



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FILTROS OTIMIZADOS PARA TRANSFORMADAS

SENO, CO-SENO E DE HANKEL J_0 , J_1 E J_2

Frayzer Lima de Almeida



anp
Agência
Nacional do
Petróleo



BELÉM

2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

FILTROS OTIMIZADOS PARA TRANSFORMADAS SENO, CO-SENO E DE HANKEL
 J_0, J_1 E J_2

TESE APRESENTADA POR

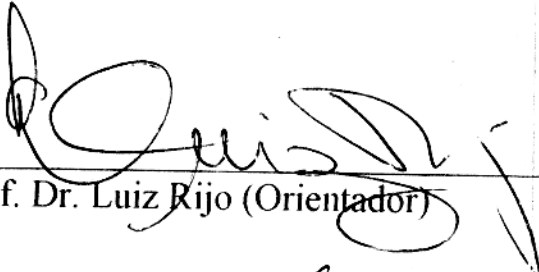
FRAYZER LIMA DE ALMEIDA


COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

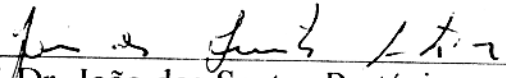
Data da aprovação: 14/01/2003

Nota: 95% (EXCELENTE)

COMITÊ DE TESE:


Prof. Dr. Luiz Rijo (Orientador)


Prof. Dr. José Márcio Lins Marinho


Prof. Dr. João dos Santos Protázio

BELÉM

2002

T
A447f

ALMEIDA, Frayzer Lima de.

Filtros otimizados para transformadas seno, cosseno e de Hankel J_0 , J_1 e J_2 . / Frayzer Lima de Almeida; orientador, Luiz Rijo. Belém: [s.n.], 2002.
93p.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, Curso de Pós-Graduação em Geofísica, 2002.

1.GEOFÍSICA APLICADA 2..MÉTODOS ELÉTRICOS E ELETROMAGNÉTICOS 3.TRANSFORMADAS NUMÉRICAS SENO, COSSENO E DE HANKEL. I.RIJO, Luiz, orient. II.Título.

CDD: 622.15

À Suian, Marina e Eduardo.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de mestrado.

À ANP pela infra-estrutura do PROEM.

Ao Curso de Pós-graduação em Geofísica e a todo o corpo docente, técnico e administrativo por terem propiciado os meios para realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora. Professores Dr. José Márcio Lins Marinho e Dr. João dos Santos Protázio pela correção deste texto e pelas sugestões.

Ao Dr. Luiz Rijo, pela orientação e paciência.

À minha Mãe.

SUMÁRIO

	p.
DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	3
1 – INTRODUÇÃO	4
2 – METODOLOGIA	6
2.1 - TRANSFORMADAS CO-SENO E SENOS	6
2.2.- TRANSFORMADAS DE HANKEL J_0 , J_1 E J_2	11
3 - FILTROS OBTIDOS ATRAVÉS DOS ALGORITMOS PROPOSTOS	14
3.1 - TRANSFORMADA CO-SENO	14
3.2 - TRANSFORMADA SENOS	16
3.3 - TRANSFORMADA DE HANKEL J_0	18
3.4 - TRANSFORMADA DE HANKEL J_1	20
3.5 - TRANSFORMADA DE HANKEL J_2	22
4 – APLICAÇÕES	26
4.1- LINHA INFINITA DE CORRENTE PARALELA À INTERFACE DOS SEMI-ESPAÇOS. 26	
4.2 - DIPOLO MAGNÉTICO VERTICAL NA INTERFACE DOS SEMI-ESPAÇOS	37
4.3 – DIPOLO MAGNÉTICO HORIZONTAL NA INTERFACE DOS SEMI-ESPAÇOS	51
4.4.- SONDAGENS ELÉTRICAS VERTICAIS	66
5 – CONCLUSÃO	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

APÊNDICES	74
APÊNDICE A: Algoritmos propostos	75
APÊNDICE B: Filtros propostos	85

RESUMO

Apresentamos dois algoritmos automáticos, os quais se utilizam do método dos mínimos quadrados de Wiener-Hopf, para o cálculo de filtros lineares digitais para as transformadas seno, co-seno e de Hankel J_0 , J_1 e J_2 . O primeiro, que otimiza os parâmetros: incremento das abscissas, abscissa inicial e o fator de deslocamento utilizados para os cálculos dos coeficientes dos filtros lineares digitais que são aferidos através de transformadas *co-seno*, *seno* e o segundo, que otimiza os parâmetros: incremento das abscissas e abscissa inicial utilizados para os cálculos dos coeficientes dos filtros lineares digitais que são aferidos através de transformadas de Hankel J_0 , J_1 e J_2 . Esses algoritmos levaram às propostas de novos filtros lineares digitais de 19, 30 e 40 pontos para as transformadas *co-seno* e *seno* e de novos filtros otimizados de 37, 27 e 19 pontos para as transformadas J_0 , J_1 e J_2 , respectivamente. O desempenho dos novos filtros em relação aos filtros existentes na literatura geofísica é avaliado usando-se um modelo geofísico constituído por dois semi-espacos. Como fonte usou-se *uma linha infinita de corrente* entre os semi-espacos originando, desta forma, transformadas *co-seno* e *seno*. Verificou-se melhores desempenhos na maioria das simulações usando o novo filtro *co-seno* de 19 pontos em relação às simulações usando o filtro *co-seno* de 19 pontos existente na literatura. Verificou-se também a equivalência de desempenhos nas simulações usando o novo filtro *seno* de 19 pontos em relação às simulações usando o filtro *seno* de 20 pontos existente na literatura. Adicionalmente usou-se também como fonte *um dipolo magnético vertical* entre os semi-espacos originando desta forma, transformadas J_0 e J_1 , verificando-se melhores desempenhos na maioria das simulações usando o novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao filtro J_1 de 47 pontos existente na literatura. Verificou-se também a equivalência de desempenhos na maioria das simulações usando o novo filtro J_0 de 37 pontos em relação ao filtro J_0 de 61 pontos existente na literatura. Usou-se também como fonte *um dipolo magnético horizontal* entre os semi-espacos, verificando-se um desempenho análogo ao que foi descrito anteriormente dos novos filtros de 37 e 27 pontos para as respectivas transformadas J_0 e J_1 em relação aos filtros de 61 e 47 pontos existentes na literatura, destas respectivas transformadas. Finalmente verificou-se a equivalência de desempenhos entre

os novos filtros J_0 de 37 pontos e J_1 de 27 pontos em relação aos filtros de 61 e 47 pontos existentes na literatura destas transformadas, respectivamente , quando aplicados em modelos de sondagens elétricas verticais (Wenner e Schlumberger). A maioria dos nossos filtros contém poucos coeficientes quando comparados àqueles geralmente usados na geofísica. Este aspecto é muito importante porque transformadas utilizando filtros lineares digitais são usadas maciçamente em problemas numéricos geofísicos.

ABSTRACT

We present two automatic algorithms, which use the Wiener-Hopf least-square method, for the calculation of digital linear filters for sine, co-sine transforms and J_0 , J_1 and J_2 Hankel transforms. The first algorithm optimizes the following parameters: abscissa increments, initial abscissas and displacement factor for the computation of digital linear filters coefficients that are computed through sine and co-sine analytic transforms. The second algorithm optimizes the following parameters: abscissa increments and initial abscissas for the computation of digital linear filters coefficients that are computed through J_0 , J_1 and J_2 Hankel analytic transforms. This methodology led to the proposition of new digital linear filters of 19, 30 and 40 points for the co-sine and sine transforms, and to new optimized filters of 37, 27 and 19 points for the J_0 , J_1 and J_2 Hankel transforms, respectively. The comparison of the performance of these filters with respect to the others ones published in the geophysical literature is evaluated by using a analytical geophysical model composed of two half spaces. An infinite current line was used between the half spaces, giving rise to the sine and co-sine transforms. Among all simulations carried out, it was noticed that the new sine and co-sine transforms of 19 points presented better performance when compared to the existing ones in the literature. In addition, J_0 and J_1 transforms were obtained using a vertical magnetic dipole as source between the half spaces, noticing that better performances using the new J_1 filter of 27 points were obtained among all simulations when compared to the existing 47 points J_1 filters, as well as with the simulations carried out using the new 37 points J_0 filter and compared with the 61 points J_0 existing filters in the literature. Using a horizontal magnetic dipole between the half spaces, it was observed an equivalent performance using the 37 and 27 points new filters for the J_0 and J_1 transforms when compared, respectively, to the existing 61 and 47 points filters in the literature. Finally, it was observed an equivalent performance using 37 and 27 points new filters for the J_0 and J_1 transforms when compared, respectively, to the existing 61 and 47 points in the literature, and when applied, respectively, in Wenner and Schlumberger electrical soundings. Most of our filters contain fewer coefficients than those usually used in geophysics. This aspect is very important because these linear filter transforms are commonly used intensively in numerical massively geophysical problems.

1 - INTRODUÇÃO

Filtros lineares digitais aferidos para as transformadas seno, co-seno e de Hankel J_0 , J_1 e J_2 são extremamente utilizados nos métodos geofísicos elétricos e eletromagnéticos. Eles são empregados, por exemplo, para calcular funções de Green bidimensionais de meios estratificados, típicos de ambientes geológicos sedimentares e para transformar respostas eletromagnéticas no domínio da frequência para o domínio do tempo e vice-versa.

Antes da introdução do algoritmo desses filtros por Ghosh em 1971, o tempo de processamento computacional dessas transformadas, através de outros métodos numéricos convencionais de integração, era demasiadamente grande. Desde então, houve um progresso contínuo para algoritmos mais eficientes (Koefoed et al, 1972; Das & Ghosh 1974; Koefoed & Dirks, 1979; Johansen & Sorensen, 1979; Anderson, 1979; Guptasarma, 1982; Nissen & Enmark, 1986; Rijo, 1993).

Atualmente, uma das estratégias mais utilizada para o cálculo desses filtros é a de Guptasarma (1982)¹. Através desta estratégia, Guptasarma & Singh (1997) contribuíram com bons filtros digitais para as transformadas de Hankel J_0 (61-pontos) e J_1 (47-pontos), Nissen & Enmark (1986) e Rijo (1993) contribuíram com filtros lineares digitais otimizados para a transformada seno (20-pontos) e transformada co-seno (19-pontos) respectivamente. Ela consiste na plotagem da máxima amplitude do erro relativo, que é definido por Ghosh (1971), sobre um domínio pré-estabelecido por um intervalo de abscissas iniciais a_0 versus um intervalo de incrementos de abscissas t , resultando numa superfície em que se deseja aferir a menor das máximas amplitudes dos erros relativos, através de um par ordenado ótimo de (a_0, t) . Este procedimento é realizado inúmeras vezes sobre as regiões, das superfícies, escolhidas convenientemente a cada etapa de plotagem. Essa estratégia necessita da análise do usuário na decisão de escolher a região, dessa superfície, que apresenta a menor das máximas amplitudes dos erros relativos, tornando-a lenta e trabalhosa ao realizar este procedimento inúmeras vezes.

1. Uma outra estratégia para o cálculo de filtros digitais é a de Mohsen & Hashish (1994). Ela consiste em um algoritmo que calcula filtros digitais para as transformadas de Hankel de ordens maiores que -1 e que é baseada no algoritmo de FFT.

O objetivo deste trabalho é propor dois algoritmos iterativos que não necessitam do modo de avaliação da superfície formada pela máxima amplitude do erro relativo sugerido por Guptasarma (1982) e que determinam, respectivamente, de forma automatizada: a menor das máximas amplitudes dos erros relativos através do terno ótimo (a_0, t, ξ) , ξ como o fator de deslocamento, calculando assim, filtros lineares digitais para as transformadas seno e co-seno e o menor dos valores resultantes das integrações numéricas dos erros relativos através do par ótimo (a_0, t) , calculando assim, filtros otimizados para as transformadas de Hankel J_0 , J_1 e J_2 .

2 - METODOLOGIA

Para o cálculo das abscissas iniciais a_0 , dos incrementos das abscissas t e do fator de deslocamento ξ correspondentes aos filtros das transformadas *seno* e *co-seno*, propus um algoritmo tipo *co-seno* e *seno* (algoritmo tipo *co-seno* no APÊNDICE A) que admitiu a máxima amplitude do erro relativo, definido por Ghosh (1971), como a medida que se deseja minimizar. Já para o cálculo das abscissas iniciais a_0 , dos incrementos das abscissas t correspondentes aos filtros das transformadas de Hankel J_0 , J_1 e J_2 propus outro algoritmo tipo J_0 - J_1 - J_2 (algoritmo tipo J_0 no APÊNDICE A) que admitiu a integração numérica do erro relativo, como a medida que se deseja minimizar. Ambos integram o método dos mínimos quadrados de Wiener-Hopf descrito por Koefoed & Dirks (1979) e a idéia do esquema de otimização de Guptasarma (1982). Porém diferentemente deste último, os algoritmos propostos são automáticos.

2.1- TRANSFORMADAS CO-SENO E SENO

Seja o produto cartesiano $\Omega = [a_0^1, a_0^n] \times [t^1, t^r] \times [\xi^1, \xi^v]$, o domínio que contém o termo ótimo (a_0^c, t^c, ξ^c) que se deseja capturar através do algoritmo proposto tipo *co-seno*, em que $[a_0^1, a_0^n]$ é o intervalo de abscissas iniciais discretizado em u pontos, $[t^1, t^r]$ o intervalo dos incrementos de abscissas discretizado em r pontos e $[\xi^1, \xi^v]$ o intervalo dos fatores de deslocamento discretizado em v pontos.

Seja por exemplo a transformada *co-seno*

$$\int_0^{\infty} k_x^2 e^{-\alpha k_x} \cos(k_x x) dk_x = \frac{2a(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3} = F(x) \quad (1)$$

utilizada por Rijo (1993) para a determinação da função filtro $w_i(a_0, t, \xi)$, $i = 1, \dots, N$.

Fazendo a mudança de variável $l_x = k_x x$, $dl_x = dk_x x$ obtém-se

$$xF(x) = \int_0^{\infty} (l_x/x)^2 e^{-a(l_x/x)} \cos(l_x) dl_x, \quad (2)$$

em que $f(l_x/x) = (l_x/x)^2 e^{-a(l_x/x)}$ é o kernel da equação (2). Realizando outra mudança de variável $x = e^p, l_x = e^s$ e $dl_x = e^s ds$ obtém-se a integral de convolução

$$e^p F(e^p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-(p-s)}) \cos(e^s) e^s ds. \quad (3)$$

Por outro lado, temos

$$H(x) = xF(x) = \frac{2ax(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3} \quad (4)$$

ou

$$H(e^p) = e^p F(e^p) = \frac{2ae^p(a^2 - 3(e^p)^2)}{(a^2 + (e^p)^2)^3}. \quad (5)$$

Os padrões assintóticos de $f(e^{-(p-s)})$ na equação (3) e de $H(e^p)$ na equação (5) são expressos através das suas respectivas discretizações:

$$f_i = f(e_i) = e_i^2 e^{-ae_i}, i = 1, \dots, n \quad (6)$$

denominada função entrada e

$$h_j = H(e_j) = \frac{2ae_j(a^2 - 3e_j^2)}{(a^2 + e_j^2)^3}, j = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ak^2} \cos(k_x x) dk_x = e^{-x^2/4a^2} \sqrt{\pi i} / 2a, \quad (10)$$

utilizada também por Rijo (1993) para o mesmo fim. De maneira que $g(k_x) = e^{-ak^2}$ e $G(x) = e^{-x^2/4a^2} \sqrt{\pi i} / 2a$, em que usou-se o segundo membro da equação (10) para a discretização, através do operador de integração, usando para tal os pares $(a_0, t) \in [a_0^1, a_0^m] \times [t^1, t^r]$ com suas respectivas **funções filtro** $w_i(a_0, t, \xi)$, $i = 1, \dots, m-n+1$. calculadas previamente pela equação (9) para cada $(a_0, t, \xi) \in \Omega$.

$$\int_0^{\infty} e^{-ak^2} \cos(k_x x) dk_x \equiv \left[\sum_{i=1}^{m-n+1} g_i(e^{-(\ln x - (a_0 + (i-1)t))} w_i(a_0, t, \xi)) \right] / x + \varepsilon \quad (11)$$

denominando o segundo membro da equação (11) de:

$$Gaprox(a_0, t, \xi; x) = \left[\sum_{i=1}^{m-n+1} g_i(e^{-(\ln x - (a_0 + (i-1)t))} w_i(a_0, t, \xi)) \right] / x + \varepsilon \quad (12)$$

em que ε é o erro devido a aproximação discreta. Dessa maneira tem-se

$$F(a_0, t, \xi) = \max \left\{ |(Gaprox(a_0, t, \xi; x) - G(x)) / G(x)| \right\} \quad (13)$$

para todo $(a_0, t, \xi) \in \Omega$ com $x \in [x_1, x_p]$ e p sendo, respectivamente, o intervalo no domínio real da equação (10) e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, em que \max é a maior amplitude de $\left| (Gaprox(a_0, t, \xi; x) - G(x)) / G(x) \right|^T$ para algum $x \in [x_1, x_p]$.

Finalmente, para se aferir o terno ótimo $(a_0^{c*}, t^{r*}, \xi^{s*}) \in \Omega$ na primeira iteração usou-se:

$$Par(a_0^{c*}, t^{r*}, \xi^{s*}) = \min F(a_0, t, \xi) \quad (14)$$

em que **min** é a menor entre as máximas amplitudes de $F(a_0, t, \xi)$ para algum $(a_0^*, t^*, \xi^*) \in \Omega$. O algoritmo proposto **tipo co-seno** no APÊNDICE A, usa as transformadas acima.

Apresenta-se um resumo das etapas anteriores:

1º- Escolheu-se convenientemente uma par de transformadas **co-seno**, equação (1) e equação (10).

2º- Usou-se a transformada da equação (1) para o cálculo da função filtro através do método dos mínimos quadrados de Wiener-Hopf descrito por Koefoed & Dirks (1979) para cada $(a_0, t, \xi) \in \Omega$.

3º- Para cada $(a_0, t, \xi) \in \Omega$ com sua respectiva função filtro determina-se a máxima amplitude do erro relativo sob a transformada da equação (10) no intervalo real x , formando desta maneira um "espaço" constituído das máximas amplitudes dos erros relativos.

4º- Determina-se sob esse "espaço" a menor de todas as máximas amplitudes dos erros relativos juntamente com seu terno ótimo $(a_0, t, \xi) \in \Omega$.

5º- Calcula-se os pontos médios entre cada extremo dos intervalos formados pelas abscissas iniciais, incrementos de abscissas e fatores de deslocamentos e seus respectivos pontos ótimos a_0, t e ξ , permanecendo a mesma gridagem inicialmente estabelecida. Esta última etapa é fundamental para a criação de iteratividade do algoritmo proposto.

De maneira análoga, as transformadas a seguir foram utilizadas no algoritmo **tipo seno** em que este é similar ao algoritmo **tipo co-seno** a menos das transformadas:

A) Transformada **seno** utilizada por Nissen & Enmark (1986), destinada tanto ao cálculo da função filtro quanto à determinação do terno ótimo $(a_0^*, t^*, \xi^*) \in \Omega$ através da minimização das máximas amplitudes dos erros relativos no intervalo $x \in [x_1, x_p]$:

$$\int_0^{\infty} k_x^2 e^{-ak_x} \text{sen}(k_x x) dk_x = \frac{2x(3a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^3}; \quad (15)$$

B) A transformada *seno* para avaliar o erro relativo no intervalo $x \in [x_1, x_p]$:

$$\int_0^{\infty} 4k_x / (1 + 4k_x^2) \text{sen}(k_x x) dk_x = e^{-x/2} \pi / 2. \quad (16)$$

2.2- TRANSFORMADAS DE HANKEL J_0, J_1 E J_2

Para o cálculo do filtro da transformada de Hankel J_0 utilizou-se um algoritmo semelhante ao algoritmo **tipo co-seno** proposto, porém diferentemente deste último admitiu-se um valor constante para o fator de deslocamento ξ ao invés de um intervalo de fatores de deslocamento e também admitiu-se a integração numérica do erro relativo como a medida que se deseja minimizar ao invés da máxima amplitude do erro relativo.

A) A transformada J_0 utilizada por Guptasarma & Singh (1997), destinada tanto ao cálculo da função filtro quanto na determinação do par ótimo $(a_0^e, t^e) \in [a_0^l, a_0^u] \times [t^l, t^r]$, através da minimização das integrações numéricas dos erros relativos no intervalo $x \in [x_1, x_p]$:

$$\int_0^{\infty} k_r e^{-ak_r} J_0(k_r r) dk_r = \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}}; \quad (17)$$

O algoritmo proposto **tipo J_0** , no APÊNDICE A, usa a transformada acima.

Apresenta-se as etapas para a confecção do algoritmo **tipo J_0** :

- 1º- Escolheu-se convenientemente apenas uma transformadas J_0 , equação (17).
- 2º- Usou-se a transformada da equação (17) para o cálculo da função filtro através do método dos mínimos quadrados de Wiener-Hopf descrito por Koefoed & Dirks (1979) para cada $(a_0, t) \in [a_0^l, a_0^u] \times [t^l, t^r]$.
- 3º- Para cada $(a_0, t) \in [a_0^l, a_0^u] \times [t^l, t^r]$ com sua respectiva função filtro determina-se a integração numérica do erro relativo sob a transformada da equação (17) no intervalo real x , formando desta maneira um "espaço" constituído das integrações numéricas dos erros relativos.

4º- Determina-se sob esse "espaço" a menor de todas as integrações numéricas dos erros relativos juntamente com seu par ótimo $(a_0, t) \in [a_0^l, a_0^u] \times [t^l, t^r]$.

5º- Calcula-se os pontos médios entre cada extremo dos intervalos formados pelas abscissas iniciais e incrementos de abscissas com seus respectivos pontos ótimos a_0 e t , permanecendo a mesma gridagem inicialmente estabelecida. Esta última etapa é fundamental para a criação de iteratividade do algoritmo proposto.

B) A transformada J_0 utilizada por Guptasarma & Singh (1997) para avaliar erro relativo no intervalo $x \in [x_1, x_p]$:

$$\int_0^{\infty} e^{-ak} J_0(k, r) dk = \frac{1}{(a^2 + r^2)^{1/2}}; \quad (18)$$

De maneira análoga, as transformadas a seguir foram utilizadas nos algoritmos tipo J_1 - J_2 em que estes são similares ao algoritmo tipo J_0 , a menos das transformadas.

C) A transformada J_1 utilizada por Guptasarma & Singh (1997), destinada ao cálculo da função filtro:

$$\int_0^{\infty} [k, e^{-ak} + ak^2, e^{-ak^2}] J_1(k, r) dk = \frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} + \alpha \frac{re^{-r^2/4a}}{4a^2}, \quad (19)$$

e outra também utilizada por Guptasarma & Singh (1997), para determinar o par ótimo $(a_0^e, t^e) \in [a_0^l, a_0^u] \times [t^l, t^r]$ através da minimização das integrações numéricas dos erros relativos no intervalo $x \in [x_1, x_p]$:

$$\int_0^{\infty} k, e^{-ak} J_1(k, r) dk = \frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (20)$$

D) A transformada J_2 destinada tanto ao cálculo da função filtro quanto na determinação do par ótimo $(a_0^c, t^c) \in [a_0^l, a_0^u] \times [t^l, t^u]$ através da minimização das integrações numéricas dos erros relativos no intervalo $x \in [x_1, x_p]$, (Rijo, 2001):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{k_r} e^{-k_r} J_2(k, r) dk_r = 2J_2(\sqrt{2ar})K_2(\sqrt{2ar}); \quad (20a)$$

E) As transformadas J_2 utilizadas tanto para avaliar o erro relativo quanto para assegurar o desempenho do novo filtro J_2 (19-pontos) no intervalo $x \in [x_1, x_p]$, (Rijo, 2001):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{k_r} e^{-k_r} J_2(k, r) dk_r = \frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - a)^2}{2r^2}, \quad (20b)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-k_r^2} J_2(k, r) dk_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{r^2}{4a}} I_1\left(\frac{r^2}{8a}\right) \quad (20c)$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-k_r} J_2(k, r) dk_r = \frac{r^{-2}(\sqrt{a^2 + r^2} - a)^2}{\sqrt{a^2 + r^2}} \quad (20d)$$

3 - FILTROS OBTIDOS ATRAVÉS DOS ALGORITMOS PROPOSTOS

Foram obtidos, através dos algoritmos apresentados, filtros lineares digitais de 19, 30 e 40 pontos tanto para a transformada *co-seno* quanto para a transformada *seno* e filtros otimizados de 37 pontos, 27 pontos e de 19 pontos para as transformadas de Hankel J_0 , J_1 e J_2 , respectivamente.

3.1 - TRANSFORMADA CO-SENO

Para a transformada *co-seno* usou-se a máxima amplitude do erro relativo como a medida que se deseja minimizar, no intervalo $x \in [10^{-5}, 10^{-5}]$ discretizado em 150 pontos igualmente espaçados, os intervalos de abscissas iniciais, incrementos de abscissas e de fatores de deslocamento com $a_0 \in [-16, -8]$, $t \in [.4, .8]$ e $\xi \in [\ln(10^{-6}), \ln(10^{-1})]$, discretizados em 35, 35 e 15 pontos, respectivamente e tomando $a=1$ nas equações (1) e (10). Para obtenção do filtro de 19 pontos usaram-se as funções entrada e saída discretizadas em 50 e 68 pontos respectivamente. Já para obtenção dos filtros de 30 e 40 pontos usaram-se as funções de entrada e as funções de saída discretizadas em 70 e 80 pontos (função-entrada) e 89 e 119 pontos(função-saída). O algoritmo aferiu o terno ótimo (a_0, t, ξ) na vigésima iteração. Os comportamentos dos erros relativos calculados através das equações (1) e (10) para cada um desses filtros são mostrados nas Figuras 3.1 e 3.2 a seguir, juntamente com os erros relativos calculados através do filtro de 19 pontos proposto por Rijo (1993). Os filtros de 19, 30 e 40 pontos para a transformada *co-seno* encontram-se nas Tabelas 1-3 no APÊNDICE B.

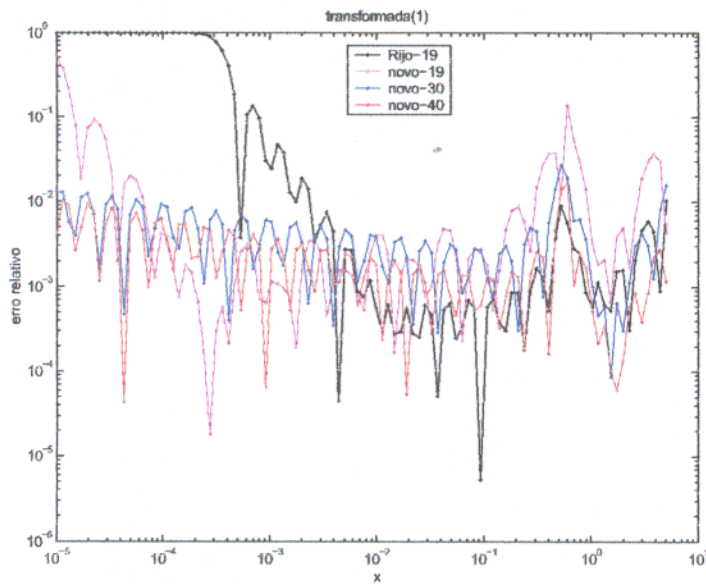


Figura 3.1. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (1) quando aplicada sobre os novos filtros lineares digitais da transformada *co-seno* de 19, 30 e 40 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada *co-seno* de 19 pontos proposto por Rijo (1993).

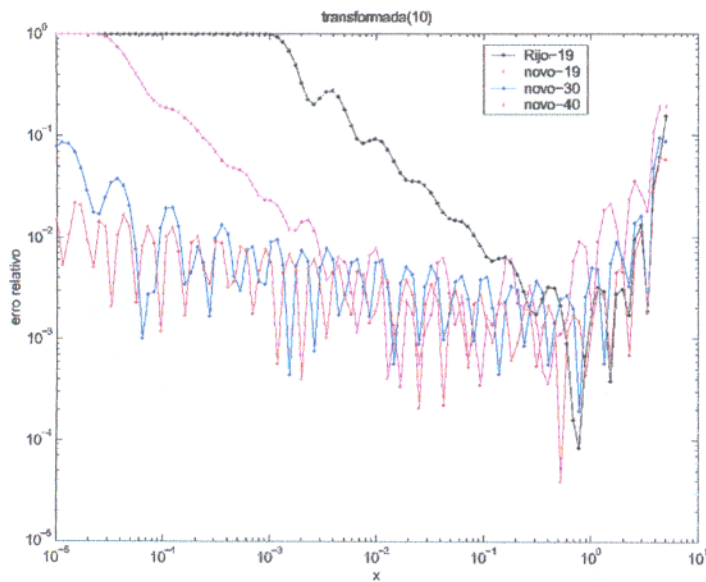


Figura 3.2. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (10) quando aplicada sobre os novos filtros lineares digitais da transformada *co-seno* de 19, 30 e 40 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada *co-seno* de 19 pontos proposto por Rijo (1993).

3.2 - TRANSFORMADA SENO

Para a transformada *seno* usou-se a máxima amplitude do erro relativo como a medida que se deseja minimizar, no intervalo $x \in [10^{-3}, 10^7]$ discretizando em 150 pontos igualmente espaçados, os intervalos de abscissas iniciais, incrementos de abscissas e de fatores de deslocamento com $a_0 \in [-8, -4]$ e $t \in [.2, .6]$ e $\xi \in [\ln(10^{-6}), \ln(10^{-1})]$, discretizados em 35, 35 e 15 pontos respectivamente e tomando $a = 1$ na equação (15). Para obtenção do filtro de 19 pontos usaram-se as funções de entrada e saída discretizadas em 50 e 68 pontos respectivamente. Já para obtenção dos filtros de 30 e 40 pontos usaram-se as funções de entrada e as funções de saída discretizadas em 70 e 80 pontos (função-entrada) e 89 e 119 pontos (função-saída). O algoritmo aferiu o terno ótimo (a_0, t, ξ) na vigésima iteração. Os comportamentos dos erros relativos calculados através das equações (15) e (16) para cada um desses filtros são mostrados nas Figuras 3.3 e 3.4 a seguir, juntamente com os erros relativos calculados através do filtro de 20 pontos proposto por Nissen & Enmark (1986). Os filtros de 19, 30 e 40 pontos para a transformada *seno* encontram-se nas Tabelas 4-6 no APÊNDICE B.

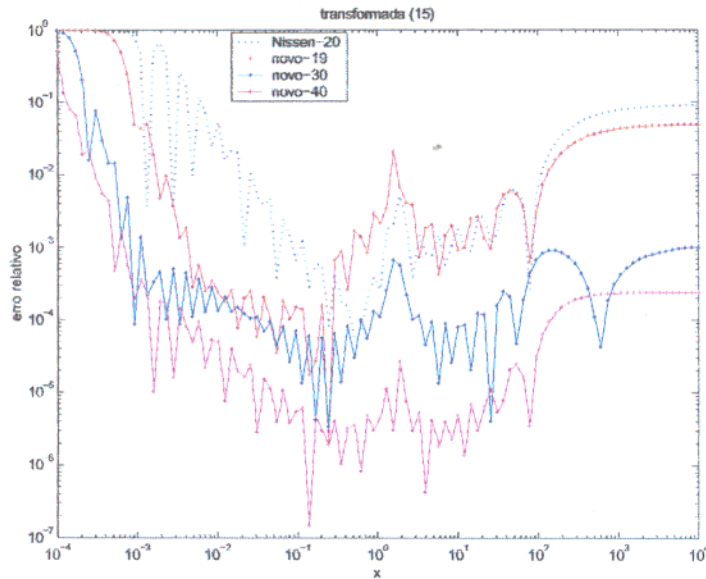


Figura 3.3. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (15) quando aplicada sobre os novos filtros lineares digitais da transformada *seno* de 19, 30 e 40 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada *seno* de 20 pontos proposto por Nissen & Enmark (1986).

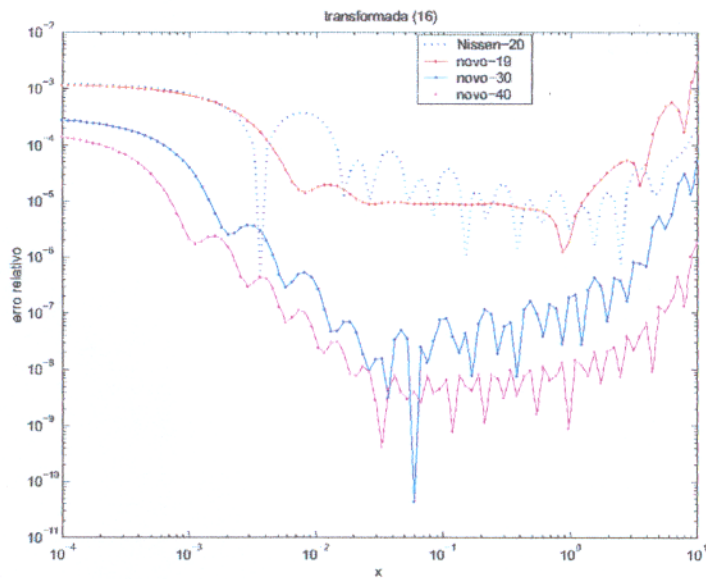


Figura 3.4. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (16) quando aplicada sobre os novos filtros lineares digitais da transformada *seno* de 19, 30 e 40 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada *seno* de 20 pontos proposto por Nissen & Enmark (1986).

3.3 - TRANSFORMADA DE HANKEL J_0

Para a transformada J_0 usou-se a integração numérica do erro relativo como a medida que se deseja minimizar, no intervalo de integração $r \in [10^{-6}, 10^5]$ discretizando em 85 pontos igualmente espaçados, os intervalos de abscissas iniciais e incrementos de abscissas com $a_0 \in [-10, -6]$ e $t \in [.2, .5]$ discretizados em 50 pontos e 100 pontos respectivamente e tomando $\xi = \ln(.01)$ e $a = 1$ na equação (17). Para obtenção do filtro de 37 pontos usaram-se as funções entrada e saída discretizadas em 70 e 106 pontos respectivamente. O algoritmo aferiu o par ótimo (a_0, t) na décima sétima iteração. Os comportamentos dos erros relativos calculados através das equações (17) e (18) para este filtro são mostrados nas Figuras 3.5 e 3.6 a seguir, juntamente com os erros relativos calculados através do filtro de 61 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997). Verificam-se em ambas as figuras um erro relativo menor, na aplicação do filtro de 61 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) em relação a aplicação do novo filtro proposto de 37 pontos porém, o primeiro apresenta um número de coeficientes bem maior. O filtro de 37 pontos para a transformada J_0 encontra-se na Tabela 7 no APÊNDICE B.

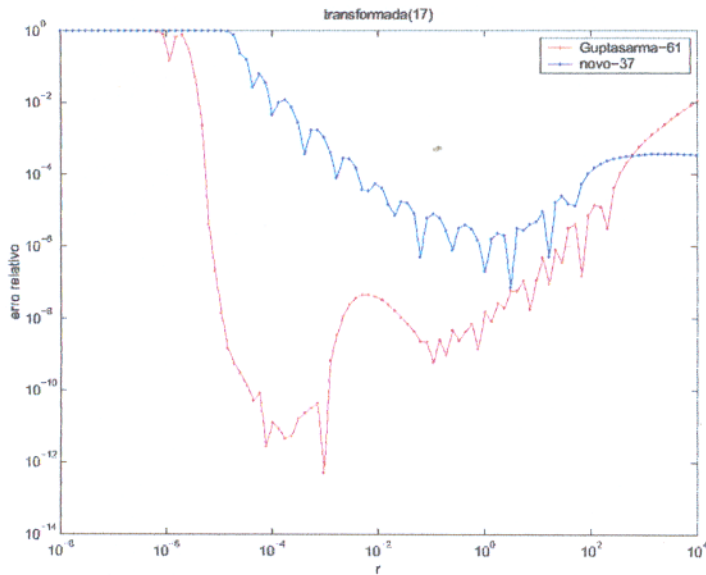


Figura 3.5. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (17) quando aplicada sobre o novo filtro linear digital da transformada J_0 de 37 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada J_0 de 61 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997).

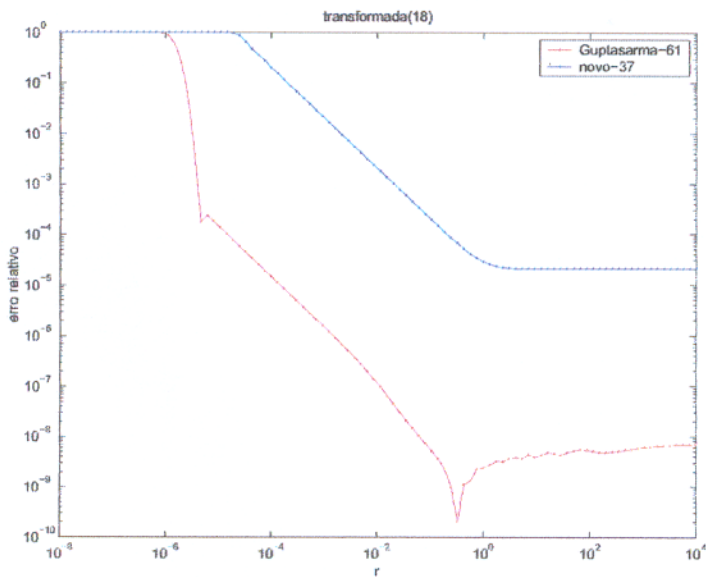


Figura 3.6. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (18) quando aplicada sobre o novo filtro linear digital da transformada J_0 de 37 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada J_0 de 61 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997).

3.4 - TRANSFORMADA DE HANKEL J_1

Para a transformada J_1 usou-se a integração numérica do erro relativo como a medida que se deseja minimizar, no intervalo de integração $r \in [10^{-4}, 10^6]$ discretizado em 95 pontos igualmente espaçados, os intervalos de abscissas iniciais e incrementos de abscissas com $a_0 \in [-5, -3]$ e $t \in [.2, .5]$ discretizados em 50 pontos e 100 pontos respectivamente e tomando $\xi = \ln(.01)$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 0.0666$ nas equações (19) e (20). Para obtenção do filtro de 27 pontos usaram-se as funções entrada e saída discretizadas em 70 e 96 pontos respectivamente. O algoritmo aferiu o par ótimo (a_0, t) na décima sétima iteração. Os comportamentos dos erros relativos calculados através das equações (19) e (20) para este filtro são mostrados nas Figuras 3.7 e 3.8 a seguir, juntamente com os erros relativos calculados através do filtro de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997). Verificam-se em ambas as figuras um erro relativo menor, na aplicação do filtro de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) em relação a aplicação do novo filtro proposto de 27 pontos porém, o primeiro apresenta um número de coeficientes bem maior. O filtro de 27 pontos para a transformada J_1 encontra-se na Tabela 8 no APÊNDICE B.

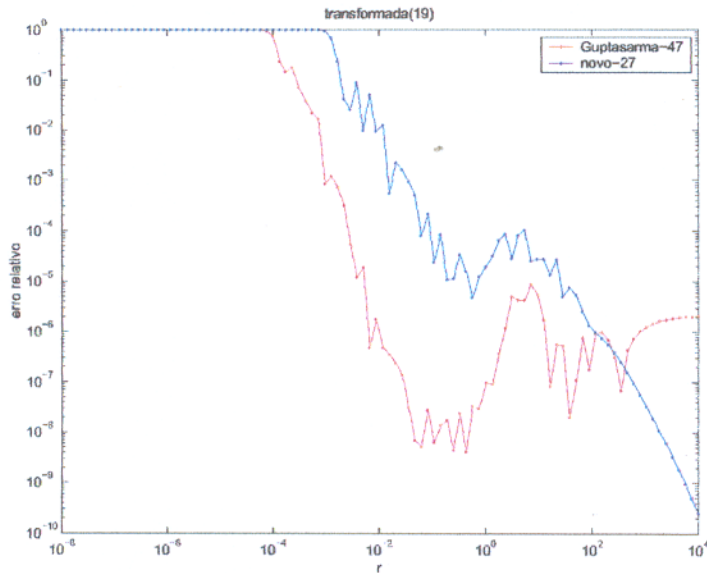


Figura 3.7. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (19) quando aplicada sobre o novo filtro linear digital da transformada J_I de 27 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada J_I de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997).

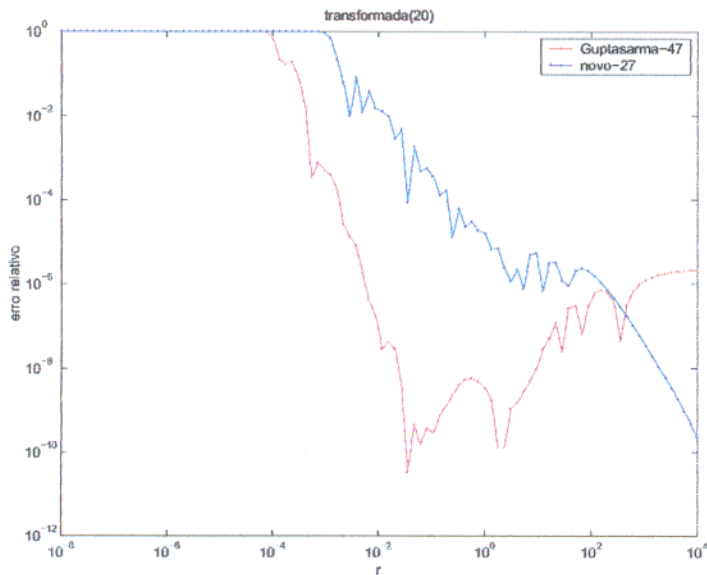


Figura 3.8. Mostra o comportamento do erro relativo através da equação (20) quando aplicada sobre o novo filtro linear digital da transformada J_I de 27 pontos e também sobre o filtro linear digital da transformada J_I de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997).

3.5 - TRANSFORMADA DE HANKEL J_2

Para a transformada J_2 usou-se a integração numérica do erro relativo como a medida que se deseja minimizar, no intervalo de integração $r \in [10^{-4}, 10^4]$ discretizado em 150 pontos igualmente espaçados, os intervalos de abscissas iniciais e incrementos de abscissas com $a_0 \in [-3, -1]$ e $t \in [.1, .3]$ ambos discretizados em 50 pontos e tomando $\xi = \ln(.001)$ e $\alpha = 1$ na equação (20a). Para obtenção do filtro de 19 pontos usaram-se as funções entrada e saída discretizadas em 50 e 68 pontos respectivamente. O algoritmo aferiu o par ótimo (a_0, t) na quadragésima iteração. Os comportamentos dos erros relativos e desempenhos deste filtro são mostrados através das equações (20b), (20c) e (20d) nas Figuras 3.9-3.11 respectivamente. Verificam-se em todas as figuras um comportamento do erro relativo satisfatório que propicia a equivalência de desempenho do novo filtro proposto de 19 pontos em relação às equações (20b), (20c) e (20d) quando plotadas em um domínio real. O filtro de 19 pontos para a transformada J_2 encontra-se na Tabela 9 no APÊNDICE B.

Transformada J_2 , equação (20b).

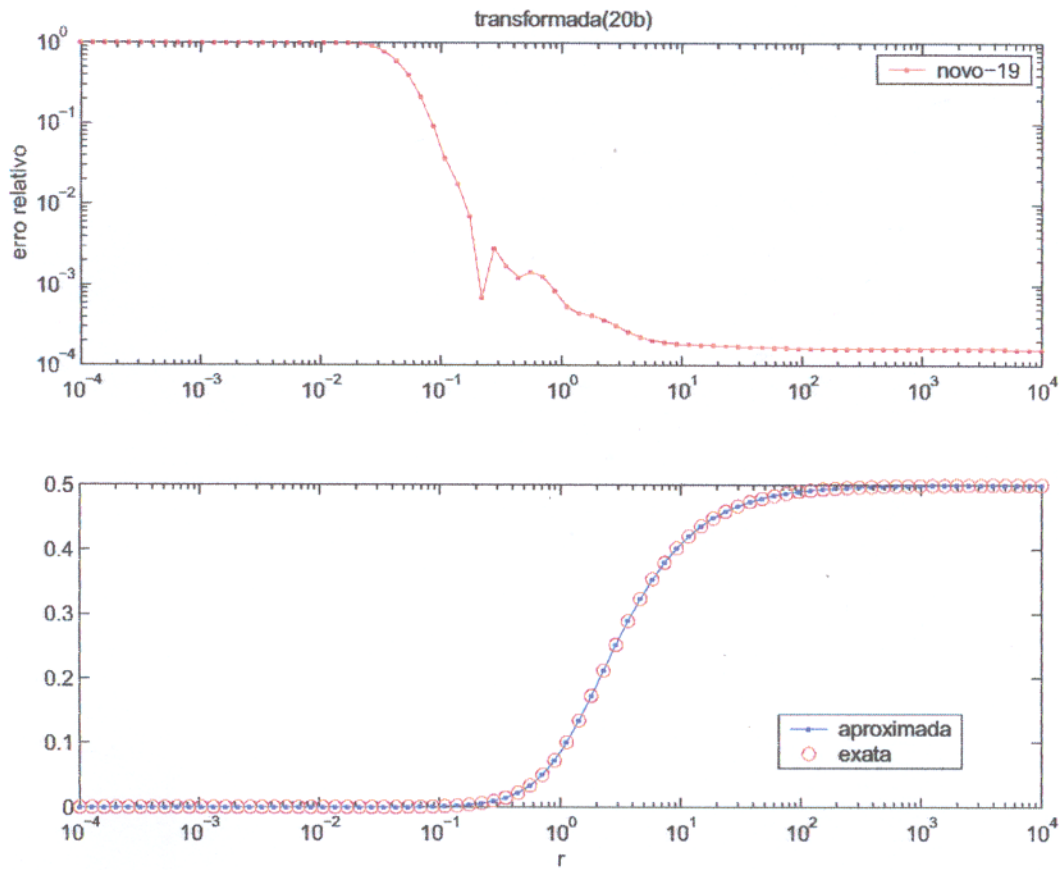


Figura 3.9. Mostra o comportamento do erro relativo e o desempenho do novo filtro J_2 de 19 pontos através da equação (20b).

Transformada J_2 , equação (20c).

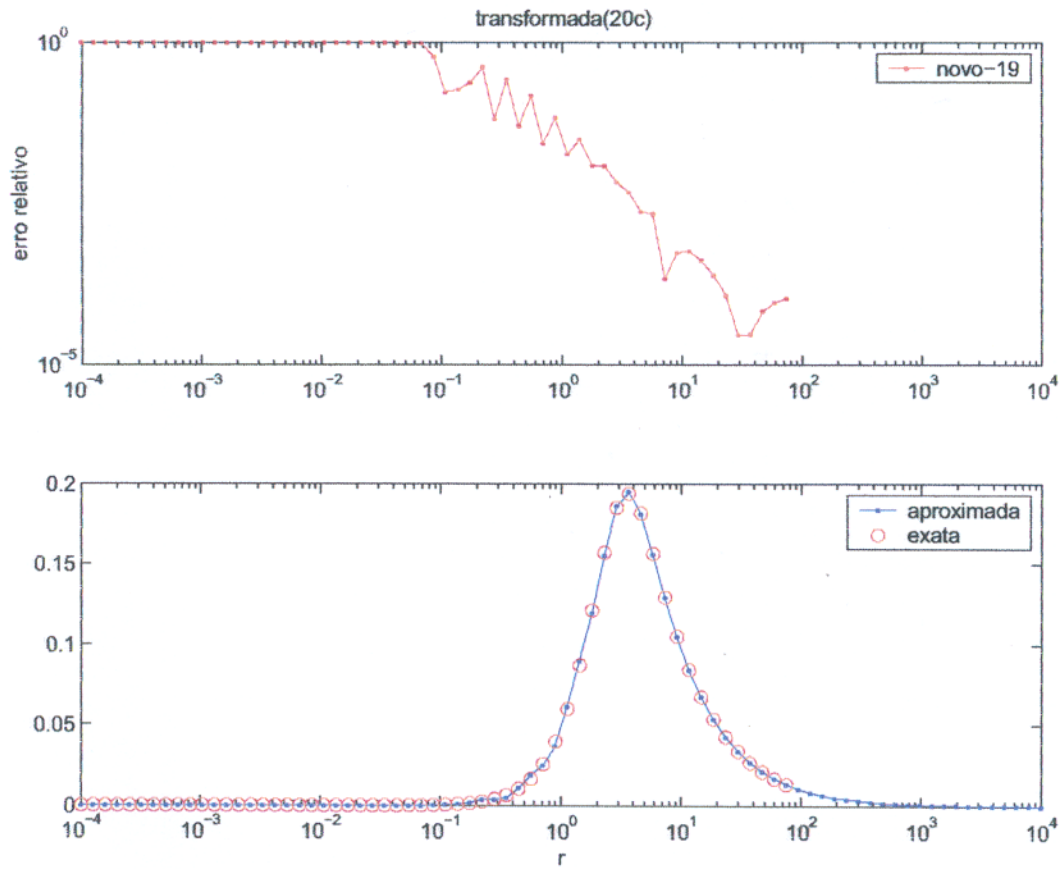


Figura 3.10 Mostra o comportamento do erro relativo e o desempenho do novo filtro J_2 de 19 pontos através da equação (20c).

Transformada J_2 , equação (20d).

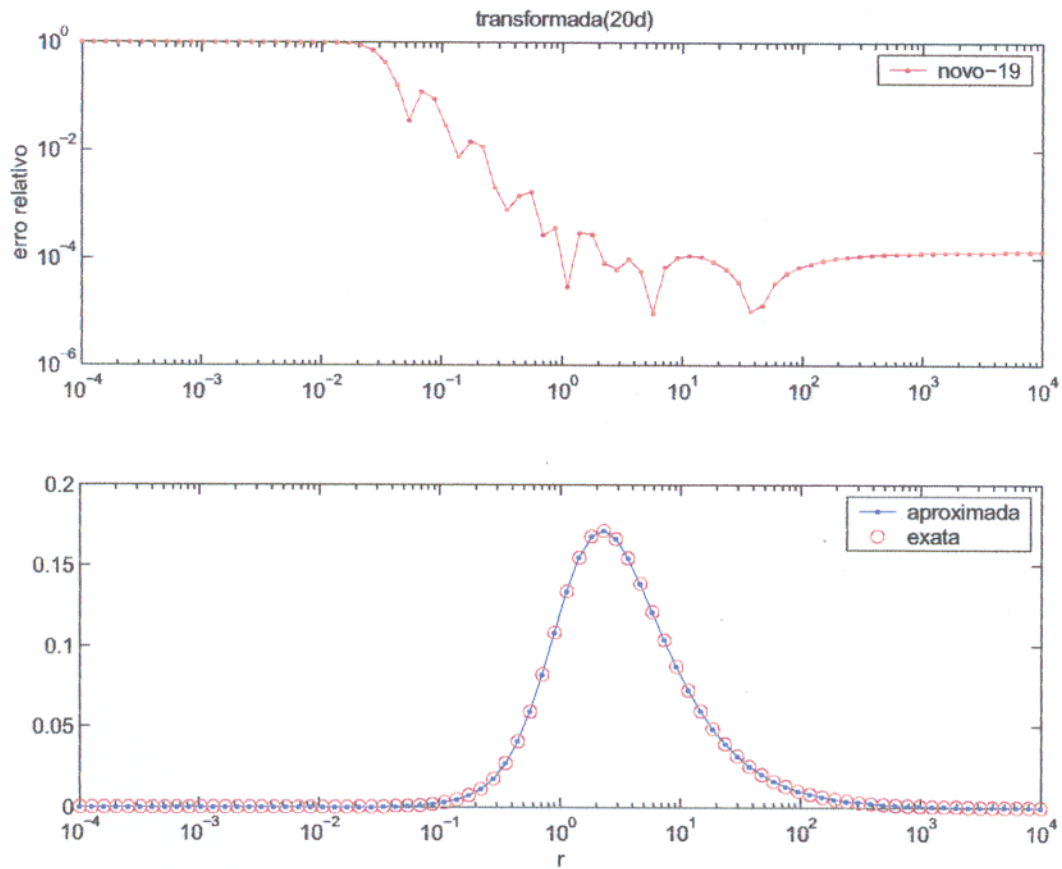


Figura 3.11. Mostra o comportamento do erro relativo e o desempenho do novo filtro J_2 de 19 pontos através da equação (20d).

4 - APLICAÇÕES

Os filtros das transformadas *co-seno*, *seno* e de Hankel J_0 e J_1 serão aplicados em transformadas típicas da prospecção geofísica eletromagnética. Os desempenhos dos filtros das transformadas *co-seno* e *seno* serão mostrados através das transformadas no domínio da frequência provenientes de um modelo constituído por dois semi-espacos em que a fonte será **uma linha infinita de corrente** na direção y e paralela à interface dos semi-espacos. Para os desempenhos dos filtros das transformadas de Hankel J_0 e J_1 , estes serão mostrados através das transformadas também no domínio da frequência provenientes de um modelo constituído por dois semi-espacos em que a fonte será em um exemplo, **um dipolo magnético vertical** e em outro exemplo, **um dipolo magnético horizontal**; tais desempenhos também serão mostrados através de modelos de três camadas provenientes de **sondagens elétricas verticas** (Schlumberger e Wenner).

4.1- LINHA INFINITA DE CORRENTE PARALELA À INTERFACE DOS SEMI-ESPAÇOS

Sejam uma linha de corrente na direção y e um ponto de observação localizados na superfície de um semi-espaco condutivo não magnético, em que a dimensão z , juntamente com a altura h_0 , desta fonte em relação à interface dos semi-espacos sejam $z=h_0=0$. Assim a componente y do campo elétrico no domínio da frequência f , sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaco condutivo é dada por Ward & Hohmann (1988) e Rijo (2001).

$$E_y^0(x,0) = -\frac{i\omega\mu_0 I(\omega)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{k_x + u} \cos(k_x x) dk_x, \quad (21)$$

a componente z do campo magnético no domínio da frequência f , sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaco condutivo é dada por

$$H_z^0(x,0) = -\frac{I(\omega)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_x}{k_x + u} \sin(k_x x) dk_x \quad (22)$$

Sob essas condições particulares as equações (21) e (22) apresentam expressões de formas fechadas equivalentes, respectivamente, a

$$E_y^0(x,0) = -\frac{i\rho I(\omega)}{\pi x^2} \left\{ 1 - \frac{x(1+i)}{\delta} K_1\left[\frac{x(1+i)}{\delta}\right] \right\} \quad (23)$$

$$e \quad H_z^0(x,0) = -\frac{i\delta^2 I(\omega)}{\pi x^3} \left\{ 1 - \frac{x(1+i)}{\delta} K_1\left[\frac{x(1+i)}{\delta}\right] - \frac{ix^2}{\delta^2} K_0\left[\frac{x(1+i)}{\delta}\right] \right\}, \quad (24)$$

em que $u = (k_x^2 + i\omega\mu_0\sigma)^{1/2}$ é a constante de propagação no semi-espaço condutivo, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ é a permeabilidade magnética no vácuo, $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular de corrente, $\sigma = 1/\rho$ é a condutividade elétrica no meio condutivo, IA é a corrente elétrica, $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ é o *skin-depth* no meio condutivo e K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem 0 e 1, respectivamente.

Com as equações (21) e (22) devidamente normalizadas, avaliaremos os desempenhos dos filtros lineares das transformadas *co-seno* e *seno* em relação as equações (23) e (24) respectivamente. Tais desempenhos são ilustrados nas Figuras 4.1-4.16, tanto com os novos filtros de 19, 30 e 40 pontos das transformadas *co-seno* e *seno* quanto com os filtros propostos por Rijo (1993) e Nissen & Enmark (1986) das referidas transformadas, respectivamente.

Verificam-se nas Figuras 4.2, 4.4 e 4.6 os melhores desempenhos (sobre a fase do campo elétrico) do novo filtro *co-seno* de 19 pontos em relação aos desempenhos do filtro *co-seno* de 19 pontos proposto por Rijo (1993) e que são mostrados nas Figuras 4.1, 4.3 e 4.5 respectivamente, quando são aplicados na equação (21). Verifica-se na Figuras 4.8 a equivalência de desempenho entre o novo filtro *co-seno* 19 pontos e o filtro *co-seno* de 19 pontos proposto por Rijo (1993) e que é mostrado na Figura 4.7. Finalmente, verificam-se nas Figuras 4.10, 4.12, 4.14 e 4.16 a equivalência de desempenhos entre o novo filtro *seno*

19 pontos e o filtro *seno* de 20 pontos proposto por Nissen & Enmark (1986) e que são mostrados nas Figuras 4.9, 4.11, 4.13 e 4.15, respectivamente, quando são aplicados na equação (22).

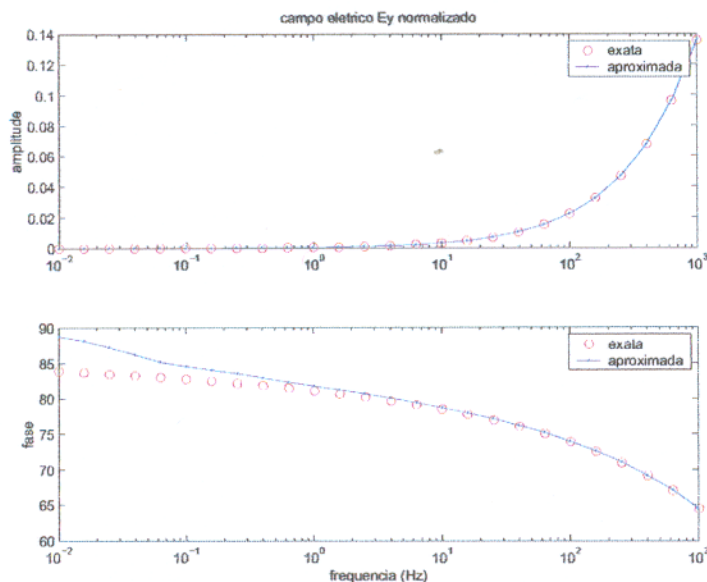


Figura 4.1. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 100 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de 500 Ωm .

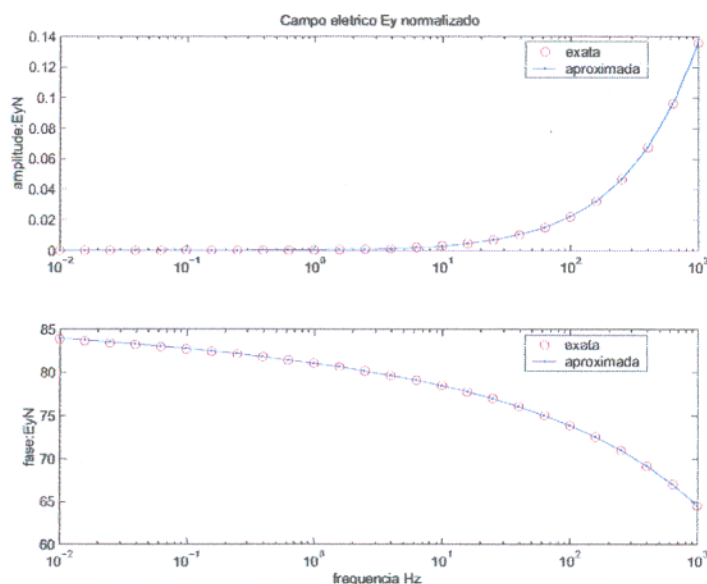


Figura 4.2. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *co-seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 100 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de 500 Ωm . Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo elétrico) do novo filtro *co-seno* 19 pontos em relação ao desempenho do filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993) mostrado na Figura 4.1.

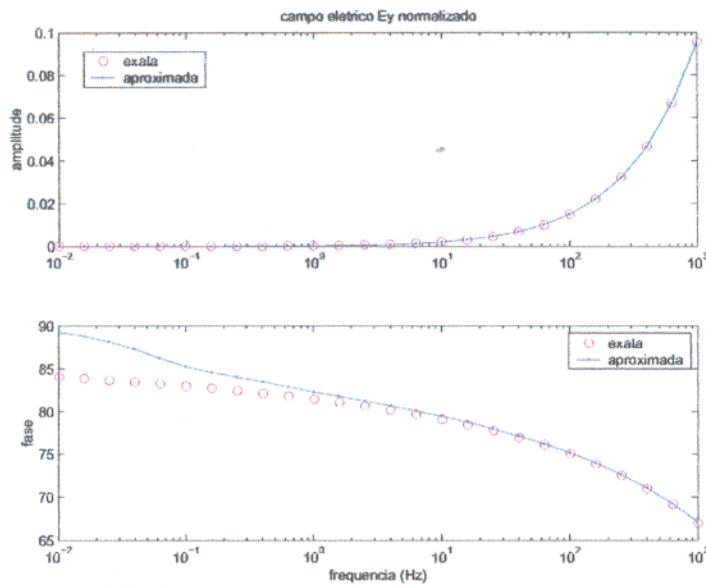


Figura 4.3. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 50 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $200 \Omega m$.

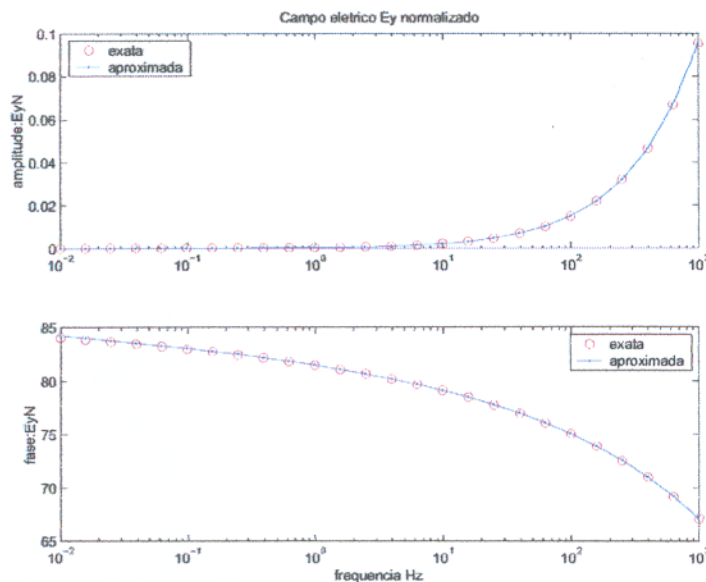


Figura 4.4. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *co-seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 50 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $200 \Omega m$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo elétrico) do novo filtro *co-seno* 19 pontos em relação ao desempenho do filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993) mostrado na Figura 4.3.

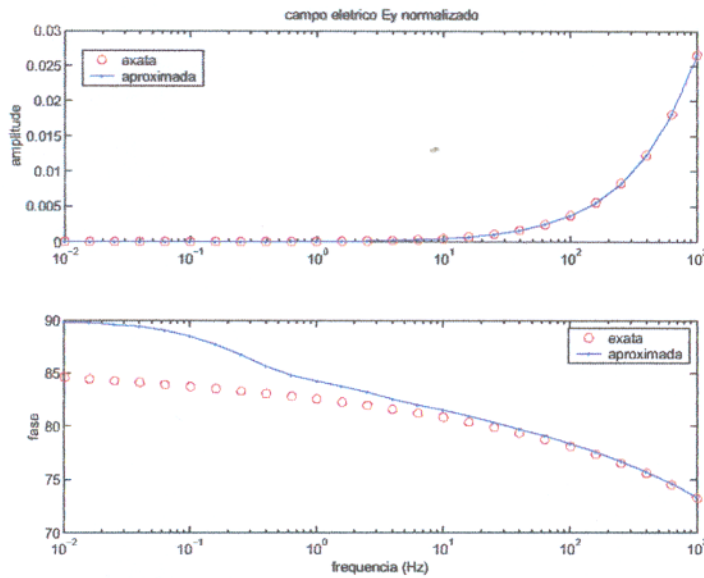


Figura 4.5. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 50 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $1000 \Omega m$.

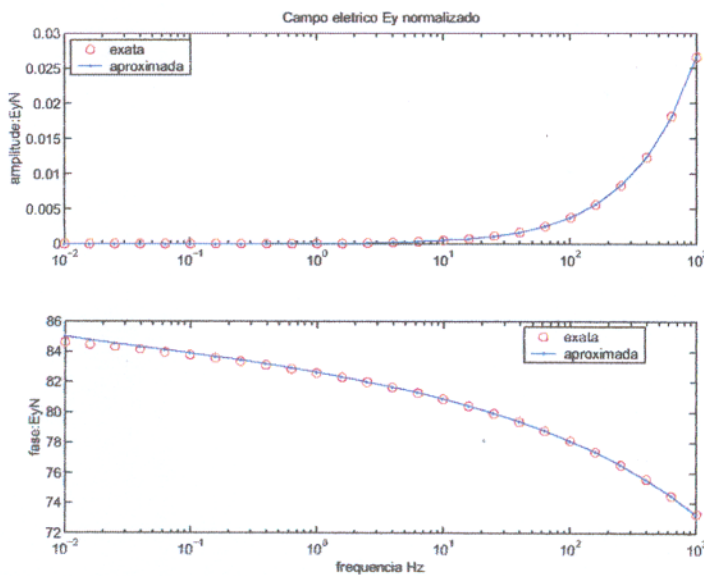


Figura 4.6. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *co-seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 50 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $1000 \Omega m$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo elétrico) do novo filtro *co-seno* 19 pontos em relação ao desempenho do filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993) mostrado na Figura 4.5.

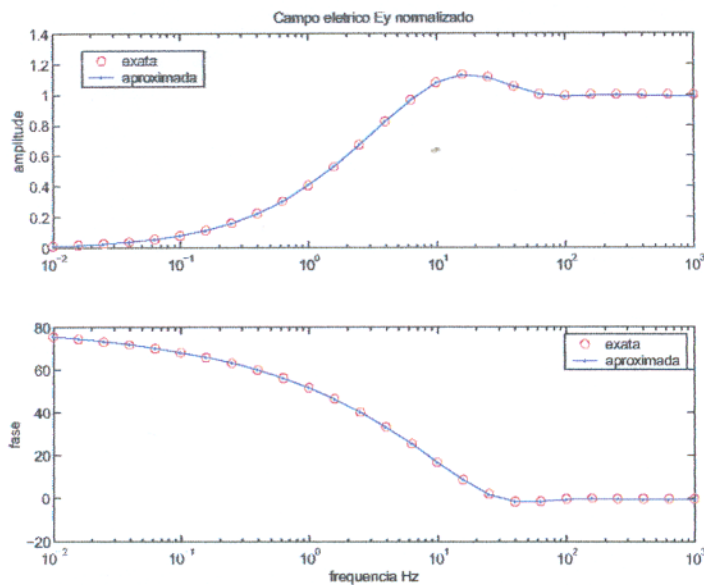


Figura 4.7. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $10\ \Omega\text{m}$.

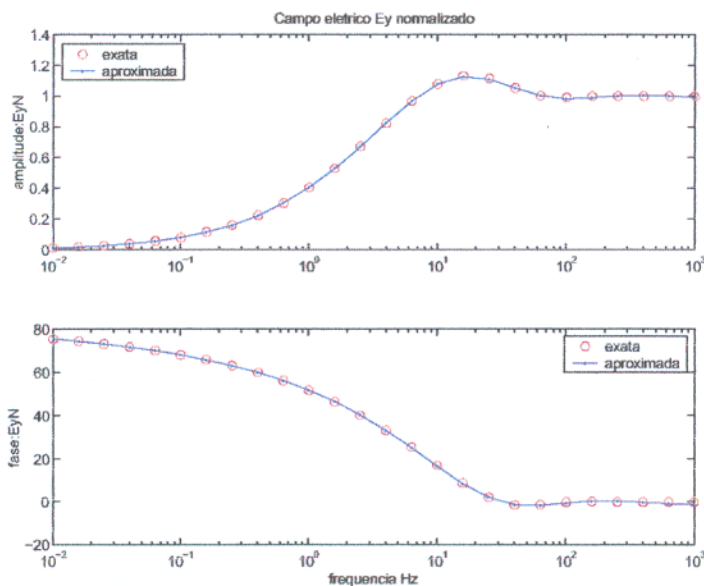


Figura 4.8. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *co-seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $10\ \Omega\text{m}$. Verifica-se a equivalência de desempenho do novo filtro *co-seno* 19 pontos em relação ao desempenho do filtro *co-seno* 19 pontos (Rijo, 1993) mostrado na Figura 4.7.

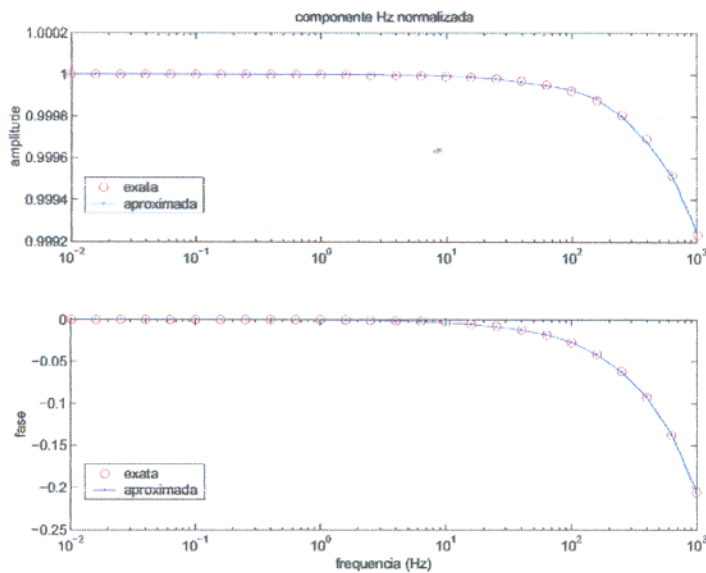


Figura 4.9. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $200\ \Omega\text{m}$.

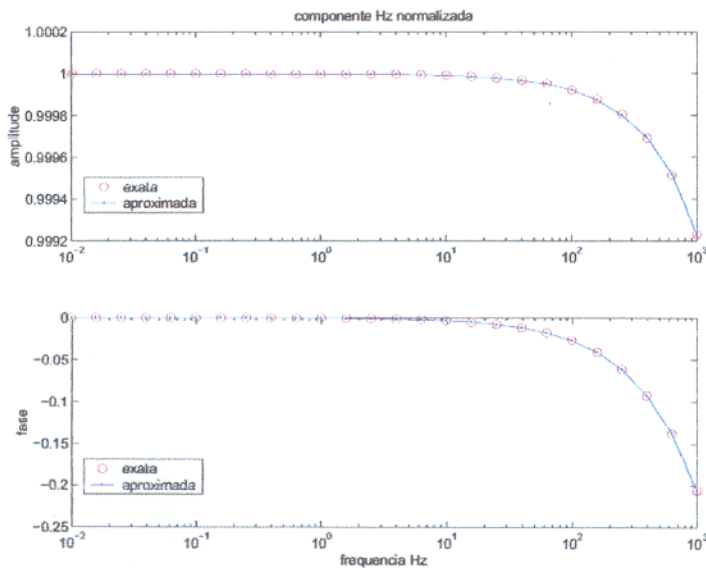


Figura 4.10. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $200\ \Omega\text{m}$. Verifica-se a equivalência de desempenho do novo filtro *seno* 19 pontos em relação ao desempenho do filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986) mostrado na **Figura 4.9**.

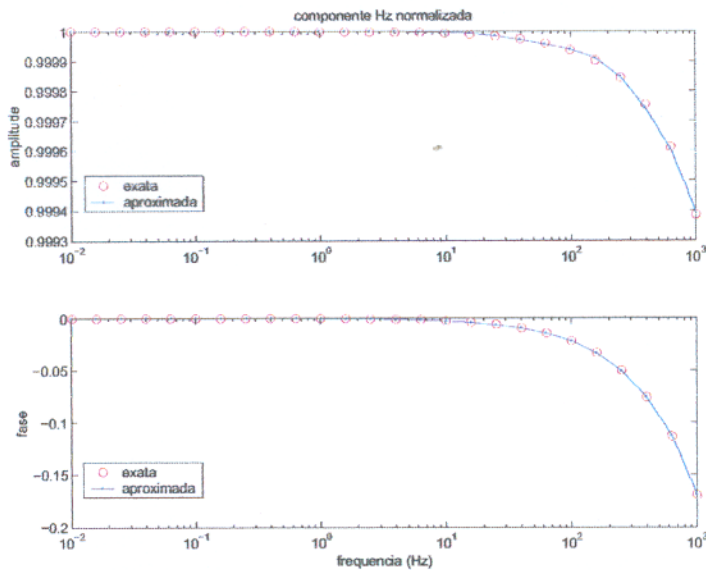


Figura 4.11. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 20 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaço de $1000 \Omega m$.

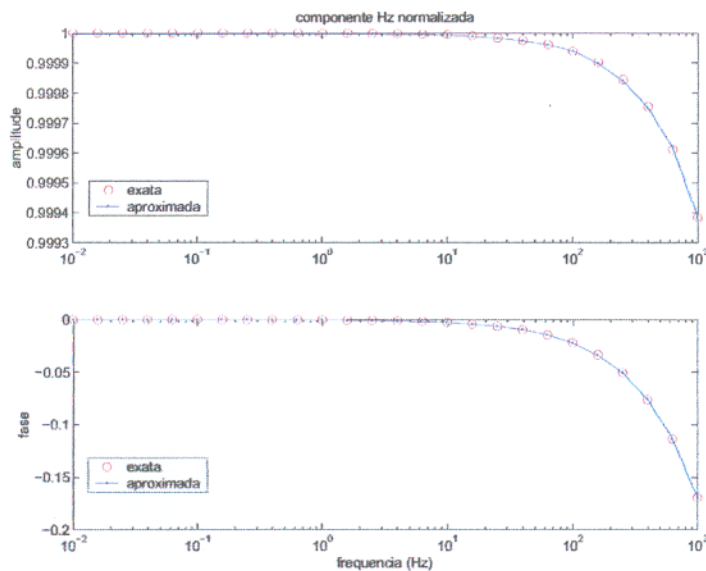


Figura 4.12. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 20 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaço de $1000 \Omega m$. Verifica-se a equivalência desempenho do novo filtro *seno* 19 pontos em relação ao desempenho do filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark 1986) mostrado na **Figura 4.11**.

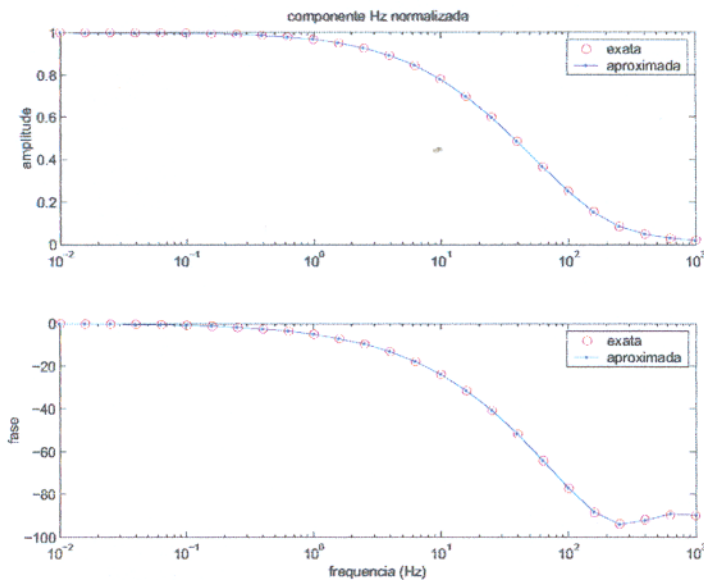


Figura 4.13. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 500 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $10 \Omega m$.

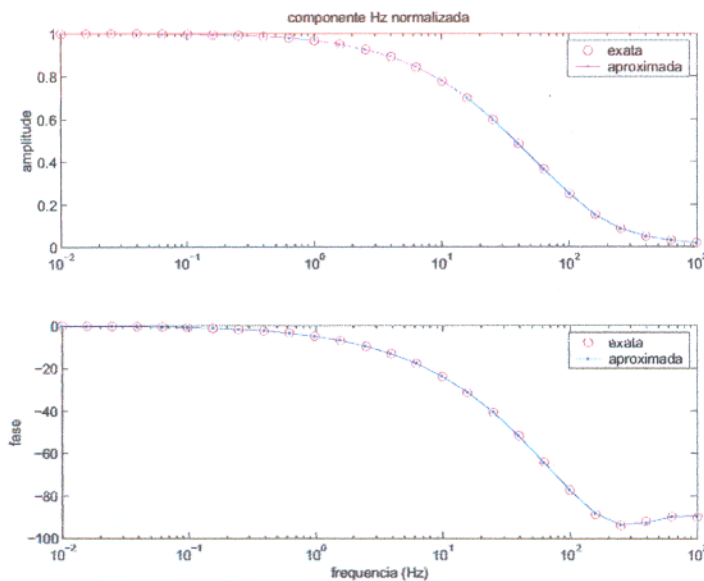


Figura 4.14. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 500 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $10 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro *seno* 19 pontos e o filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986) mostrado na **Figura 4.13**.

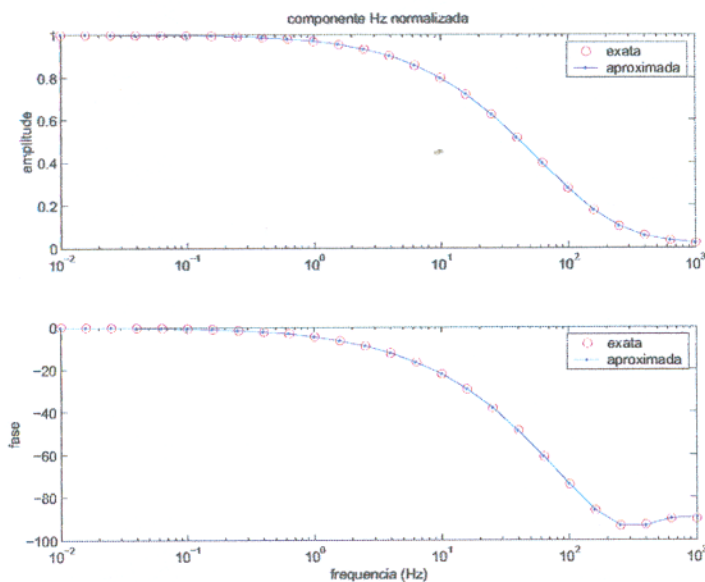


Figura 4.15. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $45 \Omega m$.

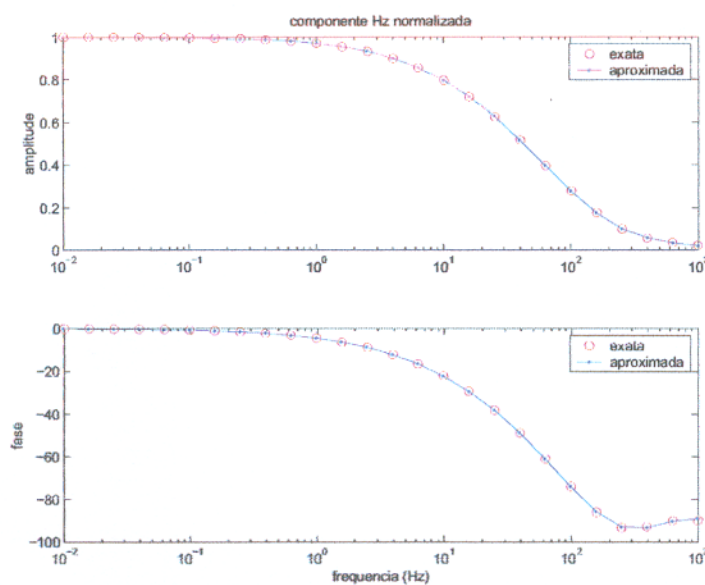


Figura 4.16. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro *seno* 19 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m de uma linha de corrente (1 A) na superfície de um semi-espaco de $45 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro *seno* 19 pontos e o filtro *seno* 20 pontos (Nissen & Enmark, 1986) mostrado na **Figura 4.15**.

4.2 - DIPOLO MAGNÉTICO VERTICAL NA INTERFACE DOS SEMI-ESPAÇOS

Sejam um dipolo magnético vertical e o ponto de observação localizados na superfície de um semi-espaço não magnético, em que a dimensão z , juntamente com a altura h_0 desta fonte em relação à interface dos semi-espaços sejam $z=h_0=0$. Assim componente z do campo magnético no domínio da frequência f , sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaço é dada por Rijo (2001).

$$H_z^0(r,0) = \frac{1}{i\omega\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi^0), \quad (25)$$

A componente ϕ do campo elétrico no domínio da frequência f , sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaço é dada por Rijo (2001).

$$E_\phi^0(r,0) = -\frac{i\omega\mu_0 m_z}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k_r + u} J_1(k_r r) k_r^2 dk_r, \quad (26)$$

e, finalmente, a componente r do campo magnético, gerado pelas correntes induzidas no semi-espaço inferior, no domínio da frequência f e sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaço é dada por Rijo (2001).

$$H_r^0(r,0) = \frac{m_z}{4\pi} \int_0^\infty \left(1 - \frac{k_r - u}{k_r + u}\right) J_1(k_r r) k_r^2 dk_r, \quad (27)$$

Sob essas condições particulares as equações (25), (26) e (27) apresentam expressões de formas fechadas equivalentes, respectivamente, a

$$H_z^0(r,0) = -\frac{m_z}{2\pi k_1 r^5} \left[9 - (9 + 9ik_1 r - 4k_1^2 r^2 - ik_1^3 r^3) e^{-ik_1 r} \right] \quad (28)$$

$$E_{\phi}^0(r,0) = -\frac{m_z}{2\pi\sigma r^4} \left[3 - (3 + 3ik_1 r - k_1^2 r^2) e^{-ik_1 r} \right], \quad (29)$$

$$e \quad H_r^0(r,0) = \frac{m_z k_1^2}{4\pi} \left[I_0\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) K_1\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) - I_2\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) K_2\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) \right] \quad (30)$$

em que $u = (k_x^2 + i\omega\mu_0\sigma)^{1/2}$ é a constante de propagação no semi-espaço inferior, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ é a permeabilidade magnética no vácuo, $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular de corrente, $\sigma = 1/\rho$ é a condutividade elétrica no semi-espaço inferior, $m_z = I(\omega)\pi a^2$ é o momento do dipolo magnético vertical (a é o raio do dipolo; $a \rightarrow 0$), IA é a corrente elétrica, I_0 , I_1 e I_2 são as funções de Bessel modificadas de primeira espécie de ordens 0, 1 e 2, respectivamente, e K_0 , K_1 e K_2 são as funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordens 0, 1 e 2 respectivamente, (Ward & Hohmann, 1988; Rijo, 2001).

Com as equações (25), (26) e (27), devidamente normalizadas, avaliaremos os desempenhos dos filtros lineares das transformadas J_0 e J_1 em relação às equações (28), (29) e (30) respectivamente. Tais desempenhos são ilustrados nas Figuras 4.17-4.38, tanto com novos filtros otimizados de 37 e 27 pontos das transformadas J_0 e J_1 , respectivamente, como com os filtros de 61 e 47 pontos das respectivas transformadas J_0 e J_1 propostos por Guptasarma & Singh (1997).

Verificam-se nas Figuras 4.18, 4.20, 4.22 e 4.24 a equivalência de desempenhos do novo filtro J_0 de 37 ponto em relação aos desempenhos do filtro J_0 de 61 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que são mostrados nas Figuras 4.17, 4.19, 4.21 e 4.23, respectivamente, quando são aplicados na equação (25). Verifica-se na Figura 4.26 o melhor desempenho (sobre a fase do campo elétrico) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que é mostrado na Figura 4.25, respectivamente, quando são aplicados na equação (26). Verificam-se nas Figuras 4.28 e 4.30 a equivalência de desempenhos do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação aos desempenhos do filtro J_1 de 47 pontos proposto por Guptasarma

& Singh (1997) e que são mostrados nas Figuras 4.27 e 4.29, respectivamente, quando são aplicados na equação (26). Finalmente, verificam-se nas Figuras 4.32, 4.34, 4.36 e 4.38 melhores desempenhos (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_I de 27 pontos em relação aos desempenhos do filtro J_I de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que são mostrados nas Figuras 4.31, 4.33, 4.35 e 4.37, respectivamente, quando são aplicados na equação (27).

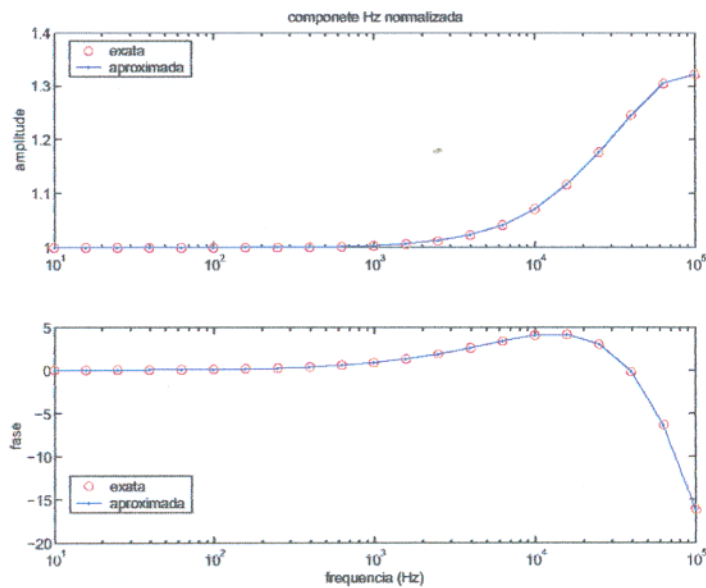


Figura 4.17. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $1000\ \Omega\text{m}$.

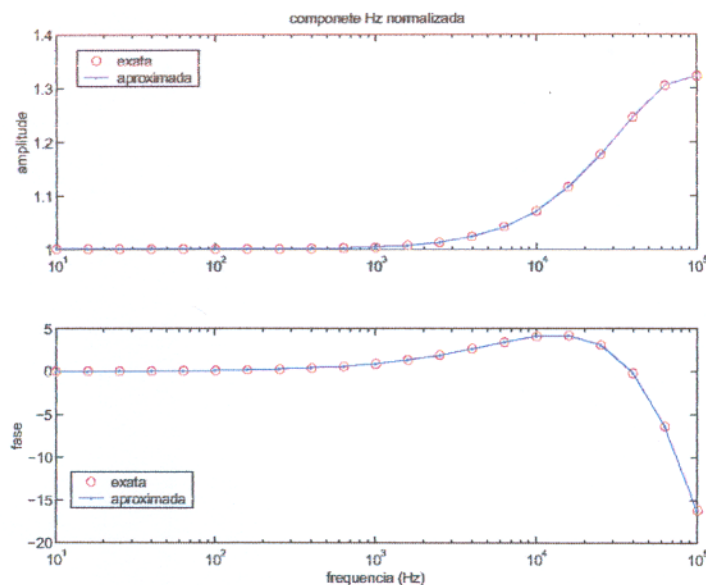


Figura 4.18. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $1000\ \Omega\text{m}$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na Figura 4.17.

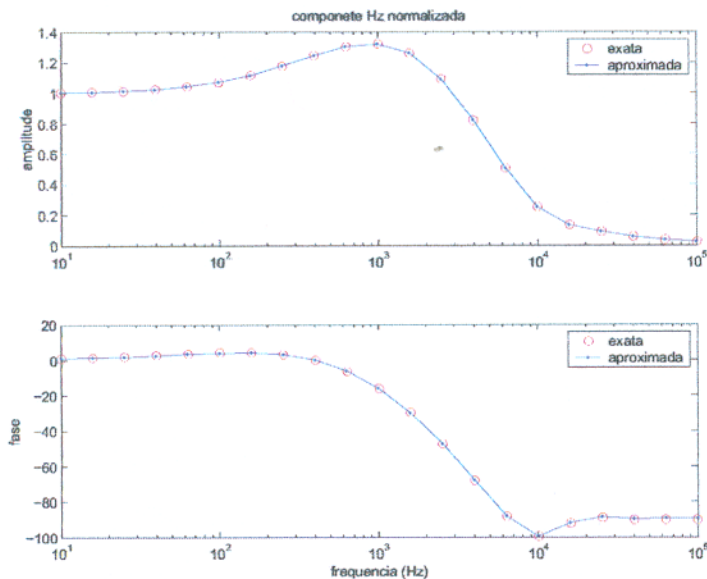


Figura 4.19. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espço de $10 \Omega m$.

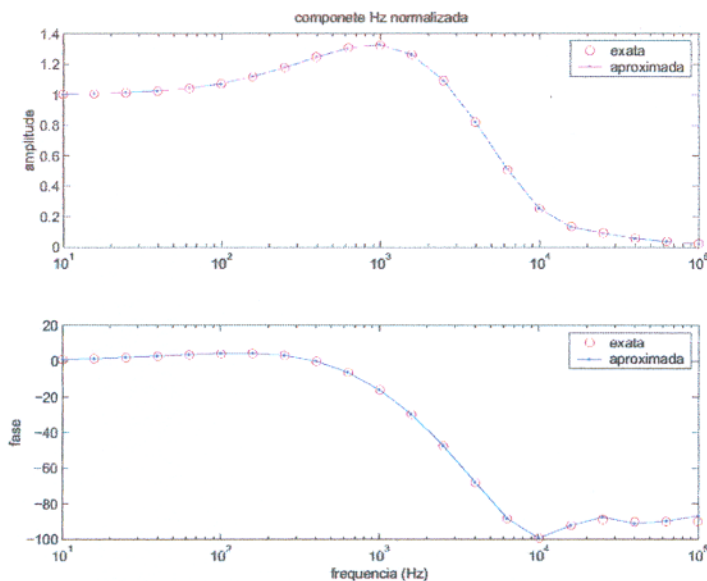


Figura 4.20. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espço de $10 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.19**.

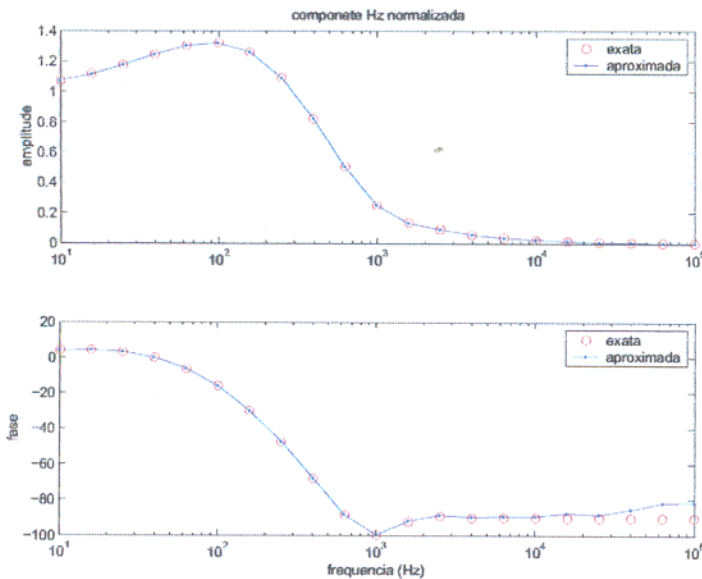


Figura 4.21. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $100 \Omega m$.

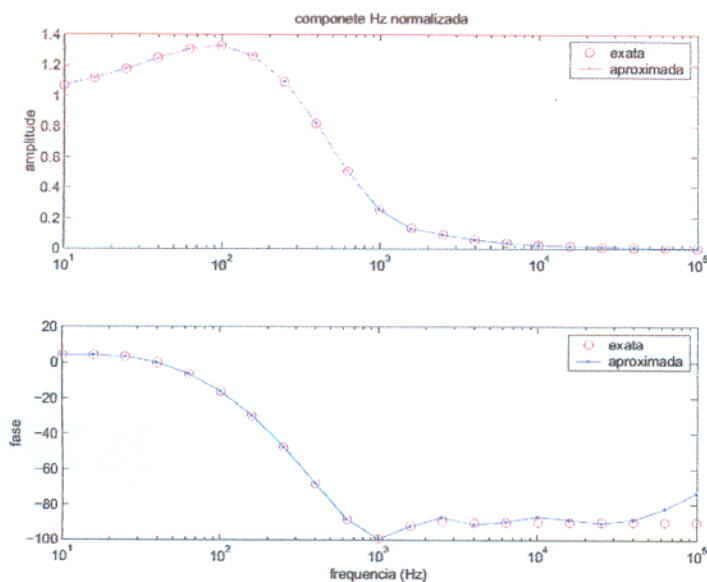


Figura 4.22. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $100 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_0 37p e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.21**.

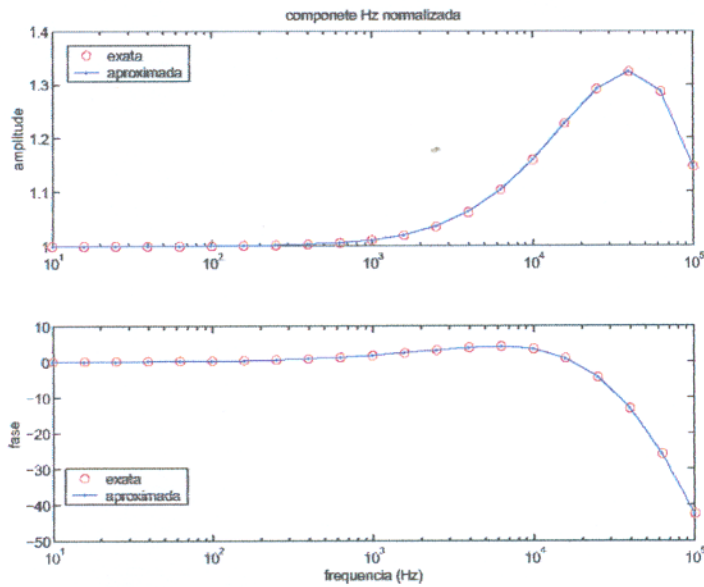


Figura 4.23. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1982)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $450 \Omega m$.

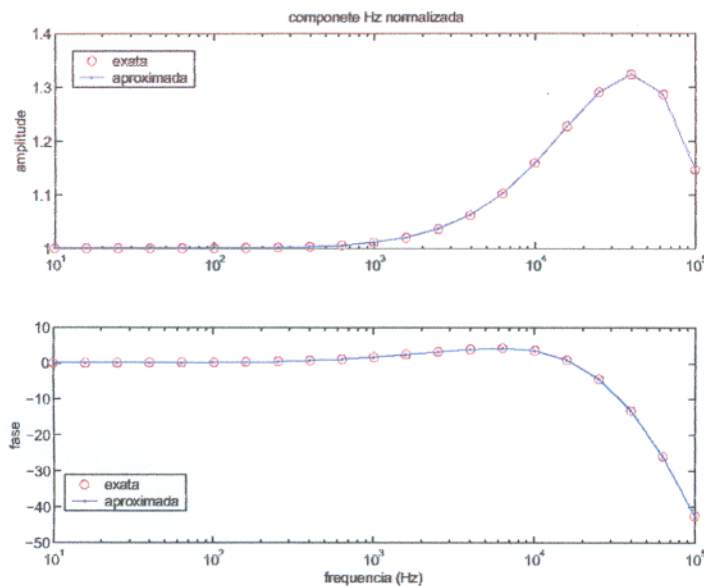


Figura 4.24. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $450 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.23**.

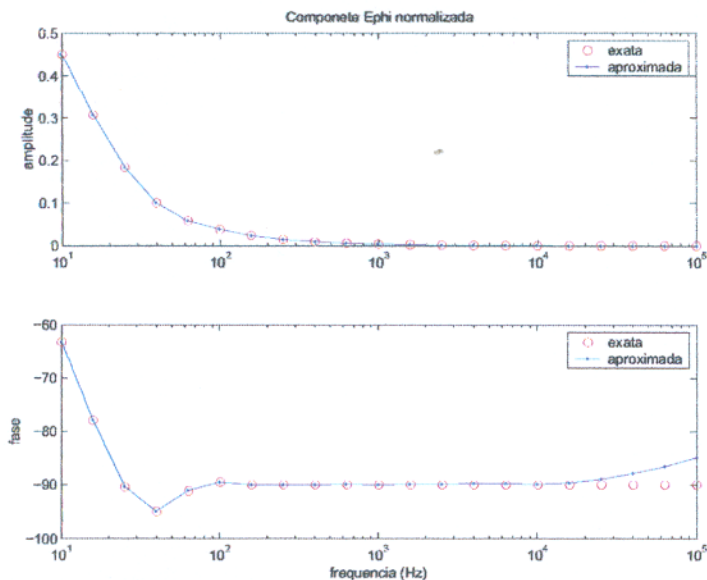


Figura 4.25. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $5 \Omega m$.

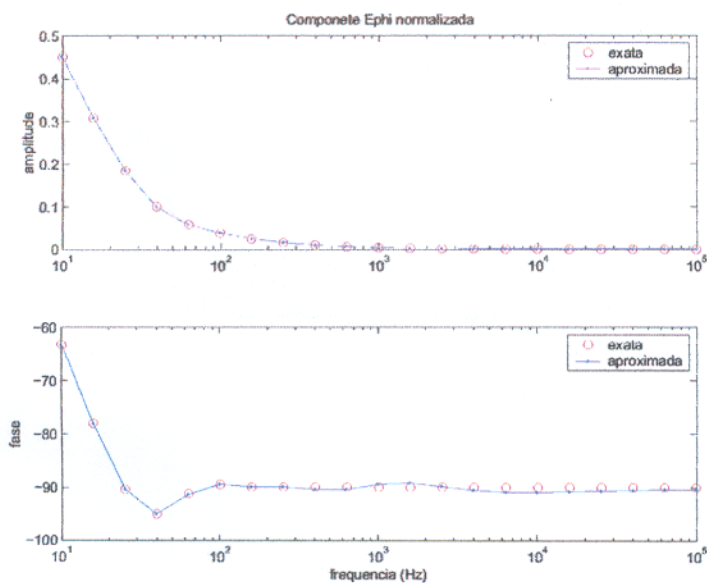


Figura 4.26. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $5 \Omega m$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo elétrico) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.25**.

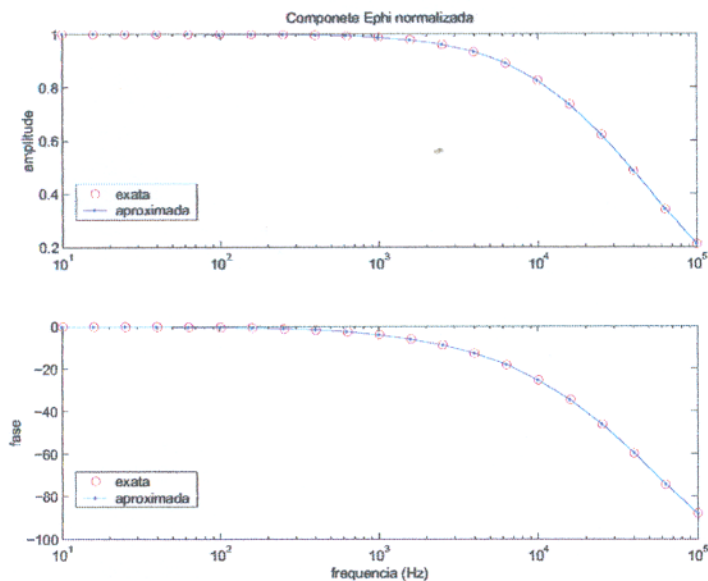


Figura 4.27. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 300 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $2000\ \Omega\text{m}$.

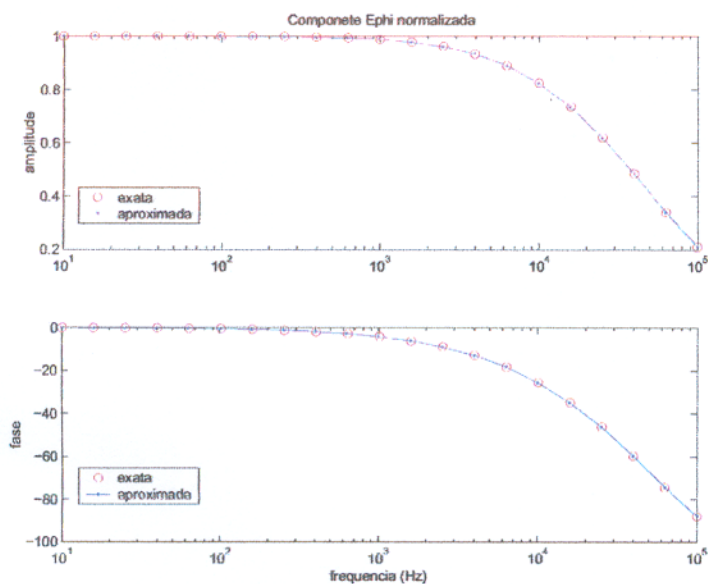


Figura 4.28. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 300 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $2000\ \Omega\text{m}$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.27**.

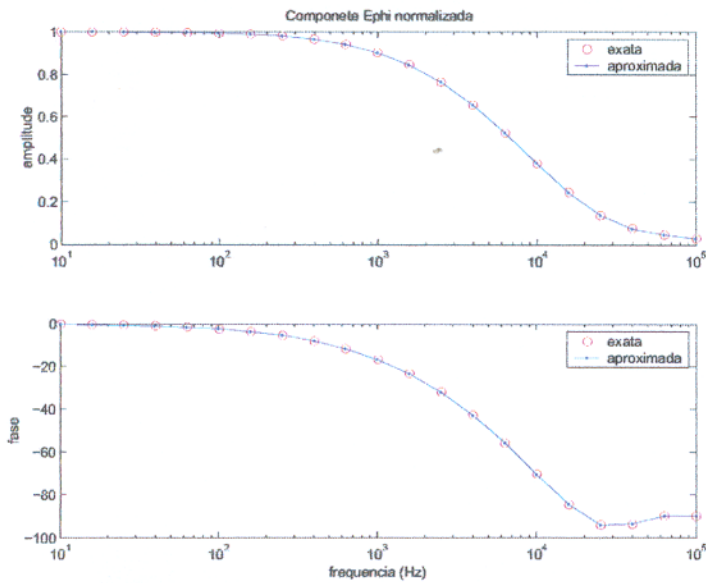


Figura 4.29. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 500 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 1000 Ωm .

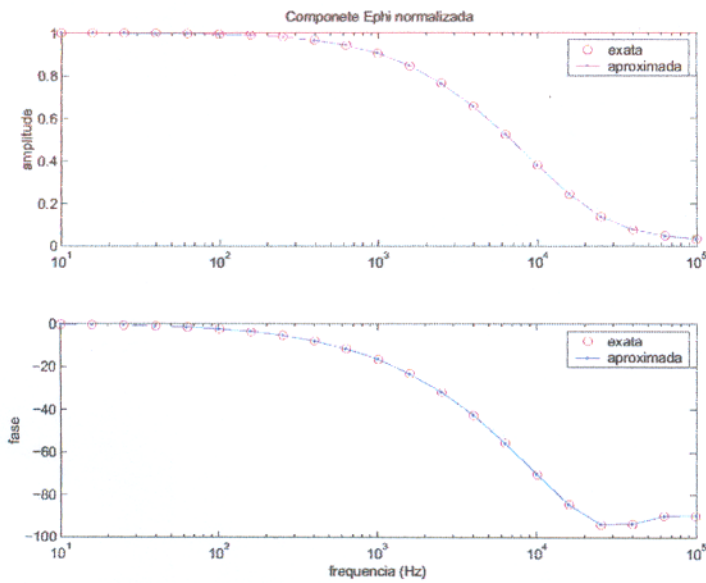


Figura 4.30. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo elétrico normalizado, no domínio da frequência, a 500 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 1000 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.29**.

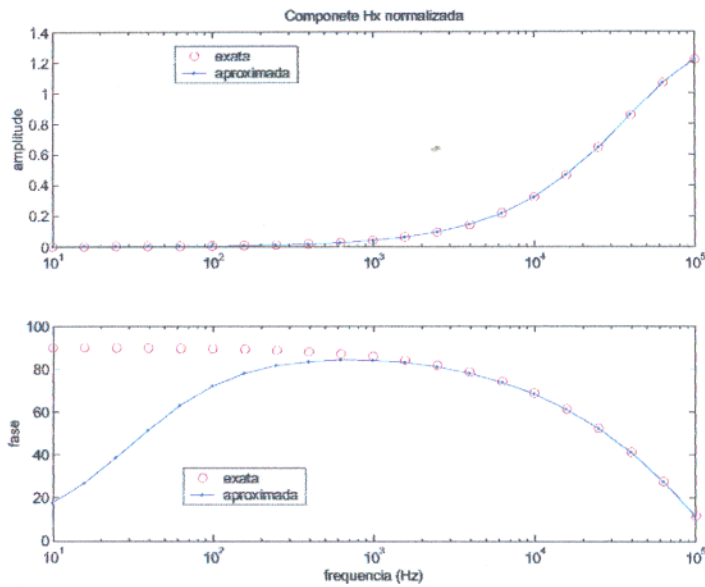


Figura 4.31. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $500\ \Omega\text{m}$.

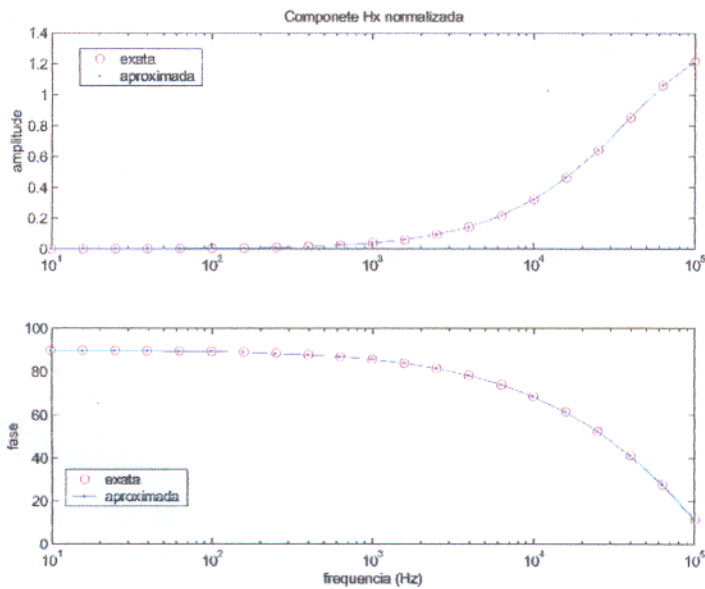


Figura 4.32. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $500\ \Omega\text{m}$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.31**.

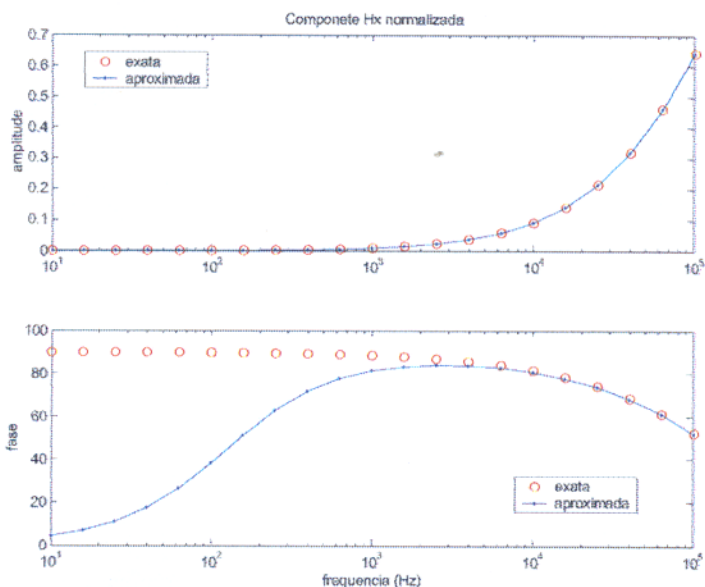


Figura 4.33. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 50 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 500 Ωm .

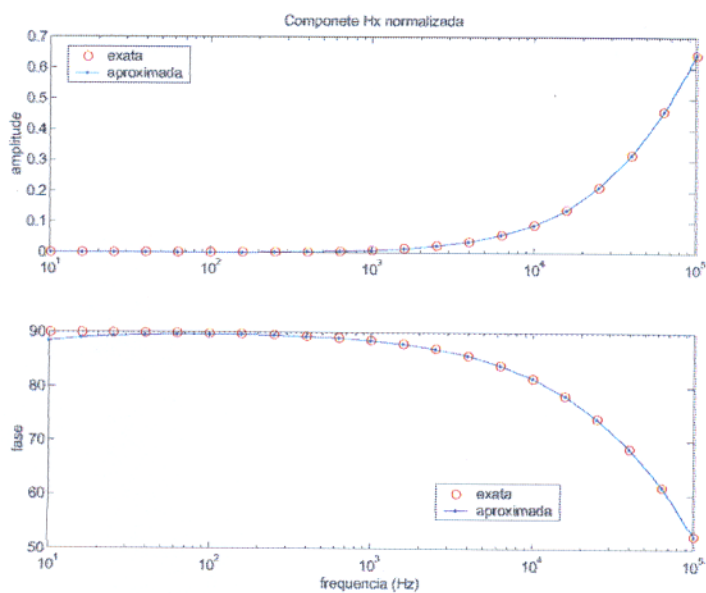


Figura 4.34. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 50 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 500 Ωm . Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.33**.

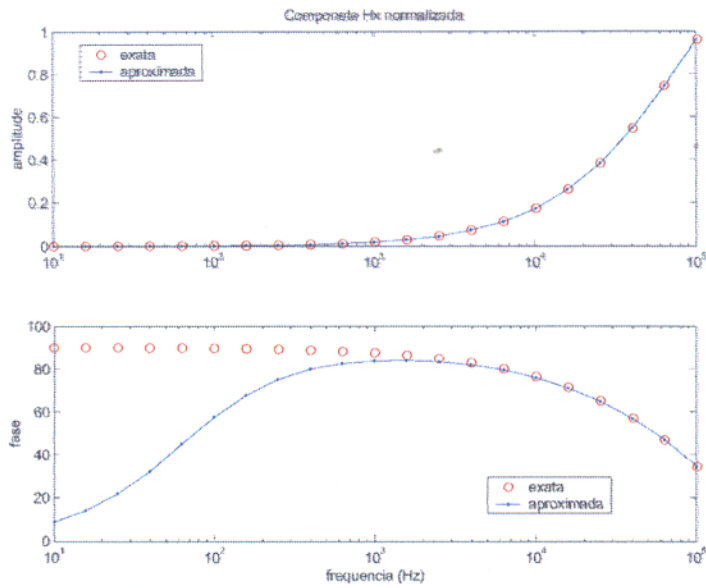


Figura 4.35. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espço de $1000 \Omega m$.

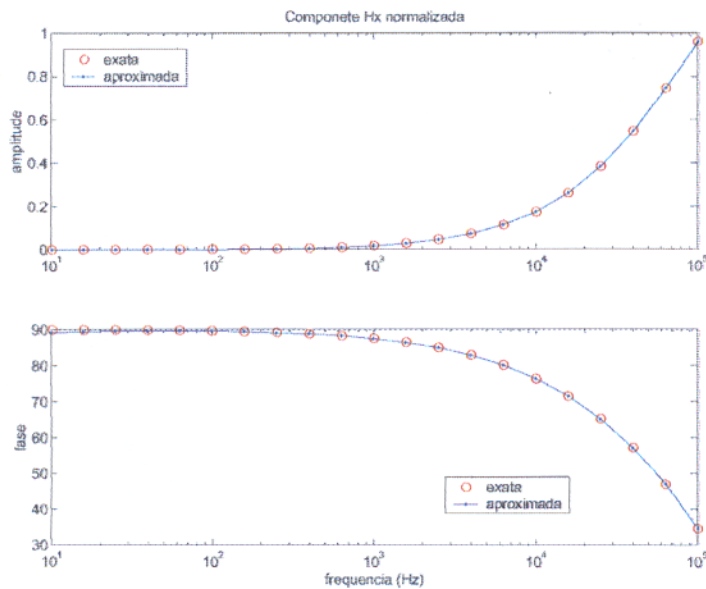


Figura 4.36. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espço de $1000 \Omega m$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.35**.

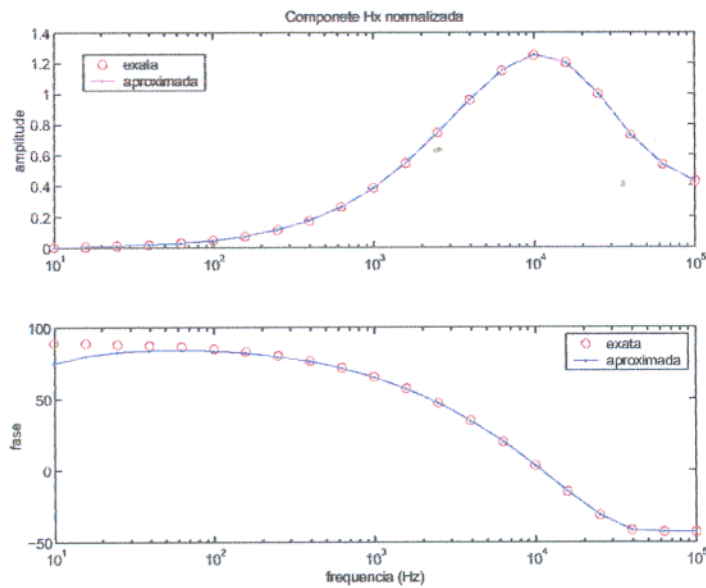


Figura 4.37. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 500 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $1000\ \Omega\text{m}$.

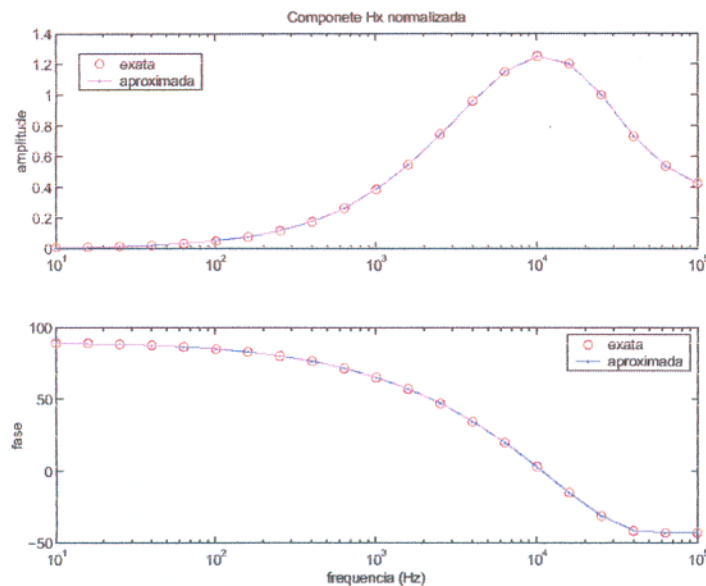


Figura 4.38. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 500 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $1000\ \Omega\text{m}$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.37**.

4.3 - DIPOLO MAGNÉTICO HORIZONTAL NA INTERFACE DOS SEMI-ESPAÇOS.

Sejam um o dipolo magnético horizontal e o ponto de observação localizados na superfície de um semi-espaço não magnético, em que a dimensão z , juntamente com a altura h_0 desta fonte em relação à interface dos semi-espaços sejam $z=h_0=0$. Assim a componente x do campo magnético no domínio da frequência f (com $x=r$), sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaço e supondo $y=0$ é dada por Rijo (2001).

$$H_r^0(r,0,0) = \frac{m_x}{4\pi r} \int_0^\infty \frac{2u}{k_r + u} J_1(k_r r) k_r dk_r - \frac{m_x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2u}{k_r + u} J_0(k_r r) k_r^2 dk_r. \quad (31)$$

A componente ϕ do campo magnético no domínio da frequência f (com $y=r$), sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaço e supondo $x=0$ é dada por Rijo (2001).

$$H_\phi^0(0,y,0) = -\frac{m_x}{4\pi r} \int_0^\infty \frac{2u}{k_r + u} J_1(k_r r) k_r dk_r, \quad (32)$$

e, finalmente, a componente z do campo magnético, gerado pelas correntes induzidas no semi-espaço inferior, no domínio da frequência f (com $x=r$), e sob a condição quase estática, na superfície de um semi-espaço é dada por Rijo (2001).

$$H_z^0(x,0,0) = \frac{m_x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2k_r}{k_r + u} J_1(k_r r) k_r^2 dk_r. \quad (33)$$

Sob essas condições particulares as equações (31), (32) e (33) apresentam expressões em coordenada cilíndrica de formas fechadas equivalentes, respectivamente, a

$$H_r(r,0) = -\frac{m_x}{2\pi k_1^2 r^5} \left[12 + 2k_1^2 r^2 - (12 + 12ik_1 r - 5k_1^2 r^2 - ik_1^3 r^3) e^{-ik_1 r} \right], \quad (34)$$

$$H_\theta(r,0) = -\frac{m_x}{2\pi k_1^2 r^5} \left[3 + k_1^2 r^2 - (3 + 3ik_1 r - ik_1^3 r^3) e^{-ik_1 r} \right] \quad (35)$$

$$e \quad H_z(r,0) = -\frac{m_x k_1^2 x}{4\pi r} \left[I_1\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) K_1\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) - I_2\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) K_2\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) \right] \quad (36)$$

em que $u = (k_x^2 + i\omega\mu_0\sigma)^{1/2}$ é a constante de propagação no semi-espaço inferior, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ é a permeabilidade magnética no vácuo, $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular de corrente, $\sigma = 1/\rho$ é a condutividade elétrica no semi-espaço inferior, $m_x = I(\omega)\pi a^2$ é o momento do dipolo magnético horizontal (a é o raio do dipolo), I é a corrente elétrica, I_0 , I_1 e I_2 são as funções de Bessel modificadas de primeira espécie de ordens 0, 1 e 2, respectivamente e K_0 , K_1 e K_2 são as funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordens 0, 1 e 2 respectivamente, (Ward & Hohmann, 1988; Rijo, 2001).

Através das equações (31), (32) e (33) devidamente normalizadas, avaliaremos os desempenhos dos filtros lineares das transformadas J_θ e J_I em relação às equações (34), (35) e (36) respectivamente. Tais desempenhos são ilustrados nas Figuras 4.39-4.62, tanto com novos filtros otimizados de 37 e 27 pontos das transformadas J_θ e J_I , respectivamente, como com os filtros de 61 e 47 pontos das respectivas transformadas J_θ e J_I propostos por Guptasarma & Singh (1997).

Verificam-se nas Figuras 4.40, 4.42 e 4.44 melhores desempenhos (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_I de 27 pontos em relação aos desempenhos do filtro J_I de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que são mostrados nas Figuras 4.39, 4.41 e 4.43, respectivamente, quando são aplicados na equação (33). Verifica-se na Figura 4.46 a equivalência de desempenho do novo filtro J_I de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_I de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que é

mostrado na Figuras 4.45, respectivamente, quando são aplicados na equação (33). Verificam-se nas Figuras 4.48, 4.50, 4.52 e 4.54 a equivalência de desempenhos dos novos filtros J_1 de 27 pontos e J_0 de 37 pontos em relação aos desempenhos dos filtros J_1 de 47 pontos e J_0 de 61 pontos propostos por Guptasarma & Singh (1997) e que são mostrados nas Figuras 4.47, 4.49, 4.51 e 4.53 respectivamente, quando são aplicados na equação (31). Verificam-se nas Figuras 4.56, 4.58 e 4.60 as equivalências de desempenhos do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação aos desempenhos do filtro J_1 de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que são mostrados nas Figuras 4.55, 4.57 e 4.59, respectivamente, quando são aplicados na equação (32). Verifica-se na Figuras 4.62 melhor desempenho (sobre a amplitude do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997) e que é mostrado na Figuras 4.61, respectivamente, quando são aplicados na equação (32).

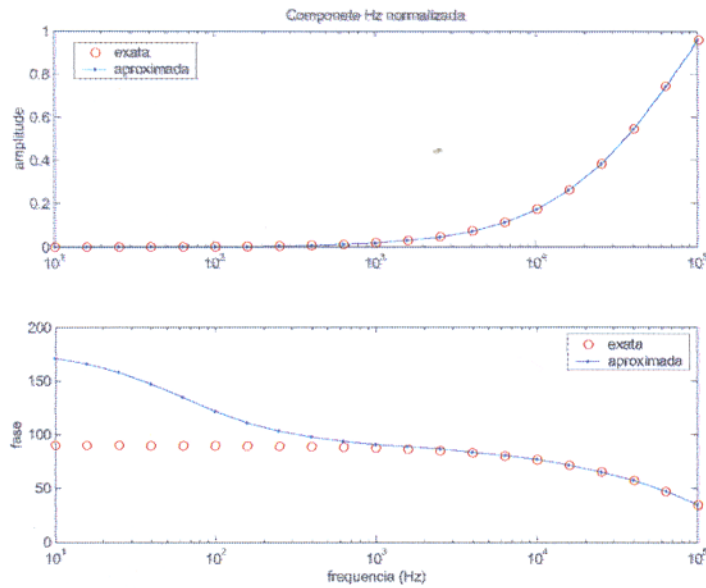


Figura 4.39. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $10 \Omega m$.

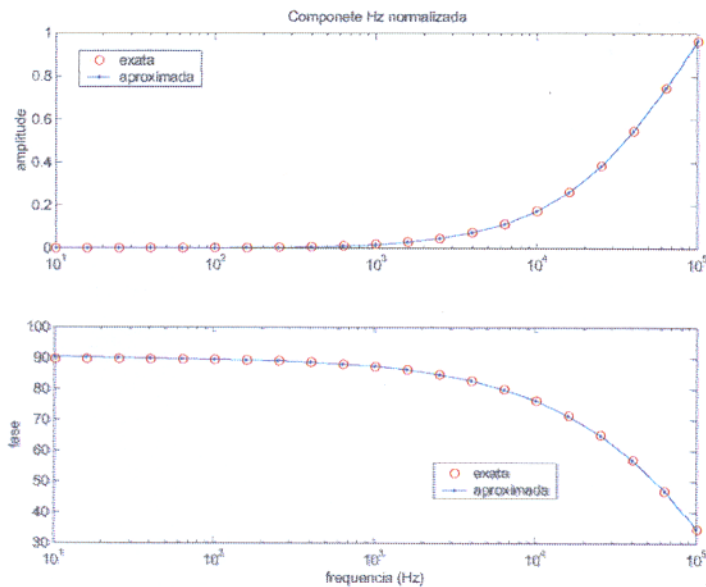


Figura 4.40. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $10 \Omega m$. Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.39**.

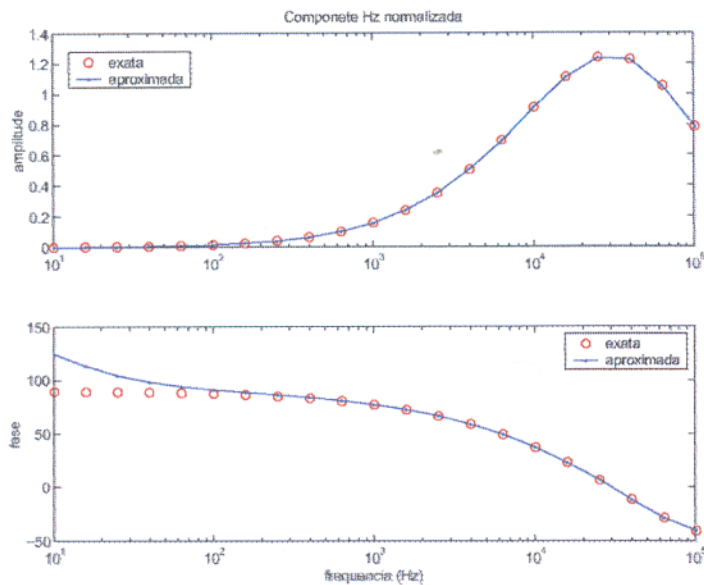


Figura 4.41. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 300 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 1000 Ωm .

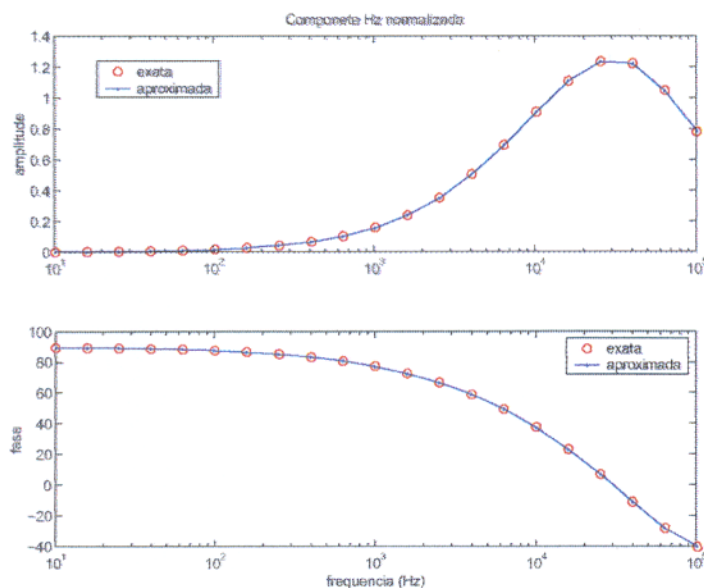


Figura 4.42. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 300 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 1000 Ωm . Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.41**.

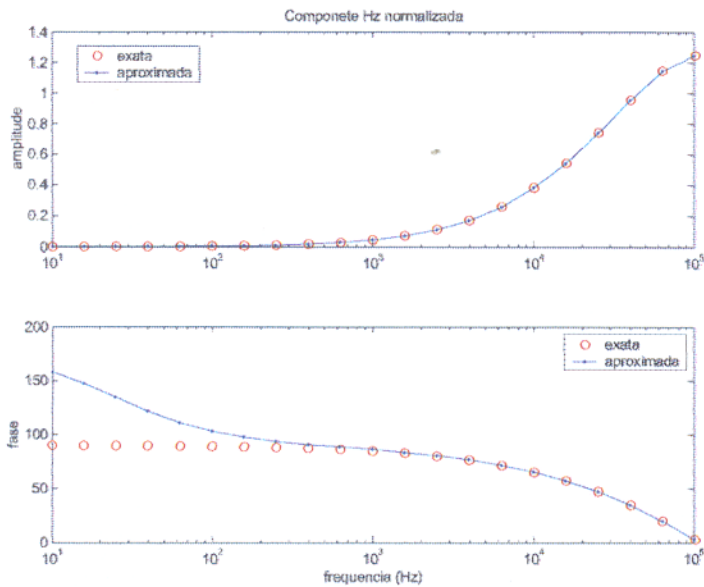


Figura 4.43. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 50 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 100 Ωm .

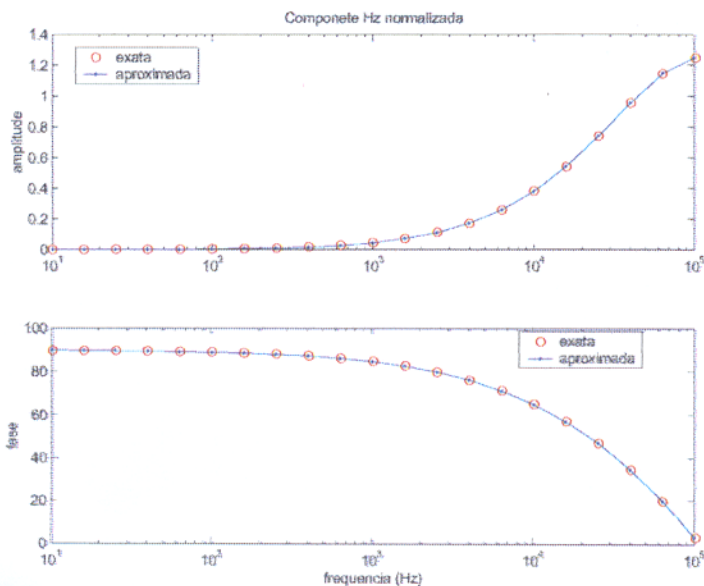


Figura 4.44. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 50 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 100 Ωm . Verifica-se o melhor desempenho (sobre a fase do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.43**.

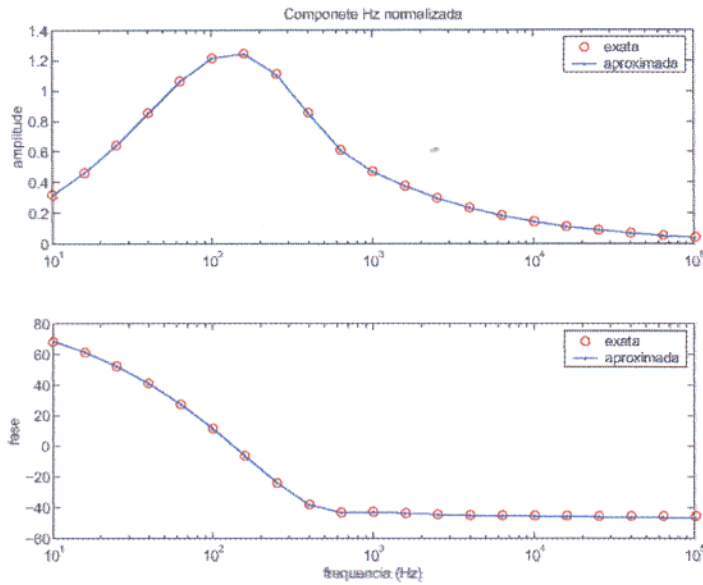


Figura 4.45. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $50 \Omega m$.

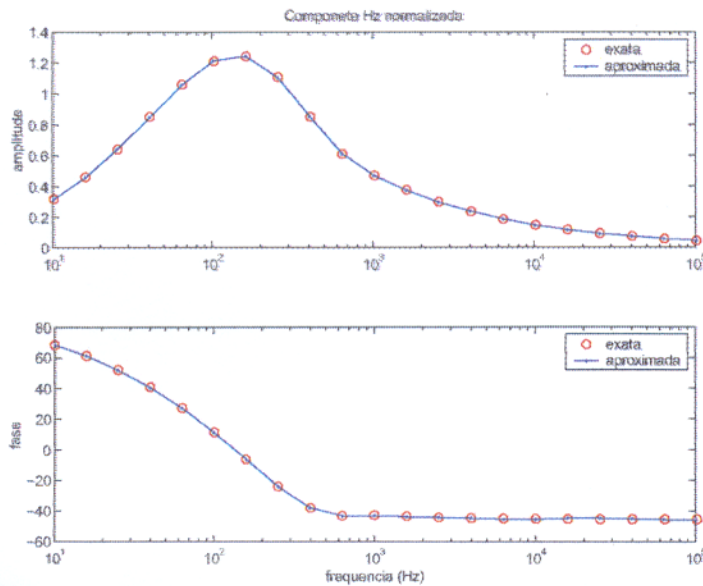


Figura 4.46. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $50 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e do filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.45**.

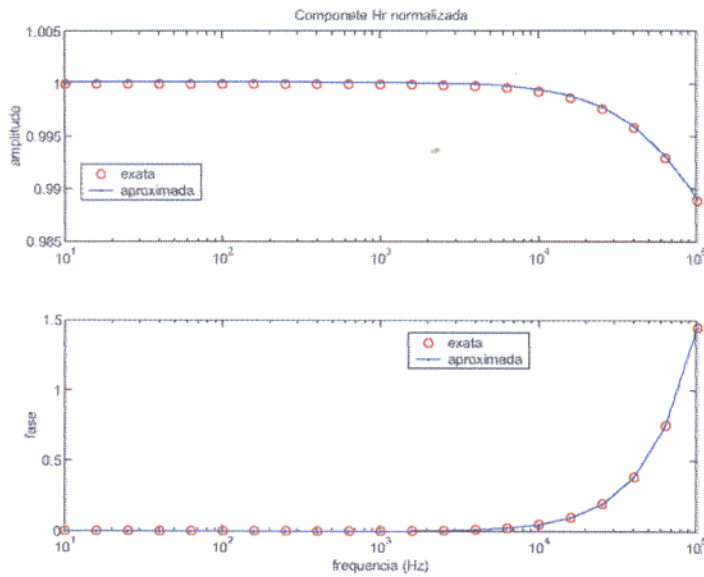


Figura 4.47. Soluções exatas e aproximadas (usando os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 30 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 1000 Ωm .

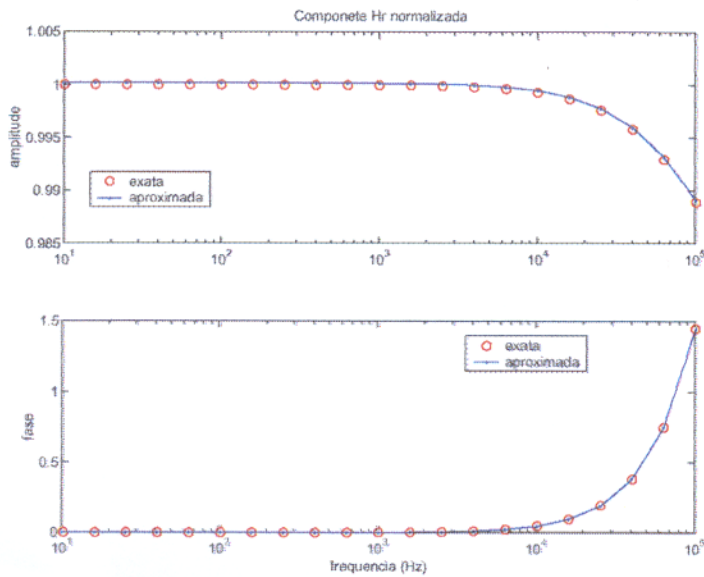


Figura 4.48. Soluções exatas e aproximadas (usando os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 30 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 1000 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos e os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.47**.

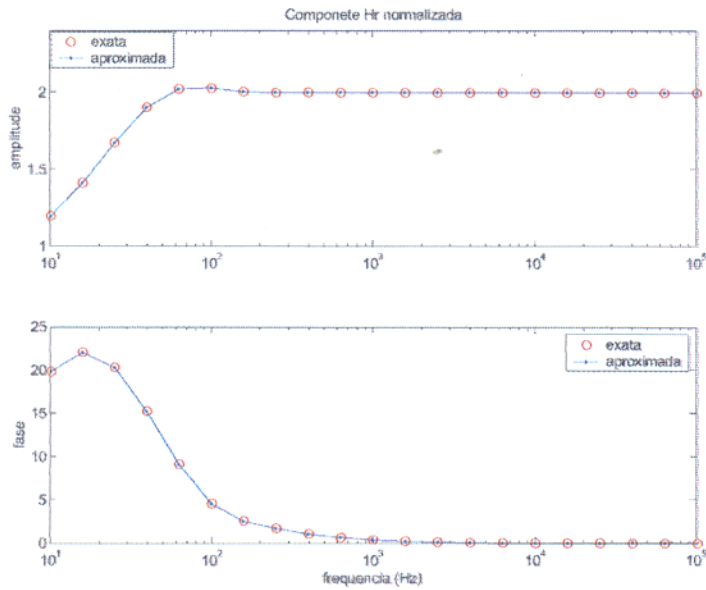


Figura 4.49. Soluções exatas e aproximadas (usando os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $10\ \Omega\text{m}$.

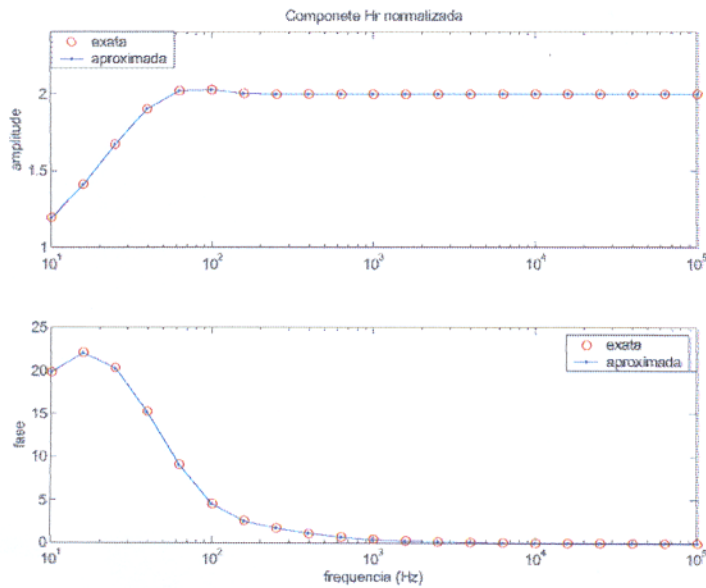


Figura 4.50. Soluções exatas e aproximadas (usando os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaço de $10\ \Omega\text{m}$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos e os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.49**.

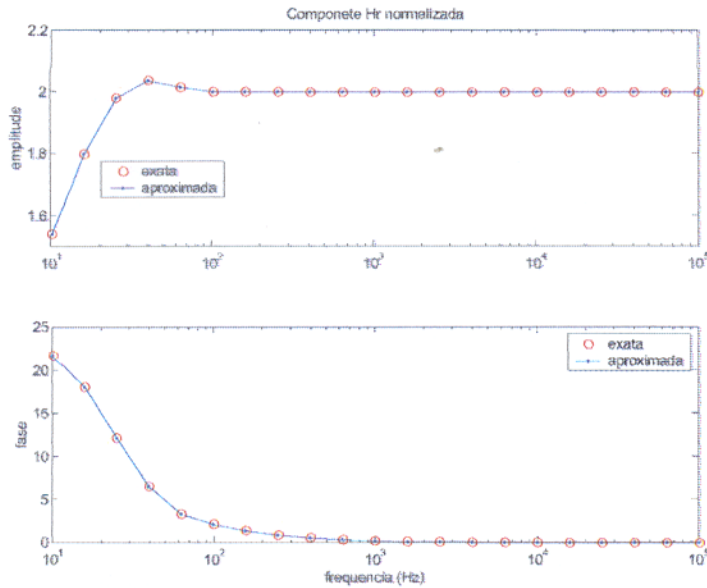


Figura 4.51. Soluções exatas e aproximadas (usando os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $500\ \Omega\text{m}$.

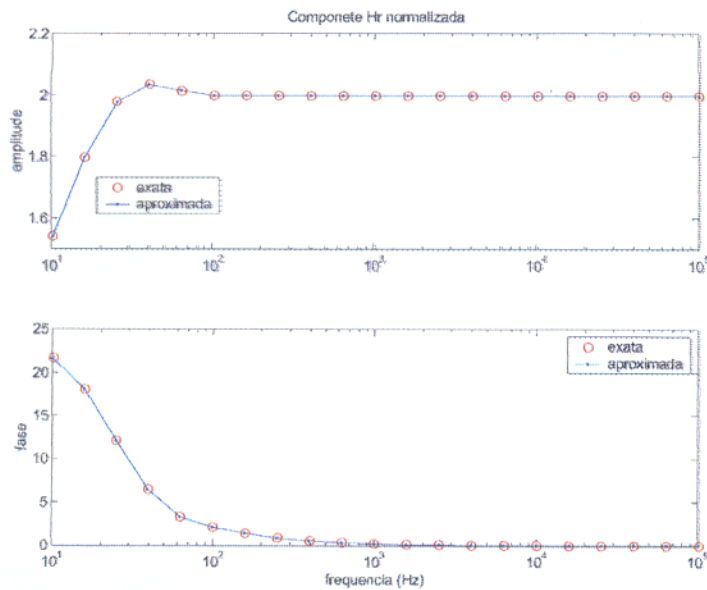


Figura 4.52. Soluções exatas e aproximadas (usando os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $500\ \Omega\text{m}$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos e os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na Figura 4.51.

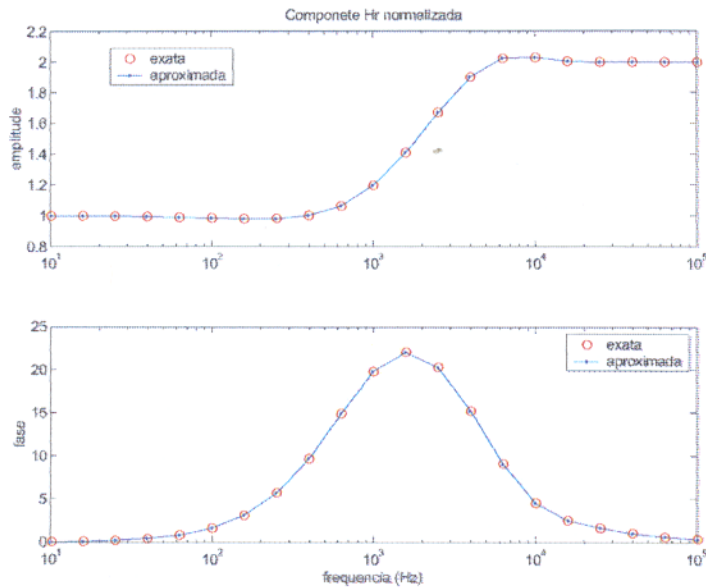


Figura 4.53. Soluções exatas e aproximadas (usando os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espço de 100 Ωm .

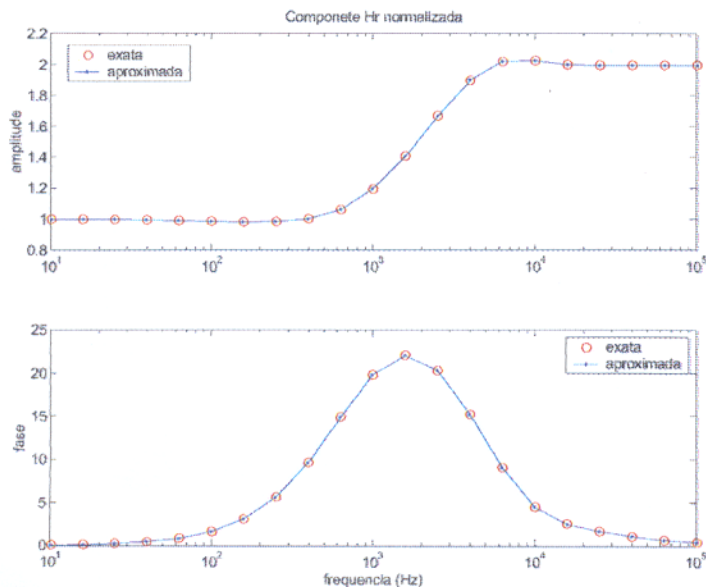


Figura 4.54. Soluções exatas e aproximadas (usando os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espço de 100 Ωm . Verifique-se a equivalência de desempenhos entre os novos filtros J_1 27 pontos e J_0 37 pontos e os filtros J_1 47 pontos e J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.53**.

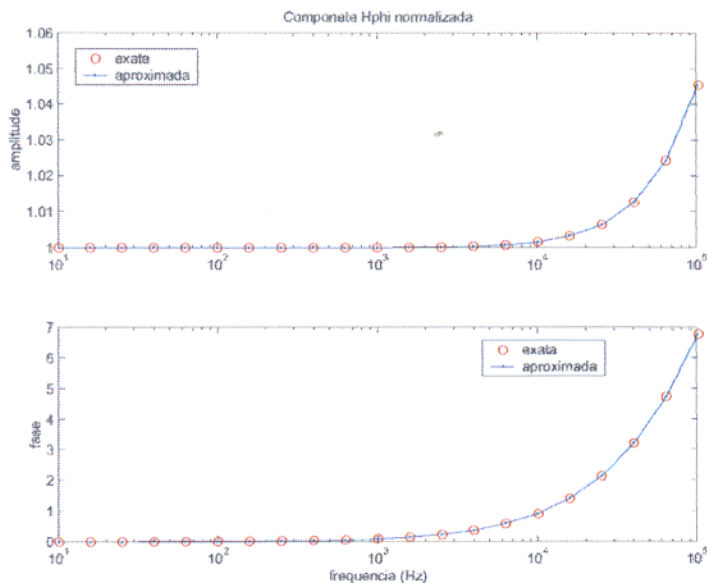


Figura 4.55. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 30 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $1000 \Omega m$.

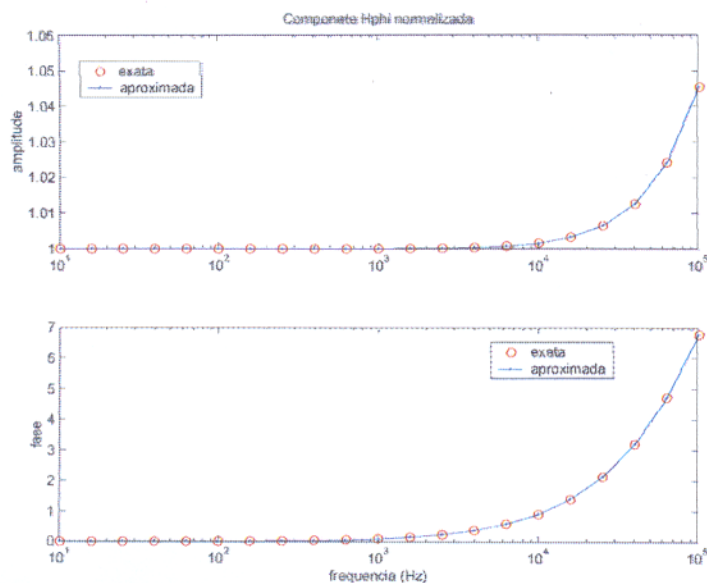


Figura 4.56. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtros J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 30 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $1000 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtros J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.55**.

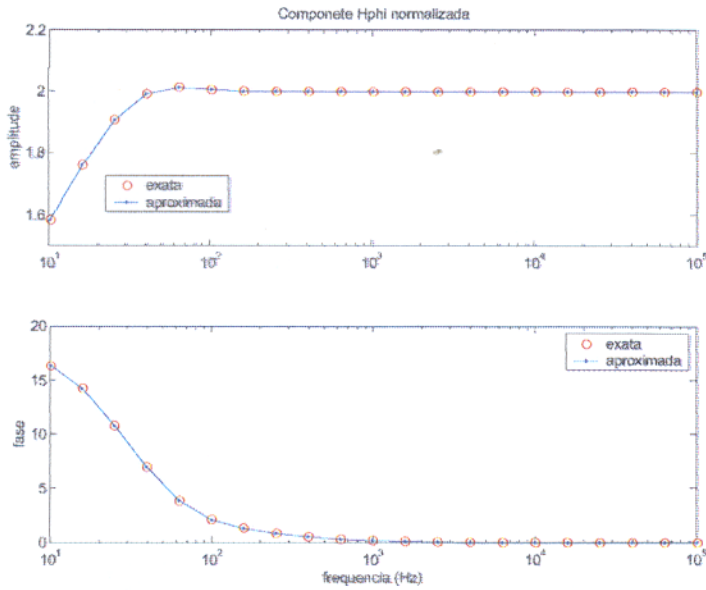


Figura 4.57. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 10 Ωm .

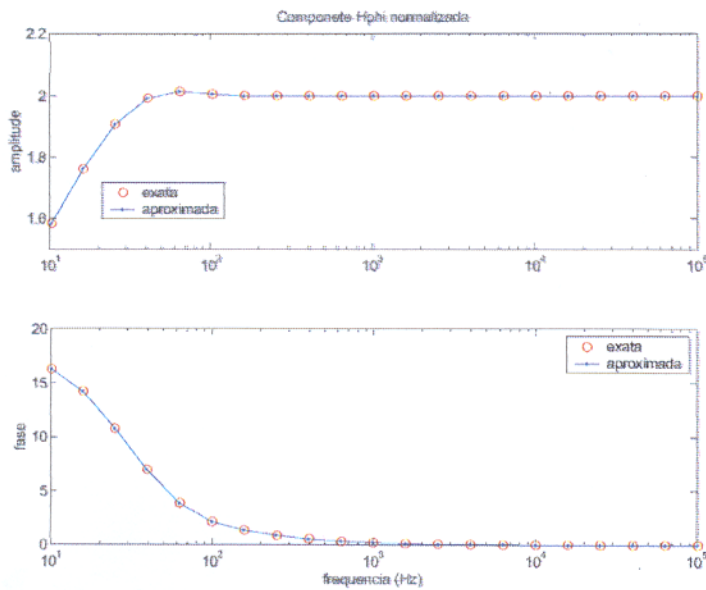


Figura 4.58. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 1000 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 10 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.57**.

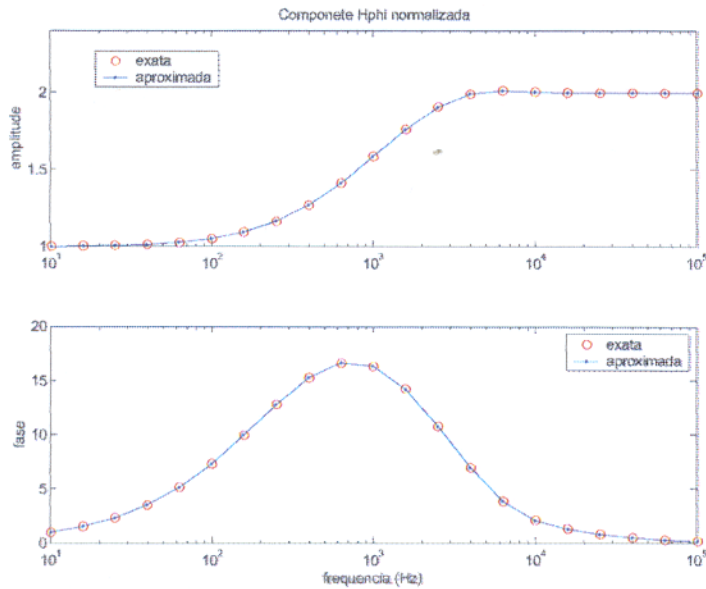


Figura 4.59. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $10 \Omega m$.

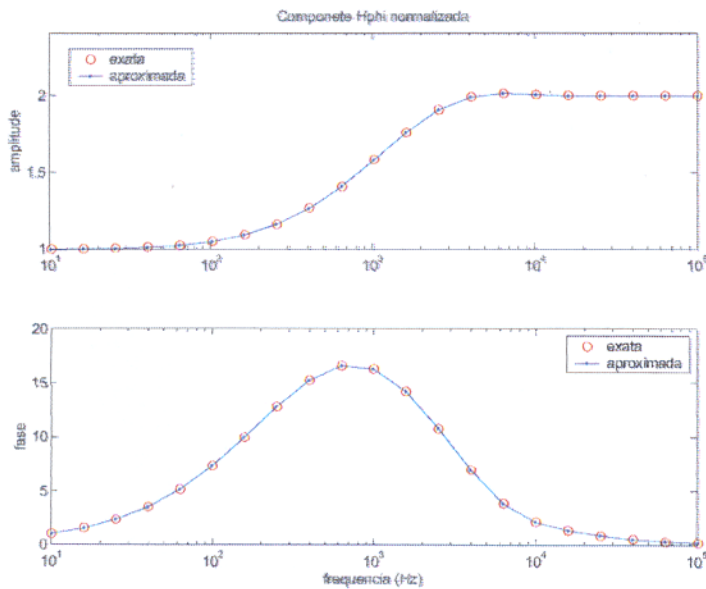


Figura 4.60. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 100 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de $10 \Omega m$. Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na **Figura 4.59**.

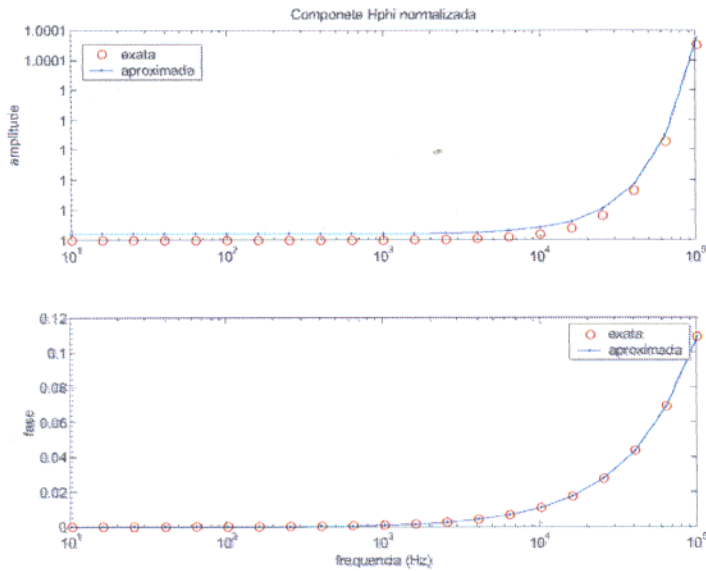


Figura 4.61. Soluções exatas e aproximadas (usando o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 10000 Ωm .

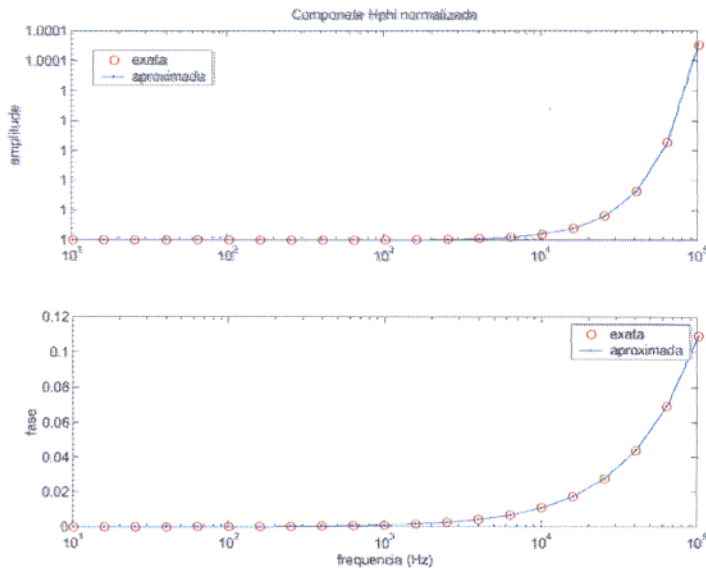


Figura 4.62. Soluções exatas e aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos) da amplitude e da fase do campo magnético normalizado, no domínio da frequência, a 10 m da fonte (1 A) na superfície de um semi-espaco de 10000 Ωm . Verifica-se o melhor desempenho (sobre a amplitude do campo magnético) do novo filtro J_1 de 27 pontos em relação ao desempenho do filtro J_1 de 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) mostrado na Figura 4.61.

4.4 - SONDAGENS ELÉTRICAS VERTICAIS

Sondagem Schlumberger:

$$\rho_s = \rho_1 + r^2 \int_0^{\infty} [K_1(k_r) - \rho_1] J_1(k_r r) k_r dk_r, \quad (37)$$

em que $r = AB/2 \text{ m}$ é o espaçamento das medidas, $\rho_1 \Omega\text{m}$. Resistividade da primeira camada, $\rho_s \Omega$ resistividade aparente e J_1 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 1.

Sondagem Wenner:

$$\rho_w = 2a \int_0^{\infty} K_1(k_r) [J_0(k_r a) - J_0(2k_r a)] dk_r, \quad (38)$$

em que $a = AB/3 \text{ m}$ é o espaçamento das medidas, $\rho_w \Omega\text{m}$. Resistividade aparente e J_0 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 0.

Em ambas as equações K_1 é dado pela recorrência:

$$K_1 = \frac{K_{j+1} + \rho_j \tanh(k, h_j)}{1 + K_{j+1} \tanh(k, h_j) / \rho_j} \quad (39)$$

sendo $K_n = \rho_n \Omega\text{m}$. A resistividade da última camada e $\rho_j \Omega\text{m}$, $h_j \text{ m}$ resistividades e espessuras das j -ésimas camadas, respectivamente, (Koefoed, 1979; Rijo, 2001).

Com as equações (37) e (38) avaliaremos os desempenhos dos filtros lineares das transformadas de Hankel J_0 e J_1 . Tais desempenhos são ilustrados nas Figuras 4.63-4.66, tanto com novos filtros otimizados de 37 e 27 pontos das transformadas J_0 e J_1 , respectivamente, como com os filtros de 61 e 47 pontos das respectivas transformadas J_0 e J_1 propostos por Guptasarma & Singh (1997).

Verificam-se nas **Figuras 4.63-4.66** as equivalências de desempenhos dos novos filtros J_0 e J_1 de 37 e 27 pontos respectivamente em relação aos desempenhos dos filtros J_0 e J_1 de 61 e 47 pontos respectivamente propostos por Guptasarma & Singh (1997).

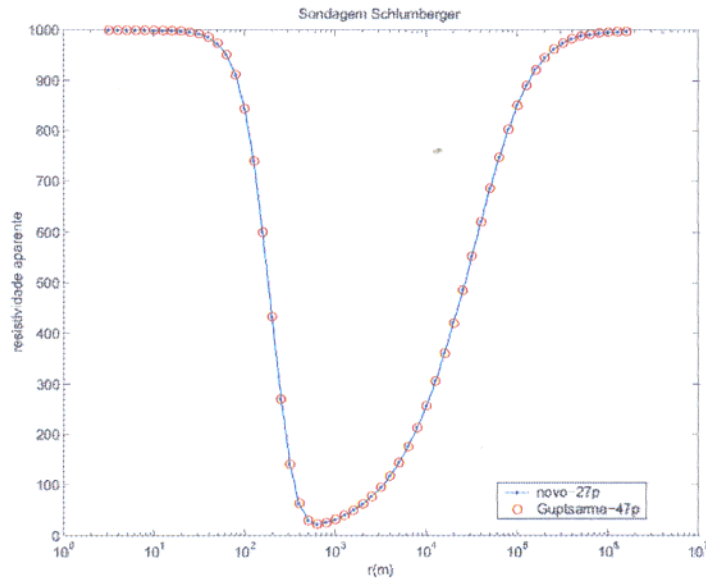


Figura 4.63. Soluções aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da resistividade aparente em Ωm de um modelo constituído de três camadas, sendo a superior de 100 m de espessura com 1000 Ωm e a inferior com 1000 Ωm , intercaladas por uma terceira camada de 3 m espessura com 0.1 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997).

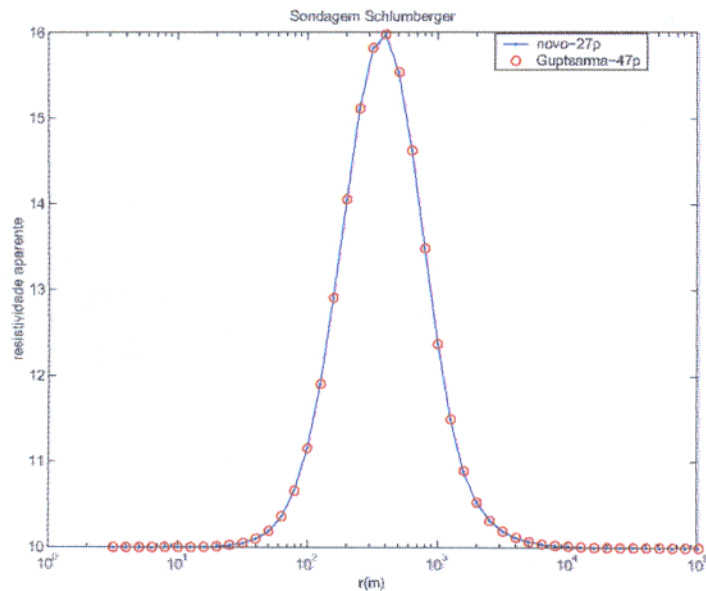


Figura 4.64. Soluções aproximadas (usando o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da resistividade aparente em Ωm de um modelo constituído de três camadas, sendo a superior de 100 m de espessura com 10 Ωm e a inferior com 10 Ωm , intercaladas por uma terceira camada de 3 m de espessura com 1000 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_1 27 pontos e o filtro J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997).

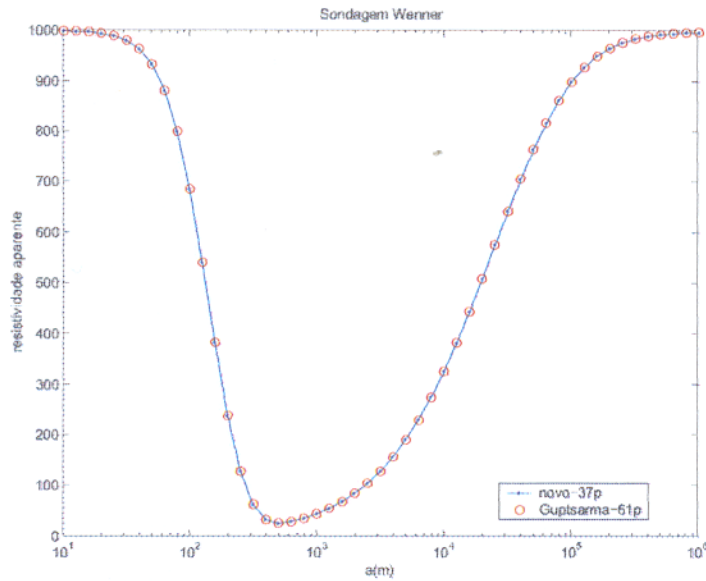


Figura 4.65. Soluções aproximadas (usando o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da resistividade aparente em Ωm de um modelo constituído de três camadas, sendo a superior de 100 m de espessura com 1000 Ωm e a inferior com com 1000 Ωm , intercaladas por uma terceira camada de 3 m de espessura com .1 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997).

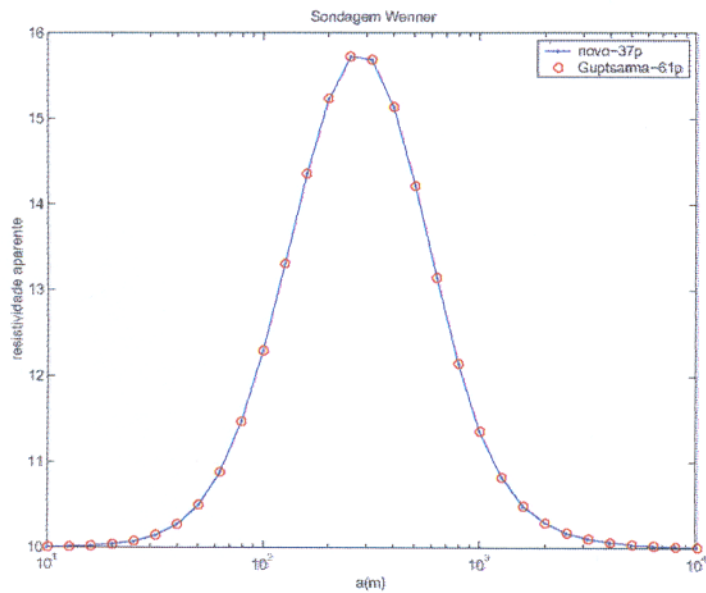


Figura 4.66. Soluções aproximadas (usando o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997)) da resistividade aparente em Ωm de um modelo constituído de três camadas, sendo a superior de 100 m de espessura com 10 Ωm e a inferior com com 10 Ωm , intercaladas por uma terceira camada de 3 m de espessura com 1000 Ωm . Verifica-se a equivalência de desempenhos entre o novo filtro J_0 37 pontos e o filtro J_0 61 pontos (Guptasarma & Singh, 1997).

5 - CONCLUSÃO

Os algoritmos automáticos propostos, que envolvem o método dos mínimos quadrados de Wiener Hopf descrito por Koefoed e Dirks (1979), é um aprimoramento do esquema de otimização sugerido por Guptasarma (1982). Eles mostraram-se eficientes na estimação do terno ótimo (a_0, t, ξ) e do par ótimo (a_0, t) , usados respectivamente para o cálculo dos filtros lineares digitais através das transformadas analíticas *co-seno* e *seno* e para o cálculo dos filtros lineares digitais através das transformadas analíticas de Hankel J_0 , J_1 e J_2 , escolhidas convenientemente para os nossos propósitos. Assim foram propostos novos filtros de 19, 30 e 40 pontos para as transformadas *co-seno* e *seno* e novos filtros otimizados de 37, 27 e 19 pontos para as transformadas de Hankel J_0 , J_1 e J_2 , respectivamente, utilizadas freqüentemente na prospecção geofísica eletromagnética.

O novo filtro de 19 pontos da transformada *co-seno* apresentou, na maioria das simulações, melhores desempenhos em relação ao filtro proposto por Rijo (1993), quando ambos foram aplicados à transformada *co-seno* no domínio da freqüência advinda de um modelo geofísico constituído por dois semi-espacos em que a fonte é **uma linha infinita de corrente**. Melhores desempenhos também foram observados na maioria das simulações, usando o novo filtro otimizado de 27 pontos da transformada J_1 em relação às simulações usando o filtro com 47 pontos proposto por Guptasarma & Singh (1997), quando ambos foram aplicados às transformada J_1 no domínio da freqüência advinda de um modelo geofísico constituído por dois semi-espacos em que a fonte é **um dipolo magnético vertical** entre os semi-espacos. Já para os novos filtros de 19 e 37 pontos correspondentes às transformadas *seno* e J_0 , respectivamente verificaram-se, nas simulações, desempenhos equivalentes em relação aos filtros *seno* de 20 pontos e J_0 de 61 pontos propostos por Nissen & Enmark (1986) e Guptasarma & Singh (1997), respectivamente, quando aplicados às transformadas no domínio da freqüência provenientes do modelo geofísico constituído por dois semi-espacos, em que para a utilização dos filtros *seno* admitiu-se como fonte **uma linha infinita de corrente** e para a utilização dos filtros J_0 admitiu-se como fonte tanto **um dipolo magnético vertical** como **um dipolo magnético horizontal**. Verificou-se a equivalência de desempenhos entre os novos filtro J_0 37 pontos e J_1 27

pontos em relação aos filtros J_0 61 pontos e J_1 47 pontos (Guptasarma & Singh, 1997) respectivamente quando aplicados, respectivamente, em modelos de sondagens elétricas verticais Wenner e Schlumberger com altíssimo contraste de resistividade.

Uma limitação para a construção de melhores filtros lineares digitais, no sentido de funcionarem muito bem em um grande e variado número de simulações de modelos geofísicos da prospecção eletromagnética, está relacionada ao intervalo real estabelecido para a transformada analítica em que se desejam capturar as máximas amplitudes dos erros relativos, ou seja, se possuíssemos transformadas adequadas aos nossos propósitos, com pouca ou nenhuma intransigência na minimização das máximas amplitudes dos erros relativos no domínio de um intervalo real maior possível, certamente conseguiríamos construir filtros lineares digitais que funcionariam muito bem em um grande e variado número de simulações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, W. L. 1979. Numerical integration of related Hankel transforms of order 0 and 1 by adaptative digital filtering. *Geophysics*, 44: 1287-1305.
- DAS, U. C. & GHOSH, D.P. 1974. The determination of filter coefficients for the computation of standart curves for dipole resistivity sounding over layered earth by digital linear filtering. *Geophysical Prospecting*, 22: 765-780.
- GHOSH, D. P. 1971. The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding mensurement. *Geophysical Prospecting*, 19: 192-217.
- GUPTASARMA, D. 1982. Optimization of short digital linear filters for increase accuracy. *Geophysical Prospecting*, 30: 501-514.
- GUPTASARMA, D. & SINGH. 1997. New Digital Filter for Hankel J_0 and J_1 Transform. *Geophysical Prospecting*, 45: 745-762.
- JOHANSEN, H. K. & SORENSEN, K. 1979. Fast Hankel transform. Guptasarma D., 1982. Optimization of short digital linear filters for increased accuracy. *Geophysical Prospecting*, 27: 879-901.
- KOEFOED, O. 1972. A note on the linear filter method of interpreting resistivity sounding data. *Geophysical Prospecting*, 20: 403-405.
- KOEFOED, O., GHOSH, D.P. & POLMAN. 1972. Computation of type curves for electromagnetic depth sounding with horizontal transmitting coil by means of a digital linear filter . *Geophysical Prospecting*, 20: 407-420.
- KOEFOED, O. 1976. Error propagation and uncertainty in the interpreting resistivity sounding data. *Geophysical Prospecting*, 24: 31-48.

- KOEFOD, O. 1979. *Geosounding Principles*. Resistivity Sounding Measurements. Amsterdam, Elsevier.
- KOEFOD, O. & DIRKS, F. J. 1979. Determination of resistivity sounding filters by the Wiener-Hopf least squared method. *Geophysical Prospecting*, 27: 245-250.
- MOHSEN, A. A. & HASHISH, E. A. 1994. The fast Hankel Transform. *Geophysical Prospecting*, 42: 131-139.
- NISSEN, J. & ENMARK, T. 1986. An Optimized digital filter for Fourier transform. *Geophysical Prospecting*, 34: 897-903.
- RJO, L. 1993. An optimized digital filter for the cosine transform. *Revista Brasileira de Geofísica*, 10: 7-20.
- RJO, L. 1996. Comment on " The fast Hankel Transform " by A. A. Mohsen and E. A. Heshish. *Geophysical Prospecting*, 44: 473-477.
- RJO, L. 2001. " *Teoria dos Métodos Eletromagnético I, II e III* ". UFPa, Departamento de Geofísica. (Notas de aula)
- WARD, S.H. & HOHMANN, G.W. 1988. Electromagnetic theory for geophysical application. In: NABIGHIAN, M. N (ed.) *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics – theory v.1.*, M.N. Tulsa, SEG. p. 131-308. (Investigation in Geophysics, 3)

APÊNDICES

APÊNDICE A : Algoritmos propostos.

Algoritmo tipo co-seno:

O algoritmo a seguir determina a cada iteração um terno ótimo $(a_0^{c^*}, t^{l^*}, \xi^{s^*})$ composto pela abscissa inicial, pelo incremento de abscissa e o fator de deslocamento respectivamente, utilizado para o cálculo da função filtro w_j , $j=1,2,\dots, m-n+1$, através do método dos mínimos quadrados de Wiener-Hopf descrito por Koefoed & Dirks (1979).

Sejam $[t^l, t^r]$ e r o intervalo dos incrementos de abscissas e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, respectivamente, $[a_0^l, a_0^r]$ e u o intervalo de abscissas e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, respectivamente, $[\xi^l, \xi^v]$ e v o intervalo de fatores de deslocamento e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, respectivamente e finalmente $[x_1, x_p]$ e p o intervalo no domínio da equação (10) e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, respectivamente.

leia x_i com i de 1 até p ;

para it de 1 até o número de iterações faça

leia t^l com l de 1 até r ;

leia a_0^c com c de 1 até u ;

leia ξ^s com s de 1 até v ;

para l de 1 até r faça

para c de 1 até u faça

para s de 1 até v faça

leia $f_i(e^{\xi^s + (i-1)t^l})$ com i de 1 até n ; equação (6)

leia $h_j(e^{\xi^s + (j-1)t^l + a_0^c})$ com j de 1 até m ; equação (7)

resolve o sistema $W := (Fconv^T Fconv)^{-1} Fconv^T H^T$; equação (9)

para i de 1 até p faça

conv=0

para j de 1 até $m-n+1$ faça

conv := conv + $g_j(e^{-(\ln x_i - (a_0^c + (j-1)t^l))})w_j(t^l, a_0^c, \xi^s)$;

fim

$G_i \text{aprox} := \text{conv} / x_i$; equação (12)

$G_i := e^{-x_i^2 / 4a^2} \sqrt{\pi i} / 2a;$ equação (10) (segundo membro)

$erro_relativo_i := abs((G_i,aprox - G_i) / G_i);$

fim
 $F(l,c,s) := max(erro_relativo)$

fim

fim

fim

$Par(t^*, a_0^{c^*}, \xi^{s^*}) := min(F);$

$t\ min := t^{s^*};$

$a\ min := a_0^{c^*};$

$\xi\ min = \xi^{s^*};$

$t^1 = (t^1 + t\ min) / 2;$

$t^r = (t^r + t\ min) / 2;$

$a_0^1 = (a_0^1 + a\ min) / 2;$

$a_0^u = (a_0^u + a\ min) / 2;$

$\xi^1 = (\xi^1 + \xi\ min) / 2;$

$\xi^v = (\xi^v + \xi\ min) / 2;$

fim

Em que $max(erro_relativo)$: determina o maior valor do erro relativo entre os pontos $x_1 \leq x_i \leq x_p, i=1,2,\dots,p$, abs : é o valor absoluto e l^* , c^* e s^* são os índices correspondentes ao menor valor entre os elementos da matriz $F(l,c,s)$, $l=1,2,\dots,r$, $c=1,2,\dots,u$ e $s=1,2,\dots,v$ determinado pelo comando $min(F)$.

início do algoritmo auxiliar

leia $f_i(e^{\xi^{s^*} + (i-1)t^{s^*}})$ com i de 1 até n ; equação (6)

leia $h_j(e^{\xi^{s^*} + (j-1)t^{s^*} + a_0^{c^*}})$ com j de 1 até m ; equação (7)

resolve o sistema $W^* = (Fconv^T Fconv)^{-1} Fconv^T H^T$; equação (9)

fim do algoritmo auxiliar

Em que $W^*(t^{s^*}, a_0^{c^*}, \xi^{s^*})$; é a função filtro desejada, calculada segundo o terno ótimo $(a_0^{c^*}, t^{s^*}, \xi^{s^*}) \in \Omega$.

Programa **tipo co-seno** no ambiente Matlab:

```

clear;
format long

n2=50; %dimensao da funcao entrada
n1=19; %dimensao da funcao filtro
n6=n1+n2-1; %dimensao da funcao saida
a=1;

t1=input('t-inicial:');
tr=input('t-final:');

a1=input('a0-inicial:');
au=input('a0-final:');

lo1=log(10.^-6);
lov=log(10.^-1);

for sac=1:70
    t=linspace(t1,tr,35);
    r=length(t);
    a0=linspace(a1,au,35);
    u=length(a0);
    lo=linspace(lo1,lov,15);
    v=length(lo);

    for l=1:r
        for c=1:u
            for s=1:v
                i=1:n6;
                pq(i)=lo(s)+t(l).*(i-1)+a0(c);
                z=exp(pq(i));
                h(i,1)=2.*a.*z'.*(a.^2-3.*z'.^2)./(a.^2+z'.^2).^3; % funcao saida

                i=1:n2;
                sq(i,1)=lo(s)+t(l).*(i-1);
                y=exp(-sq(i,1));
                g(i,1)=y.^2.*exp(-a.*y); % funcao entrada

                i=1:n2;
                for j=1:n1;
                    d(i+j-1,j)=g(i,1);
                end
                w(:,1)=(d'*d)\(d'*h); % funcao filtro

                x1=linspace(-5,7,150);

```

```

x=10.^x1;
p=length(x);

for j=1:p
    i=1:n1;
    u0(i)=exp(a0(c)+t(l).*(i-1));
    kx(i)=u0(i)./x(j);
    kernel(i)=exp(-(a.*kx(i)).^2);
    conv=kernel*w;
    foutapx(j)=conv./x(j);
    fout(j)=sqrt(pi).*exp(-x(j).^2./(4.*a.^2))./(2.*a);
    error(j)=abs((fout(j)-foutapx(j))./fout(j));
end

erromq(l,c,s)=max(error);
resp(l,c,s)=erromq(l,c,s);
end
end
end

for k=1:length(lo)
    [v1,indc]=min(resp(:,:,k),[],2);
    [menor,indl]=min(v1);
    linha(k)=indl;
    coluna(k)=indc(indl);
    menoresM(k)=menor;
end

[menorM,indM]=min(menoresM);
larguraf=indM;
linhaf=linha(indM);
colunaf=coluna(indM);
min_max_error=menorM
iteracao=sac
amin=a0(colunaf);
tmin=t(linhaf);
lomin=lo(larguraf);
resultado=[sac min_max_error amin tmin lomin];
save resultcos.m resultado -ascii -double
t1=(t1+tmin)/2;
tr=(tr+tmin)/2;
a1=(a1+amin)/2;
au=(au+amin)/2;
lo1=(lo1+lomin)/2;
lov=(lov+lomin)/2;
end

```

```
i=1:n6;
pq(i)=lomin+tmin.*(i-1)+amin;
z=exp(pq(i));
h(i,1)=2.*a.*z.*(a.^2-3.*z'.^2)./(a.^2+z'.^2).^3; % funcao saida

i=1:n2;
sq(i,1)=lomin+tmin.*(i-1)';
y=exp(-sq(i,1));
g(i,1)=y.^2.*exp(-a.*y); % funcao entrada

i=1:n2;
for j=1:n1;
    d(i+j-1,j)=g(i,1);
end
w(:,1)=(d'*d)\(d'*h); % funcao filtro otimizada

resultadow=w(:,1);
save resultcosw.m resultadow -ascii -double
```

Algoritmo **tipo J₀**:

O algoritmo a seguir determina a cada iteração um par ótimo (a_0^c, t^m) composto pela abscissa inicial e pelo incremento de abscissa, utilizado para o cálculo da função filtro w_j $j=1,2,\dots, m-n+1$, através do método dos mínimos quadrados de Wiener-Hopf descrito por Koefoed & Dirks (1979).

Sejam $[t^l, t^r]$ e r o intervalo dos incrementos de abscissas e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, respectivamente, $[a_0^l, a_0^u]$ e u o intervalo de abscissas e o número de pontos que se deseja discretizá-lo respectivamente e finalmente $[r_1, r_p]$ e p o intervalo no domínio da equação (17) e o número de pontos que se deseja discretizá-lo, respectivamente.

leia x_i *com* i *de* 1 *até* p ;
para it *de* 1 *até* o número de iterações *faça*

leia t^l *com* l *de* 1 *até* r ;
leia a_0^c *com* c *de* 1 *até* u ;

para l *de* 1 *até* r *faça*
para c *de* 1 *até* u *faça*

leia $f_i(e^{\xi+(i-1)t^l})$ *com* i *de* 1 *até* n ; equação(17)

leia $h_j(e^{\xi+(j-1)t^l+a_0^c})$ *com* j *de* 1 *até* m ; equação(17)

resolve o sistema $W := (Fconv^T Fconv)^{-1} Fconv^T H^T$; equação (9)

para i *de* 1 *até* p *faça*

$conv=0$

para j *de* 1 *até* $m-n+1$ *faça*

$conv := conv + g_j(e^{-(\ln x_j - (a_0^c + (j-1)t^l))})w_j(t^l, a_0^c, \xi^s)$;

fim

$G_i \text{aprox} := conv / x_i$; equação(12)

$G_i := \frac{a}{(a^2 + x_i^2)^{3/2}}$; equação (17) (segundo membro)

$erro_relativo_i := abs((G_i \text{aprox} - G_i) / G_i)$;

fim

$F(l,c) := integral((erro_relativo))$

fim
fim
 $Par(t^l, a_0^c) := \min(F);$
 $t \min := t^{l*};$
 $a \min := a_0^{c*};$
 $t^1 = (t^l + t \min) / 2;$
 $t^r = (t^r + t \min) / 2;$
 $a_0^1 = (a_0^1 + a \min) / 2;$
 $a_0^u = (a_0^u + a \min) / 2;$

fim

Em que os comandos *integral((erro_relativo))*: integra numericamente o erro relativo nos pontos $x_1 \leq x_i \leq x_p, i = 1, 2, \dots, p$, *abs*: é o valor absoluto e l^* , c^* são os índices correspondentes ao menor valor entre os elementos da matriz $F(l, c)$, $l = 1, 2, \dots, r$ e $c = 1, 2, \dots, u$, determinados pelo comando *min(F)*.

início do algoritmo auxiliar

leia $f_i(e^{\xi+(i-1)t^{l*}})$ com i de 1 até n ; equação (17)

leia $h_j(e^{\xi+(j-1)t^{l*}+a_0^{c*}})$ com j de 1 até m ; equação (17)

resolve o sistema $W^* = (Fconv^T Fconv)^{-1} Fconv^T H^T$; equação (9)

fim do algoritmo auxiliar

Em que $W^*(t^{l*}, a_0^{c*}, \xi)$; é a **função filtro** desejada, calculada segundo o par ótimo $(a_0^{c*}, t^{l*}) \in [a_0^1, a_0^u] \times [t^1, t^r]$.

Programa tipo **J₀** no ambiente Matlab:

```

clear
format long

n2=70;%dimensao da funcao entrada
n1=37;%dimensao da funcao filtro
n6=n1+n2-1;% dimensao da funcao saida
a=1;
lo=log(.01); % fator de deslocamento

t1=input('t-inicial:');
tr=input('t-final:');

a1=input('a0-inicial:');
au=input('a0-final:');

for sac=1:70

    t=linspace(t1,tr,100);
    r=length(t);

    a0=linspace(a1,au,50);
    u=length(a0);

    for l=1:r
        for c=1:u

            i=1:n6;
            pq(i,1)=lo+t(l).*(i-1)+a0(c);
            z=exp(pq(i,1));
            h(i,1)=a.*z./(a.^2+z.^2).^(3./2); %output

            i=1:n2;
            s(i,1)=lo+t(l).*(i-1);
            y=exp(-s(i,1));
            g(i,1)=y.*exp(-a.*y); % input

            i=1:n2;
            for j=1:n1;
                d(i+j-1,j)=g(i,1);
            end
            w(:,1)=(d'*d)\(d'*h);%deconvolucao

            x1=linspace(-6,5,150);
            x=10.^x1;
            n=length(x);

```

```

for j=1:n

    i=1:n1;
    u0(i)=exp(a0(c)+t(h).*(i-1));
    kx(i)=u0(i)./x(j);
    kernel(i)=kx(i).*exp(-a.*kx(i));% input
    conv=kernel*w;
    foutapx(j)=conv./x(j);
    fout(j)=a./(a.^2+x(j).^2).^3./2;
    error(j)=abs((fout(j)-foutapx(j))./fout(j));
end

erromq(1,c)=trapz(x,error);
resp(1,c)=erromq(1,c);

end
end

[v1,indc]=min(resp,[],2);
[menor,indl]=min(v1);
iteracao=sac
min_max_error=menor
linha=indl;
coluna=indc(indl);
tmin=t(linha);
amin=a0(coluna);
resultado=[sac min_max_error amin tmin];
save resultj0.m resultado -ascii -double
t1=(t1+tmin)./2;
tr=(tr+tmin)./2;
a1=(a1+amin)./2;
au=(au+amin)./2;

end

i=1:n6;
pq(i,1)=lo+tmin.*(i-1)+amin;
z=exp(pq(i,1));
h(i,1)=a.*z./(a.^2+z.^2).^3./2; %output

i=1:n2;
s(i,1)=lo+tmin.*(i-1);
y=exp(-s(i,1));
g(i,1)=y.*exp(-a.*y); % input

i=1:n2;

```

```
for j=1:n1;
    d(i+j-1,j)=g(i,1);
end
w(:,1)=(d'*d)\(d'*h); % funcao filtro otimizada

resultadow=w(:,1);
save resultj0w.m resultadow -ascii -double
```

APÊNDICE B: Filtros propostos.

Tabela 1. Parâmetros do novo filtro *co-seno* de 19 pontos.

 $a_0 = -9.7794117647058574e+000$ $t = 7.1780268375259981e-001$

Pesos do filtro de 1 a 19:

0.00008131125602
0.00004577301878
0.00019733657118
0.00033057771897
0.00073593349537
0.00144068843475
0.00307187056659
0.00604817683407
0.01294637361609
0.02529658381948
0.05450375784883
0.10456625485961
0.22008082236052
0.35130019058630
0.27572766200303
-1.65121947082406
0.71941693264981
-0.14885892761660
0.02535187687702

Tabela 2. Parâmetros do novo filtro *co-seno* de 30 pontos.

 $a_0 = -12.99151983867328$ $t = 0.56424893156514$

Pesos do filtro de 1 a 30:

0.00000446707672
-0.00000272540914
0.00000995316556
0.00000003593369
0.00002103641820
0.00000948929254
0.00005596897838
0.00003907762436
0.00016086940614
0.00013776259357
0.00047181234722
0.00046523996184
0.00139639635447
0.00153610802958
0.00416069317969
0.00499470705662
0.01246692217577
0.01605195680795
0.03749550612141
0.05090885102758
0.11190145021972
0.15319049527128
0.29619202597073
0.26314282472466
-0.09973014459881
-1.72412432052151
1.11514563105521
-0.29772771117139
0.06144868733678
-0.01015050918409

Tabela 3. Parâmetros do novo filtro *co-seno* de 40 pontos.

 $a_0 = -1.5578155151677706e+001$ $t = 5.0789907996800410e-001$

Pesos do filtro de 1 a 40:

0.00000041553880
-0.00000048439664
0.00000111687327
-0.00000071572934
0.00000210017071
-0.00000082319986
0.00000452939370
-0.00000081664880
0.00001070375462
0.00000014605768
0.00002620261596
0.00000523003342
0.00006531603433
0.00002479895054
0.00016509709215
0.00009105895133
0.00042254296232
0.00030084973020
0.00109381311976
0.00093892529504
0.00286064451297
0.00282953321873
0.00754918426177
0.00833039970645
0.02007215224949
0.02410085141205
0.05357274694766
0.06822287225037
0.14052279425987
0.17689652581165
0.30420143841094
0.18398542663501
-0.32684030151230
-1.66125753871679
1.33369805180557
-0.42505153672812
0.10567885445932
-0.02925961142140
0.00832489024632
-0.00163244710359

Tabela 4. Parâmetros do novo filtro *seno* de 19 pontos.

$$a_0 = -5.4486896513758873e+000$$

$$t = 5.2832084169721072e-001$$

Pesos do filtro de 1 a 19:

0.00002232180979
0.00000911403946
0.00010211925053
0.00021096577239
0.00069360747443
0.00189252836673
0.00558527074334
0.01575468148099
0.04541881738114
0.12597482610254
0.33679043254374
0.75039385302592
0.82581867019787
-1.66074717512502
0.67579680933252
-0.14592741774607
0.02585421627712
-0.00406933630171
0.00041772783700

Tabela 5. Parâmetros do novo filtro *seno* de 30 pontos.

$$a_0 = -6.6030163738815952e+000$$

$$t = 3.8868247731872374e-001$$

Pesos do filtro de 1 a 30:

0.00000375466945
-0.00000586160902
0.00001507414780
-0.00000751748112
0.00003335640337
0.00001458779557
0.00010127733359
0.00012980232894
0.00041207401814
0.00069605527643
0.00183831543287
0.00345717740224
0.00841473994965
0.01669978294703
0.03861280203901
0.07800177527823
0.16998098262565
0.32396687801731
0.58277749001326
0.68051735467895
-0.09140093526035
-1.80579146705436
1.37727057650806
-0.48687474543221
0.12564244413231
-0.03051277822054
0.00740461871508
-0.00166171911043
0.00029263099338
-0.00002855156604

Tabela 6. Parâmetros do novo filtro *seno* de 40 pontos.

 $a_0 = -7.0148325435394225e+000$ $t = 3.0079808533182051e-001$

Pesos do filtro de 1 a 40:

0.00000386064750
-0.00001295199188
0.00002995313567
-0.00004601486663
0.00006748842161
-0.00007433152725
0.00010020178687
-0.00008630564473
0.00014626242937
-0.00008103763976
0.00026347586651
-0.00002425295976
0.00059837697865
0.00025046757173
0.00158165457461
0.00136107838188
0.00456472876498
0.00545524606746
0.01386719825135
0.01973026582050
0.04313402926002
0.06693413078039
0.13210383862343
0.20673507390562
0.35915508740814
0.48050030911730
0.55034153237549
0.07848349466799
-0.96403028925873
-1.16443255502784
1.96957299003532
-1.10826949019410
0.39120238383881
-0.11414278572386
0.03205545168080
-0.00894122829706
0.00235186795011
-0.00052837196784
0.00008649651067
-0.00000735041086

Tabela 7. Parâmetros do novo filtro J_0 de 37 pontos.

$$a_0 = -8.7915450115593092e+000$$

$$t = 3.4398729728929939e-001$$

Pesos do filtro de 1 a 37:

0.00238335617914
 -0.00923451277729
 0.02079895052544
 -0.03338702409972
 0.04477739890139
 -0.05167765846960
 0.05587472556026
 -0.05512276066568
 0.05444557860139
 -0.04892210690497
 0.04732656195005
 -0.03860491533605
 0.03920960657489
 -0.02644804816704
 0.03260982461445
 -0.01228397713755
 0.02956411797486
 0.00595004660943
 0.03317515498364
 0.03274470853033
 0.04933875502497
 0.07661759525931
 0.08883650000582
 0.15133386760606
 0.16507829454944
 0.26169301627952
 0.24688255898384
 0.27750176445175
 -0.00155554395068
 -0.33630611758063
 -0.50651480451307
 0.59211451923489
 -0.23450184447820
 0.05446237320377
 -0.00928958955398
 0.00119894072586
 -0.00008971645558

Tabela 8. Parâmetros do novo filtro J_1 de 27 pontos.

$$a_0 = -4.61195591517857$$

$$t = 0.33288944128788$$

Pesos do filtro de 1 a 27:

0.00022403915103
-0.00063831184603
0.00113167818280
-0.00081481684918
0.00065948253261
0.00015110345657
0.00165282210988
0.00080418132518
0.00380611316285
0.00619808024688
0.01404440767965
0.02189018716297
0.04964931228922
0.08370610919229
0.16660930791854
0.25725196330244
0.40730714915038
0.34895491488489
-0.04241399715350
-0.65781916295135
0.46094644953685
-0.15431387506167
0.03858981403104
-0.00949545480093
0.00231033358900
-0.00043488073049
0.00004191435466

Tabela 9. Parâmetros do novo filtro J_2 de 19 pontos.

 $a_0 = -1.55050598185024$ $t = 0.18634701555858$

Pesos do filtro de 1 a 19:

0.00799552054539

-0.02611146942531

0.03908786880947

-0.00917038216156

-0.03460228618293

0.01193259214300

0.06058316111850

0.02489345333357

-0.05843364695515

-0.04064913677478

0.12862574793110

0.25252742978437

0.11110399521022

-0.11496118208512

0.10097209623246

0.80339619274433

0.82739761272033

-1.49990618049328

0.41518056949677
