UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

NOVA METODOLOGIA PARA ANÁLISE E SÍNTESE DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO COMPLEXOS UTILIZANDO O MÉTODO LN-FDTD, COMPUTACÃO PARALELA AUTOMÁTICA E REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

RODRIGO MELO E SILVA DE OLIVEIRA

TD - 02 / 2008

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

NOVA METODOLOGIA PARA ANÁLISE E SÍNTESE DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO COMPLEXOS UTILIZANDO O MÉTODO LN-FDTD, COMPUTACÃO PARALELA AUTOMÁTICA E REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

RODRIGO MELO E SILVA DE OLIVEIRA

TD - 02 / 2008

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

NOVA METODOLOGIA PARA ANÁLISE E SÍNTESE DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO COMPLEXOS UTILIZANDO O MÉTODO LN-FDTD, COMPUTACÃO PARALELA AUTOMÁTICA E REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

RODRIGO MELO E SILVA DE OLIVEIRA

Tese submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPA para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil
2008

048n Oliveira, Rodrigo Melo e Silva de

Nova metodologia para análise e síntese de sistemas de aterramento Complexos utilizando o método LN-FDTD, computacão paralela automática e redes neurais artificiais / Rodrigo Melo e Silva de Oliveira; Orientador, Carlos Leonidas da Silva Souza Sobrinho.-2008.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2008.

1. Linhas Elétricas Subterrâneas. 2. Diferenças Finitas. 3. Redes Neurais (computação). 4. Sistemas Distribuídos (computação). I. Título.

CDD - 22. ed. 621.31923

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

NOVA METODOLOGIA PARA ANÁLISE E SÍNTESE DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO COMPLEXOS UTILIZANDO O MÉTODO LN-FDTD, COMPUTACÃO PARALELA AUTOMÁTICA E REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

AUTOR: RODRIGO MELO E SILVA DE OLIVEIRA

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM 29/ 02/ 2008

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Leonidas da Silva Souza Sobrinho
(ORIENTADOR - UFPA)

Prof. Dr. Jordan Del Nero
(MEMBRO - UFPA)

Prof. Dr. José Ricardo Descardeci
(MEMBRO - UFTO)

Prof. Dr. Rubem Gonçalves Farias
(MEMBRO - UFPA)

Prof. Dr. Ronaldo Oliveira dos Santos
(MEMBRO - IESAM)

Prof. Dr. Silvério Visacro Filho
(MEMBRO - UFMG)

Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes
(COORDENADOR DO PPGEE/ITEC/UFPA)

UFPA / ITEC / PPGEE

"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."
Isaac Newton.
(1643 - 1727)

Aos meus pais, Roselucie e Jacob.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Sou muito grato à minha família, que me deu a base necessária para que eu pudesse enfrentar os desafios da vida. Sem dúvida, é um elemento essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Roselucie, Jacob, Renata e meu tio, José Jacob, obrigado! Agradeço também à Victoria por tudo.

Um agradecimento especial deve ser dado ao Professor Leonidas, que sempre, sem hesitar, esteve à disposição para me apoiar e, principalmente, por acreditar no meu trabalho. Sem dúvida, é um excelente e competente orientador e uma ótima pessoa. Agradeço a todos os professores do PPGEE, em especial ao Rubem e ao João. Agradeço a todos os amigos do LANE (Laboratório de Análises Numéricas em Eletromagnetismo), especialmente ao Yuri, pela grande ajuda na construção de estruturas complexas no LANE SAGS.

Agradeço ao CNPq pela concessão da bolsa de doutorado.

Devo agradecer à Eletronorte, à Ericsson, Amazônia Celular e à UFPA pela infraestrutura computacional disponibilizada: os clusters Amazônia I e II, sem os quais o desenvolvimento deste trabalho estaria comprometido.

Gostaria de agradecer a toda a comunidade do *software* livre pelos excelentes softwares disponibilizados, que foram utilizados neste trabalho.

Por fim, agradeço à banca examinadora e aos revisores das revistas por suas preciosas contribuições para a versão final deste trabalho.

Lista de Símbolos

$\vec{E}$	Vetor Intensidade de Campo Elétrico
$\vec{H}$	Vetor Intensidade de Campo Magnético
$\vec{D}$	Vetor Densidade de Fluxo Elétrico
$\vec{B}$	Vetor Densidade de Fluxo Magnético
ϵ_o	Permissividade Elétrica do Vácuo
μ_o	Permeabilidade Magnética do Vácuo
ϵ	Permissividade Elétrica
μ	Permeabilidade Magnética
σ	Condutividade Elétrica
σ_α	Condutividades para UPML
t	Tempo
x, y e z	Coordenadas do Sistema Cartesiano
E_x, E_y e E_z	Componentes do Campo Elétrico
H_x, H_y e H_z	Componentes do Campo Magnético
D_x, D_y e D_z	Componentes de $\vec{D}$
B_x, B_y e B_z	Componentes de $\vec{B}$
$\frac{df}{d\alpha}$	Derivada de f em relação a α
$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$	Derivada Parcial de f em relação a α
(i, j, k)	Endereçamento no Espaço Discretizado
n	Índice Temporal
Δ_x, Δ_y e Δ_z	Incrementos Espaciais
Δ_t	Incremento Temporal
$A^n_{\alpha\ (i,j,k)}$	Componente α de $\vec{A}$ discretizada no instante n

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$	Operador Rotacional de $\vec{A}$
τ	Coeficiente de Transmissão
Γ	Coeficiente de Reflexão
A^i	i-ésima componente contravariante de $\vec{A}$
A_i	i-ésima componente covariante de $\vec{A}$

Sumário

1 Introdução **2**

1.1 Conteúdo do Capítulo 2

1.2 Introdução Geral 2

1.3 Objetivos e Propostas 5

1.4 Organização do trabalho 6

2 Aterramento Elétrico: Introdução **8**

2.1 Conteúdo do Capítulo 8

2.2 Introdução 8

2.3 Solo 9

2.4 Descargas Atmosféricas 15

2.5 Física em Sistemas de Aterramento 20

2.5.1 As Equações de Maxwell na Forma Diferencial no Domínio do Tempo 21

2.5.2 Eletrodinâmica em Sistemas de Aterramento 23

2.6 Modelos Matemáticos: Estado da Arte 27

3 O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo Aplicado às Equações de Maxwell **32**

3.1 Conteúdo do Capítulo 32

3.2 Método FDTD: Uma visão geral 32

3.3 O algoritmo de Yee em Coordenadas Retangulares (Método FDTD) 35

3.3.1 Obtenção das Equações FDTD para $\vec{E}$ e $\vec{H}$ 38
3.3.2 Precisão e Estabilidade 41
3.4 Representação de estruturas metálicas "finas" por FDTD 42
3.4.1 Introdução 42
3.4.2 A Formulação de Noda−Yokoyama 43
3.5 O algoritmo de Yee em Coordenadas Gerais (Método LN-FDTD) 47
3.5.1 O sistema de Coordenadas Não-Ortogonal 47
3.5.2 O Método LN-FDTD 50
3.5.3 Estabilidade e Precisão do Método LN-FDTD 54
3.5.4 Cálculos de Tensões e Correntes e a implementação da Fonte de Excitação 56

4 Formulação UPML para Meios Condutivos em Coordenadas Gerais (LN-UPML) 59
4.1 Conteúdo do Capítulo 59
4.2 Introdução 59
4.3 Desenvolvimento Matemático da Formulação 62
4.4 Cálculo do Erro Gerado pela Formulação 68

5 Redes Neurais Artificiais (RNAs) 71
5.1 Conteúdo do Capítulo 71
5.2 Introdução 71
5.3 O Algoritmo *Backpropagation* 74
5.4 O Algoritmo *Marquardt-Levenberg Backpropagation* 77

6 O Ambiente LANE SAGS 80
6.1 Conteúdo do Capítulo 80
6.2 Introdução 80
6.3 O *Software* LANE SAGS *Cluster Edition* 81

7 Resultados Numéricos **91**

7.1 Conteúdo do Capítulo 91

7.2 Eletrodo Horizontal 91

7.3 Sistema de aterramento do tipo prato 93

7.3.1 Geração da Malha 100

7.4 Eletrodos Verticais em Disposição Circular 101

7.5 Eletrodo Semi-esférico 104

7.6 Detecção de descontinuidades em malha de terra 108

7.7 Simulações de estruturas complexas com o *Software* LANE SAGS 115

7.7.1 Redução do Potencial de Passo e de Oscilações Transitórias: o Modelo Pirâmide 115

7.7.2 Simulações de Malhas de Aterramento na Presença de Edificações . 128

7.7.3 Espalhamento Eletromagnético em uma Subestação 134

8 Considerações Finais **161**

A UPML em Coordenadas Retangulares **164**

A.1 Física do Problema 164

A.1.1 Meio Isotrópico (Meio 1) 164

A.1.2 Meio Anisotrópico (Meio 2) 165

A.2 Obtenção das Equações em Diferenças Finitas 172

Lista de Figuras

1.1 Símbolos que diferenciam o terra: a) conexão física com o solo, b) chassis utilizado como referência, c) referência para sinais eletrônicos (baixa potência). 3

2.1 Exemplo de perfil do solo. 10

2.2 Amostra de solo utilizada para estimar as suas características elétricas σ e ϵ. 11

2.3 O Método de Wenner. 13

2.4 Estatística mundial (NASA) sobre o número de descargas por km^2 por ano. 18

2.5 Forma de onda típica de um raio. 19

2.6 Forma do pulso utilizado como excitação em todas as simulações (amplitude normalizada $\times$ tempo). 20

2.7 Exemplos de caminhos de integração do campo $\vec{E}$ para cálculo da tensão no ponto de injeção de corrente através de (2.16). 24

2.8 Eletrodo horizontal: exemplo de evolução do transitório eletromagnético: (a) e (b) propagação no canal de descarga (simetria); (c) e (d) propagação também no solo para problema transitório assimétrico. Instantes (μs): (a) 0,0125, (b) 0,025, (c) 0,0375 e (d) 0,05. 26

2.9 Modelo experimental de medição de Tanabe. 30

2.10 Modelo computacional (Tuma et. al.). O eletrodo horizontal representa o sistema de aterramento. 31

3.1 Distribuição espacial das componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ para a célula de Yee (i, j, k). 37
3.2 *Leapfrog*: distribuição intercalada no tempo e no espaço das componentes de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ para um caso unidimensional do algoritmo de Yee. 39
3.3 Componentes dos campos elétrico e magnético adjacentes ao fio fino. . . . 45
3.4 O sistema curvilíneo de coordenadas e os vetores unitários. 48
3.5 Vetores unitários em uma célula não ortogonal (malha estruturada). 49
3.6 Componentes Covariantes em Células de Yee Não-Ortogonais: Célula Primária para o Campo Elétrico $\vec{E}$ e Célula Secundária para o Campo Magnético $\vec{H}$. 55
3.7 A geometria considerada para calcular V^r_{AB}. 57

4.1 Corte da malha computacional ilustrando a truncagem do método por UPML e uma estrutura arbitrária sob análise. 61
4.2 Localização dos pontos utilizados para a avaliação do erro relativo na malha reduzida $(50 \times 50 \times 50)$. 69
4.3 Erro relativo calculado para a formulação UPML desenvolvida (10 camadas). 70

5.1 (a) Esquema de um neurônio biológico e (b) Modelo Artificial do Neurônio Biológico. 73
5.2 Rede Neural Artificial de três camadas $(L = 3)$. 74

6.1 Janela principal do LANE SAGS CE. 83
6.2 Exemplo de visualização de uma malha de terra com o módulo OpenGL e a tabela *Proc. Paralelo*. 85
6.3 Funções Complementares do Ambiente Computacional. 86
6.4 Fluxograma do módulo principal do LANE SAGS CE. 87
6.5 Domínio 3D dividido em *npc* sub-domínios. 88
6.6 Troca de informações entre sub-domínios vizinhos. 89

7.1 Eletrodo horizontal e o cálculo da corrente e da tensão. 92
7.2 Relações tensão/corrente em uma das extremidades do eletrodo horizontal colocado a 1,5 metro de profundidade, obtidas pelos métodos FDTD (círculos) e LN-FDTD (linha cheia, inclinação de 45 graus). 94
7.3 Sistema de aterramento do tipo prato. 95
7.4 Corte horizontal da malha gerada para simular o sistema de aterramento do tipo prato. 96
7.5 Relação Tensão/Corrente para um sistema de aterramento do tipo prato com $h = 0.5$ e diâmetro de 5,5m ($\sigma = 2{,}28 \times 10^{-3}$ S/m e $\epsilon_r = 50$). 97
7.6 Relação Tensão/Corrente para um sistema de aterramento do tipo prato com $h = 0.5$ e diâmetro de 8.0m ($\sigma = 2{,}28 \times 10^{-3}$ S/m e $\epsilon_r = 50$). 98
7.7 Passos necessários para a geração da malha para simular o eletrodo em forma de prato. 99
7.8 Representação dos eletrodos em disposição circular. 101
7.9 Eletrodos em disposição circular no LANE SAGS ($\Delta = 0{,}25$ m). 102
7.10 Eletrodos em disposição circular no LANE SAGS ($\Delta = 0{,}50$ m). 103
7.11 Relações $V(t)/I(t)$ obtidas pelos métodos FDTD e LN-FDTD para os eletrodos dispostos circularmente. 103
7.12 Representação do eletrodo semi-esférico simulado. 104
7.13 Corte da malha computacional estruturada para simular o eletrodo semi-esférico (metade da resolução real). 105
7.14 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para o eletrodo semi-esférico. 106
7.15 Componente e_3 do campo $\vec{E}$ (dB) no início do período transitório, evidenciando a absorção promovida pela formulação desenvolvida e a consistência física do problema do eletrodo semi-esférico. 107
7.16 Exemplo de nó defeituoso (usado no treinamento). 109

7.17 Exemplos das quatro respostas transitórias de corrente para quatro defeitos diferentes na malha de aterramento. 110
7.18 Classes para cada rede neural (linhas e colunas). 111
7.19 Respostas da rede treinada para identificar colunas. 112
7.20 Respostas da rede treinada para identificar linhas. 113
7.21 Exemplo de haste defeituosa (usado para validação). 113
7.22 Performance da rede para o treinamento da primeira rede. 114
7.23 Malha de terra utilizada como referência. 116
7.24 Malha de terra utilizada como referência no ambiente LANE SAGS. 117
7.25 Relação $V(t)/I(t)$ para a malha de terra utilizada como referência. 118
7.26 Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para a malha de terra utilizada como referência. 118
7.27 Campo elétrico no plano da malha de terra utilizada como referência. . . . 119
7.28 Malha espiral 2D. 120
7.29 Malha espiral 2D no ambiente LANE SAGS. 120
7.30 Relação $V(t)/I(t)$ para a espiral 2D. 121
7.31 Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para a espiral 2D. 121
7.32 Campo elétrico no plano da espiral 2D. 122
7.33 Malha Espiral 3D. 123
7.34 Malha Espiral 3D no ambiente LANE SAGS. 123
7.35 Relação $V(t)/I(t)$ para a malha espiral 3D. 124
7.36 Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para a malha espiral 3D. 124
7.37 Malha de terra modelo pirâmide. 125
7.38 O Modelo Pirâmide no ambiente LANE SAGS. 126
7.39 Relação $V(t)/I(t)$ para o modelo pirâmide. 127

7.40 Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para o modelo pirâmide. 127
7.41 Laboratório das Engenharias Elétrica e da Computação na UFPA. 128
7.42 Detalhe das Caixas de Inspeção da Malha de Aterramento do Laboratório. 129
7.43 Progresso do Desenvolvimento do Modelo Computacional do Prédio do Laboratório: (a) e (b) paredes de concreto, (c) partes metálicas, (d) modelo concluído. 131
7.44 Relações $V(t)/I(t)$ para a malha sem e com a presença do laboratório. . . 132
7.45 Modelo Computacional para Simular uma Descarga em um Pára-Raio de Franklin instalado no Laboratório. 133
7.46 Planos nos quais as distribuições de campo foram capturadas (laboratório). 133
7.47 Plano 1: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$. 135
7.48 Plano 2: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$. 136
7.49 Plano 3: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$. 137
7.50 Plano 4: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$. 138
7.51 Plano 5: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$. 139
7.52 Vista superior da Subestação. 141
7.53 Vista lateral da Subestação. 142
7.54 Primeira Fase de Construção da Subestação. 143
7.55 Segunda Fase de Construção da Subestação. 144
7.56 Terceira Fase de Construção da Subestação. 145
7.57 Configuração da primeira simulação da malha da subestação. 146

7.58 Configuração da segunda simulação da malha da subestação. 147
7.59 Configuração da terceira simulação da malha da subestação. 147
7.60 Configuração da quarta simulação da malha da subestação. 148
7.61 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a primeira simulação da malha da subestação.149
7.62 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a segunda simulação da malha da subestação.150
7.63 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a terceira simulação da malha da subestação.151
7.64 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a quarta simulação da malha da subestação. 152
7.65 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a simulação da malha da subestação (completa). 153
7.66 Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a simulação da subestação (completa). . . . 154
7.67 Distribuição do Campo Elétrico no plano da Malha da Subestação. 155
7.68 Distribuição do Campo Magnético no plano da Malha da Subestação. . . . 156
7.69 Distribuição do Campo Elétrico no plano das Linha de Alta Tensão. 156
7.70 Distribuição do Campo Magnético no plano das Linha de Alta Tensão. . . 157
7.71 Distribuição do Campo Elétrico no plano do Pára-Raio. 157
7.72 Distribuição do Campo Elétrico no plano da cerca de proteção. 157
7.73 Distribuição do Campo Magnético no plano da cerca de proteção. 158
7.74 Potencial ao longo da reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto de injeção de corrente ($x = 184{,}5$ m, $t = 38{,}5$ μs). 159
7.75 Potencial ao longo da reta paralela ao eixo y na superfície do solo ($x = 99{,}0$ m, $t = 38{,}5$ μs) (a) e (b) localização e (c) curva linear de potencial. 160

A.1 Interface entre um meio isotrópico (Meio 1) e um meio uniaxialmente anisotrópico (Meio 2) para o modo TE (TMy). 166

Lista de Tabelas

2.1 Efeito da umidade na resistividade do solo (Ω.m). 12

2.2 Efeito da temperatura na resistividade do solo (Ω.m). 12

2.3 Parâmetros Típicos das Correntes de Descargas Atmosféricas Negativas . . 18

7.1 Comparação entre valores de regime (em Ohms) obtidos por simulações FDTD tradicionais e pela equação analítica para várias profundidades de eletrodo horizontal ($L = 1{,}5$m, $a = 10$mm e $\sigma = 500^{-1} S/m$). 93

Resumo

Neste trabalho, o método FDTD em coordenadas gerais (LN-FDTD) foi implementado para a análise de estruturas de aterramento com geometrias coincidentes ou não com o sistema de coordenadas cartesiano. O método soluciona as equações de Maxwell no domínio do tempo, permitindo a obtenção de dados a respeito da resposta transitória e de regime estacionário de estruturas diversas de aterramento. Uma nova formulação para a técnica de truncagem UPML em coordenadas gerais, para meios condutivos, foi desenvolvida e implementada para viabilizar a análise dos problemas (LN-UPML). Uma nova metodologia baseada em duas redes neurais artificiais é apresentada para a detecção de defeitos em malhas de terra. O *software* FDTD em coordenadas gerais foi testado e validado para vários casos. Uma interface gráfica para usuários, chamada LANE SAGS, foi desenvolvida para simplificar o uso e automatizar o processamento dos dados.

Palavras-chave: Diferenças Finitas, Técnica LN-UPML, Redes Neurais Artificiais, Transitórios Eletromagnéticos, Aterramento Elétrico, Subestações de Energia, *Graphical User Interface*, *software* LANE SAGS.

Abstract

The FDTD method in General Coordinates (LN-FDTD) was implemented for analyzing structures not coincident to the Cartesian coordinate system. The method solves the Maxwell's equations in time domain, allowing the calculation of data concerning the transitory and steady-state responses of such structures. The method is applied to analyze of special grounding electrodes. A new formulation for the truncating technique UPML, for conductive media, referred here as LN-UPML, was developed and implemented in order to make the simulations viable. A new methodology for locating grounding grid faults using two Artificial Neural Networks is presented. The LN-FDTD software was tested and validated though simulations of various grounding systems. A graphical user interface, named LANE SAGS, was implemented to simplify the use and to automate the data processing.

Keywords: Finite Differences, LN-UPML, Artificial Neural Networks, Electromagnetic Transitory, Electrical Grounding, Power Substations, Graphical User Interface, LANE SAGS.

Captulo 1

Introduc-ao

1.1 Conteudo do Captulo

Este Captulo objetiva introduzir o leitor ao tema aterramento eletrico, ressaltando sua importância e func-oes principais. Discute os objetivos do trabalho e mostra como o mesmo foi organizado. Informac-oes importantes, tais como o estado da arte, est-ao disponveis no Captulo seguinte.

1.2 Introduc-ao Geral

O termo terra e comumente utilizado por engenheiros eletricistas e eletrotecnicos. No entanto, a falta de compreens-ao dos conceitos basicos do eletromagnetismo faz com que este assunto muitas vezes seja tratado com certo misticismo. Dessa forma, deve-se dizer imediatamente que, como todos os demais problemas do eletromagnetismo, este tambem e regido pelas equac-oes de Maxwell [1].

Em um circuito eletrico, o terra pode ser visualizado sob varios pontos de vista, tais como: um ponto de referência a partir do qual tens-oes de outros pontos do circuito s-ao medidas, um caminho de retorno comum para a corrente eletrica ou ainda uma conex-ao fsica do circuito com o solo (atraves de cabos e de eletrodos instalados no solo). Mesmo

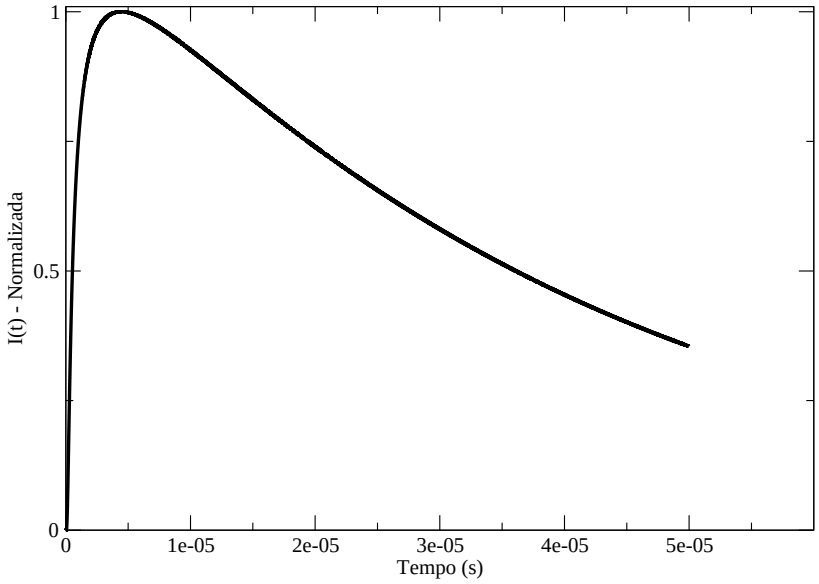

Figura 2.5: Forma de onda típica de um raio.

na qual I_0 é o valor de pico da corrente $I(t)$, h é um coeficiente de correção, τ_1 é o tempo de frente de onda, τ_2 é o tempo de cauda. Tipicamente, o espectro de freqüências dessas funções mostram valores significativos de 10 kHz até aproximadamente 1 MHz [31]. A Fig. 2.5 mostra uma forma de onda típica da corrente de um raio obtida através de (2.4), com os parâmetros típicos (Tabela 2.3).

A função usada como fonte de excitação neste trabalho (para efeito de comparação dos resultados numéricos) segue [2]. Ela é descrita pelas Equações (2.5) e (2.6), dadas em volts por:

se $t < 1.5T_f$

$$V_s(t) = (V_{\text{pico}}/A_o)(e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})\text{sin}^2(\Omega t) \tag{2.5}$$

e se $t \geq 1.5T_f$

$$V_s(t) = (V_{\text{pico}}/A_o)(e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t}), \tag{2.6}$$

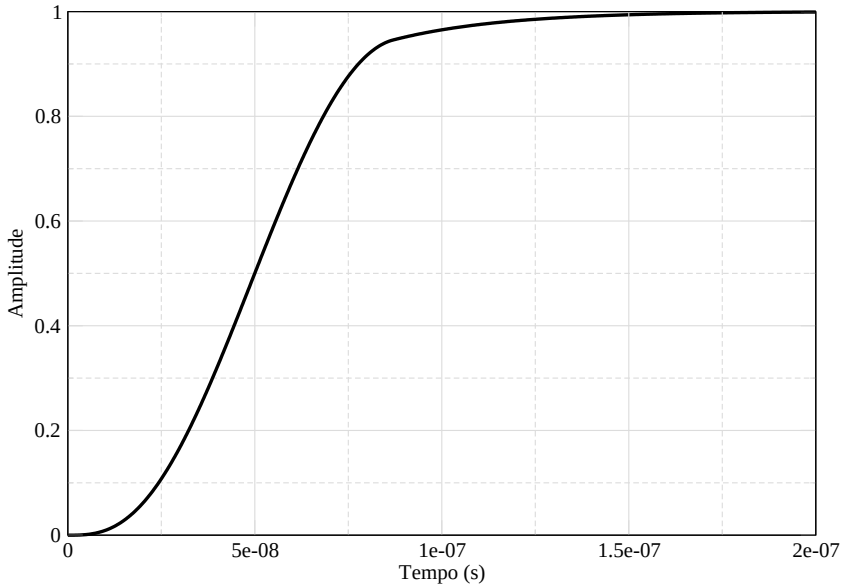

Figura 2.6: Forma do pulso utilizado como excitação em todas as simulações (amplitude normalizada $\times$ tempo).

nas quais $a_1 = 1{,}9315/T_f$, $a_2 = 2{,}5584/T_t$, $T_f = 0{,}058 \times 10^{-6}$, $T_t = 500 \times 10^{-6}$, $A_o = e^{-a_1 T_0} - e^{-a_2 T_0}$, $T_0 = \ln(a_1/a_2)/(a_1 - a_2)$, $\Omega = \pi/(3T_f)$ e V_{pico} representa o valor máximo da função. A forma de onda gerada por (2.5) e (2.6) está representada graficamente pela Fig. 2.6.

2.5 Física em Sistemas de Aterramento

Como dito anteriormente, a resposta de sistemas de aterramento a excitações eletromagnéticas diversas, incluindo os pulsos atmosféricos, segue o modelo eletrodinâmico descrito pelas equações de Maxwell. Em [2], medidas experimentais e soluções numéricas dessas equações são confrontadas, sendo que excelente concordância foi observada. Tais equações sintetizam de forma elegante todo mecanismo pelo qual se propagam ondas

eletromagnéticas e, portanto, descrevem fenômenos diversos, tais como em antenas e telecomunicações, circuitos elétricos, óptica, cavidades ressonantes, aplicações biomédicas, filtros eletromagnéticos e estruturas periódicas, entre muitas outras, tanto para baixas como para altas freqüências [7, 37].

Neste trabalho, a solução numérica dessas equações pelo método das diferenças finitas no domínio do tempo foi desenvolvida para a análise de estruturas de aterramento excitadas por pulsos atmosféricos. Dessa forma, este Tópico inicialmente trata das equações de Maxwell e, posteriormente, discute alguns aspectos relevantes a respeito da eletrodinâmica em sistemas de aterramento.

2.5.1 As Equações de Maxwell na Forma Diferencial no Domínio do Tempo

As equações de Maxwell em sua forma diferencial no domínio do tempo, são dadas por:

$$\frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \tag{2.7}$$

e

$$\frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J}, \tag{2.8}$$

nas quais $\vec{E}$ é o vetor intensidade de campo elétrico (V/m), $\vec{H}$ é o vetor intensidade de campo magnético (A/m), ϵ e μ são, respectivamente, permissividade elétrica (farad/m) e permeabilidade magnética (henry/m). O termo $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ é o vetor densidade de corrente elétrica de condução (A/m^2), na qual σ é a condutividade elétrica do meio em consideração, dada em S/m.

A equação (2.7), lei de Faraday, mostra que quando há variação no tempo do vetor $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (vetor densidade de fluxo magnético), surgem componentes de campo elétrico circulando em torno de tal componente variante no tempo (ao redor de $\vec{B}$). Dualmente, a lei de Ampère (2.8) mostra que quando há variação temporal do vetor $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, esta causa circulação de campo magnético em torno daquela direção (ao redor de $\vec{D}$). O surgimento

dessas componentes de campo magnético em torno de $\vec{D}$ é responsável pela geração de circulação de campo elétrico em torno das referidas direções do campo magnético em pontos adjacentes, de acordo com (2.8). O processo é repetido e desenvolve-se desta maneira um processo eletrodinâmico ao longo do tempo t no espaço tridimensional.

A unicidade do processo eletrodinâmico se deve às condições de contorno impostas às equações pelas estruturas físicas presentes na região de propagação eletromagnética (relativas às suas formas geométricas e às características eletromagnéticas desses materiais: ϵ, σ e μ), assim como se deve à(s) forma(s) de onda do(s) pulso(s) de excitação (das fontes) [7, 38].

Se o operador diferencial divergente for aplicado às equações (2.7) e (2.8), temos, respectiva e conseqüentemente que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.9}$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e, \tag{2.10}$$

que são as leis de Gauss. Em (2.10), ρ_e representa a densidade volumétrica de carga elétrica, dada em $\mathrm{C/m^3}$. A equação (2.9) mostra que as linhas do campo vetorial $\vec{H}$ são sempre fechadas em todos os pontos do espaço, conseqüência da ausência de monopólos magnéticos na natureza. Por outro lado, a Equação (2.10) diz que as linhas do campo vetorial $\vec{D}$ são fechadas apenas em regiões livres de monopólos elétricos, isto é, quando $\rho_e = 0$, o que também implica em que o campo $\vec{D}$ se comporta como uma fonte em regiões nas quais $\rho_e \neq 0$.

Em seu trabalho [1], Maxwell definiu um campo vetorial $\vec{A}$ e o denominou de impulso angular, que é conhecido atualmente por vetor potencial magnético. O campo vetorial $\vec{A}$ é definido da seguinte maneira

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu \vec{H}. \tag{2.11}$$

Se (2.11) for substituída em (2.7), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \tag{2.12}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{2.13}$$

Como o rotacional do gradiente de um campo escalar qualquer é identicamente nulo, pode-se definir um escalar ϕ, denominado potencial escalar elétrico, de tal forma que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi. \tag{2.14}$$

Ou seja, o campo elétrico pode ser expresso em função de um campo escalar ϕ e de um campo vetorial $\vec{A}$ de acordo com a equação

$$\vec{E} = -\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \tag{2.15}$$

que nada mais é do que uma decomposição de Helmholtz.

Observando as equações (2.13) e (2.14), pode-se dizer que o campo $-\vec{\nabla}\phi$ é conservativo e que, portanto, o campo vetorial elétrico $\vec{E}$, dado por (2.15), não apresenta esta característica (veja (2.11)).

No caso particular em que $\partial \vec{A}/\partial t = 0$ (eletrostática), observa-se através de (2.13) ou (2.7) que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (ou de forma equivalente que $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) e que, portanto, $\vec{E}$ seria, neste caso, um campo vetorial conservativo.

2.5.2 Eletrodinâmica em Sistemas de Aterramento

Uma das funções primordiais dos sistemas de aterramento é que o mesmo permita que a corrente injetada $I(t)$ no mesmo possa fluir para o solo da maneira mais eficiente possível. Uma maneira de se medir o desempenho de um sistema de aterramento sob este aspecto é determinando os valores de tensão gerados no ponto de injeção de corrente ao longo do tempo. Quanto menores os valores da relação tensão/corrente ($V(t)/I(t)$), mais eficiente é considerado o sistema.

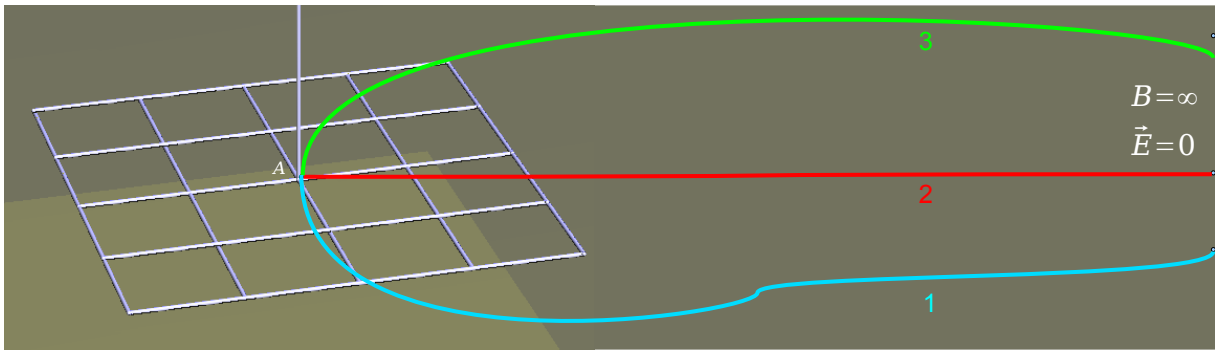

Figura 2.7: Exemplos de caminhos de integração do campo $\vec{E}$ para cálculo da tensão no ponto de injeção de corrente através de (2.16).

A tensão entre dois pontos A e B, V_{AB}, pode ser calculada pela integral de linha do campo elétrico $\vec{E}$ por um caminho (linha l) arbitrário. Matematicamente, V_{AB} é dado por

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \tag{2.16}$$

Devido às características do fenômeno eletromagnético que se desenvolve quando um pulso de corrente é injetado em um malha de aterramento, o valor de $V(t)$ é, de uma forma geral, dependente do caminho de integração escolhido para se avaliar (2.16).

Se o campo vetorial elétrico $\vec{E}$ for conservativo, isto é, se o ambiente eletromagnético for eletrostático, V_{AB} independerá do caminho escolhido para a integração e será sempre igual à diferença de potencial elétrico $\phi_B - \phi_A$. Todavia, se o problema for eletrodinâmico, $\vec{E}$ não será um campo vetorial conservativo, e V_{AB} será dependente do caminho de integração entre A e B [38, 37] e, portanto $V_{AB} \neq \phi_B - \phi_A$ deve ser obtida utilizando-se (2.16). Em outras palavras, a resposta transitória de um sistema de aterramento depende de como a tensão é avaliada e um único sistema pode ter infinitas respostas transitórias, porém apenas uma resposta estática. Na prática, o caminho de integração pode ser associado ao cabo que conecta a malha de terra ao sistema elétrico (entre os pontos A e B).

A performance individual do sistema de aterramento pode ser definida quando o ponto B, referência de tensão, é um ponto infitamente distante de A (Fig. 2.7), no qual $\vec{E} = 0$. Dessa forma, $V(t)$ no ponto A deve ser calculado da seguinte maneira

$$V(t) = V_A(t) = \int_A^{\infty} \vec{E}(t) \cdot d\vec{l}. \tag{2.17}$$

Ainda sim, dependendo do caminho escolhido (Fig. 2.7), funções diferentes para $V(t)$ podem ser obtidas. Porém, todas devem convergir para um mesmo valor em estado estacionário dada a natureza conservativa do campo $\vec{E}$.

A Fig. 2.8 mostra a distribuição espacial de $\vec{E}$ em um plano de descarga atmosférica injetada em um canto de malha de terra, obtida por simulação. Nela, a cor azul escuro significa campo nulo e o vermelho campo máximo (as outras cores são intermediárias). Nas Figs. 2.8(a) e (b), observa-se a corrente se propagando no canal de descarga e o campo gerado no espaço livre. Quando o campo chega a malha, Figs. 2.8(c) e (d), observa-se claramente a diferença de intensidades de campo criada, tornando claro que se forem escolhidos os caminhos de integração pela esquerda ou pela direita, serão obtidos valores diferentes para V no instante transitório considerado.

Considerando-se que os eletrodos de aterramento sejam excitados por correntes com formas de onda como às dos pulsos eletromagnéticos, tais como os atmosféricos descritos anteriormente, um processo eletrodinâmico é desencadeado, regido pelas equações (2.7 e 2.8). Nos primeiros instantes do processo, os campos eletromagnéticos iluminam apenas os pontos de entrada da malha, e, na medida em que o tempo t avança, as demais partes são iluminadas gradualmente. Isso significa que, inicialmente, a resposta do parâmetro $V(t)/I(t)$ tende a infinito, pois a corrente é muito pequena. Com o avanço de t, mais partes metálicas são iluminadas e $V(t)/I(t)$ tende a diminuir. Essa redução vem acompanhada por oscilações decorrentes não só de reflexões e difrações eletromagnéticas nas partes metálicas e reflexões na interface terra-ar, mas também devido ao parâmetro ϵ do solo. Observando-se a equação (2.8), nota-se que, se a permissividade elétrica for invariante no tempo, ϵ multiplica $\partial\vec{E}/\partial t$ e, portanto, quanto maior for a permissividade, maior a

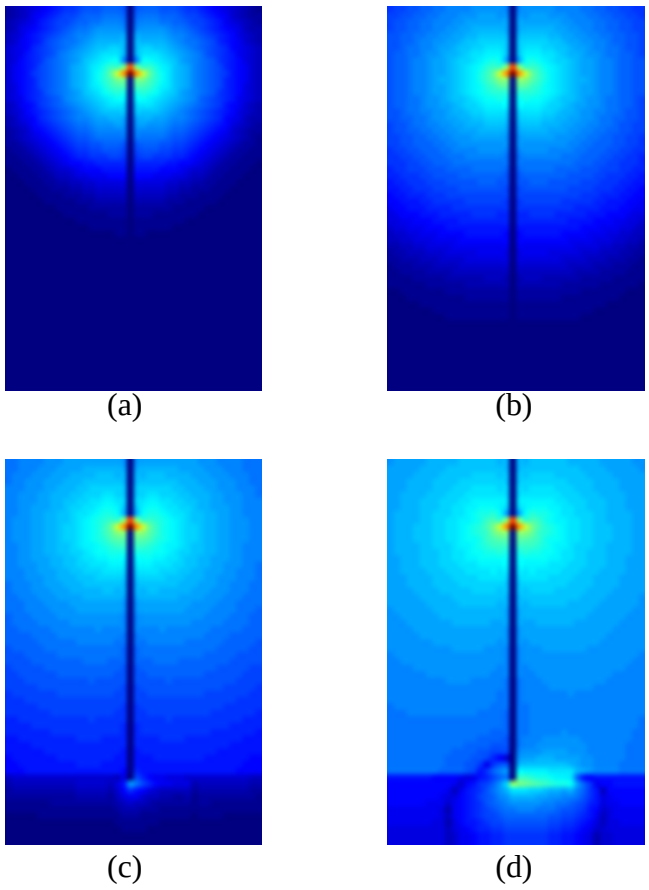

Figura 2.8: Eletrodo horizontal: exemplo de evolução do transitório eletromagnético: (a) e (b) propagação no canal de descarga (simetria); (c) e (d) propagação também no solo para problema transitório assimétrico. Instantes (μs): (a) 0,0125, (b) 0,025, (c) 0,0375 e (d) 0,05.

importância da corrente de deslocamento no processo transitório (variação temporal de $\vec{E}$). Note que as oscilações também dependem de σ e μ. Por outro lado, se $\partial\vec{D}/\partial t = 0$, a equação (2.8) resume-se a $\vec{J} = \sigma\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$, que nada mais é do que a lei de Ohm, que independe de ϵ, e a Equação (2.7) resume-se a $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, informando apenas que o campo $\vec{E}$ é conservativo. Observa-se ainda que o único parâmetro restante no caso eletrostático é σ, que juntamente com a geometria do eletrodo de terra, determina a resposta estacionária da estrutura.

2.6 Modelos Matemáticos: Estado da Arte

Dada a grande complexidade relativa às interações entre eletrodos, solo e pulsos elétricos, diversos modelos matemáticos foram concebidos. Dessa forma, parte da história do surgimento destes modelos é apresentada aqui.

Em 1934, Bewley deu inicio ao processo de investigação teórica e experimental no campo de transitórios de sistemas de aterramento com os trabalhos [39, 40]. Neles, é demonstrada a equação da impedância de um cabo contrapeso quando excitado por uma função degrau unitário, considerando o cabo como uma linha de transmissão.

Posteriormente, em 1943, foram publicados cálculos relativos às tensões desenvolvidas por hastes verticais de aterramento por Bellaschi e Armingtom [41]. Suas equações em forma de série infinita foram desenvolvidas para o ponto de injeção para algumas formas de onda (degrau, dupla exponencial e senoidal) e as mesmas não levavam em conta efeitos capacitivos, mas sugeriam o uso de circuitos equivalentes para modelar sistemas de aterramento.

Mais tarde, Sunde desenvolveu equações mais completas, partindo das equações de Maxwell para determinar a resposta DC de várias estruturas de aterramento. Além disso, foi bastante investigado o comportamento indutivo desses sistemas e eletrodos são analisados como linhas de transmissão com parâmetros dependentes da freqüência. Seu trabalho foi concatenado em seu livro [42].

Em 1980, Gupta [43] analisa experimentalmente malhas de terra e, empiricamente, a partir das respostas obtidas, deriva uma equação baseada no trabalho de Bewley [39], com a qual consegue, de forma aproximada, levar em conta a influência de cada eletrodo da malha, compondo a resposta da mesma.

Com a disponibilidade cada vez maior de sistemas de computação (a partir de 1980), métodos numéricos começam a ser empregados para analisar sistemas de aterramento, pois, até então, apenas modelos bastante aproximados foram desenvolvidos, como os citados anteriormente. Dentre esses métodos, podem-se citar métodos baseados em circuitos equivalentes [44], modelos eletromagnéticos (método dos momentos, método dos elementos finitos e método das diferenças finitas) [45, 46, 47, 48, 7], métodos híbridos (que envolvem modelos de circuitos e eletromagnéticos) [49, 50, 51, 52, 53] e métodos baseados em linha de transmissão [54, 55].

O método numérico de circuitos equivalentes para analisar estruturas complexas foi proposto em 1983 por Meliopoulos et. al. [44]. A idéia é dividir a estrutura em segmentos e cada um é modelado por condutância, resistência interna, capacitância e indutâncias própria e mútua e realizar uma análise aplicando as leis circuitais de Kirchhoff. Esses parâmetros foram modelados independentemente da freqüência, os quais são obtidos a partir da solução da equação de Laplace para o potencial elétrico no solo. Em 1987, o trabalho de Meliopoulos foi complementado em [56], de forma que cada segmento foi modelado por correntes calculadas pelas equações de Maxwell em sua forma quasi-estática, de forma a incluir a dependência da freqüência nos parâmetros do modelo. Na década de 1990, Geri [57] e Otero [58, 59] estendem o modelo anterior de Meliopoulos incluindo o efeito de ionização do solo.

Apesar dos modelos de circuito serem capazes de modelar efeitos como acoplamento mútuo e a ionização do solo, o método tem problemas em modelar os atrasos de propagação do surto e alguns fenômenos eletromagnéticos como ondas de superfície e difração nas pontas das hastes, que contribuem para a resposta transitória do sistema. Dessa forma,

os modelos eletromagnéticos são a maneira mais rigorosa de se modelarem estruturas de aterramento, considerando que os mesmos solucionam as equações de Maxwell em sua forma completa, com aproximações apenas de ordem numérica.

O Método os Momentos (MoM) foi aplicado inicialmente por Grcev [60, 61, 62, 63] para a análise de sistemas de aterramento no domínio da freqüência. O método consiste em uma transformação de equações integrais, as quais envolvem funções de Green [38] e elementos de corrente, em sistemas lineares de equações. O método também envolve teoria das imagens. Apesar de o método dos momentos ser preciso, sua implementação é bastante complexa e o tempo de processamento aumenta bastante com a complexidade da estrutura.

Em 1995-1996, Nekhoul aplica o método dos elementos finitos (FEM) [50, 51] para simular transitórios em sistemas de aterramento. A formulação de Nekhoul consistia em discretizar a região de interesse por elementos de volume (tetraedros) e solucionar as Equações de Maxwell em termos do Vetor Potencial Magnético e do Potencial Escalar Elétrico. Naquele momento, havia dificuldades relacionadas a truncagem do método (análise de problemas abertos). O método FEM é altamente flexível com relação à modelagem de estruturas elaboradas, porém com formulação matemática complexa e alto custo computacional.

Em 2001, Tababe publica o artigo [2], no qual o mesmo aplica o método de Yee [3] para modelar sistemas de aterramento retangulares e compara seus resultados com medidas realizadas por sua equipe. O método é baseado em aproximações algébricas das derivadas que compõem as equações de Maxwell na forma rotacional (diferencial), de forma a se obter um algoritmo explicito de atualização das componentes de campo. Naquele trabalho, foram utilizados eletrodos auxiliares de tensão e corrente tanto no modelo computacional quanto no procedimento experimental, como ilustrado na Fig.2.9. O principal resultado obtido em [2] é a concordância do experimento com a simulação quando comparadas as relações V/I (2.9).

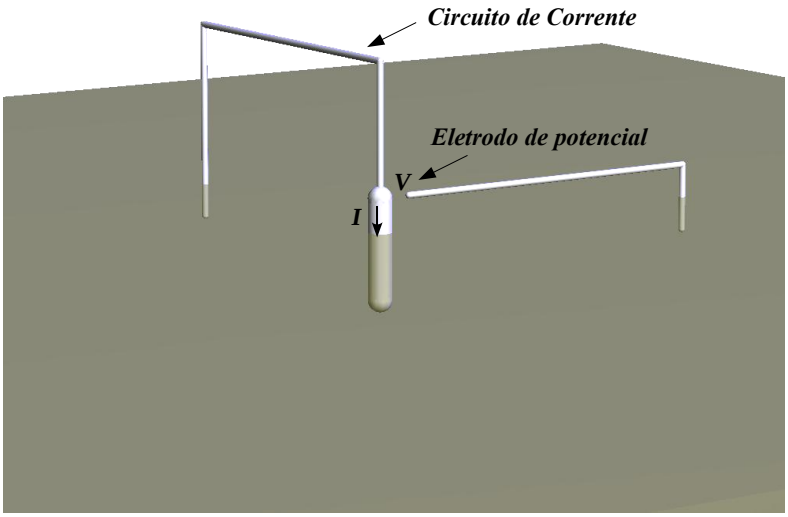

Figura 2.9: Modelo experimental de medição de Tanabe.

Posteriormente, em 2004, Ala et al [64] descrevem um modelo utilizando o método FDTD para representar o efeito de ionização do solo no domínio do tempo, validando-o com dados obtidos de forma experimental.

Em 2005, Tuma et. al. [65] propõem um modelo computacional baseado no algoritmo de Yee que elimina o eletrodo de potencial (o potencial é calculado em termos do campo elétrico) e o eletrodo de corrente (que é introduzido na região absorvente UPML, simulando um canal de descarga de corrente natural) como ilustrado na Fig.2.10. A importância deste modelo é ressaltada pela eliminação do acoplamento eletromagnético entre o sistema de aterramento analisado e o circuito de medição utilizado em [2].

No presente trabalho, é introduzida uma formulação matemática baseada em um sistema de coordenadas gerais, para solucionar as equações de Maxwell no domínio do tempo com o algoritmo de Yee. Esta formulação inclui o desenvolvimento matemático de uma região absorvente denominada LN-UPML, especialmente desenvolvida para truncar meios condutivos. Vale ressaltar que tal formulação não estava disponível na literatura anteriormente. O desenvolvimento desta formulação é descrito no Capítulo 4.

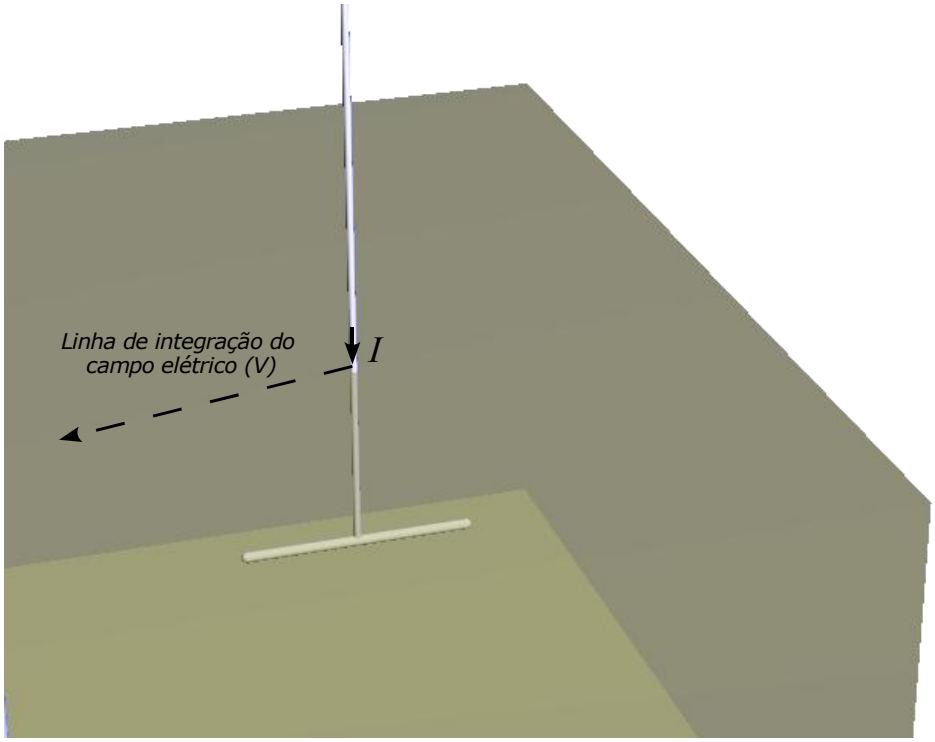

Figura 2.10: Modelo computacional (Tuma et. al.). O eletrodo horizontal representa o sistema de aterramento.

Capítulo 3

O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo Aplicado às Equações de Maxwell

3.1 Conteúdo do Capítulo

Este Capítulo contém o desenvolvimento de formulações matemáticas relacionadas aos métodos utilizados no trabalho para solucionar as equações de Maxwell. São apresentados os métodos FDTD e LN-FDTD.

3.2 Método FDTD: Uma visão geral

Em 1965, Frank Harlow publicou um trabalho [66] que demonstrava um método para a obtenção de soluções numéricas da Equação de Navier-Stokes, baseado em diferenças finitas no domínio do tempo, para escoamento de fluidos incompressíveis com superfície livre em duas dimensões. No ano seguinte, Kane Yee publica um trabalho semelhante [3] que introduz uma técnica capaz de solucionar numericamente as equações de Maxwell de maneira direta, relativamente simples e elegante, no domínio do tempo. Este método,

conhecido inicialmente como Algoritmo de Yee, é baseado em dois aspectos principais: 1) distribuição geométrica discreta das componentes dos campos Elétrico $\vec{E}$ e Magnético $\vec{H}$ em células, de maneira a satisfazer tanto a Lei de Faraday quanto a Lei de Ampère nas formas diferencial e integral e 2) aproximação das derivadas espaciais e temporais por diferenças algébricas (diferenças finitas), de forma a se obtererem equações explicitas para a atualização temporal de todas as componentes de campo.

Além disso, as componentes do campo elétrico são sempre deslocadas no tempo em "meio" passo temporal das componentes do campo magnético, de maneira a satisfazer as derivadas temporais associadas à distribuição espacial citada anteriormente (além de evitar problemas relacionados à inversão de matrizes). Dessa maneira, um método bastante robusto, capaz de gerar soluções de onda completa, surgia.

Durante algum tempo, o método não foi amplamente aplicado devido ao fato de que o mesmo requer quantidades consideráveis de recursos computacionais, o que era bastante restrito e limitado principalmente na primeira década de existência do método. Todavia, durante a década de 1970, Allen Taflove e Brodwin aplicam a técnica de Yee para solucionar problemas tridimensionais relacionados à interação eletromagnética com meios materiais [67], além de modelar de forma pioneira problemas bio-eletromagnéticos [68]. No mesmo ano, Taflove também publica a condição de estabilidade do método de Yee [67]. Em 1980, o Taflove publica resultados validados de simulações de uma cavidade metálica e difunde o termo Método FDTD (*Finite-Difference Time-Domain Method*) [69]. A partir de então, a aplicação da técnica gerou uma quantidade de trabalhos que aumenta de forma exponencial com o passar dos anos.

Todavia, como não existiam até então técnicas capazes de truncar o domínio computacional sob análise para a análise de problemas abertos, muitas formulações para truncagem foram desenvolvidas, como, por exemplo, as baseadas nos operadores de Bayliss-Turkel [70], Mür primeira e segunda ordens [71], a técnica de Higdon [72] e a técnica de Liao [73]. Essas técnicas são conhecidas por ABCs (*Absorbing Boundary Conditions*), e

têm como principal objetivo absorver ondas que incidem sobre as superfícies que limitam as regiões de análise de maneira a simular propagação para o infinito e viabilizar esse tipo de simulação. As mais recentes e mais eficientes técnicas ABCs são, sem dúvida, as baseadas na idéia de camadas perfeitamente casadas com a região sob análise (PML), originalmente implementada por Berenger [74]. Neste trabalho, será explorada e aplicada a técnica de truncagem UPML (*Uniaxial Perfectly Matched Layers*) [8], a qual deu ao modelo matemático de Berenger uma interpretação física.

Durante as décadas de 1980 e 1990, o método FDTD foi expandido para sistemas de coordenadas locais, que não coincidem com o sistema cartesiano, a partir dos trabalhos de Holland [4] e Mei [5] e posteriormente de Lee [6]. A técnica ficou conhecida como FDTD em Coordenadas Gerais ou, mais especificamente, em Coordenadas Locais Não-Ortogonais (LN-FDTD). Posteriormente, Santos [75] reduziu o método para quatro componentes de campo utilizando a técnica R-FDTD [76], gerando o método R-LN-FDTD.

Neste trabalho, é introduzida uma formulação para truncagem do domínio computacional para o método LN-FDTD considerando-se meios condutivos, baseada na idéia de camadas perfeitamente casadas (LN-UPML). A formulação é apresentada no Capítulo 4.

Outras técnicas recentes importantes são as que modelam estruturas metálicas cujas dimensões são menores que os incrementos espaciais utilizados. A técnica conhecida por Fio Fino (*Thin Wire*) [77] [78], é aplicada aqui para modelar adequadamente hastes de modo a evitar maior nível de discretização da região.

O método FDTD e suas variações foram aplicados para a solução de diversos tipos de problemas, desde antenas [79], ao projeto e análise de circuitos de alta freqüência (como microprocessadores) [80], radares [81], fotônica [82], sistemas de comunicação [76], estruturas periódicas [83], medicina [84], entre outras. Finalmente, em 2001, Tanabe publica o artigo [2] que mostra que o método FDTD pode ser empregado para a análise de sistemas de aterramento. O método é capaz de analisar a influência de diversos tipos de materiais na propagação eletromagnética, tais como homogêneos, não-homogêneos,

anisotrópicos e dispersivos [7]. Assim, observa-se na literatura um largo espectro de aplicações do método.

Dessa maneira, este Capítulo procurará mostrar de forma bastante objetiva o embasamento teórico necessário à compreensão do método FDTD (algoritmo de Yee) em coordenadas retangulares e gerais, da aplicação das condições de contorno, da técnica de truncagem UPML e do método para modelagem de hastes finas ("Thin Wire").

3.3 O algoritmo de Yee em Coordenadas Retangulares (Método FDTD)

As equações (2.7) e (2.8), quando expandidas em coordenadas retangulares, geram as respectivas equações escalares

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right), \tag{3.3}$$

e

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y\right), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right), \tag{3.6}$$

sendo E_x, E_y, E_z e H_x, H_y, H_z as componentes dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{H}$, respectivamente. Essas componentes são, de uma forma geral, funções do tempo t e das três coordenadas cartesianas x, y e z.

A equação (2.7), lei de Faraday, mostra que quando há variação no tempo do vetor $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (vetor densidade de fluxo magnético), surgem componentes de campo elétrico

circulando em torno da direção desta variação. Dualmente, a lei de Ampère mostra que quando há variação no tempo do vetor $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ uma certa direção, estas causam circulação de campo magnético em torno da mesma direção. Essas duas observações sobre as equações (2.7) e (2.8) são os pilares de toda a teoria de propagação de ondas eletromagnéticas no universo macroscópico [38], nas quais Yee se baseou ao definir seu esquema de distribuição espacial e temporal das componentes de campo de seu algoritmo numérico. A disposição espacial dessas componentes está ilustrada na Figura 3.1: a célula ortogonal de Yee.

Quando se realizam simulações da propagação de onda em determinada estrutura, a célula mostrada na Figura 3.1 é aplicada em toda a região de interesse (região de análise) para amostrar as componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$. Cada ponto da malha formada, assim como as componentes mostradas na Figura 3.1, é referenciado pelos índices discretos i, j, k. Isso significa que uma determinada posição x, y, z (em metros) é endereçada no espaço discreto por i, j, k (número da célula correspondente), de forma que $x = i\Delta_x$, $y = j\Delta_y$ e $z = k\Delta_z$, onde Δ_x, Δ_y e Δ_z são as dimensões das células de Yee.

A distribuição espacial mostrada pela Figura 3.1 é uma representação geométrica discretizada das leis equacionadas em (2.7) e (2.8). É possível observar, utilizando-se da regra da mão direita, que variação positiva no tempo da componente E_z (derivada maior que zero) gera circulação de campo magnético em torno desta direção, de forma que, para atualizar esta componente (equação 3.6), deve-se levar em conta as componentes do campo magnético $H_x(i, j-1/2, k+1/2)$ e $H_x(i, j+1/2, k+1/2)$ (caracterizando a derivada de H_x na direção y) e as componentes $H_y(i+1/2, j, k+1/2)$ e $H_y(i-1/2, j, k+1/2)$ (caracterizando a derivada de H_y na direção x). O mesmo pode ser observado para o cálculo das componentes do campo $\vec{H}$.

Observando a Fig. 3.1, nota-se, portanto, que as componentes do campo elétrico estão sempre centralizadas em relação a quatro componentes do campo magnético e vice-versa. Obviamente que essa distância entre as componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ (metade da aresta

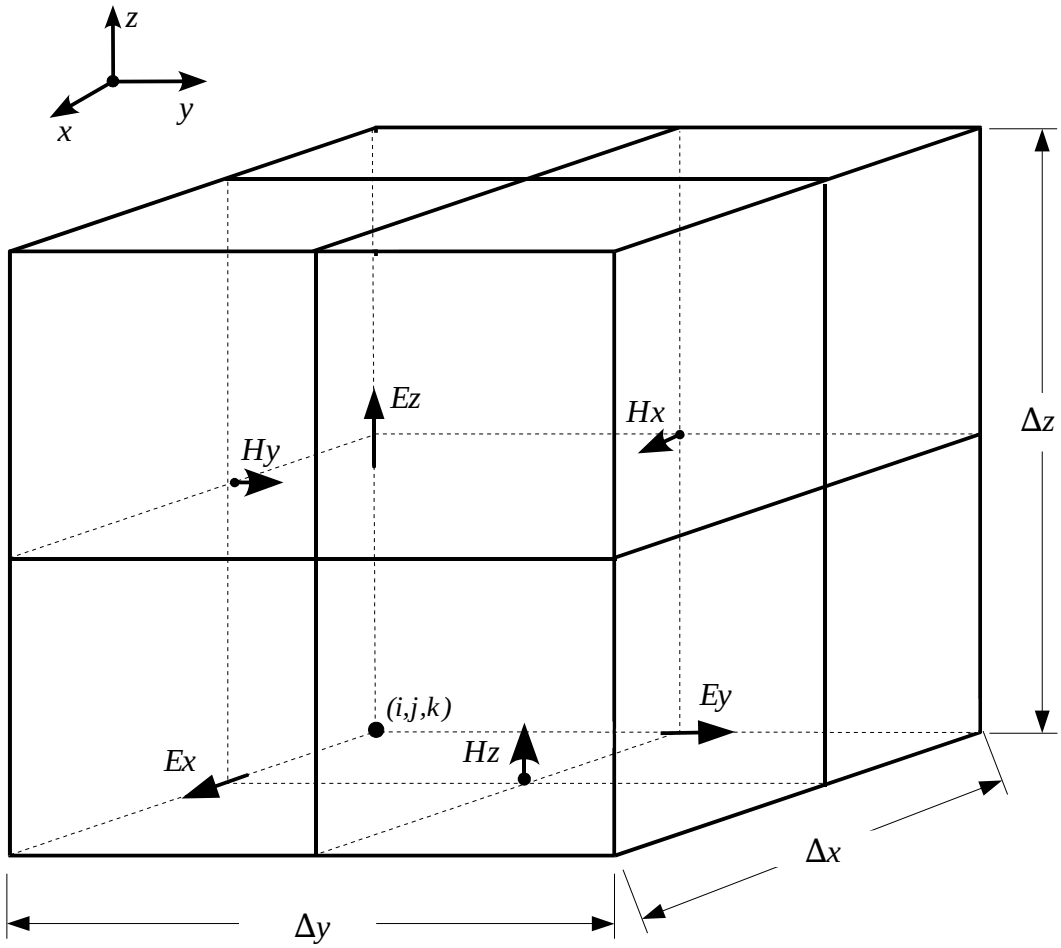

Figura 3.1: Distribuição espacial das componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ para a célula de Yee (i, j, k).

da célula de Yee) também se traduz em intercalação temporal entre elas (o intervalo de amostragem é Δ_t). Essa intercalação no tempo é comumente chamada de *leapfrog*, e funciona da seguinte maneira: após a atualização de todas as componentes do campo elétrico em um instante $t = t_1$, a atualização das componentes do campo magnético é realizada, baseando-se nas componentes de $\vec{E}$ que acabaram de ser atualizadas, para o instante $t = t_1 + \frac{\Delta_t}{2}$. A subseqüente atualização das componentes do campo elétrico é realizada para o instante $t = t_1 + \Delta_t$ e é baseada nas componentes do campo magnético em $t = t_1 + \frac{\Delta_t}{2}$, previamente armazenadas em memória. O processo se repete até que o intervalo de tempo necessário para completar a simulação, previamente estabelecido, seja completado. O processo está ilustrado na Figura 3.2,para o caso unidimensional.

3.3.1 Obtenção das Equações FDTD para $\vec{E}$ e $\vec{H}$

Baseando-se nas considerações realizadas anteriormente sobre o método FDTD, pode-se facilmente notar que as derivadas que aparecem nas equações (3.1)-(3.6) podem ser aproximadas por derivadas centradas, tanto em relação ao tempo, quanto em relação ao espaço (veja as Figuras 3.1 e 3.2). A equação

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta_x) - f(x - \Delta_x)}{2\Delta_x} \tag{3.7}$$

obtida a partir da truncagem de segunda ordem da série de Taylor, define o conceito de derivada centrada unidimensional. A derivada no ponto x da função f em relação a x é obtida a partir do valor da função nas posições $x + \Delta_x$ e $x - \Delta_x$. Teoricamente quanto menor o valor de Δ_x, melhor a aproximação da derivada. Computacionalmente, esse valor é limitado pela precisão da máquina ou do compilador. Dessa maneira, uma função F que dependa das coordenadas espaciais (x, y, z) e do tempo t é aproximada por uma função amostrada F_d, ou seja

$$F(t, x, y, z) \approx F_d^n(i, j, k) \tag{3.8}$$

sendo i, j e k os índices dos incrementos espaciais e n o índice temporal.

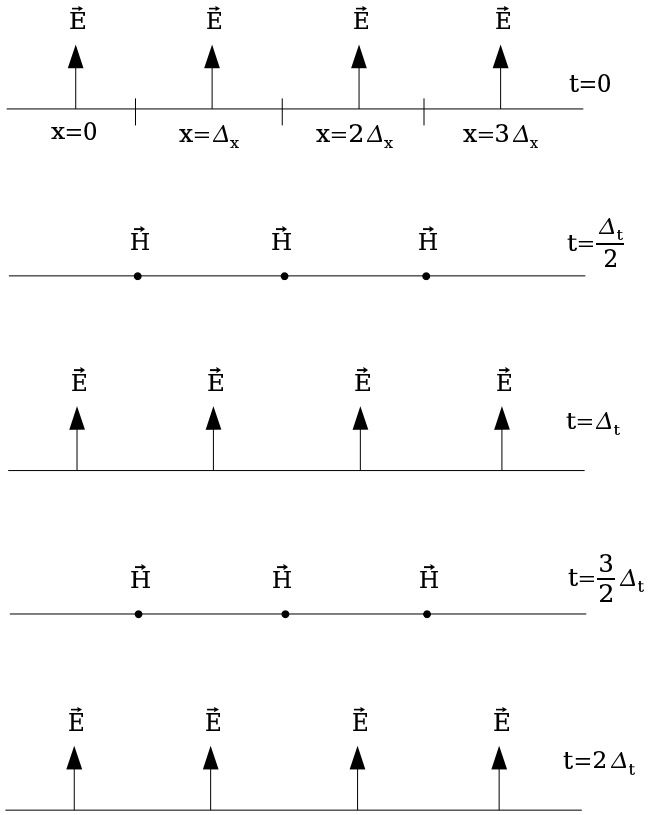

Figura 3.2: *Leapfrog*: distribuição intercalada no tempo e no espaço das componentes de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ para um caso unidimensional do algoritmo de Yee.

Assim, aplicando-se o conceito de derivada centrada (equação (3.7)) para as equações (3.1)-(3.6), obtêm-se as seguintes equações de atualização FDTD:

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} = H^{n-\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} + \\ + \frac{\Delta_t}{\mu}\left[\frac{E^n_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k+1)} - E^n_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta_z} - \frac{E^n_{z\ (i,j+1,k+\frac{1}{2})} - E^n_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})}}{\Delta_y}\right], \tag{3.9}$$

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} = H^{n-\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} + \\ + \frac{\Delta_t}{\mu}\left[\frac{E^n_{z\ (i+1,j,k+\frac{1}{2})} - E^n_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})}}{\Delta_x} - \frac{E^n_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k+1)} - E^n_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}}{\Delta_z}\right], \tag{3.10}$$

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} = H^{n-\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} + \\ + \frac{\Delta_t}{\mu}\left[\frac{E^n_{x\ (i+\frac{1}{2},j+1,k)} - E^n_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}}{\Delta_y} - \frac{E^n_{y\ (i+1,j+\frac{1}{2},k)} - E^n_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta_x}\right], \tag{3.11}$$

$$E^{n+1}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)} = E^n_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}\left(\frac{1-\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}{1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}\right) + \\ + \frac{\Delta_t}{\epsilon\left(1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}\right)}\left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}}{\Delta_y}\right] \\ - \frac{\Delta_t}{\epsilon\left(1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}\right)}\left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}}{\Delta_z}\right], \tag{3.12}$$

$$E^{n+1}_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)} = E^n_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)}\left(\frac{1-\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}{1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}\right) + \\ + \frac{\Delta_t}{\epsilon\left(1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}\right)}\left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{\Delta_z}\right] \\ - \frac{\Delta_t}{\epsilon\left(1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}\right)}\left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta_x}\right], \tag{3.13}$$

$$E^{n+1}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} = E^{n}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})}\left(\frac{1-\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}{1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}\right) +$$
$$+\frac{\Delta_t}{\epsilon\left(1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}\right)}\left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}}{\Delta_x}\right]$$
$$-\frac{\Delta_t}{\epsilon\left(1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}\right)}\left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}}{\Delta_y}\right]. \tag{3.14}$$

3.3.2 Precisão e Estabilidade

As equações (3.9) a (3.14) satisfazem todos os requerimentos discutidos anteriormente, atendendo às condições circulatórias do rotacional associadas às variações temporais de cada componente. Todavia, numericamente falando, é necessário descrever critérios que garantam que o processo iterativo venha a convergir para a solução exata. Essa condição está intimamente ligada aos incrementos espaciais Δ_x, Δ_y e Δ_z e suas associações com o incremento temporal Δ_t.

O algoritmo descrito pelas equações (3.9) a (3.14), obtido a partir da aproximação (3.7), por ser intrinsecamente não exato, causa efeitos numéricos (não físicos), como a dispersão (velocidade de fase diferente de C no vácuo, por exemplo). Isso se deve ao fato de que as aproximações nos cálculos geram erros que são propagados, acumulação desvios de fase que fazem com que fenômenos não físicos se manifestem. Intuitivamente, isso se verifica de forma mais acentuada em malhas eletricamente grandes.

Para reduzir esses fenômenos, são adotados os seguintes critérios [7]

$$\Delta_{x,y,z} \leq \frac{\lambda_{\min}}{10}, \tag{3.15}$$

ou seja, um comprimento de onda deve ser representado por, no mínimo, dez células, e, associada a essa condição,

$$\Delta_t \leq \frac{1}{v_{\max}\sqrt{\frac{1}{{\Delta_x}^2}+\frac{1}{{\Delta_y}^2}+\frac{1}{{\Delta_z}^2}}}, \tag{3.16}$$

que limita o incremento Δ_t de acordo com a máxima distância que a onda deve percorrer dentro da célula: a diagonal. A condição (3.16) é conhecida como condição de Courant.

Se as células forem cúbicas, a equação (3.16) se torna

$$\Delta_t \leq \frac{\Delta}{v_{\max}\sqrt{3}}. \tag{3.17}$$

A demonstração da Equação (3.16) pode ser encontrada em [67].

3.4 Representação de estruturas metálicas "finas" por FDTD

3.4.1 Introdução

Em muitos problemas de eletromagnetismo, faz-se necessário modelar o comportamento do campo eletromagnético nas vizinhanças de estruturas cilíndricas metálicas finas. A necessidade vai desde cálculos de transitórios em sistemas de aterramento [2, 85] ao modelamento de antenas (como dipolos) em sistemas de telecomunicações [76]. Dependendo do tipo do problema que se precisa solucionar, o raio dessas estruturas pode ser da ordem de um centésimo do comprimento de onda. Isso pode ser resolvido de duas maneiras: discretizando a malha o suficiente para representar tais estruturas ou através de modelos capazes de representar o comportamento do campo próximo para elas, o que pode ser feito através de novas equações de atualização para essas componentes. A primeira alternativa certamente gerará malhas dezenas de vezes mais densas que a segunda e é, portanto, inviável na maioria dos casos.

Em princípio, estruturas finas podem ser modeladas por FDTD simplesmente levando a zero as componentes de campo elétrico na direção axial da estrutura. Todavia, este procedimento não leva em conta o raio do elemento e, portanto, para o caso de antenas, fatores como impedância e diagrama de irradiação não são calculados de maneira adequada. Na verdade, um raio diferente é modelado.

Neste contexto, surge o conceito de *fio fino* (ou *thinwire*), que são estruturas de metal com raio menor do que as dimensões da célula de Yee dimensionada ao problema. Uma

proposição de correção das componentes do campo magnético nas proximidades do fio fino foi publicada por Umashankar *et al.* em 1987 [86, 87]. Esta técnica funciona razoavelmente bem para modelar dipolos finos e não tão bem para o caso de transitórios em estruturas de aterramento. Uma formulação publicada em 2002 pelos pesquisadores Noda e Yokoyama [77] se mostra mais precisa em ambos os casos (especialmente no segundo), por envolver correções tanto das componentes do campo magnético quanto do campo elétrico na periferia dos elementos finos. Este método, usado neste trabalho, é detalhado a seguir.

3.4.2 A Formulação de Noda−Yokoyama

O método de Noda-Yokoyama [77] é baseado em alterações na permissividade elétrica e na permeabilidade magnética para atualizar, através das equações usuais do método FDTD (3.9) a (3.14), as componentes dos campos adjacentes à estrutura metálica cilíndrica de raio r. Isso é feito usando-se um fator m. As Figuras 3.3(a) e (b) mostram a secção transversal de uma estrutura fina de raio r alinhada paralelamente ao eixo z e, em (a) mostram-se as componentes adjacentes de campo elétrico em um meio com permissividade ϵ, (b) as componentes de campo magnético em um meio com permeabilidade magnética μ. As Figuras 3.3(c) e (d) mostram a secção de uma estrutura fina de raio r_o, também alinhada ao eixo z, em (c) as componentes de campo elétrico em um meio com parâmetro modificado $m\epsilon$ e em (d) as componentes de campo magnético em um meio com parâmetro modificado μ/m.

O raio r_o, chamado de raio intrínseco, é o raio equivalente à situação na qual E_z (a componente axial) é simplesmente levada a zero. Ou seja, sabendo-se que, para células cúbicas ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$), apenas forçar a componente axial a ser zero automaticamente gera um fio de raio r_o num meio ϵ, as componentes de campo elétrico E_{x1}, E_{x2}, E_{y1} e E_{y2} devem ser, na verdade atualizadas com permissividade $m\epsilon$, assim como as componentes H_{x1}, H_{x2}, H_{y1} e H_{y2} devem ser atualizadas com permeabilidade μ/m. Obviamente,

m é função do raio r. Logo, devem ser conhecidos r_o e m.

O fator m é obtido de maneira que as componentes do campo elétrico mostradas na Figura 3.3(a) sejam iguais as mostradas na Figura 3.3(c) e as componentes do campo magnético da 3.3(b) sejam iguais as mostradas na figura 3.3(d). Como a distância do fio ao contorno B é Δ, na região limitada por tal contorno as componentes normais de campo elétrico podem ser consideradas funções do inverso da distância radial, pois Δ é considerado pequeno o suficiente. Dessa forma, a idéia é considerar B como uma superfície equipotencial em torno da haste. Assim, considerando B uma superfície cilíndrica de raio Δ, m pode ser determinado igualando-se as capacitâncias entre o fio e o contorno equipotencial B para os casos das Figuras 3.3(a) e 3.3(c). Portanto, considerando os campos eletrostáticos na região interna a B, tem-se

$$\frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\Delta}{r}\right)} = \frac{2\pi m\epsilon}{\ln\left(\frac{\Delta}{r_o}\right)}, \tag{3.18}$$

ou

$$m = \frac{\ln\left(\frac{\Delta}{r_o}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta}{r}\right)}. \tag{3.19}$$

Procedendo da mesma forma, a permeabilidade μ/m é obtida igualando-se a indutância do caso da Figura 3.3(b) à do caso mostrado por 3.3(d), considerando-se os campos magnetostáticos na região.

Como dito anteriomente, r_o é o raio modelado a partir da simples anulação da componente axial do campo elétrico. Assim, procedendo de acordo com esta definição, notou-se em [77] que considerando uma direção α ($\alpha = x$ ou y), e que a haste está na célula α_o, a componente $E_\alpha(\alpha_o) = 2{,}206E_\alpha(\alpha_o + 1)$, desde que as células sejam cúbicas e Δ_t seja calculado de acordo com (3.17). O valor 2,206, portanto, já leva em conta erros de discretização introduzidos pelo método FDTD.

Analiticamente, considerando-se que a corrente que flui no fio entra em regime em um valor I_o, pode-se dizer que, normalizando-se as componentes $E_\alpha(\alpha_o + 1)$ à unidade, o

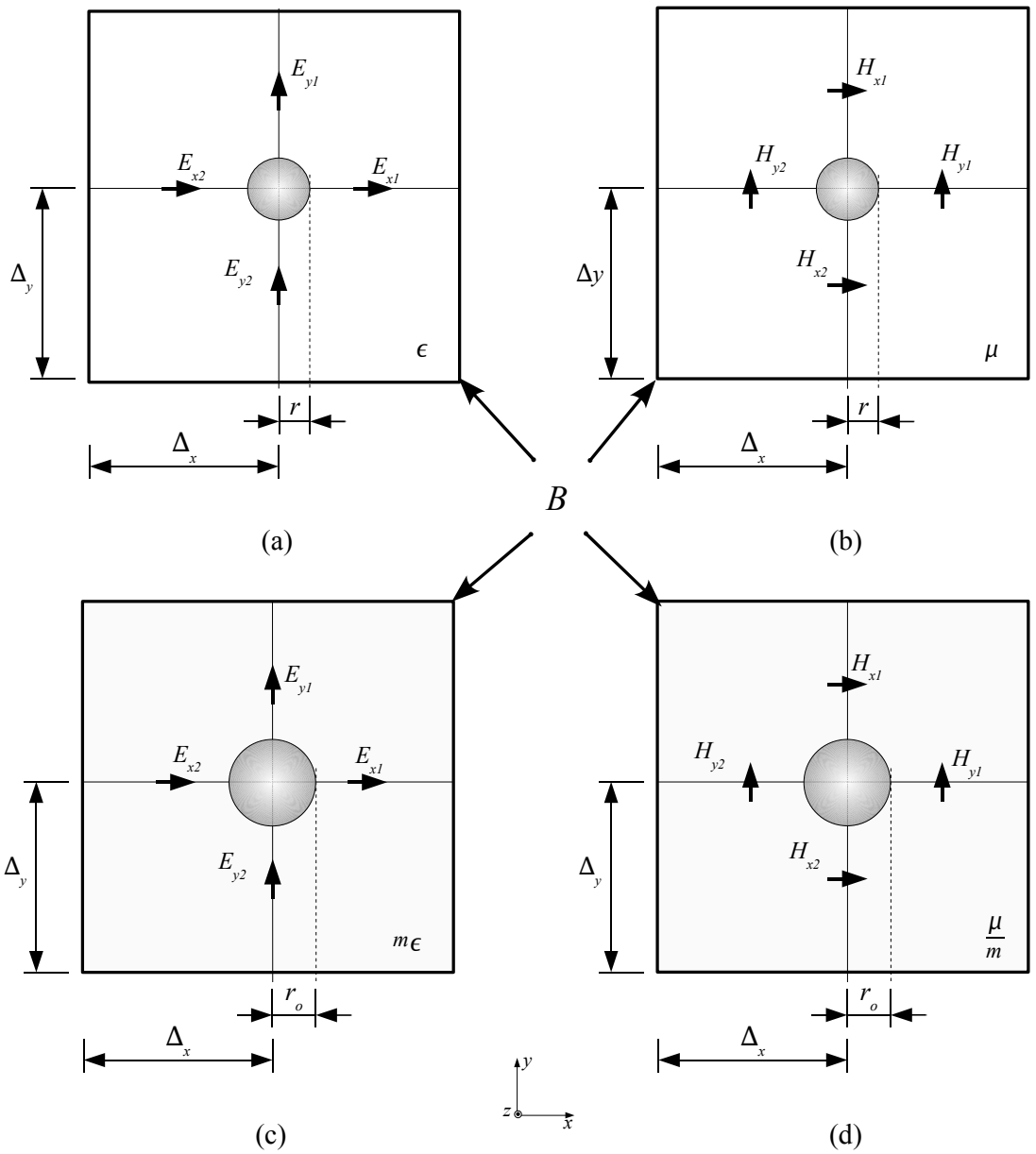

Figura 3.3: Componentes dos campos elétrico e magnético adjacentes ao fio fino.

campo elétrico nas vizinhanças da haste é dado por [77]

$$E = \frac{3\Delta}{2\alpha}, \tag{3.20}$$

ou seja, na medida em que se afasta da haste na direção α, o valor do campo decai com o inverso desta distância. A equação analítica (3.20) resulta em valores concordantes com os obtidos por FDTD para regiões externas ao contorno B, mas diverge em seu interior. Dessa forma, usando o método FDTD para calcular o potencial entre a haste e o contorno B, obtém-se sempre (considerando $E_\alpha(\alpha_o + 1) = 1$) $V_{\mathrm{FDTD}} = 2{,}206\Delta$. Para a solução analítica (3.20), o potencial é calculado por

$$V = \int_{r_o}^{\Delta} \frac{3\Delta}{2\alpha} \mathrm{d}\alpha = \frac{3\Delta}{2} \ln\left(\frac{\Delta}{r_o}\right). \tag{3.21}$$

Igualando a equação (3.21) a V_{FDTD}, encontra-se

$$r_o \approx 0{,}2298\Delta, \tag{3.22}$$

e substituindo-se (3.22) em (3.19), chega-se a

$$m \approx \frac{1{,}471}{\ln(\Delta/r)}. \tag{3.23}$$

Dessa maneira, conhecido o valor de m para o cilindro metálico fino de raio r que se quer representar, devem-se simplesmente aplicar as equações (3.9)-(3.14) com $\epsilon = m\epsilon_o$ e $\mu = \mu_o/m$ para as componentes indicadas pela Figura 3.3(a) e (b).

Como demonstrado em [78], quando se está simulando um meio condutivo, com permissividade ϵ_s e condutividade σ_s, como o solo por exemplo, basta utilizar as correções $\epsilon = m\epsilon_s$, $\mu = \mu_o/m$ e $\sigma = m\sigma_s$ para as mesmas componentes mostradas anteriormente.

Por fim, deve-se dizer que a estabilidade desta formulação não é garantida pela condição de Courant. Neste trabalho, adotou-se um valor para o passo temporal de 60% do limite estabelecido por (3.16).

3.5 O algoritmo de Yee em Coordenadas Gerais (Método LN-FDTD)

Este Tópico apresenta inicialmente os alicerces matemáticos necessários para a compreensão do método FDTD em coordenadas gerais. O método é baseado no conceito de vetores covariantes e contravariantes do cálculo tensorial [88]. Posteriormente, é apresentado o método FDTD em coordenadas gerais.

3.5.1 O sistema de Coordenadas Não-Ortogonal

Considerando um sistema de coordenadas curvilíneas formado por (u^1, u^2, u^3), como ilustrado pela Fig. 3.4, o vetor comprimento diferencial de $\vec{r}$, representado por $\vec{dr}$, é dado por

$$\vec{dr} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l}\, du^l = \sum_{l=1}^{3} \vec{a}_l\, du^l. \tag{3.24}$$

Os vetores $\vec{a}_l$ são chamados vetores unitários e os mesmos formam a chamada base unitária. Como pode ser observado, os vetores $\vec{a}_l$ são tangentes aos eixos u^l e podem ser escritos como funções de x, y e z.

Um conjunto de três vetores complementares $\vec{a}^l$ pode ser definido de tal forma que cada um é normal a dois vetores unitários simultaneamente. Este conjunto é definido matematicamente por

$$\vec{a}^1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\sqrt{g}}\ ,\ \vec{a}^2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\sqrt{g}}\ ,\ \vec{a}^3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\sqrt{g}}. \tag{3.25}$$

Os vetores definidos por (3.25) formam a chamada base recíproca e são denominados de vetores recíprocos. Na Equação (3.25), g representa o determinante do tensor métrico $[g]$ dado por

$$[g] = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

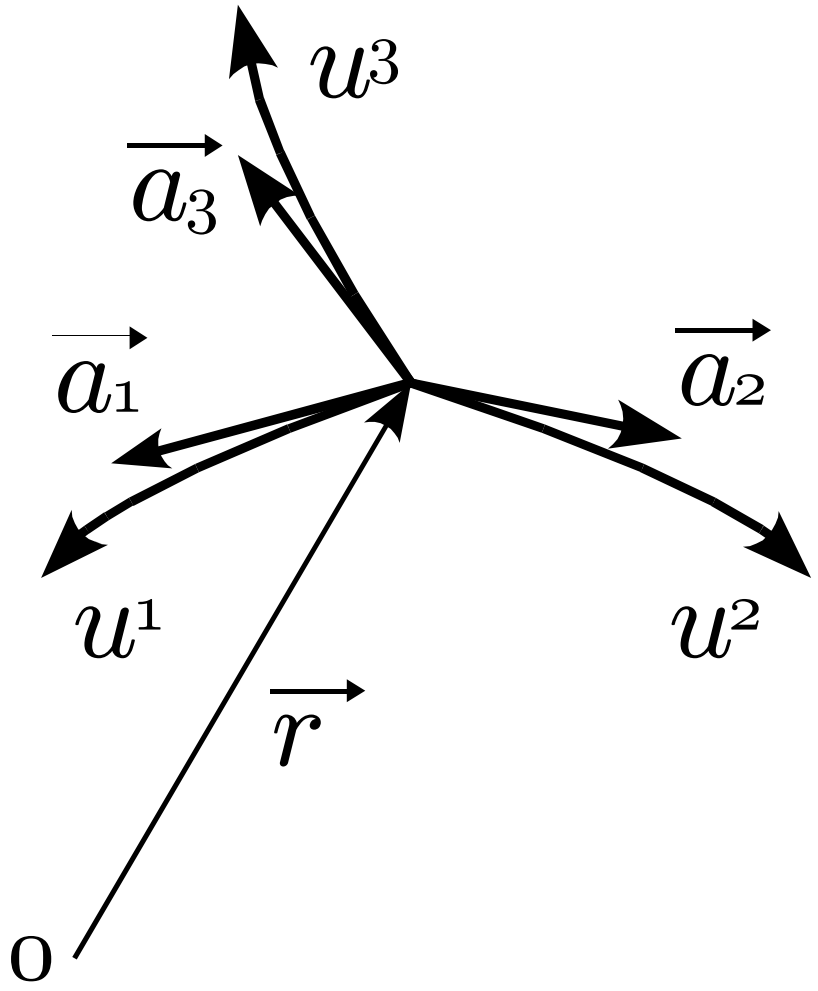

Figura 3.4: O sistema curvilíneo de coordenadas e os vetores unitários.

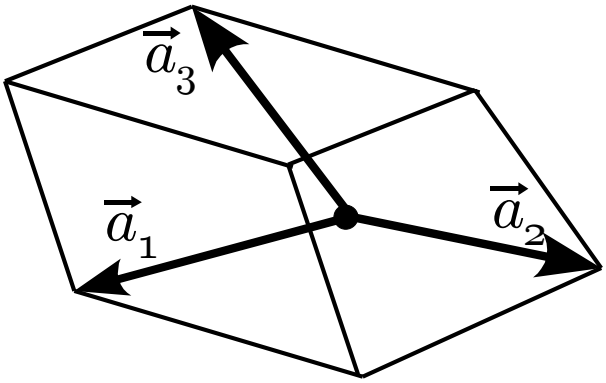

Figura 3.5: Vetores unitários em uma célula não ortogonal (malha estruturada).

De (3.26), nota-se que

$$g_{ll} = |a_l|^2. \tag{3.27}$$

Desenvolvendo o determinante de $[g]$, Eq. (3.26), observa-se que

$$\sqrt{g} = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3). \tag{3.28}$$

A Equação (3.28) mostra que $\sqrt{g}$ é o volume do hexaedro formado pelos vetores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ e $\vec{a}_3$ (veja a Figura 3.5).

Usando a definição matemática (3.25), pode ser observado que

$$\vec{a}^l \cdot \vec{a}_m = \delta_{l,m}, \tag{3.29}$$

na qual $\delta_{l,m}$ é a Função Delta de Kronecker.

Uma definição métrica similar à introduzida pela Eq. (3.26) pode ser feita para os vetores recíprocos da seguinte maneira

$$g^{lm} = \vec{a}^l \cdot \vec{a}^m. \tag{3.30}$$

Assim, com esses conceitos em mente, é possível expandir um vetor $\vec{V}$ usando vetores unitários e recíprocos, como mostrado em (3.31) (veja Eq.(3.24)),

$$\vec{V} = \sum_{l=1}^{3} v^l \ \vec{a}_l = \sum_{l=1}^{3} v_l \ \vec{a}^l, \tag{3.31}$$

na qual v^l e v_l são chamados, respectivamente, de l'ésima componente contravariante e l'ésima componente covariante de $\vec{V}$.

Para calcular a l'ésima componente contravariante do vetor $\vec{V}$, o produto escalar $\vec{V} \cdot \vec{a}^l$ deve ser calculado. Dessa forma, usando as equações (3.29) e (3.31), verifica-se que

$$\vec{V} \cdot \vec{a}^l = \left(\sum_{l=1}^{3} v^l \ \vec{a}_l \right) \cdot \vec{a}^l = v^l. \tag{3.32}$$

De forma similar, a l'ésima componente covariante de $\vec{V}$ é obtida por

$$\vec{V} \cdot \vec{a}_l = \left(\sum_{l=1}^{3} v_l \ \vec{a}^l \right) \cdot \vec{a}_l = v_l. \tag{3.33}$$

Pode-se obter uma relação para calcular as componentes covariantes de $\vec{V}$ a partir de suas componentes contravariantes (e vice-versa). Se for calculado o produto escalar $\vec{V} \cdot \vec{a}_m = (\sum_{l=1}^{3} v^l \ \vec{a}_l) \cdot \vec{a}_m$ (veja (3.33) e (3.26)), obtém-se

$$v_m = \sum_{l=1}^{3} g_{lm} \ v^l. \tag{3.34}$$

Seguindo procedimento similar, chega-se a

$$v^m = \sum_{l=1}^{3} g^{lm} \ v_l. \tag{3.35}$$

Finalmente, deve-se notar que os vetores $\vec{a}_l$ e $\vec{a}^l$ não apresentam necessariamente módulo unitário. Isto significa que as componentes v_l e v^l apresentam magnitudes dependentes do sistema de coordenadas local. No entanto, observando as expansões definidas por (3.31) e que $g_{ll} = |\vec{a}_l|^2$ e $g^{ll} = |\vec{a}^l|^2$, os valores físicos das componentes V_l e V^l são calculados por

$$V_l = v_l \sqrt{g^{ll}} \quad \text{e} \quad V^l = v^l \sqrt{g_{ll}}. \tag{3.36}$$

3.5.2 O Método LN-FDTD

Para obterem-se as componentes contravariantes do campo $\vec{H}$, representadas por h^l ($l = 1, 2, 3$), a equação vetorial (2.7) pode ser decomposta em vetores paralelos aos vetores $\vec{a}^l$

usando a operação produto escalar. Dessa forma, sem perda de generalidade, para $l = 1$ tem-se

$$\left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)\cdot\vec{a}^1 = \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot\vec{a}^1.$$

Empregando as Equações (3.32) e (3.25), obtém-se

$$\left(-\mu\frac{\partial h^1}{\partial t}\right) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{\sqrt{g}}\right).$$

Usando a identidade vetorial $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$ no lado direito da Equação acima, chega-se a

$$\left(-\mu\frac{\partial h^1}{\partial t}\right) = \frac{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_2\right)\left(\vec{E}\cdot\vec{a}_3\right) - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_3\right)\left(\vec{E}\cdot\vec{a}_2\right)}{\sqrt{g}}.$$

Da Equação (3.31), nota-se que $\vec{\nabla} = \sum_{l=1}^{3}\left(\partial/\partial u^l\right)\vec{a}^l$. Assim, empregando (3.29) e (3.33) ainda para o lado direto, verifica-se que a primeira equação para a primeira componente contravariante de $\vec{H}$ é dada por

$$\frac{\partial h^1}{\partial t} = -\left(\frac{\partial e_3}{\partial u^2} - \frac{\partial e_2}{\partial u^3}\right)/(\mu\sqrt{g}). \tag{3.37}$$

Desenvolvendo o mesmo procedimento para as demais componentes de $\vec{H}$, verifica-se que

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = -\left(\frac{\partial e_1}{\partial u^3} - \frac{\partial e_3}{\partial u^1}\right)/(\mu\sqrt{g}) \tag{3.38}$$

e que

$$\frac{\partial h^3}{\partial t} = -\left(\frac{\partial e_2}{\partial u^1} - \frac{\partial e_1}{\partial u^2}\right)/(\mu\sqrt{g}). \tag{3.39}$$

Para o campo $\vec{E}$, chega-se a

$$\epsilon\frac{\partial e^1}{\partial t} + \sigma e^1 = \left(\frac{\partial h_3}{\partial u^2} - \frac{\partial h_2}{\partial u^3}\right)/\sqrt{g}, \tag{3.40}$$

$$\epsilon\frac{\partial e^2}{\partial t} + \sigma e^2 = \left(\frac{\partial h_1}{\partial u^3} - \frac{\partial h_3}{\partial u^1}\right)/\sqrt{g} \tag{3.41}$$

e

$$\epsilon\frac{\partial e^3}{\partial t} + \sigma e^3 = \left(\frac{\partial h_2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1}{\partial u^2}\right)/\sqrt{g}. \tag{3.42}$$

As equações (3.37)-(3.42) podem ser aproximadas de forma usual por diferenças centradas, como mostrado no Tópico 3.3.1. Dessa forma, as seguintes equações de atualização são obtidas

$$h^{1\ (n+\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} = h^{1\ (n-\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} - \frac{\Delta_t}{\mu\sqrt{g}}\left[\frac{e^{(n)}_{3(i,j+1,k)} - e^{(n)}_{3(i,j,k)}}{\Delta u^2} - \frac{e^{(n)}_{2(i,j,k+1)} - e^{(n)}_{2(i,j,k)}}{\Delta u^3}\right], \tag{3.43}$$

$$h^{2\ (n+\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} = h^{2\ (n-\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} - \frac{\Delta_t}{\mu\sqrt{g}}\left[\frac{e^{(n)}_{1(i,j,k+1)} - e^{(n)}_{1(i,j,k)}}{\Delta u^3} - \frac{e^{(n)}_{3(i+1,j,k)} - e^{(n)}_{3(i,j,k)}}{\Delta u^1}\right], \tag{3.44}$$

$$h^{3\ (n+\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} = h^{3\ (n-\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} - \frac{\Delta_t}{\mu\sqrt{g}}\left[\frac{e^{(n)}_{2(i+1,j,k)} - e^{(n)}_{2(i,j,k)}}{\Delta u^1} - \frac{e^{(n)}_{1(i,j+1,k)} - e^{(n)}_{1(i,j,k)}}{\Delta u^2}\right], \tag{3.45}$$

$$e^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} = e^{1\ (n)}_{(i,j,k)}\left(\frac{1-\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}{1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}\right) + \frac{\Delta_t}{\left(\epsilon+\frac{1}{2}\Delta_t\sigma\right)\sqrt{g}}\left[\frac{h^{(n+\frac{1}{2})}_{3(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{3(i,j-1,k)}}{\Delta u^2}\right] - \frac{\Delta_t}{\left(\epsilon+\frac{1}{2}\Delta_t\sigma\right)\sqrt{g}}\left[\frac{h^{(n+\frac{1}{2})}_{2(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{2(i,j,k-1)}}{\Delta u^3}\right], \tag{3.46}$$

$$e^{2\ (n+1)}_{(i,j,k)} = e^{2\ (n)}_{(i,j,k)}\left(\frac{1-\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}{1+\sigma\frac{\Delta_t}{2\epsilon}}\right) + \frac{\Delta_t}{\left(\epsilon+\frac{1}{2}\Delta_t\sigma\right)\sqrt{g}}\left[\frac{h^{(n+\frac{1}{2})}_{1(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{1(i,j,k-1)}}{\Delta u^3}\right] - \frac{\Delta_t}{\left(\epsilon+\frac{1}{2}\Delta_t\sigma\right)\sqrt{g}}\left[\frac{h^{(n+\frac{1}{2})}_{3(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{3(i,j-1,k)}}{\Delta u^2}\right], \tag{3.47}$$

e

$$e^{3\ (n+1)}_{(i,j,k)} = e^{3\ (n)}_{(i,j,k)} \left(\frac{1 - \sigma \frac{\Delta_t}{2\epsilon}}{1 + \sigma \frac{\Delta_t}{2\epsilon}} \right) + \frac{\Delta_t}{\left(\epsilon + \frac{1}{2}\Delta_t \sigma\right) \sqrt{g}} \left[\frac{h^{(n+\frac{1}{2})}_{2(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{2(i-1,j,k)}}{\Delta u^1} \right] - \frac{\Delta_t}{\left(\epsilon + \frac{1}{2}\Delta_t \sigma\right) \sqrt{g}} \left[\frac{h^{(n+\frac{1}{2})}_{1(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{1(i,j-1,k)}}{\Delta u^2} \right]. \tag{3.48}$$

É apropriado dizer que Δu^l ($l = 1, 2$ e 3) são considerados unitários (iguais a um), já que as informações métricas da célula estão contidas no termo $\sqrt{g}$ [7].

Como pode ser observado, as Equações (3.9)-(3.14) são similares as Equações (3.43)-(3.48). Deve ser notado que as componentes contravariantes dependem de componentes covariantes, as quais são calculadas através da equação (3.34). Tal equação, quando combinada com a técnica das projeções [7], gera as seguintes equações de atualização para as componentes de campo covariantes

$$\begin{aligned} h_1 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} = g_{11} h^1 \right|^{n+1/2}_{i,j,k} &+ (1/4) g_{12} \left(h^2 \left|^{n+1/2}_{i-1,j,k} + h^2 \right|^{n+1/2}_{i-1,j+1,k} + h^2 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} + h^2 \right|^{n+1/2}_{i,j+1,k} \right) \\ &+ (1/4) g_{13} \left(h^3 \left|^{n+1/2}_{i-1,j,k} + h^3 \right|^{n+1/2}_{i-1,j,k+1} + h^3 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} + h^3 \right|^{n+1/2}_{i,j,k+1} \right) \end{aligned}, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned} h_2 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} = g_{22} h^2 \right|^{n+1/2}_{i,j,k} &+ (1/4) g_{21} \left(h^1 \left|^{n+1/2}_{i,j-1,k} + h^1 \right|^{n+1/2}_{i+1,j-1,k} + h^1 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} + h^1 \right|^{n+1/2}_{i+1,j,k} \right) \\ &+ (1/4) g_{23} \left(h^3 \left|^{n+1/2}_{i,j-1,k} + h^3 \right|^{n+1/2}_{i,j-1,k+1} + h^3 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} + h^3 \right|^{n+1/2}_{i,j,k+1} \right) \end{aligned}, \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} h_3 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} = g_{33} h^3 \right|^{n+1/2}_{i,j,k} &+ (1/4) g_{31} \left(h^1 \left|^{n+1/2}_{i,j,k-1} + h^1 \right|^{n+1/2}_{i+1,j,k-1} + h^1 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} + h^1 \right|^{n+1/2}_{i+1,j,k} \right) \\ &+ (1/4) g_{32} \left(h^2 \left|^{n+1/2}_{i,j,k-1} + h^2 \right|^{n+1/2}_{i,j+1,k-1} + h^2 \left|^{n+1/2}_{i,j,k} + h^2 \right|^{n+1/2}_{i,j+1,k} \right) \end{aligned}, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} e_1 \left|^{n+1}_{i,j,k} = g_{11} e^1 \right|^{n+1}_{i,j,k} &+ (1/4) g_{12} \left(e^2 \left|^{n+1}_{i,j,k} + e^2 \right|^{n+1}_{i+1,j,k} + e^2 \left|^{n+1}_{i,j-1,k} + e^2 \right|^{n+1}_{i+1,j-1,k} \right) \\ &+ (1/4) g_{13} \left(e^3 \left|^{n+1}_{i,j,k} + e^3 \right|^{n+1}_{i+1,j,k} + e^3 \left|^{n+1}_{i,j,k-1} + e^3 \right|^{n+1}_{i+1,j,k-1} \right) \end{aligned}, \tag{3.52}$$

$$e_2\Big|_{i,j,k}^{n+1} = g_{22}e^2\Big|_{i,j,k}^{n+1} + (1/4)g_{21}\left(e^1\Big|_{i,j,k}^{n+1} + e^1\Big|_{i,j+1,k}^{n+1} + e^1\Big|_{i-1,j,k}^{n+1} + e^1\Big|_{i-1,j+1,k}^{n+1}\right) + (1/4)g_{23}\left(e^3\Big|_{i,j,k}^{n+1} + e^3\Big|_{i,j+1,k}^{n+1} + e^3\Big|_{i,j,k-1}^{n+1} + e^3\Big|_{i,j+1,k-1}^{n+1}\right) \tag{3.53}$$

e

$$e_3\Big|_{i,j,k}^{n+1} = g_{33}e^3\Big|_{i,j,k}^{n+1} + (1/4)g_{31}\left(e^1\Big|_{i,j,k}^{n+1} + e^1\Big|_{i,j,k+1}^{n+1} + e^1\Big|_{i-1,j,k}^{n+1} + e^1\Big|_{i-1,j,k+1}^{n+1}\right) + (1/4)g_{32}\left(e^2\Big|_{i,j,k}^{n+1} + e^2\Big|_{i,j,k+1}^{n+1} + e^2\Big|_{i,j-1,k}^{n+1} + e^2\Big|_{i,j-1,k+1}^{n+1}\right). \tag{3.54}$$

Malhas para as componentes covariantes do campo $\vec{E}$ devem ser construídas de forma que as mesmas contornem de forma apropriada a geometria do problema a ser analisado. Tais malhas são chamadas de malhas primárias, compostas pelas chamadas células primárias (Fig. 3.6). Como pode ser observado pela Fig.3.6, os cantos das células secundárias (ponto C) são posicionados no centróide das células primárias. Dessa forma, os pontos da malha secundária são calculados a partir dos dados da malha primária.

3.5.3 Estabilidade e Precisão do Método LN-FDTD

Assim como no método FDTD, há um limite para o passo temporal Δ_t que garante a estabilidade do método. Tal limite é uma generalização da condição de Courant, dada por [7]

$$\Delta_t < \frac{1}{v_{\max}\max\left(\sqrt{\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} g^{lm}}\right)}, \tag{3.55}$$

na qual $v_{\max}$ é a máxima velocidade propagante.

Observando (3.55), nota-se que é necessário verificar toda a malha em busca de um valor mínimo para Δ_t, que é determinado pela região com as células com menores dimensões. Vale ressaltar este valor é utilizado para atualizar todas as componentes de campo do domínio computacional. Neste trabalho, adotou-se 60% deste limite.

É de fundamental importância notar que (3.55) só garante a estabilidade do método se a malha computacional não apresentar células com arestas com inclinações com noventa graus ou mais. Uma abordagem matemática completa sobre o assunto pode ser encontrada em [89].

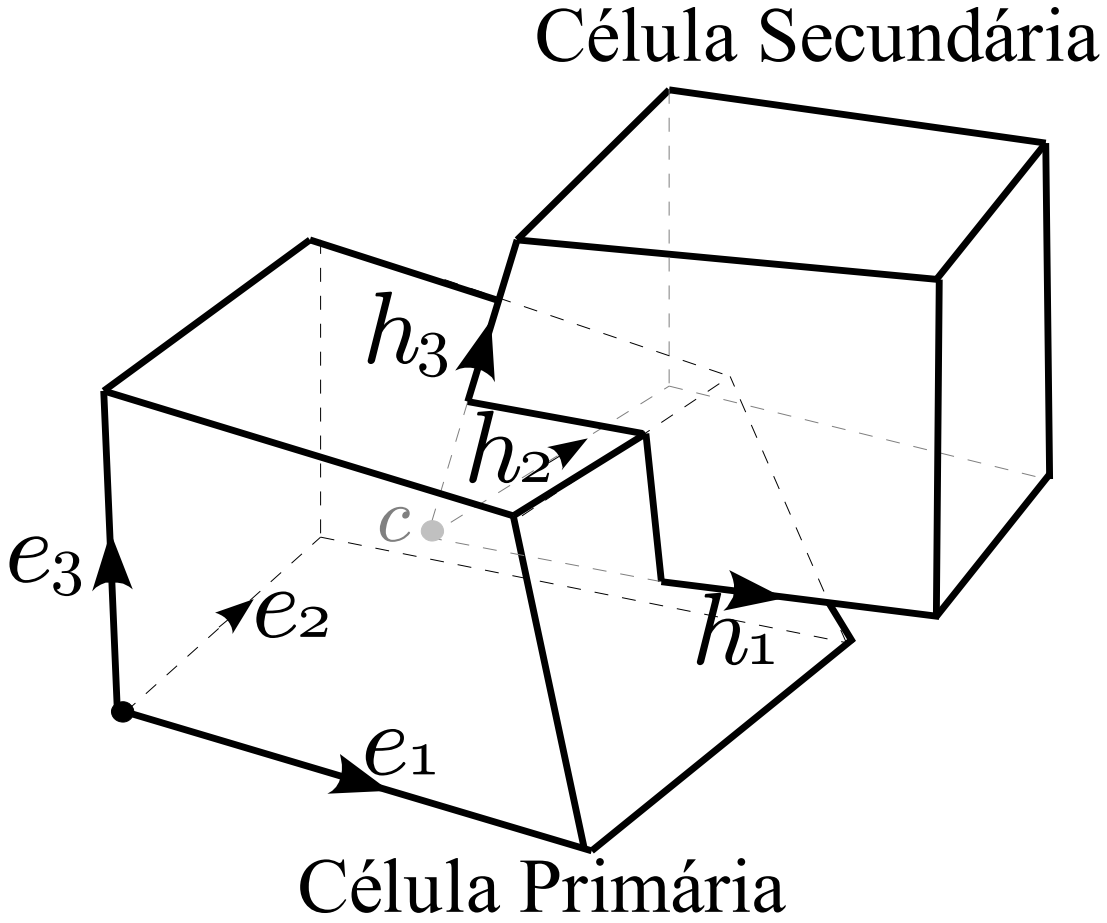

Figura 3.6: Componentes Covariantes em Células de Yee Não-Ortogonais: Célula Primária para o Campo Elétrico $\vec{E}$ e Célula Secundária para o Campo Magnético $\vec{H}$.

Para se reduzirem os efeitos de dispersão numérica e garantir uma precisão aceitável nos cálculos das componentes de campo, deve-se garantir que todas as células (das malhas primária e secundária) possuam arestas menores que $\lambda_{\min}/10$, tal como no método FDTD.

3.5.4 Cálculos de Tensões e Correntes e a implementação da Fonte de Excitação

Para garantir o significado físico para os cálculos, alguns detalhes devem ser observados para implementar a fonte de excitação e para calcular correntes e tensões. Tais detalhes são discutidos neste Tópico.

a) Cálculo de Correntes em Condutores Finos

Neste trabalho, condutores elétricos são considerados perfeitos. Dessa forma, o cálculo da densidade corrente $\vec{J}$ que é conduzida por um fio pode ser realizado pela aplicação da lei de Ampère em sua forma original

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}. \tag{3.56}$$

Para o cálculo da terceira componente covariante da corrente de condução $\vec{I}$, o seguinte procedimento pode ser empregado.

Observando as Equações (3.31) e (3.42), pode ser notado que

$$\vec{J}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial h_2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1}{\partial u^2} \right) \vec{a}_3.$$

Considerando que $|\vec{a}_3| = \sqrt{g_{33}}$, é possível escrever

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial h_2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1}{\partial u^2} \right) \sqrt{g_{33}}$$

e, sabendo-se que I_3 pode ser calculado por $I_3 = J_3 \Delta s_3$, onde a área Δs_3 é dada por $\Delta s_3 = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$, tem-se

$$I_3 = \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial h_2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1}{\partial u^2} \right) |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|.$$

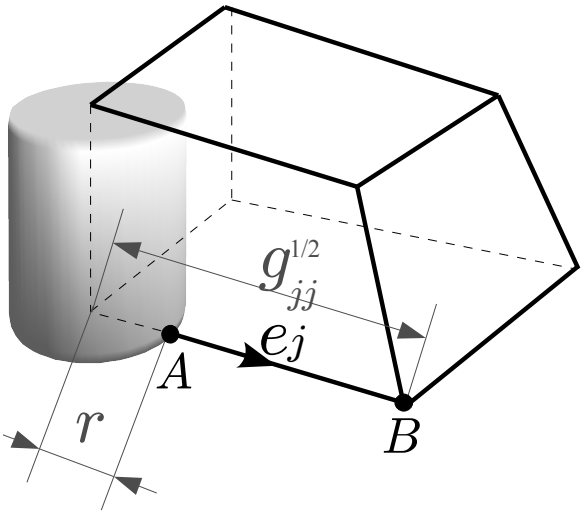

Figura 3.7: A geometria considerada para calcular V_{AB}^{r}.

Finalmente, após o desenvolvimento algébrico da Equação acima, verifica-se que

$$I_3 = \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial h_2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1}{\partial u^2} \right) \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \tag{3.57}$$

De forma semelhante, chega-se a

$$I_2 = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial h_1}{\partial u^3} - \frac{\partial h_3}{\partial u^1} \right) \sqrt{g_{11} g_{33} - g_{13}^2} \tag{3.58}$$

e

$$I_1 = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial h_3}{\partial u^2} - \frac{\partial h_2}{\partial u^3} \right) \sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23}^2}. \tag{3.59}$$

b) Cálculo de Tensões

A tensão entre dois pontos A e B, V_{AB}, pode ser calculada pela Equação (2.16). Usando (3.31) e (3.29) e considerando A e B dois pontos vizinhos, localizados nos dois pontos que definem o vetor $\vec{a}_j$, temos

$$V_{\mathrm{AB}} = \int_A^B \left(\sum_{i=1}^{3} e_i \vec{a}^i \right) \cdot \vec{a}_j = e_j. \tag{3.60}$$

A Equação (3.60) não é válida para o caso no qual o ponto A está na superfície de um fio fino, como ilustrado pela Fig. 3.7. Para este caso, é necessário levar em conta o raio r

do condutor. Dessa forma, a maneira mais simples de solucionar este problema é calcular o valor físico E_j e a distância entre A a B, d_{AB}. Denominando este potencial de V^r_{AB}, obtém-se (veja (3.36) e (3.26))

$$V^r_{\mathrm{AB}} = -E_j d_{AB} = -e_j \sqrt{g^{jj}} \left(\sqrt{g_{jj}} - r \right). \tag{3.61}$$

Dessa forma, é possível levar em conta a dimensão r do fio no cálculo de tensões.

c) Implementação da Fonte de Excitação

A função usada como fonte de excitação neste trabalho segue [2]. Ela é descrita pelas Equações (2.5) e (2.6), dadas em volts.

Para excitar, por exemplo, $e_{3\ (i,j,k)}$, podemos utilizar a equação (3.60). Dessa forma, temos simplesmente

$$e_{3\ (i,j,k)} = V_s(t) \tag{3.62}$$

Assim, é possível controlar a magnitude física da tensão da fonte de excitação (por campo elétrico) simplesmente pela especificação de $V_s(t)$.

Capítulo 4

Formulação UPML para Meios Condutivos em Coordenadas Gerais (LN-UPML)

4.1 Conteúdo do Capítulo

Este Capítulo apresenta a nova formulação LN-UPML para meios condutivos em coordenadas gerais. Esta formulação viabiliza a solução do problema (análise) neste sistema de coordenadas. Vale ressaltar que este conjunto de equações não estava disponível na literatura anteriormente.

4.2 Introdução

O método FDTD aplicado às equações de Maxwell é uma poderosa ferramenta para análise e síntese de problemas em eletromagnetismo, pois, de maneira rigorosa, representa fenômenos e caracteriza os mais diversos tipos de meios, com ou sem anisotropia, de maneira natural quando aplicadas as devidas condições de contorno e definidos adequadamente os parâmetros eletromagnéticos (ϵ, σ e μ) para o problema. As equações

(3.37)-(3.42) podem ser aplicadas diretamente a problemas fechados (truncados, como um guia de onda metálico, por exemplo), nos quais há confinamento das ondas eletromagnéticas na região. Todavia, equações auxiliares são necessárias à simulação por FDTD de problemas abertos, pois, nesses casos, a aplicação apenas das equações (3.37)-(3.42) exigiria malhas com quantidade infinita de células e um número infinito de iterações, pois a onda deverá se propagar para distâncias infinitas da região de interesse. Muitas técnicas de truncagem foram propostas, como, por exemplo, as baseadas nos operadores de Bayliss-Turkel [70], Mür primeira e segunda ordens [71], a técnica de Higdon [72] e a técnica de Liao [73]. Essas técnicas são conhecidas por ABCs (*Absorbing Boundary Conditions*), e têm como principal objetivo absorver ondas que chegam aos limites da região de análise de maneira a simular sua propagação para o infinito, sem reflexões que alterem a propagação na região de interesse. A formulação utilizada para truncar o domínio é de grande importância para a precisão do método FDTD nesses casos. A idéia de se criar uma câmara anecóica virtual é ilustrada pela Figura 4.1.

As mais recentes e mais eficientes técnicas ABCs são, sem dúvida, as baseadas na idéia de camadas perfeitamente casadas com a região sob análise (PML), originalmente desenvolvida e implementada por Berenger [74], cujo trabalho parte da tentativa anterior de Holand [90] de gerar um meio absorvente casado com a região de análise. Segundo Holand, se a condição

$$\frac{\sigma_e}{\epsilon} = \frac{\sigma_m}{\mu}, \tag{4.1}$$

for satisfeita, há o pleno casamento de impedâncias e a onda é totalmente transmitida, truncando o método (σ_e representa condutividade elétrica e σ_m é a correspondente condutividade magnética). Porém, a condição (4.1) só é valida para ondas planas incidindo normalmente na interface com o meio truncador, o que limita a aplicação da formulação.

De fato, a formulação de Berenger publicada em 1993 foi o primeiro grande avanço obtido no sentido de se obter uma técnica de absorção independente de fatores como ângulo de incidência, polarização e freqüência da onda incidente na região de trunca-

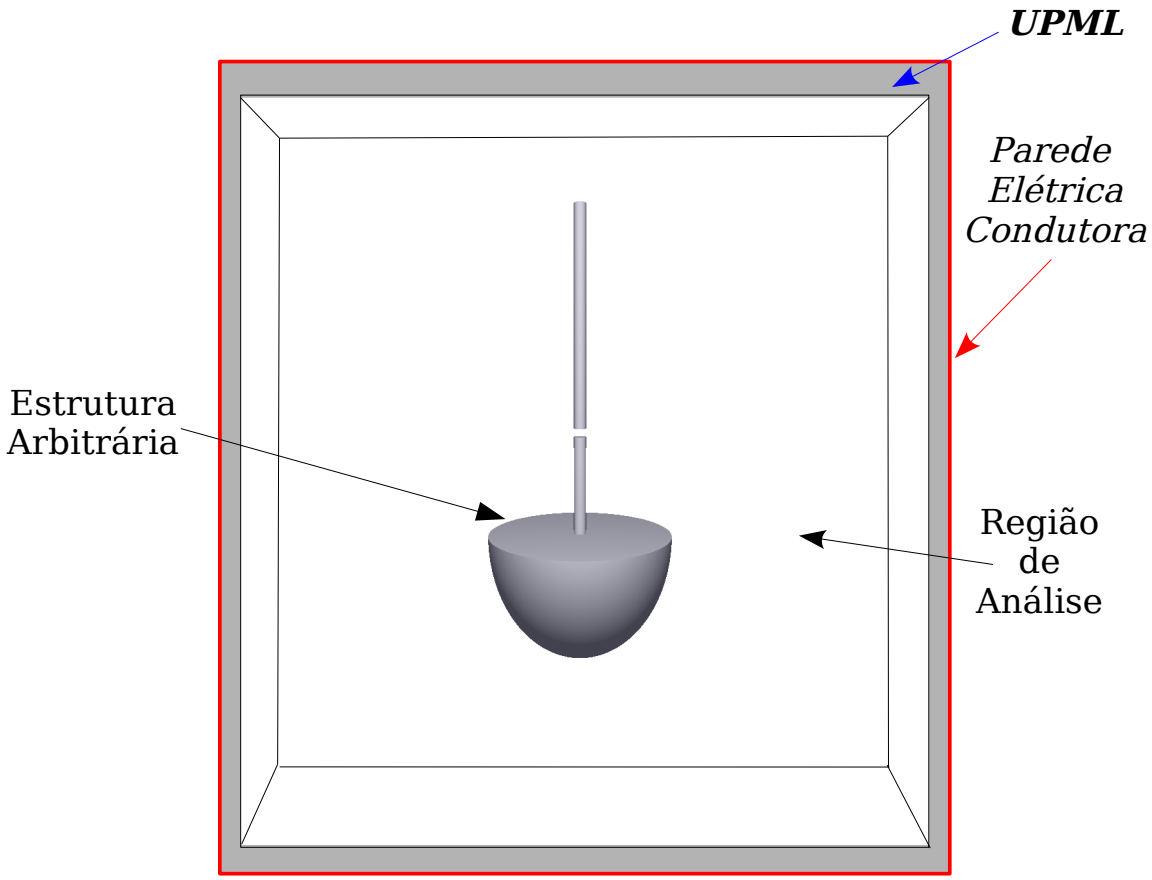

Figura 4.1: Corte da malha computacional ilustrando a truncagem do método por UPML e uma estrutura arbitrária sob análise.

gem. Isso foi alcançado com a modelagem de um meio composto por camadas paralelas com aumentos graduais em suas condutividades nas direções que apontam para fora do domínio. Além disso, cada componente de campo foi decomposta em outras duas ortogonais, fundamentando a conhecida técnica do *split-field*. A principal desvantagem desta técnica é a necessidade de calcular doze componentes de campo, requerendo, portanto uma quantidade considerável de memória e de tempo de processamento.

O trabalho publicado por Gedney [91] segue linha semelhante, porém traz uma interpretação física (formulação baseada nas Equações de Maxwell) e é matematicamente mais elegante, mantendo a mesma eficiência de absorção da formulação de Berenger. A formulação de Gedney, a *Uniaxial Perfectly Matched Layers* − UPML, na qual não há a necessidade de aplicar o *split-field*, é apresentada, de maneira completa no Apêndice A, considerando-se coordenadas retangulares [92].

Neste trabalho, devido ao fato de ser necessário se modelar o solo, um meio com condutividade finita, houve a necessidade de se desenvolver a formulação matemática da técnica UPML em Coordenadas Gerais de forma específica para truncar adequadamente esses materiais que apresentam $\sigma \neq 0$, pois tal equacionamento não estava disponível na literatura. Assim, esta formulação, desenvolvida neste trabalho, é apresentada a seguir.

4.3 Desenvolvimento Matemático da Formulação

No domínio da freqüência, as equações de Maxwell (2.7) e (2.8) são expressas por

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega\mu[S]\vec{\mathbf{H}} \tag{4.2}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_0 \left(\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}\right)[S]\vec{\mathbf{E}}, \tag{4.3}$$

nas quais ω define a freqüência angular da onda plana, $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier dos vetores intensidade de campo elétrico $\vec{E}$ e intensidade de campo magnético $\vec{H}$. Através do tensor $[S]$, define-se a anisotropia uniaxial na região

absorvente. Para alcançar tal objetivo, o tensor $[S]$ deve ser dado por (veja o Apêndice A)

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{s_2 s_3}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_1 s_3}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_1 s_2}{s_3} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

na qual s_α ($\alpha = 1, 2$ ou 3) é da forma [7]

$$s_\alpha = k_\alpha + \frac{\sigma_\alpha}{j\omega\epsilon_0}. \tag{4.5}$$

Expandindo a Eq. (4.3) em Coordenadas Gerais e utilizando a Equação (4.4), tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \partial \mathbf{h}_3/\partial u^2 - \partial \mathbf{h}_2/\partial u^3 \\ \partial \mathbf{h}_1/\partial u^3 - \partial \mathbf{h}_3/\partial u^1 \\ \partial \mathbf{h}_2/\partial u^1 - \partial \mathbf{h}_1/\partial u^2 \end{bmatrix} = j\omega\epsilon_0 \left(\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}\right) \begin{bmatrix} \frac{s_2 s_3}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_1 s_3}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_1 s_2}{s_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Sem perda de generalidade, tem-se para $\mathbf{e}^1$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial u^3}\right) = j\omega\epsilon_0 \left(\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}\right) \left(\frac{s_2 s_3}{s_1}\right) \mathbf{e}^1.$$

Para garantir a continuidade das componentes, a normalização

$$\vec{\mathbf{V}}^\circ = \vec{\mathbf{V}} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{4.7}$$

deve ser empregada [93]. Dessa forma, chega-se a (o símbolo $^\circ$ não será posto, a partir daqui, por simplicidade)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(s_3(\mathbf{h}_{3(i,j,k)} - \mathbf{h}_{3(i,j-1,k)}) - s_2(\mathbf{h}_{2(i,j,k)} - \mathbf{h}_{2(i,j,k-1)})\right) = j\omega\epsilon_0 \left(\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}\right) (s_2 s_3)\, \mathbf{e}^1_{(i,j,k)}.$$

Dividindo a Equação acima por s_2 e rearranjando o lado direto, tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{s_3}{s_2}(\mathbf{h}_{3(i,j,k)} - \mathbf{h}_{3(i,j-1,k)}) - (\mathbf{h}_{2(i,j,k)} - \mathbf{h}_{2(i,j,k-1)})\right) = (j\omega\epsilon + \sigma)\, s_3 \mathbf{e}^1_{(i,j,k)}. \tag{4.8}$$

Tendo em vista a Eq. (4.5), que contém o termo $j\omega$, nota-se que os termos $\frac{s_3}{s_2}(\mathbf{h}_{3(i,j,k)} - \mathbf{h}_{3(i,j-1,k)})$ e $s_3\mathbf{e}^1_{(i,j,k)}$ precisam ser tratados de forma particular, com equações de atualização próprias, de forma a se evitarem convoluções computacionalmente intensivas, quando for utilizado o domínio do tempo. Dessa forma, definem-se

$$\tilde{\mathbf{h}}_{3(i,j,k)} = \frac{s_3}{s_2}\left(\mathbf{h}_{3(i,j,k)} - \mathbf{h}_{3(i,j-1,k)}\right) = \left(\frac{k_3 + \frac{\sigma_3}{j\omega\epsilon_0}}{k_2 + \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_0}}\right)\bar{\mathbf{h}}_{3(i,j,k)} \tag{4.9}$$

e

$$\mathbf{P}^1_{(i,j,k)} = s_3\mathbf{e}^1_{(i,j,k)} = \left(k_3 + \frac{\sigma_3}{j\omega\epsilon_0}\right)\mathbf{e}^1_{(i,j,k)}. \tag{4.10}$$

Assim, a Equação (4.8) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\tilde{\mathbf{h}}_{3(i,j,k)} - (\mathbf{h}_{2(i,j,k)} - \mathbf{h}_{2(i,j,k-1)})\right) = (j\omega\epsilon + \sigma)\,\mathbf{P}^1_{(i,j,k)}. \tag{4.11}$$

Observando a Eq.(4.9), nota-se que é possível obter-se uma equação de atualização explícita para $\tilde{h}_{3(i,j,k)}$, no domínio do tempo, em função de $\bar{h}_{3(i,j,k)} = h_{3(i,j,k)} - h_{3(i,j-1,k)}$. Desenvolvendo (4.9), verifica-se que

$$j\omega k_2\tilde{\mathbf{h}}_3 + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}\tilde{\mathbf{h}}_3 = j\omega k_3\bar{\mathbf{h}}_3 + \frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\bar{\mathbf{h}}_3.$$

Passando a equação acima para o domínio do tempo, empregando a transformação $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$, encontra-se

$$k_2\frac{\partial\tilde{h}_3}{\partial t} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}\tilde{h}_3 = k_3\frac{\partial\bar{h}_3}{\partial t} + \frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\bar{h}_3.$$

Utilizando-se diferenças centradas para aproximar as derivadas temporais e média temporal para as parcelas sem derivadas, encontra-se a seguinte equação de atualização para $\tilde{h}^{n+1}_{3(i,j,k)}$:

$$\tilde{h}^{n+1}_{3(i,j,k)} = \frac{\left(\frac{k_2}{\Delta_t} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\tilde{h}^n_{3(i,j,k)} + \left(\frac{k_3}{\Delta_t} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}\right)\bar{h}^{n+1}_{3(i,j,k)} - \left(\frac{k_3}{\Delta_t} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}\right)\bar{h}^n_{3(i,j,k)}}{\left(\frac{k_2}{\Delta_t} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\right)}. \tag{4.12}$$

A partir do desenvolvimento de (3.40), aplicando procedimento idêntico ao empregado para se obter (4.12), chega-se à Equação de atualização para $P^1_{(i,j,k)}$, dada por

$$P^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{\left(\frac{\epsilon}{\Delta_t} - \frac{\sigma}{2}\right)P^{1\ (n)}_{(i,j,k)} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\tilde{h}^{n+1}_{3(i,j,k)} - h^{n+\frac{1}{2}}_{2(i,j,k)} + h^{n+\frac{1}{2}}_{2(i,j,k-1)}\right)}{\left(\frac{\epsilon}{\Delta_t} + \frac{\sigma}{2}\right)}. \tag{4.13}$$

Finalmente, seguindo o mesmo procedimento de discretização para a Equação (4.10), chega-se à seguinte Equação, em diferenças finitas, para a atualização de $e^1_{(i,j,k)}$

$$e^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{\left(\frac{k_3}{\Delta_t} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}\right) e^{1\ (n)}_{(i,j,k)} + \frac{P^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} - P^{1\ (n)}_{(i,j,k)}}{\Delta_t}}{\left(\frac{k_3}{\Delta_t} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}\right)}. \tag{4.14}$$

Sintetizando, para encontrar e^1, devem-se calcular (4.12),(4.13) e (4.14), neste ordem.

O procedimento descrito acima pode ser aplicado para encontrar as demais componentes de $\vec{E}$ e as componentes de $\vec{H}$ (partindo-se da Eq. (4.2)) para a região de UPML. Definindo-se as variáveis

$$\psi^+_\alpha = \frac{k_\alpha}{\Delta_t} + \frac{\sigma_\alpha}{2\epsilon_0}, \quad \psi^-_\alpha = \frac{k_\alpha}{\Delta_t} - \frac{\sigma_\alpha}{2\epsilon_0}, \tag{4.15}$$

e

$$\Psi^+ = \frac{\epsilon}{\Delta_t} + \frac{\sigma}{2}, \quad \Psi^- = \frac{\epsilon}{\Delta_t} - \frac{\sigma}{2}, \tag{4.16}$$

é possível simplificar as equações de atualização. Dessa forma, o conjunto completo de Equações obtidas para a UPML em coordenadas gerais para truncar meios condutivos está disponível a seguir.

para e^1:

$$\bar{h}_{3(i,j,k)} = h_{3(i,j,k)} - h_{3(i,j-1,k)}, \tag{4.17}$$

$$\tilde{h}^{(n+1)}_{3(i,j,k)} = \frac{\psi^-_2 \tilde{h}^{(n)}_{3(i,j,k)} + \psi^+_3 \bar{h}^{(n+1)}_{3(i,j,k)} - \psi^-_3 \bar{h}^{(n)}_{3(i,j,k)}}{\psi^+_2}, \tag{4.18}$$

$$P^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{P^{1\ (n)}_{(i,j,k)} \Psi^- + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\tilde{h}^{(n+1)}_{3(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{2(i,j,k)} + h^{(n+\frac{1}{2})}_{2(i,j,k-1)} \right)}{\Psi^+}, \tag{4.19}$$

$$e^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{e^{1\ (n)}_{(i,j,k)} \psi^-_3 + \frac{1}{\Delta_t} \left(P^{1\ (n+1)}_{(i,j,k)} - P^{1\ (n)}_{(i,j,k)} \right)}{\psi^+_3}. \tag{4.20}$$

para e^2:

$$\bar{h}_{1(i,j,k)} = h_{1(i,j,k)} - h_{1(i,j,k-1)}, \tag{4.21}$$

$$\tilde{h}^{(n+1)}_{1(i,j,k)} = \frac{\psi_3^- \tilde{h}^{(n)}_{1(i,j,k)} + \psi_1^+ \bar{h}^{(n+1)}_{1(i,j,k)} - \psi_1^- \bar{h}^{(n)}_{1(i,j,k)}}{\psi_3^+}, \tag{4.22}$$

$$P^{2\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{P^{2\ (n)}_{(i,j,k)} \Psi^- + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\tilde{h}^{(n+1)}_{1(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{3(i,j,k)} + h^{(n+\frac{1}{2})}_{3(i-1,j,k)} \right)}{\Psi^+}, \tag{4.23}$$

$$e^{2\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{e^{2\ (n)}_{(i,j,k)} \psi_1^- + \frac{1}{\Delta_t} \left(P^{2\ (n+1)}_{(i,j,k)} - P^{2\ (n)}_{(i,j,k)} \right)}{\psi_1^+}. \tag{4.24}$$

para e^3:

$$\bar{h}_{2(i,j,k)} = h_{2(i,j,k)} - h_{2(i-1,j,k)}, \tag{4.25}$$

$$\tilde{h}^{(n+1)}_{2(i,j,k)} = \frac{\psi_1^- \tilde{h}^{(n)}_{2(i,j,k)} + \psi_2^+ \bar{h}^{(n+1)}_{2(i,j,k)} - \psi_2^- \bar{h}^{(n)}_{2(i,j,k)}}{\psi_1^+}, \tag{4.26}$$

$$P^{3\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{P^{3\ (n)}_{(i,j,k)} \Psi^- + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\tilde{h}^{(n+1)}_{2(i,j,k)} - h^{(n+\frac{1}{2})}_{1(i,j,k)} + h^{(n+\frac{1}{2})}_{1(i,j-1,k)} \right)}{\Psi^+}, \tag{4.27}$$

$$e^{3\ (n+1)}_{(i,j,k)} = \frac{e^{3\ (n)}_{(i,j,k)} \psi_2^- + \frac{1}{\Delta_t} \left(P^{3\ (n+1)}_{(i,j,k)} - P^{3\ (n)}_{(i,j,k)} \right)}{\psi_2^+}. \tag{4.28}$$

para h^1:

$$\bar{e}_{3(i,j,k)} = e_{3(i,j,k)} - e_{3(i,j+1,k)}, \tag{4.29}$$

$$\tilde{e}^{\ (n+\frac{1}{2})}_{3(i,j,k)} = \frac{\psi_2^- \tilde{e}^{\ (n-\frac{1}{2})}_{3(i,j,k)} + \psi_3^+ \bar{e}^{\ (n+1)}_{3(i,j,k)} - \psi_3^- \bar{e}^{\ (n)}_{3(i,j,k)}}{\psi_2^+}, \tag{4.30}$$

$$h^{1\ (n+\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} = \frac{h^{1\ (n-\frac{1}{2})}_{(i,j,k)} \psi_3^- + \frac{1}{\mu\sqrt{g}} \left(\tilde{e}^{(n+\frac{1}{2})}_{3\ (i,j,k)} + e^{(n+1)}_{2\ (i,j,k+1)} - e^{(n+1)}_{2\ (i,j,k)} \right)}{\psi_3^+}. \tag{4.31}$$

para h^2:

$$\bar{e}_{1(i,j,k)} = e_{1(i,j,k)} - e_{1(i,j,k+1)}, \tag{4.32}$$

$$\tilde{e}_{1(i,j,k)}^{\ (n+\frac{1}{2})} = \frac{\psi_3^- \tilde{e}_{1(i,j,k)}^{\ (n-\frac{1}{2})} + \psi_1^+ \bar{e}_{1(i,j,k)}^{\ (n+1)} - \psi_1^- \bar{e}_{1(i,j,k)}^{\ (n)}}{\psi_3^+}, \tag{4.33}$$

$$h_{(i,j,k)}^{2\ (n+\frac{1}{2})} = \frac{h_{(i,j,k)}^{2\ (n-\frac{1}{2})}\psi_1^- + \frac{1}{\mu\sqrt{g}}\left(\tilde{e}_{1\ (i,j,k)}^{(n+\frac{1}{2})} + e_{3\ (i+1,j,k)}^{(n+1)} - e_{3\ (i,j,k)}^{(n+1)}\right)}{\psi_1^+}. \tag{4.34}$$

para h^3:

$$\bar{e}_{2(i,j,k)} = e_{2(i,j,k)} - e_{2(i+1,j,k)}, \tag{4.35}$$

$$\tilde{e}_{2(i,j,k)}^{\ (n+\frac{1}{2})} = \frac{\psi_1^- \tilde{e}_{2(i,j,k)}^{\ (n-\frac{1}{2})} + \psi_2^+ \bar{e}_{2(i,j,k)}^{\ (n+1)} - \psi_2^- \bar{e}_{2(i,j,k)}^{\ (n)}}{\psi_1^+}, \tag{4.36}$$

$$h_{(i,j,k)}^{3\ (n+\frac{1}{2})} = \frac{h_{(i,j,k)}^{3\ (n-\frac{1}{2})}\psi_2^- + \frac{1}{\mu\sqrt{g}}\left(\tilde{e}_{2\ (i,j,k)}^{(n+\frac{1}{2})} + e_{1\ (i,j+1,k)}^{(n+1)} - e_{1\ (i,j,k)}^{(n+1)}\right)}{\psi_2^+}. \tag{4.37}$$

Para finalizar, as funções σ_α e k_α deve ser definidas. As funções σ_α podem ser generalizadas por

$$\sigma_\alpha(i_\alpha)|_{E^\beta} = \frac{\left|i_\alpha - I_\alpha + \frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}\right|^m}{{n_c}^m}\sigma_{\alpha\max} \tag{4.38}$$

e

$$\sigma_\alpha(i_\alpha)|_{H^\beta} = \frac{\left|i_\alpha - I_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\delta}_{\alpha,\beta}\right|^m}{{n_c}^m}\sigma_{\alpha\max} \tag{4.39}$$

nas quais

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, \text{se } \alpha = \beta \\ 0, \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{4.40}$$

$$\bar{\delta}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0, \text{se } \alpha = \beta \\ 1, \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{4.41}$$

$\alpha = 1, 2$ ou 3, $\beta = 1, 2$ ou 3, i_α é o índice da célula atual ($i_\alpha = i, j$ ou k de acordo com α), I_α é a célula de interface entre a região de análise e a UPML na direção α, m é a ordem do polinômio σ_α (usualmente $m = 4$), $\sigma_{\alpha\max}$ é o máximo valor da condutividade σ_α, que deve ser atribuído à última célula da UPML na direção α e n_c é o número de camadas (células)

usadas para a UPML (dez camadas foram utilizadas). A notação $\sigma_\alpha(i_\alpha)|_{A^\beta}$ representa a condutividade σ_α na direção α para a componente contravariante β do campo elétrico ($A = E$) ou para a componente contravariante β do campo magnético ($A = H$).

Finalmente, as funções k_α são, de forma similar, definidas por

$$k_\alpha(i_\alpha)|_{E^\beta} = 1 + \frac{(k_{\alpha\max} - 1)\left|i_\alpha - I_\alpha + \frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}\right|^m}{{n_c}^m} \tag{4.42}$$

e

$$k_\alpha(i_\alpha)|_{H^\beta} = 1 + \frac{(k_{\alpha\max} - 1)\left|i_\alpha - I_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\delta}_{\alpha,\beta}\right|^m}{{n_c}^m}. \tag{4.43}$$

Neste trabalho, foram adotados $k_{\alpha\max} = 7$ [7] e $\sigma_{\alpha\max} = 11(m+1)/(1500\pi\sqrt{g_{\alpha\alpha}}_{\text{av}})$, em que $\sqrt{g_{\alpha\alpha}}_{\text{av}}$ é a média de $\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ dentro da UPML.

4.4 Cálculo do Erro Gerado pela Formulação

Como já mencionado, a UPML tem uma alta eficiência de absorção. Isto significa que a absorção proporcionada pela formulação matemática não é perfeita e que o erro gerado pela região absorvente deve ser medido de alguma maneira.

Para se determinar o erro (relativo) observado em determinados pontos, o procedimento descrito em [7] foi executado para um domínio tridimensional. A idéia básica é comparar uma componente de campo obtida através de uma simulação da propagação em uma malha de referência, que é grande e sem paredes absorventes, com a mesma componente obtida em uma malha reduzida com a presença do meio absorvente sob análise. Para a obtenção do campo usado como referência, a simulação deve ser interrompida quando a onda eletromagnética se aproximar dos limites do domínio.

Para o exemplo considerado aqui, (Fig. 4.2), uma malha com $610 \times 610 \times 610$ células foi construída para obter o campo de referência. Para realizar tal simulação, um cluster Beowulf de 16 máquinas foi utilizado. O *grid* reduzido foi construído com $50 \times 50 \times 50$ células.

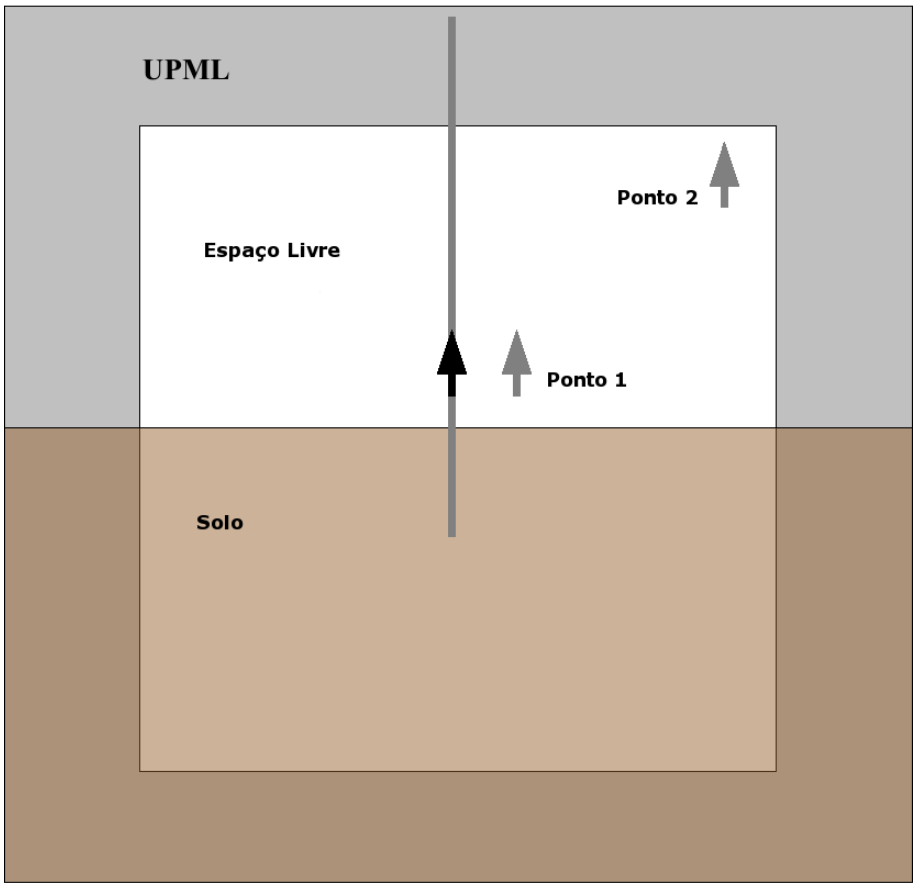

Figura 4.2: Localização dos pontos utilizados para a avaliação do erro relativo na malha reduzida ($50 \times 50 \times 50$).

Na Fig.4.2, podem ser observados os pontos nos quais a componente de campo vertical foi calculada. O ponto 1 está a duas células de distância da fonte de excitação do problema em uma direção (seta preta) e o ponto dois está a duas células do canto da UPML nas três direções. A Fig. 4.3 mostra os resultados obtidos para esses pontos. Deve-se lembrar que o Ponto 2 está próximo a uma região crítica (canto) e, portanto, apresenta um erro relativo maior, como esperado. O Ponto 1 apresentou um erro máximo de $-20\log_{10}(10^{-3}) = -60$dB e o Ponto 2 apresentou um erro máximo de $-44{,}437$dB (a performance é determinada em termos da potência do sinal). É importante observar que os níveis de erro obtidos aqui são comparáveis aos apresentados em [7].

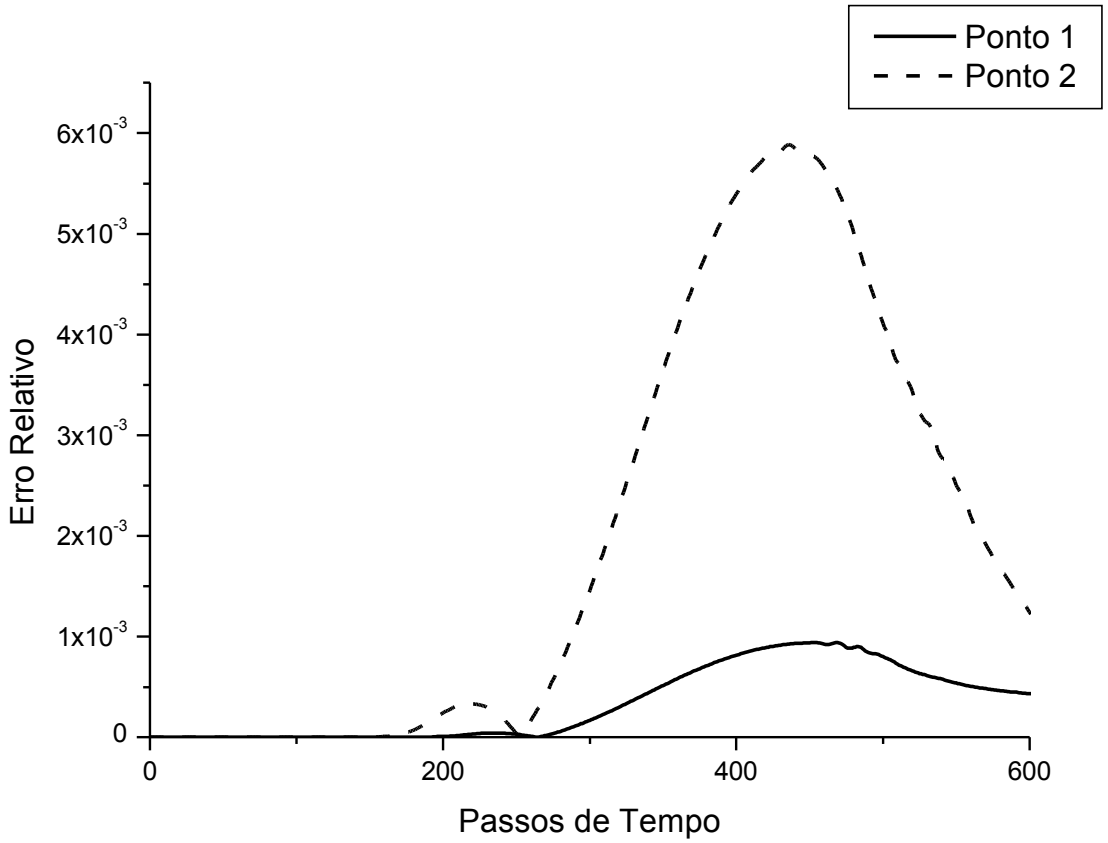

Figura 4.3: Erro relativo calculado para a formulação UPML desenvolvida (10 camadas).

Capítulo 5

Redes Neurais Artificiais (RNAs)

5.1 Conteúdo do Capítulo

Este Capítulo tem por objetivo apresentar ao leitor a formulação matemática relativa a técnica de otimização Redes Neurais Artificiais, cuja aplicação principal é reconhecimento padrões (veja o Tópico 7.6).

5.2 Introdução

Mesmo podendo processar atualmente bilhões de operações em uma fração mínima de tempo, os mais avançados computadores não são capazes de processar informações triviais para o cérebro humano com a mesma habilidade, como por exemplo, reconhecer os mais diversos tipos de padrão (pessoas, vozes, objetos, equações matemáticas, ...) de forma paralela, realizar tarefas complexas como traduções com grande flexibilidade em adaptações, tomar decisões nas mais diversas situações imprevistas, entre muitas outras capacidades, principalmente devido à natureza seqüencial de processamento criada por Von Newman [94].

Todavia, pesquisadores têm realizado progressos notáveis nessa área, tentando imitar o funcionamento do cérebro humano modelando sistemas neurais por software. Apesar de

tal método ainda estar em uma fase bastante inicial, ainda longe de poder ser comparado ao cérebro biológico, muitas aplicações para a técnica obtiveram sucesso, especialmente quando se trata de reconhecimento de padrões. O modelamento é realizado a partir de técnicas matemáticas de minimização de funções, de forma a tornar o sistema flexível e com certa imunidade a adversidades se construído e treinado de forma adequada.

As redes funcionam como um aluno virtual, para o qual alguns exemplos são apresentados de forma supervisionada e o mesmo poderá posteriormente extrapolar (generalizar) as informações que lhe foram expostas. Infelizmente, os sistemas neurais artificiais ainda não são capazes de prover explicações para os eventos, mas são capazes de responder de forma desejada fornecendo informações úteis à pessoa utilizadora, que poderá realizar as interpretações necessárias.

A Figura 5.1(a) ilustra um neurônio biológico, composto por dendritos (que funcionam como entradas de informações vindas de outros neurônios), pelo Núcleo e pelo chamado Corpo do Neurônio (onde se armazena a informação ou parte dela), pelo Axônio (por onde a informação é transportada e de alguma forma alterada) para as saídas da unidade neural, os Terminais do Axônio. O modelo análogo artificial deste neurônio é representado pela Figura 5.1(b).

As redes neurais devem "aprender" pares de entradas e saídas, contidos em um banco de dados, denotados por $(\bar{p_1}, \bar{t_1}), (\bar{p_2}, \bar{t_2}), \ldots, (\bar{p_Q}, \bar{t_Q})$ (as chamadas amostras de treinamento) e generalizar o conhecimento contido nas amostras, de forma a responder de forma adequada quando entradas não presentes no conjunto de treinamento forem apresentadas à rede. Isto é possível devido ao fato de que a formulação é baseada numa representação (simplificada) de uma rede real de neurônios. Dessa forma, problemas relacionados a reconhecimento de padrões podem ser solucionados através da implementação e uso adequados desta técnica.

Neste trabalho, as RNAs são aplicadas para a localização de descontinuidades em malhas de aterramento a partir da aplicação de sinais de teste e da coleta respostas

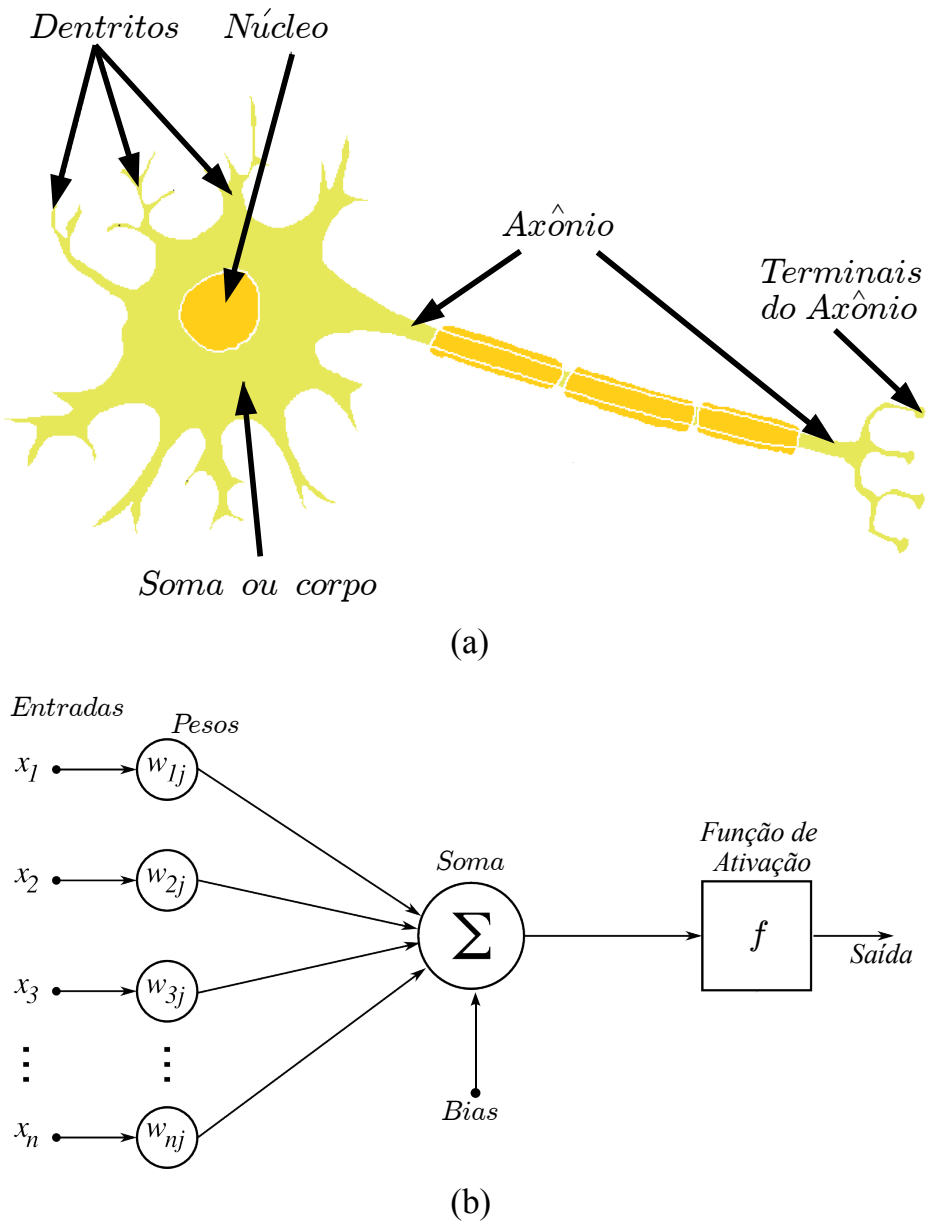

Figura 5.1: (a) Esquema de um neurônio biológico e (b) Modelo Artificial do Neurônio Biológico.

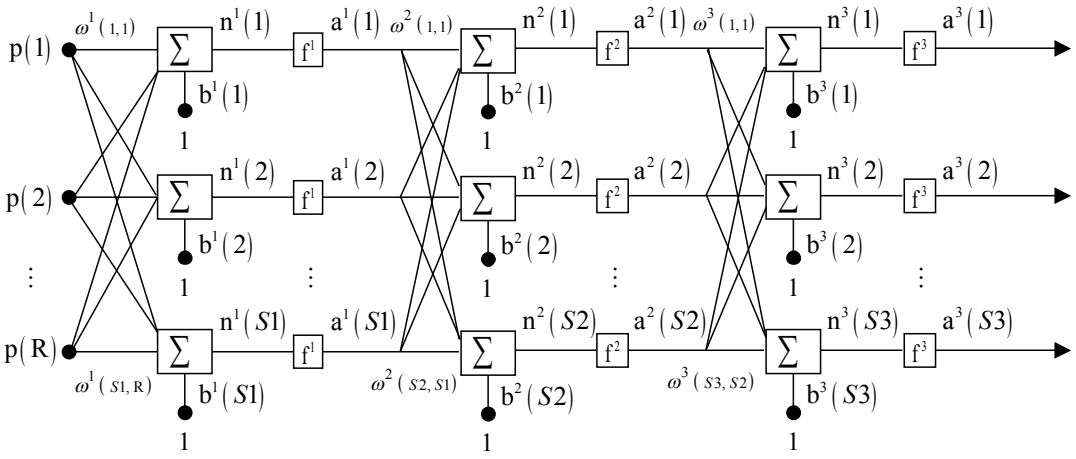

Figura 5.2: Rede Neural Artificial de três camadas ($L = 3$).

transitórias em pontos estratégicos da estrutura (Tópico 7.6).

Este Capítulo revê de forma objetiva dois algoritmos de treinamento: o *Backpropagation* [94] (ou Retropropagação) e a modificação *Marquadt-Levenberg* [95] da técnica *Backpropagation*.

5.3 O Algoritmo *Backpropagation*

Como mencionado anteriormente, as RNAs devem generalizar um conjunto de dados (amostras de treinamento), de forma a responder adequadamente a entradas p que não constituam os dados de treinamento. Isto é feito a partir do cálculo dos erros e das respostas da rede, que devem ser minimizados.

O conhecimento adquirido pela rede é representado por pesos ω que são associados a cada neurônio da rede. Dessa forma, o objetivo do estágio de treinamento é obter um conjunto de pesos que façam a rede responder de forma desejada, empregando os erros e.

Como pode ser observado pela Fig. 5.2, que representa uma pequena rede de neurônios (3 camadas), a saída $a^{K+1}(I)$, como função da entrada $n^{K+1}(I)$ do neurônio I da camada

$k+1$ é dada por

$$a^{K+1}(I) = f^{K+1}\left(n^{K+1}(I)\right) = f^{K+1}\left(\sum_{J=1}^{SK} \omega^{K+1}(I,J)a^{K}(J) + b^{K+1}(I)\right), \tag{5.1}$$

na qual $a^0(I) = p(I)$, b é um termo adicional denominado *bias* e a função f é denominada de função de ativação.

De uma forma geral, (5.1) pode ser reescrita de forma matricial para uma rede de L camadas da seguinte maneira

$$\bar{a}^{K+1} = \bar{f}^{K+1}\left(W^{K+1}\bar{a}^{K} + \bar{b}^{K+1}\right), \tag{5.2}$$

com

$$\bar{a}^{0} = \bar{p}, \tag{5.3}$$

de forma que $K = 0, 1, \ldots, L-1$. Em (5.2), W^{K+1} representa o conjunto de pesos ω da camada $K+1$, $\bar{a}^K$ representa o vetor de saída da camada K e $\bar{b}^{K+1}$ é o vetor que contém os termos *bias* da camada $K+1$.

A performance $\hat{V}$ instantânea da rede para uma amostra q apresentada à rede é definida por

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\bar{e}_q^T\bar{e}_q, \tag{5.4}$$

onde $\bar{e}_q = \bar{t}_q - \bar{a}_q^L$, na qual $\bar{t}_q$ é o valor de saída desejado para a amostra q. Nota-se que $\hat{V}$ é uma função quadrática do erro. Dessa forma, é possível obter uma regra de atualização para os pesos de forma que a mesma caminhe na direção oposta à direção do crescimento do erro. Tal direção pode ser determinada pelo cálculo do gradiente do erro.

Assim, uma sensitividade δ^K para o índice de performance em relação a variações nas entradas n^K pode ser definida por

$$\delta^K(I) \equiv \frac{\partial \hat{V}}{\partial n^K(I)}. \tag{5.5}$$

Como demonstrado em [94], as sensitividades δ satisfazem à equação de recorrência

$$\bar{\delta}^K = \dot{F}^K(\bar{n}^K){W^{K+1}}^T\bar{\delta}^{K+1}, \tag{5.6}$$

onde $\dot{F}^K(\bar{n}^K)$ é uma matriz diagonal dada por

$$\dot{F}^K(\bar{n}^K) = \frac{d}{dn}\begin{bmatrix} f^K(n^K(1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f^K(n^K(SK)) \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

O processo é iniciado na última camada através da Equação

$$\bar{\delta}^L = -\dot{F}^L(\bar{n}^L)\bar{e}_q \tag{5.8}$$

Nota-se aqui que as derivadas $df(n)/dn$, presentes em (5.7), podem ser calculadas facilmente, já que as funções de ativação f são conhecidas e determinadas previamente.

Finalmente, utilizando (5.1), (5.4) e (5.5), observa-se que os incrementos dos pesos $\Delta\omega^k$ e das *bias* Δb^k podem ser calculados por

$$\Delta\omega^K = -\alpha\frac{\partial\hat{V}}{\partial\omega^K} = -\alpha\frac{\partial\hat{V}}{\partial n^K}\frac{\partial n^K}{\partial\omega^K} = -\alpha\delta^K a^{K-1} \tag{5.9}$$

e

$$\Delta b^K = -\alpha\frac{\partial\hat{V}}{\partial b^K} = -\alpha\frac{\partial\hat{V}}{\partial n^K}\frac{\partial n^K}{\partial b^K} = -\alpha\delta^K, \tag{5.10}$$

nas quais α é denominado taxa de aprendizado e o sinal negativo é empregado para que o algoritmo caminhe contra a direção do gradiente da função $\hat{V}$ (que depende do erro).

Assim, o procedimento de treinamento (atualização dos pesos), pode ser sintetizado nos seguintes passos:

- Inicialização
  - Escolher o número de camadas e de Neurônios por camada
  - Determinar α
  - Iniciar os pesos $\bar{\omega}$ e *b*ias $\bar{b}$ de forma aleatória (usualmente entre 0 e 1);
- Enquanto $\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{j_{\max}} e_j^2\right) < e_{\max}$

- $j = 1 \ldots j_{\max}$
  - Fornecer à rede $\bar{p}_j$ e utilizar (5.2) para obter a saída correspondente $\bar{a}_j$;
  - Calcular as sensitividades da saída para a entrada utilizando (5.8) e (5.6);
  - Utilizar (5.9) e (5.10) para determinar os valores ΔW e $\Delta\bar{b}$;
  - Atualizar os pesos e *b*ias através de $W = W + \Delta W$ e $\bar{b} = \bar{b} + \Delta\bar{b}$.

  Neste trabalho foram adotados $e_{\max} = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}05$ sendo f uma função sigmoide para as camadas internas e uma função linear para as camadas externas.

  Observa-se que, neste algoritmo, para cada amostra j contida no conjunto de treinamento, há atualização dos pesos. Assim, uma forma de atualização que leva em conta todos os erros de um dado passo de treino é mostrada a seguir.

5.4 O Algoritmo *Marquardt-Levenberg Backpropagation*

Para acelerar o processo de convergência da fase de treinamento, a modificação Marquardt-Levenberg emprega uma variante do método de Newton. O procedimento de cálculo é descrito a seguir.

Considerando que $\hat{V}$ seja dado por

$$V(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2(\bar{x}), \tag{5.11}$$

na qual $(\bar{x}) = [\omega^1(1,1)\ \omega^1(1,2) \ldots \omega^1(S1,R)\ b^1(1) \ldots b^1(S1)\ \omega^2(1,1) \ldots b^M(SM)]$ e $N = Q \times SM$, pode ser mostrado que

$$\Delta_{\bar{x}} = [J^T(\bar{x})J(\bar{x}) + \mu I]^{-1} J^T(\bar{x})e(\bar{x}) \tag{5.12}$$

de forma que o jacobiano $J(\bar{x})$ é calculado por

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial e1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial e2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial e2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Em (5.12), $\mu = \mu \times \beta$ se $V(\bar{x})$ cresce ou $\mu = \mu/\beta$ se $V(\bar{x})$ decresce (valores usuais: $\mu = 0{,}01$ como condição inicial $\beta = 10$).

Para se calcularem os elementos do Jacobiano (5.13), o algoritmo *backpropagation* original pode ser empregado (calculando $\partial\hat{V}/\partial w$ e $\partial\hat{V}/\partial b$ utilizando as Equações (5.9) e (5.10)), de forma que na última camada L, $\bar{\delta}^L$ é calculado por

$$\bar{\delta}^L = -\dot{F}^L(\bar{n}^L). \tag{5.14}$$

Dessa forma, observa-se que cada coluna do Jacobiano apresentado em (5.13) pode ser vista como um conjunto de funções das sensitividades de um dado peso em função de todos os erros do conjunto de dados de treinamento. Assim, pode-se dizer que a atualização dos pesos mostrada aqui é mais completa do que o esquema de atualização *Backpropagation* original.

Assim ,sintetizando-se o algoritmo de treinamento *Backpropagation Marquardt-Levenberg*, tem-se

- Inicialização
  - Escolher o número de camadas e de Neurônios por camada
  - Determinar α
  - Iniciar os pesos $\bar{\omega}$ e *b*ias $\bar{b}$ de forma aleatória (usualmente entre 0 e 1);
  - Especificar μ e β.
- Enquanto $\hat{V} < \hat{V}_{\max}$

1) Variar $j = 1 \ldots j_{\max}$; fornecer à rede $\bar{p}_j$ e utilizar (5.2) para obter as saídas correspondentes $\bar{a}_j$;

2) Calcular a soma dos quadrados de todos os erros $\hat{V}$ utilizando (5.11);

3) Calcular o Jacobiano J utilizando as Equações (5.14), (5.8), (5.9), (5.10)) e (5.13);

4) Encontrar $\Delta_{\bar{x}}$ resolvendo a Equação (5.12) ;

5) Atualizar os pesos ω e as *bias* b utilizando $\bar{x} = \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}$

6) Calcular novamente $\hat{V}$ e verificar se houve redução do valor do mesmo. Se houver, então $\mu = \mu/\beta$ e voltar ao passo 1. Se não houver decréscimo de $\hat{V}$, desfazer a operação do passo 5, $\mu = \mu\beta$ e voltar ao passo 4.

É interessante notar que o passo 6, no qual é decidido se μ incrementa ou decrementa, pode fazer o método tender ao método de Gauss-Newton original quando $\mu \rightarrow 0$ (quando há convergência).

Neste trabalho, é proposta a aplicação de duas redes neurais trabalhando de forma cooperativa, de forma a possibilitar a generalização de problemas não separáveis linearmente. O detalhamento do procedimento é descrito no Capítulo 7 (Tópico 7.6).

Capítulo 6

O Ambiente LANE SAGS

6.1 Conteúdo do Capítulo

Este Capítulo tem por objetivo mostrar a interface gráfica para usuários desenvolvida para simplificar o uso do *software* FDTD e automatizar a geração das estruturas e obtenção de resultados em ambiente de processamento paralelo.

6.2 Introdução

No mundo dinâmico do século XXI, há a necessidade da disponibilidade de *softwares* eficientes e automáticos para a realização de tarefas complexas no menor tempo possível. Neste contexto, as Interfaces Gráficas para Usuário (tradução livre do termo *Graphical User Interface - GUI*) desempenham um papel importantíssimo tanto no mundo comercial quanto na pesquisa científica.

No contexto da pesquisa científica, especialmente em países em desenvolvimento como o Brasil, a disponibilidade de ferramentas de desenvolvimento e de sistemas operacionais abertos de alta qualidade (tanto em termos de performance quanto em flexibilidade), cria a possibilidade de desenvolvimento de pesquisas científicas a custos bastante reduzidos no campo de simulações numéricas. Sem a necessidade da obtenção de licenças muitas vezes

onerosas de *softwares* comerciais de desenvolvimento, *softwares* de alta qualidade podem ser construídos nos ambientes livres. Muito mais importante que a questão financeira é a possibilidade que os estudantes têm de aprender sobre os assuntos relacionados às formulações matemáticas e como implementá-las e sobre as ferramentas de desenvolvimento disponíveis, podendo, portanto, formarem-se profissionais cada vez mais independentes.

A idéia de se construir uma GUI para os simuladores aqui desenvolvidos visa também solucionar dois problemas adicionais: 1) Reduzir a incidência de erro humano durante a execução das simulações, aumentando a confiabilidade dos resultados, 2) Possibilitar a utilização do *software* por pessoas com pouca experiência com os métodos numéricos e/ou programação, como estudantes no início de graduação e engenheiros que precisem analisar situações reais em empresas, por exemplo e 3) *simular estruturas complexas.*

A incidência de erro humano é bastante observada principalmente quando se está trabalhando com estruturas complexas, especialmente quando o processamento paralelo é utilizado. Dessa forma, a interface gráfica desenvolvida (chamada LANE SAGS), apresentada a seguir, traz um visualizador de estruturas desenvolvido em linguagem C com a biblioteca OpenGL. O visualizador é capaz de representar os dados de entrada do usuário em 3D, de forma que o mesmo pode determinar se os dados correspondem realmente à estrutura que se quer simular.

Além disso, os passos necessários à paralelização ficam transparentes, de forma que os dados de entrada são informados ao programa como se o mesmo fosse seqüencial, reduzindo ainda mais as possibilidades de erro.

6.3 O *Software* LANE SAGS *Cluster Edition*

A interface gráfica LANE SAGS (*Synthesis and Analysis of Grounding Systems*) foi construída em três módulos principais: 1) Janelas em linguagem C++ com a biblioteca Qt 3.4, 2) Simulador FDTD em Linguagem C (chamado *gndfdtd*), 3) Simulador FDTD paralelo em Linguagem C com a biblioteca MPI (chamado *gndfdtd-mpi*) e 4) Visualizador

de Estruturas em Linguagem C com a biblioteca OpenGL (chamado *glview*). O *software* foi desenvolvido e testado no ambiente Slackware Linux.

A janela principal do simulador é ilustrada pela Fig.6.1. Nesta Figura, observa-se que para realizar as simulações, inicialmente basta o usuário ter a noção da discretização espacial e informar o número de células que deseja utilizar para cada direção e o tamanho das arestas das células na área *Discretização e Dimensões do Problema*. A seguir, o usuário deve informar os dados iniciais relativos ao solo na área *Terra*, os dados relativos à posição da fonte de excitação na área *Eletrodo de Injeção* e o tempo de simulação. O *software* estima a memória RAM total necessária para a simulação, que será dividida entre as máquinas do *cluster*.

Concluída esta fase de configuração inicial, o usuário deve então inserir na tabela *Hastes Metálicas do Sistema* (Fig.6.1) as coordenadas de cada haste que compõe a estrutura a ser analisada. Não há limites para o número de hastes a serem inseridas no ambiente.

Durante esta fase de construção, o usuário pode checar se a estrutura está realmente correta clicando no botão *Visualizar Estrutura (GL)*. Será exibida uma nova janela interativa com uma representação tridimensional da estrutura, como mostrado na Fig.6.2. Utilizando o *mouse*, o usuário pode investigar cada detalhe com ferramentas como *zoom* e rotação.

Outro passo necessário é especificar quais máquinas do *cluster* participarão do processo de execução. Isto é feito simplesmente especificando seus nomes da rede Unix (ou endereços ip) na tabela *Proc. Paralelo* (Fig.6.2). O código foi feito originalmente para se trabalhar com um número par de máquinas (maior ou igual a quatro). Todavia, tal imposição foi recentemente eliminada.

Estes passos resumem o mínimo necessário para realizar-se uma simulação, que é iniciada clicando-se no botão *Salvar Dados e Simular*. A partir deste momento, o *software* monta a topologia da rede MPI (com o comando *lamboot*) e inicia o módulo gndfdtd-mpi com o comando *mpirun*. A partir daí, o módulo gndfdtd-mpi distribui as tarefas entre os

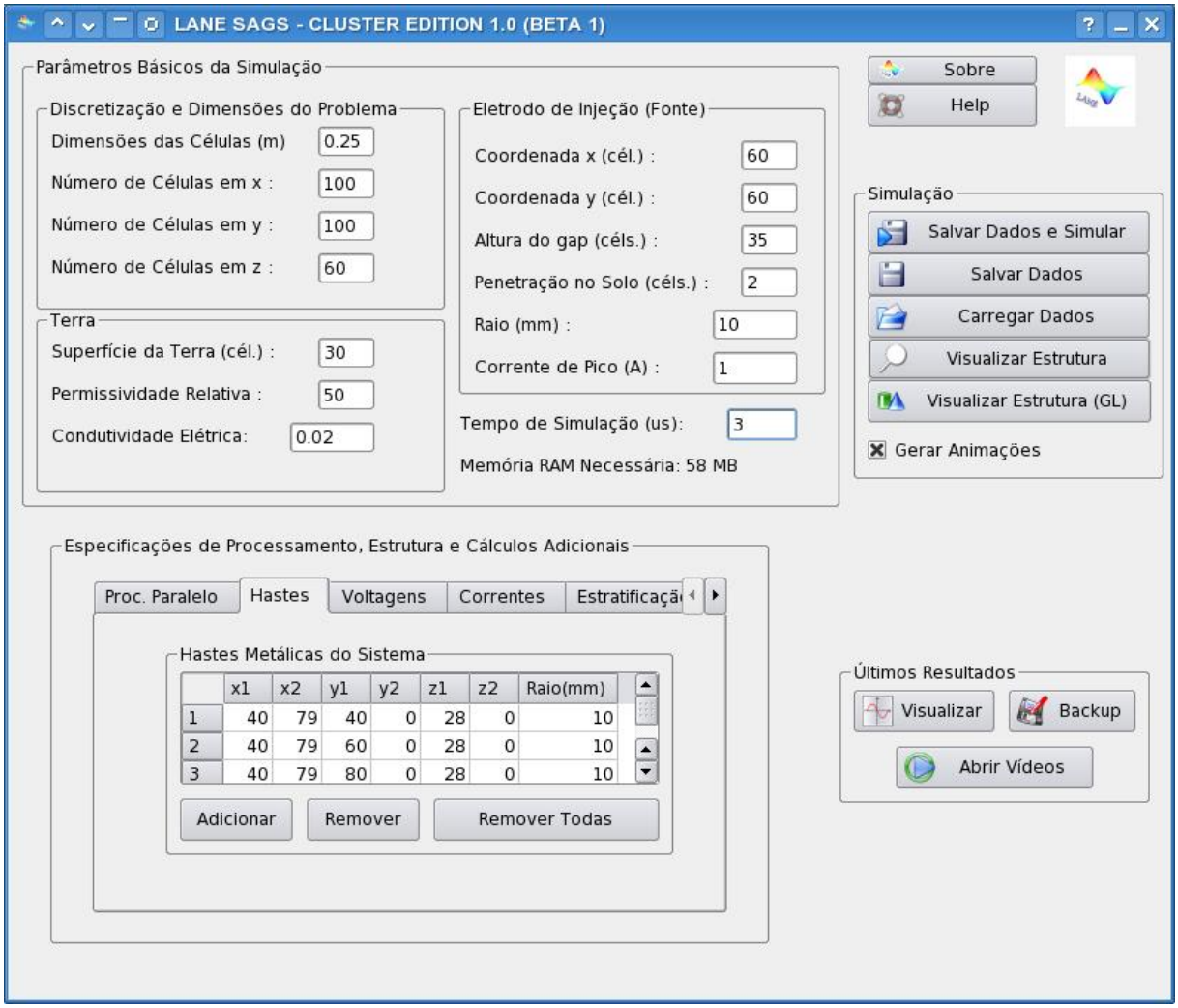

Figura 6.1: Janela principal do LANE SAGS CE.

processadores e inicia os cálculos de campo em cada um, aplicando as devidas condições de contorno em cada subdomínio, de forma a caracterizar a estrutura definida pelo usuário.

Ao finalizar a simulação, o programa gera os gráficos (formato gif) da corrente injetada no solo (calculada a partir da integral fechada do campo magnético em torno da haste de injeção de corrente), da tensão no ponto de injeção (calculada a partir da integral do campo elétrico em um caminho padrão), da relação instantânea tensão/corrente (TGR), da distribuição de potencial na superfície da terra, da distribuição de corrente no solo em dois planos verticais e filmes/animações da propagação eletromagnética do campo elétrico, caso o usuário marque a caixa *Gerar Animações* (Fig.6.1).

Para gerar os gráficos, são gerados automaticamente *scripts* para o programa gnuplot. No caso das animações, são gerados *scripts* para os programas GNU Octave (geração dos quadros) e mpeg2enc (que gera vídeos no formato MPEG 2 a partir dos quadros criados pelo GNU octave).

Foram implementadas ainda funções adicionais que permitem maior flexibilidade de uso do ambiente, tais como 1) cálculo de correntes em pontos escolhidos pelo usuário (Fig.6.3(a)), 2) cálculo de diferenças de potencial entre pontos escolhidos pelo usuário (Fig.6.3(b)), 3) geração de camadas condutivas para simular solo estratificado (Fig.6.3(c)), 4) geração da distribuição de potencial do solo no domínio da freqüência a partir dos dados gerados no tempo (Fig.6.3(d)).

A Fig. 6.4 ilustra o funcionamento do módulo principal do LANE SAGS.

Uma das principais dificuldades na implementação do *software* foi a necessidade de alocar dinâmicamente memória para os *arrays* tridimensionais requeridos pelo método FDTD. Esta etapa foi solucionada através de ponteiros com referências triplamente indiretas aos endereços da memória RAM.

Ambientes complexos e a possibilidade da utilização de vários processadores aumentam a possibilidade de erro humano, quando os problemas são solucionados diretamente via código fonte. Isso significa que o tempo necessário para o desenvolvimento dos programas

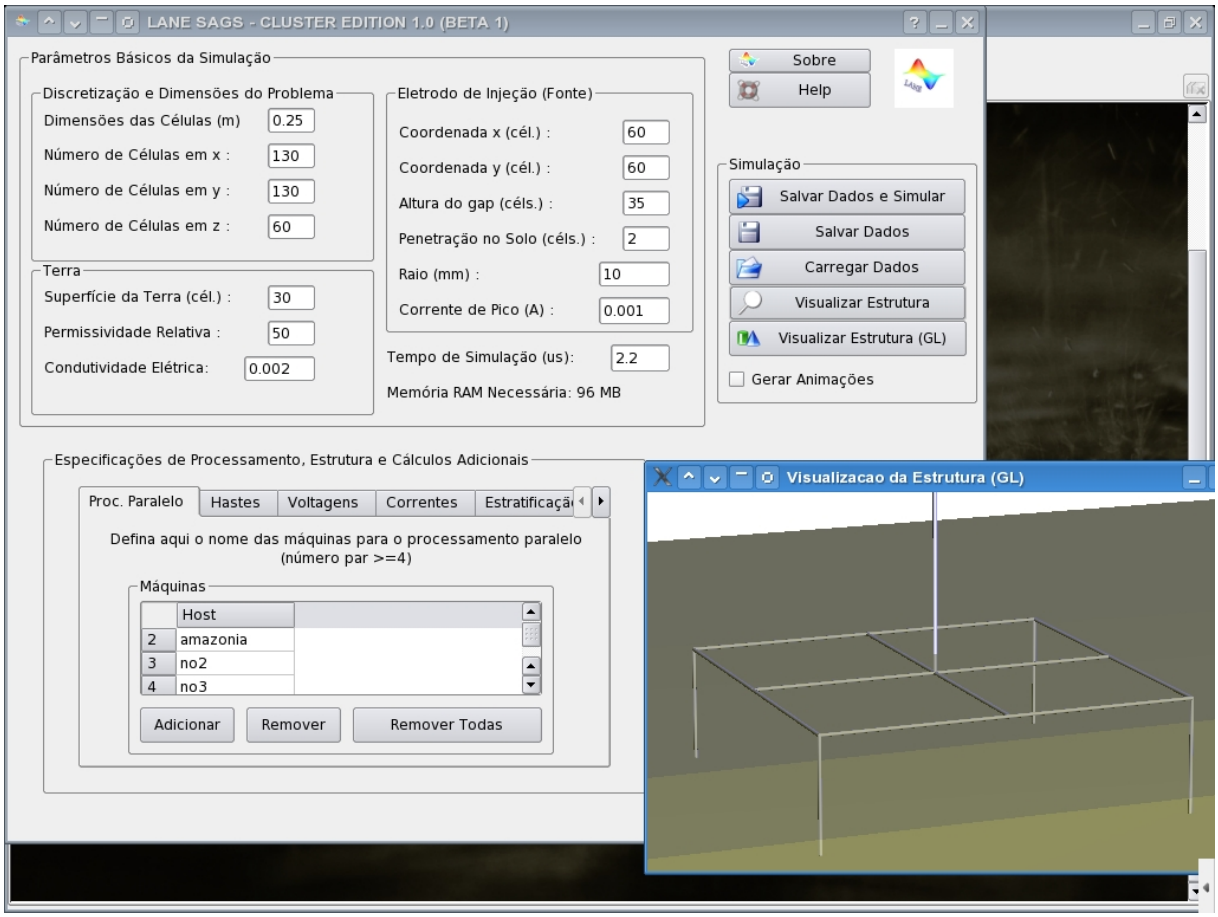

Figura 6.2: Exemplo de visualização de uma malha de terra com o módulo OpenGL e a tabela *Proc. Paralelo*.

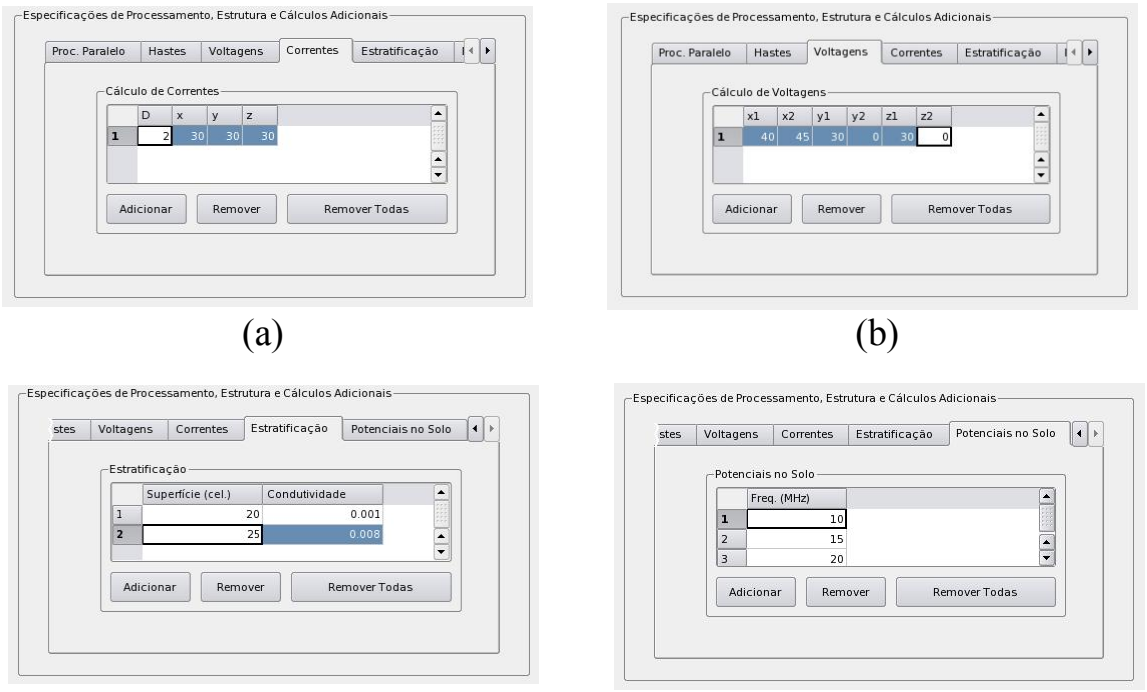

Figura 6.3: Funções Complementares do Ambiente Computacional.

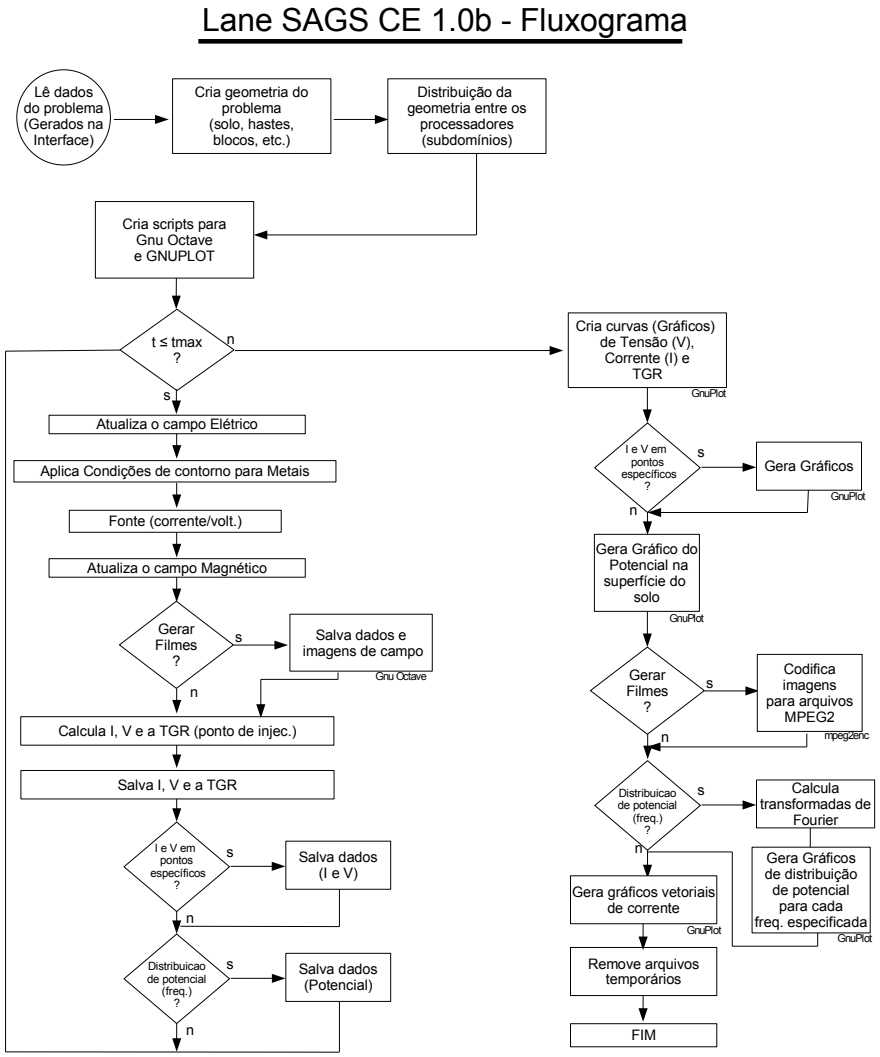

Figura 6.4: Fluxograma do módulo principal do LANE SAGS CE.

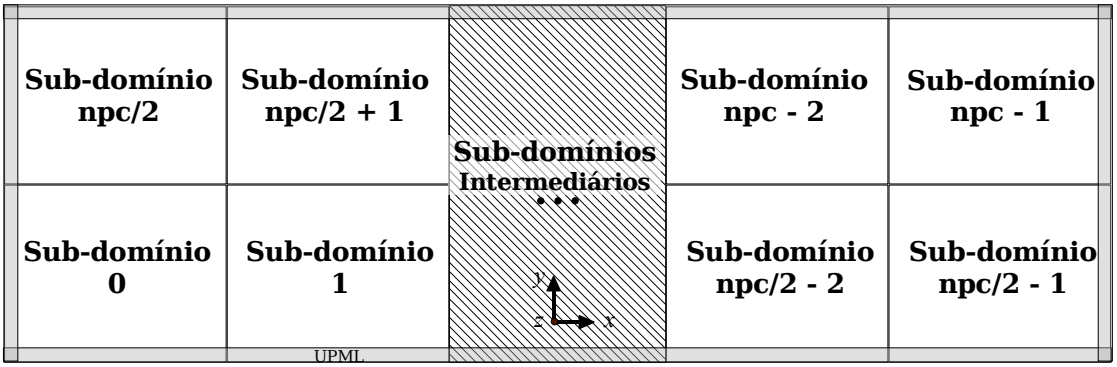

Figura 6.5: Domínio 3D dividido em *npc* sub-domínios.

aumenta com o número de processadores envolvidos, porque mais sub-domínios devem ser analisados (basicamente no nível de condições de contorno, ABCs e troca de informação).

Dessa forma, como mencionado anteriormente, um algoritmo foi desenvolvido e implementado para automaticamente "quebrar" o domínio de análise e realizar a troca de informações entre os *npc* processadores especificados pelo usuário.

Para que a quebra automática seja viável, é necessária a identificação de padrões de codificação relacionados à paralelização do método FDTD.

A divisão automática do domínio é realizada nos planos x-z e y-z, como pode-se notar a partir da Figura 6.5, onde a dimensão x é dividida em $npc/2$ processadores e a dimensão y é dividida em dois sub-domínios.

Observando que processadores vizinhos sempre trocam as mesmas componentes de campo (H_x, H_z, E_x e E_z para as interfaces paralelas ao plano x-z e H_y, H_z, E_y e E_z para as interfaces paralelas ao plano y-z), nota-se que as trocas podem ser implementadas com *loops*, como ilustrado pela Fig.6.6 para o caso dos planos x-z.

Outro padrão que precisa ser levado em conta é o relacionado à distribuição da UPML entre os sub-domínios. Para o caso considerado pela Fig.6.5, há seis padrões: os quatro

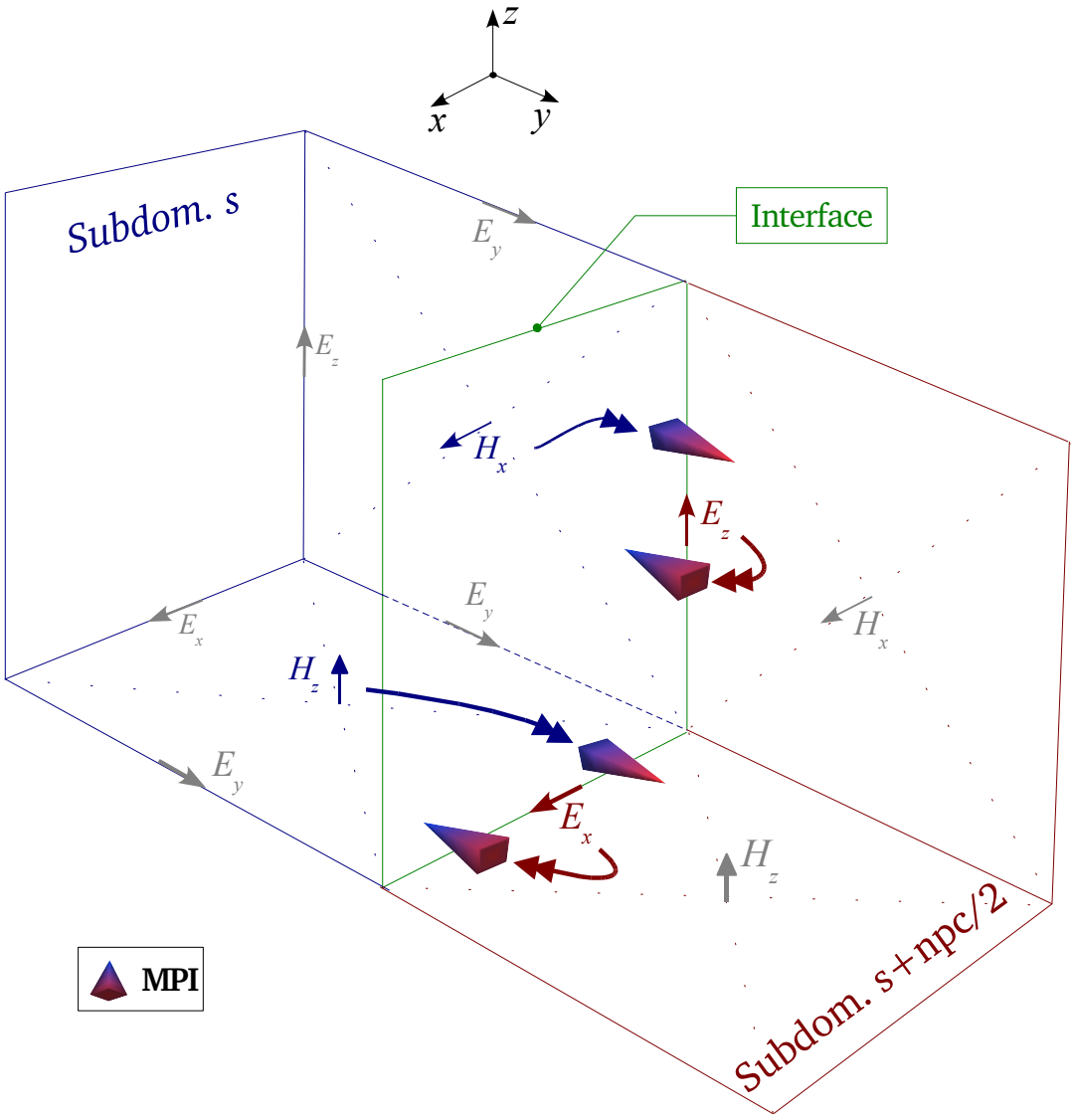

Figura 6.6: Troca de informações entre sub-domínios vizinhos.

domínios dos cantos (domínios 0, $\frac{npc}{2}-1$, $\frac{npc}{2}$ e $npc-1$ têm ABCs configuradas geometricamente de forma particular) e os dois padrões relacionados aos domínios intermediários (os sub-domínios de 1 a $\frac{npc}{2}-2$ têm região absorvente nas células iniciais da direção y e os sub-domínios de $\frac{npc}{2}+1$ a $npc-2$ têm região absorvente nas células finais da direção y, além é claro das paredes absorventes paralelas ao plano x-y).

Com essas observações, o ambiente gerado é uma representação apenas do espaço livre e do solo. Assim, é necessário definir as condições de contorno e as características eletromagnéticas adequadamente em cada sub-domínio de forma a representar com precisão a região de análise.

Dessa maneira, o *software* pode criar hastes, a partir de dados de entrada salvos pela interface, com as características desejadas (raio e comprimento), levando em conta automaticamente os sub-domínios, ou seja, os limites das hastes são informados considerando-se o domínio completo e o algoritmo se encarrega de distribuir as informações entre os sub-domínios. Isso é realizado por operações resto e quociente para determinar os sub-domínios inicial e final da haste, sendo possível, assim, aplicar de forma adequada as condições de contorno. O mesmo é feito para os cálculos de tensões e correntes especificados pelo usuário (Fig. 6.3). Ao finalizar a simulação, os dados de campo obtidos em cada subdomínio são agrupados no micro servidor para gerarem-se os gráficos de distribuição de potencial no solo, distribuição de correntes e as animações.

Os resultados gerados pelo *software* paralelo são idênticos aos obtidos por programação seqüencial, o que valida a implementação automática. É importante notar que a idéia é válida para o método FDTD em coordenadas gerais, já que o endereçamento das células segue o mesmo padrão do FDTD em coordenadas retangulares (i, j, k). Porém, é necessário um gerador de malhas totalmente automático, que pode ser implementado em futuros trabalhos.

Capítulo 7

Resultados Numéricos

7.1 Conteúdo do Capítulo

Neste Capítulo são mostrados resultados gerados com os *softwares* desenvolvidos neste trabalho, envolvendo os algoritmos LN-FDTD, LN-UPML, FDTD (LANE SAGS) e RNAs.

7.2 Eletrodo Horizontal

Neste Tópico são apresentados alguns resultados obtidos com o *software* desenvolvido em coordenadas gerais. Um eletrodo horizontal no plano x-y, com inclinação de 45° em relação ao eixo x foi simulado e os resultados obtidos, como esperado, foram idênticos aos gerados através do FDTD convencional com o eletrodo orientado paralelamente a x. Ou seja, o problema é independente do sistema de coordenadas, desde que o eletrodo esteja nas mesmas condições em relação ao solo.

Em [96], um eletrodo horizontal de 1,5 metro de comprimento, enterrado a uma profundidade de 0,1m foi simulado com um esquema de medição similar ao apresentado em [2] (Fig.2.9). Todavia, não foi feita uma análise a respeito da influência do eletrodo de injeção de corrente quando a haste está localizada a profundidades maiores. Dessa forma, foram simuladas várias situações de forma a se verificar o funcionamento do método e os

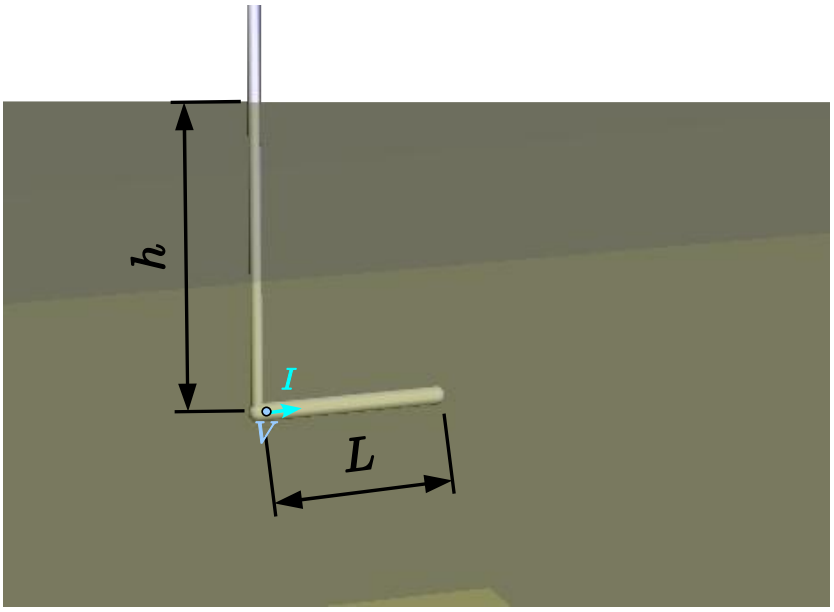

Figura 7.1: Eletrodo horizontal e o cálculo da corrente e da tensão.

resultados obtidos foram comparados com a Equação (7.1) [97], dada por

$$R = \frac{1}{2\pi L\sigma}\left[\ln\left(2L/a\right) - 1 + \ln\left(\frac{L+\sqrt{4h^2+L^2}}{2h}\right) + 2h/L - \frac{\sqrt{4h^2+L^2}}{L}\right], \qquad (7.1)$$

na qual L é o comprimento do eletrodo, h é a profundidade na qual o eletrodo está enterrado, a é o raio do eletrodo e σ é a condutividade elétrica do solo (veja Fig.7.1).

A Tabela 7.1 compara os resultados de regime obtidos utilizando o método FDTD com os obtidos utilizando (7.1), para diversos valores de h ($0{,}25 - 1{,}5$ m). Observa-se que quanto maior a profundidade, maior a discordância entre os resultados. Isso se deve a dois motivos: 1) a Equação (7.1) foi desenvolvida para o eletrodo horizontal isolado, sem o cabo ou eletrodo de injeção e 2) como conseqüência do motivo citado anteriormente, o eletrodo de injeção contribui para reduzir o valor da resistência total vista pelo sistema de aterramento, que na verdade se comporta como um L em posição vertical. Dessa forma, é esperada a redução do valor V/I com a profundidade h.

Para efeito de comparação com (7.1), a tensão e a corrente foram calculadas em uma das extremidades do eletrodo horizontal, como ilustrado pela Fig.7.1

Tabela 7.1: Comparação entre valores de regime (em Ohms) obtidos por simulações FDTD tradicionais e pela equação analítica para várias profundidades de eletrodo horizontal ($L = 1{,}5$m, $a = 10$mm e $\sigma = 500^{-1} S/m$).

Profundidade h (m)	FDTD (Ohms)	Eq. (7.1) (Ohms)	Dif. Relativa (%)
1,50	161,39	276,06	41,5
1,25	173,52	270,49	35,8
1,00	188,13	270,33	30,4
0,75	206,67	274,70	24,8
0,50	233,30	284,52	18,0
0,25	300,16	307,96	2,53

O campo elétrico foi integrado paralelamente à superfície do solo, abaixo da superfície e de forma normal ao eletrodo de injeção (para o cálculo do potencial).

Considerando o caso no qual $L = h = 1{,}5$m, $a = 10$mm e $\sigma = 500^{-1}$ siemens por metro, o resultado obtido é mostrado pela Fig.7.2, o qual concorda com a Eq.(7.1) no estado estacionário (veja também a Tabela 7.1) Esta figura também mostra a perfeita concordância entre os métodos FDTD e LN-FDTD (eletrodo com inclinação de 45 graus).

Observa-se que os métodos FDTD e LN-FDTD podem ser usados para identificar a influência de elementos como o cabo de conexão do sistema de aterramento.

7.3 Sistema de aterramento do tipo prato

Para testar um caso bastante geral, foi escolhido para simulação o sistema de aterramento do tipo prato, ilustrado pela Fig. 7.3.

De acordo com o trabalho de Yung [98], o valor de regime para a relação tensão/corrente é dado pela Equação (7.2).

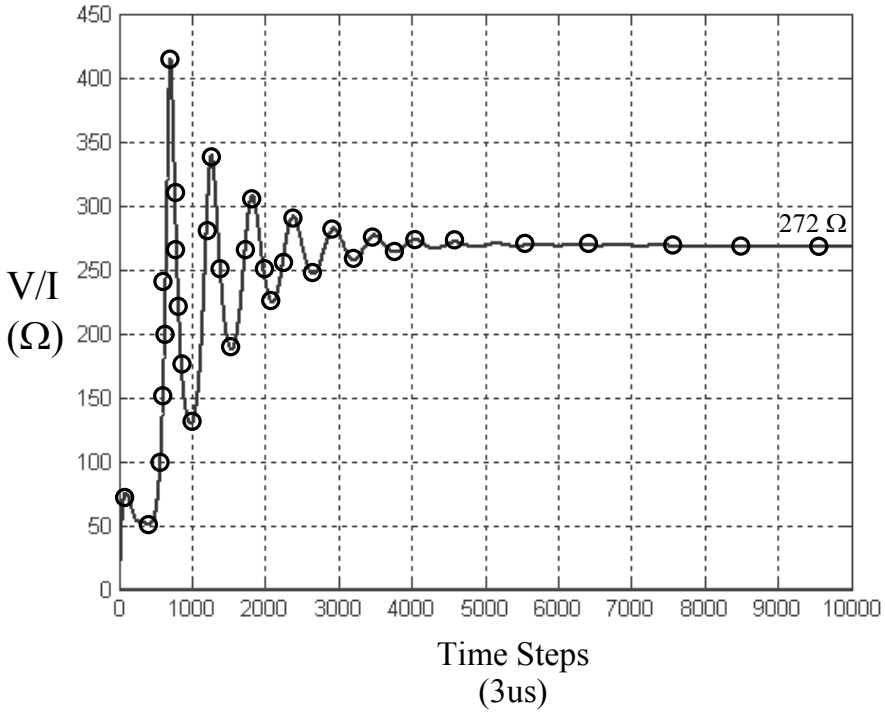

Figura 7.2: Relações tensão/corrente em uma das extremidades do eletrodo horizontal colocado a 1,5 metro de profundidade, obtidas pelos métodos FDTD (círculos) e LN-FDTD (linha cheia, inclinação de 45 graus).

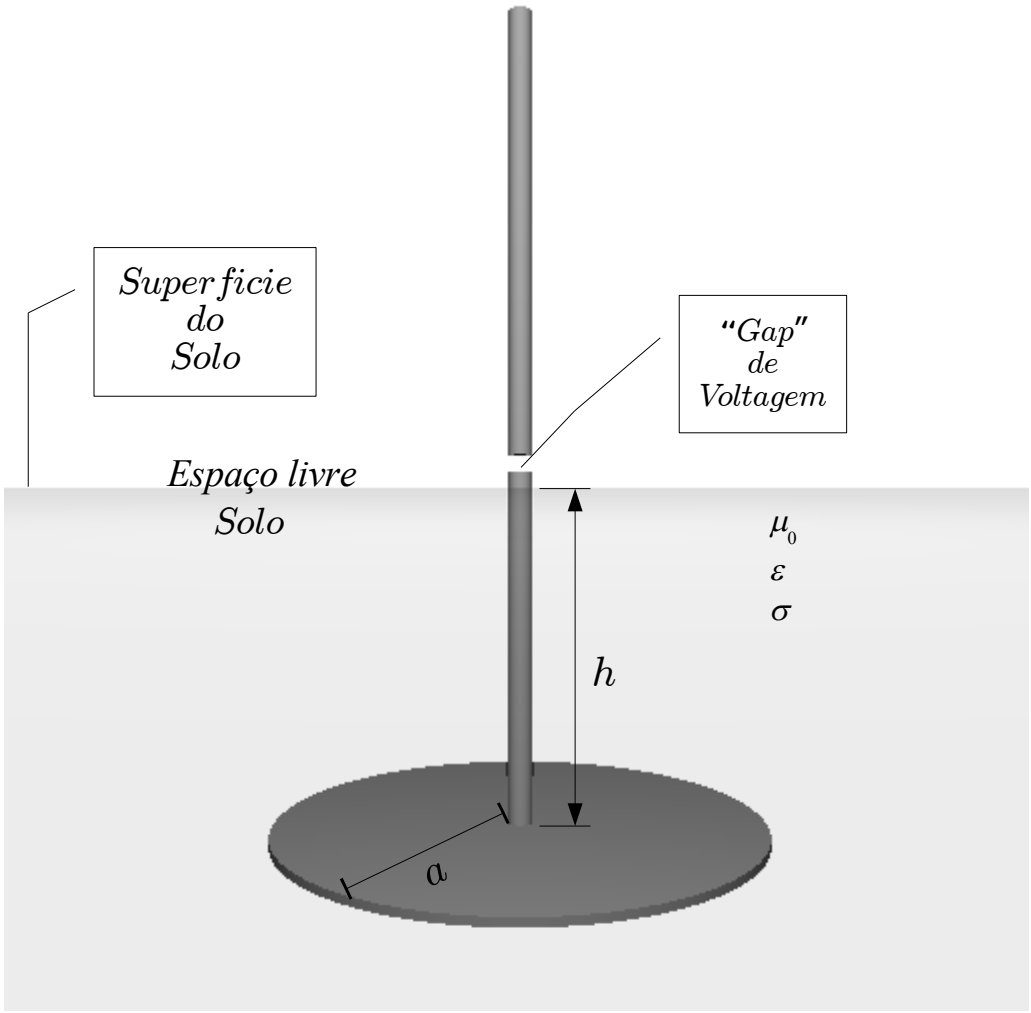

Figura 7.3: Sistema de aterramento do tipo prato.

$$R = \frac{13}{100\sigma}\left(a^{-0,818}e^{-0,0093a}\right)\left(1 + e^{-1,427h}\right) \tag{7.2}$$

Para este caso, foi necessário construir uma malha circular específica, cujo corte horizontal está ilustrado pela Fig.7.4. Através dela, observa-se que foram utilizadas 22 células para modelar o diâmetro $2a$ da estrutura.

As Figuras 7.5 e 7.6 mostram os resultados obtidos para a relação tensão/corrente para dois pratos a meio metro da superfície, num solo caracterizado pelos parâmetros $\sigma =$

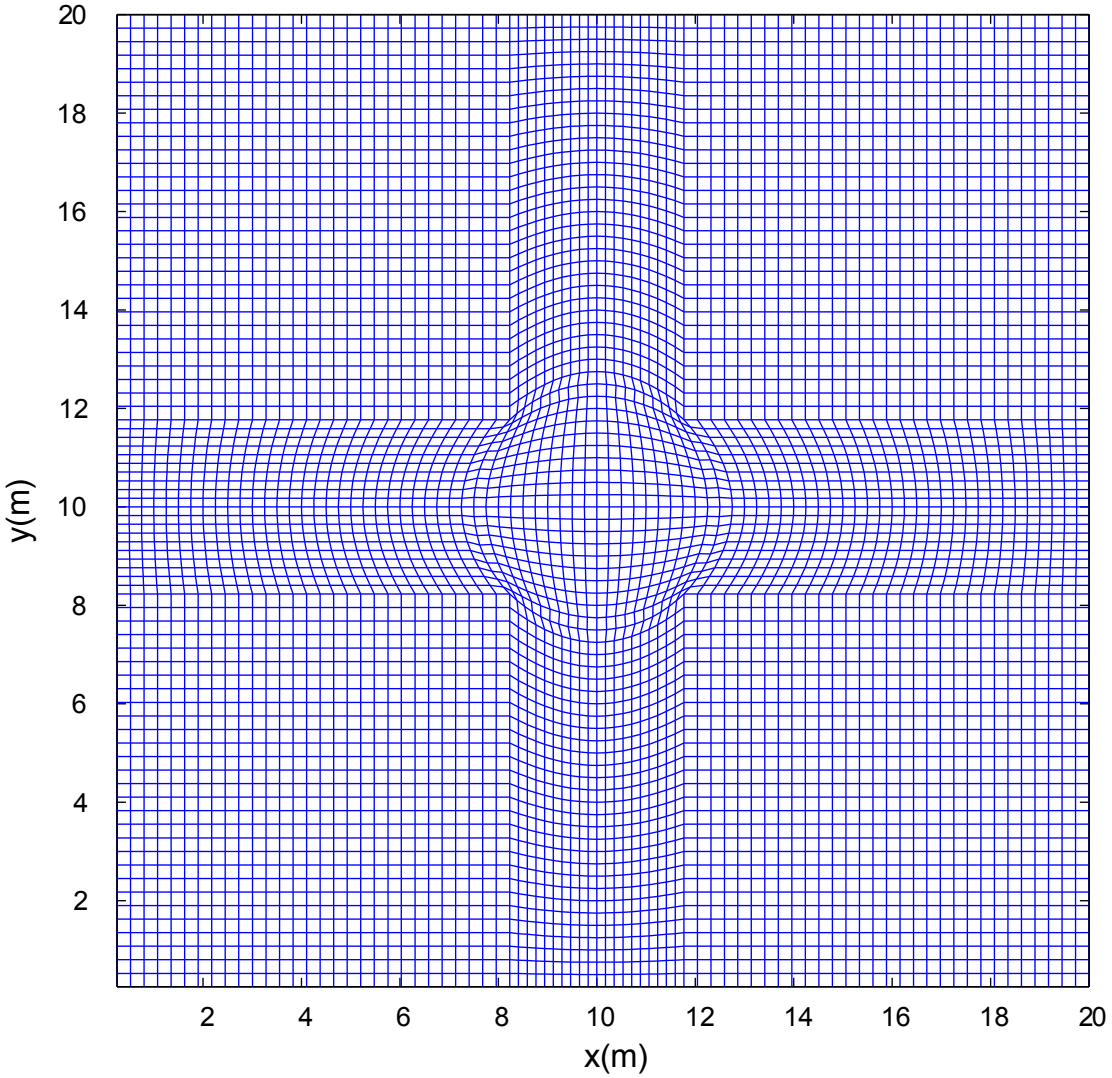

Figura 7.4: Corte horizontal da malha gerada para simular o sistema de aterramento do tipo prato.

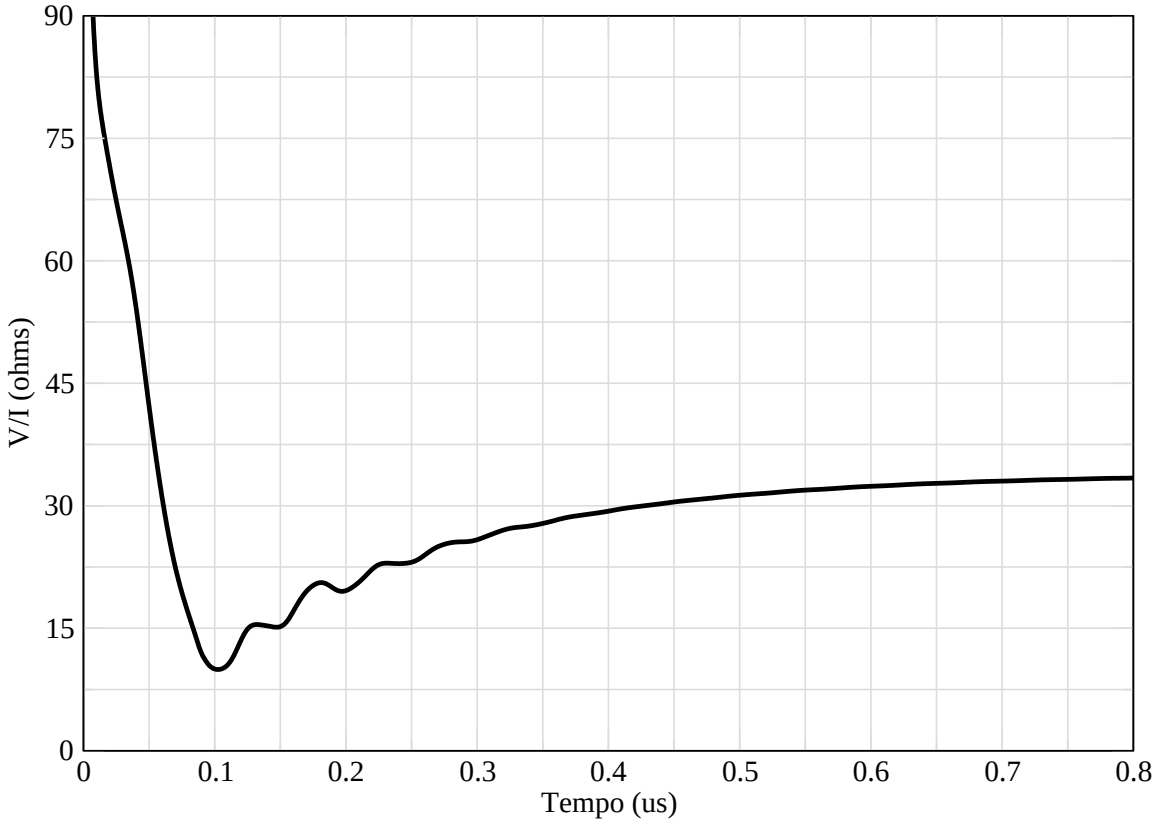

Figura 7.5: Relação Tensão/Corrente para um sistema de aterramento do tipo prato com $h = 0.5$ e diâmetro de 5,5m ($\sigma = 2{,}28 \times 10^{-3}$ S/m e $\epsilon_r = 50$).

$2{,}28 \times 10^{-3}$ S/m, $\epsilon_r = 50$ e $\mu = \mu_0$, com diâmetros $2a = 5{,}5$m e $2a = 8$m, respectivamente.

Para estes dois casos, a Equação (7.2) fornece os valores 32,69 e 23,05 Ohms, enquanto o método LN-FDTD resultou em 33,42 e 25 Ohms, conforme as Figuras 7.5 e 7.6, o que representa uma ótima aproximação numérica.

Dessa forma, nota-se que método LN-FDTD é uma poderosa ferramenta para análise de situações realísticas de sistemas de aterramento, especialmente para as que não possuem soluções analíticas e para a análise de transitórios.

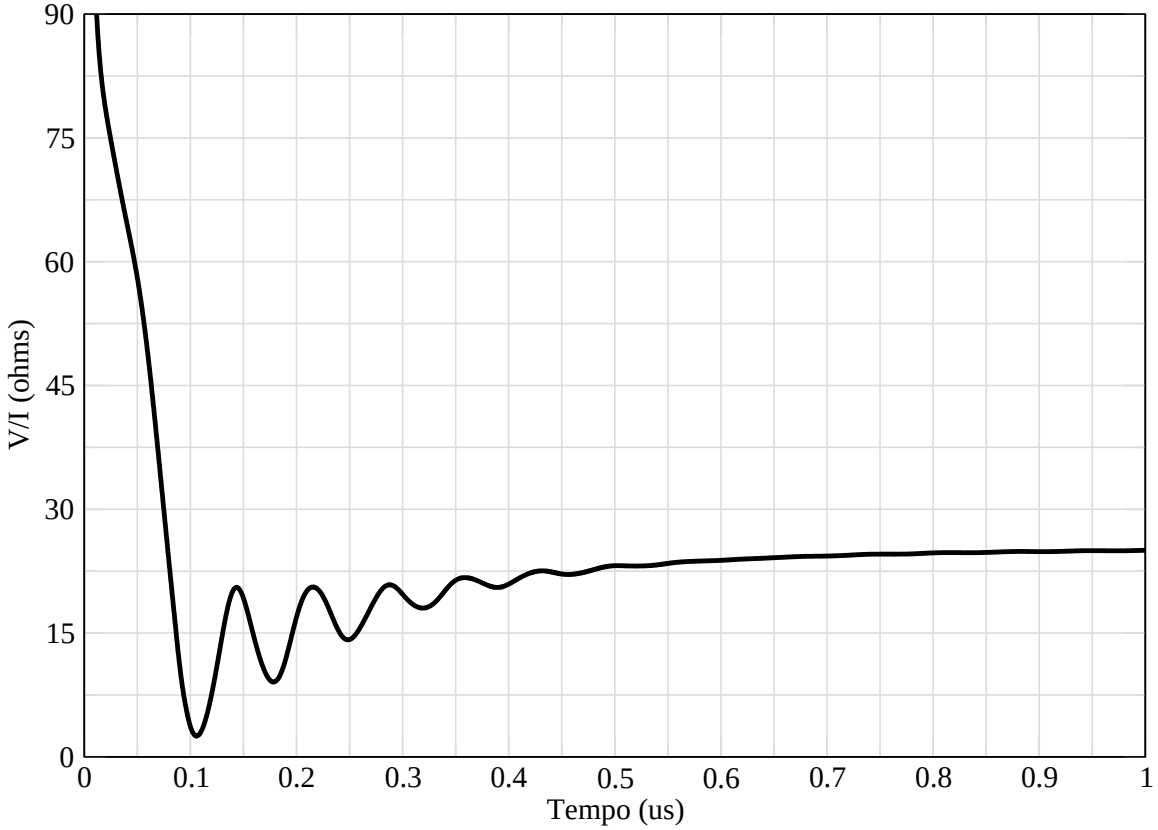

Figura 7.6: Relação Tensão/Corrente para um sistema de aterramento do tipo prato com $h = 0.5$ e diâmetro de 8.0m ($\sigma = 2{,}28 \times 10^{-3}$ S/m e $\epsilon_r = 50$).

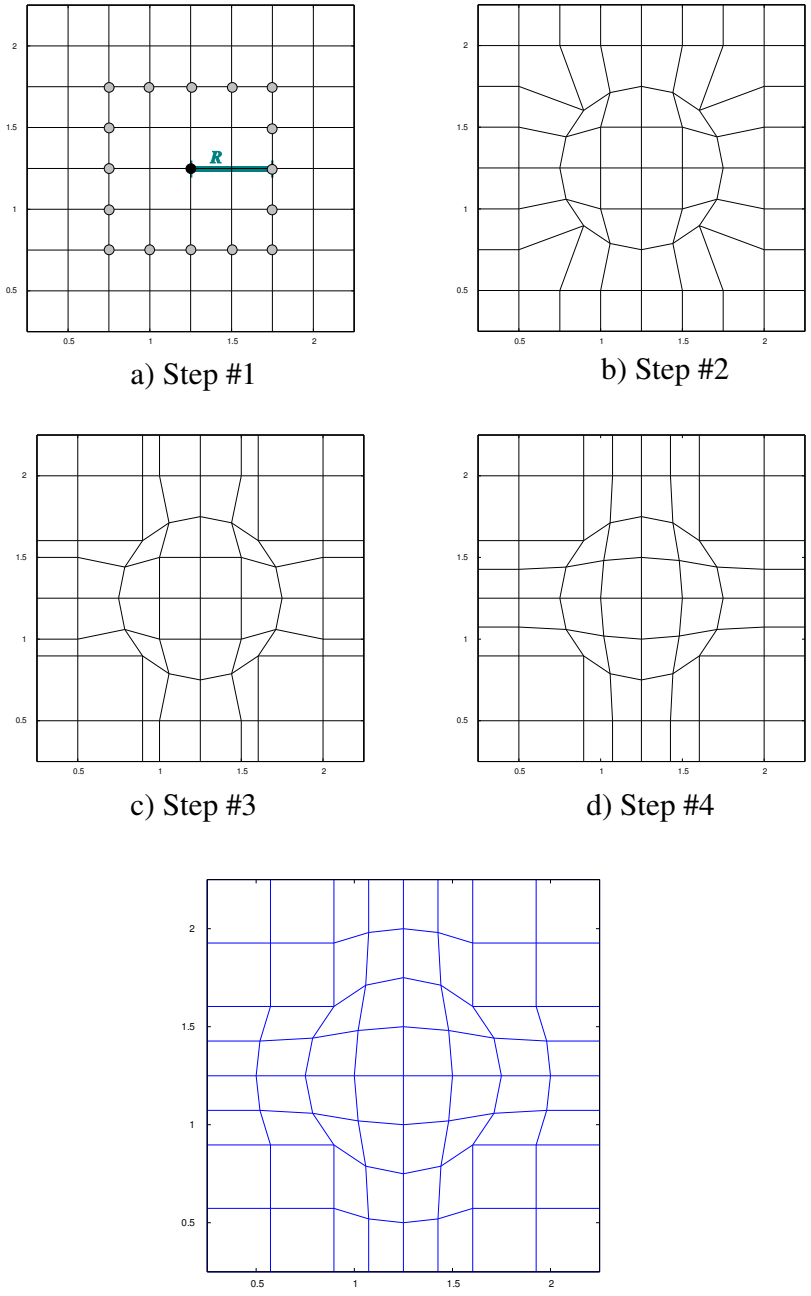

Figura 7.7: Passos necessários para a geração da malha para simular o eletrodo em forma de prato.

7.3.1 Geração da Malha

O objetivo deste Tópico é mostrar como foi gerada a malha apresentada pela Fig.7.4. Uma sub-rotina foi escrita para realizar esta tarefa baseada no algoritmo apresentada pela Fig.7.7. Nela, uma malha simples com 9×9 pontos é usada como exemplo. Os passos necessários para gerar a malha podem ser sintetizados da seguinte maneira:

- O passo 1 consistem em gerar uma malha retangular, com células com dimensões escolidas como uma fração do raio desejado para o círculo. Neste exemplo, duas células são usadas para definir o raio. É necessário escolher um ponto para ser o centro da circunferência (o ponto preto da Fig.7.7a) e um conjunto de pontos que definirão o contorno da circunferência (pontos em cor cinza). Deve-se notar que cada lado do quadrado definido pelos pontos cinzas deve ter um número ímpar de pontos.

- O passo 2 (Fig. 7.7b) consiste em mover os pontos em cor cinza para uma distância R do ponto central do círculo (ponto preto), definindo a circunferência. Os próximos passos estão relacionados com a suavização da malha dentro e fora das linhas da circunferência. Isto é necessário para evitar instabilidades no método LN-FDTD.

- No passo 3, as quatro linhas que definem a circunferência são ajustadas fora do círculo (veja a Fig. 7.7c).

- No passo 4, as quatro linhas que definem a circunferência são usadas como linhas de referência. As linhas que passam dentro da circunferência são ajustadas de forma a estarem uniformemente distribuídas dentro desta região (Fig. 7.7d).

- Finalmente, no passo 5, uma idéia similar à apresentada no passo 4 é usada para ajustar as linhas que passam fora da circunferência (Fig. 7.7e).

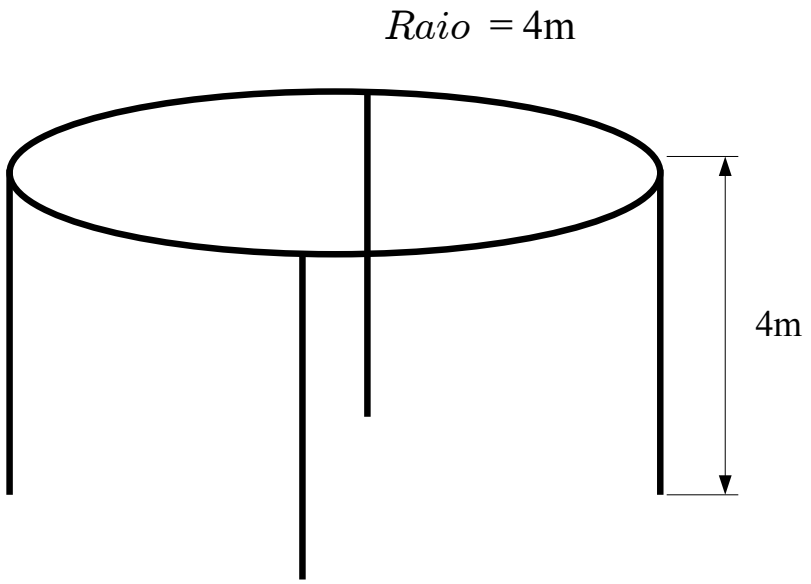

Figura 7.8: Representação dos eletrodos em disposição circular.

7.4 Eletrodos Verticais em Disposição Circular

A Fig. 7.8 mostra a geometria a ser tratada neste exemplo. Ela consiste em eletrodos verticais com quatro metros de comprimento conectados por um condutor circular com raio também de quatro metros, posicionado 0,5 metro abaixo da superfície do solo.

A idéia aqui é comparar os resultados obtidos pelo método FDTD com os calculados pelo método proposto (LN-FDTD). As Figs. 7.9 e 7.10 mostram como a estrutura foi construída no ambiente LANE SAGS, utilizando-se coordenadas retangulares. Tal estrutura foi aproximadas por degraus devido ao sistema de coordenadas retangulares empregado pelo método FDTD. Foram utilizadas duas resoluções diferentes, com células cúbicas com aresta com dimensão $\Delta = 0{,}50$ metro para o primeiro caso e $\Delta = 0{,}25$ metro para o segundo.

Para o método LN-FDTD, utilizou-se uma malha similar à mostrada pela Fig. 7.4, com oito células para representar o raio da estrutura (resolução aproximada da malha é de $\Delta = 0{,}50$).

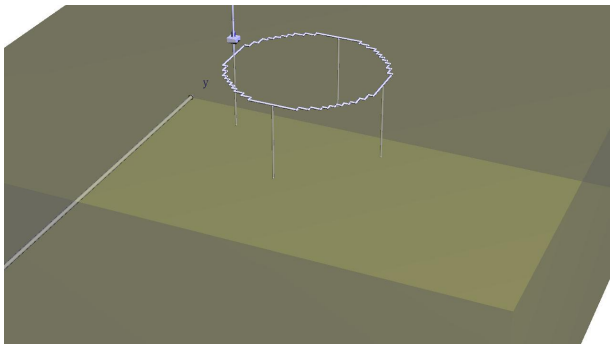

Figura 7.9: Eletrodos em disposição circular no LANE SAGS ($\Delta = 0{,}25$ m).

De acordo com [97], a resistência desta estrutura pode ser calculada pela equação

$$R = \frac{1/(4L) + 1/(8\pi r)}{\sigma}, \tag{7.3}$$

na qual L é o comprimento das hastes e r é o raio do círculo. Para o presente caso, a equação (7.3) fornece $R = 36{,}224\Omega$ ($\sigma = 0{,}002$ S/m).

A Fig.7.11 mostra os resultados obtidos com os métodos FDTD e LN-FDTD. Nela, observa-se que na medida em que se aumenta a resolução do método FDTD, os resultados tendem para o resultado calculado via LN-FDTD. Observa-se que a simulação em coordenadas gerais concorda com a equação (7.3) em termos de resposta estacionária, e que a aproximação em degraus utilizada no método FDTD gera oscilações adicionais devido à presença de cantos no contorno metálico que aproxima-se de um círculo (efeito de pontas). Além disso, esta aproximação aumenta a relação $V(t)/I(t)$ da estrutura, já que este tipo de geometria causa mudanças bruscas no percurso da corrente, dificultando a sua circulação.

Dessa forma, é evidenciada a importância da formulação proposta para se analisar transitórios eletromagnéticos e o regime estacionário para estruturas de aterramento.

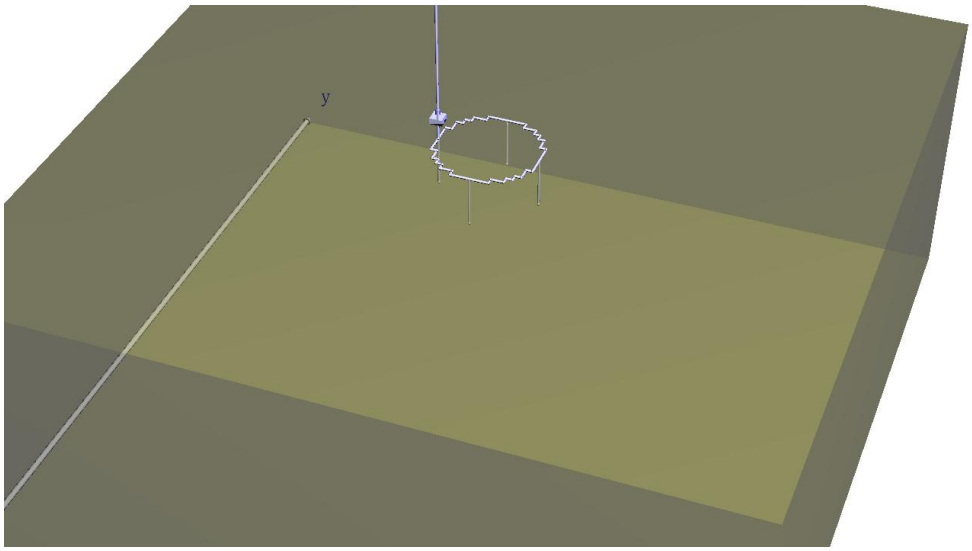

Figura 7.10: Eletrodos em disposição circular no LANE SAGS ($\Delta = 0{,}50$ m).

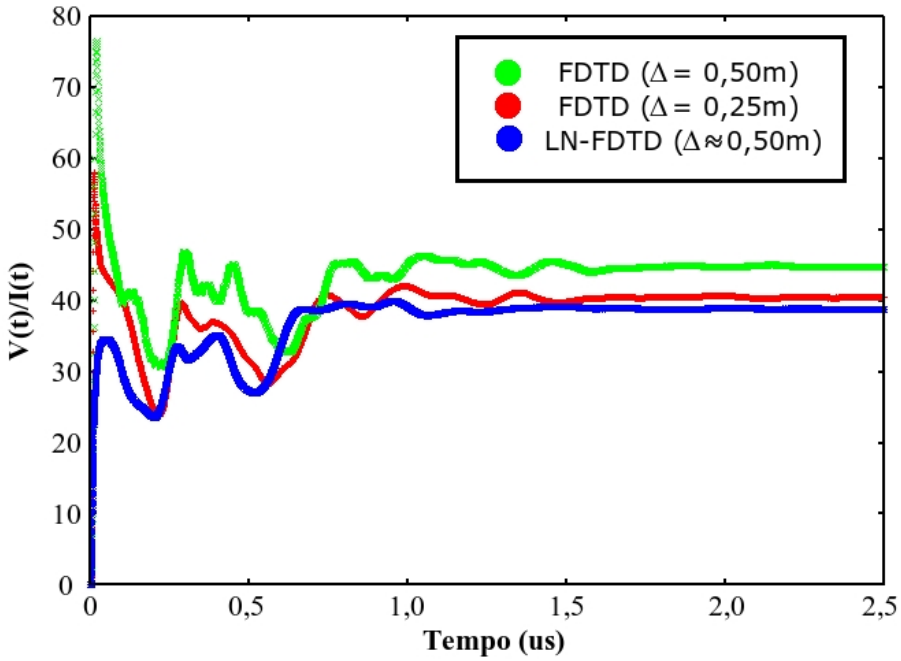

Figura 7.11: Relações $V(t)/I(t)$ obtidas pelos métodos FDTD e LN-FDTD para os eletrodos dispostos circularmente.

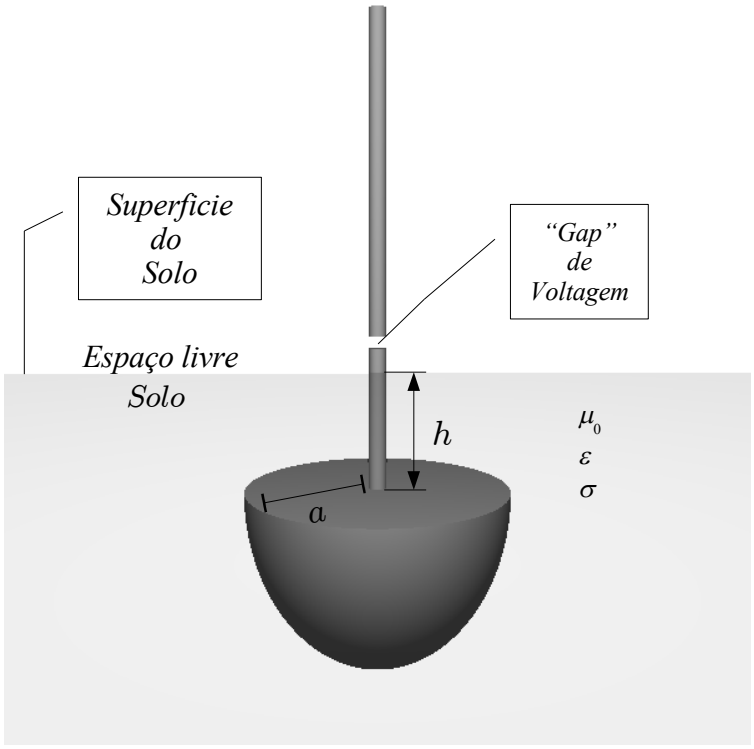

Figura 7.12: Representação do eletrodo semi-esférico simulado.

7.5 Eletrodo Semi-esférico

Para testar um exemplo ainda mais complexo, o eletrodo semi-esférico ilustrado pela Fig. 7.12 foi modelado. Um corte da malha computacional gerada é ilustrado pela Fig. 7.13, com metade da resolução real.

Como é bem conhecido, o valor estacionário de $R = V(t)/I(t)$, para $h = 0$, é dado por

$$R_{\text{steady}} = \frac{1}{2\pi a\sigma}. \tag{7.4}$$

A Fig. 7.14 mostra a relação $V(t)/I(t)$ obtidas para $\sigma = 2{,}28$ mS/m, $\epsilon_r = 10$ e $a = 6$ m. Para este caso, (7.4) é igual a 11.634Ω, enquanto que, em $t = 0{,}5\mu$s, foi obtido o valor de 12,55Ω por simulação (Fig. 7.14), ou seja, menos de 1Ω de desvio da solução analítica. É possível observar também que antes de 0.1μs, a corrente reflete no plano metálico do

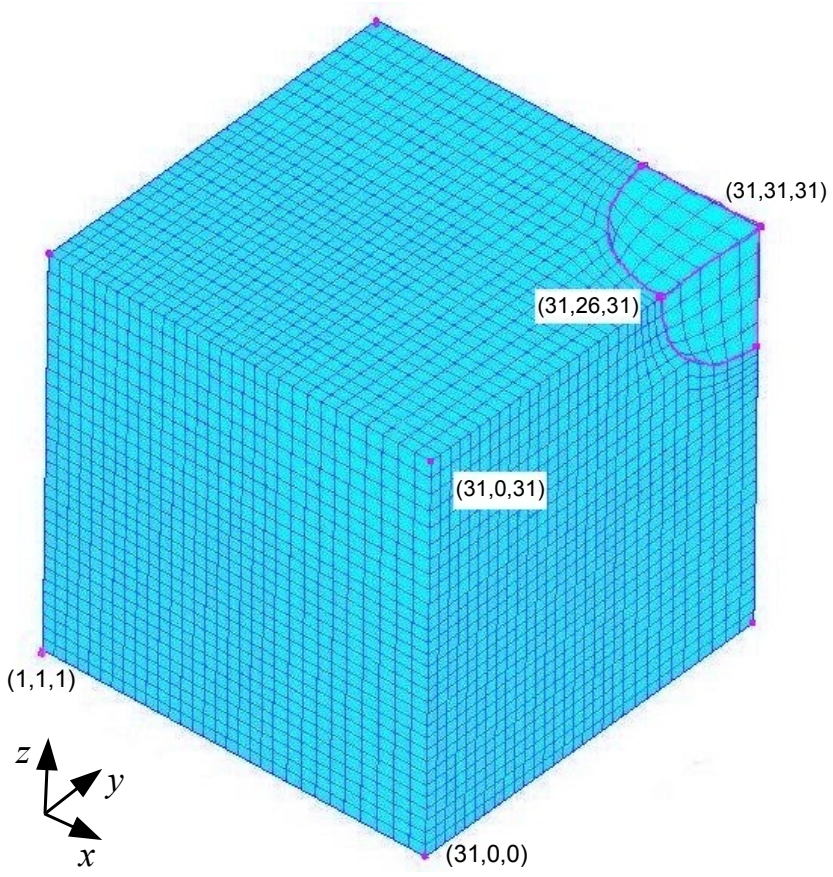

Figura 7.13: Corte da malha computacional estruturada para simular o eletrodo semi-esférico (metade da resolução real).

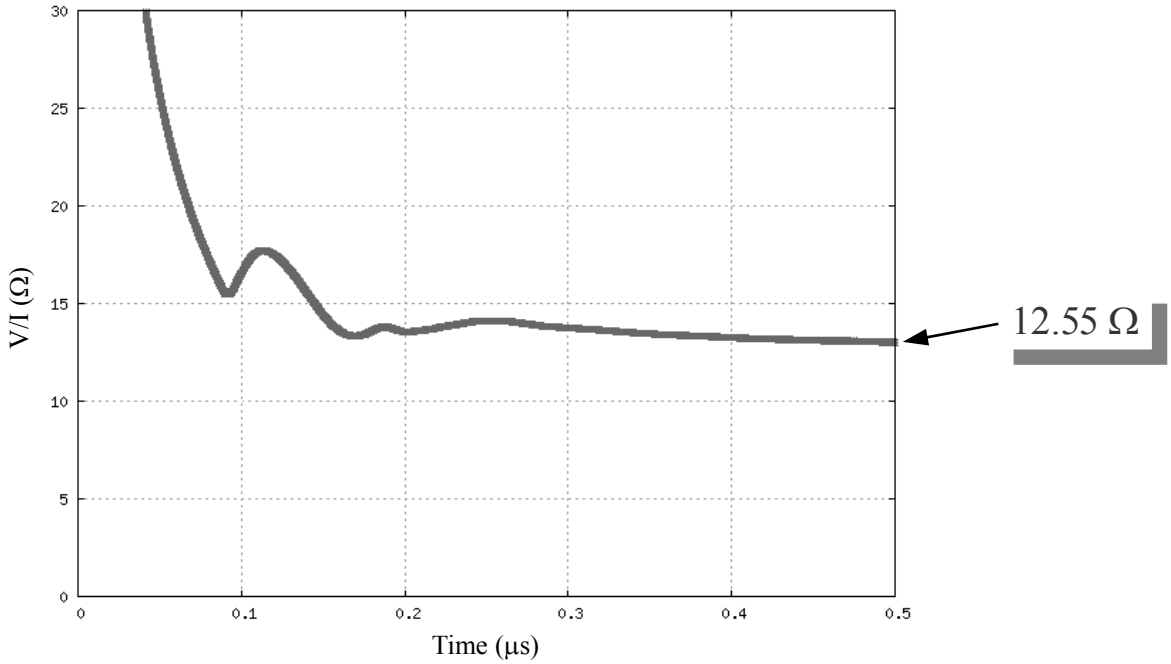

Figura 7.14: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para o eletrodo semi-esférico.

eletrodo semi-esférico ($h = 0$), promovendo o aumento da relação $V(t)/I(t)$ observado na curva transitória antes de 0,1μs. Em seguida, a solução numérica tende a convergir para o valor de regime eletrostático dado por (7.4).

A Fig. 7.15 mostra a distribuição espacial da componente e_3 do campo $\vec{E}$ em um plano vertical que passa pelo meio do eletrodo semi-esférico. Nesta figura, é possível observar a absorção da onda eletromagnética pela região absorvente LN-UPML, cuja formulação matemática foi desenvolvida neste trabalho. Pode-se observar também o campo contornando o eletrodo semi-esférico, as diferentes velocidades de propagação da onda no espaço livre e no solo, além das ondas de superfície na interface entre estes meios, mostrando de forma nítida a consistência física da solução numérica obtida.

Por fim, deve ser mencionado que a malha apresentada pela Fig. 7.13 pode ser ge-

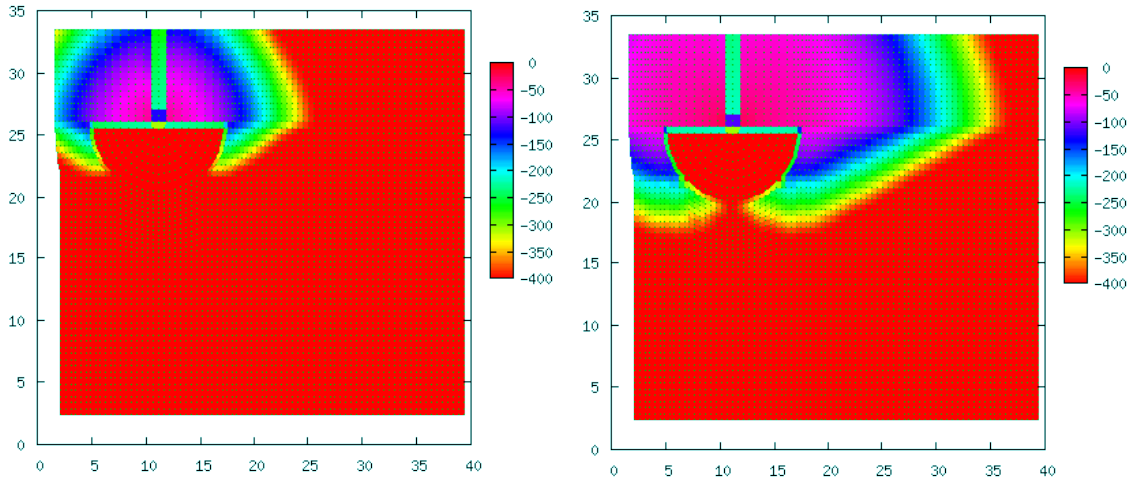

Figura 7.15: Componente e_3 do campo $\vec{E}$ (dB) no início do período transitório, evidenciando a absorção promovida pela formulação desenvolvida e a consistência física do problema do eletrodo semi-esférico.

rada com o algoritmo apresentado no Tópico 7.3.1, estendendo-o para as três dimensões espaciais.

7.6 Detecção de descontinuidades em malha de terra

Com o passar do tempo, reações eletro-químicas ocorrem no solo de forma a promover desconexões (descontinuidades) na malha de aterramento [14].

Aqui, o método FDTD foi empregado para simular respostas transitórias de diversas situações de descontinuidades em uma malha de 5×5 hastes, as quais funcionam como impressões digitais de cada estrutura, de forma que as mesmas foram utilizadas para treinar duas redes neurais para identificar, de forma aproximada, onde se localiza o defeito. O algoritmo *Marquardt-Levenberg*, descrito no Tópico 5.4, foi empregado (implementado em Fortran 77).

Alguns trabalhos anteriores sobre o assunto [99] [100] mostram que o método *Backpropagation* original não se comporta de forma adequada para este tipo de problema. Em [99] uma rede neural foi treinada para informar o quadrante da malha no qual o defeito está localizado. Em [100] e [101], os nós defeituosos são detectados por uma única rede neural. Porém, devido ao fato de que essas classes não são linearmente separáveis, este tipo de metodologia pode produzir resultados ambíguos (especialmente se um grande número de nós tiver que ser considerado).

Para eliminar essas restrições, uma nova metodologia é apresentada. A idéia é utilizar duas redes neurais de forma que elas, em conjunto, possam informar as coordenadas nas quais o defeito ocorreu. A primeira rede informa a linha e a segunda a coluna do defeito. Assim, para cada rede, o conjunto de classes se torna linearmente separável.

A implementação das falhas no método FDTD é bastante simples, de forma que basta não aplicar a condição de contorno na célula onde está o defeito, não levando a componente de campo elétrico tangencial a zero, mas atualizando a mesma de forma usual. Como foi utilizado o ambiente *LANE SAGS* simplesmente foram usadas duas hastes separadas

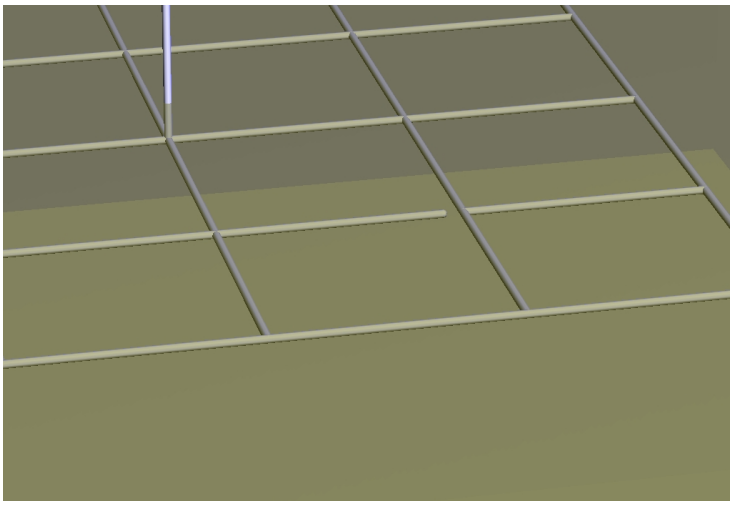

Figura 7.16: Exemplo de nó defeituoso (usado no treinamento).

por uma célula para representar o defeito, o que é equivalente ao procedimento descrito anteriormente. Um exemplo de nó aberto é mostrado pela Fig.7.16. Todas as faltas deste tipo, para todos os nós da malha, foram utilizadas para treinar as redes neurais.

A alimentação da malha segue [65]. Apenas uma falha foi simulada por vez e as quatro correntes transitórias que passam por cada canto da malha foram registradas para cada defeito simulado (transitório e estado estacionário). Vale ressaltar que o transitório eletromagnético é único para cada estrutura simulada, de forma que tais registros funcionam como a impressão digital do defeito, tal como ilustra a Fig. 7.17, que mostra as quatro correntes transitórias que passam nos quatro cantos da malha, relativas a defeitos em quatro nós diferentes (nós 1-3 e 6).

Para treinar as redes, três harmônicos foram calculados a partir de cada resposta temporal de corrente ($5, 10$ e 25MHz) de forma que cada rede possui 12 (doze) entradas. Vale ressaltar que outras combinações de freqüências foram testadas (na faixa de 1 KHz a 50 MHz), de forma que não se observou degradação considerável em relação aos resultados apresentados neste trabalho quando se utilizaram freqüências da ordem de dezenas de megahertz.

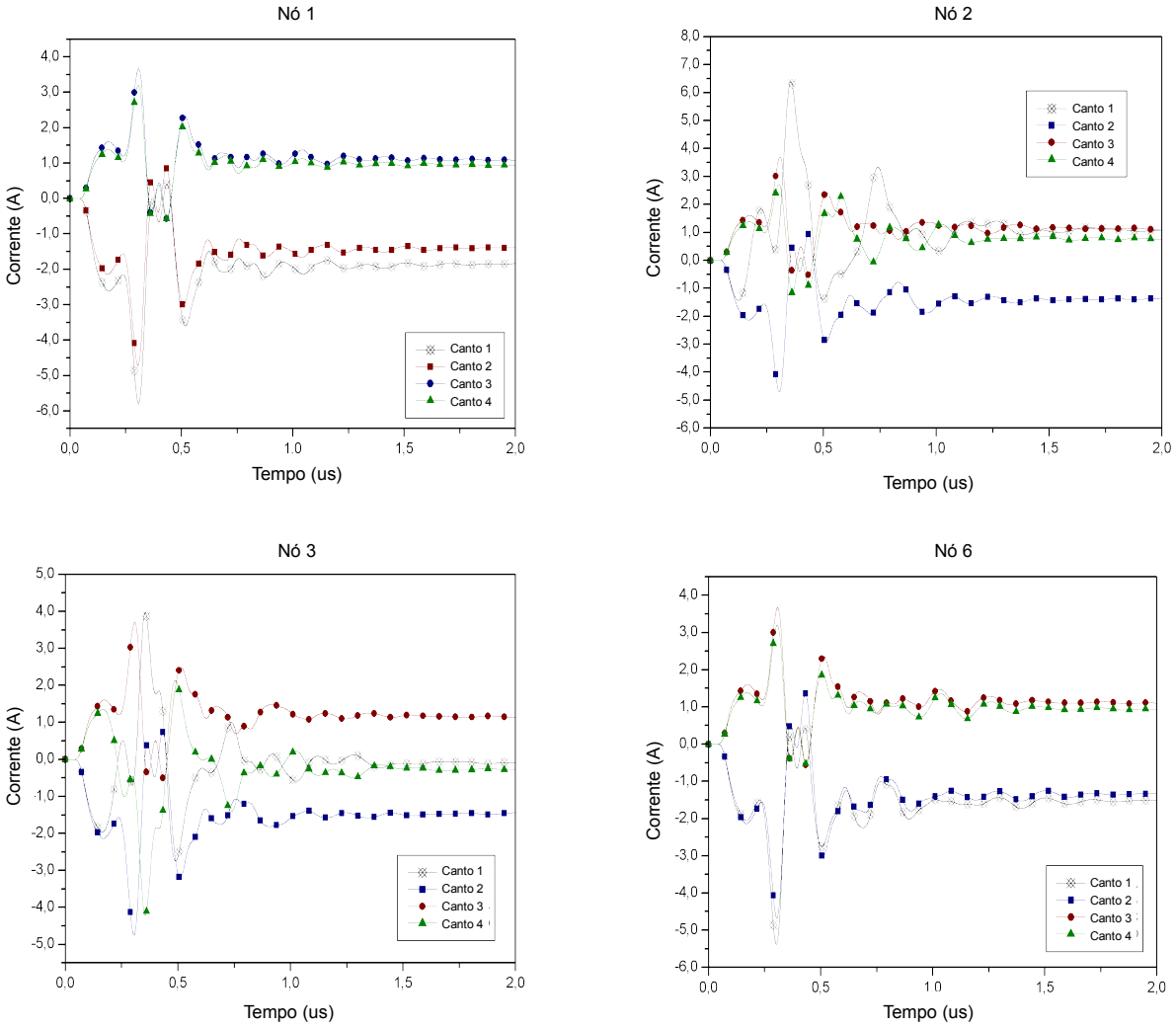

Figura 7.17: Exemplos das quatro respostas transitórias de corrente para quatro defeitos diferentes na malha de aterramento.

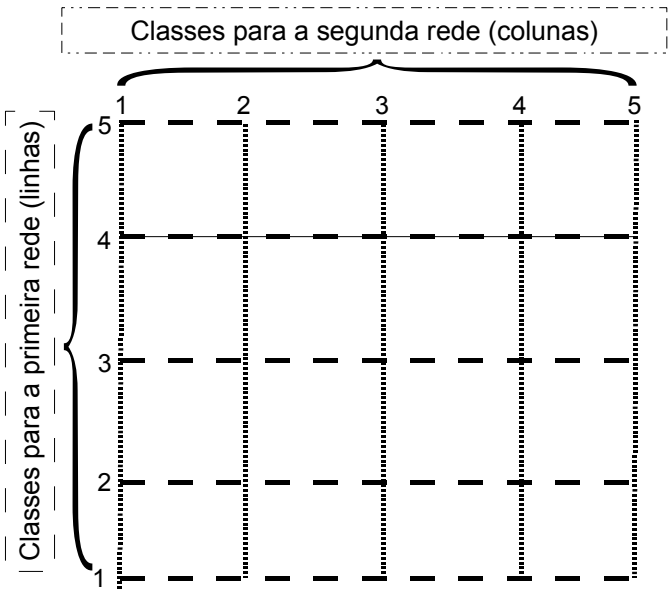

Figura 7.18: Classes para cada rede neural (linhas e colunas).

A Figura 7.18 ilustra a classificação (classes) desenvolvida neste trabalho. Como pode ser observado, a primeira rede é treinada para identificar a linha que contém a falta e a segunda identifica a coluna. Combinando as duas saídas, como dito anteriormente, estima-se o nó onde ocorreu a falta.

Ambas as redes foram construídas com 3 (três) camadas, como mostrado pela Fig.5.2, porém com apenas uma saída. Seis neurônios foram usados para cada camada e todas as funções de ativação são *sigmoids*, com exceção da camada de saída, na qual foi utilizada uma função linear.

As Figuras 7.19 e 7.20 mostram as respostas das redes quando testadas com falhas não presentes no grupo de treinamento, escolhidas de forma aleatória. Tais falhas constituem-se em hastes abertas (não mais nós), como no caso ilustrado pela Fig.7.21. Nas Figs. 7.19 e 7.20, os círculos representam a linha (Fig. 7.20) ou coluna (Fig.7.19) mais perto da falha e o sinal de adição mostra a resposta da rede. Observa-se que a metodologia proposta parece bastante adequada para este tipo de problema.

A Fig. 7.22 mostra a evolução do processo de treinamento da primeira rede. O erro

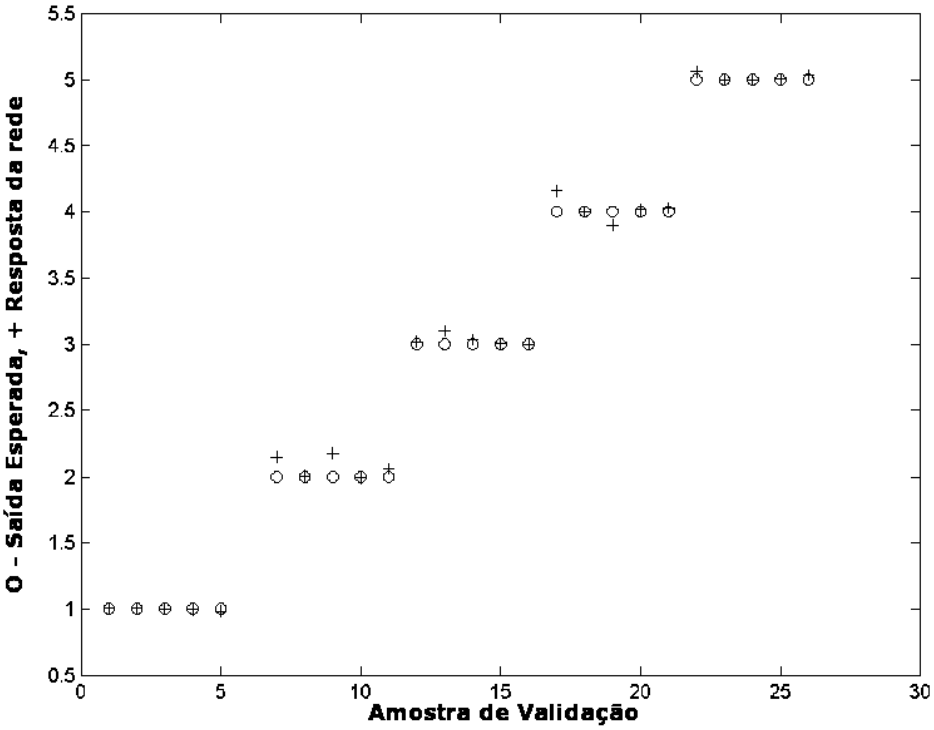

Figura 7.19: Respostas da rede treinada para identificar colunas.

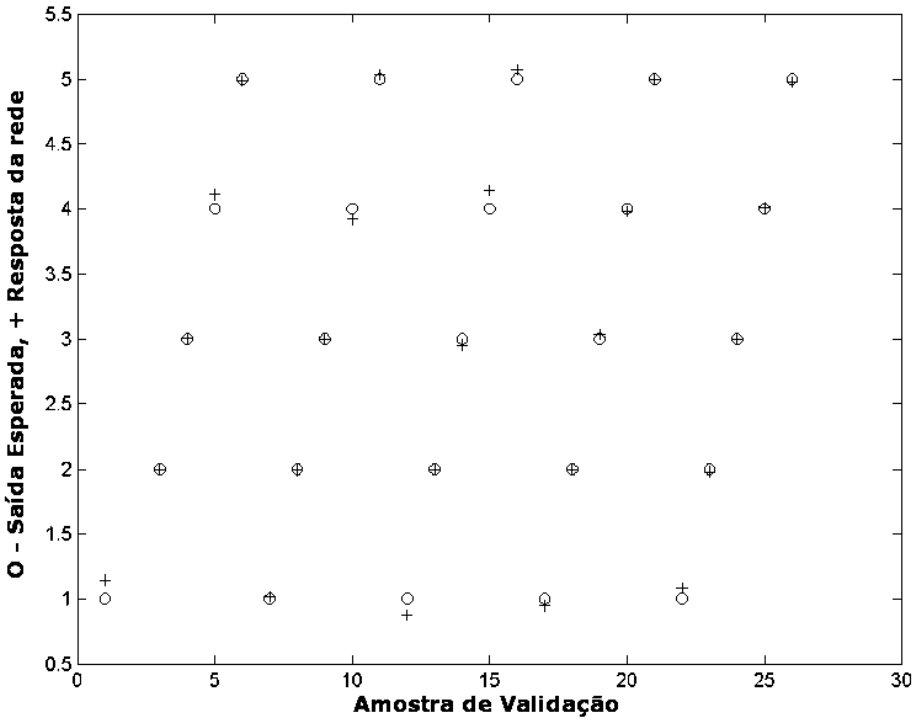

Figura 7.20: Respostas da rede treinada para identificar linhas.

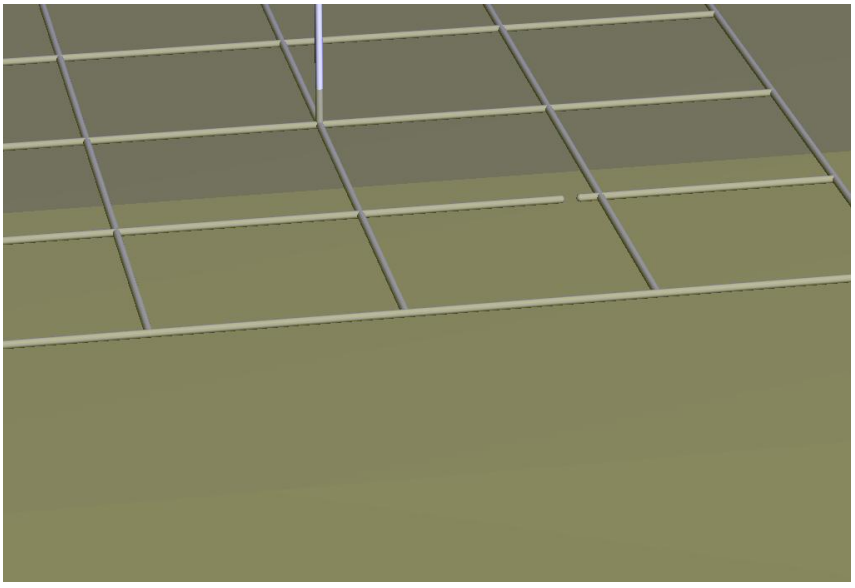

Figura 7.21: Exemplo de haste defeituosa (usado para validação).

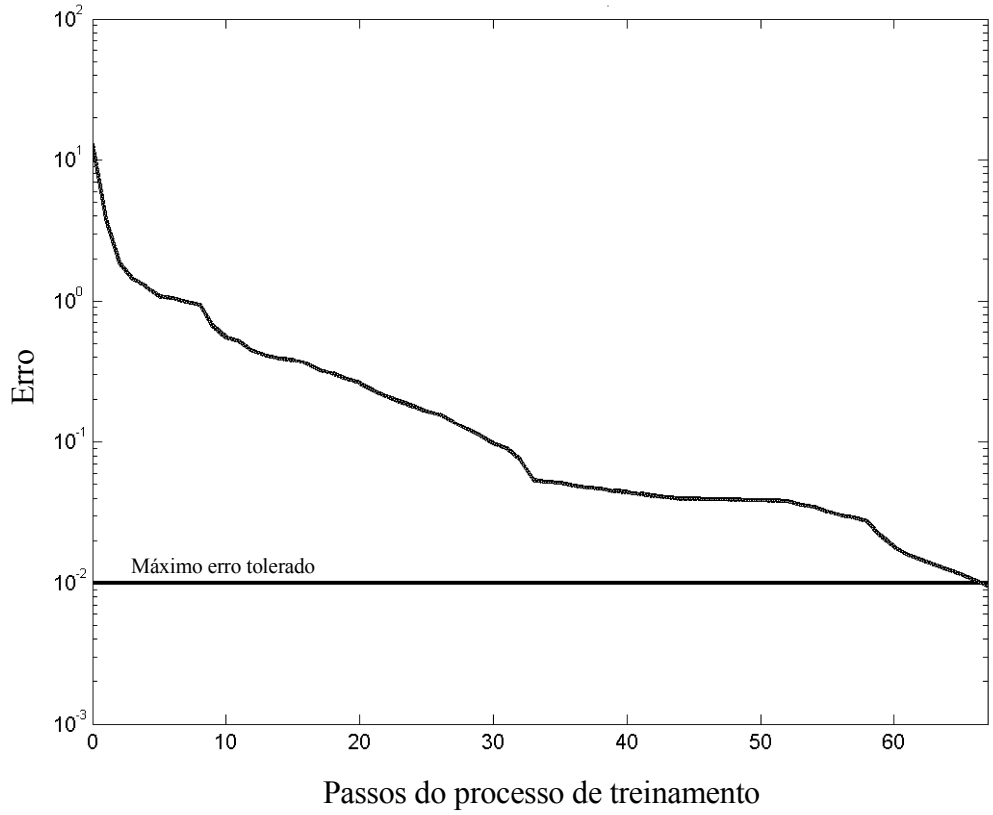

Figura 7.22: Performance da rede para o treinamento da primeira rede.

máximo permitido foi ajustado para 0,01 para ambas as redes, de forma que a curva de treino da segunda rede é bastante similar.

A metodologia proposta representa uma melhoria considerável em relação a trabalhos anteriores e a mesma foi exaustivamente verificada e, em todas as situações testadas, as redes responderam da forma esperada.

7.7 Simulações de estruturas complexas com o *Software* LANE SAGS

Neste Tópico serão apresentados resultados obtidos com o *software* LANE SAGS. O objetivo principal é demonstrar a potencialidade da ferramenta desenvolvida com algumas aplicações já realizadas com a mesma. Em todas as simulações, o solo é caracterizado pelos parâmetros $\epsilon_r = 50$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0{,}002$ S/m.

7.7.1 Redução do Potencial de Passo e de Oscilações Transitórias: o Modelo Pirâmide

Dentre os principais objetivos dos sistemas de aterramento, destaca-se a obtenção da menor relação $V(t)/I(t)$ possível, em todos os instantes de tempo, para as correntes de falta, além da redução dos potenciais de passo (e de toque) produzidos pelas mesmas na superfície do solo, os quais devem estar dentro dos limites de segurança humana.

Para efeito de ilustração, analisemos o que acontece com uma malha de terra convencional, ilustrada pelas Figs.7.23 e 7.24. A Fig.7.25 mostra que a mesma, durante o período transitório, apresenta oscilações importantes em sua resposta $V(t)/I(t)$ neste solo, e que em estado estacionário, sua resistência tende a ser muito maior do que o valor mínimo apresentado pela mesma. A Fig.7.26 mostra a distribuição de potencial gerada por essa estrutura. Nela, observa-se que a partir das bordas da malha há uma queda muito rápida de potencial, o que significa que durante uma descarga, esta região é crítica se uma pessoa estiver pisando dentro e fora da malha, simultaneamente. Tal comportamento é bem evidenciando também pela Fig.7.27, que mostra a distribuição do campo elétrico gerado pela malha (o campo elétrico é proporcional ao gradiente de potencial e, portanto, ao potencial de passo). Tais respostas são comumente apresentadas na literatura.

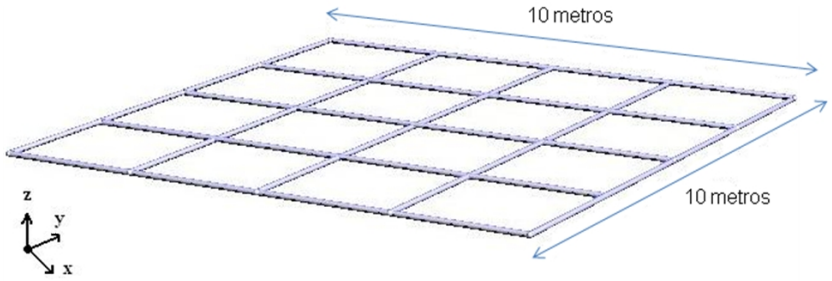

Figura 7.23: Malha de terra utilizada como referência.

Para efeito de comparação, tentou-se introduzir um novo modelo de malha em forma de um espiral bidimensional (Figs. 7.28 e 7.29) , pois sabe-se de teoria de antenas que essas estruturas tendem a irradiar a forma de onda do pulso de excitação em larga faixa de freqüências [102]. Esse efeito também ocorreu na resposta do aterramento elétrico espiral, conforme ilustra a Fig.7.30, porém, o pico da curva $V(t)/I(t)$ se mostrou maior do que o valor de regime, algo não desejável, pois isto significa que a estrutura cria um obstáculo para a passagem da corrente durante esses instantes iniciais. Observa-se pelas Figs. 7.31 e 7.32 que esta estrutura apresenta o mesmo problema da malha convencional em termos de potencial de passo, já que ambas as estruturas são de natureza planar.

Dessa forma, imaginou-se que levando a corrente para o interior do solo, o problema de potencial de passo seria amenizado, já que isto reduziria o nível de corrente na superfície do solo (reduzindo, portanto, os potenciais). E, para suavizar o gradiente de potencial na superfície, imaginou-se uma estrutura cujas dimensões aumentassem com a profundidade. Construiu-se então a estrutura ilustrada pelas Figs. 7.33 e 7.34. A Fig. 7.35 mostra a relação $V(t)/I(t)$ obtida para esta estrutura. Observa-se que foi obtido um valor em regime (resistência) inferior aquele encontrado para a malha de aterramento (Fig. 7.25), porém, a característica transitória apresentada pela estrutura anterior permaneceu com o agravante de apresentar mais oscilações. Entretanto, como ilustra a Fig. 7.36, houve uma excelente suavização do gradiente de potencial, tal como esperado.

Para tentar solucionar o problema do pico transitório de $V(t)/I(t)$ da estrutura ante-

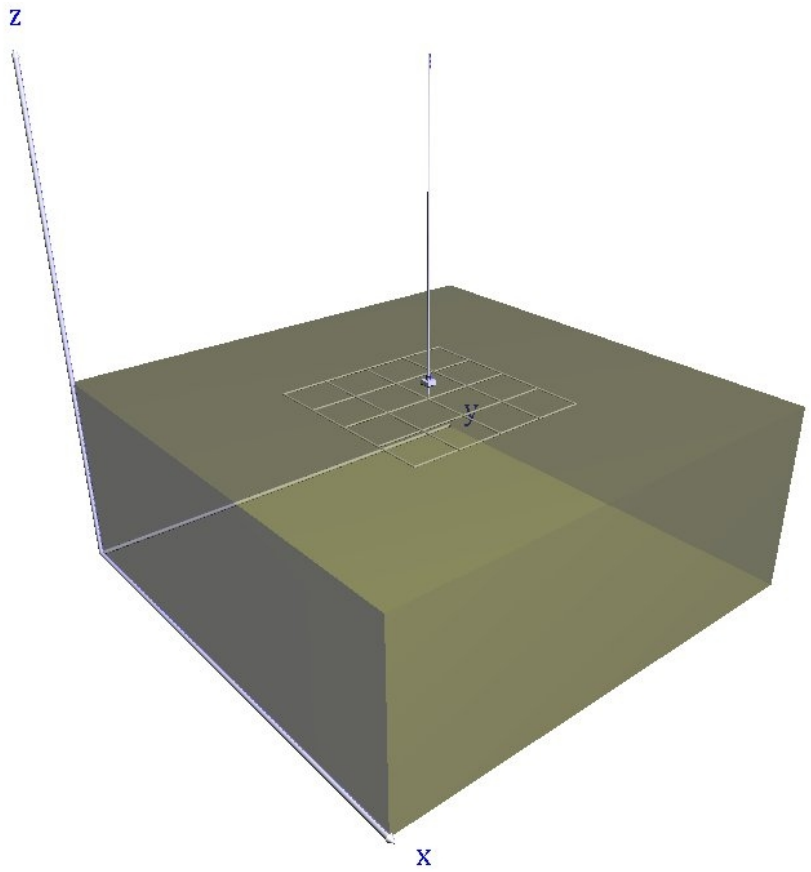

Figura 7.24: Malha de terra utilizada como referência no ambiente LANE SAGS.

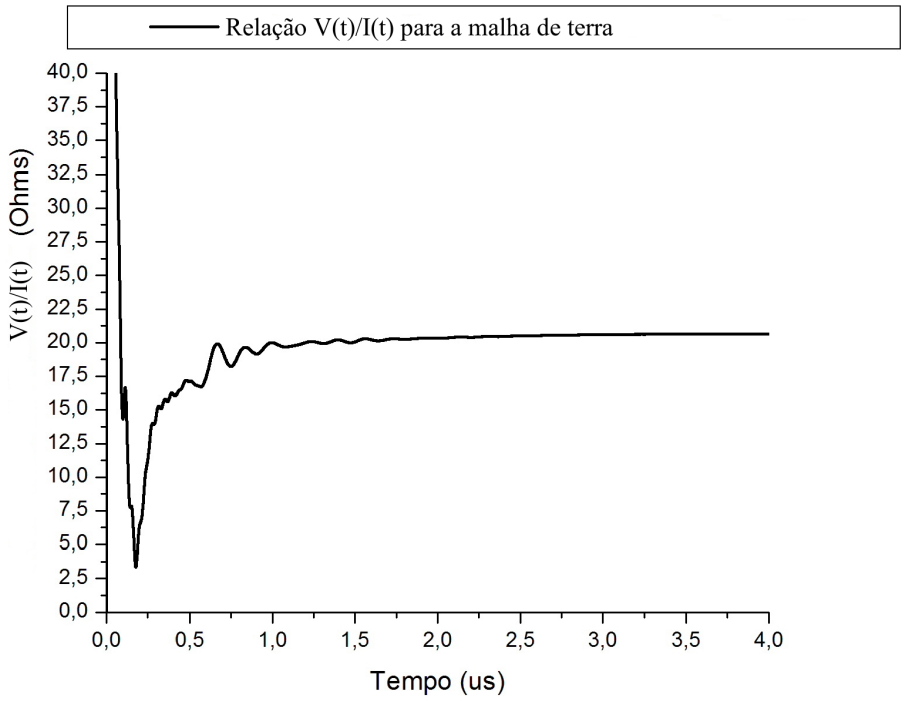

Figura 7.25: Relação $V(t)/I(t)$ para a malha de terra utilizada como referência.

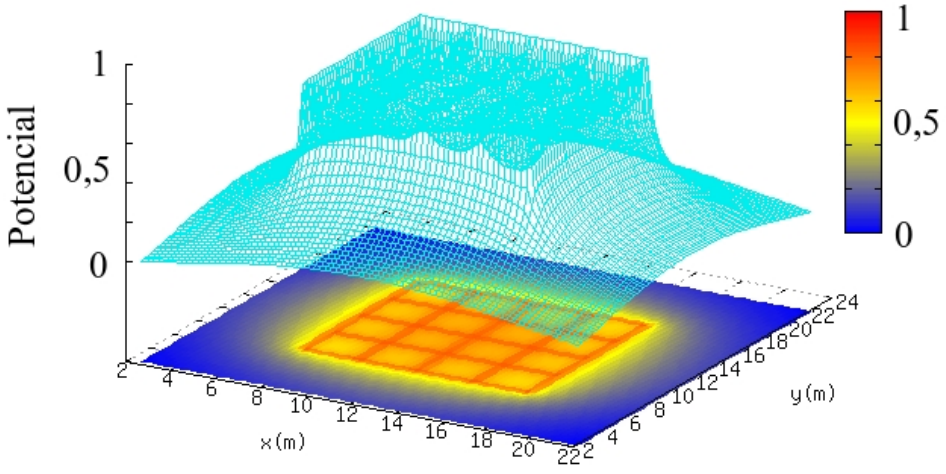

Figura 7.26: Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para a malha de terra utilizada como referência.

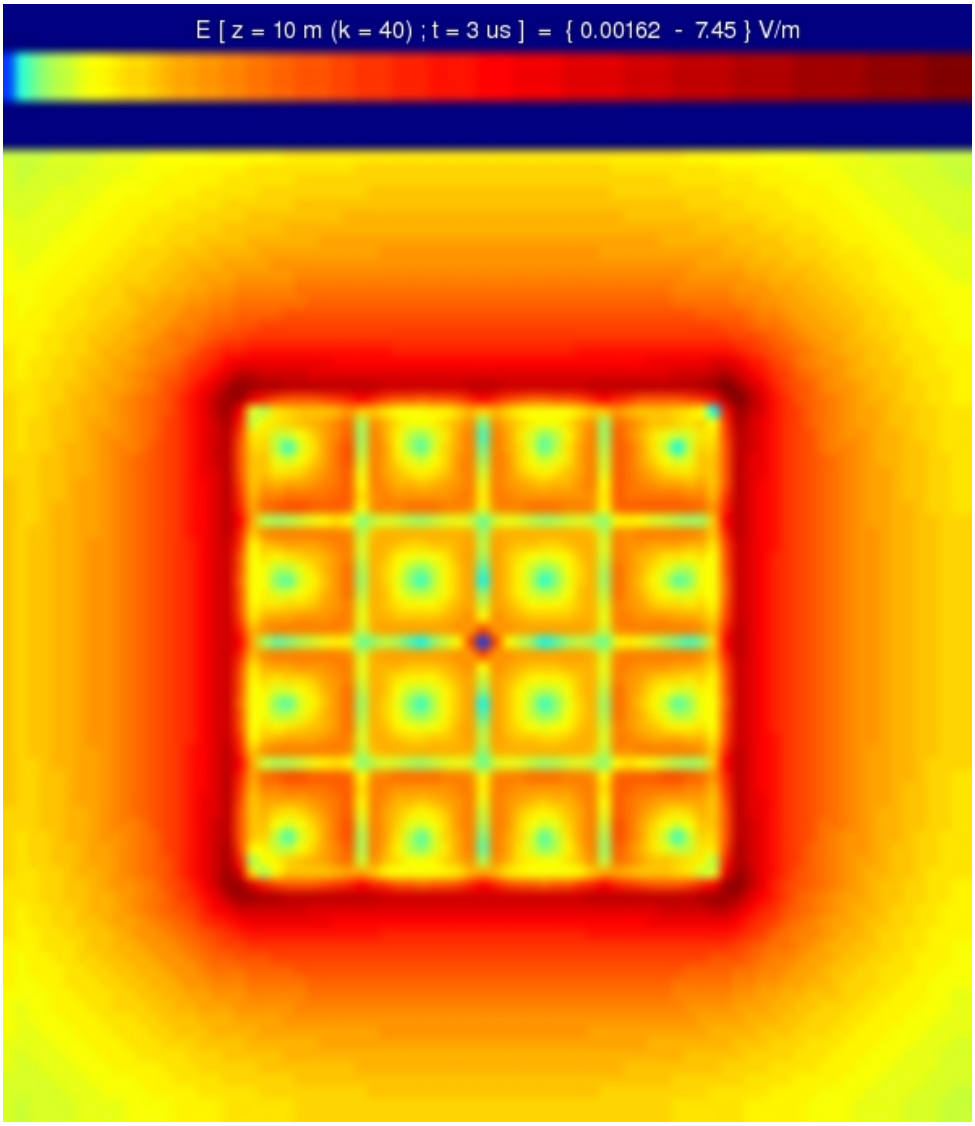

Figura 7.27: Campo elétrico no plano da malha de terra utilizada como referência.

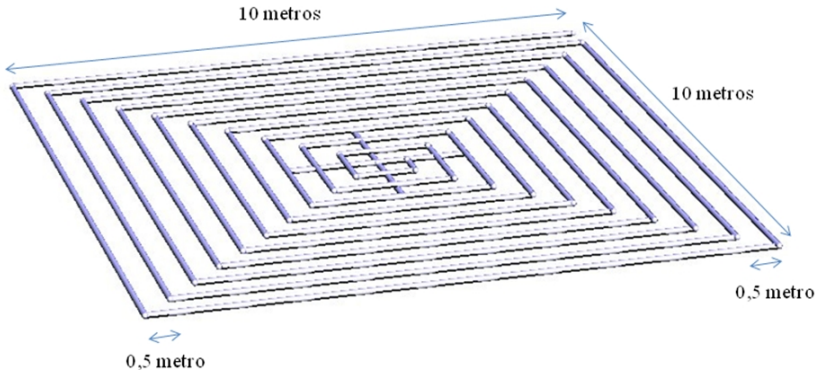

Figura 7.28: Malha espiral 2D.

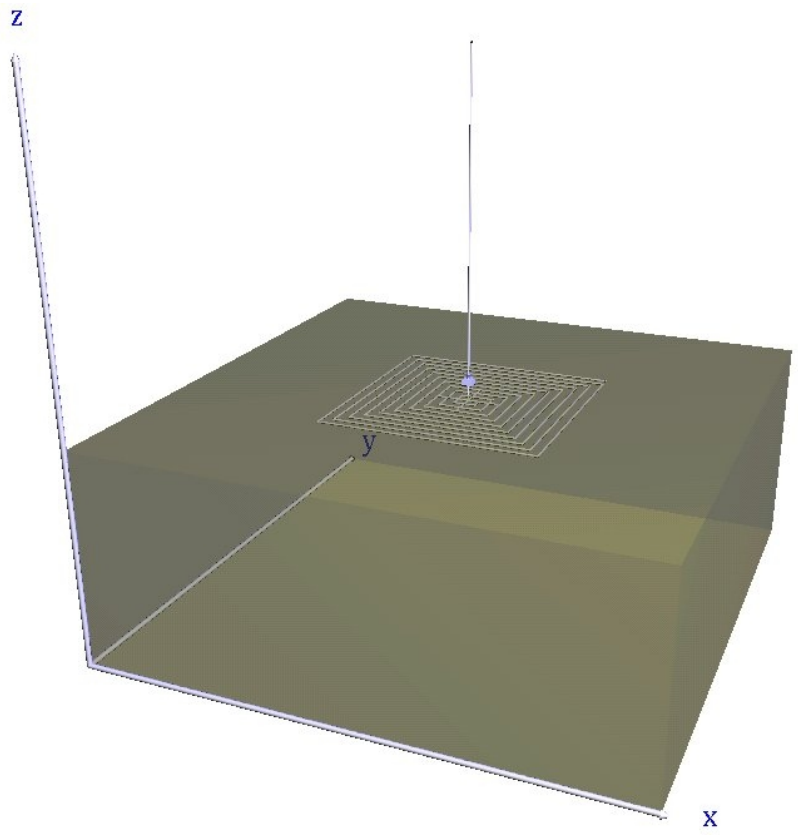

Figura 7.29: Malha espiral 2D no ambiente LANE SAGS.

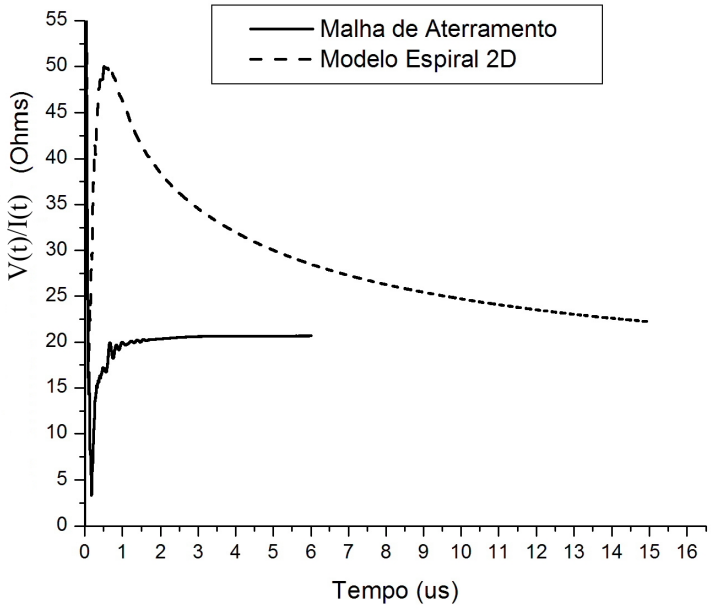

Figura 7.30: Relação $V(t)/I(t)$ para a espiral 2D.

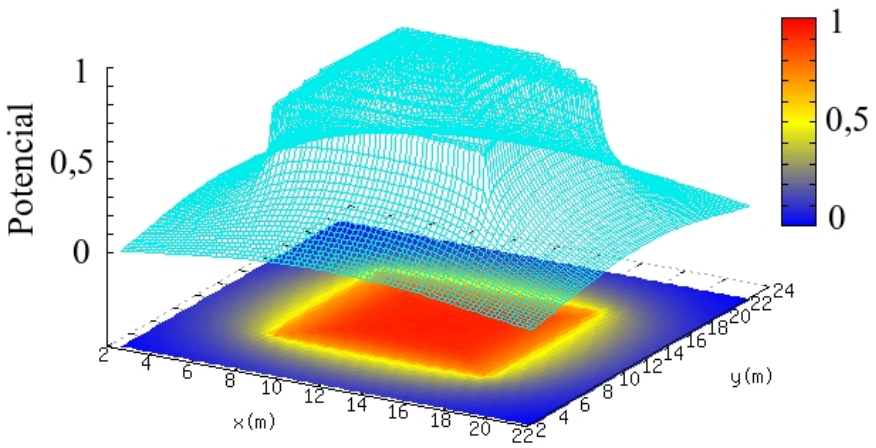

Figura 7.31: Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para a espiral 2D.

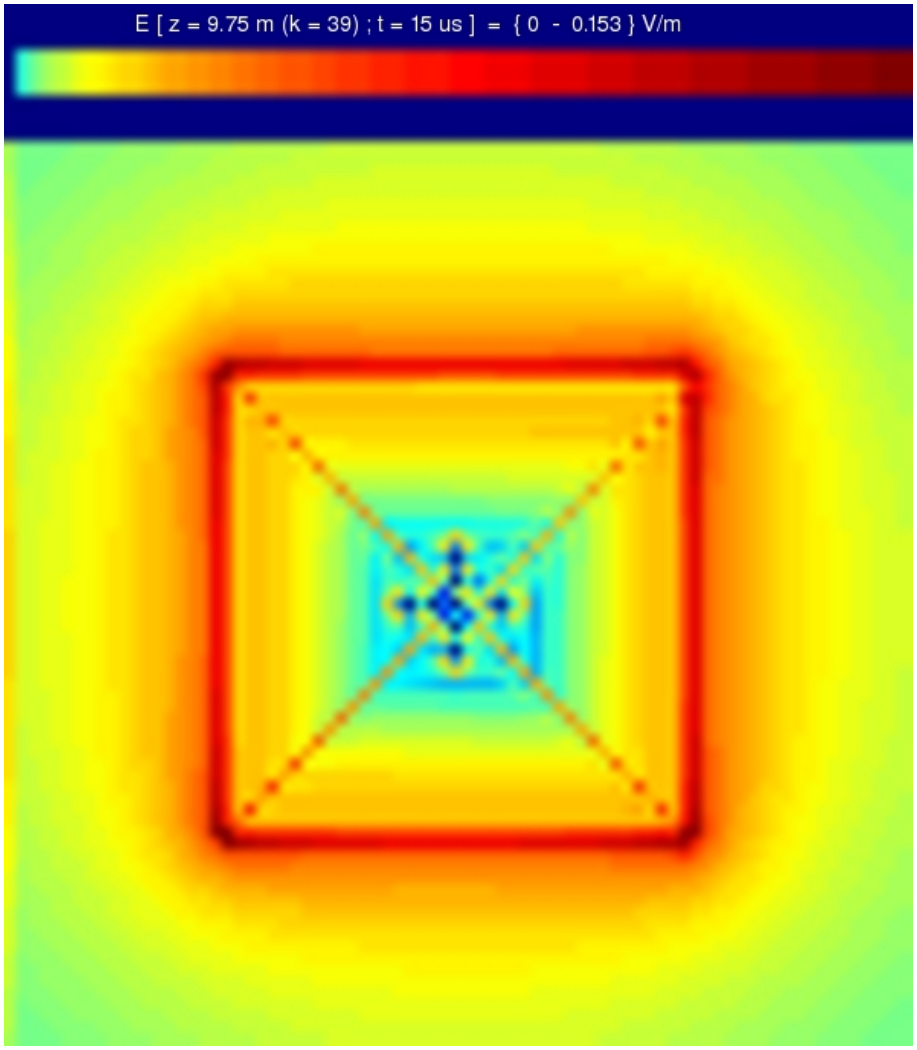

Figura 7.32: Campo elétrico no plano da espiral 2D.

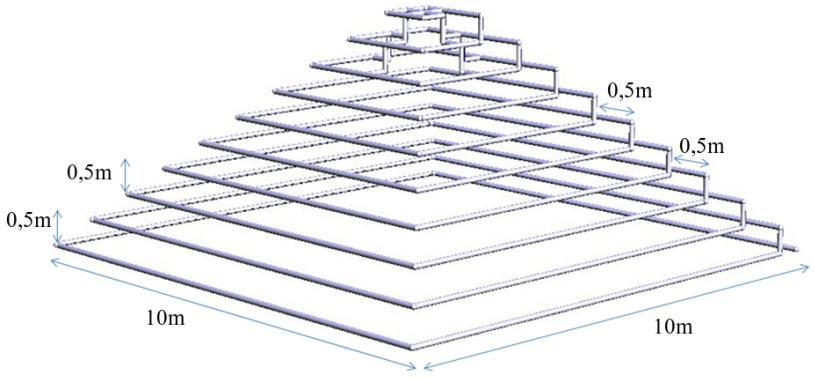

Figura 7.33: Malha Espiral 3D.

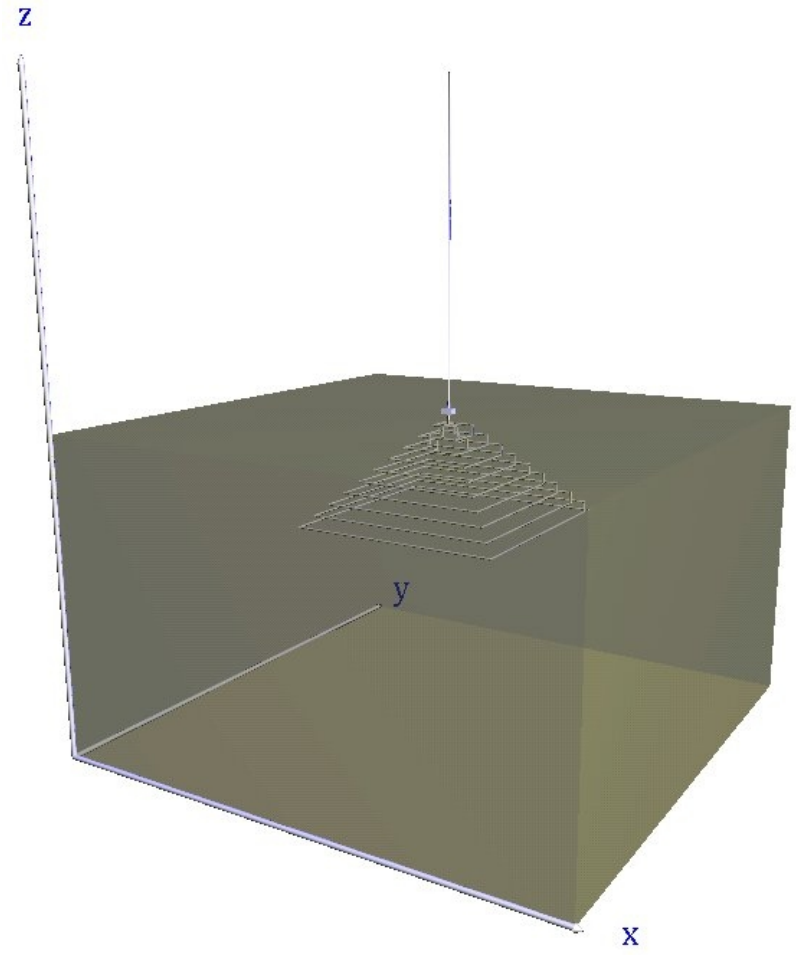

Figura 7.34: Malha Espiral 3D no ambiente LANE SAGS.

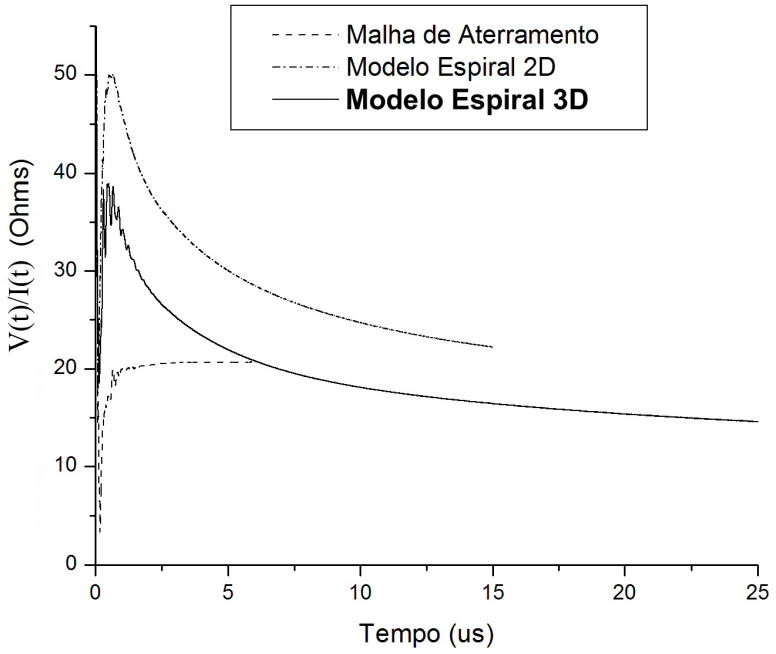

Figura 7.35: Relação $V(t)/I(t)$ para a malha espiral 3D.

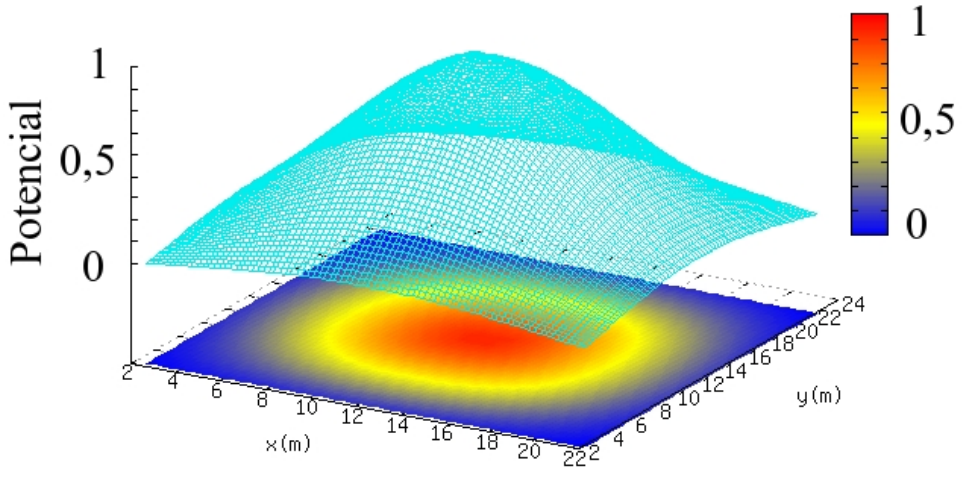

Figura 7.36: Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para a malha espiral 3D.

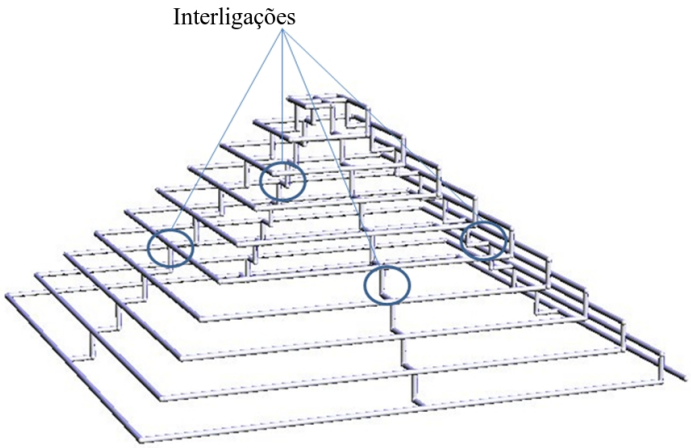

Figura 7.37: Malha de terra modelo pirâmide.

rior, preservando a distribuição de potencial, interligaram-se os níveis do espiral, criando-se assim novos caminhos para que a corrente atinja o último nível da estrutura mais rapidamente. Surgiu assim, a malha pirâmide, ilustrada pelas Figs. 7.37 e 7.38. A Fig. 7.39 ilustra a resposta $V(t)/I(t)$ obtida para a nova estrutura. Observa-se que as oscilações surgem em níveis ômicos menores do que para a malha de terra e que a resposta estacionária está no mesmo nível do espiral 3D. Além disso, preservou-se o perfil desejado de potencial no solo. Deve-se ressaltar que tal resposta é superior ao modelo guarda-chuva [103], tanto em perfil de potencial como, principalmente, em resposta transitória.

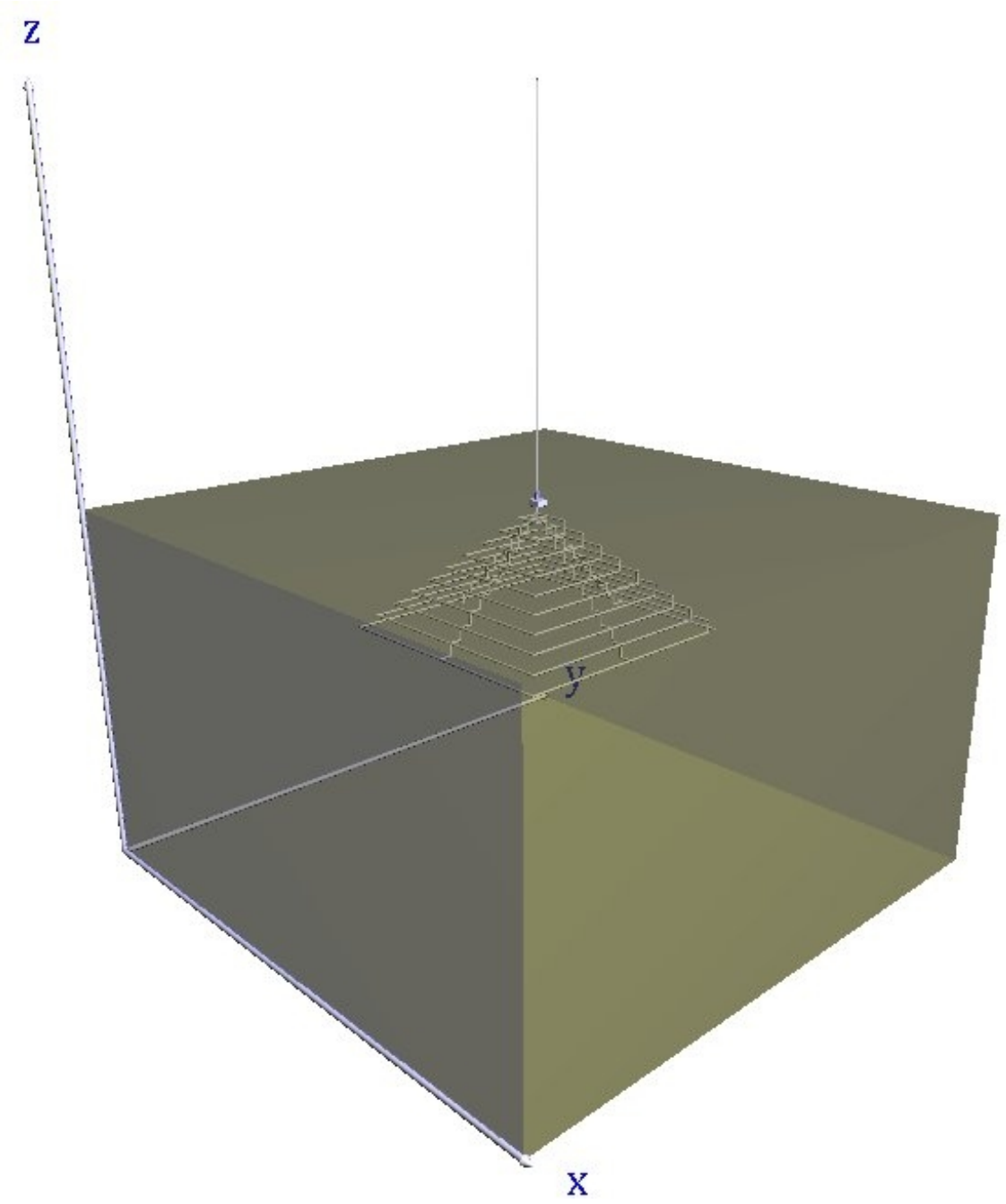

Figura 7.38: O Modelo Pirâmide no ambiente LANE SAGS.

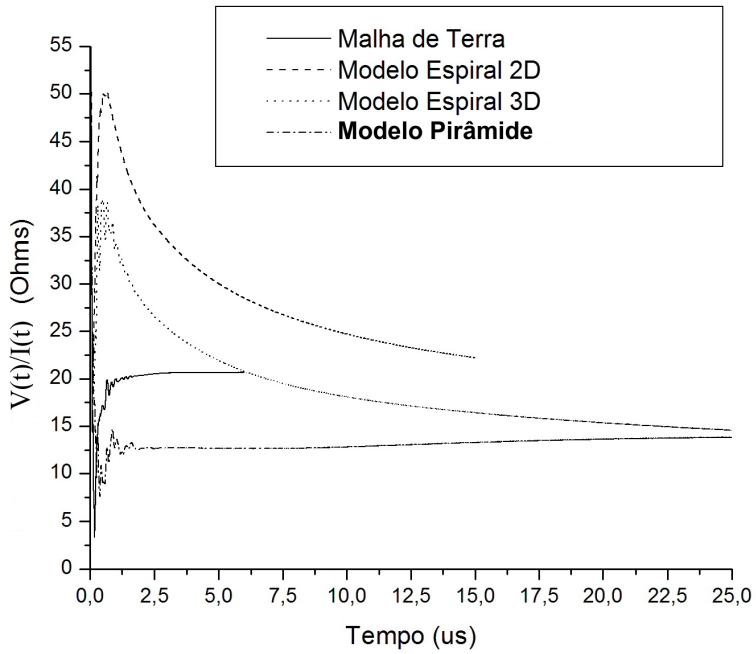

Figura 7.39: Relação $V(t)/I(t)$ para o modelo pirâmide.

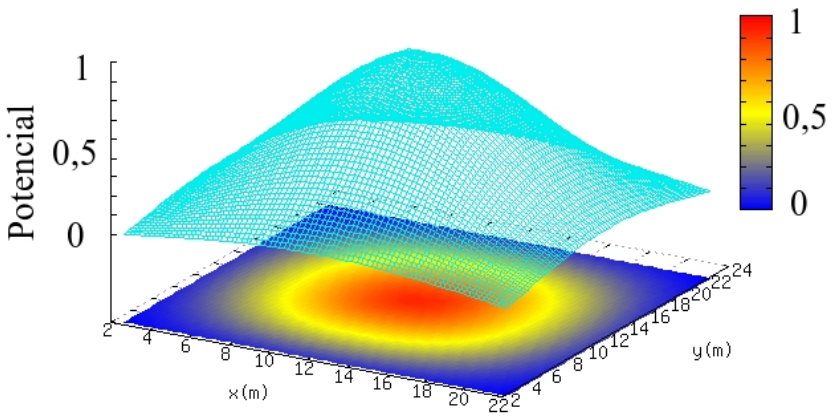

Figura 7.40: Distribuição de potencial (normalizada) na superfície do solo para o modelo pirâmide.

Figura 7.41: Laboratório das Engenharias Elétrica e da Computação na UFPA.

7.7.2 Simulações de Malhas de Aterramento na Presença de Edificações

Quando existem edificações ou outras estruturas às proximidades de uma malha de aterramento, sua resposta transitória sofre modificações mesmo quando essas estruturas estão na superfície do solo. Isso se deve ao fato de que a eletrodinâmica que se desenvolve nessa região altera a evolução temporal de $V(t)$, devido a reflexões, difrações e refrações do campo elétrico. Além disso, partes metálicas na superfície podem alterar a dinâmica da corrente de condução que se propaga no solo.

Para efeito de investigação, foi criado um ambiente computacional com dimensões de 90m $\times$ 90m $\times$ 30m, respectivamente nas direções x, y e z, contendo uma malha de terra e um prédio às proximidades da mesma. O ambiente é baseado no laboratório das

Figura 7.42: Detalhe das Caixas de Inspeção da Malha de Aterramento do Laboratório.

Engenharias Elétrica e da Computação na UFPA (Figs.7.41 e 7.42).

A construção da representação do prédio no *software* LANE SAGS foi realizada em etapas como descrito a seguir:

- Primeira Etapa: Nesta etapa foi obtida a planta do prédio na prefeitura do campus. A partir dela, foram construídas as paredes do pavimento térreo do laboratório a partir das características elétricas do concreto (Condutividade Elétrica de 0,02 S/m e Permissividade Elétrica Relativa de 7,5), conforme ilustrado pela Fig.7.43(a).

- Segunda Etapa: Nesta etapa foram inseridas as coordenadas das paredes do pavimento do primeiro andar do laboratório a partir das características elétricas do concreto (0,02 S/m e 7,5 ϵ_0), conforme ilustrado pela Fig.7.43(b).

- Terceira Etapa: Foi introduzida no modelo a estrutura metálica do prédio (Fig. 7.43(c)).

- Quarta Etapa: Nesta etapa foi incluída a parte externa do bloco composta pela malha de aterramento e pelos corredores que dão acesso às outras áreas da Universidade (Fig. 7.43(d)).

A Fig.7.44 mostra as relações $V(t)/I(t)$ obtidas para a malha de terra na presença da edificação comparadas com a sua resposta isolada. Observa-se que nos instante iniciais (até 0,25μs), os resultados são idênticos, como esperado, e que novas oscilações se apresentam a partir deste instante devido a presença das estruturas. Observa-se ainda que tal efeito é benéfico em termos de amplitude da curva $V(t)/I(t)$, que é reduzida na maior parte dos instantes de tempo. No entanto, isto significa que é facilitado o escoamento da corrente para o solo. Porém, uma parcela desta corrente circula pela edificação.

Deve-se observar que em ambas as simulações, a malha de terra não foi conectada a estrutura e a fonte de excitação foi posicionada no canal de descarga infinito, com o objetivo de determinar apenas a influência da construção na resposta da malha.

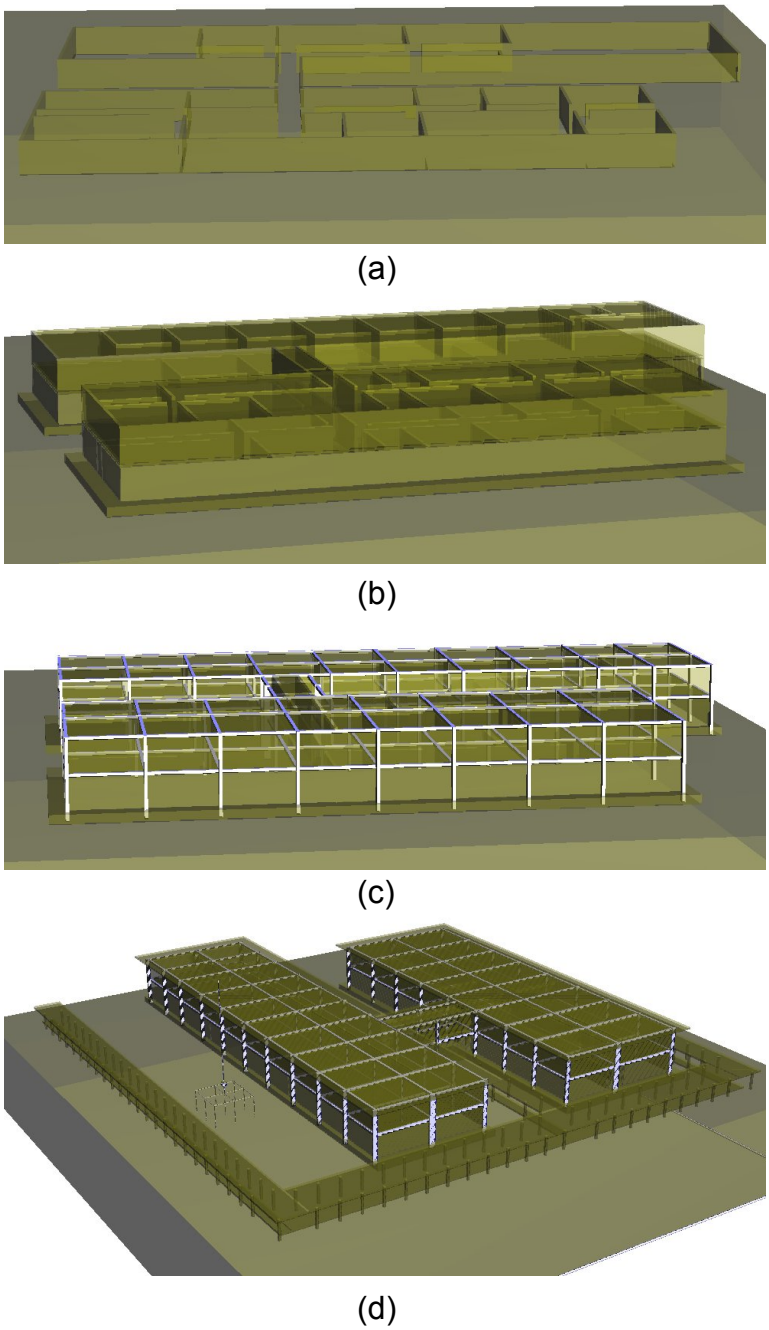

Figura 7.43: Progresso do Desenvolvimento do Modelo Computacional do Prédio do Laboratório: (a) e (b) paredes de concreto, (c) partes metálicas, (d) modelo concluído.

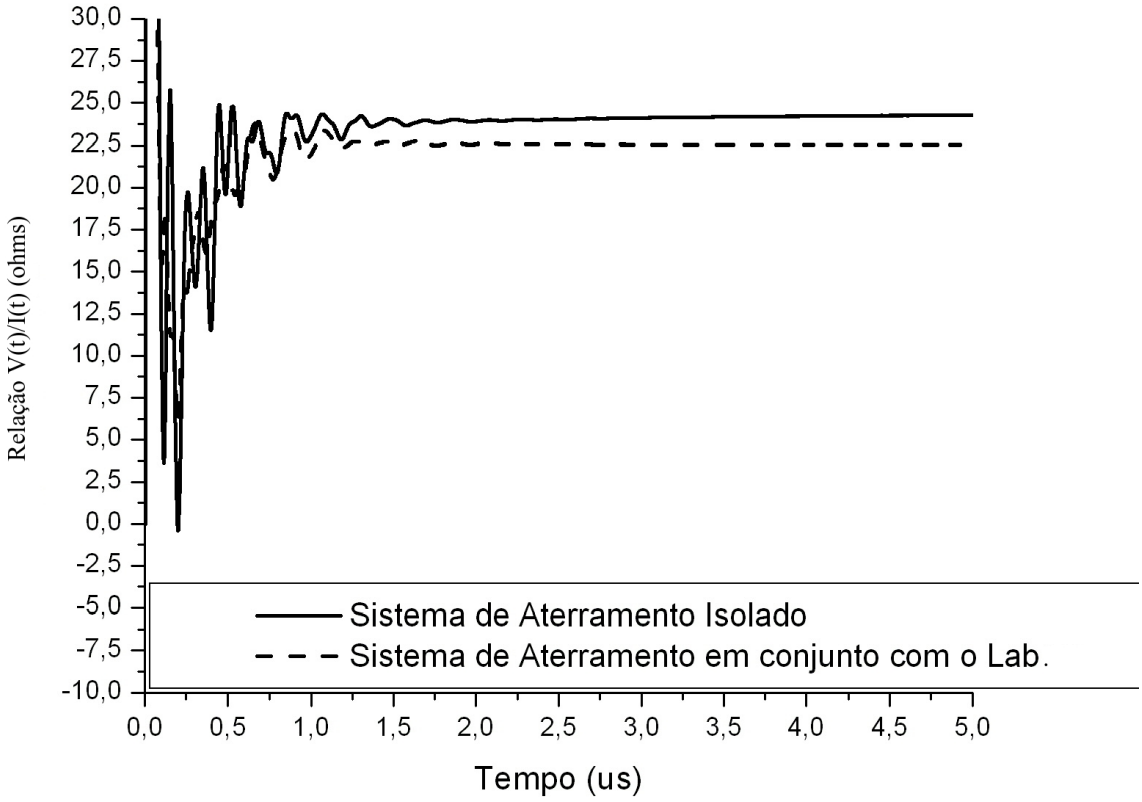

Figura 7.44: Relações $V(t)/I(t)$ para a malha sem e com a presença do laboratório.

Figura 7.45: Modelo Computacional para Simular uma Descarga em um Pára-Raio de Franklin instalado no Laboratório.

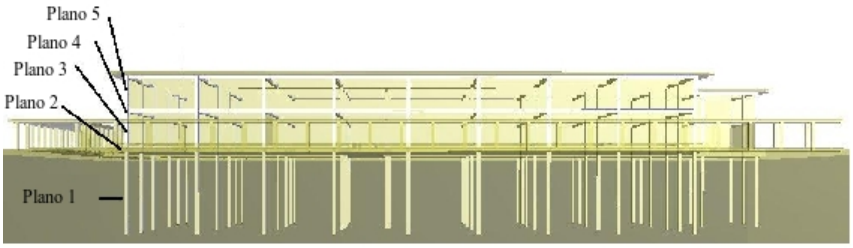

Figura 7.46: Planos nos quais as distribuições de campo foram capturadas (laboratório).

Uma possibilidade interessante de aplicação do *Software* LANE SAGS é o estudo de compatibilidade eletromagnética, já que os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são calculados em todos os pontos do espaço considerado para todos os passos de tempo. Para efeito de ilustração, foi simulada uma descarga atmosférica em um pára-raio de Franklin que existe no prédio, conforme ilustra a Fig. 7.45. Neste problema, o *Software* LANE SAGS foi utilizado para se obter a distribuição espacial dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ nos planos indicados na Fig. 7.46.

Os resultados obtidos estão disponíveis nas Figs.7.47-7.51, para os planos 1-5, respectivamente. Nestas Figuras, mostram-se as distribuições do campo elétrico na primeira coluna e do campo magnético na segunda, para os instantes $t = 1\mu$s, $t = 10\mu$s e $t = 20\mu$s.

Vale ressaltar que, no interior do solo, as vigas metálicas não são cobertas pelo concreto (Fig. 7.45).

Observa-se que os meios dielétricos são praticamente invisíveis para o campo magnético e que a maior concentração de energia se dispõe no lado de fora da estrutura, devido ao efeito de blindagem causado pelas partes metálicas do prédio para a faixa de freqüências em questão.

Deve-se notar ainda que há corrente fluindo pelas colunas internas de metal, corrente esta provinda da divisão de corrente entre as barras e, posteriormente, pelo fluxo de corrente, através do solo, entre elas, gerando assim uma dinâmica altamente complexa.

7.7.3 Espalhamento Eletromagnético em uma Subestação

Também para efeito de ilustração, foi construído um ambiente bastante complexo para testar a funcionalidade do LANE SAGS. O ambiente, ilustrado pelas Figs. 7.52 e 7.53 representa a parte estrutural da subestação do Guamá, da Eletronorte. Nestas figuras, podem ser identificadas as partes modeladas da estrutura.

O domínio computacional para representar a estrutura é de $440 \times 390 \times 90$, sendo que na direção x utilizaram-se 880 células para efeito do cálculo do potencial $V(t)$. Foi feito um teste anterior com 2000 células na direção x, porém os resultados são idênticos. Para este teste, precisou-se de 8 dias para executar a simulação em um cluster de 16 máquinas com o processador Intel Xeon de 2600MHz (64 bits). Utilizando-se a malha $440 \times 390 \times 90$, precisa-se de aproximadamente dois dias e meio para se concluir a simulação.

Para a construção, utilizaram-se as plantas concedidas pela empresa. Iniciou-se pela malha de aterramento, composta por exatos 1529 condutores metálicos, com raios entre 15 (maioria) e 25 milímetros, inseridos conforme a planta. A malha tem aproximadamente 200×200 metros de área e, para representar a estrutura, utilizaram-se células cúbicas com 0,5 metro de aresta. Posteriormente, cada estrutura foi construída de forma individual, e, através de uma rotina especialmente desenvolvida para este fim, construiu-se um banco

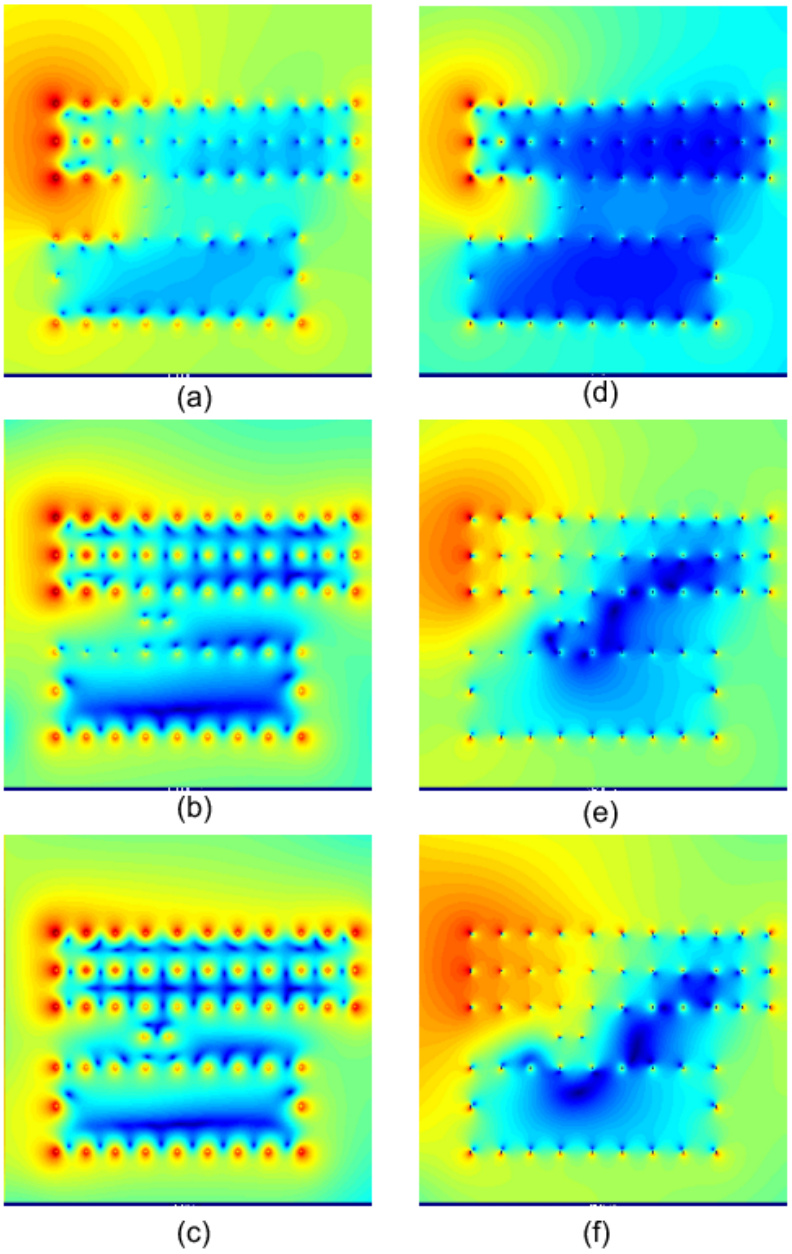

Figura 7.47: Plano 1: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$.

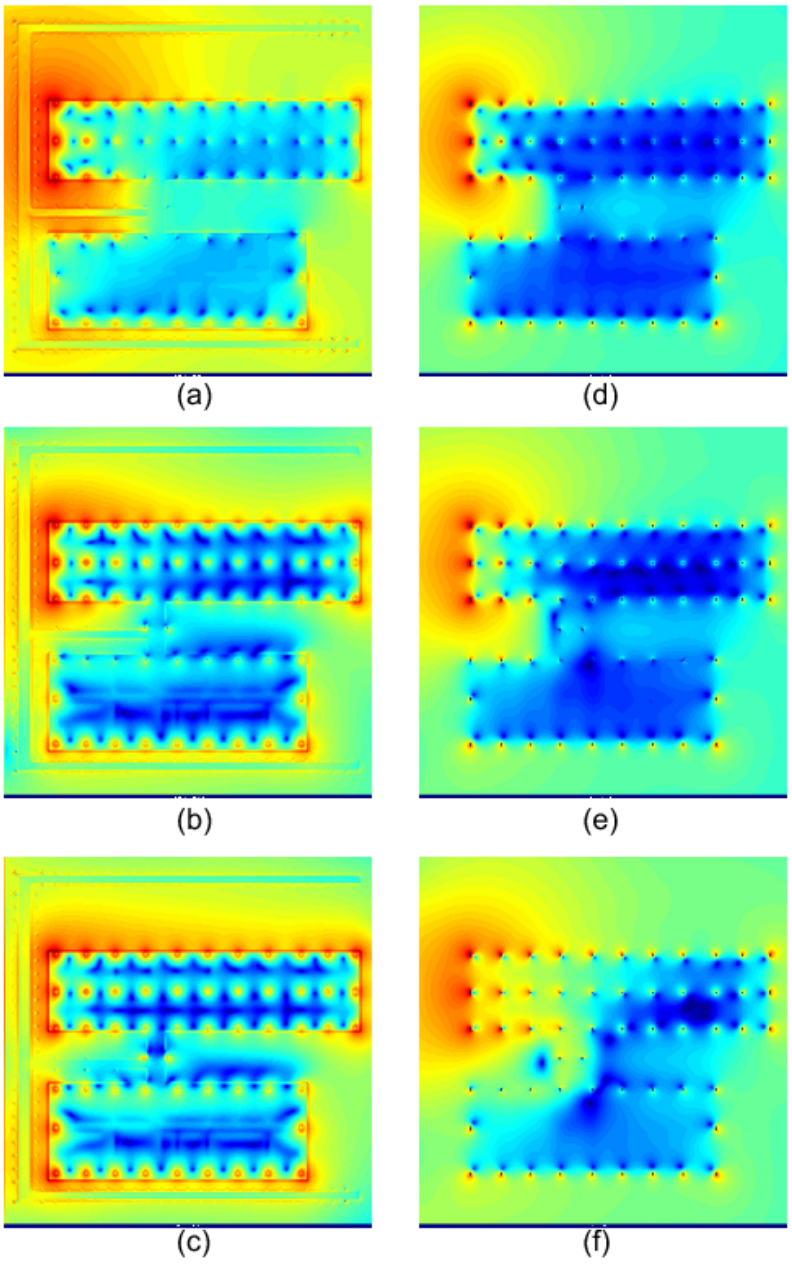

Figura 7.48: Plano 2: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$.

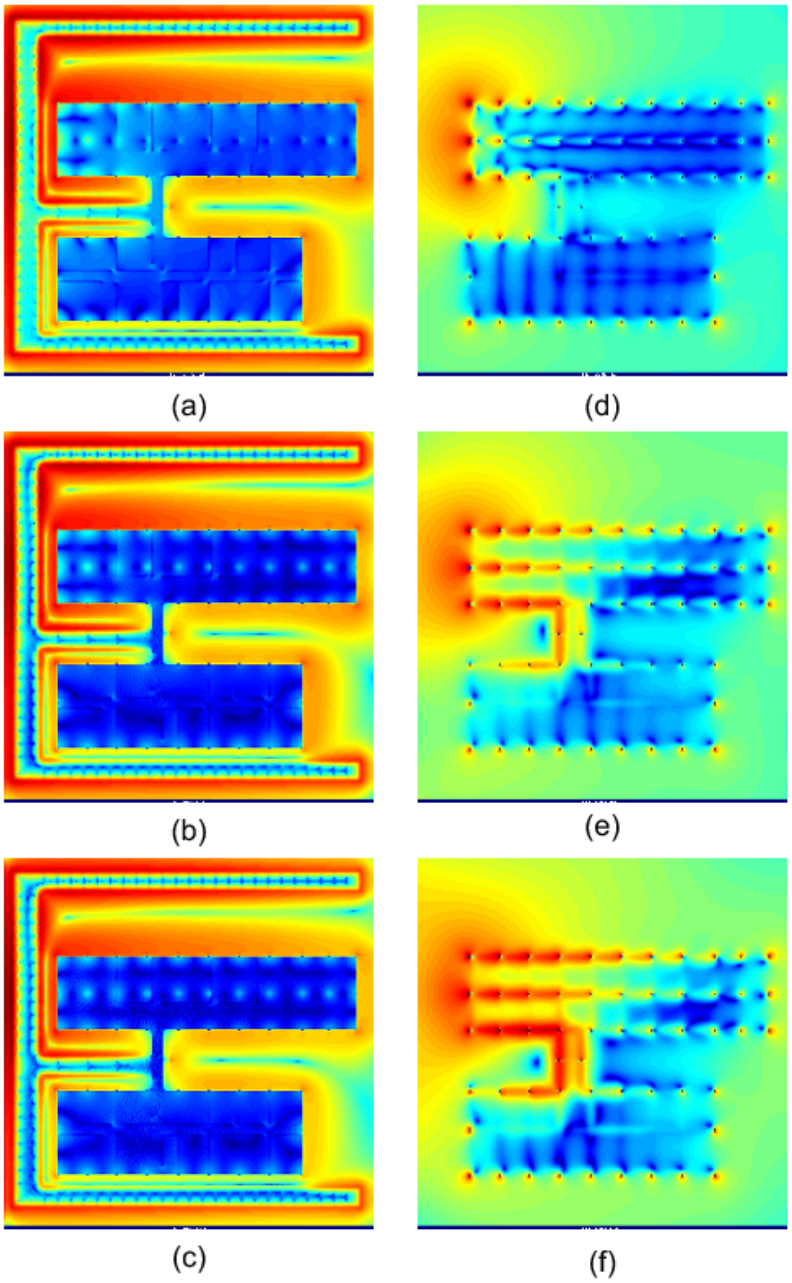

Figura 7.49: Plano 3: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$.

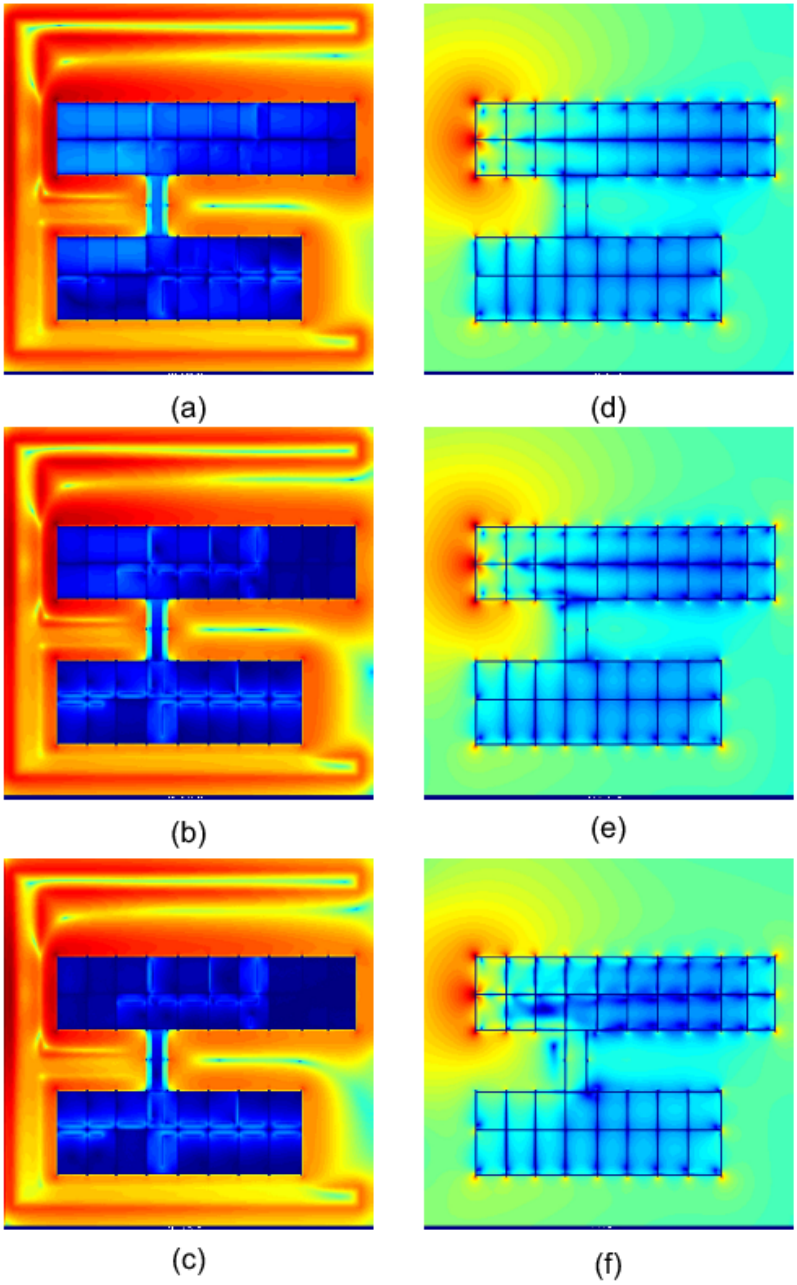

Figura 7.50: Plano 4: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$.

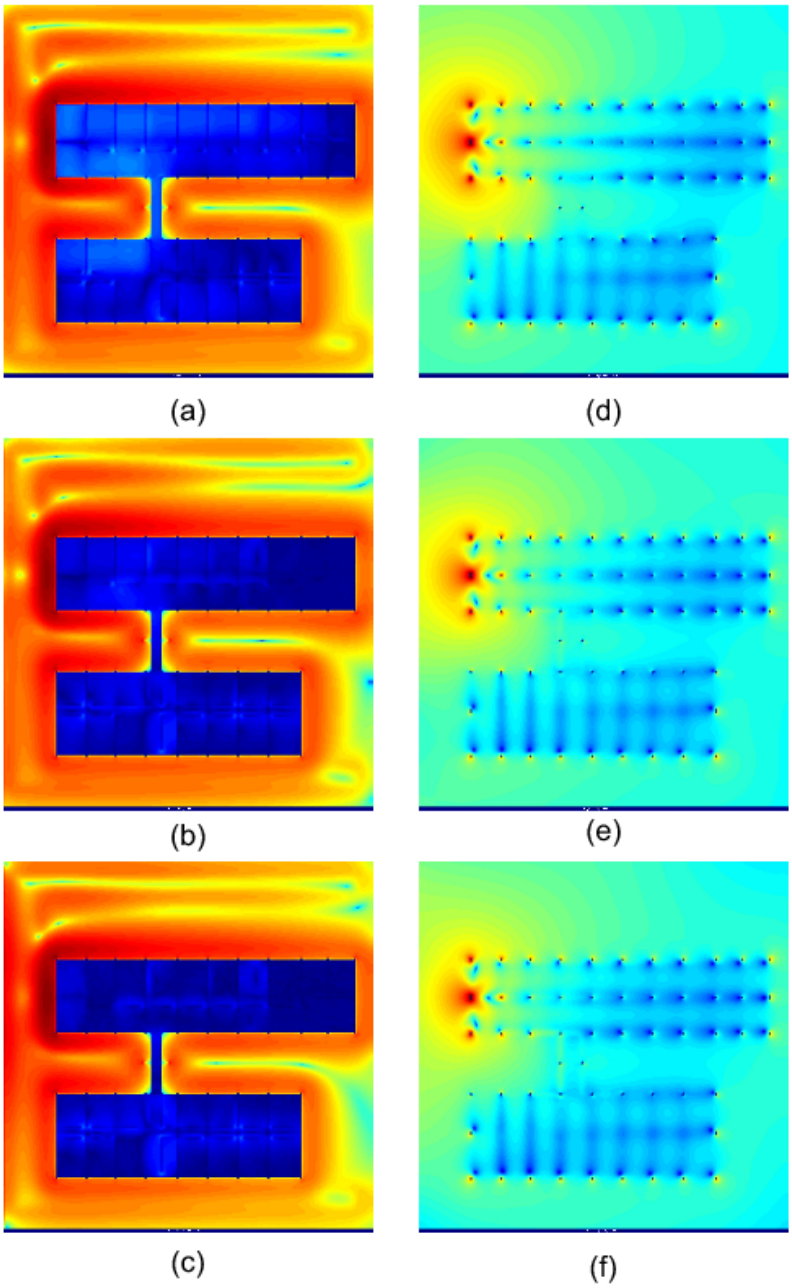

Figura 7.51: Plano 5: (a) $\vec{E}$ $(t = 1\mu s)$; (b) $\vec{E}$ $(t = 10\mu s)$; (c) $\vec{E}$ $(t = 20\mu s)$; (d) $\vec{H}$ $(t = 1\mu s)$; (e) $\vec{H}$ $(t = 10\mu s)$; (f) $\vec{H}$ $(t = 20\mu s)$.

de dados com os objetos, de forma que réplicas pudessem ser incluídas no domínio de análise conforme a necessidade. Esses protótipos foram construídos a partir de elementos fundamentais do LANE SAGS, tais como blocos dielétricos, blocos metálicos e hastes. Agrupados esses elementos, constituiu-se o banco de dados e gerou-se a estrutura, tal como ilustrado pelas Figs. 7.54, 7.55 e 7.56. Por fim, foi adicionada uma camada de brita (com 1/2 metro de espessura), da mesma forma como foi construída a subestação real. Deve-se ressaltar que apenas a parte estrutural da subestação foi construída, sendo que as funções de cada dispositivo poderão ser implementadas em trabalhos futuros.

Nota-se nas Figs. 7.52 e 7.53 que foram criadas as seguintes estruturas: transformadores, chaves seccionadoras, disjuntores, pára-raios, transformadores de potencial e de corrente, isoladores, torres e a cerca de proteção, além das linhas de alta tensão e das edificações (casas de relés e serviços auxiliares). As linhas de alimentação penetram na região absorvente UPML, de tal forma que elas podem ser consideradas infinitas.

Inicialmente, construiu-se a borda da malha de aterramento e as bordas das edificações presentes no ambiente e realizou-se um primeiro teste na malha. Foi escolhido um ponto onde se encontra um dos pára-raios para teste, conforme pode ser visto na Fig.7.57. Posteriormente, incluíram-se as linhas paralelas a linha na qual o pára-raio está aterrado (Fig. 7.58). Os passos seguintes consistiram em adicionar as hastes normais as citadas previamente (Figs 7.59 e 7.60) e, posteriormente simular a malha completa com e sem a parte superior da subestação.

As Figs. 7.61-7.65 mostram os resultados considerando-se as várias etapas de construção da malha da subestação. Comparando-se a Fig. 7.61 com as Figs. 7.62-7.65 , observa-se a situação mais simples da Fig.7.57 gera uma forma de onda de referência, na qual são adicionadas oscilações provenientes de outras partes da malha a medida em que novos elementos são adicionados, conforme pode ser constatado através das Figs. 7.62-7.65. Além disso, em todos os casos citados até aqui, o valor de regime da curva $V(t)/I(t)$ é praticamente o mesmo, 2,0Ω. Todavia, observa-se na Fig.7.66, que a parte superior

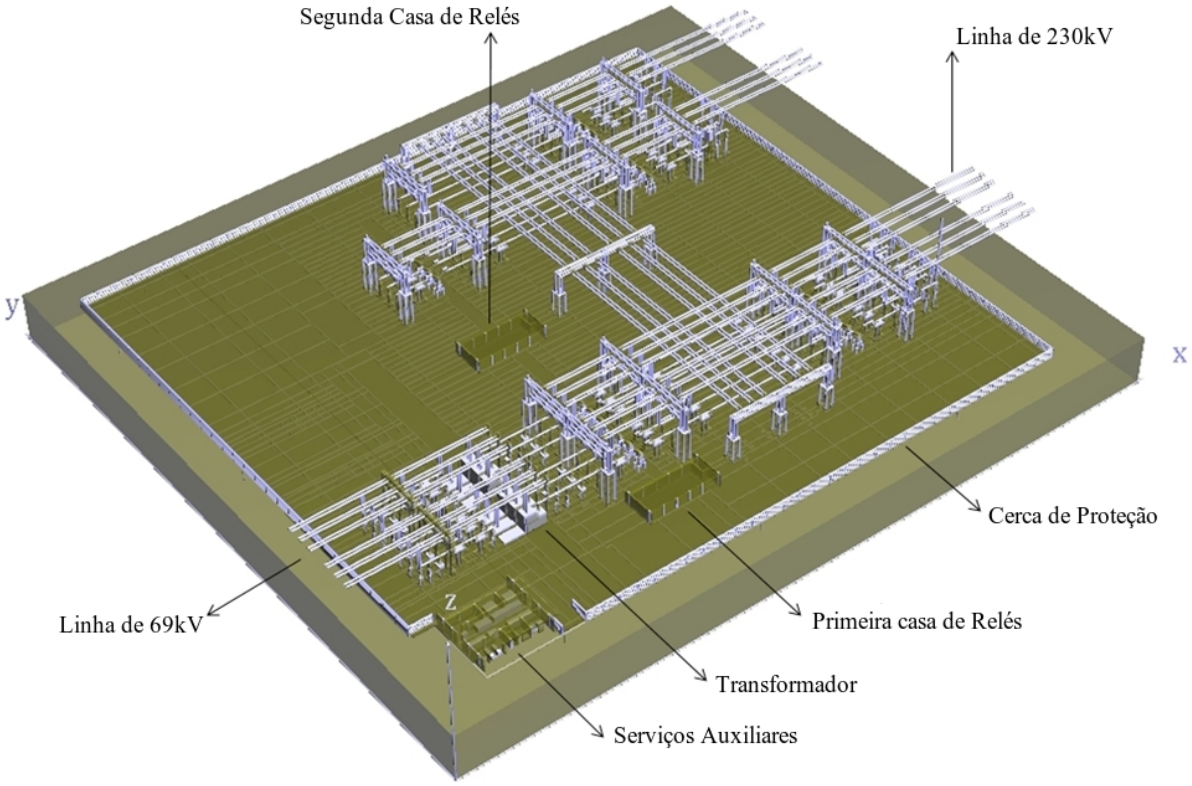

Figura 7.52: Vista superior da Subestação.

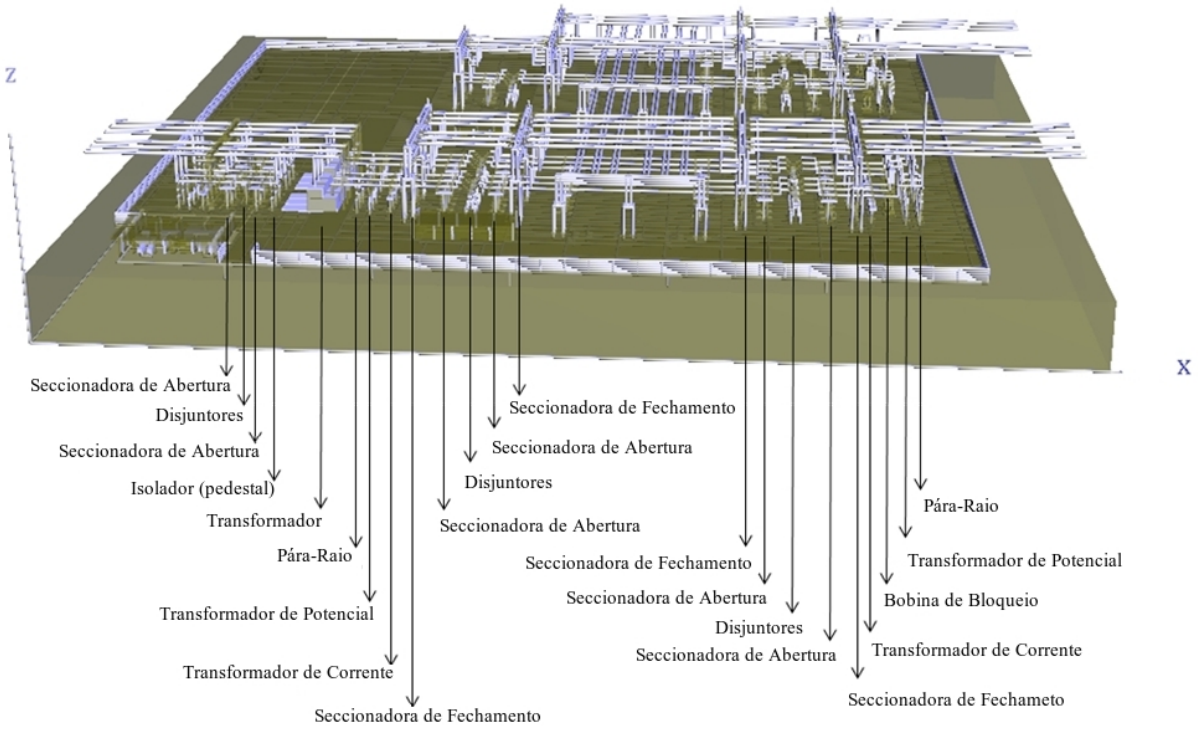

Figura 7.53: Vista lateral da Subestação.

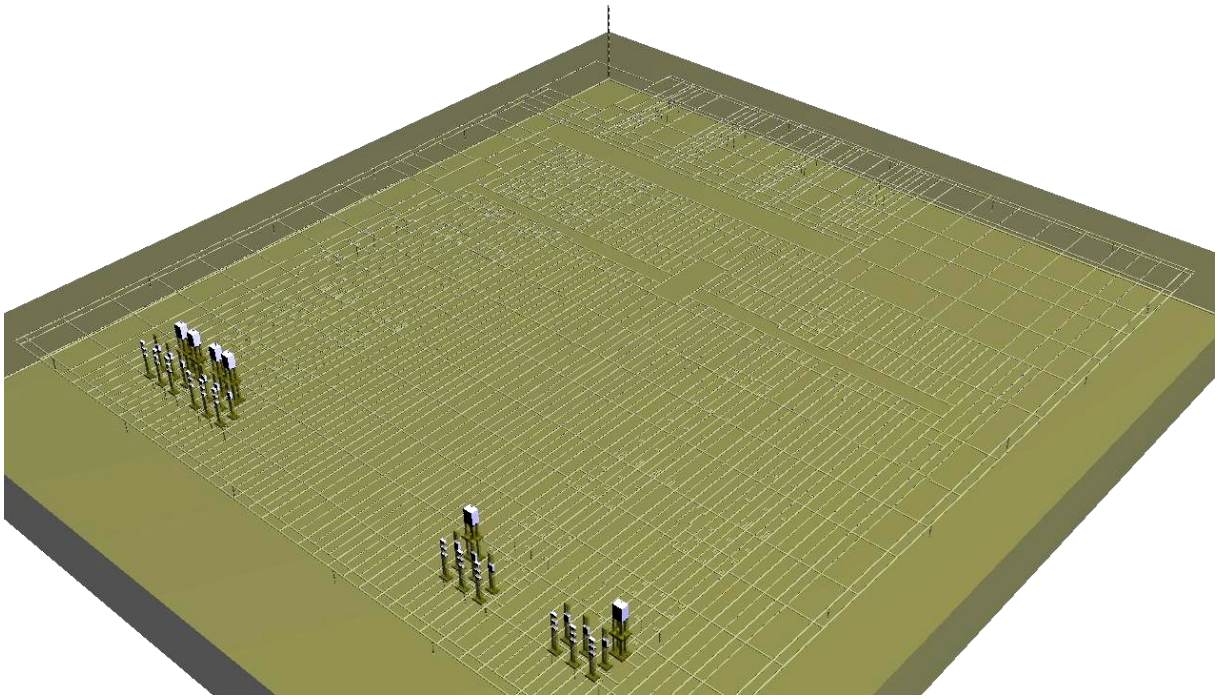

Figura 7.54: Primeira Fase de Construção da Subestação.

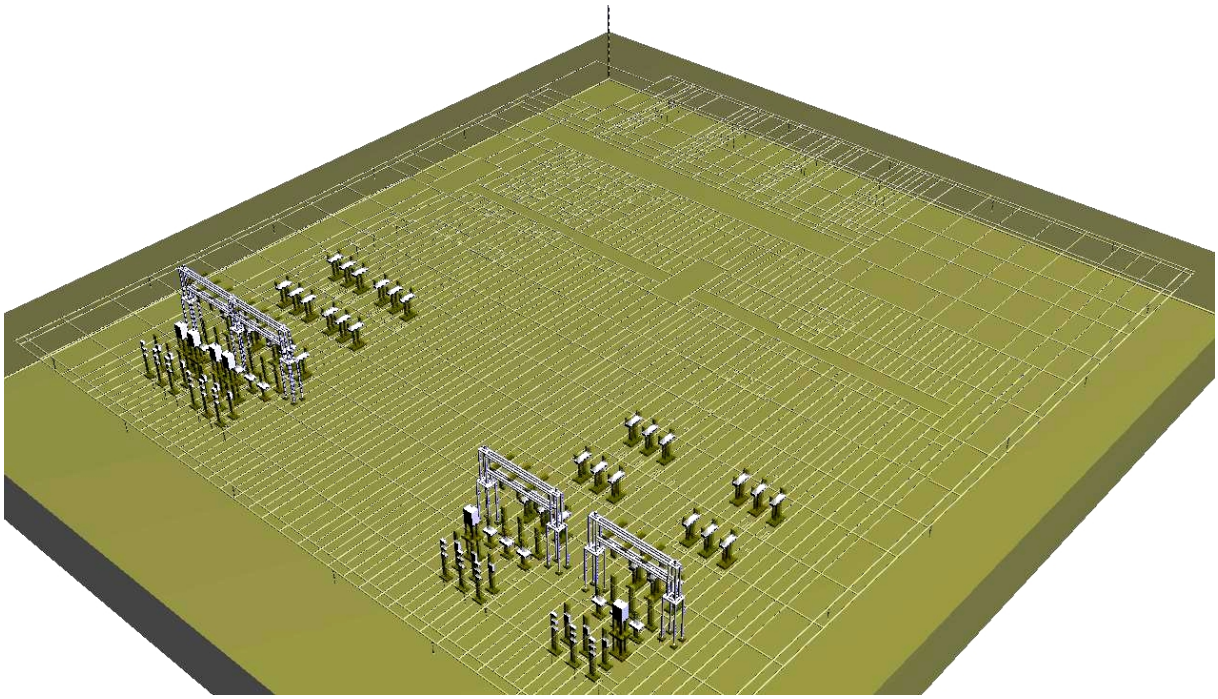

Figura 7.55: Segunda Fase de Construção da Subestação.

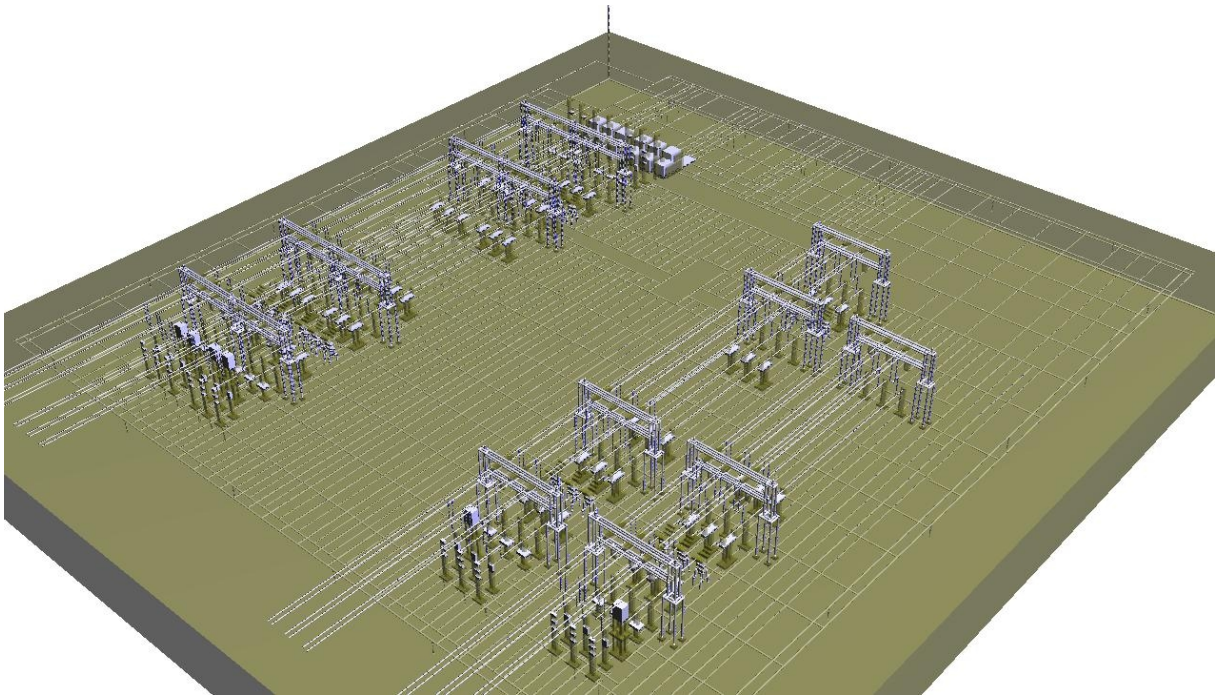

Figura 7.56: Terceira Fase de Construção da Subestação.

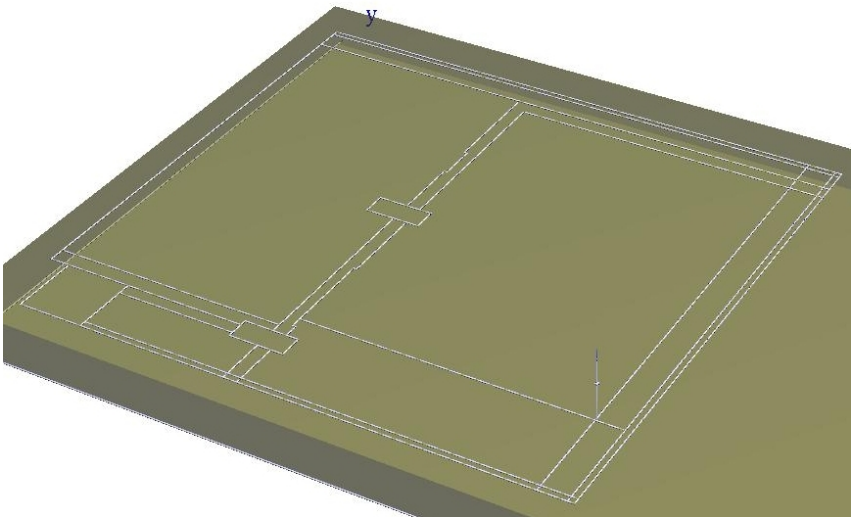

Figura 7.57: Configuração da primeira simulação da malha da subestação.

da estrutura reduz o valor de regime para algo entorno de 1,5Ω, similarmente ao caso do prédio do laboratório cujos resultados foram mostrados anteriormente. Nota-se ainda que as oscilações adicionais estão muito mais presentes neste caso devido ao complexo ambiente simulado, por motivos similares aos citados anteriormente.

As Figs. 7.67 e 7.68 mostram, respectivamente as distribuições espaciais do campo $\vec{E}$ e do campo $\vec{H}$ no plano da malha de aterramento da subestação. Nota-se que, assim como no caso da malha menor (Fig.7.23) e da malha espiral 2D (Fig.7.28), este malha apresenta a maior parte da energia nas suas bordas e apresenta também uma brusca queda de potencial elétrico nesta região. Na Fig. 7.67, observa-se claramente o posicionamento de cada elemento da parte superior da subestação. Nas Figuras 7.69 e 7.70, percebe-se claramente que correntes consideráveis são induzidas nas linhas, em ambos os lados da subestação. O mesmo pode ser identificado na Fig. 7.71. Nesta Figura, pode-se observar também a presença dos elementos dielétricos das estruturas. A seguir, mostram-se as distribuições de campo no plano da cerca de proteção da estrutura (Figs. 7.72 e 7.73). Nota-se que o campo magnético (Fig. 7.72) indica a presença de corrente na cerca, o

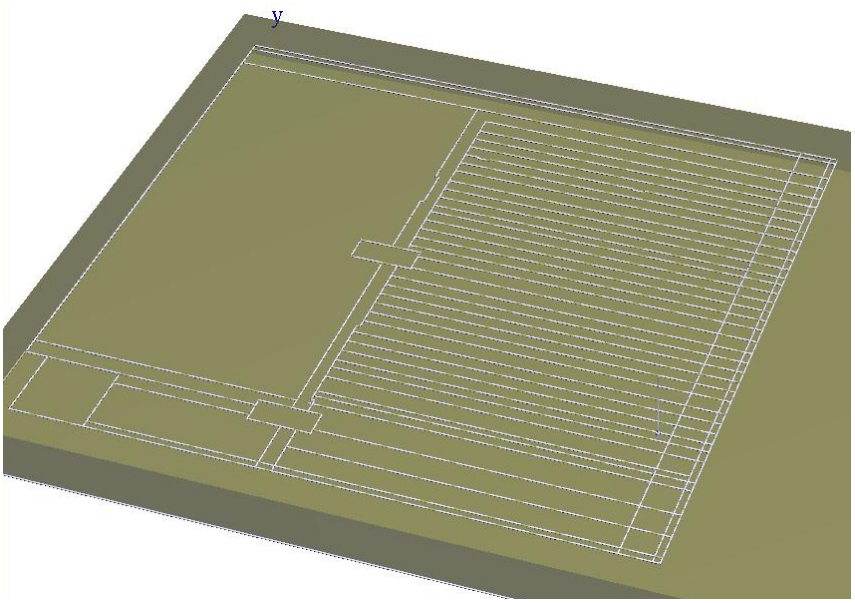

Figura 7.58: Configuração da segunda simulação da malha da subestação.

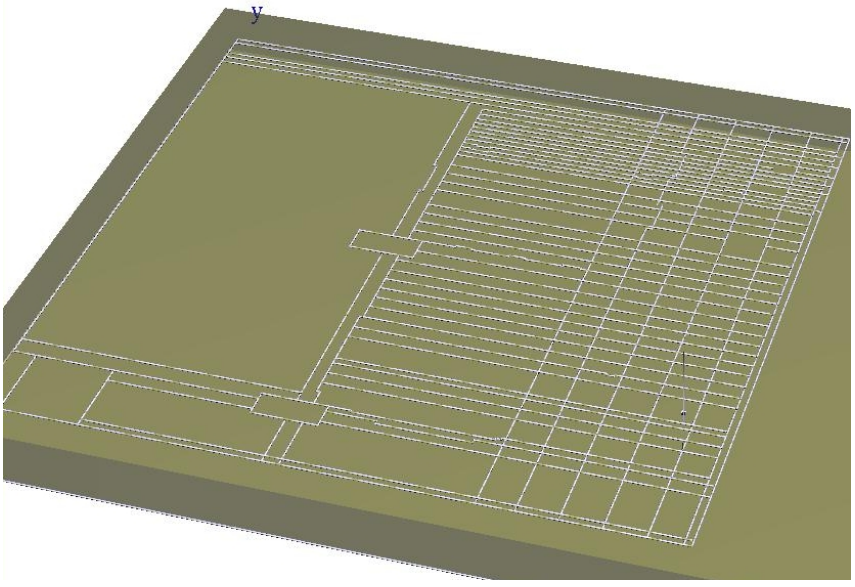

Figura 7.59: Configuração da terceira simulação da malha da subestação.

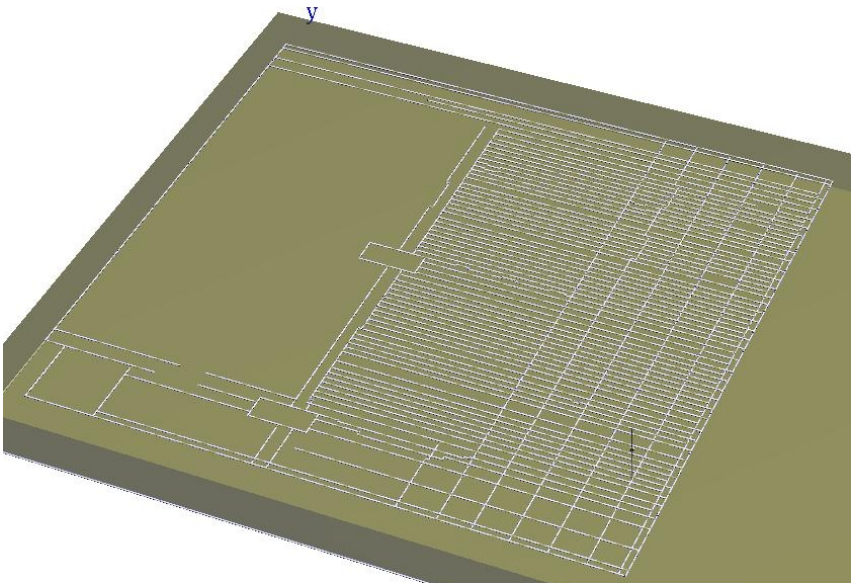

Figura 7.60: Configuração da quarta simulação da malha da subestação.

que pode representar perigo aos usuários em uma situação de falta. Vale ressaltar que, em todas as situações, o solo foi representado por um meio com os seguintes parâmetros: $\sigma = 0{,}002$ S/m, $\epsilon_r = 50$ e $\mu_r = \mu_0$.

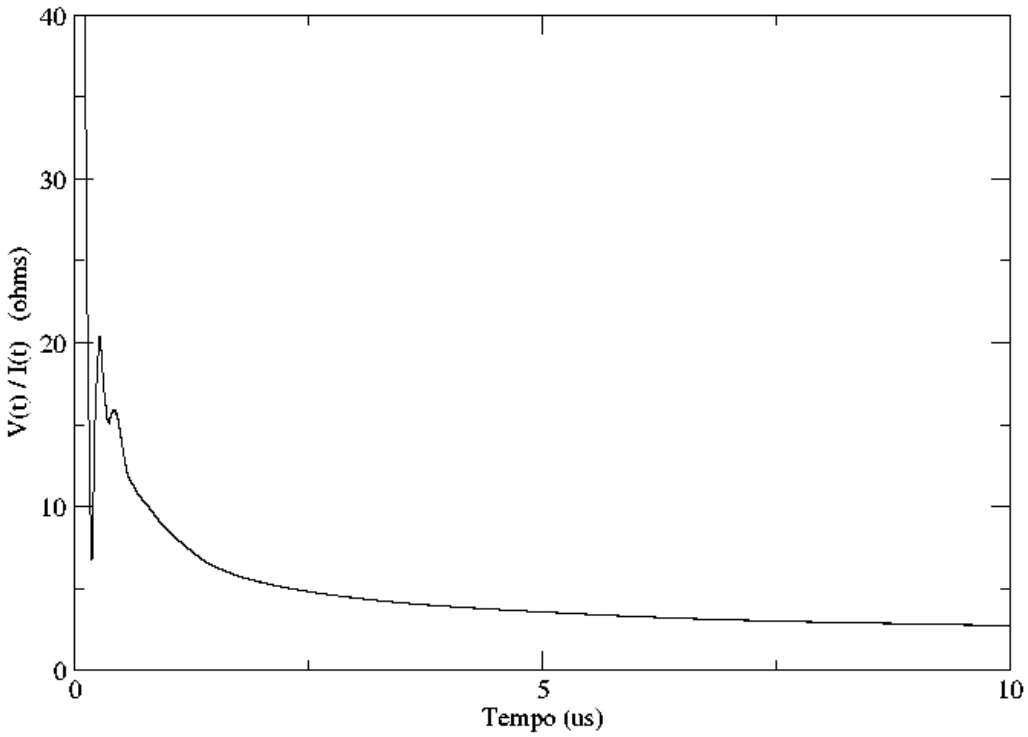

Figura 7.61: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a primeira simulação da malha da subestação.

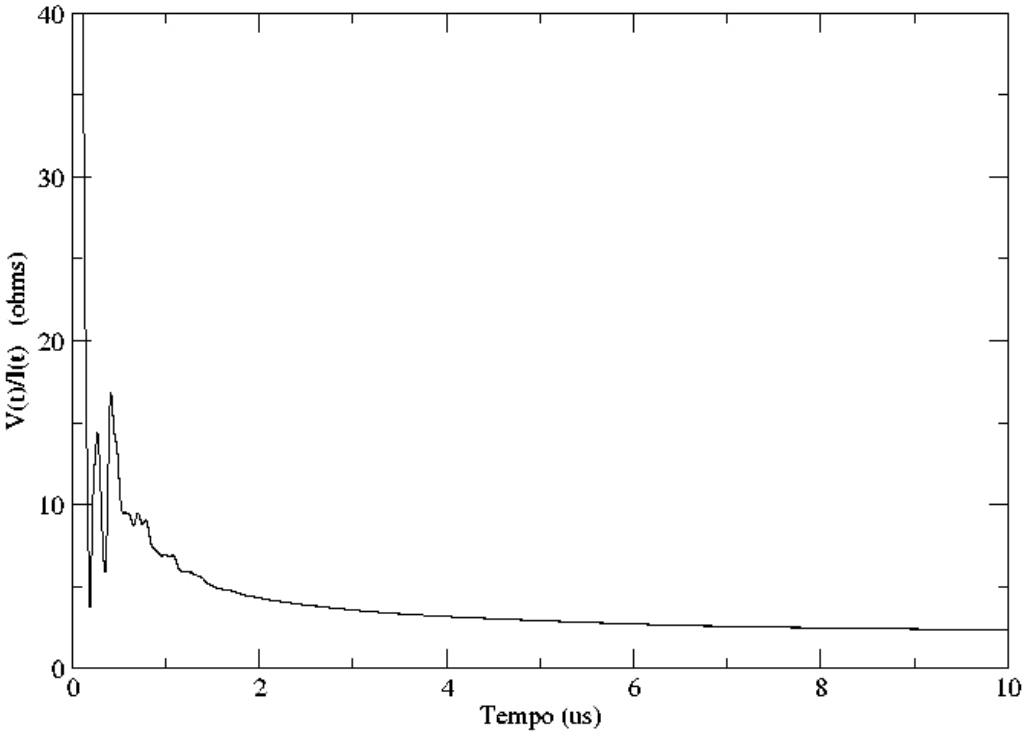

Figura 7.62: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a segunda simulação da malha da subestação.

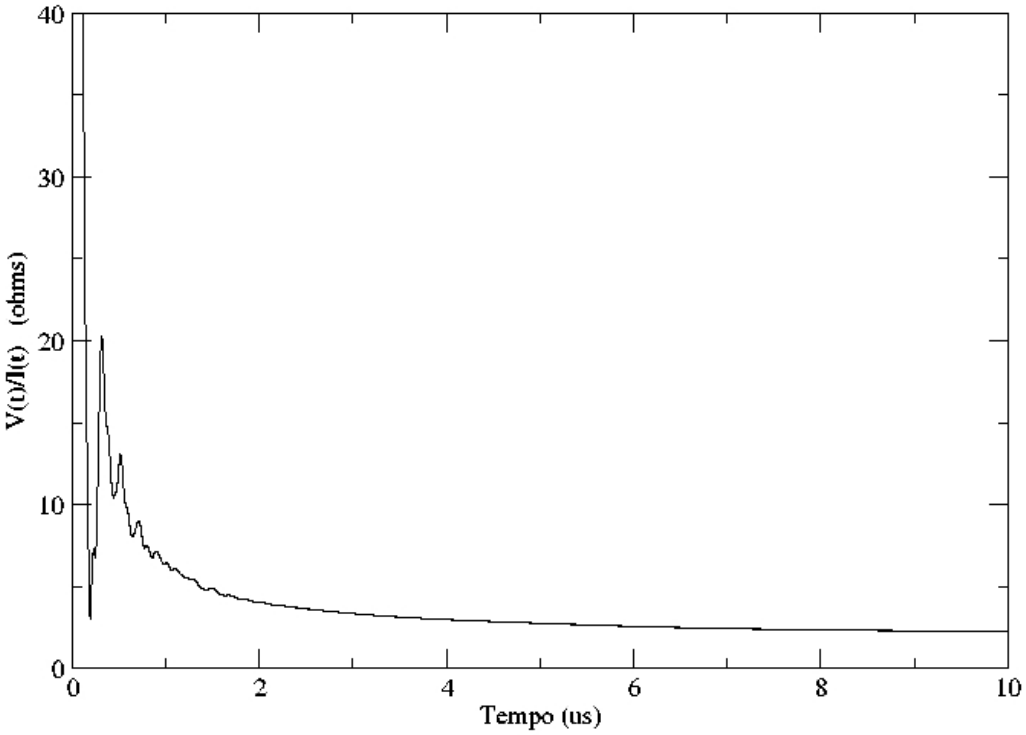

Figura 7.63: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a terceira simulação da malha da subestação.

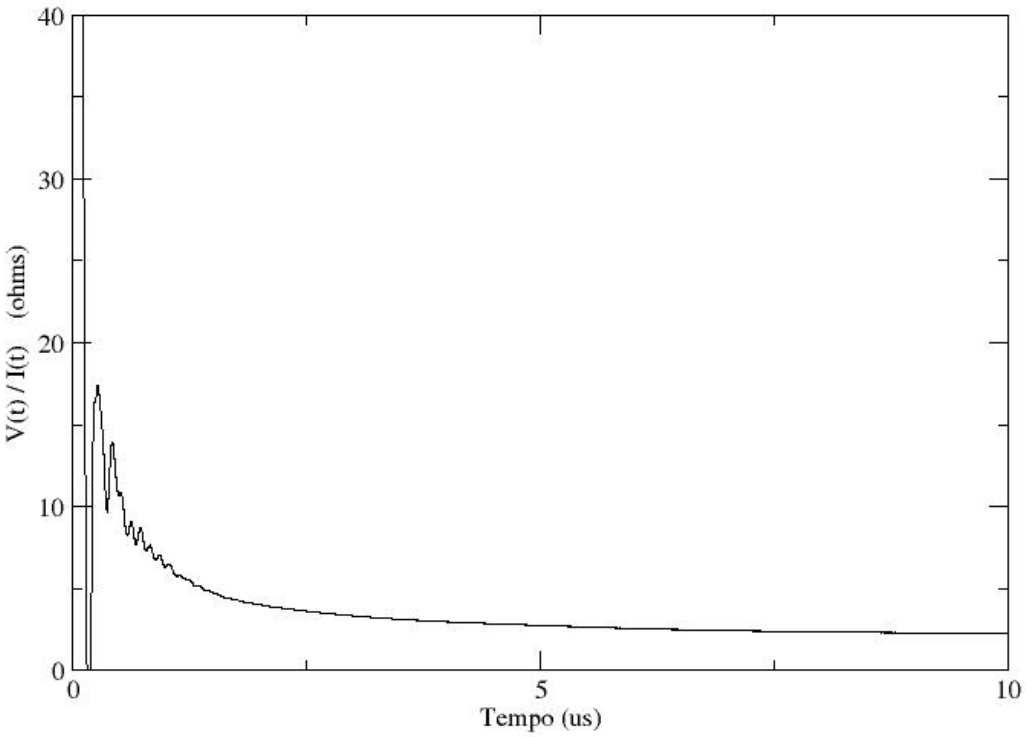

Figura 7.64: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a quarta simulação da malha da subestação.

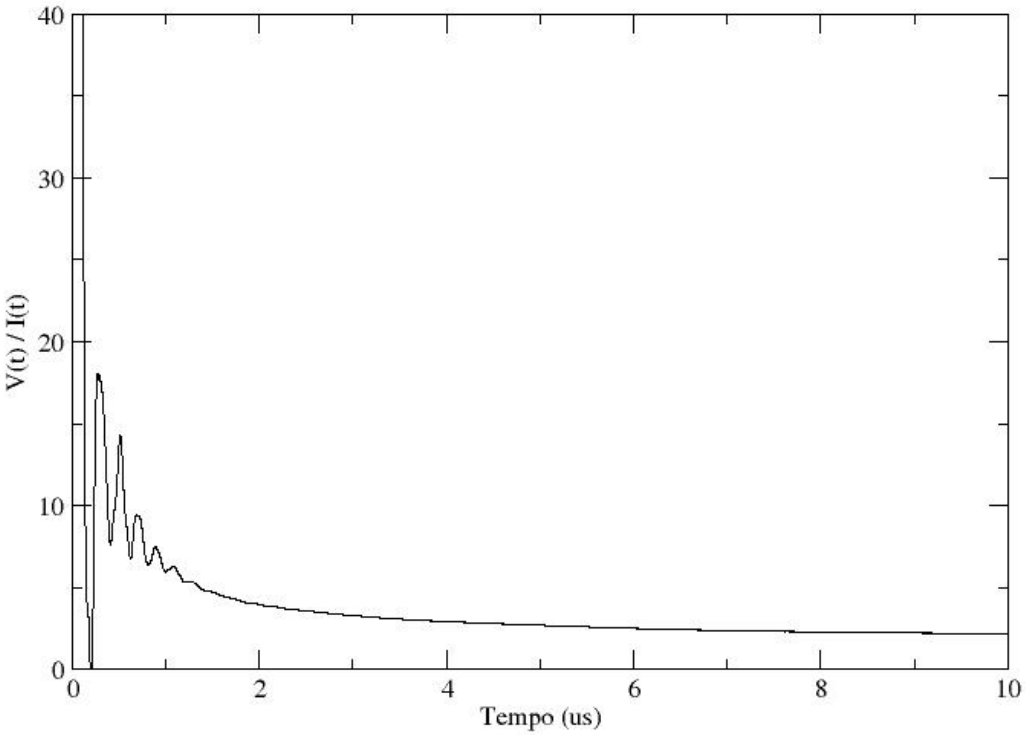

Figura 7.65: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a simulação da malha da subestação (completa).

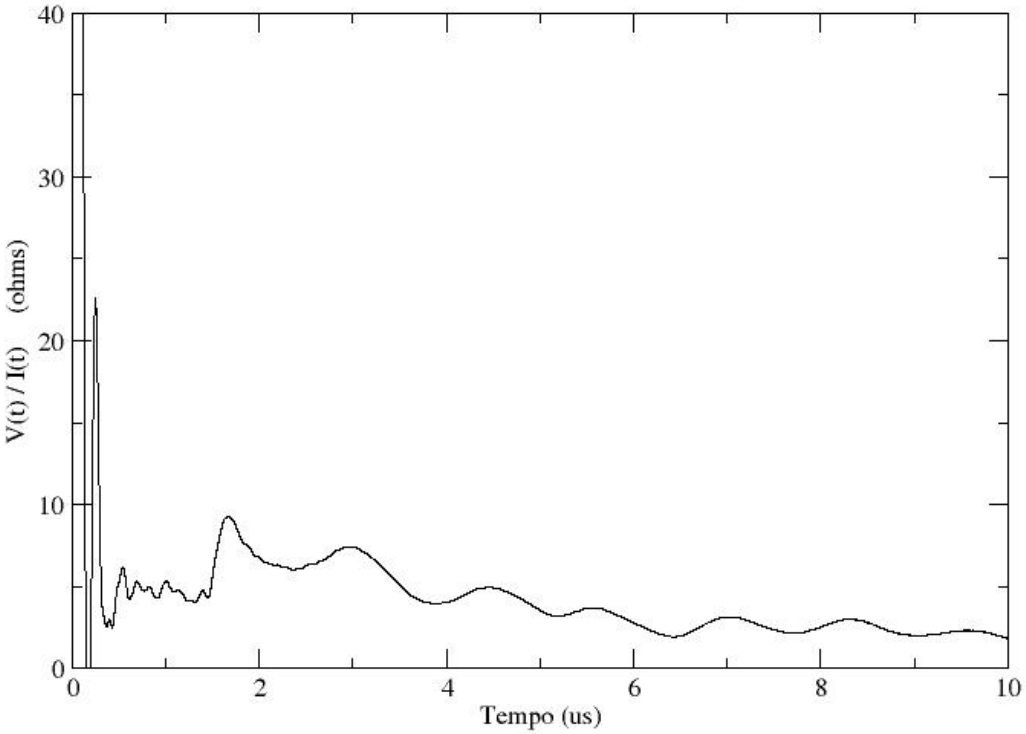

Figura 7.66: Relação $V(t)/I(t)$ obtida para a simulação da subestação (completa).

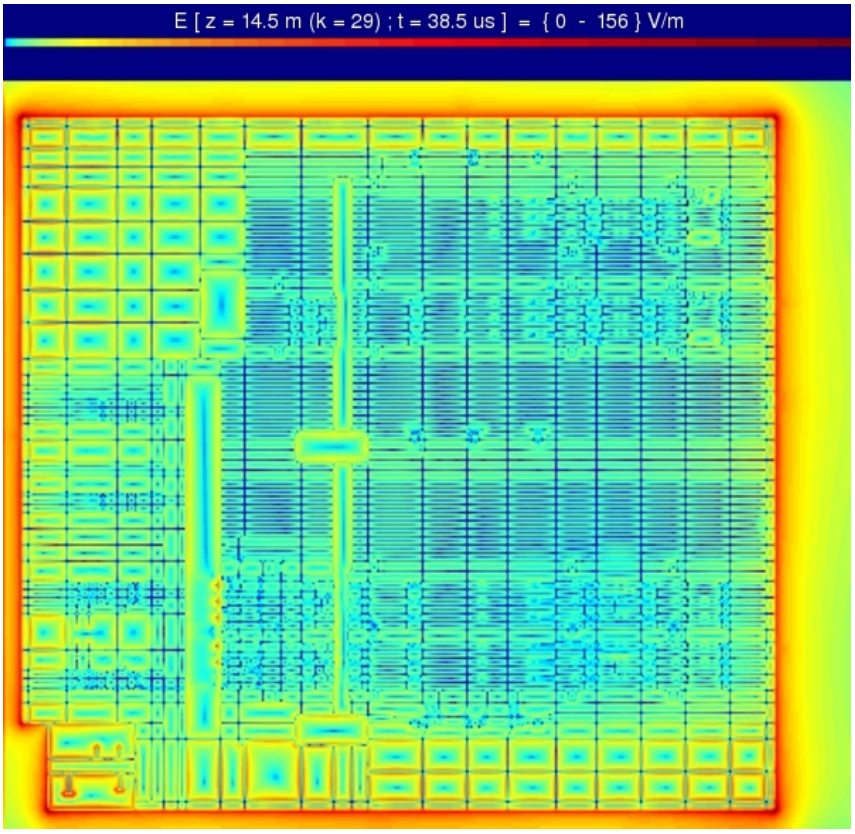

Figura 7.67: Distribuição do Campo Elétrico no plano da Malha da Subestação.

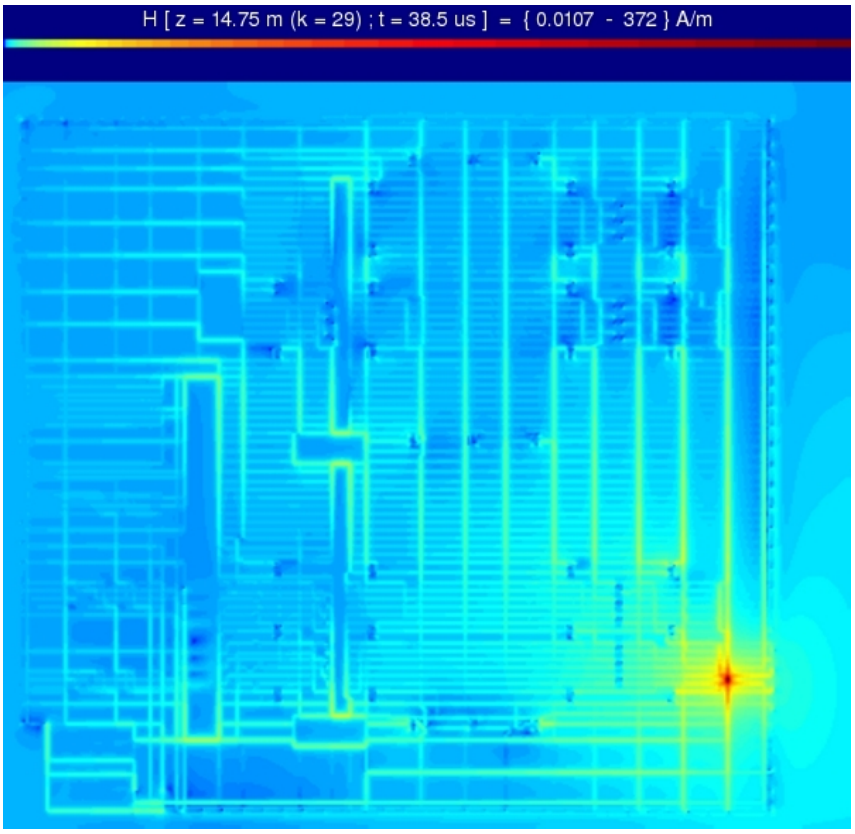

Figura 7.68: Distribuição do Campo Magnético no plano da Malha da Subestação.

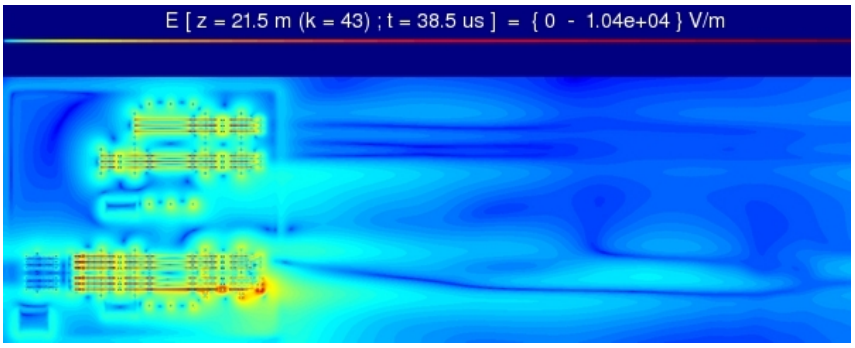

Figura 7.69: Distribuição do Campo Elétrico no plano das Linha de Alta Tensão.

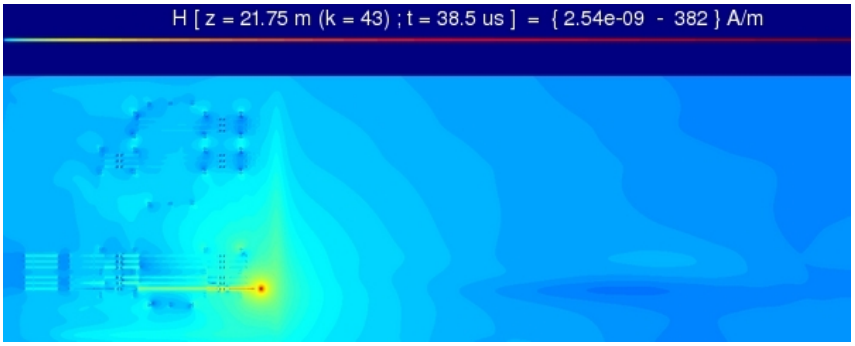

Figura 7.70: Distribuição do Campo Magnético no plano das Linha de Alta Tensão.

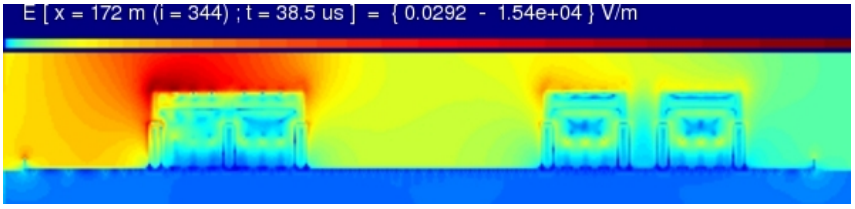

Figura 7.71: Distribuição do Campo Elétrico no plano do Pára-Raio.

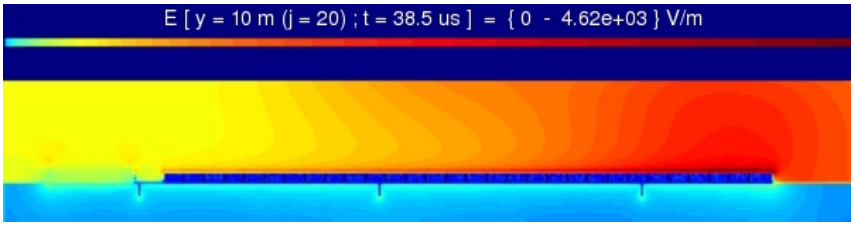

Figura 7.72: Distribuição do Campo Elétrico no plano da cerca de proteção.

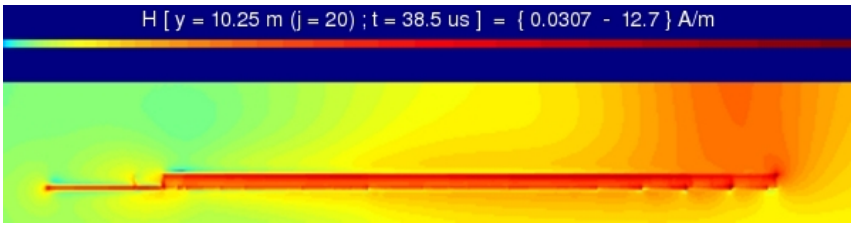

Figura 7.73: Distribuição do Campo Magnético no plano da cerca de proteção.

Por fim, a Fig. 7.74 mostra a distribuição espacial unidimensional de potencial, direcionada paralelamente a direção y (x = 184,5m), na superfície da terra, que passa pelo ponto onde a corrente de excitação é injetada (y = 40m). Percebe-se claramente o grande desnível de potencial presente em torno do ponto de injeção de injeção de corrente (que está conectado eletricamente com a malha de terra), tal como descrito em [104]. Vale ressaltar que o nível de corrente aplicado aqui é da ordem de Ampères, e que o potencial cresce linearmente com a corrente, sendo que correntes da ordem de kiloampères produziriam diferenças de potencial da ordem de kilovolts.

Vale ressaltar que esse tipo de elevação de potencial, como a mostrada pela Fig. 7.74 não ocorre somente no ponto de injeção de corrente. De fato, todo o elemento conectado à malha provoca esse tipo de efeito, tal como ilustra a Fig. 7.75. Nela, é mostrada a distribuição linear de potencial na superfície do solo para x = 99 m (Fig. 7.75 (c)), conforme indicado pelas Figs. 7.75 (a) e (b). Tal efeito, também de acordo com [104], ocorre devido ao fluxo vertical de corrente entre a malha e o elemento conectado. Assim, nas Figs. 7.74 e 7.75 (c), notam-se também pronunciados desniveis de potencial nas bordas da malha, que também representam riscos às pessoas.

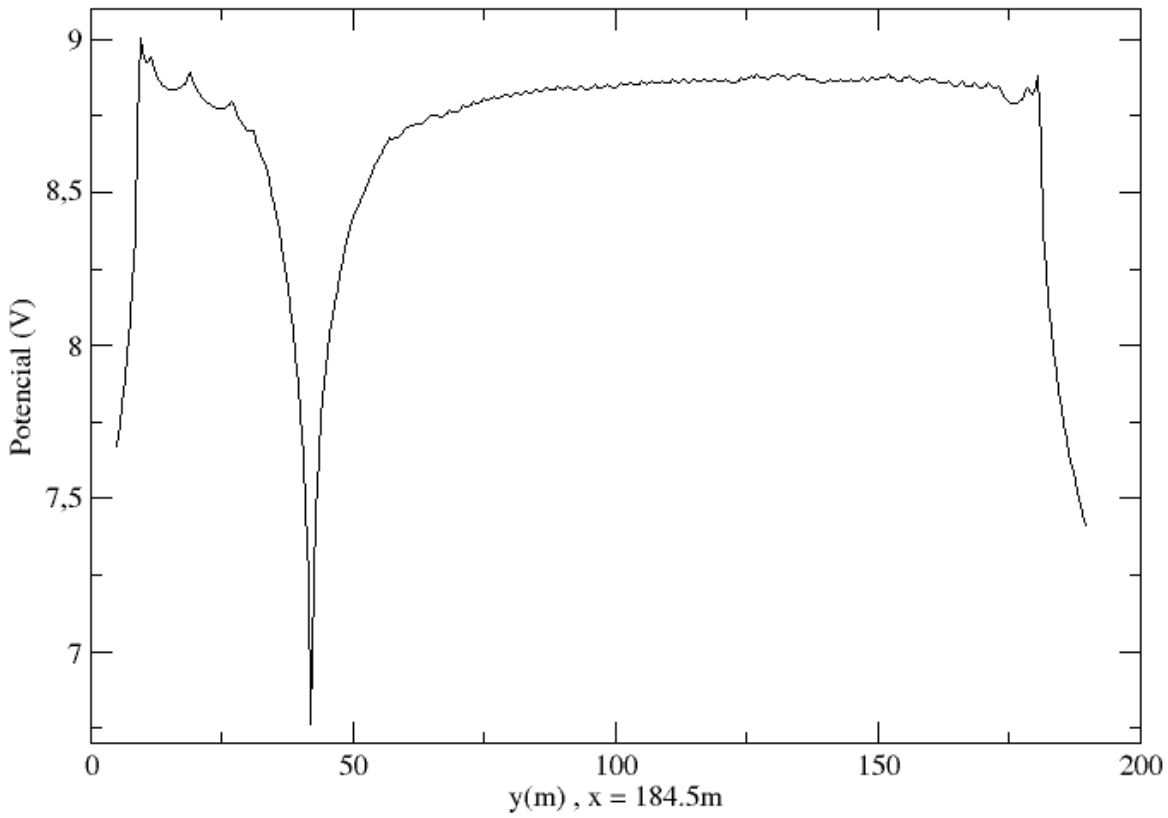

Figura 7.74: Potencial ao longo da reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto de injeção de corrente ($x = 184{,}5$ m, $t = 38{,}5$ μs).

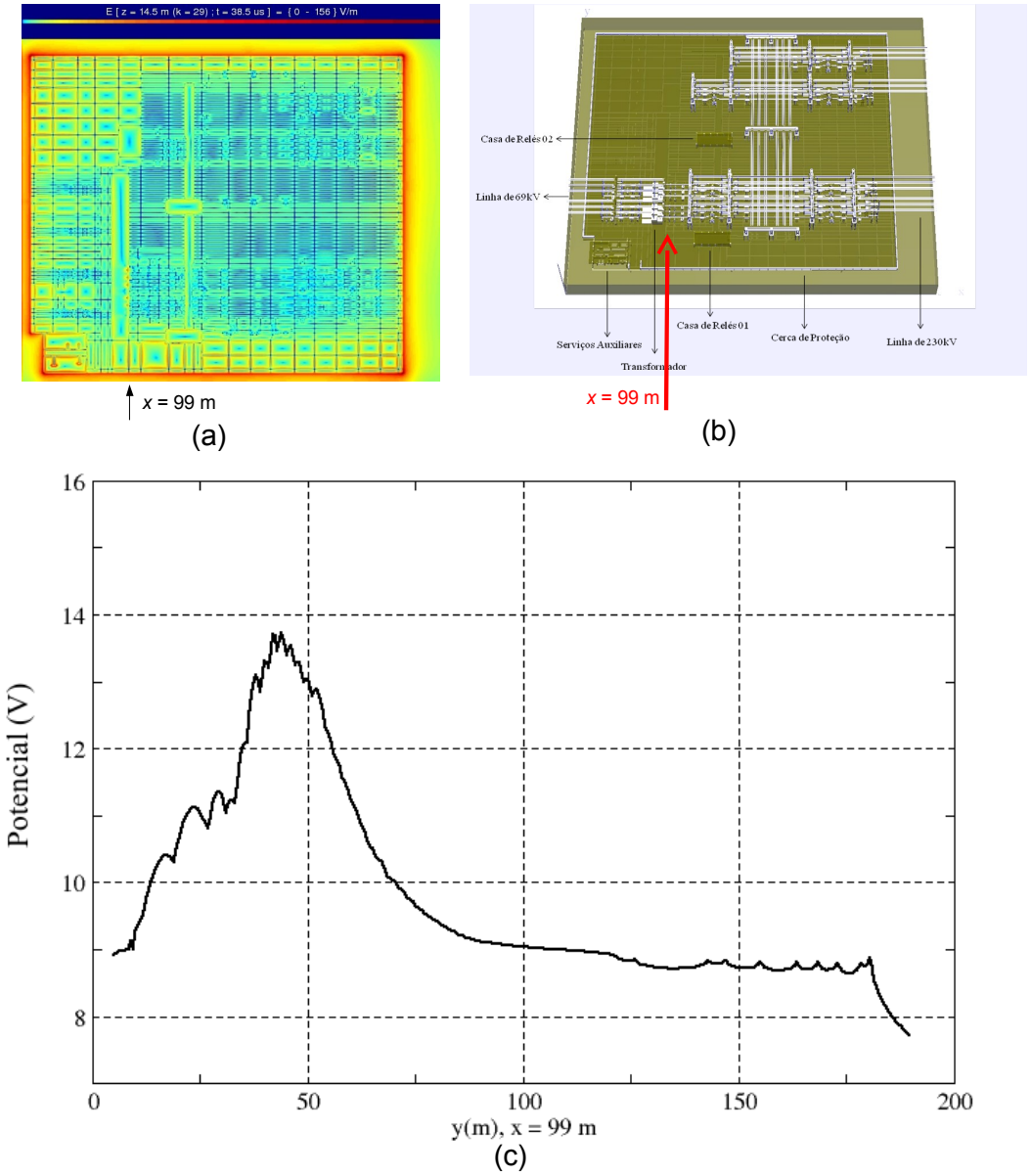

Figura 7.75: Potencial ao longo da reta paralela ao eixo y na superfície do solo (x = 99,0 m, t = 38,5 μs) (a) e (b) localização e (c) curva linear de potencial.

Capítulo 8

Considerações Finais

Neste trabalho, foi desenvolvida uma nova metodologia para a análise de sistemas de aterramento solucionando-se as Equações de Maxwell no domínio do tempo em Coordenadas Gerais pelo método LN-FDTD. A vantagem desta formulação é que se trata de uma solução de onda completa, com a qual os fenômenos de reflexão, refração e difração são todos considerados implicitamente, o que implica em soluções bastante realistas (melhor representação dos contornos). Como os problemas de aterramento são problemas abertos, há a necessidade de se restringir a região de análise, o que é feito aqui através da técnica de camadas perfeitamente casadas uniaxiais (técnica UPML). A formulação UPML em Coordenadas Gerais foi estendida para truncar meios condutivos como o solo (LN-UPML), viabilizando simulações de sistemas de aterramento neste sistema de coordenadas. Foi mostrado também como realizar o cálculo de tensões e correntes (além da implementação da fonte) em coordenadas gerais de forma a garantir a consistência das grandezas físicas.

Foi demonstrado que a técnica LN-FDTD pode ser aplicada para a solução deste tipo de problema (aterramento) através da simulação de estruturas simples, cuja solução é conhecida. Foram simulados: 1) eletrodo horizontal, para o qual inclinações em relação ao eixo x foram implementadas e resultados idênticos aos gerados pelo método FDTD convencional foram obtidos; 2) um prato perfeitamente circular enterrado foi simulado e excelente concordância com a Equação (7.2) foi obtida; 3) um eletrodo semi-esférico.

Para a simulação do eletrodo em prato (diâmetro de 5,5m), foram geradas cinco malhas com os seguintes números de pontos para representar o diâmetro do prato: 10, 15, 20, 30 e 40. Foi observado que a partir de vinte pontos, os resultados obtidos não sofreram mudanças significativas, de forma que a convergência do método foi assegurada; 4) o exemplo das hastes dispostas em círculos evidencia a importância da formulação proposta para se analisar transitórios eletromagnéticos e o regime estacionário para estruturas de aterramento: o método LN-FDTD associado à formulação LN-UPML.

Foi implementada uma Interface Gráfica Para Usuários (LANE SAGS) capaz de simplificar o uso do *software* desenvolvido. Com a interface, é possível construir estruturas com relativa facilidade, sem o conhecimento profundo do método FDTD. O ambiente possui uma função de visualização da estrutura desenvolvida em OpenGL que aumenta ainda mais a versatilidade do *software*. Técnicas de processamento paralelo automatizado foram desenvolvidas para um número indeterminado de máquinas, à escolha do usuário. Alguns exemplos complexos de aplicação foram mostrados, tais como uma subestação elétrica, uma malha de aterramento na presença de um prédio além de um modelo piramidal de aterramento, deixando clara a potencialidade do *software* para a análise de estruturas complexas.

Utilização da resposta transitória de estruturas de aterramento danificadas foram utilizadas para a localização do dano a partir de uma nova técnica desenvolvida baseada no uso de Redes Neurais Artificiais. Foi mostrado que a configuração sugerida, tanto para a coleta dos dados (correntes transitórias) quanto para a sua aplicação (utilizando duas Redes Neurais), responde da maneira esperada. Isso se deve ao fato de que as classes definidas para cada rede são linearmente separáveis, o que garante a boa performance das Redes Neurais.

Tendo em vista a grande generalidade do métodos métodos FDTD e LN-FDTD e a flexibilidade das RNAs, sugerem-se para trabalhos futuros:

- análise de estruturas complexas, como aterramento em torres na presença de linhas

de transmissão ;

- desenvolver técnicas de detecção de falhas considerando subtrações de partes do aterramento de torres utilizando as RNAs ;
- implementar o método LN-FDTD utilizando malhas não estruturadas, de forma a aumentar a flexibilidade de construção de malhas para estruturas complexas ;
- desenvolver um gerador automático de malhas em 3D.
- implementar melhorias na interface LANE SAGS, de forma que se torne totalmente automatizado, incluindo o processo de treinamento das RNAs ;
- realizar experimentos reais para validar o sistema de localização de falhas e levantar curvas transitórias para comparação com o método LN-FDTD.
- modelagem da ionização do solo ;
- complementar o modelo virtual da subestação, com energização das linhas e inclusão de circuitos que desempenhem as funções desses elementos.
- implementar modelos *multiphysics*, que levem em conta efeitos causados por outros fenômenos físicos simultâneos, como, por exemplo, o térmico, computando a sua contribuição nas Equações de Maxwell e vice-versa.

Apêndice A

UPML em Coordenadas Retangulares

A.1 Física do Problema

Considere a Figura A.1, na qual há um meio isotrópico na região $z > 0$ (meio 1) e na região $z < 0$ há um meio uniaxialmente anisotrópico (meio 2), sobre o qual incide uma onda plana monocromática vinda do meio 1. O objetivo aqui é estudar as condições de propagação de maneira que a onda seja totalmente transmitida para o meio 2 e, ao mesmo tempo, atenuada por ele. A disposição dos campos mostrada na Figura A.1, sugere a denominação de modo TMy, pois o campo magnético não tem componente na direção y. Como está sendo considerada a incidência de uma onda plana, pode-se analisar este caso e combinar os resultados encontrados com os relativos ao modo TEy, obtendo-se assim a solução completa para uma incidência qualquer.

A.1.1 Meio Isotrópico (Meio 1)

No domínio da freqüência, as equações de Maxwell (2.7) e (2.8) são expressas por

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\vec{\mathbf{H}} \tag{A.1}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\vec{\mathbf{E}}, \tag{A.2}$$

nas quais ω define a freqüência da onda plana, $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$ são, respectivamente as transformadas de Fourier dos vetores intensidade de campo elétrico $\vec{E}$ e intensidade de campo magnético $\vec{H}$.

Para a região $z > 0$ (Figura A.1), da qual parte a onda plana incidente, há duas contribuições a considerar: a de incidência e a de reflexão. Assim, para o campo elétrico, pode-se escrever:

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \hat{y}E_o e^{-j\beta_x^i x + j\beta_z^i z} \tag{A.3}$$

e

$$\vec{\mathbf{E}}^r = \hat{y}\Gamma E_o e^{-j\beta_x^r x - j\beta_z^r z}, \tag{A.4}$$

onde Γ é o coeficiente de reflexão e E_o é a magnitude do campo elétrico incidente $\vec{\mathbf{E}}^i$. Como uma onda plana monocromática (uma componente de freqüência ω) está sendo considerada, na interface entre os meios ($z = 0$) deve ser satisfeita a condição de contorno $\beta_{x,z}^i = \beta_{x,z}^r$ (velocidade de fase igual em ambos os casos), pode-se dizer, então, que o campo elétrico total no meio 1 é dado por

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \hat{y}E_o(1 + \Gamma e^{-2j\beta_z^i z})e^{-j\beta_x^i x + j\beta_z^i z}. \tag{A.5}$$

Substituindo a equação (A.5) em (A.1), encontra-se o vetor intensidade de campo magnético para esta região, ou seja

$$\vec{\mathbf{H}}_1 = \left[\hat{x}\beta_z^i\left(1 - \Gamma e^{-2j\beta_z^i z}\right) + \hat{z}\beta_x^i\left(1 + \Gamma e^{-2j\beta_z^i z}\right)\right]\frac{E_o}{\omega\mu_1}e^{-j\beta_x^i x + j\beta_z^i z}. \tag{A.6}$$

Desta forma, as equações (A.5) e (A.6) caracterizam a propagação do modo TMy na região 1.

A.1.2 Meio Anisotrópico (Meio 2)

Considerando-se o meio 2 como anisotrópico, a relação entre o vetor densidade de fluxo elétrico $\vec{\mathbf{D}}^{\mathbf{a}}$ e o vetor intensidade de campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}}$ e a relação entre o vetor densidade

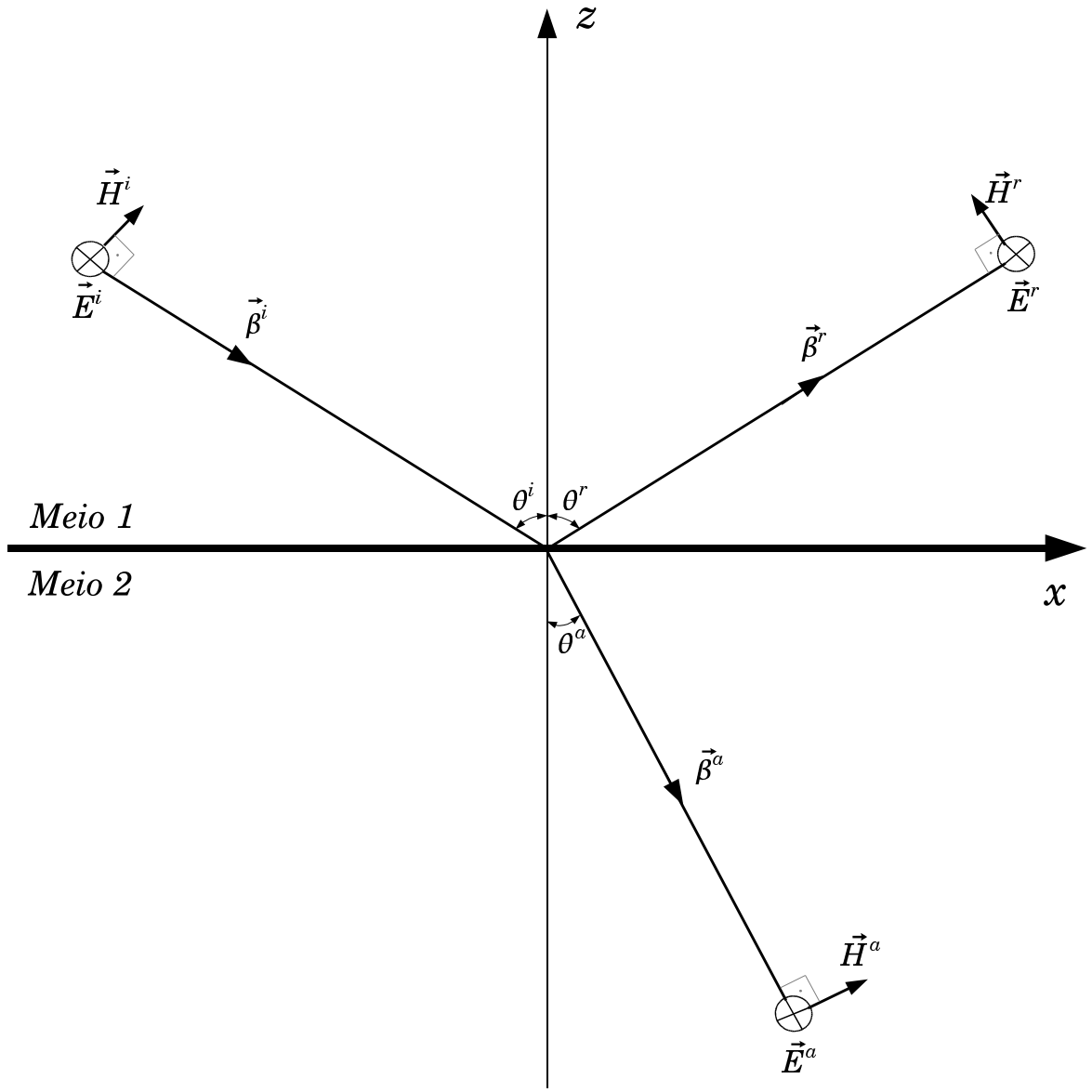

Figura A.1: Interface entre um meio isotrópico (Meio 1) e um meio uniaxialmente anisotrópico (Meio 2) para o modo TE (TMy).

de fluxo magnético $\vec{\mathbf{B}}^{\mathbf{a}}$ e o vetor intensidade de campo magnético $\vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}}$ são dadas agora, respectivamente, em função do tensor permissividade elétrica $[\epsilon]$ e do tensor permeabilidade magnética $[\mu]$. Assim,

$$\vec{\mathbf{D}}^{\mathbf{a}} = [\epsilon]\vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}} \tag{A.7}$$

e

$$\vec{\mathbf{B}}^{\mathbf{a}} = [\mu]\vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}}. \tag{A.8}$$

Ou seja, para meios materiais anisotrópicos, as equações de Maxwell no domínio da freqüência devem ser escritas na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}} = -j\omega[\mu]\vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} \tag{A.9}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} = j\omega[\epsilon]\vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}}, \tag{A.10}$$

Os tensores $[\epsilon]$ e $[\mu]$ são dados, para o caso geral de anisotropia biaxial, para o caso no qual os eixos ópticos coincidem com os eixos do sistema de coordenadas retangulares, por [74]

$$[\epsilon] = \epsilon \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \epsilon[\xi_1] \tag{A.11}$$

e

$$[\mu] = \mu \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \mu[\xi_2], \tag{A.12}$$

nas quais os elementos das matrizes $[\xi_1]$ (a, b e c) e $[\xi_2]$ (d, e e f) são complexos e adimensionais e determinam as características de propagação eletromagnética no material anisotrópico.

As equações (A.9) e (A.10) podem ser escritas em termos do vetor $\vec{\beta}^a$ (Figura A.1), que determina a direção de propagação no meio anisotrópico, pois uma onda plana está

sendo admitida. Dessa maneira, tais equações ficam, respectivamente, na forma

$$\vec{\beta}^a \times \vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}} = \omega\mu[\xi_2]\vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} \tag{A.13}$$

e

$$\vec{\beta}^a \times \vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} = -\omega\epsilon[\xi_1]\vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}}. \tag{A.14}$$

O desacoplamento dessas equações em termos do campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$ leva à equação de onda

$$\vec{\beta}^a \times \left([\mu]^{-1}\vec{\beta}^a \times \vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}}\right) + \omega^2[\epsilon]\vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}} = 0, \tag{A.15}$$

na qual $\vec{\beta}^a = \hat{x}\beta_x^a + \hat{z}\beta_z^a$ para o caso ilustrado pela Figura A.1.

Sem perda de generalidade, é considerado o caso da anisotropia uniaxial que a região de UPML (representada pelo meio 2 da Figura A.1) deve apresentar na direção z. Neste caso, os tensores $[\epsilon]$ e $[\mu]$ das equações (A.12) e (A.11) devem ser definidos por

$$[\epsilon] = \epsilon \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

e

$$[\mu] = \mu \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Para se determinar o vetor campo elétrico nesta região, a equação (A.15) deve ser solucionada. A maneira mais simples é o uso de notação matricial

$$\begin{bmatrix} \beta_x^a \\ 0 \\ \beta_z^a \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1/c & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_z^a E_y^a \\ \beta_z^a E_x^a - \beta_x^a E_z^a \\ \beta_x^a E_y^a \end{bmatrix} \right)$$
$$+\omega^2\epsilon \left(\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^a \\ E_y^a \\ E_z^a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{A.18}$$

Realizando-se todos os cálculos envolvidos em (A.18) e evidenciando-se as componentes E_x, E_y e E_z, obtém-se

$$\begin{bmatrix} k^2a-(\beta_z^a)^2/c & 0 & \beta_x^a\beta_z^a/c \\ 0 & k^2a-(\beta_x^a)^2/d-(\beta_z^a)^2/c & 0 \\ \beta_x^a\beta_z^a/c & 0 & k^2b-(\beta_x^a)^2/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^a \\ E_y^a \\ E_z^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(A.19)}$$

na qual $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

Para o modo sob análise (TMy), tem-se, a partir de (A.19)

$$\begin{bmatrix} k^2a-(\beta_z^a)^2/c & 0 & \beta_x^a\beta_z^a/c \\ 0 & k^2a-(\beta_x^a)^2/d-(\beta_z^a)^2/c & 0 \\ \beta_x^a\beta_z^a/c & 0 & k^2b-(\beta_x^a)^2/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_y^a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(A.20)}$$

de onde vem a equação de dispersão

$$k^2a-(\beta_x^a)^2/d-(\beta_z^a)^2/c=0. \quad \text{(A.21)}$$

Seguindo a mesma estratégia para o modo TEy, obtém-se, a partir da equação de onda para o campo magnético

$$\vec{\beta}^a \times \left([\epsilon]^{-1}\vec{\beta}^a \times \vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}}\right) + \omega^2[\mu]\vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} \quad \text{(A.22)}$$

a equação

$$\begin{bmatrix} k^2c-(\beta_z^a)^2/a & 0 & \beta_x^a\beta_z^a/a \\ 0 & k^2c-(\beta_x^a)^2/b-(\beta_z^a)^2/a & 0 \\ \beta_x^a\beta_z^a/a & 0 & k^2d-(\beta_x^a)^2/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_y^a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(A.23)}$$

da qual chega-se, de forma similar, à equação de dispersão

$$k^2c-(\beta_x^a)^2/b-(\beta_z^a)^2/a=0. \quad \text{(A.24)}$$

Para eliminar reflexões na interface entre o meio isotrópico correspondente à região de análise (meio 1) e o meio absorvente usado para truncagem do método FDTD (meio

2), calcula-se a seguir o coeficiente de reflexão e, a partir dele, avaliam-se as condições que garantam tal propriedade. Como a onda transmitida ao meio 2 também é TMy [7], pode-se escrever

$$\vec{\mathbf{E}}^a = \hat{y}\tau E_o e^{-j\beta_x^a x + j\beta_z^a z}, \tag{A.25}$$

na qual τ é o coeficiente de transmissão. A partir das equações (A.13) e (A.25), determina-se o vetor intensidade de campo magnético ($\vec{\mathbf{H}}^a$)

$$\vec{\mathbf{H}}^a = \hat{x}\frac{\beta_x^a \tau E_o}{\omega\mu_2 c} e^{-j\beta_x^a x + j\beta_z^a z} + \hat{z}\frac{\beta_z^a \tau E_o}{\omega\mu_2 d} e^{-j\beta_x^a x + j\beta_z^a z}. \tag{A.26}$$

Na interface entre os meios 1 e 2 ($z = 0$), é necessário que as componentes tangenciais tanto do campo elétrico quanto do campo magnético sejam contínuas (mesma posição no espaço). Para o campo elétrico, tem-se

$$E_y^a = E_y^i + E_y^r, \tag{A.27}$$

resultando, a partir das equações (A.3), (A.4) e (A.25), em

$$\tau e^{-j\beta_x^a x} = e^{-j\beta_x^i x} + \Gamma e^{-j\beta_x^r x}. \tag{A.28}$$

Como ao longo da interface entre os meios ($z = 0$) as ondas dos meios 1 e 2 se propagam com a mesma velocidade,

$$\beta_x^i = \beta_x^r = \beta_x^a, \tag{A.29}$$

o que resulta na seguinte equação

$$\tau = 1 + \Gamma. \tag{A.30}$$

Procedendo de maneira idêntica para a componente x do campo magnético (tangencial ao plano $z = 0$), chega-se, a partir de (A.6) e (A.26), a

$$\frac{\beta_z^i}{\mu_1}(1 - \Gamma) = \frac{\beta_z^a}{\mu_2 c}\tau. \tag{A.31}$$

Observando que, para haver transmissão total de potência para o meio 2, as impedâncias dos meios devem ser iguais, então

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \tag{A.32}$$

e

$$\mu_1 = \mu_2 \tag{A.33}$$

devem ser satisfeitas. Assim, partindo das equações (A.31), (A.30) e (A.33), obtêm-se

$$\Gamma = \frac{\beta_z^i - \beta_z^a/c}{\beta_z^i + \beta_z^a/c} \tag{A.34}$$

e

$$\tau = \frac{2\beta_z^i}{\beta_z^i + \beta_z^a/c}. \tag{A.35}$$

Portanto, nota-se de (A.34), que para haver transmissão total,

$$\beta_z^a = c\beta_z^i. \tag{A.36}$$

Substituindo as equações (A.29) e (A.36) em (A.21), obtém-se

$$k^2 = \frac{([\beta_z^i]^2 c + [\beta_x^i]^2/d)}{a} \tag{A.37}$$

e notando que

$$k^2 = (\beta_x^i)^2 + (\beta_z^i)^2 \tag{A.38}$$

chega-se à condição

$$a = c = 1/d. \tag{A.39}$$

Partindo da equação (A.24) e trabalhando de maneira idêntica para o modo TEy, obtém-se a condição

$$a = c = 1/b. \tag{A.40}$$

Dessa maneira, para assegurar transmissão total, sem dependência da polarização, do ângulo de incidência e da freqüência da onda, o tensor $[\xi]_z$, que determina a anisotropia uniaxial na direção z, deve ter, portanto, a forma

$$[\xi]_z = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}. \tag{A.41}$$

A composição da anisotropia uniaxial nas direções x, y e z, caracterizando o caso geral das equações (A.11) e (A.12), é obtida [7] a partir do produto $[S] = [\xi]_x \cdot [\xi]_y \cdot [\xi]_z$. Na forma expandida, tem-se

$$[S] = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} \end{pmatrix}, \tag{A.42}$$

da qual resulta

$$[S] = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} s_y s_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} s_x s_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} s_x s_y \end{pmatrix}. \tag{A.43}$$

De acordo com o trabalho de Berenger [74], a ausência de reflexão na interface entre o meio isotrópico e a UPML (assim como no interior da região absorvente) é garantida para qualquer s_α ($\alpha = x, y$ ou z). Neste trabalho, foram adotadas as seguintes equações:

$$s_\alpha = 1 + \frac{\sigma_\alpha}{1 + j\omega\epsilon_o}, \tag{A.44}$$

que foram originalmente apresentadas em [74], onde σ_α representa a condutividade do meio para as direções x, y e z.

A.2 Obtenção das Equações em Diferenças Finitas

O próximo passo é transformar as equações

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{a}} = -j\omega\mu[S]\vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} \tag{A.45}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}^{\mathbf{a}} = j\omega\epsilon[S]\vec{\mathbf{E}}^{a} \tag{A.46}$$

para o domínio do tempo. Isso pode ser feito definindo-se as seguintes relações constitutivas [7]

$$\mathbf{B}^{\mathbf{a}}{}_x = \mu \left(\frac{s_y}{s_x} \mathbf{H}^{\mathbf{a}}{}_x \right), \tag{A.47}$$

$$\mathbf{B^a}_y = \mu \left(\frac{s_z}{s_y} \mathbf{H^a}_y \right), \tag{A.48}$$

$$\mathbf{B^a}_z = \mu \left(\frac{s_x}{s_z} \mathbf{H^a}_z \right), \tag{A.49}$$

$$\mathbf{D^a}_x = \epsilon \left(\frac{s_y}{s_x} \mathbf{E^a}_x \right), \tag{A.50}$$

$$\mathbf{D^a}_y = \epsilon \left(\frac{s_z}{s_y} \mathbf{E^a}_y \right), \tag{A.51}$$

$$\mathbf{D^a}_z = \epsilon \left(\frac{s_x}{s_z} \mathbf{E^a}_z \right). \tag{A.52}$$

A utilização dessas relações permite expressar as equações (A.45) e (A.46) diretamente no domínio temporal em diferenças finitas e, portanto, extingue a necessidade da realização de várias operações convolutivas (computacionalmente intensivas) entre o tensor $[S]$ e os vetores de campo que surgem devido a substituição direta de (A.44) em (A.45) e em (A.46).

Assim, para a obtenção das equações de atualização para a densidade de fluxo elétrico $\vec{D}^a$, no domínio do tempo, para a região de UPML, parte-se da equação de Ampère no domínio da freqüência (A.46), da equação do tensor $[S]$ (A.43) e das relações auxiliares (A.50) a (A.52), obtendo-se por substituição

$$\begin{bmatrix} \partial \mathbf{H}_z^a/\partial y - \partial \mathbf{H}_y^a/\partial z \\ \partial \mathbf{H}_x^a/\partial z - \partial \mathbf{H}_z^a/\partial x \\ \partial \mathbf{H}_y^a/\partial x - \partial \mathbf{H}_x^a/\partial y \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^a \\ \mathbf{D}_y^a \\ \mathbf{D}_z^a \end{bmatrix}. \tag{A.53}$$

Substituindo s_x, s_y e s_z de (A.44) em (A.53), verifica-se que

$$\begin{bmatrix} \partial \mathbf{H}_z^a/\partial y - \partial \mathbf{H}_y^a/\partial z \\ \partial \mathbf{H}_x^a/\partial z - \partial \mathbf{H}_z^a/\partial x \\ \partial \mathbf{H}_y^a/\partial x - \partial \mathbf{H}_x^a/\partial y \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^a \\ \mathbf{D}_y^a \\ \mathbf{D}_z^a \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^a \\ \mathbf{D}_y^a \\ \mathbf{D}_z^a \end{bmatrix}. \tag{A.54}$$

As equações descritas por (A.54) podem ser discretizadas de maneira usual utilizando-se a equação (3.7), no padrão de distribuição espacial das componentes da célula de Yee (Figura 3.1) e da intercalação temporal *leapfrog* (Figura 3.2). Tal procedimento resulta nas equações de atualização para o vetor $\vec{D}^a$.

As equações de atualização para o vetor $\vec{E}^a$ são obtidas a partir das equações (A.50) a (A.52), uma vez conhecidas as componentes do vetor $\vec{D}^a$. Por exemplo, para encontrar a componente x do campo elétrico $\vec{E}^a$, basta substituir a equação (A.44) na equação (A.50), transformá-la para o domínio do tempo e encontrar a componente E_x^a em função de D_x^a. Para este caso, encontra-se a equação

$$\epsilon\left[\frac{\partial E_x^a}{\partial t}+\frac{\sigma_y}{\epsilon}E_x^a\right]=\frac{\partial D_x^a}{\partial t}+\frac{\sigma_x}{\epsilon}D_x^a \tag{A.55}$$

que também pode ser facilmente representada por diferenças finitas.

Procedimentos idênticos devem ser seguidos para encontrar as demais equações de atualização para as componentes dos campos elétrico e magnético para a região de truncagem, o que resulta em

$$B_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}=B_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+\frac{\Delta_t}{1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}\left[\frac{E_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k+1)}^n-E_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)}{}^n}{\Delta_z}-\frac{E_{z\ (i,j+1,k+\frac{1}{2})}^n-E_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})}^n}{\Delta_y}\right], \tag{A.56}$$

$$H_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}=H_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_y\Delta t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+\frac{1}{\mu_o(1+\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o})}\left[B_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}\right)-B_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}\right)\right], \tag{A.57}$$

$$B_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}=B_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+\frac{\Delta_t}{1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}\left[\frac{E_{z\ (i+1,j,k+\frac{1}{2})}^n-E_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})}^n}{\Delta_x}-\frac{E_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k+1)}^n-E_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta_z}\right], \tag{A.58}$$

$$H_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}=H_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+\frac{1}{\mu_o(1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o})}\left[B_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}\right)-B_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}\right)\right], \tag{A.59}$$

$$B^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} = B^{n-\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} \left(\frac{1-\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+ \frac{\Delta_t}{1+\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}} \left[\frac{E^n_{y\ (i+\frac{1}{2},j+1,k)} - E^n_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}}{\Delta_y} - \frac{E^n_{y\ (i+1,j+\frac{1}{2},k)} - E^n_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta_x}\right], \tag{A.60}$$

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} = H^{n-\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} \left(\frac{1-\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+ \frac{1}{\mu_o(1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o})} \left[B^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}\left(1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}\right) - B^{n-\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}\left(1-\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}\right)\right], \tag{A.61}$$

$$D^{n+1}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)} = D^{n}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)} \left(\frac{1-\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+ \frac{\Delta_t}{1+\frac{\sigma_z\Delta_t}{2\epsilon_o}} \left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}}{\Delta_y} - \frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}}{\Delta_z}\right], \tag{A.62}$$

$$E^{n+1}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)} = E^{n-1}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)} \left(\frac{1-\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+ \frac{1}{\epsilon_o\epsilon_r(1+\frac{\sigma_y\Delta_t}{2\epsilon_o})} \left[D^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}\left(1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}\right) - D^{n-\frac{1}{2}}_{x\ (i+\frac{1}{2},j,k)}\left(1-\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}\right)\right], \tag{A.63}$$

$$D^{n+1}_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)} = D^{n}_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)} \left(\frac{1-\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}{1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}}\right)$$
$$+ \frac{\Delta_t}{1+\frac{\sigma_x\Delta_t}{2\epsilon_o}} \left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{\Delta_z} - \frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - H^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta_x}\right], \tag{A.64}$$

$$E^{n+1}_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)} = E^{n-1}_{y\ (i,j+\frac{1}{2},k)} \left(\frac{1 - \frac{\sigma_z \Delta_t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_z \Delta_t}{2\epsilon_o}} \right)$$
$$+ \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_r (1 + \frac{\sigma_z \Delta_t}{2\epsilon_o})} \left[D^{n+\frac{1}{2}}_{x\ i,j+\frac{1}{2},k)} \left(1 + \frac{\sigma_y \Delta_t}{2\epsilon_o} \right) - D^{n-\frac{1}{2}}_{x\ i,j+\frac{1}{2},k)} \left(1 - \frac{\sigma_y \Delta_t}{2\epsilon_o} \right) \right], \quad \text{(A.65)}$$

$$D^{n+1}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} = D^{n}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} \left(\frac{1 - \frac{\sigma_y \Delta_t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_y \Delta_t}{2\epsilon_o}} \right)$$
$$+ \frac{\Delta_t}{1 + \frac{\sigma_y \Delta_t}{2\epsilon_o}} \left[\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{y\ (i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}}{\Delta_x} - \frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - H^{n+\frac{1}{2}}_{x\ (i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}}{\Delta_y} \right], \quad \text{(A.66)}$$

$$E^{n+1}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} = E^{n-1}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} \left(\frac{1 - \frac{\sigma_x \Delta_t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_x \Delta_t}{2\epsilon_o}} \right)$$
$$+ \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_r (1 + \frac{\sigma_x \Delta_t}{2\epsilon_o})} \left[D^{n+\frac{1}{2}}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} \left(1 + \frac{\sigma_z \Delta_t}{2\epsilon_o} \right) - D^{n-\frac{1}{2}}_{z\ (i,j,k+\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{\sigma_z \Delta_t}{2\epsilon_o} \right) \right]. \quad \text{(A.67)}$$

É interessante notar que as equações (A.57)-(A.67) recaem nas equações de Maxwell (3.9)-(3.14) quando $\sigma_\alpha = 0$, de forma que (A.57)-(A.67) podem também ser usadas na região de análise. Porém, tal procedimento, apesar de simplificar a implementação computacional, requer consideravelmente mais tempo de processamento e não é recomendado.

Para concluir a formulação, devem ser conhecidas as funções σ_α ($\alpha = x$, y ou z) para cada componente dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$. São nessas funções que são introduzidas as características de anisotropia no meio absorverdor. Diferentemente da caracterização eletromagnética de meios isotrópicos, nos quais as equações (3.9) a (3.14) podem ser aplicadas sem qualquer preocupação com variações das características eletromagnéticas μ, ϵ ou σ dentro das células de Yee, a aplicação das equações (A.57) a (A.67) requer que sejam consideradas as características do meio para cada componente porque, na realidade, nenhuma dessas componentes está na posição (i, j, k). Isso fica claro ao observar a Figura 3.1. Por exemplo, a componente E_z da célula (i, j, k) está posicionada em $(i, j, k + \frac{1}{2})$. Isso quer dizer que a atenuação na direção z, para esta componente, será obtida de forma

diferente daquelas nas direções x (σ_x) e y (σ_y), para a mesma componente. Esta análise deve ser, portanto, realizada para cada uma das componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ em cada direção em que houver atenuação. Muitas proposições foram feitas para modelar as funções de condutividade σ para a UPML. A que obteve mais sucesso utiliza variações polinomiais de ordem m. Tais funções podem ser generalizadas por

$$\sigma_\alpha(i_\alpha)|_{E_\beta} = \frac{\left|i_\alpha - I_\alpha + \frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}\right|^m}{{n_c}^m}\sigma_{\alpha\max} \tag{A.68}$$

e

$$\sigma_\alpha(i_\alpha)|_{H_\beta} = \frac{\left|i_\alpha - I_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\delta}_{\alpha,\beta}\right|^m}{{n_c}^m}\sigma_{\alpha\max} \tag{A.69}$$

nas quais

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, \text{se } \alpha = \beta \\ 0, \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{A.70}$$

$$\bar{\delta}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0, \text{se } \alpha = \beta \\ 1, \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{A.71}$$

$\alpha = i, j$ ou k, $\beta = i, j$ ou k, i_α é o índice da célula atual ($i_\alpha = i, j$ ou k de acordo com α), I_α é a célula de interface entre a região de análise e a UPML na direção α, m é a ordem do polinômio σ_α (usualmente $m = 4$), $\sigma_{\alpha\max}$ é o máximo valor da condutividade σ_α, que deve ser atribuído à última célula da UPML na direção α e n_c é o número de camadas (células) usadas para a UPML (dez camadas foram utilizadas). A notação $\sigma_\alpha(i_\alpha)|_{A_\beta}$ representa a condutividade σ_α na direção α para as componentes do campo elétrico ($A = E$) ou para as componentes do campo magnético ($A = H$).

Intuitivamente, o valor de $\sigma_{\max}$ deve ser o maior possível para a dissipação total de energia ao fim da região de UPML. Todavia, magnitudes extremamente altas para este parâmetro depreciam a performance da UPML devido a erros que surgem com a discretização por diferenças finitas [7]. O valor ótimo de $\sigma_{\max}$ que satisfaz de maneira equilibrada as duas exigências citadas é dado por

$$\sigma_{\alpha\max} = \frac{1+m}{150\pi\Delta_\alpha}. \tag{A.72}$$

O valor indicado pela equação (A.72) tem se mostrado bastante eficiente em vários tipos de problemas de espalhamento analisados por FDTD.

Referências Bibliográficas

[1] J. C. Maxwell, "A dynamical theory of the electromagnetic field," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, pp. 459–512, 1864.

[2] K. Tanabe, "Novel method for analyzing the transient behavior of grounding systems based on the finite-difference time-domain method," *Power Engineering Review*, vol. 21, no. 9, pp. 1128–1132, 2001.

[3] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.

[4] R. Holland, "Finite-difference solution of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates," *IEEE Trans. Nuclear Science*, vol. 30, pp. 4589–4591, 1983.

[5] K. K. Mei, A. Cangellaris, and D. J. Angelakos, "Conformal time domain finite-difference time-domain method," *Radio Science*, vol. 19, pp. 1145–1147, 1984.

[6] J. F. Lee, R. Palendech, and R. Mittra, "Modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, pp. 346–352, 1992.

[7] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics, The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed. Artech House Inc., 2005.

[8] Z. Sacks, D. Kingsland, R. Lee, and J. Lee, "A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 43, pp. 1460–1463, 1995.

[9] R. P. Voroney, *The Soil Habitat in Soil Microbiology, Ecology and Biochemistry.* Eldor A. Paul, 2006.

[10] S. S. D. Staff, *Soil Survey Manual.* Soil Conservation Service. U.S. Department of Agriculture Handbook 18, 1993.

[11] I. F. Gonos, A. Moronis, and I. Stathopulos, "Variation of soil resistivity and ground resistance during the year," in *28th International Conference on Lightning Protection (ICLP)*, Kanazawa, Ishikawa, Japan, 2006, pp. 740–744.

[12] IEEE, *IEEE Standard 142: IEEE Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems (IEEE Green Book).* The Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2007.

[13] S. Visacro Filho, *Aterramentos Elétricos.* Artliber Editora Ltda, 2005.

[14] G. Vijayaraghavan, M. Brown, and M. Barnes, *Practical Grounding, Bonding, Shielding and Surge Protection.* Elsevier, 2004.

[15] M. Whitney, F. D. Gardner, and L. J. Briggs, "An electrical method of determining the moisture content of areable soil," *U.S. Dept. Agr. Bul. 6*, 1897.

[16] F. D. Gardner, "The electrical method of moisture determination in soils: results and modifications in 1897," *U.S. Dept. Agr. Bul. 12*, 1898.

[17] L. J. Briggs, "Electrical instruments for determining the moisture, temperature and soluble salt content of soils," *U.S. Dept. Agr. Bul. 15*, 1899.

[18] F. Wenner, "A method of measuring earth resistivity," *Bulletin of National Bureau of Standards, Bulletin 12(4)*, vol. 12, no. 258, pp. 478–496, 1916.

[19] R. D. Barker, "Depth of investigation of collinear symmetrical four-electrode arrays," *Geophysics*, vol. 54, pp. 1031–1037, 1989.

[20] G. Kindermann, *Aterramento Eletrico*. Sagra Luzzatto, 1998.

[21] E. S. Souza Júnior, "Simulação, em Ambiente Computacional, do Método de Wenner e Obtenção da Resistência de um Sistema de Aterramento Usando FDTD," Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará / PPGEE, Setembro 2007.

[22] E. S. Souza Júnior, Rodrigo M. S. de Oliveira and Carlos L. S. S. Sobrinho, "Development of a computational environment for simulating the wenner's method and ground stratification," in *Ground'06*, Maceió, Brasil, 2006.

[23] I. F. Gonos and I. A. Stathopulos, "Estimation of multi-layer soil parameters using genetic algorithms," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, pp. 100–106, January 2005.

[24] V. Miranda and N. Fonseca, "Epso: best-of-two-worlds meta-heuristic applied to power system problems," in *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Honolulu, Hawaii, USA, 2002, pp. 241–244.

[25] P. Ji, J. Lee, K. Shin, J. Lim, and S. Kim, "Development of the ANN for the Estimation of Earth Parameter and Equivalent Resistivity," *KIEE International Transactions on Power Engineering*, vol. 5-A, pp. 350–356, 2005.

[26] L. B. Valdes, "Measurement of the properties of starting materials," in *Transistor Technology*, New York: Western Electric Co., 1952.

[27] W. R. Runyan and T. J. Shaffner, *Semiconductor Measurements and Instrumentation*. McGraw-Hill, 1998.

[28] V. A. Rakov, "Lightning protection of structures and personal safety," in *2000 Int. Lightning Detection Conf.*, Tucson, USA, 2000, pp. 7–8.

[29] J. Schoene, M. Uman, V. Rakov, A. Mata, K. Rambo, J. Jerauld, D. Jordan, and G. Schnetzer, "Direct Lightning Strikes to Test Power Distribution Lines-Part I: Experiment and Overall Results," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 22, pp. 2236–2244, 2007.

[30] J. Schoene, M.A. Uman, V.A. Rakov, A.G. Mata, K.J. Rambo, J. Jerauld, D.M. Jordan and G.H. Schnetzer, "Direct Lightning Strikes to Test Power Distribution Lines-Part II: Measured and Modeled Current Division Among Multiple Arresters and Grounds," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 22, pp. 2245–2253, 2007.

[31] V. A. Rakov and M. A. Uman, *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge University Press, 2003.

[32] Lightning and Insulator Subcommittee of the T&D Committee, "Parameters of Lightning Strokes: A Review," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, no. 1, pp. 346–358, Jan. 2005.

[33] H. Wei, X. Ba-lin, and G. YOU-gang, "Analysis of the lightning waveshape," in *Radio Science Conference*, 2004, pp. 627–630.

[34] NASA/GHRC/NSSTC Lightning Team, "Visible earth," *Where Lightning Strikes: http://visibleearth.nasa.gov*, 2008.

[35] K. Berger, *The Earth Flash (R. Golde)*. Ed. New York: Academic, vol. 1, ch. 5, 1977.

[36] C. F. Wagner and G. D. McCalm., "Induced voltages on transmission lines," *Trans. Amer. Inst. Elec. Engrs.*, no. 61, pp. 916–930, 1942.

[37] M. Sadiku, *Elements of Electromagnetics*, 2nd ed. Oxford University Press, 1995.

[38] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1962.

[39] L. V. Bewley, "Theory and tests of the counterpoise," *Elec. Engr.*, pp. 1163–1172, Aug. 1934.

[40] L. V. Bewley, "The counterpoise," *G. E. Rev.*, vol. 37, pp. 73–81, 1934.

[41] L. P. Bellaschi, "Impulse and 60-cycle characteristics of driven grounds, part III effect of lead in ground installation," in *AIEE Transactions*, vol. 62, 1943, pp. 334–345.

[42] E. D. Sunde, *Earth conduction effects in transmission systems.* by Bell Telephone Laboratories, 1949.

[43] B. G. Gupta and B. Thapar, "Impulse impedance of grounding grids," *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. PAS 99, pp. 2357–2362, 1980.

[44] A. P. Meliopoulos and M. G. Moharam, "Transient analysis of grounding systems," *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-102,No.2, pp. 389–399, 1983.

[45] R. Mitra, *Computer techniques for electromagnetics.* Pergamon Press, 1973.

[46] R. F. Harrington, *Field computation by moment of methods.* Macmillan, 1968.

[47] C. R. Paul, *Analysis of multiconductor transmission lines.* John Wiley and Sons Inc., 1994.

[48] C. B. B. Archambeault and O. M. Ramahi, *EMI/EMC computational modelling handbook.* Kluwer Acadamic Publishers, 2001.

[49] E. K. Miller, A. J. Poggio, G. J. Burke, and E. S. Selden, "Analysis of a wire antenna in the presence of a conductive half space. Part 1: the vertical antenna in a free space and Part two: the horizontal antenna in free space," *Canada Journal of Physics*, vol. 50, pp. 879–888 and 2614–2627, 1970.

[50] B. Nekhoul, C. Cuerin, P. Labie, G. Meunier, and R. Feuillet, "A finite element method for calculating the electromagnetic fields generated by substation grounding systems," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 31, No.3, pp. 2150–2153, 1995.

[51] B. Nekhoul, P. Labie, F. X. Zgainski, and G. Meunier, "Calculating the impedance of a grounding system," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 33, No.3, pp. 1509–1512, 1996.

[52] L. Grcev and F. Dawalibi, "Electromagnetic fields generated by overhead and buried short conductors," *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol. PWRD-1, No. 4, pp. 105–119, 1986.

[53] R. Andolfato, L. Bernardi, and L. Fellin, "Aerial and grounding system analysis by the shifting complex images method," *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol. 15, No. 2, pp. 1001–1009, 2000.

[54] R. Verma and D. Mukhedkar, "Impulse to impedance of buried ground wires," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, No. 5, pp. 2003–2007, 1980.

[55] M. I. Lorentzou, N. D. Hatziargyriou, and B. C. Papadias, "Time domain analysis of grounding electrodes impulse response," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 18, No. 2, pp. 517–524, 2003.

[56] A. D. Papalexopoulos and A. P. Meliopulos, "Frequency dependent characteristics of grounding systems," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 2, pp. 1073–1081, 1987.

[57] A. Geri, "Behaviour of grounding systems excited by high impulse currents: the model and its validation," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, No.3, pp. 1008–1017, 1999.

[58] A. F. Otero, J. Cidras, and J. L. del Alamo, "Frequency-dependent grounding system calculation by means of a conventional nodal analysis technique," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, No.3, pp. 873–878, 1999.

[59] J. Cidras, A. F. Otero, and C. Garrido, "Nodal frequency analysis of grounding systems considering the soil ionization effect," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 15, No.1, pp. 107–107, 2000.

[60] L. Grcev and F. Dawalibi, "An electromagnetic model for transients in grounding system," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 5, pp. 1773–1781, 1990.

[61] L. Grcev, "Computation of transient voltages near complex grounding systems caused by lightning currents," in *Proceedings of IEEE International Symposium on EMC, 92CH3169-0*, 1992, pp. 393–399.

[62] L. D. Grcev and F. E. Menter, "Transient electromagnetic fields near large earthing systems," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 32, No.3, pp. 1525–1528, 1996.

[63] L. D. Grcev, "Computer analysis of transient voltages in large grounding systems," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 11, pp. 815–823, 1996.

[64] G. Ala, E. Francomano, E. Toscano, and F. Viola, "Finite difference time domain simulation of soil ionization in grounding systems under lightning surge conditions," *Applied Numerical Analysis & Computational Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 90–103, 2004.

[65] E. T. Tuma, Rodrigo M. S. de Oliveira and Carlos L. da S. S. Sobrinho, "New model of current impulse injection and potential measurement in transient analysis of grounding systems in homogeneous and stratified soils using the FDTD method," in *International Symposium on Lightning Protection (SIPDA)*, São Paulo (Brazil), 2005.

[66] F. H. Harlow and J. E. Welsh, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface," *Physics of Fluids*, vol. 8, pp. 2182–2189, 1965.

[67] A. Taflove and M. E. Brodwin, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations," *IEEE Transactions on Microwave Theory Tech.*, vol. 23, pp. 623–630, 1975.

[68] A. Taflove and M. E. Brodwin, "Computation of the electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye," *IEEE Transactions on Microwave Theory Tech.*, vol. 23, pp. 888–896, 1975.

[69] A. Taflove, "Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic penetration problems," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 22, pp. 191–202, 1980.

[70] A. Bayliss and E. Turkel, "Radiation boundary conditions for wave-like equations," *Comm. Pure Appl. Math*, vol. 23, pp. 707–725, 1980.

[71] G. Mür, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 23, pp. 377–382, 1981.

[72] R. Higdon, "Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation," *Mathematics of computation*, vol. 49, pp. 65–90, 1987.

[73] Z. Liao, H. Wong, B.P.Yang, and Y.F.Yuan, "A transmitting boundary for transient wave analysis," *Scientia Sinica*, vol. XXVII (series A), pp. 1063–1076, 1984.

[74] J. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. Computational Phisics*, vol. 114, pp. 185–200, 1994.

[75] R. O. dos Santos, R. M. S. de Oliveira, F. J. B. Barros, and C. L. S. S. Sobriho, "Método R-LN-FDTD na Análise de Espalhamento Eletromagnético por Cilindro Dielétrico," in *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT)*, Belém (Brasil), 2004.

[76] G. Kondylis, F. DeFlaviis, and G. Pottie, "Indoor channel characterization for wireless communications using reduced finite difference time domain (R-FDTD)," *IEEE VTC Fall 99, Amsterdam*, 1999.

[77] T. Noda and S. Yokoyama, "Thin wire representation in finite difference time domain surge simulation," *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol. 17, pp. 840–847, 2002.

[78] N. N. Y. Baba and A. Ametani, "Modeling of thin wires in a lossy medium for FDTD simulations," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 47, 2005.

[79] X. Zhang, J.Fang, K. K. Mei, and Y. Liu, "Calculation of dispersive characteristics of microstrips by the time-domain finite-difference method," *IEEE Trans. Microwave Tech.*, vol. 36, pp. 263–267, 1988.

[80] P. E. Fornberg, A. Byers, M. Piket-May, and C. L. Holloway, "FDTD modeling of printed circuit board signal integrity and radiation," in *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 2000.

[81] F. C. B. F. Müller, R. G. Farias, C. L. S. S. Sobrinho, and V. Dmitriev, "Multistatic Radar with Ultra Wideband Pulses: FDTD Simulation," in *International Microwave and Optoelectronic Conference*, Brasília (Brazil), 2005.

[82] P. M. Goorjian and A. Taflove, "Direct time integration of Maxwell's equations in nonlinear dispersive media for propagation and scattering of femtosecond electromagnetic solitons," *Optics Lett.*, vol. 17, pp. 180–182, 1992.

[83] J. G. Maloney and M. P. Kesler, *Analysis of periodic structures.* Chap. 6 in Advances in Computational Electrodynamics, A.Taflove, Artech House, 1998.

[84] D. Manteuffell and W. Simon, "FDTD calculation of the SAR induced in the human head by mobile phones: new standards and procedures for the numerical assessment," in *IWAT 2005 (IEEE International Workshop on Antenna Technology)*, 2005, pp. 137–140.

[85] E. T. Tuma, R. O. Santos, and C. Sobrinho, "Análise do Comportamento Transitório dos Parâmetros de Sistemas de Aterramento Usando o Método FDTD," *VI Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, 2004.

[86] K. R. Umashankar, "Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 35, pp. 1248–1257, 1987.

[87] Rodrigo M. S. de Oliveira, R. O. Santos and C. L. S. S. Sobrinho, "Electromagnetic scattering analysis in indoor and outdoor environments by applying FDTD. method," in *International Conference on Applied Electromagnetics and Communications*, Dubrovnik (Croatia), 2003, pp. 241–244.

[88] D. C. Kay, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Tensor Calculus.* McGraw-Hill, 1988.

[89] S. Gedney and J. Roden, "Numerical stability of nonorthogonal FDTD methods," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, pp. 231–239, 2000.

[90] R. Holand and J.Williams, "Total-field versus scattered-field finite-difference," *IEEE Trans. Nuclear Science*, vol. 30, pp. 4583–4588, 1983.

[91] S. D. Gedney, "An anisotropic perfectly matched layer absorbing media for the truncation of FDTD latices," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 44, pp. 1630–1639, 1996.

[92] J. F. Almeida, C. L. da S. S. Sobrinho, and R. O. dos Santos, "Técnica Computacional para Implementação de Condições de Fronteira Absorvente UPML - por FDTD: Abordagem Completa," *Revista IEEE América Latina*, vol. 3, pp. 1–5, 2005.

[93] J. A. Roden, "Broadband Electromagnetic Analysis of Complex Structures with the Finite-Difference Time-domain Technique in General Curvilinear Coordinates," Tese de Doutorado, University of Kentucky, 1997.

[94] D. E. Rumerlhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams, "Learning representations by Back-Propagating errors," *Nature*, vol. 323, pp. 533–536, 1986.

[95] M. T. Hagan and M. B. Menhaj, "Training feedforward networks with the Marquardt algorithm," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 5, pp. 989–993, 1994.

[96] M. Tsumura, Y. Baba, N. Nagaoka, and A. Ametani, "FDTD Simulation of a Horizontal Grounding Electrode and Modeling of its Equivalent Circuit," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 48, pp. 817–825, Nov. 2006.

[97] M. A. Mattos, *Técnicas de Aterramento*. Okime Eletromagnetismo Aplicado, 2004.

[98] E. K.-N. Yung and W.-Y. Tam, "Analysis of a circular earthing plate," in *IEE proceedings. Part C. Generation, transmission and distribution (IEE proc. C)*, 1989.

[99] Rodrigo M. S. de Oliveira, M. B. Dias and Carlos L. da S. S. Sobrinho, "Application of neural networks for classifying faults on grounding grids," in *12º SBMO - Simposio Brasileiro de Microondas e Optoeletronica e 7º CBMAG - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo (MOMAG)*, Belo Horizonte (Brazil), 2006.

[100] M. B. Dias, Rodrigo M. S. de Oliveira and Carlos L. da S. S. Sobrinho, "Application of a neural network for classifying faults on grounding grids," in *XXVII Iberian Latin American Congress On Computational Methods In Engineering (CILAMCE)*, Belém (Brazil), 2006.

[101] J. A. de Miranda and C. Portela, "Application of neural networks to identify discontinuities in grounding grids," in *International Conference on Grounding and Earthing (GROUND)*, Maceió (Brazil), 2006.

[102] N. Ramos, R. M. S. de Oliveira, and C. L. da S. Souza Sobrinho, "Employment of parasite element for extending the bandwidth of a linear horizontal spiral monopole," in *International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*, Salvador, Brazil, 2007.

[103] H. X. de Araujo, Rodrigo M. S. de Oliveira, Y. C. Salame and Carlos L. da S. S. Sobrinho, "Novel grounding structures for reducing step potentials," in *XXVII Iberian Latin American Congress On Computational Methods In Engineering (CILAMCE)*, 2006.

[104] J. D. McDonald, *Electric Power Substations Engineering.* CRC Press, 2003.