da Aprendizagem Significativa, desenvolvida pelo psiquiatra norte-americano David Paul Ausubel (1918 - 2008). Segundo Pessanha,

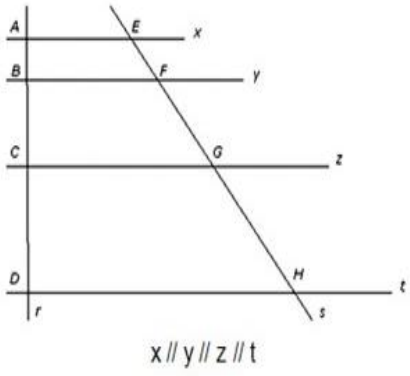
Apesar de existirem 33 alunos matriculados, apenas 23 frequentavam regularmente às aulas. Porém, devido à frequência irregular de parte da turma, a pesquisa foi realizada com a participação de 20 alunos, sendo, assim, os sujeitos da pesquisa. A turma era composta por estudantes de diversas faixas etárias, sendo em sua maioria, mulheres (Pessanha, 2017, p. 39).

Essa irregularidade na frequência dos alunos é comum em inúmeras escolas. A Pesquisa de Pessanha tem uma similaridade com a pesquisa de Bastian no aspecto de aplicação de um teste diagnóstico, intervenção pedagógica e aplicação de um teste final. Porém difere no foco dos teoremas e na base teórica.

Pessanha desenvolveu sua pesquisa em três etapas: primeira etapa, aplicação da primeira avaliação diagnóstica, denominada pré-teste (p. 39); a segunda etapa, aplicação dos instrumentos pedagógicos e a terceira etapa, aplicação da segunda avaliação diagnóstica, denominada pós-teste (p. 40). A seguir, é apresentado um recorte das questões do pré-teste e alguns resultados obtidos por Pessanha (2017).

Figura 24 – Questão 1

1) Analisando a figura abaixo, classifique as afirmações como V(verdadeiro) ou F (falso).



a) () $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$

b) () $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}}$

c) () $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{GH}}$

d) () $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$

e) () $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{EH}}$

f) () $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{GH}}$

Fonte: (Pessanha, 2017, p. 42).

Figura 25 - Desempenho dos alunos nesta questão

Tabela 1 – Pré-teste/questão 1: acertos

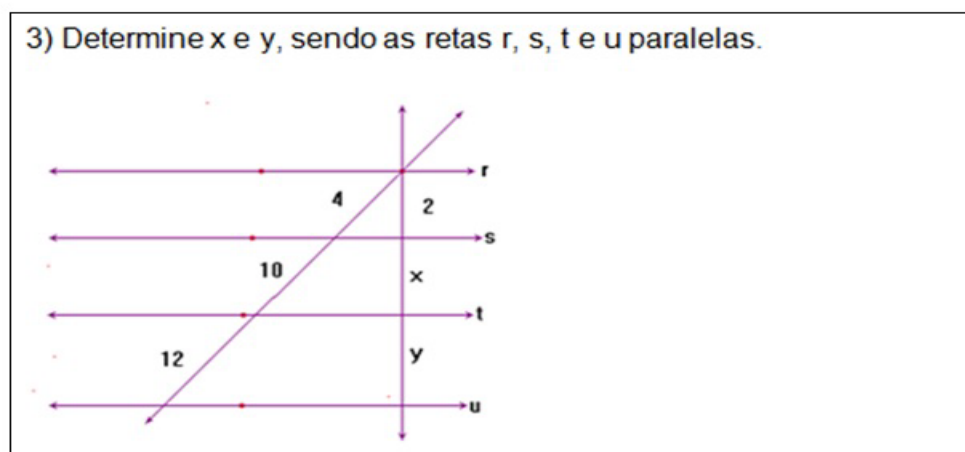
Item	Quantidade de acertos
a	9
b	9
c	8
d	9
e	11
f	12

Fonte: (Pessanha, 2017, p. 42).

Segundo Pessanha, percebe-se que, com exceção dos itens *e*, *f*, da figura 25 em todos os outros itens, menos de 50% dos alunos analisaram corretamente as proporções apresentadas, evidenciando a dificuldade dos alunos em relação as possíveis maneiras de se relacionar e identificar seguimentos proporcionais em situações como a apresentada (Pessanha, 2017, p. 42).

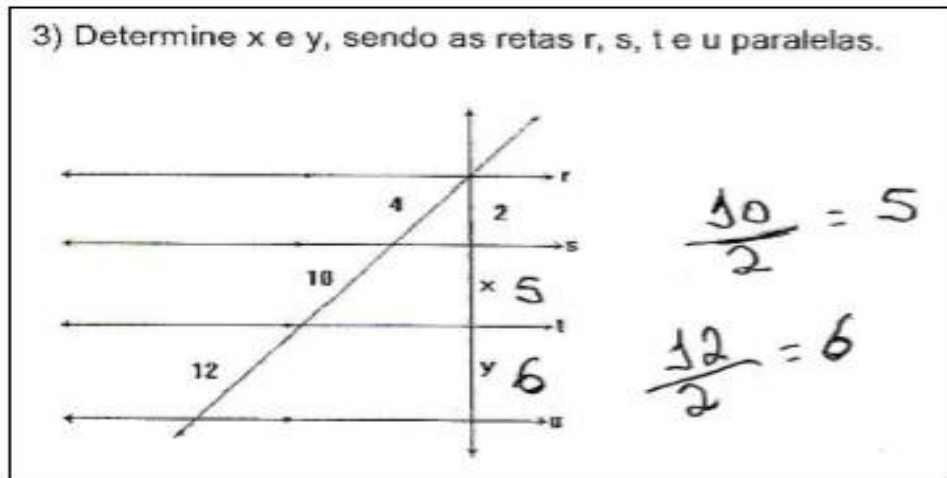
A questão acima trabalha o conceito de proporcionalidade. Para um avanço inicial no entendimento do Teorema de Tales é primordial que os alunos compreendam o que é proporção. A proporção está para o Teorema de Tales, assim como a área está para o Teorema de Pitágoras. Ora, se esses conceitos iniciais não estiverem claros para os alunos, o jogo de linguagem desses Teoremas de Tales e de Pitágoras pode comprometer o ver-come dos alunos. Óbvio que a regra desses teoremas precisa ser treinada, porém, sem a compreensão desses conceitos iniciais fica mais difícil compreender esse saber.

Figura 26 - Questão 3



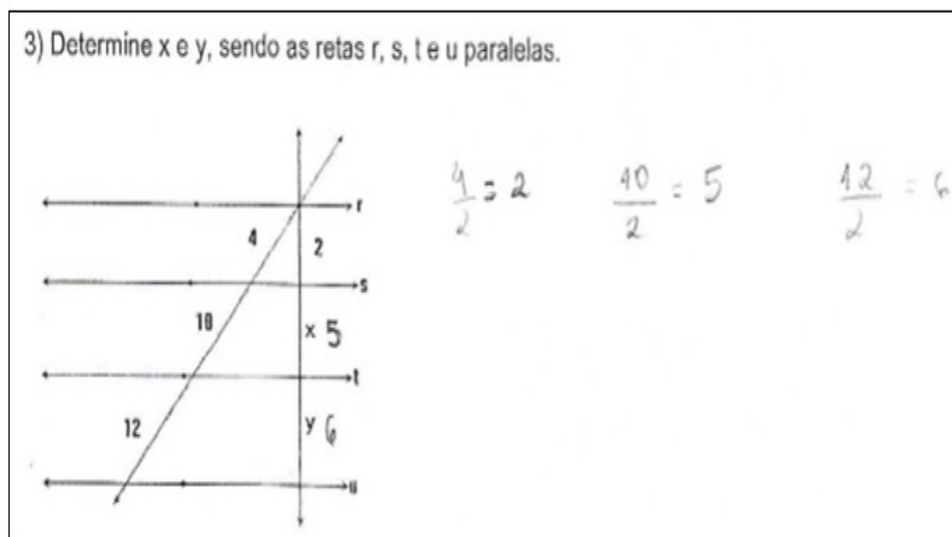
Fonte: (SALLE, 2013, p.11).

Figura 27 - Resposta do aluno 11 a questão 3



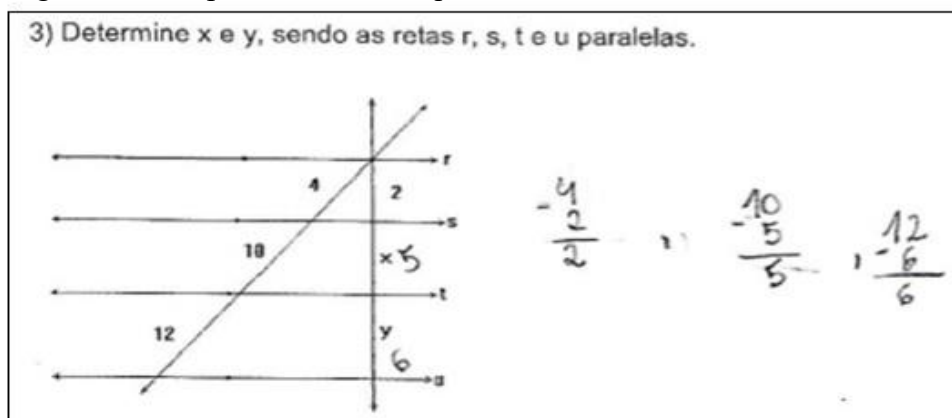
Fonte: (Pessanha, 2017, p.45).

Figura 28 - Resposta do aluno 19 a questão 3



Fonte: (Pessanha, 2017, p.46).

Figura 29 - Resposta do aluno 4 questão 3



Fonte: (Pessanha, 2017, p.46).

Segundo o autor, o objetivo dessa questão é verificar os conhecimentos do aluno acerca do Teorema de Tales, propriamente dito. Diferentemente da questão 1, agora o aluno depara-se com medidas representadas numericamente. Oito alunos acertaram essa questão, porém apenas seis alunos apresentaram os cálculos que justificavam a resposta (Pessanha, 2017, p. 44).

Para o autor, o resultado obtido nesta questão é preocupante, pois espera-se que esse tipo de questão poderia ser resolvido por qualquer aluno que tenha conhecimento do Teorema de Tales, tendo em vista que se trata de sua aplicação simples (Pessanha, 2017, p. 45).

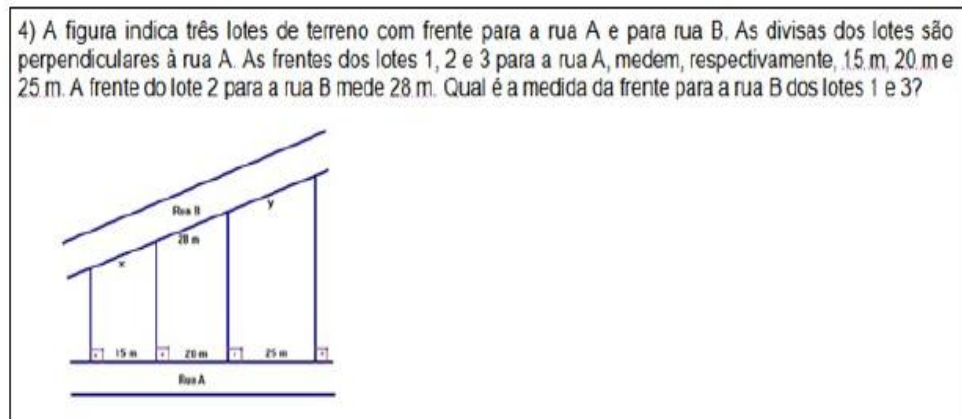
Esses jogos de linguagem mesmo aparentemente sendo de fácil compreensão, podem apresentar inúmeros não entendimentos de suas regras. O ver como do aluno, muitas das vezes não consegue perceber de forma clara a regra que está sendo articulada no jogo de linguagem. Nesse sentido, o treino da regra desse jogo de linguagem deve levar em consideração essas incompreensões, os conflitos linguísticos. O próprio Tales de Mileto na construção do seu teorema teve algumas falhas que só foram aperfeiçoadas com o tempo.

A questão 3, corrobora para uma conclusão a priori, de que o ver-como dos alunos varia de acordo com o nível de compreensão que este tenha do objeto da aprendizagem. Nesse sentido, é importante que o treino da regra do jogo de linguagem atinja o ver como do aluno o mais próximo possível do saber matemático, segundo Almouloud (2007):

As discussões a respeito de provas e demonstrações são inúmeras e extensas uma vez que o tema pode ser abordado sob diversas óticas. No entanto, admitimos que a prova matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados e que o conjunto organizado desses fatos deve comprovar de forma irrefutável algum tipo de proposição matemática. O encadeamento lógico dos argumentos matemáticos deve convencer qualquer leitor da veracidade da proposição matemática em questão, ficando, a mesma, portanto, demonstrada (Almouloud 2007. Pág:06).

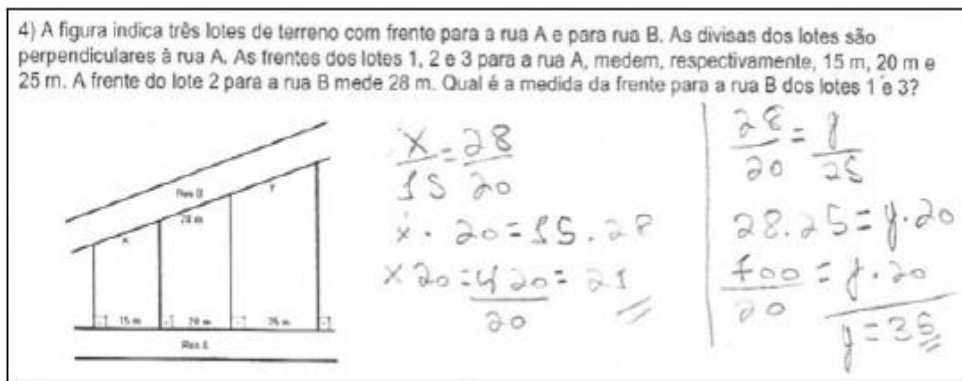
O ensino está se resumindo em determinar o ensino de tal saber em determinados números de aulas. Para quem trabalha com educação sabe que na prática o ensino encontra inúmeros percalços, e estipular um tempo para o aluno aprender tal saber, torna-se comprometedor a aprendizagem. Quanto tempo levou para os pitagóricos sistematizarem o Teorema de Pitágoras? Tal saber tem seu tempo, que seu aprendizado pode ser influenciado pelas estratégias utilizadas em sua abordagem.

Figura 30 – Questão 4



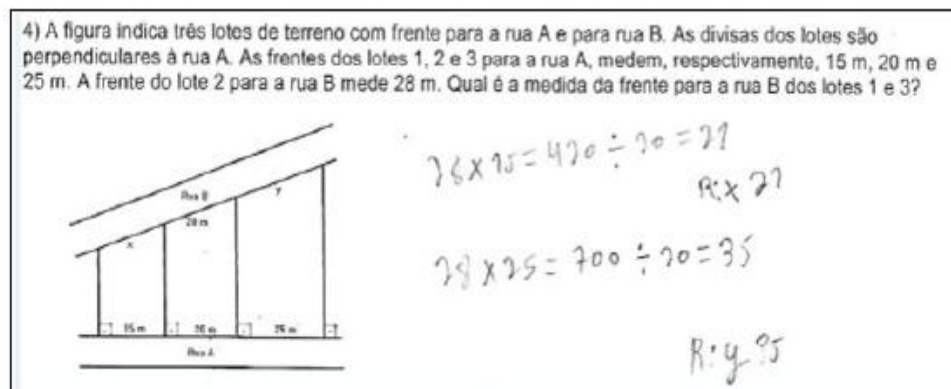
Fonte: (SALLE, 2013, p.12).

Figura 31 – Resposta do aluno 18



Fonte: (Pessanha, 2017, p.47).

Figura 32 – Resposta do aluno 18



Fonte: (Pessanha, 2017, p.48).

Pessanha concluiu a priori que os alunos que resolveram corretamente a questão 3, que não se tratava de uma questão contextualizada, não tiveram o mesmo desempenho na questão

4, contextualizada. Percebemos, então, uma grande dificuldade por parte dos alunos em trabalhar com contextualização, aplicando em problemas reais o que é aprendido teoricamente (Pessanha, 2017, p.48).

Uma das questões que geram conflitos no ver como dos teoremas, seja o de Tales ou o de Pitágoras, está nessa situação acima. Se treina a regra do jogo de linguagem do teorema de forma mecânica com todo seu rigor matemático e depois se cobra numa situação contextualizada se esperando que o aluno veja o teorema na situação. Seria o ideal que ele o visse, porém, nada assegura que se treinando de um jeito ele o verá nas mais variadas situações. Primeiro se treina a regra desse jogo de linguagem nas mais diversas situações.

No capítulo a seguir será abordado o Teorema de Tales e o de Pitágoras nos livros Bianchini, 9ª edição - São Paulo 2018 e Araribá Conecta Matemática, 1ª Edição 2022. A análise dos livros foi deixado para o último capítulo justamente pelo fato de se observar primeiramente quais seriam as principais dificuldades dos alunos frente a estes conhecimentos. Assim, as observações a serem feitas possuirão um respaldo maior.

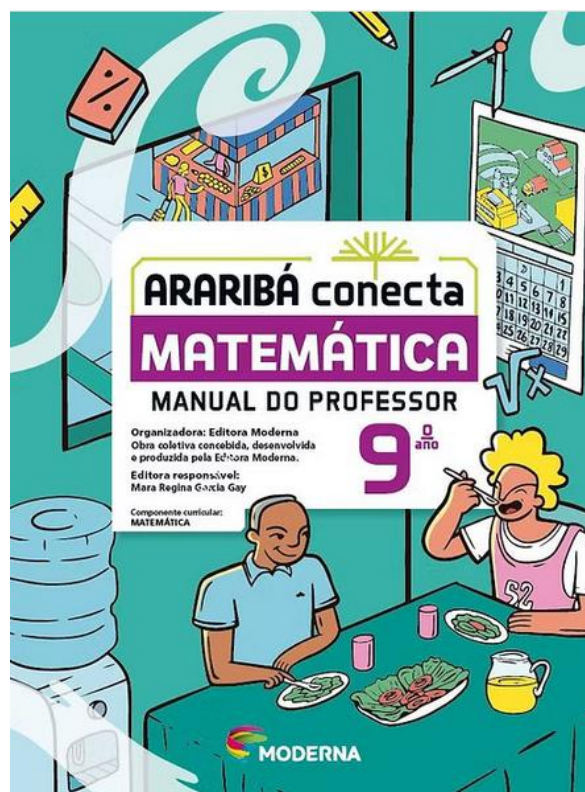
O objetivo não é criticar os livros didáticos, tampouco polemizar a forma como a abordagem são feitas. O objetivo da análise se dá justamente no fato de proporcionar reflexões que direcionem a aprendizagem dos teoremas levando em consideração aspectos linguísticos que podem dificultar o aprendizado destes teoremas.

7. COMO O TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS SÃO ABORDADOS EM DOIS LIVROS DIDATICOS

O presente capítulo analisa a linguagem matemática dos teoremas de Tales e o de Pitágoras, seus enunciados, demonstrações e exercícios, em duas obras didáticas utilizadas na rede municipal de educação do município de Portel/PA. Os livros analisados são Matemática Bianchini, 9ª edição - São Paulo 2018 e Araribá Conecta Matemática, 1ª Edição 2022.



Matemática Bianchini, 9ª edição São Paulo, 2018.



Araribá Conecta Matemática 1ª Edição, 2022.

7.1 O LIVRO DIDÁTICO

Que um livro didático é importante isso já sabemos. Porém o que é um livro didático? Qual a sua diferença para um livro não didático? Inicialmente precisamos saber que nem sempre os livros didáticos foram assim, como são hoje. O livro didático é um produto que passou por mudanças ao longo dos anos e que sempre esteve atrelado as necessidades de uma época. Como afirma Reis e Santos (2007, p.15), até o século XIX, no Brasil só tinha manuais didáticos franceses e portugueses. A influência francesa foi devido aos autores como: Bêlidor, Bézout e Lacroix, que tiveram êxito no Brasil e em outros países.

Para Silva (2000), somente a partir da década de 30 do século XIX, que começaram a surgir autores brasileiros de livros didáticos de matemática, com destaque para Cristiano Benedito Ottoni e Timotheo Pereira. Um outro brasileiro é Antonio Trajano, pois colocou inovações em seus livros, com exercícios, que naquela época os livros não traziam, também o público-alvo. Outras inovações como: chave de respostas para o professor, a preocupação com a teoria em relação aos problemas do cotidiano e a inclusão de exercícios propostos e resolvidos.

Ainda segundo Silva (2000, p. 171), no final do século XIX, Olavo Freire em seu livro didático, aboliu os axiomas, os enunciados e demonstrações de teoremas; excluiu o termo definição; vinculou os conceitos geométricos a problemas da vida cotidiana; lançou mão de exercícios de atividades, como recorte, dobradura, planificação de sólidos, entre outras. Incluiu muitas figuras para ilustrar os conceitos e vinculá-los ao cotidiano e vocabulário do aluno e enfatizou os problemas que utilizam a régua e compasso. Não há nenhuma preocupação com o “rigor” euclidiano, mas procurou tornar os conceitos claros e acessíveis para os alunos.

Atualmente, a política do livro didático está ligada ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM). O PNLD distribui gratuitamente obras didáticas para todos os alunos das oito séries da rede pública de ensino fundamental. A partir de 2003, as escolas de educação especial públicas e as instituições privadas definidas pelo censo escolar como comunitárias e filantrópicas foram incluídas no programa. A definição do quantitativo de exemplares a ser adquirido é feita pelas próprias escolas, em parceria com as secretarias estaduais e municipais de Educação. Os dados disponibilizados pelo censo escolar feito pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC) servem de parâmetro para todas as ações do FNDE, inclusive para o livro didático (Reis e Santos, 2007, p.16).

O livro didático de matemática desenvolvido para o ensino fundamental desempenha um papel crucial no processo de aprendizagem, oferecendo aos alunos uma abordagem estruturada e didática para os conceitos matemáticos. Esses livros são elaborados para se adequarem a determinada faixa etária, utilizando-se uma linguagem e formato que buscam facilitar a compreensão dos conteúdos. Além disso, eles servem como recurso de consulta tanto para alunos quanto para professores, intermediando o desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas a serem alcançadas. Para isso alguns cuidados são necessários segundo Araujo (1992):

o Livro Didático é um recurso de ensino significativo para o processo de produção do conhecimento; porém o seu uso é permeado por uma série de implicações desde a sua legibilidade, inteligibilidade e de acesso a esse livro. Sendo assim, devemos estar vigilantes para o seu uso; selecionar a partir de uma visão crítica em face do contexto em que o livro vai ser utilizado (Araujo, 1992, p.4).

Diferente do livro didático, o livro paradidático tem uma função complementar, de aprofundar determinado saber. O livro paradidático aborda com mais detalhes e profundidade conteúdos vistos de forma superficial no livro didático e apoia a realização de atividades curriculares e extracurriculares. Em termos gerais, a principal diferença entre um livro didático e um livro paradidático reside em seus objetivos e funções no processo de ensino-aprendizagem. O livro didático é um material estruturado para apresentar o conteúdo de uma disciplina, seguindo um plano pedagógico específico. Já o livro paradidático, também conhecido como livro complementar, tem como objetivo aprofundar os conhecimentos apresentados no livro didático, oferecendo perspectivas alternativas e interdisciplinares sobre o tema, através de diferentes abordagens e atividades

7.2 A ABORDAGEM DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS NO LIVRO MATEMÁTICA BIANCHINI

O livro Matemática Bianchini tem ampla utilização no cenário educacional brasileiro. Em sua visão geral da proposta da coleção é apresentado como objetivo principal da obra, o de servir de apoio ao professor no desenrolar de sua prática didático-pedagógica e oferecer ao aluno um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos. Importante essas colocações iniciais para delimitar que o objetivo dessa obra é o de ser um material de apoio, assim não amarrar que este seja apenas um único referencial no trabalho de ensino e aprendizagem. Segundo o próprio autor:

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o aluno a assimilar a totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de esgotar o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas, não apenas visando à revisão, mas à complementação e ao aprofundamento de conteúdo. Acreditamos que, por meio de diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos, o aluno conseguirá apreender seus significados (Bianchini 2018, p. V).

Com base nos conteúdos indicados para a Matemática dos anos finais (6º ao 9º anos) do Ensino Fundamental e suas especificidades de ensino, a obra procura possibilitar ao aluno a elaboração do conhecimento matemático, visando contribuir para a formação de cidadãos

que reflitam e atuem no mundo, e subsidiar o trabalho docente, compartilhando possibilidades de encaminhamento e sugestões de intervenção. Nesse sentido, atribui especial importância ao desenvolvimento de conceitos de maneira precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para as noções de maior importância (Bianchini 2018, p. V).

Analisaremos a seguir, sob a perspectiva da linguagem, os Teoremas de Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. Não é objetivo aqui tecer críticas sobre a obra, tampouco dizer como deveria ser abordada. Pretendo aqui, verificar que possíveis conflitos linguísticos são entraves para o entendimento dos teoremas citados.

7.3 O TEOREMA DE TALES EM BIANCHINI

Na obra de Edwaldo Bianchini, o Teorema de Tales é abordado na página 99. Dentro do capítulo 4 Proporcionalidade em Geometria. A tabela a seguir demonstra como está elaborado o conteúdo no livro.

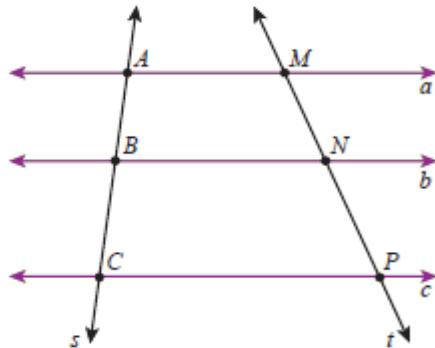
Tabela 1 – Teorema de Tales na obra de Bianchini

CAPÍTULO 4	CONTEÚDO	PÁGINA
Proporcionalidade em Geometria	Razão entre dois segmentos	92
	Feixe de paralelas	97
	Teorema de Tales	99
	Exercício	100
	Um pouco da história de Tales	101
	Consequências do teorema de Tales	102

Fonte: O autor

TEOREMA DE TALES, P.99.

Considere a figura abaixo, em que a , b e c formam um feixe de retas paralelas e as retas s e t são transversais.



Hipóteses: $\begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ s \text{ e } t \text{ são transversais} \end{cases}$

Tese: $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$

Queremos provar que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, nessa ordem, são segmentos proporcionais.

■ **Demonstração**

Admitindo que exista um segmento u que caiba x vezes em $\overline{AB}$ e y vezes em $\overline{BC}$, com x e y sendo números inteiros, temos: $AB = xu$ e $BC = yu$.

Logo: $\frac{AB}{BC} = \frac{xu}{yu}$ ou $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$ ①

Traçando pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ retas paralelas ao feixe, elas dividirão $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ em segmentos congruentes.

Indicando por v a medida desses segmentos (com $v \neq 0$), temos $MN = xv$ e $NP = yv$ e, portanto:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{xv}{yv} \text{ ou } \frac{MN}{NP} = \frac{x}{y} \text{ ②}$$

Comparando as igualdades ① e ②, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

A partir dessa demonstração, podemos enunciar o **teorema de Tales**:

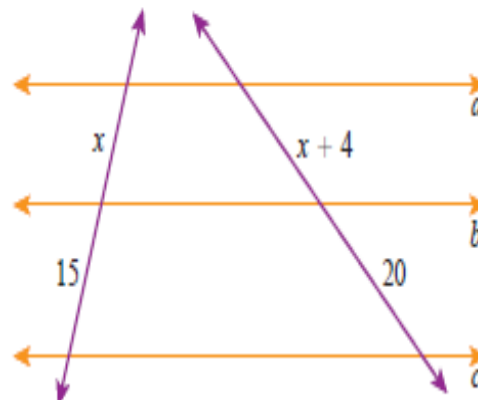
Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Com o auxílio do teorema de Tales, vamos calcular, como exemplo, o valor de x da figura ao lado, sendo $a \parallel b \parallel c$.

$$\frac{x}{15} = \frac{x+4}{20}$$

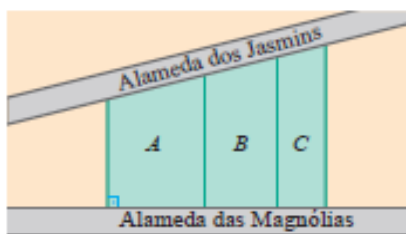
$$20x = 15(x+4)$$

Resolvendo a equação, encontramos:
 $x = 12$.



EXERCÍCIO, p. 100. Questão: 14

- 14** A figura a seguir representa um terreno com frente para duas alamedas. A frente para a alameda das Magnólias tem 90 m, e a frente para a alameda dos Jasmins, 135 m.



O proprietário do terreno resolveu dividi-lo em três lotes menores, traçando sobre ele duas paralelas perpendiculares à alameda das Magnólias. O terreno A ficou com 40 m de frente para essa alameda, e o terreno B, com 30 m de frente para a mesma alameda. Com base nessas informações, responda.

- Quanto mede a frente do terreno C para a alameda das Magnólias? **20 m**
- Quanto medem as frentes dos três terrenos para a alameda dos Jasmins?
terreno A: 60 m; terreno B: 45 m; terreno C: 30 m

ANÁLISE

O Teorema de Tales em Bianchini é abordado de forma didática e sequencial. Não parte de uma contextualização, dependendo de uma tradução dos seus jogos de linguagem para os que não venham a compreendê-lo. Segundo Silveira, Silva e Teixeira Júnior (2017, p. 473), a contextualização de conteúdos matemáticos no cotidiano do aluno serve para dar significado, mas não garante que essa prática seja eficiente. O Teorema de Tales é demonstrado através de um feixe de retas cortadas por duas transversais que geram segmentos proporcionais, não se fazendo uma analogia com uma situação que possa ser presenciada no dia a dia, lembrando que por trás da ideia do Teorema de Tales existiu uma situação que o gerou, o caso das pirâmides do Egito. Como a obra é um material de apoio e outros materiais podem ser considerados, não podemos afirmar aqui, que a obra por si só possa comprometer a aprendizagem do aluno.

Olhando sob a lente Wittgensteiniana, que é o conjunto de ideias e trabalhos que compõe a filosofia de Ludwig Wittgenstein, os jogos de linguagem do Teorema de Tales neste

livro são comuns a outros livros didáticos, assim, o ver-como dos alunos, compreensão ou não, pode vir a depender do treino em sua abordagem em sala, ou se os alunos já saberem o teorema. Embora Wittgenstein não tenha feito reflexões sobre a linguagem matemática em si, não podemos deixar de lançar mão sobre suas ideias no campo da matemática. Para Silveira, Silva e Teixeira Júnior (2017, p. 468) grande parte dos problemas de aprendizagem de conteúdos da matemática está relacionada com a compreensão da escrita de seus enunciados, em que os significados dos símbolos devem ser interpretados.

A questão 14 do exercício, é uma questão contextualizada que poderia ser apresentada como treino na aplicação do Teorema de Tales. Nem sempre é possível contextualizar o conhecimento matemático com a realidade mais próxima do aluno, porém, quando for possível nessa abordagem do objeto de conhecimento, torna-se importante contextualizar. Abordar de forma técnica o assunto e não apresentar uma aproximação com a realidade do aluno, e depois, no exercício se pedir uma questão contextualizado, pode não surtir o efeito esperado, de que aluno veja o Teorema de Tales na questão e que saiba aplicá-lo.

Vejo que a questão 14 poderia ser treinada como uma aplicação do Teorema de Tales. Seria ideal que o aluno percebesse essa aplicação intuitivamente, geralmente não é o que acontece. Para Dias (2023, p. 93), numa perspectiva wittgensteiniana seria um equívoco atribuir ao aluno a responsabilidade de perceber as similaridades, pois o aluno precisa ver como acontece os diversos usos por meio do treino e do ensinamento do professor. Ainda segundo dias (2023):

A percepção dos aspectos não é algo tão óbvio. Desta forma, estabelecer semelhanças bem como fazer analogias tem a função de relacionar a linguagem e o mundo, não apenas por meio das relações abstratas advindas da Matemática, expressas por generalizações simbólicas, mas significar a linguagem simbólica no contexto ao qual está sendo estudado (Dias, 2023, p.94).

Esse seria a origem de um dos conflitos linguísticos, se treinar de uma forma e se exigir de outra. Uma coisa é o matemático tratar a linguagem matemática com outro matemático, o raciocínio se assemelha. Porém, o ensino dessa matemática para um não familiarizado, um que não domina essa linguagem, essa reciprocidade não acontece na maioria das vezes. Um jogo de linguagem desdobra para um ver como, que dependendo da situação, pode ter inúmeras interpretações, no caso a do aluno. A regra deve ser clara e os treinos necessários a aproximação da compreensão do aluno ao objeto de conhecimento estudado.

7.4 TEOREMA DE PITÁGORAS EM BIANCHINI

Na obra de Edwaldo Bianchini, o Teorema de Pitágoras é abordado na página 172. Dentro do capítulo 8 Triângulo Retângulo. A tabela a seguir demonstra como está elaborado o conteúdo no livro.

Tabela 2 – Teorema de Pitágoras na obra de Bianchini

CAPÍTULO 8	CONTEÚDO	PÁGINA
Triângulo Retângulo	Um pouco de História	170
	Elementos de um Triângulo	170
	Enunciado do Teorema de Pitágoras	172
	Demonstrando o Teorema de Pitágoras	173
	Exercício	174
	Aplicação do Teorema de Pitágoras	177

Fonte: O autor

ENUNCIADO DO TEOREMA DE PITÁGORAS, p. 172.

Considerando como unidade de medida a área de cada quadradinho da figura ao lado, notamos que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores, ou seja:

$$25 = 9 + 16$$

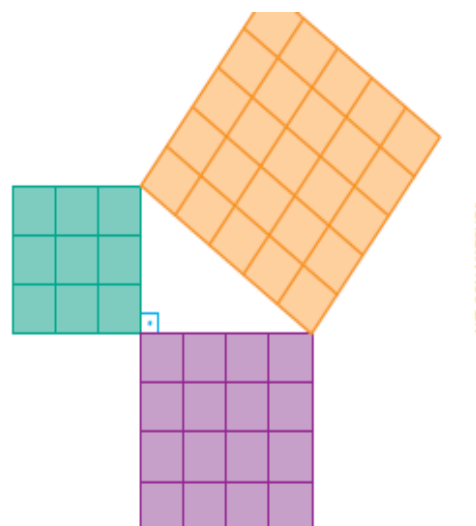
Como $25 = 5^2$, $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$, podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, conseqüentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.

A relação entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



DEMONSTRANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS, p. 173.

Considerando um triângulo retângulo, construímos quadrados sobre a hipotenusa de medida a e sobre os catetos de medidas b e c , como mostra a figura 1. Nas figuras 2 e 3, construímos quadrados de lados que medem $(b + c)$.

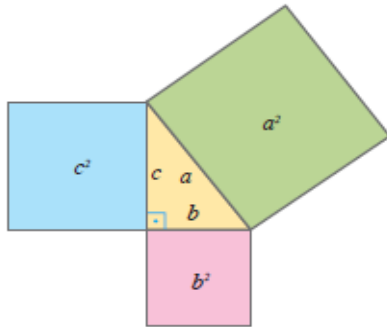


Figura 1

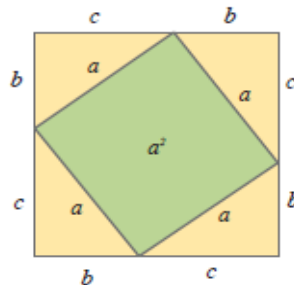


Figura 2

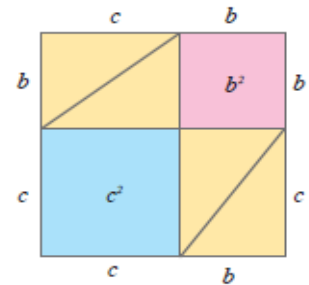


Figura 3

O quadrado da figura 2 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, e pelo quadrado verde. Assim, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado verde.

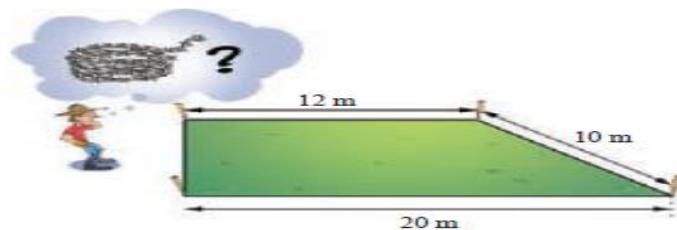
O quadrado da figura 3 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, pelo quadrado azul e pelo quadrado rosa. Então, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com as áreas dos quadrados azul e rosa.

Logo, a área do quadrado verde é a soma da área do quadrado azul com a área do quadrado rosa, ou seja:

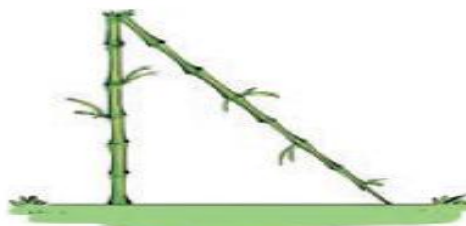
$$a^2 = b^2 + c^2$$

EXERCÍCIO, p. 174

- 10** Quantos metros de arame são necessários para cercar, com 6 voltas, um terreno em forma de trapézio retângulo cujas bases medem 12 m e 20 m e cujo lado oblíquo mede 10 m? **288 m**



- 11** Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ m e as medidas dos catetos são expressas por x e $x + 3$. Calcule a medida dos catetos. **3 m e 6 m**
- 12** Um bambu foi quebrado pelo vento a 4,8 m de altura. Ele tombou de modo que sua ponta tocou o chão a 3,6 m de sua base. Determine a altura desse bambu. **10,8 m**



ANÁLISE

Os jogos de linguagem do Teorema de Pitágoras em Bianchini são comuns a outros livros didáticos, enunciado, demonstração e exercícios. Porém a aprendizagem desse assunto para um aluno não familiarizado com o Teorema de Pitágoras dependerá do treino a ser feito com esses jogos de linguagem, nas mais variadas situações em que este teorema é empregado. Os jogos de linguagem do Teorema de Pitágoras devem ser abordados em inúmeras situações, pois já vimos que seus jogos de linguagem não são tão óbvios assim de se ver nas mais variadas situações.

A demonstração feita no livro é bastante presente nos atuais livros didáticos. Esta demonstração hindu é baseada na transposição de elementos por meio de equivalência. Esta demonstração não é bem explorada, pois a compreensão desta demonstração depende do domínio real de que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Bastian (2000), argumenta ainda sobre esta demonstração que:

As seis modificações posicionais, os tratamentos auxiliares a ser efetuados e a não convexidade das subfiguras são fatores que dificultam a aplicação da operação da reconfiguração intermediária, porém o fato de não apresentar o obstáculo do desdobramento e o contorno favorável compensam essa desvantagem, aumentando o grau de visibilidade para a aplicação da operação (Bastian, 2000, p. 47).

Observando os exercícios, ocorre o que já foi comentado anteriormente. Os jogos de linguagem no ensino, a regra e o treino, seguem uma lógica de apresentação, porém no exercício, é pedido questões não treinadas na abordagem do teorema. Esperar que os alunos façam essa analogia, fica a impressão de que a aprendizagem depende do aluno. Eu treino uma coisa, peço outra no exercício e espero que o aluno veja similaridade. Na matemática treino é treino, regra é regra, e deve ser seguida. O Teorema de Pitágoras deve ser treinado nas suas mais variadas possibilidades e assim ser cobrado. Treinar uma coisa e cobrar outra, e depois creditar no aluno a não aprendizagem do teorema, acaba mascarando o real problema. Assim precisamos compreender como os alunos pensam, pois para Silveira (2020):

Quando estamos interessados em compreender o que os alunos pensam precisamos escutar o que eles dizem ou ver o que eles escrevem enquanto fazem exercícios matemáticos. Eles aprendem a descrever o que é visto utilizando palavras e assim vão se apropriando de diferentes jogos de linguagem nas aulas de Matemática (Silveira, 2020, p. 12).

Seguindo as ideias de Silveira (2020), ao observar o que os alunos produzem como resposta, observaremos o que eles estão, e como estão aprendendo. Assim, se um aluno não

consegue aplicar o Teorema de Pitágoras numa atividade contextualizada, eu não devo penalizá-lo apenas com a ideia do erro. Devo partir do que ele apresentou como resposta e retornar o Teorema de Pitágoras para mostrar a similaridade, traduzindo os jogos de linguagem da questão contextualizada e mostrando nela o Teorema de Pitágoras.

Na questão de número 10, talvez o aluno nem veja um triângulo retângulo na figura, erro comum entre os alunos, como já visto no capítulo anterior. Sobre isso Silva e Silveira (2014) argumentam que:

Algo semelhante a essa situação já deve ter acontecido com muitos de nós professores de matemática e talvez nos perguntamos “Por que ele não percebe? Parece tão claro o que ele deve fazer”. Bem, será que então não seria oportuno também perguntar por que um uso diferente de uma regra deveria ser óbvio ao aprendiz? Por que seria óbvio *ver* a diagonal do retângulo *como* a hipotenusa de um triângulo retângulo? (Silva e Silveira, 2014, p.12)

As demonstrações precisam ser desenvolvidas passo a passo em sala de aula. Somente ilustrando e comentando, como está no livro didático, pode não ser o suficiente para o aprendizado do aluno. A malha quadriculada pode ser um recurso nesta demonstração, e o aluno para o seu aprendizado precisa dominar esta demonstração. Isto favorecerá o aspecto da argumentação que precisa ser desenvolvida nele. No caso da questão 10 do exercício é preciso que se mostre também que um triângulo retângulo não aparece necessariamente de forma isolada.

7.5 A ABORDAGEM DO TEOREMA DE TALES E O DE PITÁGORAS NO LIVRO ARARIBÁ CONECTA MATEMÁTICA

Segundo os autores a produção desta coleção foi concebida tendo em vista o Decreto nº 9099, de 18 de julho de 2017, que normatiza o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), com o intuito de atender aos seis objetivos (*I – aprimorar o processo de ensino e aprendizagem nas escolas públicas de educação básica, com a consequente melhoria da qualidade da educação; II – garantir o padrão de qualidade do material de apoio à prática educativa utilizado nas escolas públicas de educação básica; III – democratizar o acesso às fontes de informação e cultura; IV – fomentar a leitura e o estímulo à atitude investigativa dos estudantes; V – apoiar a atualização, a autonomia e o desenvolvimento profissional do professor; e VI – apoiar a implementação da Base Nacional Comum Curricular*), além dos demais dispositivos. Conforme salientado pelo Edital de Convocação

01/2022, o PNLD 2024 – Anos Finais será disponibilizado em contexto pós-pandêmico. Nesse sentido, é necessário ter especial atenção ao objetivo IV supracitado, a fim de buscar reparar, durante o ciclo do PNLD 2024, problemas decorridos do isolamento social (BRASIL, 2022, p. 34). Assim, o intuito desta coleção é dar oportunidade aos estudantes de desenvolver a capacidade leitora, de modo que o aprendizado dos Anos Iniciais seja consolidado e eles se preparem para o Ensino Médio. Tendo esse panorama em vista, serão foco também, de forma transversal, a leitura e a pesquisa no apoio à implementação da BNCC. (Araribá, 2022, p. V).

Este livro, diferente do anterior, não tem um autor específico, é uma obra da Editora Moderna. Segundo o que está escrita acima a obra está em conformidade com as legislações recentes e, segundo os autores:

Toda Unidade começa e termina com um texto relacionado às vivências do estudante ou a assuntos que abordam temas ou fatos de interesse dele. Cada texto possui questões relacionadas ao tema em foco, à vida do estudante, ao que ele já sabe e a conceitos abordados no decorrer da Unidade. Desse modo, é possível “valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade. (Araribá, 2022, p. X).

Importante essa abordagem contextualizada dos saberes matemáticos. Sabemos o quanto é difícil ensinar um saber matemático devido sua linguagem muitas vezes incompreendida, e sem sentido em uma articulação linguística onde o aluno não consiga compreender os jogos de linguagem. A seguir apresento como o Teorema de Tales e de Pitágoras é desenvolvido no livro.

7.6 TEOREMA DE TALES NA OBRA ARARIBÁ

Na obra Araribá Conecta Matemática, o Teorema de Tales é abordado na página 134. Dentro do capítulo 5 Semelhança. A tabela a seguir demonstra como está elaborado o conteúdo no livro.

Tabela 3 – Teorema de Tales na obra Araribá

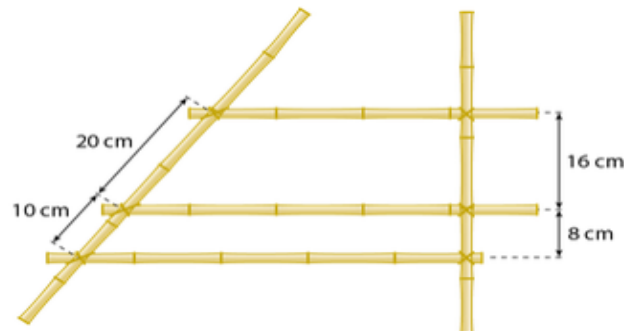
CAPÍTULO 5	CONTEÚDO	PÁGINA
Semelhança	Teorema de Tales no GeoGebra	133
	Teorema de Tales	134
	Demonstração do Teorema de Tales	135
	Exercício	136

Fonte: o autor

TEOREMA DE TALES, p. 134.

Acompanhe a situação a seguir.

Com alguns pedaços de bambu, Robson montou um suporte para apoiar uma planta.



Os pedaços de bambu foram amarrados de forma que os horizontais ficassem paralelos entre si.

Robson percebeu que as medidas de comprimento formavam uma proporção, pois:

$$\frac{20}{10} = \frac{16}{8}$$

Além disso, ele percebeu que havia outras proporções entre as medidas de comprimento.

$$\bullet \frac{20 + 10}{10} = \frac{16 + 8}{8}$$

$$\bullet \frac{20 + 10}{20} = \frac{16 + 8}{16}$$

Robson também teria percebido essas proporções se no lugar dos bambus houvesse retas.

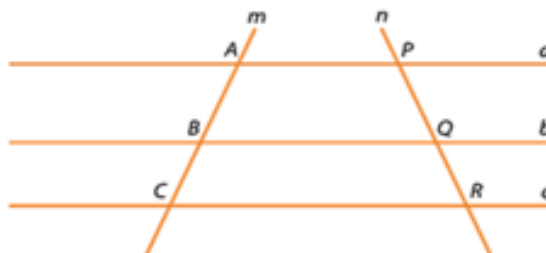
Esse fato, válido para todo conjunto de retas paralelas cortadas por duas retas transversais, é conhecido como **teorema de Tales**.

Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, as medidas de comprimento dos segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais às medidas de comprimento dos segmentos correspondentes determinados sobre a segunda transversal.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TALES, p. 135.

Podemos demonstrar o teorema de Tales usando os conhecimentos de semelhança de triângulos.

Observe o feixe de retas paralelas a , b e c , cortadas pelas retas transversais m e n .



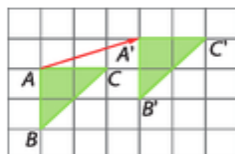
Vamos mostrar que $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$ e que $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$.

Podemos transladar uma figura geométrica sem que ela perca suas características.

Recordre

A **translação** é a isometria (transformação geométrica que preserva o formato e todas as medidas de comprimento da figura original) pela qual uma figura é deslocada em determinada direção e sentido, de modo que a medida de distância entre cada ponto da figura original e o seu correspondente na figura obtida é a mesma.

Na figura a seguir, o triângulo $A'B'C'$ (imagem) foi obtido por uma translação do triângulo ABC . O vetor dessa translação está indicado pela seta vermelha.



EXERCÍCIO, p. 136.

5. Um projetor reproduziu em uma tela a imagem de um *slide*, conforme mostra a figura.



- Calcule a medida da largura da imagem formada sabendo que a medida de seu comprimento é igual a 27 cm e que o *slide* mede 3 cm de largura e 2 cm de comprimento.

ANÁLISE

Na abordagem inicial do Teorema de Tales na obra Araribá é dada uma instrução de como construir o Teorema no GeoGebra. Só em seguida o Teorema de Tales é apresentado em uma situação hipotética do dia a dia. Como já falado, a contextualização não garante por si a aprendizagem, porém não podemos esconder que este jogo de linguagem se apresenta em situações reais. Os jogos de linguagem trabalhados no livro Araribá não diferem dos livros didáticos de matemática. É apresentado o enunciado e a demonstração e poucos treinos sobre o teorema. Como está elaborado o assunto no livro subentende que o aluno já o conhece.

Observei nos dois livros que os Teoremas de Tales e de Pitágoras precisam de uma abordagem histórica. A primeira demonstração conhecida do Teorema de Tales, só aparece três séculos após Tales, na proposição 2 do livro VI dos Elementos de Euclides (300 a.C.).

Desde as observações de Tales de que havia paralelismo e proporcionalidade entre a altura da pirâmide e a sombra projetada por ela, passando pela confirmação na demonstração de Euclides até chegar a esta demonstração atual, o Teorema de Tales teve melhorias na sua representação para torná-lo mais didático. Interessante que tal fato se aproxima com o que defendia Wittgenstein. Segundo Gottschalk (2015):

Para Wittgenstein, a constituição de sentidos não é imediata, mas sim intermediada por técnicas linguísticas, como o gesto ostensivo, objetos e sensações que passam a ser empregados como amostras ou paradigmas de uso das palavras, criação de novas analogias e comparações, entre outros recursos que a linguagem dispõe como condições para a constituição dos sentidos que atribuímos aos fatos do mundo (Gottschalk, 2015, p.310).

O Teorema de Tales na obra Araribá, e na obra de Bianchini são abordados com pouco exercícios. Os exercícios são técnicos e limitados a demonstração apresentada no livro. Quando se passa para uma questão contextualizada, frente a inúmeras aplicações do teorema, os alunos apresentam dificuldades de se entender o novo jogo de linguagem e aplicar esse conhecimento. Os jogos de linguagem, a regra, o treino e o ver como dos alunos, neste aspecto dependerá de como será trabalhado em sala de aula. Segundo Silva e Silveira (2014, p.13), o *ver-como* depende do domínio de técnicas, que em geral não são óbvias, mas que precisam ser aprendidas. Uma regra, por si só, não comporta suas aplicações, ela não nos diz *quando* aplicá-la.

No caso do exercício da p. 136, a questão de número 5, que pode ser resolvida através de uma regra de três simples, poderia também ser treinado como uma aplicação do Teorema de Tales na prática. É preciso que se diga que o Teorema de Tales tem origem na resolução de problemas práticos. Se não houver o treino, compromete-se o aprendizado. O aluno treina o teorema de forma mecânica e depois em uma questão contextualizada não consegue perceber a aplicação do Teorema de Tales. Para nós parece tão natural uma situação como essa, porém para o aluno não é. Segundo Silva (2011, p.49), embora para nós professores pareça tão natural esse processo, é preciso que saibamos que para os alunos esse processo de “tradução” não é nada simples.

7.7 TEOREMA DE PITÁGORAS NA OBRA ARARIBÁ

Na obra Araribá Conecta Matemática, o Teorema de Pitágoras é abordado na página 147. Dentro do capítulo 6 Relações Métricas no Triângulo Retângulo. A tabela a seguir demonstra como está elaborado o conteúdo no livro.

Tabela 4 - Teorema de Pitágoras na obra Araribá

CAPÍTULO 6	CONTEÚDO	PÁGINA
Relações Métricas no Triângulo Retângulo	Primeira relação métrica: Teorema de Pitágoras	147
	Verificação experimental no GeoGebra	148
	Demonstração do Teorema de Pitágoras	149
	Exercício	150

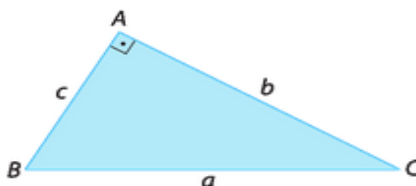
Fonte: O autor

PRIMEIRA RELAÇÃO MÉTRICA: TEOREMA DE PITÁGORAS, p. 147.

O filósofo e matemático grego Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 572 a.C. Fundou, em Crotona, a Escola Pitagórica, um centro de estudos de Filosofia, Ciências Naturais e Matemática. A escola era reservada a poucos iniciados, os estudos eram comunitários e o conhecimento produzido era creditado ao mestre. Por isso, várias descobertas foram atribuídas a Pitágoras, embora não se saiba ao certo se realmente foram realizadas por ele ou por outros membros do grupo.

Pitágoras é lembrado até hoje, principalmente, pelo teorema que leva seu nome e estabelece uma relação entre as medidas de comprimento dos lados de um triângulo retângulo.

No triângulo retângulo a seguir, $\overline{BC}$ é a hipotenusa e $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são os catetos.



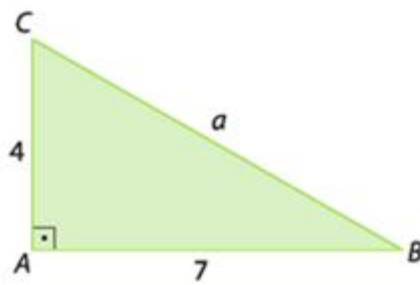
Em qualquer triângulo retângulo, o maior lado chama-se **hipotenusa**, e os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**.

De acordo com o teorema de Pitágoras:

Em um triângulo retângulo qualquer, a soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos é igual ao quadrado da medida de comprimento da hipotenusa.

Assim, na figura anterior, temos: $b^2 + c^2 = a^2$

Observe, por exemplo, como podemos determinar a medida de comprimento da hipotenusa no triângulo a seguir, em que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos e $\overline{BC}$ é a hipotenusa.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = 7^2 + 4^2$$

$$a^2 = 49 + 16$$

$$a^2 = 65$$

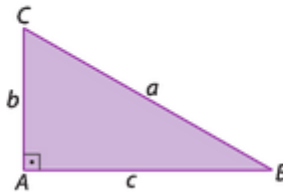
$$a = \sqrt{65}$$

$$a \approx 8,06$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS, p.149

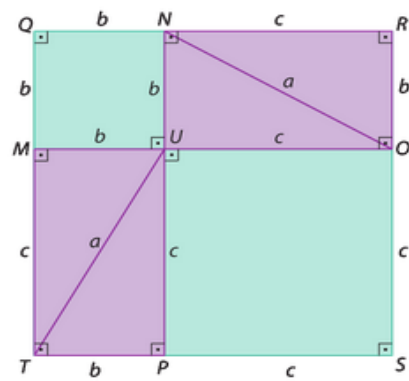
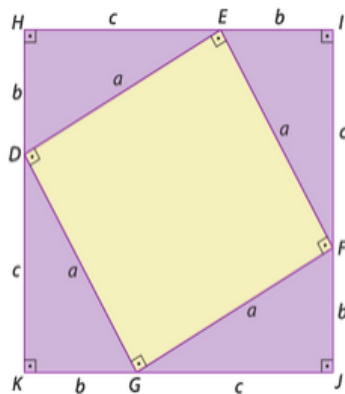
A seguir, apresentamos uma demonstração por meio da comparação de medidas de áreas de figuras geométricas.

Observe a seguir o triângulo retângulo ABC .



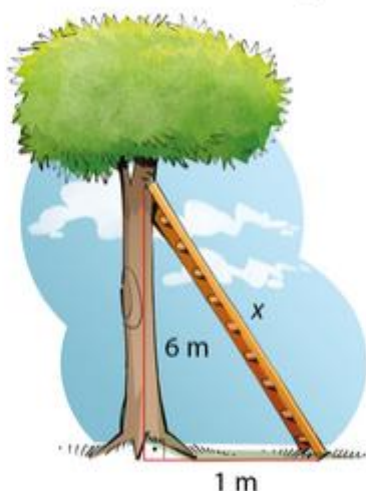
Queremos demonstrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Observe as figuras.



EXERCÍCIO, p.150

3. Uma escada está apoiada no tronco de uma árvore, conforme o esquema a seguir.



Calcule a medida de comprimento x , em metro, dessa escada.

ANÁLISE

Os jogos de linguagem do Teorema de Pitágoras apresentado neste livro é o que se observa geralmente nos livros didáticos. O Teorema de Pitágoras mostrado passo a passo como construir no GeoGebra é o que iguala a soma dos quadrados dos catetos ao quadrado da hipotenusa. Já a demonstração no livro é a hindu, mesma do livro de Bianchini, e que também não é bem explorada. Mostrar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa no GeoGebra não garante aprendizagem pois, talvez a complexidade esteja em outra situação, a compreensão de área. Segundo Pereira, Couto e Costa (2016), isso:

diz respeito a uma das principais dificuldades apontadas pelos alunos investigados, a saber: a falta de compreensão do conceito de área relacionado aos lados do triângulo, tendo assim a dificuldade em estabelecer a existência da relação pitagórica como sendo “o quadrado da hipotenusa é soma do quadrado dos catetos”, no qual eles não associam a relação de área presente (Pereira, Couto e Costa, 2016, p.11).

Esse não domínio sobre o conceito de área, pode estar também contribuindo para o não aprendizado do Teorema de Pitágoras. As abordagens feitas no livro seguem uma ideia didática, porém a demonstração do livro deve ser bem explorada pelo próprio livro. Um outro fator diz respeito ao preparo do aluno, segundo Bastian (2000, p.181), a falta ou escassez de conhecimentos disponíveis dos alunos, a dificuldade na interpretação e conversão dos enunciados, a falta de hábito em resolver questões encadeadas por vários itens e o despreparo no trato com a representação algébrica pode ser um complicador.

Como vimos no capítulo anterior, as demonstrações do Teorema de Pitágoras podem não ser compreendida pelos alunos, por inúmeros fatores. Um outro detalhe, a abordagem de quebra cabeça também não garante aprendizagem, a demonstração hindu como abordado no livro pode vir a ser compreendido como um quebra-cabeça, pelo aluno. O livro explora pouco as possibilidades de se abordar o Teorema de Pitágoras nas mais variadas situações. Repito, o que é apresentado, deverá ser bem trabalhado em sala para produzir aprendizagem. Os jogos de linguagem e essa regra escrita no livro, sem treinos variados, podem gerar incompreensões.

A questão 3 do exercício da página 150 representa uma situação de aplicação do Teorema de Pitágoras. É importante que se treine e que se diga que questões como essa já eram trabalhadas na antiguidade antes mesmo do Teorema ser demonstrado. Importante ficar claro para o aluno, que antes da formalização do Teorema de Pitágoras, as relações métricas do triângulo retângulo já eram conhecidas e utilizadas como técnica nos cálculos que envolviam as mais diversas situações. Segundo Silveira (2005):

O importante na demonstração é como o sujeito constrói o sentido da proposição. A demonstração é um modelo e uma imagem e, pela demonstração, se negocia a gramática de nossa linguagem como também se negociam nossos conceitos. Assim, a demonstração produz novas conexões e cria o conceito dessas conexões, guia e dirige nossas experiências dentro de canais determinados e mostra o sentido de uma proposição (Silveira, 2005, p. 57).

No caso de se gerar indagações, ótimo, pois o aluno tende a participar mais ativamente nesse jogo de linguagem, na regra e nos treinos variados. Porém, o professor precisará dominar esse saber matemático, como construção histórica e seu percurso histórico, só assim as articulações linguísticas que venham a ser desenvolvidas na abordagem tenderão a criar condições de aprendizado do aluno.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As contribuições de Tales de Mileto e Pitágoras de Samos para o desenvolvimento da matemática são notáveis. A observação feita por Pitágoras, que a soma dos quadrados dos lados menores de um triângulo retângulo seria igual ao quadrado do maior lado maior, contribuiu para a melhoria desse conhecimento. Os estudos feitos por Tales de Mileto sobre paralelismo e proporcionalidade também somaram ao desenvolvimento da matemática. Ambos os teoremas mostram como a matemática caminhou ao longo da História. O Teorema de Pitágoras em particular, era um conhecimento não sistematizado por egípcios, chineses e babilônicos, era usado como um recurso, técnica, e não propriamente de forma sistematizada onde a relação se aplica a qualquer triângulo retângulo.

O Teorema de Tales e o de Pitágoras, objetos desta pesquisa, possuem relevância histórica incontestável. Suas aplicabilidades práticas são inúmeras, neste sentido, ter o domínio sobre este saber matemático passa a ser importante não só na área do conhecimento matemático com também é relevante em situações do dia a dia. As dificuldades apresentadas por alunos, na compreensão do Teorema de Tales e o de Pitágoras descritas nesta pesquisa, muitas das vezes recaem somente nos ombros dos alunos. Parecem ser evidentes o Teorema de Tales e o de Pitágoras, porém, não é o que se mostrou no decorrer da pesquisa. Compreender a linguagem e suas articulações nas mais variadas situações passa a ser um viés de compreensão desta problemática.

Tais conhecimentos foram fundamentados a partir de aplicações práticas, ou seja, não se criou os teoremas e depois se aplicou, os teoremas vieram da observação que tais cálculos poderiam ser sistematizados em enunciados e demonstrados matematicamente. Não se sabe ao certo, o tempo que Pitágoras levou para sistematizar o teorema a ele dado autoria, o mesmo acontece com Tales. Logo penalizar alunos por um não aprendizado imediato, passa a ser o caminho mais curto para não se saber ao certo os reais motivos da não aprendizagem.

O questionamento inicial desta pesquisa era o de saber *quais as dificuldades encontradas por alunos na aprendizagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras, sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein?* A resposta, baseado nas análises em Bastian (2000), Pereira, Couto e Costa (2016), Pessanha (2017) e nos livros Matemática Bianchini e Araribá Conecta Matemática, não esclarece explicitamente, que as dificuldades no aprendizado seja consequência de uma não compreensão linguística. A percepção de que há dificuldade na compreensão linguística no ensino do Teorema de Tales e o de Pitágoras, só

são possíveis os observar sob a lente da filosofia da linguagem de Wittgenstein e suas ideias sobre jogos de linguagem, seguir regra, treino e ver como.

Ao Analisar as dificuldades encontradas por alunos na aprendizagem do Teorema de Tales e o de Pitágoras, sob a lente da filosofia da linguagem matemática de Wittgenstein, foi possível articular as ideias sobre jogos de linguagem, seguir regra, treino e ver como, e assim ter a percepção de que parte do não aprendizado dos alunos é reflexo de uma não compreensão linguística. A ideia de que o aluno pode não compreender a regra jogada no ensino destes teoremas precisa ser levada em consideração para que inúmeras estratégias sejam consideradas em seus respectivos ensinamentos. A compreensão dos jogos de linguagem e os conhecimentos inerentes ao Teorema de Tales e o de Pitágoras, mostraram-me o quanto o conhecimento matemático é vasto em todas as suas dimensões.

Outra importante observação no ensino destes teoremas está na ideia de seguir uma regra e o treino. Há inúmeras aplicabilidades do Teorema de Tales e o de Pitágoras, nesse sentido há também inúmeras possibilidades de seguir uma regra e treino com estes teoremas, só assim posteriormente se verificaria o aprendizado do aluno. A pesquisa mostra também o despreparo dos alunos sobre inúmeros conhecimentos matemáticos, alunos que não dominam a ideia de área, não sabem identificar um triângulo retângulo, nas mais diversas representações geométricas, não sabem o que é paralelismo ou proporção, enfim. Observou-se nos livros uma exploração resumida dos teoremas, no que tange aspectos dos treinos e exercícios. O aprendizado difere de aluno para aluno, nesse sentido, uma abordagem escassa de treinos variados pode comprometer o aprendizado do aluno.

Os teoremas não foram criados e tão pouco foram sistematizados da noite para o dia. São conhecimentos que foram paulatinamente aperfeiçoados. Quando Pitágoras percebe a relação métrica que havia no triângulo retângulo, observando os contextos práticos em que estas relações eram aplicadas por babilônios e egípcios, passa a fazer um estudo mais aprofundado com os pitagóricos e, não se sabe o tempo que levaram para formalizarem o seu enunciado. A provável demonstração do teorema feita por Pitágoras tenha sido a de representar as áreas de cada lado do triângulo retângulo. Hoje há inúmeras demonstrações, desde as mais simples as mais complicadas.

No decorrer desta pesquisa, percebi o quanto analisar somente os livros didáticos são insuficientes. Precisou-se abarcar outros trabalhos que elencavam as dificuldades dos alunos no aprendizado destes teoremas. Assim, possibilitou-se relacionar o que está escrito nos livros didáticos com o aprendizado dos alunos apresentado nas pesquisas, e assim refletir os possíveis caminhos linguísticos que geram este não aprendizado destes teoremas. O

desinteresse e a aversão do aluno pela matemática não podem ser normalizados. Precisamos analisar como a linguagem matemática pode ser uma facilitadora ou uma complicadora no aprendizado do aluno, para só então traçarmos caminhos e estratégias que possibilitem articulações no ensino com aprendizado.

REFERÊNCIAS

ABREU DA SILVEIRA, Marisa Rosâni; VILHENA DA SILVA, Paulo. Aplicação de regras matemáticas: entre o treino e o uso da gramática. **REMATEC**, Belém, v. 14, n. 31, p. 120–135, 2019. DOI: 10.37084/REMATEC.1980 - 3141.2019.n31. p.120-135.id191. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/171>. Acesso em: 02 jul. 2025.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA: PROBLEMÁTICA DE SEUS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM**. GT: Educação Matemática / n.19

ARARIBÁ CONECTA MATEMÁTICA: 9º ano; manual do professor/ organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora responsável Mara Regina Garcia Gay. – 1. Ed.—São Paulo: Moderna, 2022.

ARAUJO, Antonio Pinheiro de. **O Livro Didático de Matemática: utilização na percepção do aluno**. Bolema, Rio Claro – SP, v. 7, n. 8, 1992

BASTIAN, Irma Verri. **O TEOREMA DE PITÁGORAS**. 2000. 229 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, 2000.

BERTÉ, Annie.1995. Différents ordres de présentation des premières notions de geometrie métrique dans l' enseignement secondeire. Recherches en didactique des mathématiques, vol.15, nº 3, pp.83-130. La Pensée Sauvage Editions.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

CHABANNE, Jean Luc. Dificuldades de aprendizagem: um enfoque inovador no ensino escolar. Tradução de Regina Rodrigues. São Paulo: Ática, 2006.

DANYLUK, Ocsana Sônia. **Alfabetização Matemática: As primeiras manifestações da escrita infantil**. 2015. 5ª Ed. UPF editora.

DOS ANJOS, Cristine Moraes; SECAFIM, Mariana Figueira. Dificuldades com a Aprendizagem de Matemática na Educação Superior. **CoInspiração-Revista dos Professores que ensinam Matemática**, v. 1, n. 1, p. 78-91. 2018.

Euclides. Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

Eves, Howard. Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS, Ronaldo Diones Ruiz, COSTA, Lucélida de Fátima Maia da. **O PAPEL DA LINGUAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**. Manaus | v.14 | n.28 |ago-dez|2020

FEIO, Evandro dos Santos Paiva. Matemática e linguagem: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática. Dissertação (Mestrado). IEMCI, UFPA, Belém 2009.

FERRARO, José Luís. Wittgenstein e os jogos de linguagem. *Revista Educação Pública*, v. 21, nº 30, 10 de agosto de 2021. Disponível em:

<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/30/wittgenstein-e-os-jogos-de-linguagem>

FUNDÃO REIS, Rita de Cássia. Uma História sobre o livro didático no Brasil. **REMATEC**, Belém, v. 2, n. 3, p. 15–17, 2007. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/416>. Acesso em: 02 jul. 2025.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social** / Antonio Carlos Gil. – 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008

GODOY A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *RAE-Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, mar-abr, p. 57-63, 1995.

GOMES, Cristiane Patrícia Rocha; PENHA, Pedro Xavier da. Mapeando as principais dificuldades de aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental: estudos na Revista Cefac. *Revista Educação Pública*, v. 21, nº 11, 30 de março de 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/11/mapeando-as-principais-dificuldades-de-aprendizagem-nos-anos-iniciais-do-ensino-fundamental-estudos-na-irevista-cefaci>.

GOTTSCHALK, C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais *Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3*, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.- dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. *Revista Latinoamericana de Filosofía de la Educación*. v. 2 – n. 4 – 2015 pp. 299-315.

GRAYLING, A. C. Wittgenstein. Tradução de Milton Camargo Mota. São Paulo: Loyola, 2002.

HOLANDA Clemilton da Cruz, SILVA Jairo Santos. **Uma Abordagem Sobre O Teorema de Talles**. *Revista Multidebates*, v.4, n.4 Palmas-TO, outubro de 2020. ISSN: 2594-4568

Investigações filosóficas / Ludwig Wittgenstein; tradução Marcos G. Montagnoli; revisão da tradução e representação Emmanuel Carneiro Leão. 6ª ed. - Petrópolis :Vozes, 2009.

JÚNIOR, Roberto Lírío Florenço. **A LINGUAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: PERSPECTIVAS E DIFICULDADES** e-exacta, Belo Horizonte, v. 7, n. 1, p. 29-34. (2014). Editora UniBH. Disponível em: ww.unibh.br/revistas/exacta/.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA MEIRA, Janeisi de; ABREU DA SILVEIRA, Marisa Rosâni. A Tradução da Linguagem Matemática na aprendizagem da Geometria por estudantes da Educação Básica. **REMATEC**, Belém, v. 14, n. 31, p. 63–81, 2019. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2019.n31. p 63-81.id188. Disponível em:

<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/168>. Acesso em: 25 jul. 2025.

LIRA, João Victor Dantas; SILVA, Maria Vitória Ramalho da; NETO, João Ferreira da Silva. Dificuldades de aprendizagem matemática: o que dizem as pesquisas recentes. EMR-RS, ano 25, v.1, n. 25, 2024, p. 54-61.

LOOMIS, E. S. (1940). The Pythagorean Proposition. Ann Arbor, Michigan, USA:NCTM.

LOPES, A. R. L. V.; GOLIN, A. L.; GIACOMELLI, C.P.; KLEIN, M. L. Ensinar e aprender o conceito de número nos anos iniciais: o clube de matemática. ACTIO: Docências em Ciências, Curitiba, v. 4, n. 3, p. 652-674, 2019.

Matemática - Bianchini: manual do professor / Edwaldo Bianchini. – 9. ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

MASOLA, W.; ALLEVATO, N. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 3, n. 7, p. 52–67. 2019.

OTTE, Michael Friedrich; BARROS, Luiz Gonzaga Xavier de. **MATEMÁTICA E LINGUAGEM**. Caminhos da Educação Matemática em Revista/*On line* - v. 3, n. 1, 2015 - ISSN 2358-4750.

PEREIRA, COUTO e COSTA. **ANÁLISE DE ERROS EM QUESTÕES DE TEOREMA DE PITÁGORAS:** Um estudo com alunos do Ensino Fundamental. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016

PESSANHA, Rogério Maurício Fernandes. **Teorema de Tales e semelhança de triângulos na educação de jovens e adultos:** uma aprendizagem significativa / Rogério Maurício Fernandes Pessanha. – Campos dos Goytacazes, 2017

RODRIGUES, L. L. **A Matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano.**

ROQUE, Tatiana. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Repositório Institucional da Universidade Católica de Brasília. Brasília: UCB, 2004. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1551/1/Luciano%20Lima%20Rodrigues.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2025.

SALLE, R. L. 2013. Disponível em: <<http://www.lasalle.edu.br/public/uploads/publications/sobradinho/ffaac4d0af89eda3d7680b14f2f97cff.pdf>>.

SARTORI, Alice Stephanie Tapia; DUARTE, Claudia Glavam. A linguagem em Wittgenstein e algumas implicações para a Educação Matemática. Educação e linguagem [livro eletrônico]: ensino, contribuições e discursos / Organizador Flávio Aparecido de Almeida. – Guarujá, SP: Científica Digital, 2021.

SILVA, Circe Mary Silva da. O livro didático de matemática no Brasil no século XIX. In: FOSSA, John A. (Org.). Facetas do diamante: ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: SBHmat, 2000.

SILVA, Carlos Evaldo dos Santos. Alfabetização e Linguagem Matemática. **LINGUAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. São Paulo: Livraria da Física, 2022.

SILVA, Paulo Vilhena. O APRENDIZADO DE REGRAS MATEMÁTICAS: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão. UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ – UFPA/PA. 2011.

SILVA, Paulo Vilhena; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. **O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática**: um ensaio. BoEM, Joinville, v.2. n.3, p. 17-34, ago./dez. 2014.

SILVA, Paulo Vilhena; JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro Teixeira; MALHEIRO, João Manoel da Silva. **As aplicações da Matemática como um ver-como wittgensteiniano**. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

SILVA, Paulo Vilhena da; JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro Teixeira; COSTA, Daniana de; DIAS, Alyne Maria Rosa de Araújo. **Uma filosofia da educação matemática na perspectiva de Wittgenstein**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 24, n. 2, p. 147-179, 2022

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: UFRGS, 2005.

SILVEIRA, D. T., & CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. Métodos de pesquisa. Porto Alegre: Editora: UFRGS 2009.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da, SILVA, Paulo Vilhena, JÚNIOR, Valdomiro Pinheiro Teixeira **A filosofia da linguagem e suas implicações na prática docente: perspectivas wittgensteinianas para o ensino da matemática**. PERSPECTIVA, Florianópolis, v. 35, n. 2, p. 462-480, abr./jun. 2017.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da, SILVA, Paulo Vilhena. **Perspectivas Wittgensteinianas em Pesquisas da Educação Matemática**. BoEM, Joinville, v. 7, n. 13, p. 80-99, jul/ago 2019.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Gramática da Matemática e seus usos**. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros (MG), Brasil v. 4, e202020, p. 1-16, 2020.

TASCHETTO, L. R., DUARTE, C. G. Educação Matemática e jogos de linguagem na escola: Reverberações. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v.23, n.1, p.186-203, jan./jun.2015.

Tractatus Logico-Philosophicus. Trad. bras. Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EDUSP, 2ª. ed., 1994.

VIALI, Lori. SILVA, Mercedes Matte da. **A linguagem matemática como dificuldade para alunos do ensino médio**. Conference: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática At: Belo Horizonte. Julho de 2007.

WITTGENSTEINW, Ludwig. **Investigações filosóficas**. Tradução Marcos G. Montagnoli; revisão da tradução e representação Emmanuel Carneiro Leão. 6ª ed. - Petrópolis: Vozes, 2009.