

MARIA ISAURA DE ALBUQUERQUE CHAVES

**MODELANDO MATEMATICAMENTE QUESTÕES AMBIENTAIS RELACIONADAS
COM A ÁGUA A PROPÓSITO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES NA
1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof.Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo.

**BELÉM
2005**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO – NPADC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS - MESTRADO

MODELANDO MATEMATICAMENTE QUESTÕES AMBIENTAIS
RELACIONADAS COM A ÁGUA A PROPÓSITO DO ENSINO-APRENDIZAGEM
DE FUNÇÕES NA 1ª SÉRIE – EM

Autora: Maria Isaura de Albuquerque Chaves
Orientador : Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo
Co-orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Maria Isaura de Albuquerque Chaves e aprovada pela Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo

Profa. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa

Belém, 29 de março de 2005.

Aos meus alunos que, na ânsia de aprender,
acabam por me ensinar.

AGRADECIMENTOS

Referendando a máxima de que não somos ninguém sem o outro e que o homem não se constrói sozinho, esse trabalho só foi possível porque tive o apoio de muitas pessoas, as quais quero fazer, neste momento, um especial agradecimento.

À minha família por ter aceitado e se esforçado para compreender as longas horas em que estive incomunicável mesmo estando dentro de casa.

Aos colegas do Ensino Médio do Núcleo Pedagógico Integrado, por terem me proporcionado liberação de carga horária para dedicar-me exclusivamente aos estudos.

Aos alunos da Turma 101 de 2004 que se dispuseram a ser participantes da nossa pesquisa.

Aos licenciandos Raimundo Mangabeira da Silva Neto, Marcela Sarmiento da Silva e André Luiz dos Santos Ferreira, que estiveram comigo em sala de aula, durante praticamente todo o ano letivo e me ajudaram na difícil, porém proveitosa, tarefa de se pesquisar a própria prática.

Aos Prof.^{es} Adilson Oliveira do Espírito Santo e Francisco Hermes Santos da Silva, que me orientaram na execução deste trabalho.

Ao Eng. José Joaquim Melo Rodrigues, Coordenador Metropolitano da Companhia de Água e Saneamento do Pará (COSANPA), ao químico responsável pelo controle da qualidade de água, José Carlos de Oliveira e ao Sr. Rian, responsável pelo setor de faturamento, por abrirem mão de seus afazeres, para me prestarem, cordialmente, relevantes informações.

A Prof.^a Vera Nobre Vaz que me disponibilizou, em CD-ROM, todo o material de sua palestra “Água – importância e desafios”, realizada em 22 de março de 2004, que tornou-se peça importante de nosso acervo sobre o tema.

A Prof.^a Socorro Pastana responsável pela revisão ortográfica.

Ao Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa pela sua participação na Banca Examinadora através da qual forneceu valiosas sugestões e contribuições ao trabalho.

Aprender é construir significados e ensinar
é oportunizar essa construção.

Vasco Pedro Moretto.

SUMÁRIO

LISTAS DE TABELAS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - Modelagem Matemática no Ensino Médio	
1- Introdução	6
2- Modelo e Modelagem Matemática	7
2.1- O processo de obtenção de um modelo	10
3- História da Matemática e Modelagem	12
3.1- Nas primeiras civilizações	13
3.2- No tempo da renovação	16
3.3- Conclusão	20
4- Modelagem Matemática: O método.....	22
4.1- No âmbito da educação matemática	23
4.2- Porque utilizar a Modelagem para o ensino da Matemática	26
4.3- Obstáculos apontados para o uso da Modelagem Matemática	28
5- Uma perspectiva de modelagem para o Ensino Médio	30
5.1- A concepção	33
5.2- Os referenciais para a materialização	38
CAPÍTULO II – Uma perspectiva de Modelagem: a materialização	
1- Introdução	41
2- Ambiente de ensino e de aprendizagem: do diagnóstico à construção	43
2.1- o diagnóstico do ambiente	45
2.2- a construção do ambiente de aprendizagem	51
3- O desenvolvimento do conteúdo programático	55
3.1- O conteúdo e o método	57
3.2- O tema	63
3.3- As Atividades de ensino-aprendizagem: problematizações com referência na realidade	66
CAPÍTULO III- A avaliação	
1- Introdução	70
2- Aprendizagem significativa	71

3- A avaliação: algumas palavras	76
4- Atividades de Ensino-Aprendizagem: o referencial de análise	79
4.1- Atividade 1: A água no Planeta Terra	83
4.2- Atividade 2: Contas de água	86
4.3- Atividade 3: Função do 1º Grau	94
4.4- Atividade 4: A conta do desperdício	95
4.5- Atividade 5: O lixo nosso de cada dia e a água	98
4.6- Atividade 6: A “nossa” água	101
4.7- Atividade 7: A água que sai de nossas casas	105
4.8- Atividade 8: O Lírio da Esperança	107
4.9- Atividade 9: A qualidade da água	110
4-10- Atividade 10 : Água Potável: Direito ou mercadoria?	113
5- Resultados	116
Considerações finais	118
Referências	129
Anexos	133

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1- Tarefas do professor e dos alunos nos casos de Modelagem.....	25
Tabela 1.2 – Idade dos alunos	47
Tabela 1.3 – Grade de procedimentos e estratégias	77
Figura 1.3 – Modelo de An, And, Ba e Mil	88
Figura 2.3 – Trabalho de An, And, Ba e Mil, refeito	90
Tabela 2.3 – Níveis alcançados pela turma	115

RESUMO

Este trabalho apresenta uma forma possível de se conceber e materializar a Modelagem Matemática como método de ensino-aprendizagem em cursos regulares. Tal perspectiva de Modelagem foi organizada após considerações feitas sobre os obstáculos já apontados por aqueles que nos antecederam na área. Para observar como a professora e os alunos se envolvem em atividades de Modelagem e discutir, à luz de todo o conhecimento já produzido por pesquisas anteriores, os efeitos desse envolvimento para a prática docente no referido método, para a formação geral do educando bem como para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, a proposta de Modelagem foi aplicada em uma turma de primeira série do ensino Médio e avaliada quanto à produção de aprendizagens significativas de funções polinomiais do 1º e 2º graus, função exponencial e logaritmos, com enfoques de ferramentas para a compreensão de questões ambientais relacionadas com a água. Os resultados obtidos apontam que o ensino por Modelagem pode levar o aluno a tornar-se co-participante de seu processo de ensino-aprendizagem e, por conseqüência, ter sua aprendizagem significativa facilitada. Por outro lado, para o professor, entre o reconhecimento das vantagens quanto à utilização da Modelagem para o ensino e a sua aplicação, existe um caminho permeado de estudo e de pesquisa, que, para ser trilhado precisa de disposição e audácia para vencer os obstáculos que se afigurem.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática, ensino-aprendizagem de funções, questões ambientais e matemática.

ABSTRACT

This research presents a possible form to give itself and materialize the Mathematics Modeling as a teaching-learning method in regular courses. Such Modeling perspective was organized after considerations/observations about obstacles pointed out by those who came before us in this area. To observe how the teacher and the students get involved with Modeling activities and discuss all knowledge already produced for previous researches, these development effects for the teaching practice in the referred method for the student general formation as well as for the mathematics teaching-learning process, the model was tested in a high school first-year group and it had the first and second degree polynomial functions significant learning production evaluated. Also it was possible to evaluate the exponential function and logarithm, focusing on the tools used for the comprehension of environment question related to water. The obtained results point out that learning through Modeling can make students become co-participant of their teaching-learning process. Consequently it makes their significant learning easy. On the other hand, for the teaching, among the acknowledgement of modeling using advantages for the teaching and this application, there's a study and research permeated way, that to be struck needs aptitude and audacity to get over the obstacles that may show up.

KEY WORDS: Mathematics modeling, function teaching-learning, environment questions and Mathematics.

Introdução

Se a forma como normalmente temos desenvolvido os nossos métodos de ensino nas escolas não tem servido para que nossos alunos aprendam Matemática, nem para que tirem boas notas em provas, nem para diminuir os índices de retenção, tampouco para dar sentido e significado ao que eles aprenderam e aprendem, tem servido sim para trazer insatisfações e desencantos à nossa prática docente e referendar a feição social, portanto construída, dada a Matemática, de disciplina de difícil apreensão.

Dessa forma, assistimos ainda, no novo milênio, à Matemática se prestar para excluir, para discriminar ou para servir de referência de escolhas de vida profissional para milhares de pessoas.

É bem verdade que, na maioria das escolas de nível médio, o que se sabe, de modo bastante informal, é que a Matemática já está perdendo a sua posição de primeiro lugar no *ranking* das disciplinas que mais reprovam e, que, nem todas as culpas são, ou devem ser atribuídas ao professor.

Entretanto, isso não nos isenta da nossa parcela de contribuição para o cenário que hoje se afigura, nem tão pouco, nos dispensa de sermos cuidadosos o suficiente para, quando algo der “errado”, antes de procurarmos algum “culpado”, investiguemos primeiramente a nossa própria prática, na busca de elementos que possam ter contribuído para resultados pouco satisfatórios.

Na Matemática do Ensino Médio, a relação desproporcional entre quantidade de conteúdo programático e tempo hábil para desenvolvê-lo fomenta uma prática docente para o ensino da Matemática, em que o professor esforça-se para transmitir ao aluno todo o conteúdo de forma pronta, acabada e acelerada, elevando, para o primeiro plano da ação docente, o conteúdo, e rebaixando para segundo, a aprendizagem.

Comumente, nas salas de aula, falamos de problemas que não são dos alunos, mas da Matemática, através de uma linguagem que para eles no mínimo é estranha, porque privilegia o técnico, o formal e o abstrato.

A prática tem nos mostrado que esse tipo de ensino contribui para a formação de um aluno passivo perante a sua própria aprendizagem, à medida que o condiciona a receber do professor um conhecimento que se memorizado e reproduzido no momento das avaliações será uma certeza de aprovação. A concepção de que o aluno aprende por reprodução rege o trabalho do professor, que com isto, restringe a Matemática a uma linguagem de símbolos cujo domínio necessita de memorização de regras, de algoritmos e de técnicas.

O aluno fica dependente do professor, enquanto sujeito transmissor de um conhecimento que o capacite a resolver alguns tipos de problemas. Como consequência, o aluno, ao receber um problema para resolver, diz logo que não entendeu ou que não sabe fazer, pondo-se a esperar a resolução do mesmo pelo professor, para copiar sem questionar. É mais cômodo esperar pela solução apresentada pelo professor e virar-se para conversar com o colega, do que esforçar-se para resolver o problema. Afinal, o professor já tem a resposta, e o da prova, certamente, se não for o mesmo, será um bem parecido.

Surgem então algumas questões: - Estaria este tipo de ensino, dando conta de preparar o aluno para resolver os diversos e inéditos problemas que a vida acadêmica, profissional ou simplesmente sócio-cultural possa lhe propor? Estamos, dessa forma, preparando nosso aluno para adaptar-se a novas e inesperadas situações que a vida em sociedade possa lhe apresentar? Estamos preparando nosso aluno para aprender a aprender continuamente, conforme nos parece ser uma exigência da sociedade atual que transforma rapidamente os conhecimentos?

Ao refletirmos sobre esses questionamentos nos convencemos de que, o modo como tradicionalmente vem se ensinando Matemática nas escolas, já não mais contribui para capacitar o aluno a melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, além de ser, provavelmente, uma das principais causas da falta de interesse pela Matemática, da passividade do aluno perante sua aprendizagem e do precário conteúdo matemático adquirido pelo aluno no ensino.

Vivemos hoje em uma sociedade tecnológica e globalizada, que tem sua força motriz na informação, capaz de transformar rapidamente um conhecimento atualizado em um conhecimento obsoleto. Com isso, é provável que aquilo que nos esforçamos hoje para que nossos alunos aprendam, amanhã, quando esses alunos ingressarem no campo de trabalho, seja um conteúdo de pouca utilidade. Segundo D'Ambrósio (2001, p.80), “pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã” representa um grande desafio para a educação.

Nesses termos, entendemos que mais importante do que transmitir informações/conteúdos para serem reproduzidos quando solicitados, é desenvolver nos alunos habilidades e estratégias que lhes permitam, de forma autônoma, gerar novos conhecimentos a partir de outros já previamente adquiridos. Capacitando-os assim, a aprender a partir de seus próprios recursos, certamente, terão melhores condições para adaptarem-se à mudanças tecnológicas e culturais.

Para desenvolver nos alunos tais habilidades, faz-se necessário investirmos em estratégias de ensino que os habituem a utilizarem conhecimentos prévios, seus e do grupo social em que estão inseridos, na perspectiva de encontrarem por si mesmos, respostas às perguntas que os inquietam ou que precisem responder, ao invés de esperarem uma resposta do professor ou do livro-texto.

Dessa forma, na perspectiva de melhor contribuirmos para a formação dos alunos, estamos investindo na pesquisa, na ação e na pesquisa sobre a ação de estratégias de ensino que sejam capazes de promover a aprendizagem de conteúdos matemáticos e, ao mesmo tempo, de desenvolver competências e habilidades úteis para o aluno na sua vida pessoal, escolar e futuramente profissional, tais como autonomia, autoconfiança, criatividade e determinação em seu constante aprendizado.

Nesse processo interessamo-nos pela Modelagem Matemática, porque nesta, a matemática escolar deixa de ser mera transmissão de técnicas de resolução e passa a configurar-se como instrumental relevante para a solução de problemas de situações reais envolvendo outras áreas do conhecimento.

Um problema a ser resolvido se coloca, *a priori*, como pretexto para que o aluno aplique conhecimentos já adquiridos, dessa forma significando-os ou re-significando-os, e, construa outros a partir do sentimento de que esses são insuficientes para a determinação das respostas procuradas.

Entendemos que, tal mobilidade, exigida dos alunos dentro do processo de Modelagem Matemática, torná-os co-participes de seus processos de aprendizagem, e conseqüente formação, além de favorecer o desenvolvimento das habilidades e das competências que ansiamos e que acreditamos serem úteis para o educando em qualquer fase de sua vida.

Bassanezi (2002, p.177) acrescenta que,

os processos pedagógicos voltados para as aplicações podem levar o educando a compreender melhor os argumentos matemáticos, incorporar (sic) conceitos e resultados de modo mais significativo e, se podemos afirmar, criar predisposição para aprender Matemática porque passou, de algum modo a compreendê-la e valorizá-la.

Entretanto, embora a Modelagem Matemática conte com aproximadamente 20 anos de pesquisa no Brasil, ainda são poucos os professores que se utilizam dela em suas práticas, sob o pretexto de que “não serve para ser usado em sala de aula”, principalmente em cursos regulares, porque encontram obstáculos difíceis de serem administrados.

Mas, por não aceitarmos tal concepção, por não nos intimidarmos com os obstáculos, ao contrário, entendê-los como co-participes de qualquer ação pedagógica, por acreditarmos que o ensino através da Modelagem trás avanços para a Educação Matemática e para a educação em geral, nos dispomos a vivenciar e a refletir sobre a Modelagem como uma alternativa de ensino da Matemática no Ensino Médio, a partir de sua utilização em uma turma integrante do sistema regular de ensino e da análise dos resultados obtidos.

Dentro desse propósito, conduzimos um estudo de natureza qualitativo cujo objetivo foi observar como a professora e os alunos se envolvem em atividades de Modelagem e discutir, à luz de todo o conhecimento já produzido por pesquisas já realizadas na área, os efeitos desse envolvimento para a prática docente no referido método, para a formação geral do educando bem como para o processo de ensino-aprendizagem de um conteúdo reconhecidamente complexo, como é o caso das *Funções*.

As técnicas utilizadas para a obtenção de dados foram a observação, a análise dos materiais escritos produzidos pelos alunos em atividades de Modelagem e das transcrições das aulas gravadas em áudio-vídeo. A observação foi livre, o que nos levou a registrar em um caderno de campo o que mais chamou a atenção do nosso olhar norteado pela questão da investigação.

O nosso envolvimento com a presente temática produziu uma dissertação que foi organizada em três capítulos. No **Capítulo I - Modelagem Matemática no Ensino Médio**, a partir de uma pesquisa bibliográfica que nos informou algumas concepções e perspectivas já existentes de Modelagem Matemática, enquanto estratégia de ensino e aprendizagem, quais as vantagens na sua utilização e os obstáculos já detectadas por aqueles que nos antecederam na

área, buscamos adequar o referido método ao contexto educacional no qual estamos inseridos, gerando uma perspectiva de Modelagem.

A proposta de Modelagem Matemática desenhada no Capítulo I e colocada em prática em uma turma de primeira série de Ensino Médio gerou o **Capítulo II - Uma perspectiva de Modelagem: a materialização**, que nada mais é do que, como o próprio nome indica, uma descrição detalhada de nossa proposta/definição sendo materializada em um contexto real, segundo as etapas sugeridas por Biembengut e Hein (2003, p.18-22): diagnóstico da realidade na qual aplicamos a pesquisa e o desenvolvimento do conteúdo programático que prescindiu da escolha de um tema e determinação das ênfase e enfoques para o conteúdo previsto no planejamento anual da escola.

No **Capítulo III - A avaliação**, utilizando as **Atividades** de Modelagem, realizada em sala de aula, com e pelos alunos, como referenciais de análise, fizemos uma avaliação da proposta apresentada, como produtora de uma aprendizagem significativa de *Funções*, sem perder de vista o desenvolvimento do processo como um todo, que foi observado desde as intenções e objetivos de ensino da professora até a avaliação da produção do aluno. No interior desse capítulo, também, fizemos uma pequena discussão sobre o conceito de Aprendizagem significativa de David Ausubel e apresentamos a forma utilizada para transformar em notas os procedimentos e as estratégias dos alunos em **Atividades** de Modelagem, conforme exigências do sistema regular de ensino no qual estávamos inseridos.

Este trabalho não tem a pretensão de ser um manual para a utilização de Modelagem Matemática para o ensino em cursos regulares, mesmo porque, entendemos que, em termos de educação, cada proposta apresentada deve ser, pelo professor, re-significada e adaptada conforme a realidade, as experiências vividas e as intenções dos atores do contexto.

Mas, temos sim, a pretensão de que este trabalho possa servir de motivação e de inspiração para que colegas, professores de Matemática, em especial, invistam em metodologias de ensino que tragam para nossa prática mais satisfações quanto ao aproveitamento e ao envolvimento dos nossos alunos, às demandas da sociedade e a nós mesmos como educadores, a despeito de todas as adversidades.

Capítulo I

Modelagem Matemática no Ensino Médio

1- Introdução

A Modelagem Matemática, uma das tendências metodológicas mais em evidência na moderna Educação Matemática, mesmo após vinte anos de pesquisas no Brasil, ainda causa polêmica. Há convergências e divergências nessa área, principalmente no que diz respeito a sua definição e a sua utilização em contexto escolar. Temos observado que em exposições e/ou defesas de trabalhos sobre atividades de Modelagem, feitas a professores, é comum suscitarem questionamentos sobre a atividade ser, ou não, de Modelagem Matemática.

Professores/pesquisadores que têm desenvolvido atividades de Modelagem Matemática em suas salas de aula, bem como acompanhado outros professores e conduzido investigações, como Barbosa (2003a), por exemplo, são categóricos em afirmar que em todas as práticas dessa natureza, a questão “O que é Modelagem Matemática?” sempre vem à tona.

Logo, percebemos que, ao enveredarmos pelo caminho da pesquisa em Modelagem Matemática, a partir de sua aplicação como método de ensino-aprendizagem, é impossível sermos indiferentes a primeira questão que forçosamente se coloca: - O que é e, quando estamos fazendo Modelagem Matemática no cotidiano de nossas aulas?

Ao mesmo tempo, saber que esse método, de acordo com os resultados obtidos em pesquisas na área, é interessante para o ensino e a aprendizagem da Matemática, e que mesmo assim ainda é pouco utilizado por professores de matemática a pretexto de que não dá para ser usado na sala de aula, nos inquieta saber: - Por que não “dá”?

Sem querer já enunciar respostas, mas estabelecer algumas hipóteses, arriscamos, por conta de nossa razão sensível, a dizer que o pretexto enunciado na segunda questão pode estar sendo fortalecido pelas respostas que os professores encontram para a primeira, ou seja, acreditamos que, dentre outras coisas, o engessamento dado à concepção do que é Modelagem

Matemática e de como ela pode ser usada no ensino, é que a torna pouco plausível de uso no ensino regular¹.

Assim, para dar respostas mais consistentes às nossas primeiras inquietações, para fortalecer ou modificar nossas próprias concepções acerca do assunto, buscaremos, inicialmente, através de pesquisa na literatura disponível sobre o assunto, informações sobre a Modelagem Matemática, desde a sua concepção original. Tal pesquisa tem como fim primordial elaborar/buscar uma adaptação do processo de Modelagem, que se encaixe no sistema educacional no qual estamos inseridos e que viabilize o ensino de conteúdos matemáticos preestabelecidos, a ponto de torná-los significativos para os alunos.

2 – Modelo e Modelagem Matemática

A matemática, na forma de pensamento ou de linguagem, está presente na vida de todas as pessoas, por mais que elas não se dêem conta disso ou não se interessem pela mesma. A todo o momento, estamos medindo, comparando, estimando, expressando alguma quantidade. Além de que, na sociedade da informação e da globalização, atual, a linguagem matemática, pelo seu grande poder de síntese e de entendimento universal, está cada vez mais presente nas informações.

Dessa forma, é comum, em problemas de situações reais² aparecer sempre alguma matemática, explicitamente ou implicitamente, que, para resolvê-los, precisamos, via de regra, relacionar com algo conhecido por nós, que tenha sido previamente estabelecido/construído culturalmente ou cientificamente. A esse “algo”, chamaremos de modelo.

Mortimer e Scott (2003), apoiados na teoria sócio-histórica de Vygotsky, defendem que a explicação de um pensamento pressupõe a importação de algum modelo teórico sobre o qual aquele se construirá. Com outras palavras, Garding (1997, p.9) nos fala que ao ‘tentar compreender o mundo à sua volta, o homem organiza as suas observações e idéias em estruturas conceptuais’ as quais são chamadas de modelos.

¹ Aqui entendido como um curso de normas pré-estabelecidos, conforme o desenvolvido na maioria das escolas brasileiras.

² A realidade aqui será tratada e entendida como qualquer contexto (parte ou todo) que habite no meio circundante do modelador – aquele que constrói um modelo.

Como, normalmente, estamos sendo solicitados a dar explicações e resolver problemas para compreender o mundo na perspectiva “de sobreviver e de transcender” (D’AMBRÓSIO, 2001, p.19), então precisamos a todo o momento manipular modelos criados por nós ou pelo outros. Assim, se os modelos não existem ou se mostram insuficientes precisam ser criados ou recriados, da mesma forma que, quando eles não existiam foram criados, socialmente ou cientificamente.

Com isso, o modelo, antes de servir de referência é também produto de um processo de construção, de elaboração e de refinamento: **a modelagem**.

Daí inferimos que Modelagem “é o processo que envolve a obtenção de um modelo” e que, se o modelo for “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real”, então temos um modelo matemático (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.12).

Bassanezi (2002, p.24) acrescenta que o processo de modelagem matemática, além de obter, valida um modelo e a sua eficiência reside na nossa conscientização de que “estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade [ou de uma idealização desta], ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”, através do que podemos entender diversos fenômenos a partir de um, ou seja, entender o todo a partir das partes, ao mesmo tempo em que entendemos as partes.

Entretanto, o mundo, ou a realidade que se quer compreender, por via de regra se encontra imersa em uma teia de múltiplas informações³ e de conhecimentos⁴, que movida pela ação humana, formam entre si um ciclo interativo e, dessa forma o que em determinado instante é informação no outro pode ser conhecimento e o que é conhecimento, informação.

É essa alta rotatividade da realidade, além de suas características plurais, que nos impede de entendê-la e/ou explicá-la de uma só vez.

Necessitamos, então, recortar/destacar da totalidade um conjunto de elementos que seja bastante significativo para elaborar modelos mais simples que representem a realidade que se quer entender/explicar.

³ Dados ou notícias do meio circundante.

⁴ Fazer(es) e saber(es) que vêm e vão sendo acumulados pelo homem durante a sua história. (D’AMBRÓSIO, 1999)

Quando procuramos refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um (...) *modelo* [**grifo no original**] (BASSANEZI, 2002, p.18).

Por exemplo, uma árvore é objeto de minha atenção. A árvore me fornece muitas informações: cor, cheiro, altura, quantidade de folhas, de galhos, grossura, dimensão global, forma e tantas outras. Mas eu posso decidir ignorar essa multiplicidade de informações e selecionar apenas dimensão global, forma e cor e só me ocupar de informações sobre esses fatos. Não estarei mais lidando com a árvore como um todo, mas com uma **representação** parcial, limitada, dessa árvore, ou (...) com um **modelo** dessa árvore [**grifos no original**]. (D'AMBRÓSIO, 1999).

Assim, deve constar de todo modelo a parte mais significativa da realidade, segundo o desejo e/ou a necessidade do modelador e, dessa forma, um modelo não é a representação da realidade em sua totalidade, embora carregue essa responsabilidade, mas sempre um recorte, uma aproximação de idealizações sobre a realidade. A distância entre o modelo e a realidade que se quer explicar/entender, será determinada pelo grau de refinamento do modelo, ou ainda, pelo nível de conhecimento matemático do modelador.

Um modelo matemático só é de fato um modelo, se servir de referência ou se permitir ser reproduzido para a resolução de problemas semelhantes que originaram o modelo, além de ser mola propulsora para o desenvolvimento de outros modelos ou conhecimentos. O que explicitam Biembengut e Hein (2003, p.13), quando definem modelagem matemática como “uma arte⁵, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma situação particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações”.

Segundo Bassanezi (2002, p.19-20), o termo modelo é usado nas mais diversas situações o que “nos leva a considerar aqui apenas o que concerne à representação de um sistema”. Tais como: modelo objeto que é a representação de um objeto, de um fato concreto ou de um modelo teórico que é aquele vinculado a uma teoria existente e sempre construído em torno do modelo objeto. “Chamaremos simplesmente de *Modelo Matemático* um conjunto

⁵ O processo de modelagem pode ser considerado um processo artístico, pois para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.12)

de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” [grifos do autor] (idem).

Dessa forma, podemos dizer que a Matemática com suas expressões, equações, funções, fórmulas, tabelas, formas e teorias, é um conjunto de modelos objetos, ao redor dos quais construiu-se uma teoria e, portanto, a Matemática, em si, também é um modelo teórico.

Barbosa (2003, p.53) apoiado em alguns autores/pesquisadores internacionais⁶, define modelagem matemática, na perspectiva da matemática aplicada, como “todo o processo de abordagem de um problema não matemático, envolvendo a construção do modelo” matemático, que vai desde a simplificação da situação real com vistas a reduzir o número de variáveis até a obtenção do modelo através da utilização de objetos matemáticos, como gráficos, equações, inequações, para representar certos aspectos de uma situação real.

2.1 – O processo de obtenção do Modelo Matemático

O processo de obtenção de um modelo ou de modelagem de situações reais com ferramental matemático é composto por etapas. Biembengut e Hein (2003, p.13-5) destacam as seguintes:

1. **Interação** – fase preliminar em que ocorre o envolvimento com o tema (realidade) a ser estudado/problematizado, através de um estudo indireto (por meio de jornais, livros e/ou revistas) ou direto (por meio de experiências em campo).
2. **Matematização** – após a interação ocorre a “tradução” da situação -problema para a linguagem matemática. É aqui que se formula um problema e escreve-o segundo um modelo matemático que leve à solução.
3. **Modelo Matemático** – em seguida ocorre a “testagem” ou validação do modelo obtido, através da análise das respostas que o modelo oferece quando aplicado à situação que o originou, no sentido de verificar o quanto as mesmas são adequadas ou não. “Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve

⁶ CROSS, M., MOSCARDINI, A.O. **Learning the art of Mathematical Modelling**. Chichester: Ellis Horwood, 1985. EDWARDS, D., HAMSON, M. **Guide to Mathematical Modelling**. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1990. BERRY, J., HOUSTON, K. **Mathematical Modelling**. London: Edward Arnold, 1995.

ser retomado na segunda etapa (...) mudando-se ou ajustando-se hipóteses, variáveis, etc.”.

Bassanezi (2002, p.26-31) apresenta uma ampliação e um detalhamento dessas mesmas etapas, transformando-as nas seguintes:

1. **Experimentação** – etapa em que se processa a obtenção dos dados.
2. **Abstração** – é o procedimento que leva a formulação dos modelos através da seleção de variáveis mais significativas do sistema que se quer estudar; da problematização ou formulação de questões sobre o sistema e da formulação de hipóteses e simplificação do sistema para restringir o número de variáveis.
3. **Resolução** – o modelo é obtido com a tradução da linguagem do problema para a linguagem matemática.
4. **Validação** – o modelo é aceito ou rejeitado conforme o grau de aproximação desejado pelo modelador.
5. **Modificação** – consiste em reelaborar o modelo segundo novas hipóteses, novos dados, ou novas teorias no sentido de aumentar o grau de aproximação. Ocorre com o aprofundamento da teoria.

Tomando por base toda a teoria até aqui discutida, já nos é possível concluir que, Modelagem Matemática⁷ é um método que transforma uma situação/questão escrita na linguagem corrente e proposta pela realidade em linguagem simbólica da matemática, fazendo aparecer um modelo matemático, que por ser uma representação significativa do real, se analisado e interpretado segundo as teorias matemáticas, devolve informações interessantes para a realidade que se está questionando.

Metaforicamente, Bassanezi (2002, p.25) coloca que “a obtenção de um modelo pressupõe (...) a existência de um dicionário que interpreta, sem ambigüidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa”.

Logo, quanto mais conteúdo matemático possuir o modelador, mais “palavras” terá o seu dicionário.

⁷ Doravante, para evitar repetições textuais, trataremos modelagem matemática e modelo matemático apenas por modelagem e modelo, exceto nos momentos em que houver necessidade de respeitar alguma citação.

Ao mesmo tempo, “A modelagem pressupõe multidisciplinaridade” (idem, p. 16) o que nos conduz a concluir que o modelador matemático também precisa ter algum domínio sobre as demais áreas do conhecimento que sejam pertinentes a realidade que ele quer estudar, ou seja, para matematizar uma situação não basta somente saber matemática, embora esse conhecimento seja imprescindível.

Segundo Burak (1992, p.62), “a Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” e, nesse sentido, tem sido feito desde a pré-história, quando “o homem [aliando sua capacidade de raciocinar às suas observações] encontrou na Matemática uma poderosa ferramenta na busca do entendimento da natureza e dos seus fenômenos”, que primeiro, procurou dominar para, em seguida, usá-la em seu benefício.

3 – História da Matemática e Modelagem

Desde muito cedo, ainda na Idade da Pedra (c.5.000.000-3000 a.C.), o homem sentiu a necessidade de símbolos que servissem para contar/representar, na perspectiva de registrar/comunicar, as quantidades que percebia em seu meio. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros, ou seus inimigos, quantos carneiros tinha o seu rebanho, se este estava aumentando ou diminuindo, de quantos em quantos dias poderia plantar e/ou colher e, como o homem é um ser racional, que busca a todo instante adaptar-se ao seu meio, começou a elaborar alguns artifícios que o possibilitassem resolver seus problemas de contagem.

Conta a história da Matemática que, a princípio, o homem usava os dedos das mãos e dos pés para contar, em uma relação do tipo 1 para 1, depois passou a usar outras partes do corpo, como cotovelos, pulsos e ombros, mantendo a mesma relação. Quando estes já não suportavam mais as quantidades, usavam pedrinhas que amontoavam em grupos de cinco, talvez por ser uma quantidade familiar. Algumas vezes faziam marcas em pedaços de madeira ou de osso (GUNDLACH, 1992, p.2-3).

Assim, a pretexto de resolver um problema humano e caminhando, de forma não intencional, no sentido de estabelecer o primeiro modelo matemático – o número, que pedirá o trabalho e a colaboração de várias civilizações para ser lapidado até chegar aos moldes

como, atualmente, são universalmente conhecidos - , começa o desenvolvimento, ainda que de forma embrionária, do que hoje chamamos de Matemática.

Daí defendermos a Matemática “como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural” (D’AMBRÓSIO, 2001, p.7)

3.1- Nas primeiras civilizações

As sociedades inicialmente formadas por caçadores nômades, com o tempo, se estabeleceram, formando tribos, vilas e cidades, dando à matemática um meio prático para se desenvolver, já que o homem instalado precisa construir moradias, cuidar da terra, plantar, colher, armazenar o produto da colheita construir sistemas de irrigação e de drenagem e criar animais para a subsistência não só sua mas também de toda a comunidade e, para tais atividades, invariavelmente, precisava quantificar, medir, calcular, estimar, generalizar e comparar. “Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo⁸ primordialmente como uma ciência prática para assistir as atividades ligadas à agricultura e à engenharia” (EVES, 2002, p.57).

Neste ponto, nos é possível especular que, embora a Matemática dos egípcios e dos babilônicos tivesse um propósito eminentemente prático, para atender as demandas tecnológicas do tempo, ela não deixou de desenvolver a si mesmo, enquanto ciência, pois ao mesmo tempo em que oferecia soluções para alguns problemas, propunha problemas teóricos que só poderiam ser resolvidos dentro da própria matemática, elaborando o que hoje é conhecido pelo nome de regras ou de propriedades.

Foi somente com o aparecimento da civilização seguinte (c.800-200 a.C.), que a Matemática começou de fato a ser questionada em seus pontos fundamentais. “Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder às questões na forma do *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*.”(EVES,

⁸ Região constituída pelas sociedades que se formaram ao longo dos grandes rios da África e da Ásia: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental.

2002, p.94) elaboradas pelos gregos antigos que “faziam a distinção entre os estudos das relações abstratas envolvendo os números e a arte prática de calcular com números.” (p.98).

Com os gregos, a Matemática toma destaque como Ciência buscando explicar-se para desenvolver-se/refinar-se enquanto, no que diz respeito a propósitos, distancia-se da Matemática utilitária, sem, contudo, deixar de tomar a compreensão do meio circundante como fonte motivadora. Foi procurando codificar o quê do mundo lhes era desconhecido ou misterioso que os gregos estabeleceram importantes modelos matemáticos, que serviram de base para o desenvolvimento de toda a Ciência-Matemática subsequente, o que referenda a capacidade de a Matemática evoluir a partir de problemas gerados, ou não, por ela mesma.

Assim, sem negar os primeiros exercícios de modelagem feitos pelos egípcios e pelos babilônicos, mas levando em consideração que os gregos foram os primeiros a sistematizar o conhecimento matemático, citaremos alguns exemplos ocorridos a partir da Grécia, apenas para reforçar nossos argumentos de que se fazia Matemática por que se fazia modelagem, ou que “A modelagem matemática é matemática por excelência”. (D’Ambrósio in BASSANEZI, 2002, p.11).

De uma forma genial para a época, **Tales de Mileto** (639 - 568 a.C.), com varas e sombras, determinou a altura de uma pirâmide e desenvolveu a teoria dos triângulos semelhantes. Atribuí-se a ele também, descobertas matemáticas obtidas já por dedução e não mais por intuição ou por experimentação. (EVES, 2002).

Pitágoras (580 - 500 a.C.) fundou uma escola que tinha como lema: “Tudo é número”. Deu-nos a entender que para eles os números faziam parte da natureza das coisas e que, portanto, a Matemática já seria a modeladora de tudo. Por conta de suas adorações ao número, desenvolveram em grande parte a teoria dos números e a matemática das formas (geometria) no que diz respeito a nomear figuras (planas e espaciais) e a determinar algumas de suas propriedades.

Partindo do princípio de que “às leis matemáticas traduzem a harmonia universal” (CARAÇA, 1989, p.70), os pitagóricos, no domínio da música, estabeleceram relações entre razões numéricas e notas musicais, propiciando o desenvolvimento da música. E, no domínio da geometria, demonstraram, e, portanto validaram, o mais famoso e provavelmente, mais útil teorema da matemática: O teorema de Pitágoras.

Segundo **Platão** (428 - 347 a.C.), a Matemática seria capaz de modelar o caráter das pessoas. Dando continuidade ao pensamento pitagórico, Platão defendia entusiasticamente que o

estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial que fosse cultivada pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal. (...). A matemática parecia da mais alta importância a Platão devido ao seu componente lógico e à atitude abstrata gerada pelo seu estudo. (EVES, 2002, p.132).

Eudoxo (488 – 355 a.C.) utilizando modelos geométricos, explicou o movimento dos planetas e das estrelas, imaginando que os astros estivessem presos a esferas celestes transparentes, todas girando em torno da Terra. Criou fórmulas (modelos) para calcular volume do cone e da pirâmide que até hoje são usadas.

Euclides (300 a.C. -) reúne e organiza os descobrimentos de seus antecessores em treze livros ou capítulos denominados *Elementos de Euclides*. O impacto causado pelo rigor matemático euclidiano transformou os *Elementos* em uma obra incontestável por toda a idade média e moderna, constituindo-se em um modelo clássico de organização formal da Matemática por um período de mais de dois milênios. Somente em 1829, Lobachewsky, um proeminente matemático russo da Universidade de Cazan, publica um artigo questionando a validade da definição de retas paralelas contida no Livro I postulado V de *Os Elementos*. Surge com isso a *geometria não-euclidiana*.

Arquimedes (287 – 212 a.C.) matematizou os fenômenos físicos, no sentido de utilizá-los na construção de máquinas, e, dessa forma, foi o primeiro a deduzir as leis das alavancas e das roldanas e a descobrir por que os barcos e os navios flutuam. Ensinou a calcular o número π e a determinar a área de figuras, como elipses, parábolas e cilindros com um método que séculos depois daria origem ao chamado cálculo integral (EURECA, Edição Especial da Revista GALILEU, 2002).

Eratóstenes (276 – 194 a.C.) calculou o raio da Terra chegando a um valor aproximado de 40.000 km, cometendo um erro de apenas 75 km, aproximadamente. Elaborou um dispositivo que calcula todos os números primos menores que um número n : o crivo de Eratóstenes. (EVES, 2002).

Diofanto (325 - 409) teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números.

Em suas obras, Diofanto resolve mais de uma centena de problemas que levam a equações (EVES, 2002) e, para escrever suas equações, utilizou símbolos que marcaram a passagem da **álgebra retórica**, em que as expressões são escritas por palavras, para a **álgebra sincopada** na qual algumas expressões vêm escritas em palavras e outras abreviadas. Com isto, ele abriu caminho para que outros matemáticos, como o árabe **Al-Khowarizmi** (c.825) e o francês **François Viète** (1540 – 1603), criassem a **álgebra simbólica**, em que as equações são totalmente escritas com símbolos, tal como as conhecemos hoje (GUELLI, 1992).

A partir do século V d.C., com a queda de Roma ante os invasores “bárbaros”, começou o processo de transformação da Europa de civilização antiga em civilização medieval, em que os intelectuais e os inventores deixaram de se interessar pela ciência pura e pela matemática e voltaram suas energias para a engenharia e a religião. Os únicos locais da Europa onde se cultuava o saber eram os mosteiros onde os monges preferiam a religião e a filosofia à ciência (EVES, 2002).

3.2- No tempo da renovação

Por volta do século XIV, quase um milênio depois da queda de Roma, a civilização européia medieval, através de uma renovação de interesses culturais, começa a dar lugar à civilização moderna e a uma nova ciência que busca compreender o Universo a partir de leis naturais.

O europeu da modernidade viveu em um período de agitação e de grandes mudanças demográficas, políticas, geográficas, econômicas e culturais, promovendo uma verdadeira quebra dos paradigmas medievais, culminando com o Renascimento - uma nova maneira de ver e fazer, Ciência e Arte.

“Em especial, o século XVII foi particularmente importante na história da matemática, pois muitos campos novos e vastos se abriram para a pesquisa em matemática” (EVES, 2002, p.340), promovendo o aparecimento de grandes cientistas e pensadores, dentre os quais,

destacaremos alguns, com o objetivo de continuar mostrando que o processo de modelagem foi parceiro do desenvolvimento da Matemática.

“A astronomia contribuiu muito para a matemática, (...) houve uma época em que ser matemático significava ser astrônomo. Dentre os astrônomos que impulsionaram a matemática figura com destaque o polonês **Nicolau Copérnico** (1473-1543)” (EVES, 2002, p.313) que, buscando compreender os astros e tudo que lhes era relativo, elaborou vários modelos matemáticos, muitos deles congregados no que hoje chamamos de trigonometria.

Outros dois importantes astrônomos contribuíram notavelmente para a matemática perto do início do século XVII: o italiano **Galileu Galilei** (1564 – 1642) e o alemão **Johann Kepler** (1571-1630).

Galileu depois de observar que, ao jogar do alto da torre de Pisa dois pedaços de metal, um deles com peso dez vezes o do outro, os dois chocaram-se contra o chão praticamente no mesmo momento, estabeleceu a lei segundo a qual, a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, ou ainda que $s = \frac{gt^2}{2}$. Dessa forma, fundou a mecânica dos corpos em queda livre e lançou os fundamentos da dinâmica em geral.

Galileu foi o primeiro a usar fórmulas matemáticas para descrever fenômenos naturais e por isso ele pode ser considerado o “pai da modelagem matemática”, método empregado com sucesso na ciência moderna, que promoveu o crescimento pela procura por fórmulas matemáticas que descrevessem como os fenômenos ocorrem. A ele também se deve a introdução das funções para descrever fenômenos do mundo físico (SAMPAIO, 2004) e, dessa forma, as funções tornaram-se modelos explicativos de realidades.

Kepler “(...) convencido de que os planetas descrevem órbitas em torno do sol, (...) procurou de maneira infatigável determinar a natureza e a posição dessas órbitas e como elas são percorridas pelos planetas” (EVES, 2002, p.356). O problema era então, a obtenção de um modelo para o movimento dos planetas que correspondesse às observações feitas. Após um trabalho efetuado com zelo e paciência durante mais de 20 anos, Kepler enuncia as leis do movimento planetário, segundo uma linguagem matemática:

I. Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetória elíptica com o Sol num dos focos.

II. O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

III. O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita.

(EVES, 2002, p.357)

Para concluir as leis acima, Kepler deu várias e relevantes contribuições à matemática. Ao calcular a área (lei II) utilizou um método que mais tarde viria compor o cálculo integral. O mesmo método utilizou para calcular o volume de mais de noventa sólidos de revolução, contribuindo com conhecimentos matemáticos para a geometria espacial e analítica.

A matemática e a geometria cresceram em importância como saberes imprescindíveis para a compreensão dos fenômenos da natureza e da economia no sistema capitalista da era moderna. Entretanto, afiguravam-se com cálculos cada vez mais extensos e complexos, o que se transformou em um obstáculo de difícil transposição para a época, dada as tecnologias até então existentes.

No mundo capitalista em que o dinheiro ou a falta dele é o que move as ações humanas, além do saber fazer, importava o saber fazer rápido, pois o tempo tinha-se tornado precioso demais, valia dinheiro, precisava então ser bem empregado.

Com a preocupação de poupar trabalho e ganhar tempo **John Napier** (1550-1617) desenvolveu um dispositivo – os logaritmos, capaz de transformar multiplicações em soma e divisões em subtrações, diminuindo assim, em sobremaneira, a dificuldade e o tempo gasto para realizar as operações.

A criação dos logaritmos foi muito importante para a matemática da astronomia e do mundo capitalista dos séculos XVI e XVII, que pedia dispositivos capazes de efetuarem com rapidez e confiabilidade cálculos extremamente longos e por isso, complexos.

Porém, com o advento da informática poderia se dizer que “os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu” (EVES, 2002, p.347). No entanto, a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, são extremamente úteis na modelagem de fenômenos tais como o crescimento populacional, as aplicações financeiras ou valorização/desvalorização de bens, e, nesse contexto os logaritmos têm uma outra finalidade.

René Descartes (1596-1650) defendeu que a Matemática era a grande modeladora da ciência, pois, segundo ele, entre todas as áreas do conhecimento só a Matemática era certa e tudo deveria ser nela baseado. Descartes procurava a verdade de todas as coisas da ciência através da matemática.

A despeito de algum exagero de cunho filosófico, Descartes inventou um novo método para enfrentar problemas geométricos, cuja essência consiste

em estabelecer uma correspondência entre pontos e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x,y) = 0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos), bem definida do plano. (EVES, 2002, p. 382)

Este método permite que os modelos matemáticos, se escritos na forma algébrica, possam ser representados na forma geométrica e vice-versa.

Assim, depois de Descartes, os modelos matemáticos na forma algébrica puderam, e ainda podem, ser representados na forma gráfica e, se o gráfico é a mesma situação, só escrita de forma diferente, podemos entender o gráfico como mais um modelo matemático, cuja característica fundamental é espelhar uma situação, tornando-a mais visível a especialistas ou não. Desde então, passou-se a colocar praticamente tudo em gráficos.

Ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção de outro gênio matemático francês **Pierre de Fermat** (1601-1665), que definiu equações de reta e circunferência, hipérboles, elipses e parábolas.] (...) Onde Descartes sugeriu umas poucas curvas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat propôs muitas curvas novas, definidas por equações algébricas. (...) Em grande escala, se Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente (EVES, 2002, p.389)

Dessa forma, contribuíram amplamente para a modelagem da matemática ao mesmo tempo em que ofereciam muitos novos modelos que foram construindo a própria matemática e servindo de referência para a compreensão de fenômenos.

Apesar de ser mais conhecido como físico, podemos destacar **Isaac Newton** (1642-1727) como um importante modelador Matemático, pois foi dando uma abordagem matemática para as suas observações feitas sobre os fenômenos da Natureza que ele desenvolveu a Física e contribuiu com importantes ferramentas de cálculo para a Matemática.

Com Newton encerra-se a história da matemática elementar e começa o desenvolvimento do cálculo integral e diferencial, instrumental matemático desenvolvido para resolver questões da natureza e, que hoje, tem aplicação em diversas áreas, como a engenharia, química, psicologia, economia, medicina, agronomia e em outras mais em que a necessidade de se trabalhar com taxas de variação de quantidades. Com o cálculo de Newton foi/é possível otimizar modelos matemáticos, ou, em outras palavras, torná-los mais representativos em relação ao objeto de estudo.

3.3- Conclusão

Assim, percebemos que o desenvolvimento da matemática foi um trabalho de um grande grupo de pessoas, que tendo ou não formação específica, trabalhando de forma concomitante ou não, estando no mesmo lugar ou não, contribuíram durante milênios para a construção de objetos matemáticos que dessem conta de entender e de dominar o meio na perspectiva de utilizá-lo em favor da espécie humana.

Na maioria das descobertas, o que uns faziam em uma época gerava as bases para o que os outros fariam em outra época, ou seja, os primeiros geravam a base do conhecimento sem a qual os próximos não poderiam dar continuidade. Assim é que, por exemplo, quando Kepler concluiu que *Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetória elípticas*, só pôde fazê-lo porque os gregos, em suas contemplações matemáticas, já haviam desenvolvido as propriedades das cônicas. Outro exemplo é a álgebra, já citada, que começou com Diofanto na Antiguidade e, contando com diversas contribuições, chegou a forma atual com Viète já na Idade Moderna.

Muitos outros exemplos e nomes poderiam ser citados no que diz respeito à formação da Matemática, entretanto, como a nossa intenção é verificar o processo de modelagem intrínseco na construção do conhecimento matemático, desde a Idade Antiga até a Idade Moderna, quando a modelagem tomou um maior destaque, ou as contribuições para que esse processo se desenvolvesse, nos bastou realizar um pequeno recorte em que figuraram aqueles que mais se destacaram como modeladores na história da Matemática.

E, nesse breve vôo sobre a história da Matemática, vimos que com os egípcios e os babilônios a Matemática era eminentemente utilitária, voltada para a resolução de problemas

do dia-a-dia. Os modelos matemáticos de então, poderiam ser entendidos como as formas mais ou menos padronizadas que eles utilizavam para resolver determinadas situações. Não existia uma pesquisa na Matemática em si, mas, como utilizá-la para exercer uma relação cada vez mais dominante com a natureza e com os meios de produção e, nesse contexto, os modelos matemáticos iam necessitando de cada vez mais elementos, forçando o desenvolvimento da Matemática.

Na Grécia, a Matemática “desde o seu nascimento, foi teórica, desligada das questões práticas, voltada para a contemplação e com uma forte ligação com questões divinas” (MIORIM, 1998, p.15) e, ao considerarem o ‘cálculo’ uma ferramenta popular e se isolarem em comunidades secretas para discutirem a ‘verdadeira matemática’ (BASSANEZI, 2002), os gregos fizeram um estudo sobre os modelos matemáticos já existentes, generalizando-os, sistematizando-os, ao mesmo tempo em que, por consequência, acabavam por descobrir/construir novos modelos.

Chegando a Idade Moderna, observamos que a ciência combinou pela primeira vez os métodos experimental e indutivo das primeiras civilizações com a dedução matemática dos gregos, ou seja, rompeu a barreira existente entre a tradição artesanal e a culta, entre a razão e a experiência e, com isso, levaram as matemáticas a desempenharem um novo e importante papel: o de ferramenta necessária à explicação dos fenômenos (MIORIM, 1998). A partir do momento em que a Matemática passou a ser ‘elemento fundamental para a formação, comprovação e generalização de resultados que podem, ou não, ser confirmados na prática’(MIORIM, 1998, p.41), criou-se o método da Modelagem.

Podemos localizar, dessa forma, a Idade Moderna como o marco inicial do processo de Modelagem Matemática, embora já o tenhamos localizado, ainda que de forma embrionária nas Idades anteriores, em todos os momentos em que o homem aliando sua capacidade de pensar, de questionar e de criar, ao espírito de investigação e da matemática seguia modelando matematicamente seu meio para melhor conhecê-lo, ao mesmo tempo em que produzia conhecimento matemático.

Portanto, a Modelagem Matemática pode ser considerada como um processo intrínseco da construção da Matemática, pois, foi a modelagem de problemas reais na forma de linguagem matemática que propiciou a construção de grande parte dessa ciência, através da ampliação ou da adequação dos modelos à realidade.

4 – Modelagem Matemática: o método

Apreciando a história da Matemática vimos que na Grécia ocorreu pela primeira vez a separação entre os que usavam a Matemática para resolver problemas práticos e os que a desenvolviam como um corpo de conhecimentos com fim em si mesmo. Embora esta separação tenha ocorrido segundo critérios discriminatórios estabelecidos por uma sociedade que estava dividida em classes, vemos hoje que, tal separação, proporcionou o desenvolvimento em grande escala do conhecimento matemático e por conseqüência da Matemática.

Essa bifurcação ocorrida ‘na atitude de se ver e se fazer matemática’ (BAS SANEZI, 2002, p.32) gerou o que hoje conhecemos por Matemática Aplicada e Matemática Pura. A segunda consistindo ‘somente de axiomas, definições e teoremas encaixados e estruturados de maneira consistente, num crescente caudal de generalizações’ (*idem*, p.172), propõe e resolve problemas gerados dentro da própria matemática visando interesses próprios. Já a primeira, utiliza os produtos/conhecimentos da segunda na resolução de situações problemáticas das outras ciências. ‘É esse elo com as ciências que distingue o matemático aplicado do matemático puro’ (*idem*, p.32).

A Matemática, contudo, por mais que se distanciasse do prático e do utilitário à medida que se desenvolvia, nunca deixou de ser usada para resolver as situações problemáticas que se afiguravam ao homem na busca da compreensão do meio circundante e, todas às vezes que não dava conta de modelar uma situação, o desenvolvimento de novas teorias se fazia necessário.

Procurava-se resolver os problemas, ou modelar as situações com a Matemática Pura existente (tornando-se neste instante Aplicada), caso esta se mostrasse insuficiente ou incipiente para resolver a situação, informaria à Matemática Pura que esta precisava desenvolver-se no sentido de oferecer objetos matemáticos capazes de modelar e resolver o problema original.

Julgamos, então que, tanto a Pura quanto a Aplicada estão no mesmo nível de importância, e que, conforme for o interesse de quem as utiliza, a Modelagem Matemática pode ser um elo unificador. Nesse sentido, a modelagem pode ser vista como uma ação que utiliza a matemática pura, ou que aplica a matemática que já se conhece, para traduzir e

resolver problemas de ordem prática e, por essa razão a modelagem “é um instrumento indispensável da matemática aplicada” (BASSANEZI, 2002, p.175).

E assim, a modelagem, desde a Antiguidade, utilizando-se de ferramental matemático, ora propondo soluções, ora problemas, ao mesmo tempo em que se firmava como um método científico, foi desenvolvendo a Matemática, transformando-a num corpo de conhecimentos capaz de resolver vários problemas de ordem prática ou científica.

Ao mesmo tempo, várias foram e são as áreas de pesquisa que para desenvolverem-se/ampliar-se utilizaram e utilizam a modelagem matemática como método científico, umas com mais, outras com menos intensidade. Bassanezi (2002) cita a Física e a Química Teórica, a Biomatemática, os problemas da indústria e da engenharia, como as que mais se utilizam da modelagem e, as Ciências Sociais como as que, gradualmente, estão “tornando -se clientes do poder da Matemática para a organização de seus dados e para testar a objetividade de seus pensamentos” (p.35).

4.1- No âmbito da Educação Matemática

Surge então a idéia de que um método que serviu e serve para produzir conhecimento novo em cima de outro já adquirido e, que nesse sentido conduziu e ainda conduz o avanço das Ciências, poderia ser uma interessante estratégia para o ensino e a aprendizagem de matemática na sala de aula. O que certamente foi percebido pela comunidade de educadores matemáticos, “no início dos anos 80, a partir das experiências conduzidas por um grupo de professores do IMECC/UNICAMP” que, ao abordarem a matemática a partir de temas sócio-cultural das pessoas, trabalhavam com modelos matemáticos. (BARBOSA, 2000, p.54).

Já em ambiente escolar formal, a idéia foi materializada pela primeira vez [por Bassanezi] em 1983 num curso para professores em Guarapuava (PR) [e.] não tardou muito para estas experiências inspirarem iniciativas em cursos regulares – que possuem programas pré-estabelecidos (idem, p.54),

para os quais, as pesquisas na área apontaram que,

(...) o processo da modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para trabalhar em classe, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da

modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implantar mudanças. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.18).

No âmbito da Educação Matemática, Modelagem pode ser definida como “uma metodologia de ensino-aprendizagem [que] parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso do ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema”. (Idem, p.28).

Nessa abordagem, um tema é escolhido e o professor utiliza “as mesmas etapas e subetapas do processo de modelagem, isto é: **Interação** – reconhecimento da situação-problema e familiarização; **Matematização** – formulação e resolução do problema; e **Modelo Matemático** – interpretação e validação” (Biembengut e Hein, 2003, p.20) para o desenvolvimento do conteúdo programático.

Barbosa (1999, p.4) acrescenta que a modelagem

é um método da matemática aplicada, usada em grande variedade de problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia e de outros (...) [que] foi **apreendido e re-significado** para o ensino-aprendizagem como uma das formas de utilizar a realidade nas aulas de matemática.[grifos nossos]

Nesse sentido, “**há várias maneiras de conceber e materializar** a Modelagem na sala de aula” (idem, p.5) [grifos nossos], através de projetos de curta ou longa duração, através de situações ou atividades propostas aos alunos.

Barbosa (2003, p.69), de forma análoga a Biembengut e Hein (2003) e tomando por referência Skovsmose (2000), **concebe** Modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”, em que **problematizar** refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas e **investigar**, refere-se à busca, à seleção, à organização e à manipulação de informação e de reflexão, na perspectiva de resolver os problemas ou responder as perguntas.

Para a **materialização**, ou seja, para a utilização em sala de aula da modelagem, o autor identifica “três regiões de possibilidades”, as quais ele chama de “casos”. “Os casos não são prescritivos, mas trata-se da idealização de um conjunto de práticas correntes na comunidade” (p.70).

Esta classificação chama a atenção para o fato de que os professores e os alunos podem se envolver com diferentes maneiras de implementar a

Modelagem no currículo, re-elaborando de acordo com as possibilidades e as limitações oferecidas pelo contexto escolar, por seus conhecimentos e preferências. (idem, 2001, p.10)

Os “casos” de Barbosa (2003, p.70) são categorizados conforme as tarefas que compete ao professor e/ou aos alunos desenvolverem dentro do processo de Modelagem, na sala de aula, conforme quadro a seguir:

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Figura 1.1- Tarefas do professor e dos alunos nos casos de Modelagem.

No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos (...), acompanhados pelo professor, (...) a tarefa de resolver o problema. Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar (...) Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. (...) E, por fim, no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. (idem, p. 69).

Dessa forma, o autor ao invés de “engessar” uma definição para a Modelagem, clarifica o que ele entende por, a partir das especificidades da Educação Matemática e, oferece a nós, professores, embora os casos não sejam prescritivos, caminhos/opções através dos quais podemos implantar e desenvolver o processo de Modelagem de forma gradativa nas aulas de matemática, fazendo-se variar em número e em grau as atividades/tarefas que competem a cada um dentro da sala de aula, conforme a percepção de seus próprios saberes.

Observa-se que do *Caso 1* ao *Caso 3* à medida que diminui a quantidade de tarefas que cabe ao professor aumenta a do aluno, transferindo para este mais responsabilidade pela resolução do problema e por conseqüência, pela sua própria aprendizagem, sem, entretanto, eximir o professor da condução do processo.

Assim, por exemplo, um professor ainda iniciante no que diz respeito ao uso da Modelagem pode optar pelo *Caso 1*, no qual ele toma para si a maior quantidade das tarefas a serem desenvolvidas e, à medida que começar a sentir-se mais seguro e/ou mais a vontade dentro de seu contexto, vai transferindo mais tarefas aos alunos, enveredando assim pelos

outros “casos” e assumindo uma postura, cada vez mais predominante, de mediador entre o conhecimento e o aprendiz, deixando de ser o que detém e transmite o conhecimento para ser aquele que, por meio de tarefas, oportuniza a aquisição do conhecimento. Ser, portanto, aquele que ensina a aprender.

4.2- Porque utilizar a Modelagem para o ensino da Matemática

Barbosa (2003b), apoiado em Blum⁹ (1995), apresenta cinco argumentos para a inclusão de modelagem no currículo:

- **Motivação:** os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
- **Facilitação da aprendizagem:** os alunos teriam mais facilidade em compreender as idéias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
- **Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas:** os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-a-dia e no mundo do trabalho;
- **Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração:** os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
- **Compreensão do papel sócio-cultural da matemática:** os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais; [grifos nossos].

De forma semelhante, para Bassanezi (2002), a utilização da Modelagem para o ensino-aprendizagem da Matemática, além de tornar um curso de matemática atraente e agradável, pode levar o aluno a: desenvolver um espírito de investigação, utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas, entender e interpretar aplicações de conceitos matemáticos e suas diversas facetas, relacionar sua realidade sócio-cultural com o conhecimento escolar e, por tudo preparar os estudantes para a vida real, como cidadãos atuantes na sociedade.

Concordamos também que, nessa abordagem, a matemática, porque brota de um problema oriundo do contexto social ou cultural do aluno, torna-se interessante na descoberta

⁹ BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: SLOVER, C. et al. **Advances and perspectives in the teaching of mathematical modeling and applications**. Yorklyn: Water Street Mathematics, 1995.

de soluções aos problemas propostos e instigadora para a formação de novos conceitos. Dessa forma, “à (...) Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos que ele ainda desconhece” (BIENBENGUT e HEIN, 2003, p.18).

Embora a Matemática seja, desde a sua concepção, uma criação do homem para o homem, à medida que evoluía, ia se tornando mais e mais complexa, novas técnicas e teorias iam sendo desenvolvidas e, quanto mais estas se aprofundavam e/ou generalizavam, mais se afastavam da situação de origem, acumulando detalhes cada vez mais complexos e menos significativos para aqueles que se encontravam fora desse campo de estudo, desvinculando-se dessa forma, de uma ligação direta com o homem comum, que passou a ter contato somente com o produto final, pronto e acabado.

Como “é um modo geral, o ensino relativo a uma determinada ciência segue a mesma trajetória que orienta o desenvolvimento e a pesquisa desta ciência” (BASSANEZI, 2002, p.171), o ensino da matemática foi aos poucos se formalizando, tornando-se cada vez mais distante da experimentação, da realidade e do seu processo histórico de construção, à medida que se baseava na transmissão oral de teorias prontas e acabadas. E se antes, o homem aprendia através de sua própria interação com e sobre o objeto, a partir de então ele teria que aprender a partir da experiência ou da compreensão de outros.

Acontece que, conforme temos observado, esse tipo de ensino, que inclusive vem sendo desenvolvido tradicionalmente na maioria das escolas brasileiras, pode provocar desinteresse, transformar o aluno em um agente passivo perante sua própria aprendizagem, contribuir pouco para capacitar o aluno a melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo e, por tudo, levá-lo a adquirir um precário conteúdo matemático, fator significativo para o fracasso escolar.

Nesse sentido, a modelagem matemática, por inverter a seqüência normalmente utilizada no ensino tradicional da Matemática – definição/exemplos/exercícios/aplicações, começando por aplicações/problemas, oferece a oportunidade de implementarmos novos ambientes de aprendizagem nos quais podemos estar desenvolvendo de forma significativa os conceitos matemáticos a partir do trânsito do aluno entre as Matemáticas: **prática**, oriunda das diversas atividades humanas, **formal** que é o resultado da sistematização, do refinamento

e da generalização dos diversos saberes da tradição e a **utilitária** que aplica o conhecimento sistematizado em situações diferenciadas.

Em outras palavras, podemos a partir da prática da interação do sujeito com o objeto que ele deseja conhecer, construir o formal para depois utilizar em situações variadas e mais ampliadas. Além disso, vimos também que através dessa estratégia de ensino é possível desenvolver no aluno criatividade, autoconfiança e criticidade, competências importantes para qualquer fase de sua vida.

Algumas experiências feitas em cursos regulares, isto é, cursos com programas pré-definidos, mostraram que o procedimento de uma modelagem pode ser muito mais eficiente do que simplesmente trabalhar com o método tradicional teoria-aplicação, [**grifo no original**] onde os problemas propostos pelo professor são quase sempre artificiais e procurando justificar a teoria recém ensinada. (BASSANEZI e BIEMBENGUT, 1997).

4.3- Obstáculos apontados para o uso Modelagem Matemática

Por tudo o que já foi exposto até aqui sobre a utilização da modelagem como estratégia de ensino da matemática, vimos que esta vem ao encontro de nossas expectativas de professores de sala de aula. Alunos motivados para aprender matemática e apreendê-la em um nível suficiente para ser aplicada em problemas de outras áreas, sobretudo, saber utilizá-la para compreender a sua realidade, parece ser tudo o que um professor de matemática mais deseja de seus alunos.

Então, porque os professores de Matemática fazem pouco uso da modelagem, mesmo esta contando com um referencial de pesquisa, que já soma mais de vinte anos no Brasil?

Segundo Bassanezi (2002, p.37), “à pesar de todos (...) os argumentos favoráveis ao uso da modelagem matemática, muitos colocam obstáculos, principalmente quando aplicada em cursos regulares”, tais como:

- O programa dos cursos regulares que devem ser cumpridos integralmente e, como a modelagem é um processo demorado isto pode não acontecer.
- Alguns professores de matemática duvidam se é de sua competência, ensinar a resolver problemas de outras áreas, ou estabelecer conexões com estas.

- O aluno está acostumado ao ensino tradicional e com o uso da modelagem ele pode se perder ou torna-se apático.
- Na modelagem o aluno passa ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, ele é responsável pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, logo a aula poderá caminhar mais devagar.
- A formação heterogênea de uma classe pode dificultar na relação dos conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática.
- O tema escolhido pode ser interessante e motivador para uns e desinteressante e desmotivador para outros.
- Os professores não se sentem habilitados a desenvolver a modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações da Matemática em outras áreas.

E a estes, outros ainda podemos acrescentar:

- O engessamento dado à definição de modelagem matemática por alguns pesquisadores.
- A falta de tempo do professor para elaborar as atividades, dado que, para sustentar-se precisa trabalhar dentro de sala de aula por no mínimo, 8 horas por dia, ficando sem carga horária disponível para planejamento.
- A formação inicial do professor que não dá conta nem de prepará-lo para a intradisciplinaridade, quanto mais para a interdisciplinaridade e multidisciplinaridade requerida pela modelagem.

Barbosa (1999), em um estudo feito para saber o que os professores pensam sobre a Modelagem, concluiu que eles reconhecem obstáculos para implementá-la, embora concordem que traz vantagens para a aprendizagem matemática.

Os dados desse estudo levam o autor a categorizar as dificuldades identificadas pelos professores “em três eixos: alunos, escola e professores” (p.17). Os alunos desmotivados para a aprendizagem estariam despreparados para esta abordagem; a escola com toda a sua estrutura formal/organizacional oferece barreira para a implementação da modelagem e inibe iniciativas dos professores que intencionem enveredar por esses caminhos; quanto aos professores, “reconhecem a si mesmos como barreira à proposta de Modelagem” (p.19)

porque precisam operacionalizar “mudanças nas suas atitudes em relação à matemática, à educação e à educação matemática” (idem) e algumas já remontam desde a formação inicial.

As evidências apontam para o sentido de que os professores sofrem um tensionamento entre aderir a uma abordagem interdisciplinar, conectada com a realidade e tendo a pesquisa como elemento subjacente, e por outro lado, prezar o planejamento linear da atividade escolar e pelos conteúdos matemáticos. (BARBOSA, 1999, p.21).

Nesse sentido, entre o reconhecer vantagens e o querer vencer obstáculos, é que muitos pesquisadores têm buscado caminhos para que a Modelagem seja utilizada na sala de aula como estratégia de ensino-aprendizagem da matemática. Também nós, movidos por esta problemática, estabelecemos esse, como um dos objetos de nossa investigação: - Como podemos utilizar a Modelagem, para o ensino e a aprendizagem da Matemática em um curso regular como o Ensino Médio, por exemplo?

5 – Uma perspectiva de Modelagem para o Ensino Médio

Barbosa (2003), Bassanezi (2002), Biembengut e Hein (2003) apontam muitos argumentos favoráveis para a utilização da Modelagem como estratégia de ensino e de aprendizagem da matemática. Tornar as aulas mais interessantes e atraentes; relacionar conhecimento escolar com o contexto do aluno, o que facilita a aprendizagem; motivar os alunos e prepará-los para utilizar a Matemática em diversas situações, o que é interessante para o seu movimento dentro da sociedade na qual está inserido, são alguns deles.

Bassanezi (2002, p.177) acrescenta ainda que

(...) os processos pedagógicos voltados para as aplicações (...) podem levar o educando a compreender melhor os argumentos matemáticos, incorporar conceitos e resultados de modo mais significativo e, se podemos assim afirmar, criar disposição para aprender matemática porque passou, de algum modo, a compreendê-la e valorizá-la.

Sob essa ótica a Modelagem viria ao encontro das nossas expectativas docentes pela valorização da Matemática, como saber interessante para leitura e compreensão da realidade, e por aprendizagens mais significativas.

Por outro lado, os professores embora reconheçam as vantagens que a Modelagem possa trazer para o ensino e para a aprendizagem da matemática, afirmam com muita frequência que esse método não dá para ser usado na sala de aula de um curso regular. Reconhecem, portanto, nesse contexto, dificuldades difíceis de serem ultrapassados, ou no mínimo administrados.

As pesquisas de Barbosa (1999) e Bassanezi (2002) mostram que dificuldades relacionadas com a falta de preparo dos alunos para a abordagem, ou com a estrutura organizacional da escola, funcionando como barreira natural à implantação da modelagem, ou à falta de experiência dos professores, podem efetivamente aparecer.

Entretanto, essas “dificuldades podem ser minoradas quando **modificamos o processo clássico de modelagem**, [grifos nossos] levando-se em conta o *momento de sistematização do conteúdo* e utilizando uma *analogia* [grifos no original] constante com outras situações problemas” (BASSANEZI, 2002, p.38). Em outras palavras, por ocasião da **Matematização** – formulação e resolução do problema segundo o modelo encontrado, pode-se desenvolver paralelamente o conteúdo matemático necessário para tal e apresentar exemplos e exercícios análogos para aprimorar a apreensão dos conceitos pelo aluno (BIEMBENGUT e HEIN, 2003). Essa fase é o que faz a diferença entre a Modelação¹⁰ e a Modelagem clássica. (BIEMBENGUT E BASSANEZI, 1997)

Biembengut e Hein (2003) nos colocam que a Modelagem, metodologia de ensino-aprendizagem que parte de uma situação/tema e, sobre a qual se desenvolvem questões que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático, como **originalmente** foi definida, apresenta o inconveniente de não sabermos, inicialmente, por onde o modelo passará, o que pode comprometer o currículo oficial estabelecido nos cursos regulares. Também, pode ser inviável para o professor, o acompanhamento de diversos projetos oriundos de temas escolhidos pelos alunos.

Diante disso, devem ser feitas algumas adaptações que tornem possível a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino-aprendizagem sem, contudo, perder a linha mestra que é o favorecimento à pesquisa e posterior criação de modelos pelos alunos, e sem desrespeitar as regras educacionais vigentes. (idem, p.28)

¹⁰ Termo usado por Bassanezi(2002), Biembengut e Hein (2003) para designar o método que utiliza a essência da Modelagem em cursos regulares com programas predefinidos.

A “Modelagem clássica” citada por Biembengut e Bassanezi (1997) e a forma “como originalmente foi definida” a Modelagem segundo Biembengut e Hein (2003), refere-se à modalidade de projetos, que consiste “em dividir os alunos em grupos, os quais devem eleger temas de interesse para serem investigados por meio da matemática, contando com o acompanhamento do professor. (...) Esta tem sido uma forma talvez preponderante de organizar as atividades de Modelagem em sala de aula” (BARBOSA, 2000, p.57) e, por ser assim, dá consistência à concepção de que, só estamos trabalhando segundo a Modelagem se estivermos de acordo com a modalidade de projetos, bastante próxima das práticas da Matemática Aplicada.

Entretanto, no contexto escolar, os objetivos, a dinâmica do trabalho e a natureza das discussões matemáticas diferem dos modeladores profissionais (BARBOSA, 2003) ou matemáticos aplicados e, por consequência, a Modelagem Matemática em sala de aula pede uma adequação, além do que nosso principal objetivo é ensinar Matemática através da modelagem e não formar modeladores ou matemáticos aplicados.

Daí que, desde já, podemos recusar “a idéia de associar Modelagem exclusivamente à modalidade de projetos. Outros tipos de atividades de Modelagem que demandam menos tempo e são mais simplificadas também podem ser consideradas” (BARBOSA, 2001, p.8) como Modelagem Matemática.

Modelagem não pode ser uma proposta devotada a um pequeno grupo de professores e a alguns ambientes mais abertos às inovações. Sobretudo, devemos assumir uma perspectiva de possibilidades reais, considerando o “lugar” [grifos do autor] onde está a hegemonia de nossas escolas e professores. Considerar a Modelagem através de configurações diferentes representa um avanço em sua viabilidade. (BARBOSA, 2000, p.58).

Sob essa ótica, considerando a realidade escolar, há várias formas de **conceber** e **materializar** a Modelagem na sala de aula (BARBOSA, 1999) e acreditamos que a maneira como alguns a **concebem** é que a tornam em grande parte possível ou não de ser **materializada**.

Logicamente, se “engessamos” uma concepção para o que é Modelagem, se não procuramos pedagogicamente adaptar o método ao nosso contexto escolar, sempre diremos que não dá para utilizá-la. E isso, sempre ocorrerá, não só com a Modelagem, mas com qualquer outro método de ensino-aprendizagem que receba o mesmo tratamento.

Por outro lado, se queremos usufruir das vantagens da utilização da Modelagem como estratégia de ensino em nossas aulas de matemática, é mister que se administre os obstáculos que se afiguram desde o planejamento, além dos que a pesquisa na área já apresenta como previsíveis. Outrossim, entendemos que é da maneira como a Modelagem é materializada, a partir da forma como é concebida, que emergem as vantagens e as dificuldades. O que faz com que estas sejam peculiares do momento e do contexto da materialização.

Assim, tal constatação nos impõe a condição de determinarmos, *a priori*, a forma como iremos organizar/conceber e conduzir/materializar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem da matemática em turmas de 1ª série de Ensino Médio, ou ainda, em que perspectiva a estaremos utilizando.

5.1 – A concepção

Ao comparar o processo original de Modelagem com tudo o que temos vivenciado no Ensino Médio, concordamos com Biembengut e Hein (2003) de que o processo de Modelagem quando aplicado em cursos regulares precisa sofrer algumas alterações levando em conta:

- O grau de escolaridade dos alunos.
- O tempo disponível que terão para trabalho extra classe.
- O programa a ser cumprido.
- O estágio em que o professor se encontra em relação à Modelagem.
- O nível de apoio dado pela escola ao professor para implantar a Modelagem.

Assim, a partir dessas considerações, buscaremos uma perspectiva de Modelagem para a realidade¹¹ na qual estamos inseridos, fazendo com isso, as devidas adequações no processo original, pois “Modelagem pode ser definida em termos dos propósitos e dos interesses subjacentes à sua implementação, conduzindo a implicações conceituais e curriculares” (BARBOSA, 2001, p.3).

Não se trata, entretanto, de buscar uma definição para o método, mas sim, conceber uma forma possível de se fazer Modelagem no Ensino Médio, tomando como referência as

¹¹ Aqui empregada no sentido de contexto escolar.

diversas concepções já existentes e validadas, os obstáculos já apontados e a realidade educacional na qual estamos inserido.

Quando se propõe a trabalhar no Ensino Médio, com qualquer que seja a metodologia, **tempo e conteúdo programático** a cumprir são, por via de regra, variáveis intervenientes que precisam ser gerenciadas/administradas. É de interesse dos alunos, da comunidade escolar e da própria família que eles tenham visto todo conteúdo programático a tempo hábil de participarem dos processos seletivos, sob pena de a escola cair no descrédito da sociedade em geral.

O conteúdo programático a cumprir em cada série do Ensino Médio é bastante extenso para o tempo que nos é dado para tal, mesmo nos moldes como vem sendo feito, no qual o professor utiliza aulas expositivas para definir o conteúdo de forma pronta/acabada e dar alguns exemplos e exercícios de aplicação. O conteúdo aqui está em primeiro plano, é ele quem, levando em conta o tempo, dita a velocidade do professor, que por vezes torna-se impossível de ser acompanhado/apreendido pelos alunos.

Logo, é de se esperar que ao elevar-se a aprendizagem para o primeiro plano, conforme ocorre na Modelagem, ao ter-se a velocidade de desenvolvimento do conteúdo, determinada pelo tempo que o aluno leva para aprender ou maturar idéias sobre modelos construídos, o tempo disponível, previamente determinado pela escola, torne-se insuficiente.

Partindo dessa premissa, tempo e conteúdo programático a cumprir deixam de ser uma questão administrativa para ser optativa e, portanto, ao escolhermos Modelagem, no nosso caso em particular, estamos optando por desenvolver a maior quantidade de conteúdo programático possível, dentro do tempo que o aluno dispõe para aprender e, assumindo o risco de chegar ao final do ano, o aluno não ter “visto” todo o conteúdo previsto, mas com maiores possibilidades reais de ter aprendido o conteúdo visto.

Em se tratando de Ensino Médio, mesmo elegendo-se a aprendizagem discente como prioridade, o conteúdo vai estar sempre a nos reclamar atenção e, talvez, uma forma de minimizar essa dificuldade seria elencar ou priorizar conteúdos “chave”, que servissem de base para que o aluno aprendesse outros, mesmo que sozinho.

Para isso, além de uma análise profunda sobre o conteúdo programático previsto, devemos também ser sensíveis ao fato de que, ao entrarmos em uma sala de aula, nosso

objetivo maior deve ser formar pessoas que possam utilizar a Matemática para ler/entender o mundo e para continuar aprendendo, com vistas à sua participação ativa no mundo social, científico e cultural.

As Coordenações como representantes e gerenciadoras dos projetos pedagógicos da escola precisam estar muito bem esclarecidas sobre as estratégias de ensino diferenciadas que pretendemos utilizar/analisar.

Acreditamos que, independente da escola, seja também de interesse do corpo técnico, a aprendizagem do aluno e a sua inserção no mundo, e o professor, ao optar pela aprendizagem estará com esse corpo em sintonia. Assim, se o professor for esclarecedor o bastante sobre o que vai, como vai, e porque vai fazer, despertará na coordenação pedagógica um sentimento de confiança e um conseqüente apoio para suas ações, perante os dirigentes da escola, perante pais, alunos e até mesmo, colegas professores, quando for necessário.

Quanto ao tempo que os alunos teriam para desenvolver atividades extra classe é preciso que se leve em consideração que os alunos do Ensino Médio têm que dar conta de um volume muito grande de conteúdo das diversas disciplinas constantes da grade curricular e, para tanto, devem dispor de muitas horas de estudo. Logo, longas atividades extraclasse podem comprometer o tempo dedicado ao estudo das demais disciplinas.

É preciso que se leve em conta também que a maioria dos alunos do ensino regular das escolas públicas dependem financeiramente dos pais que possuem uma média/baixa condição econômica. Logo, atividades que requeiram algum custo, mesmo tratando-se de simples passagens de ônibus, são pouco recomendadas.

Ao mesmo tempo, mesmo não querendo, temos que admitir que os alunos, de um modo geral, pouco se interessam por suas atividades escolares, sejam elas intra ou extraclasse. Na prática, temos observado que os trabalhos propostos são feitos por alguns dentro dos grupos e, os demais, só assinam as respectivas capas.

Segundo Chevallard, Bosh & Gascón (2001) a ‘irresponsabilidade [em especial da] matemática’ dos alunos pode estar associado ao contrato didático¹² vigente nos atuais

¹² Conjunto de cláusulas que de uma maneira mais ou menos implícita regem, em cada momento, as obrigações recíprocas dos alunos e do professor no que se refere ao conhecimento matemático ensinado (*idem*)

sistemas de ensino da matemática que mantêm estável a atribuição exclusiva ao professor pela aprendizagem do aluno em vez de evoluir no sentido de repassar progressivamente para os alunos uma parte dessa responsabilidade.

Por toda a discussão travada nos parágrafos anteriores, entendemos que a grande maioria das atividades de Modelagem devam ser desenvolvidas dentro da sala de aula, onde o professor pode administrar melhor essas variáveis, sem nunca, entretanto, deixar de levar em conta que os alunos egressos do Ensino Fundamental, com no mínimo nove anos de escolaridade, estão acostumados a uma metodologia de ensino, em especial no nosso caso, do tipo definição, exemplos, aplicações/exercícios e, portanto precisam ser preparados para um fazer 'diferente' nas aulas de Matemática. Os alunos precisam ser preparados para a quebra do contrato didático vigente, bem como o estabelecimento de um novo.

Se essa forma de ensino, ou pretensão ensino, já se encontra arraigada na compreensão metodológica de alunos com nove anos de escolaridade, que deve ser pensado do professor, que além de já contar com mais anos de estudo, ainda tomou essa metodologia de ensino como padrão para o seu fazer docente, por conta de vários saberes acumulados durante sua formação inicial, continuada ou em serviço.

Barbosa (2001, p.8) comenta que a transição de um ensino tradicional para o ensino através da Modelagem,

não é algo tão simples. Envolve o abandono de posturas e conhecimentos oferecidos pela socialização docente e discente e a adoção de outros. Do ponto de vista curricular, não é de se esperar que esta mudança ocorra instantaneamente a partir da percepção da plausibilidade da Modelagem no ensino, sob pena de ser abortada no processo.

Daí, concluímos que, mesmo simpatizando com a Modelagem, a ponto de querer experimentá-la em nossas salas de aula, não podemos nem devemos implantá-la de forma abrupta, pois poderá não funcionar a contento e os professores reforçarem e desenvolverem mais concepções negativas sobre o método.

Dessa forma, o professor também precisa de um tempo de maturação que, certamente, não prescinde de muito estudo e de leitura correlata com o tema, para planejar e implantar atividades de Modelagem em suas salas de aula, quebrar um contrato didático e implantar outro. Entretanto, como acreditamos que, nesse caso, só se aprende a fazer fazendo, entendemos que o professor pode começar a implantar a Modelagem de forma gradativa,

fazendo variar em número e grau as atividades que competem a alunos e professor, puxando, inicialmente, para si o maior número de atividades. Por outro lado, se o professor ‘controla’ o processo ele pode ‘controlar’ o conteúdo que se quer explorar, o que é interessante para o ensino regular.

Seguindo essa linha de raciocínio e a orientação de Biembengut e Hein (2003) de trabalhar com um único tema, entendemos que o professor pode trazer para a sala de aula, recortes de jornais ou de revistas acompanhados de problematizações, de modo que, ao serem traduzidos para a linguagem simbólica da matemática, favoreçam ao aluno o trabalho com diversos modelos matemáticos, construídos por ele mesmo, a partir de conhecimentos pertinentes a outras séries escolares, os quais os alunos precisam ter incorporado em seu currículo¹³ escolar, propiciando dessa forma uma revisão, uma aplicação e uma re-significação de conteúdo já visto, ao mesmo tempo em que constrói outro.

Embora isso, a grosso modo, possa ser entendido como ‘trabalhar com tema único’, entendemos que ao problematizarmos situações oriundas da realidade, dada a sua complexidade, em que as variáveis interdependem e fluem constantemente, fatalmente, ao abordarmos qualquer questão, estaremos estabelecendo *links* com outras.

A discussão e a pesquisa travada até aqui nos dá a segurança de poder conceber, para este momento em especial, a partir do referencial teórico adotado, Modelagem Matemática como *um ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o professor, através de problematizações de situações com referência na realidade, oportuniza ao aluno a construção de modelos matemáticos, sobre os quais ele faça inferências e/ou projeções, cabendo ao professor o acompanhamento das atividades, no sentido de conduzir o aluno na/para a construção do conhecimento matemático previsto no conteúdo programático da escola.*

Estamos assim, nos incluindo na primeira região de possibilidade para a utilização da Modelagem em sala de aula - **Caso I** - de Barbosa (2003, p.69), no qual “o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos (...), acompanhados pelo professor, (...) a tarefa de resolver o problema” e chegar a um modelo que o represente e possa ser generalizado para outras situações

¹³ Aqui entendido como um conjunto de conhecimentos escolares interessantes para que o aluno possa continuar aprendendo e dessa forma garantir sua inserção no mundo da Ciência.

semelhantes. Consideraremos, portanto, que todas as vezes que o aluno a partir de conhecimentos próprios anteriores ou atuais, construir um modelo matemático representativo de um problema com referência na realidade, estará fazendo uma Modelagem Matemática.

Modelagem Matemática, portanto, será entendida por nós como um processo que envolve a construção de um modelo matemático por parte do aluno, sob a orientação do professor que conduzirá o trabalho de modo que o aluno ao construir/elaborar o modelo, também construa e elabore ‘novos’¹⁴ conhecimentos matemáticos. E, ‘ao criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos” estamos obedecendo ao principal objetivo do trabalho com Modelagem. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.23).

5.2 – Os referenciais para a materialização

Para a **materialização** desse processo, projetamos que, com as devidas e/ou necessárias adaptações, poderemos estar utilizando as etapas, ou os passos, propostas por Biembengut e Hein (2003, p.18-22): **diagnóstico**, **escolha do tema** e **desenvolvimento do conteúdo programático** que compreende a **interação**, a **matematização** e o **modelo matemático**.

O **diagnóstico** além de fornecer o número de alunos e o horário da disciplina, interessante para o planejamento das aulas, nos leva a conhecer a realidade socioeconômica dos alunos bem como seus interesses e metas; o grau de conhecimento matemático e a disponibilidade dos alunos para trabalho extraclasse.

O **desenvolvimento do conteúdo programático** é feito a partir de um **tema** que ao ser problematizado conduzirá a elaboração de um modelo. O tema pode servir para o tópico a ser desenvolvido, para o bimestre, para o semestre ou para todo o período letivo desde que seja interessante e amplo o bastante para não desmotivar o aluno. A **escolha do tema** pode ser feita pelo professor ou pelos alunos.

Na **interação** está previsto uma breve exposição sobre o tema e o levantamento de questões com o objetivo de envolver o aluno com o tema a ponto de instigá-lo para a

¹⁴ Novo porque era desconhecido para o aprendiz.

resolução dos problemas. É preciso que o professor planeje/elabore e execute essa etapa com muito cuidado, pois “a forma como o professor demonstra seu conhecimento e interesse sobre o tema em questão pode contribuir, significativamente, para a motivação dos alunos. Afinal, só aprende quem quer. E a arte de ensinar depende da conquista para o querer aprender.” (p.20).

É na **Matematização** que se começa a construção do modelo, através da busca de respostas às questões levantadas na interação. “Na medida em que se está formulando a questão, ao suscitar um conteúdo matemático para a continuidade do processo ou obtenção de um resultado, interrompe-se a exposição e desenvolve-se a matemática necessária, retornando no momento adequado”. Quando o aluno retorna à questão, ele verifica “a matemática como uma ‘ferramenta’ importante” (p.21 -2).

Ao traduzir o problema em questão para a linguagem matemática ou quando a questão está formulada segundo essa linguagem, teremos o **modelo matemático** que deve ser avaliado quanto à sua validade e à sua importância, para resolver o problema colocado e outros análogos, para que o conhecimento matemático não fique condicionado ao modelo encontrado ou ao tema utilizado.

Levando em consideração a presença epistemológica da Modelagem na formação/construção de conhecimentos científicos, incluindo os matemáticos, as diversas concepções de modelos e modelagem elaboradas por aqueles que nos antecederam na pesquisa sobre o referido tema, e algumas tensões vividas no Ensino Médio, acreditamos ter elaborado/concebido uma perspectiva de Modelagem que, como estratégia de ensino, se enquadra nas condições oferecidas por curso regulares de nível médio, que talvez possa ser aplicado sem causar mais tensões, ao contrário, aliviar as já existentes.

Entretanto, a exemplo de Barbosa (2003b, p.73) que diz:

Também sou professor e sei que, muitas vezes, não conseguimos fazer aquilo que desejamos, mas todos os dias podemos nos perguntar: o que é possível, tendo em conta as limitações do contexto escolar, os interesses dos alunos e a própria percepção de nossos saberes? E na tentativa de responder essa pergunta, acabo sempre refazendo minha prática.

também estamos fazendo o que é possível para o momento, levando em conta as limitações e os interesses dos autores do contexto escolar envolvido na pesquisa. Momento esse que, não deve ser encarado como final, mas como inicial, como o primeiro passo dentro da aplicação

de uma perspectiva de ensino que precisa ser aplicada, avaliada e questionada, tendo em vista a construção de saberes interessantes para todos que se interessem pelo uso da Modelagem para o ensino-aprendizagem da Matemática em cursos regulares.

Capítulo II

Uma perspectiva de Modelagem: a materialização

1- Introdução

Após pesquisar o que é Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática e tentar planejá-la para nossas atividades de ensino e aprendizagem, na forma como originalmente foi concebida¹⁵, começamos a identificar as primeiras dificuldades, já previstas por Bassanezi (2002) e Barbosa (1999) em pesquisas anteriores relacionadas com o tema: um programa extenso a cumprir dentro de um pouco tempo disponível e a falta de preparo de alunos e professores para trabalharem, de imediato, dentro de uma metodologia diferente da tradicional, comumente praticada. Dessa forma, logo percebemos que, se quiséssemos utilizar a Modelagem em nossas salas de aulas, precisaríamos realizar algumas adaptações, ao menos para este primeiro ensaio.

Levando em conta que Biembengut e Hein (2003) ressaltam que o processo de Modelagem quando aplicado em cursos regulares precisa sofrer algumas alterações e que Barbosa (1999, p.5) acrescenta que há várias formas de se conceber e materializar a Modelagem Matemática, que vão desde aquelas em que o professor assume a maior parte das atividades até aquelas em que o professor se torna apenas um orientador do aluno, chegamos a uma proposta de Modelagem que nos pareceu ser viável quanto à sua aplicação no Ensino Médio e que, nada mais é do que uma primeira aproximação da Modelagem, na forma como originalmente foi criada, de nossas salas de aula.

E assim, concebemos para a presente pesquisa, *Modelagem Matemática como um ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o professor, através de problematizações de situações com referência na realidade, oportuniza ao aluno a construção de modelos matemáticos, sobre os quais ele faça inferências e/ou projeções, cabendo ao professor o acompanhamento das atividades, no sentido de conduzir o aluno na/para a construção do conhecimento matemático previsto no planejamento escolar.*

Não intencionamos com isso elaborar uma definição para Modelagem Matemática, mesmo porque entendemos que ela não carece disso, mas buscar uma forma de materializá-la

¹⁵ Modalidade de Projetos que consiste em dividir os alunos em grupos os quais devem eleger temas de interesse para serem investigados por meio da matemática, contando com o apoio do professor (BARBOSA, 2000, p..57)

na realidade educacional na qual estamos inseridos. Gerando assim, uma forma possível, pessoal, particular e momentânea de conceber Modelagem Matemática sem desprezar as diversas já existentes.

Estabelecido a perspectiva, ou a forma como concebemos Modelagem Matemática, para o presente momento, o passo seguinte foi materializá-lo em uma turma de ensino regular. Para a materialização do processo obedecemos às etapas já propostas por Biembengut e Hein (2003, p.18-22) **diagnóstico, escolha do tema e desenvolvimento do conteúdo programático** que compreende a **interação**, a **matematização** e o **modelo matemático**.

No desenvolvimento do conteúdo programático, assumimos a responsabilidade total pela interação do aluno com o tema a ser problematizado, através de um estudo indireto, com utilização de jornais, de revistas, de livros e/ou de páginas da Internet. Já a matemática e o modelo matemático foram de uma responsabilidade compartilhada, em que coube a professora conduzir o aluno na/para a construção do modelo matemático, de forma significativa, no sentido de compreender o que fez do ponto de vista do conhecimento matemático escolar e de saber reproduzir para situações semelhantes.

Dessa forma, nos incluímos na primeira forma possível de se utilizar a Modelagem em sala de aula categorizada por Barbosa (2003, p.69) – **Caso 1**, em que os alunos têm a tarefa de resolver os problemas, devidamente relatados, com dados qualitativos e quantitativos, chegando a um modelo que o represente e possa ser generalizado para outras situações semelhantes, cabendo a nós, professores, propor e acompanhar o desenvolvimento dos problemas.

Acreditando não ser possível separar a forma como concebemos Modelagem Matemática para a presente pesquisa, da maneira como pensamos em materializá-la, porque há sempre alguma espécie de veiculação entre a forma como concebemos algo e a maneira como o colocamos em prática, faremos uma análise detalhada da nossa proposta/definição, aplicada em um contexto real segundo as etapas sugeridas por Biembengut e Hein (2003, p.18-22), para posterior avaliação dos resultados sobre toda a sua extensão.

2- O Ambiente de Ensino e de Aprendizagem: do diagnóstico à construção

Tomando para ambiente a noção de tudo aquilo que consta e que acontece no espaço que nos envolve e, partindo do princípio de que estamos sempre aprendendo e transmitindo saberes e fazeres na ânsia de sobreviver e transcender (D'AMBRÓSIO, 2001), podemos dizer que há muitos ambientes de ensino e de aprendizagem e que levamos a vida transitando por eles. Desses ambientes há um em especial, que se desenvolve dentro de uma organização social chamada escola, que por ora ocupa nossa atenção: o ambiente de ensino e aprendizagem da Matemática.

Skovsmose (2000) utiliza a noção de **ambiente de aprendizagem** para se referir às condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades. Ambiente, dessa forma, é colocado em termos de “convite” e, nestes termos, concordamos com Barbosa (2003), que toda atividade escolar constrói um ambiente de aprendizagem, porque de uma forma ou de outra, sempre oferece condições sob as quais os alunos são convidados a atuar.

Como todas as atividades, extra ou intraclasse, desenvolvidas num contexto escolar, são instrumentos formativos que se propõem a desenvolverem não só conteúdos conceituais, mas também procedimentos e atitudes que contribuam para a formação geral do educando e que, portanto, de uma forma explícita ou não, têm a intenção de ensinar, entendemos que um ambiente de aprendizagem escolar é também de ensino.

E, dessa forma, estaremos usando a noção de **ambiente de ensino e aprendizagem** para referir-nos ao espaço sala de aula onde, cada um de seus participantes, alunos e professores, assumem responsabilidades e obrigações pelo desenvolvimento de atividades que visam o ensino e a aprendizagem do conhecimento matemático escolar. Compõe também a presente noção de ambiente, sentimentos e atitudes positivas/negativas, que brotam nos alunos e no professor, em consequência da forma como são (ou não) desenvolvidas as atividades.

Apesar de serem muitos os professores de Matemática, e por consequência serem muitos os ambientes de ensino e aprendizagem que se criam e se formam nas escolas, nos é possível afiançar que a grande maioria desses sustentam-se no “paradigma do exercício” onde o professor, divide o tempo da aula com exposição do conteúdo previsto no planejamento da

escola e a realização de exercícios retirados de livros didáticos. Essa forma de assim proceder vem compor a “educação matemática tradicional” (SKOVSMOSE, 2000, p.66 -67).

Por ser a forma mais comum de se ensinar Matemática e, portanto, ser a mais utilizada ao longo da formação discente, representa também para o aluno um lugar/ambiente com o qual ele está bem familiarizado, e como consequência, já sabe que se prestar bastante atenção, copiar, resolver exercícios e reproduzir de forma correta, quando solicitado, provavelmente se “dará bem” nas provas. Ele não está acostumado a ser “convidado” a construir conhecimento, somente a memorizar e reproduzir, o que certamente tem contribuído para a formação de alunos passivos perante a própria aprendizagem.

A Modelagem Matemática, assim, colocada em termos de um ambiente de ensino e de aprendizagem, no qual o professor através do desenvolvimento e do acompanhamento de atividades de ensino oportuniza ao aluno a construção do conhecimento matemático, nos sugere o estabelecimento de uma prática, no mínimo diferenciada da que comumente vem sendo praticada.

Acreditamos que, ao fornecer ao aluno o conhecimento matemático pronto e acabado, através de conceitos e de regras que devam ser memorizadas, reproduzidas e aplicadas quando necessário, estamos dando pouca ou nem uma oportunidade para que os alunos construam qualquer significado ou qualquer sentido mais útil ao conhecimento matemático escolar que o de simplesmente ser aprovado na escola.

Partindo do princípio de que queremos aplicar e avaliar uma estratégia de ensino que se propõe a seguir uma rota inversa da que comumente é praticada para o ensino da matemática, e que, portanto, queremos estabelecer um ambiente de ensino e de aprendizagem, diferenciado daquele a que nós (alunos e professores) estamos acostumados, precisamos então, primeiramente, conhecer e analisar o contexto no qual ela será aplicada para encontrar uma melhor forma de construir o ambiente que queremos.

Como desse ambiente que enquanto espaço físico, situa-se dentro de um ambiente maior – a Escola, participam fundamentalmente, professores, alunos com suas respectivas responsabilidades, faremos nosso diagnóstico destes a partir da Escola, porque “o que acontece na sala de aula só pode ser examinado na própria interação de todos os elementos que nela intervêm” (ZABALA, 1998, p.17) e, certamente, a forma como a Escola gerencia

suas atividades ou os recursos que possui, sejam eles humanos ou sejam físicos, são elementos determinantes na formação discente e na criação de possibilidades para o trabalho docente.

2.1- O diagnóstico do ambiente

A presente proposta de ensino foi aplicada durante o 2º semestre de 2004, em uma turma de 1ª série do Ensino Médio de uma escola da rede Federal de ensino, em Belém do Pará, cuja filosofia de trabalho, apoiada em três eixos norteadores – coletividade, inovação e criticidade –, aponta para a criação de oportunidades que façam com que o educando venha a ser crítico, dialógico, criativo, inovador, consciente de sua própria dignidade e de seu papel como homem histórico e, principalmente amazônico.

Ora, se queremos implantar e analisar a Modelagem Matemática como um ambiente de ensino e de aprendizagem que, dentre outras coisas, promete desenvolver habilidades no aluno que o levem a compreender a realidade sócio-cultural na qual estão inserido, através do conhecimento matemático escolar, e que com isso, acreditamos que é possível instrumentalizarmos o aluno para operar mudanças, ou **inovar**, através de ações **criativas** e **coletivas** idealizadas após um **diálogo crítico** com a realidade, então, não estamos ferindo em nada a filosofia da escola, ao contrário, indo ao seu encontro e, por isso, sentimo-nos à vontade para “experimentar”.

Também colabora para a implantação do ambiente de Modelagem o fato de essa escola desenvolver atividades na área da pesquisa, do ensino e da extensão, pois ao mesmo tempo em que oferece escolaridade Básica para seus alunos conforme os critérios estabelecidos pela atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996), tem como função ser um campo de estágio para Licenciandos de Instituições de Ensino Superior e um campo de pesquisas para profissionais da educação ou áreas afins, em sua formação continuada e/ou em serviço.

O que significa dizer que dos três eixos empregados por Barbosa (1999, p.17) para identificar as dificuldades apontadas por professores quanto ao uso da Modelagem em sala de aula - alunos, escola e professores -, a Escola enquanto estrutura organizacional não oferece barreira a implementação da Modelagem, nem inibe as iniciativas que tenham esse fim.

Essa Escola tem um grande espaço físico com ginásio, biblioteca, dois salões para recreio, cinco blocos de dois pavimentos e um bloco de três, contendo salas de aula e setores administrativo. Em 2004, matriculou 2052 alunos em três níveis de ensino: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio, Educação de Jovens e Adultos. No ensino Médio, em particular, temos 527 alunos distribuídos em oito primeiras séries (260) , quatro segundas (167) e três terceiras (100).

Em relação às escolas de Educação Básica do Estado, possui um corpo docente altamente qualificado. Dos seus 233 professores, 66 são graduados, 114 são especialistas, 30 são mestres e 06 são doutores¹⁶, os quais exercem funções em regime de trabalho de 20 horas/semanais, 40 horas semanais e Dedicção Exclusiva, o que significa uma atuação média efetiva em sala de aula de 16 a 20 horas/semanais. O tempo restante das 40 horas ou 20 horas semanais é destinado a reuniões e planejamentos. Seis professores compõem a equipe de Matemática do Ensino Médio, dos quais metade já são mestres e a outra metade é mestranda em Educação Matemática.

O salário do professor independe da quantidade de turmas que estejam sob a sua responsabilidade, está sim relacionado com seu regime de trabalho e sua titularidade. Mas, a política econômica desenvolvida no país, na última década fez com que, ao longo desse tempo, caísse o poder aquisitivo dos professores levando-os a utilizarem as horas em que não estão em sala, para repor perdas salariais, assumindo outras turmas em outras escolas. Em consequência disso, aumentou o número de faltas tanto às aulas quanto às reuniões pedagógicas que acabaram por minguar, inviabilizando decisões e ações coletivas.

Entendemos que, tal situação, contribuiu em grande escala para a quase que total falta de integração dos professores, observada atualmente, na Escola, quer sejam esses professores do mesmo nível de ensino, da mesma série, da mesma disciplina, quer sejam de níveis diferentes. Ao contrário do que poderia se esperar já que, cada nível de ensino, contando com coordenação própria, às quais estão vinculados, os Coordenadores de disciplina e o Serviço Pedagógico, tem como uma de suas funções, integrar os professores dos diferentes níveis de ensino, séries, turmas e disciplina. O resultado mais imediato disso, é que boas propostas e/ou valiosas experiências pedagógicas não são divulgadas, socializadas nem continuadas.

¹⁶ Dados atualizados de dezembro de 2004.

Os professores de Matemática não fogem à regra. Particularmente, no Ensino Médio, esses professores trabalham de forma isolada, o máximo o que um sabe da prática do outro é por onde “andam” com o conteúdo. Muito pouco se sabe também de como trabalham e que resultados qualitativos¹⁷ obtêm os professores do Ensino Fundamental.

Nem mesmo o Serviço Pedagógico do Ensino Médio é capaz de prestar qualquer esclarecimento sobre o trabalho de professores ou o desempenho dos alunos no Ensino Fundamental. O primeiro queixa-se que o segundo não repassa as informações. Dessa forma, recebemos na 1ª série, por via de regra, alunos sem história, alunos que são sempre vistos como novatos, embora tenham vindo do prédio ao lado.

A turma que nos foi designada pela Coordenação do Ensino Médio para trabalhar no ano letivo de 2004 foi a turma na qual realizamos a nossa pesquisa. A professora de Matemática dessa turma é também autora da pesquisa e, como, algumas vezes, pode ser extremamente complexo ser pesquisador e pesquisado ao mesmo tempo, foram convidados três estagiários, licenciandos em Matemática (UFPA), para atuarem também como observadores, o que justifica o verbo na primeira pessoa do plural em todos os dados oriundos das observações provenientes do campo da pesquisa.

Na listagem oficial da turma, entregue pela Coordenação do Ensino Médio, encontravam-se registrados os nomes de 33 alunos, entretanto, como antes mesmo de começarem as aulas, dois já haviam pedido trancamento e outros três eram extremamente faltosos, foram considerados como participantes da pesquisa apenas 28 alunos, organizados conforme idade na **Tabela 1.2** abaixo.

Idade	14	15	16	17	18
Alunos	7	12	2	4	3

Tabela 1.2 – Idade dos alunos

Dentre esses vinte e oito alunos, tínhamos nove repetentes, quatro novatos e quinze oriundos da mesma 8ª série da própria Escola. Dos repetentes, sete tiveram a Matemática como uma das disciplinas que causaram a retenção e, quanto a isto, a justificativa mais comum dada pelo Serviço Pedagógico foi que os alunos não tiveram interesse e foram irresponsáveis com suas atividades escolares.

¹⁷ os quantitativos consegue-se na secretaria da escola

Encarando todos os alunos como “novatos”, já que conseguimos obter nenhuma, ou pouca informação sobre a vida pregressa deles, quer em contexto escolar, quer em outro contexto, aplicamos no nosso primeiro encontro um questionário (Anexo A), na tentativa de conhecer um pouco mais da realidade de cada um e qual seus principais sentimentos com relação à Matemática.

Analisando as respostas dadas quanto ao “quê” fazem quando não estão na escola, verificamos que os alunos não trabalham nem exercem qualquer atividade remunerada, no máximo ajudam, sem compromisso, em algumas tarefas domésticas. Quatorze deles saem de uma a três vezes por semana para cursos (inglês, computação, reforço) ou treinos (dança, vôlei, futebol). Os demais dormem, vêem televisão, navegam na internet, estudam ou saem para se divertir com os amigos, conforme pudemos verificar nas falas constantes dos relatos dos alunos.

[...] Depois eu volto pra casa e tomo banho e almoço, e descanso um pouco. Lá pelas 16:00 eu acordo e vou jogar bola, e 19:00 eu volto pra casa pra ver a novela da Cor do Pecado e em seguida eu vejo o Esporte Total. Depois eu janto e vou dormir cedo, eu só não durmo cedo quando tem jogo. (Ra)

[...] No resto da tarde faço curso de computação e a noite volto pra casa estudo um pouco (Di)

[...] segunda e quarta eu faço cursinho de inglês terça e quinta faço ballet na Anna Unger e nas horas vagas vejo TV e estudo (Ba)

[...] a tarde sou acostumado a jogar bola e a noite estudo um pouco. (AnB)

[...] volto pra casa, durmo um pouco depois do almoço e saio um pouco a tarde a noite se tiver algum trabalho ou matéria para estudar eu estudo (Ge)

(...) quando acordo dou uma lida no caderno (Gi)

[...] quando chego almoço e assisto televisão depois durmo um pouquinho e quando acordo dou uma revisada na matéria dada no dia. (Kar)

[...] assisto televisão se tiver alguma coisa importante para estudar eu estudo (Ka).

[...] a tarde faço aula de reforço, e aos sábados fico o dia na casa da minha tia e aos domingo (sic) de manhã vou passear com os amigos e de tardinha vou estudar com minha prima (Ta)

[...] chego em casa eu almoço e depois quando tem dever eu faço ou em tão (sic) vou parar na internet. (Mu).

[...] todas as tardes durmo um pouco, depois vou para o computador, no final da tarde estudo um pouco. (Ra)

A partir desses depoimentos e de outros assemelhados, pudemos perceber que o estudo quando aparece na relação das atividades que eles desenvolvem no turno contrário ao da Escola, aparece como o último, algo que fazem quando dá tempo ou quando há alguma solicitação do professor. Certamente para esses alunos, o estudo parece não ser prioridade.

Além disso, afirmam que estudam pouco e, apesar de pouco ser um conceito relativo, em se tratando de Ensino Médio, no qual eles têm que se apropriar de uma grande quantidade de conteúdos, podemos inferir que esse “pouco” deles é praticamente nada e que estávamos em presença de alunos sem hábitos de estudo ou no mínimo sem resistência/disposição para passar muitas horas sentado estudando.

A grande maioria confere utilidade à Matemática para a resolução de problemas (14), como base para as outras Ciências (1), para compreender a realidade (5) e para a formação do aluno. Reconheceram uma forte ligação da Matemática com a Física e com a Química, mas, simplesmente porque essas disciplinas, em seus problemas, apresentam operações aritméticas para resolver, o que podemos interpretar como um resultado do trabalho docente compartimentalizado desenvolvido na Escola.

De certo, se o professor de Física não trata o Movimento Retilíneo Uniforme como também uma *função* ou o de Química não relaciona balanceamento com equação, por exemplo, dificilmente os alunos, acostumados a trabalhar com o conteúdo de forma fragmentada, conseguirão enxergar sozinhos o conteúdo escolar como um todo ou, no mínimo, estabelecer as relações existentes entre as partes.

Entretanto, levando em consideração que “a percepção da importância dos conteúdos que devem aprender ou as tarefas que devem realizar” condicionam em boa medida os incentivos e os esforços que o sujeito empregará para acolher uma explicação (TAPIA, 2003, p.41), podemos dizer que estávamos em presença de um grupo de alunos motivados para aprender Matemática, já que a conferem utilidade.

Demonstraram também possuir sentimentos positivos com relação à Matemática. Dezenove afirmaram que gostam de Matemática, porque têm facilidade em aprender (3), porque acha interessante (3), porque desenvolve e estimula o raciocínio, porque é útil, porque

gosta de trabalhar com números. Enquanto que um (1) não gosta e outros oito (8) gostam mais ou menos porque depende do assunto ou porque têm dificuldades, reforçando a idéia de que nada é mais motivador para o aluno do que estar aprendendo.

Interrogados quanto às suas atitudes nas aulas de Matemática colocaram que se esforçam por acompanhar a explicação do professor, copiam no caderno o que o professor copia no quadro, se não sabem fazer um exercício, ficam esperando o professor fazer no quadro para copiar e não solicitam ajuda do professor para tentar resolver algum problema. Tais colocações refletem uma posição passiva perante a própria aprendizagem, além de descompromissada.

Aliando tal dado, à conclusão anterior de que eles podiam estar motivados para aprender Matemática porque a conferem utilidade e, somando-se ainda o fato de que estávamos em presença de alunos - produto de uma escolaridade de no mínimo nove anos-, entendemos que tal comportamento devia-se a um condicionamento efetivado pelo método tradicional de ensino, em especial da Matemática, a que, provavelmente, esses alunos foram submetidos ao longo de suas formações discente, no qual o professor tem toda a responsabilidade pelo ensino e pela aprendizagem, é o suposto “dono” do saber, cabendo ao aluno apenas tentar entender e copiar, para depois reproduzir.

Fazendo um retrato descritivo da turma na tentativa de tentar explicitar a forma como eles se dispuseram, por livre escolha, no espaço físico sala de aula, a imagem que temos é de um grupo de 6 a 7 meninas, localizadas no meio da sala, que participa. Eram somente elas que perguntavam, que arriscavam respostas às perguntas que fazíamos e que, de certa forma, acabavam conduzindo a aula. No entorno dessa “ilha” tínhamos os alunos restantes mudos, passivos, quase que pregados nas paredes, copiando, copiando e copiando... De um modo geral, essa turma era muito calada, acanhada, parecia que o medo de errar era mais forte do que a vontade de arriscar e talvez acertar e, os grupos formados não se “misturavam”.

Nos momentos em que nos dirigíamos a equipe-sala, parecia que estavam prestando atenção, entretanto, como não esboçavam nenhum tipo de reação, ficávamos sempre na dúvida se eles realmente estavam entendendo. Como eles não se expressavam, nem por palavras, gestos ou por ações, verificar a compreensão deles só era possível nos respectivos cadernos através do desenvolvimento e das respostas dadas aos exercícios ou aos testes.

Logo vimos que, se queríamos implantar um ambiente de aprendizagem como a Modelagem Matemática que pede colaboração, participação, integração e interação, muito trabalho teríamos pela frente com esses alunos e, como prevíamos aplicar as **Atividades** referentes à Modelagem no segundo semestre, entendemos que o primeiro semestre seria o tempo que teríamos para preparar nossos alunos para uma maneira diferente da que eles conheciam de se ensinar e de se aprender Matemática na sala de aula.

2.2 – A construção do ambiente de aprendizagem

A partir da constatação da forma de como se encontrava o então atual ambiente e da vislumbração de algumas maneiras de como poderíamos modificá-lo, passamos a nos dedicar à construção de um ambiente que favorecesse à Modelagem nos termos já colocados. Referimo-nos a um ambiente participativo e colaborativo em que os alunos em interação com seus pares e/ou com a professora buscassem, com afinco, resolver os problemas propostos.

Com isso, todas as atividades de ensino utilizadas no primeiro semestre tinham sempre dois eixos norteadores: o desenvolvimento de conteúdos e o desenvolvimento de atitudes que favorecessem a mobilidade do aluno no ambiente de Modelagem. Ao mesmo tempo, nós também procurávamos nos preparar, assumindo – avaliando – dimensionando e redimensionando novas posturas e atitudes em sala.

Como as atividades de Modelagem, a serem utilizadas, abordariam *função* polinomiais do 1º, do 2º grau e exponencial procuramos explorar todos os conceitos que servem de base para essas *funções*, tais como, números reais, par ordenado/plano cartesiano, equações e as primeiras noções de *função*, seus elementos e suas representações. Para iniciar os alunos no assunto de *funções* utilizamos a seqüência de ensino-aprendizagem proposta por Chaves e Carvalho (2004) que sugere uma abordagem de *função* para o Ensino Médio que parta do intuitivo para o formal.

Esses autores, após buscarem na história da matemática o “como” surgiu e evoluiu o conceito de *função*, verificaram que este conceito que levou milênios até chegar a forma refinada, tal como a conhecemos atualmente, foi “fruto da conjunção/união de fatores históricos e sociais que, na forma de problemas, se propuseram ao homem, como obstáculos necessários a serem vencidos” e, que

o mesmo processo construtivo do saber, [...] pode também se desenvolver na aprendizagem na sala de aula onde, desta feita, cabe ao professor, a partir dos conhecimentos já adquiridos por seus alunos, provocar questionamentos que os levem, de forma gradativa, à elaboração de novos conceitos.(idem, p.4-5).

Seguindo essas orientações e tendo como objetivo levar o aluno a conceituar, a identificar e a fazer as primeiras aplicações com *funções*, através da observação de relações entre variáveis, de regularidades e de generalizações, elaboramos fichas mimeografadas com tabelas e diagramas para completar, com problemas a traduzir para a linguagem da Matemática e resolver, antes do que, foram convidados a observar frases nas quais a palavra **função** tinha o significado de **dependência**.

Os problemas para traduzir, ou modelar conforme os símbolos matemáticos, todos com duas variáveis em que se pedia uma em função da outra, envolveram geometria, razão e proporção, regras de três simples ou compostas e porcentagens. A idéia foi, além de “convidar” os alunos a um primeiro exercício de Modelagem, revisar conceitos já vistos no Ensino Fundamental e ao mesmo tempo usá-los como “âncora” (ANTUNES, 2002) para conhecimentos novos, fazendo com que o ambiente de aprendizagem de *função* parecesse um lugar familiar ao aluno.

Foi a partir da realização dessa atividade que ficou claro para nós que as “âncoras” ou os assuntos já vistos pelos alunos no Ensino Fundamental, e que se esperava que já fossem de seu domínio, precisavam ser reforçados, refeitos e/ou construídos. Os alunos demonstraram ausência de conhecimentos básicos em geometria, desde o reconhecimento de figuras à aplicação de fórmulas, de conceitos e de propriedades. Não conseguiram nem começar os problemas que envolviam proporção e regra de três. Isolar variável se constituiu em uma grande dificuldade, já que para isso necessitavam resolver uma equação e aplicar propriedades operatórias da Matemática.

Dessa forma, ao tentar construir conhecimento matemático próprio do Ensino Médio a partir de conhecimentos do Ensino Fundamental, verificamos que estávamos em presença de alunos com sérias defasagens de conteúdos matemáticos.

Passamos então a revisar e a ensinar desde a fazer operações com números reais, especificamente, inteiros, racionais e irracionais, a resolver equações de 1° e 2° graus, a trabalhar com sistema de medidas e tudo o que aí se inclui, como cálculo de MMC, “jogo de

sinais”, representação de números racionais, potências de base 10, fatoração e propriedades operatórias de um modo geral.

Sobretudo, revisar/ensinar conteúdos próprios do ensino Fundamental, sempre que necessário, incorporou-se na nossa prática, o que fez com que o tempo que tínhamos disponível para desenvolver o conteúdo programático do Ensino Médio, ficasse ainda mais exíguo. Com isto passamos a marcar aulas aos Sábados, na pretensão de compensar o tempo gasto/utilizado nas revisões, se é que assim podemos chamar¹⁸.

Como conseqüência, a partir daí, relacionamos o “silêncio” da turma, ou a não resposta às perguntas, com o “não saber”. E por conta disso, aumentou a nossa insistência para que eles falassem. Precisávamos saber do conteúdo necessário para a construção do conceito de *função*, o que eles não sabiam, e, isso só aconteceria se eles respondessem aos nossos questionamentos.

Esclarecer a eles esse fato, falar pra eles que ficassem à vontade até mesmo para responder “errado” e que isso abriria uma oportunidade para que nós ensinássemos o “certo”, não foi suficiente. Fazer com que eles passassem a “falar” era uma questão de mudança de atitude, o que não conseguiríamos com discurso, mas sim com estratégias que os levassem a desenvolver as habilidades esperadas.

Assim, passamos a desenvolver o conteúdo, sempre que possível, a partir de tarefas que eles deveriam realizar em grupos de no máximo três alunos e, a princípio, de livre escolha. As correções passaram a ser feitas por eles no quadro de giz. Cada grupo colocava o desenvolvimento e a resposta de uma questão e, se alguém discordasse ou tivesse feito diferente, deveria ir ao quadro colocar o que seu grupo entendia que era o certo ou um outro modo de fazer. Abríamos para o debate, pedindo que cada um “defendesse” a sua resposta e concluíssem quem estava certo ao final.

Comumente antes de ir ao quadro, eles pediam que corrigíssemos antes a questão no caderno deles. Entretanto, para que o aluno adquirisse mais segurança e para que nós

¹⁸ Imenes (2004) afirma que na maioria das escolas do Brasil, os professores de cada nível de ensino, queixam-se de que os alunos obtêm suas formações sem saber os conteúdos básicos do nível anterior. Segundo ele, o aluno não aprendeu porque não compreendeu, o que provavelmente deva-se a dois motivos: i) os conteúdos de ensino programado para as séries não correspondem ao nível cognitivo do aluno e, ii) o privilégio dado à memorização nos processos de ensino utilizados pelos professores.

podéssemos averiguar as suas concepções através dos possíveis erros, passamos a não corrigir mais o caderno, dizendo a eles que a forma como fizeram no caderno era a correta, e que deveriam estar pronto para defendê-la na correção.

Quando o aluno defende a sua resolução e é convencido de fato, através da defesa do outro, de que a sua está errada, de que seus argumentos para “defendê-la” são falhos, ele aprende com seu erro, ele toma consciência de que precisa estabelecer outras relações e, se tiver interesse, motivação, irá em busca de.

Os alunos que têm uma participação ativa na correção percebem de modo mais claro os erros cometidos que se tornam também, “observáveis” aos outros, a brindo para estes a possibilidade de aprender com os erros daqueles.

[...] numa visão construtivista não basta, constatar o erro: é preciso tratá-lo.
[...] [e] Segundo a abordagem piagetiana, tratar o erro é torna-lo um ‘observável’ pelo aluno. [...] O aluno deve perceber a qualidade do erro, interagindo com ele, desequilibrando suas estruturas mentais, por meio dele, até poder superá-lo. (PINTO, 2000, p.147-8)

O trabalho em grupo aumentou a produtividade e deu a eles mais segurança, para se posicionarem e discutirem matemática, ao mesmo tempo em que o clima do ambiente ficava mais descontraído. Entretanto, verificamos que alguns alunos, mesmo sentados em grupo trabalhavam sozinhos e, outros que não faziam absolutamente nada, esperando só o colega do lado terminar para copiar, reproduzindo a cultura da cópia, já instalada na turma. Chamamos a atenção desses alunos, procuramos conscientizá-los da importância de pensarem e resolverem juntos as atividades, demos mais uma chance, mas o problema persistiu.

Passamos então a dividi-los em grupos de apenas dois alunos que recebiam apenas uma ficha de atividades, além disso, cuidamos para que alunos de mesmo nível de produtividade e de capacidade ficassem juntos. Assim, quem já trabalhava passou a trabalhar mais e quem não trabalhava viu que só tinha uma alternativa tentar resolver as questões e produzir seu próprio trabalho.

Começamos assim a favorecer a interação e a colaboração dos alunos entre si e dos alunos com a professora, e a fazer com que os alunos discutissem e escrevessem Matemática. Entretanto, é provável que ainda faltasse muito para que o ambiente pudesse ser considerado “pronto”, talvez nunca fi casse se a intenção fosse envolver todos os alunos, porém, podemos afiançar que, neste ponto, ele já se encontrava bem melhor do que antes.

Os alunos, em sua maioria, estavam participando mais, havia mais interesse em ir ao quadro e em realizar as atividades de classe, pareciam estar abandonando lentamente as inibições e o medo de errar.

3- O desenvolvimento do conteúdo programático

Os exames de ingresso no Ensino Superior têm sido referência para a organização curricular do Ensino Médio (EM), assim, de um modo geral, o conteúdo programático previsto no planejamento anual das escolas de EM regular é o mesmo determinado para a realização das provas dos Processos Seletivos das Instituições Públicas de Ensino Superior. Professores desse nível de Ensino são fiscalizados e cobrados por alunos, por pais e pelas coordenações de ensino quanto ao cumprimento do conteúdo, antes das datas marcadas para as provas, sob pena de a escola perder a sua credibilidade perante a sua comunidade escolar e a sociedade.

Estabelece-se com isso, em primeiro plano, que a finalidade do Ensino Médio é preparar os alunos, para participarem da seleção, embora em nenhum momento as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) que interpretam/especificam a LDB/96 e servem de referência para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apontem como objetivo principal do EM, a aprovação em vestibulares¹⁹.

A Lei nº 9.394/96 de Diretrizes e Bases para a Educação, ora vigente no País, preconiza através do Art. 35, incisos I a IV, que a finalidade do Ensino Médio (EM) é assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana; possibilitar o prosseguimento de estudos; garantir a preparação para o trabalho e a cidadania; dotar o educando dos instrumentos que o permitam continuar aprendendo.

Dessa forma, duas concepções, aparentemente ambíguas, disputam a forma de pensar o EM: a de preparar para a vida em sociedade, para o quê, o aluno não precisa fazer

¹⁹ No nosso caso, em especial, essa “preparação” inicia desde a 1ª série, já que os processos seletivos das Instituições públicas de Ensino Superior em nosso Estado, e que são os mais concorridos, são feitos em três etapas que correspondem às três séries do Ensino Médio.

vestibular, embora participe de muitas seleções naturais, e a de preparar para a continuidade dos estudos, sem o quê, no nosso Estado ou país, é impossível sem passar por vestibulares.

Apesar de sentirmos falta de um projeto pedagógico para o EM que contemple tanto a preparação para a vida quanto para a continuidade dos estudos em nível superior, até mesmo para não deixar no desamparo os excluídos pelos processos seletivos, que são a grande maioria do contingente de alunos oriundo do nível médio, nos parece bastante claro que, em tempos atuais, uma escola de EM só sobrevive se assumir caráter vestibuleiro. Interessa a grande maioria de pais que possuem filhos nesse nível de ensino que eles continuem seus estudos em níveis mais avançados e, contam com a escola para a realização desse desejo.

Dado ao grande valor atribuído pela sociedade atual à obtenção de um diploma de nível superior, para atender as demandas de mão de obra cada vez mais qualificada e diversificada do mercado de trabalho, além de se poder ter mais chance em competir por uma vaga neste mercado, há quem questione que se preparar para a vida não é de preparar para o vestibular ou vice-versa. Entretanto, somos da opinião de que, quando a finalidade do ensino é preparar para a vida, o vestibular é uma consequência desse ensino, caso contrário, ele é a causa.

Assim, cedendo às pressões do contexto social que cobra das escolas de Ensino Médio o desenvolvimento e o cumprimento do conteúdo programático estabelecido pelas Instituições de Ensino Superior para a realização das provas dos Processos Seletivos, os professores de Matemática da Escola onde desenvolvemos nossa pesquisa, tomaram os conteúdos desses processos como parte integrante de seus planejamentos anuais, sem, entretanto, ignorar em suas práticas a filosofia da escola que prevê a formação de um indivíduo crítico, dialógico, participativo e consciente de sua missão como homem histórico e amazônico.

Desconhecemos se existe por parte das coordenações dessa Escola, algum tipo explícito de cobrança quanto ao cumprimento dos conteúdos, entretanto, existe entre professores e alunos um compromisso oculto (porque na maioria das vezes não é verbalizado) gerado pela confiança do aluno no trabalho do professor e pela vontade deste em corresponder às expectativas do aluno.

Ou seja, os alunos esperam que o professor cumpra o conteúdo, para que eles possam participar dos Processos Seletivos em pé de igualdade com os alunos das outras escolas, e o

professor, também quer cumprir o conteúdo, para não perder a credibilidade e a confiança que lhe conferem os alunos, seus pais e a própria Escola.

Assim, os professores de Matemática da 1ª série, em especial, comprometeram-se com os seguintes tópicos, acompanhados das respectivas habilidades e competências (✓) que pretendiam desenvolver no alunado, no ano letivo de 2004:

1- Conjunto: operações, inclusive produto cartesiano.

- ✓ Compreender os conceitos e propriedades aritméticas;
- ✓ Resolver problemas que envolvam operações com os conjuntos numéricos
- ✓ Estabelecer relações entre conjuntos e operar com eles

2- Representação, relações e operações com conjuntos numéricos.

- ✓ Reconhecer, representar e operar todos os conjuntos numéricos.

3- Relação: definição e gráfico

4- Função: definição, domínio, contradomínio, imagem, gráfico, tipos, inversa e operações.

5- Funções especiais: polinomial, exponencial, logarítmica, definida por várias sentenças e modular.

- ✓ Determinar domínio, imagem, zeros de funções.
- ✓ Resolver equações e inequações.
- ✓ Construir e analisar gráficos
- ✓ Resolver problemas que envolvam funções, inclusive os que envolvam razão, proporção, regra de três simples e composta.

3.1- O conteúdo e o método

O conteúdo matemático de *funções* está programado, por via de regra, na maioria das escolas, para ser apresentado na 1ª série do EM, embora algumas escolas, já o façam desde a 8ª série do Ensino Fundamental (EF). Durante toda a 1ª série e grande parte da 2ª série do EM trabalhasse com *funções* e seus elementos sob diferentes representações - analítica, gráfica e/ou tabelar. Na nossa Escola, é somente na 1ª série que os alunos entram, de maneira formal e sistemática, em contato com o tópico de *funções*.

As *funções*, porque permitem estabelecer conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diversas formas de pensamento matemático, porque podem ser utilizadas na compreensão de vários fenômenos, do cotidiano ou das Ciências e porque têm grande relevância cultural tanto no que diz respeito às suas aplicações como à sua contribuição histórica ao desenvolvimento da Matemática e das Ciências em geral, têm grande importância no ensino da Matemática escolar e na formação geral do educando.

Conteúdos próprios do Ensino Fundamental como as razões, as proporções, as relações diretamente ou inversamente proporcionais entre suas grandezas, as equações, os sistemas de equações formam a base do estudo das *funções*. Além disso, podemos ainda estar conectando *funções* com problemas de regra de três, de juros simples e de geometria plana.

Já no Ensino Médio, um estudo básico da teoria dos conjuntos, a compreensão do conjunto dos números reais e a localização de pontos em um plano cartesiano vão incorporar-se ao rol dos conteúdos necessários para o estudo das *funções*. Outros conteúdos que se sucedem ao ensino das *funções* no EM, também estabelecem com elas conexões.

As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são do que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes [...].

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como Física, Geografia ou Economia. (BRASIL, 1999, p.255)

As *funções* ao servirem para representar em linguagem matemática diversos fenômenos naturais e sociais, com vistas a fazer previsões e/ou projeções, podem contribuir para que o aluno compreenda não só a Matemática mas também as outras Ciências, possibilitando-o avançar em estudos atuais e posteriores.

Lellis & Imenes (2001, p.45) observaram em conversas mantidas com professores sobre conteúdos prioritários para o Ensino Médio, que “quando o foco é colocado na Matemática preparatória de uma formação científica de ordem geral, necessária para todo cidadão educado, o tópico Funções é sempre citado”. O que evidencia que há consenso quanto à importância das *funções* enquanto um conteúdo interessante para a formação discente.

Entretanto, as *funções*, nas suas diferentes apresentações, como um conjunto de símbolos e de relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real são *modelos matemáticos*. Logo, se as *funções* são modelos, são portanto, resultados de processos de Modelagem Matemática, fato esse que veio a interferir na nossa escolha por tal método.

Como todo modelo matemático, as *funções* também surgiram e ainda surgem do esforço de pessoas com interesses afins, para resolver problemas reais que como tal, carregam em si múltiplas variáveis que se inter-relacionam e fluem constantemente. Para se escrever um problema segundo uma *função* selecionam-se as variáveis que são mais interessantes para o que se quer observar/estudar e utilizando-se de conhecimentos pré-adquiridos, constrói-se o *modelo/função* e, ao fazê-lo, não só temos um modelo representativo da situação capaz de fazer projeções e previsões bem próximas do real, como também uma gama de novos conhecimentos incorporados aos antigos.

Dessa forma, pode-se dizer que as *funções* são modelos matemáticos socialmente, historicamente e/ou cientificamente construídos e validados e, que esse mesmo processo (a Modelagem) construtivo desse saber (*função*), revela-se interessante para ambientes onde se intencionem aprender e, aprender a aprender.

Outros fatores ou crenças também influenciaram a nossa escolha. Com a Modelagem é possível estabelecer conexões entre as *funções* e os diversos outros conteúdos matemáticos, desde que se favoreça a construção de novos conhecimentos a partir de outros previamente já incorporados ao sistema cognitivo do aluno. Usando a faceta de modelo característico das *funções*, podemos ainda, aplicá-las na resolução de problemas de outras áreas do conhecimento, estabelecendo, dessa forma, conexões entre a Matemática e as outras Ciências ou, entre a Matemática e o cotidiano. Assim a Modelagem favorece um tratamento metodológico intra e inter disciplinar para as *funções*.

Ao mesmo tempo, através da utilização de situações problema oriundas de contextos reais, a Modelagem pode ser uma saída para se transformar o abstrato em concreto no ensino da Matemática. É provável que o caráter abstrato das *funções* seja uma das justificativas plausíveis, para as dificuldades encontradas pelos alunos para entender e resolver problemas neste campo do conhecimento matemático.

Ao oportunizamos aos alunos que resolvam problemas com referência na realidade através da Modelagem estamos também dando uma oportunidade para que as *funções* se tornem mais “visíveis” aos alunos e, portanto, mais compreensíveis já que eles passam a operar sobre “coisas mais palpáveis”.

E, ainda, se levarmos em conta que, para modelar uma situação real, antes de tudo, é preciso interpretá-la, interrogá-la e/ou criticá-la, podemos dizer que, através do estudo das *funções* via modelagem, é possível levar o aluno a compreender e participar do mundo em que vive.

Além da expectativa de podermos, através da Modelagem, levar o aluno a produzir significado e sentido ao estudo das *funções*, apoiou também a nossa escolha a possibilidade de estarmos utilizando/pesquisando e buscando subsídios para a implantação de metodologias de ensino diferentes das que comumente são empregadas por professores de Matemática, que, segundo a nossa visão, já não mais atendem às demandas sociais de indivíduos capazes de, continuamente, aprenderem a aprender.

Vivemos hoje em uma sociedade tecnológica e globalizada, que tem sua força motriz na informação, capaz de transformar rapidamente um conhecimento atualizado em um conhecimento obsoleto. Com isso, é provável que o que nos esforçamos hoje para que nossos alunos aprendam, amanhã, quando esses alunos ingressarem no campo de trabalho, seja um conteúdo de pouca utilidade.

Como conseqüência, entendemos que, mais importante do que transmitir informações/conteúdos para serem reproduzidos quando solicitados, é desenvolver nos alunos habilidades e estratégias que lhes permitam, de forma autônoma, gerar novos conhecimentos a partir de outros já previamente adquiridos. Capacitando-os assim, a aprender a partir de seus próprios recursos, certamente, terão melhores condições para adaptar-se às mudanças culturais, tecnológicas e culturais.

Para desenvolver nos alunos tais habilidades, faz-se necessário investirmos em métodos que os habituem a utilizarem conhecimentos prévios, seus e do grupo social no qual estão inseridos, na perspectiva de encontrarem por si mesmos, respostas às perguntas que os inquietam ou que precisem responder, ao invés de esperarem uma resposta do professor ou do livro-texto.

Dessa forma, optamos por *um ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o professor, através de problematizações de situações com referência na realidade, oportuniza ao aluno a construção de modelos matemáticos, sobre os quais ele faça inferências e/ou projeções, cabendo ao professor o acompanhamento das atividades, no sentido de conduzir o aluno na/para a construção do conhecimento matemático previsto no planejamento escolar.*

A Modelagem, nos termos em que foi definida na presente pesquisa, foi utilizada por ocasião do desenvolvimento de funções polinomiais (1º e 2º graus) e exponenciais constantes do item 5 do conteúdo programático para a 1ª série no ano letivo de 2004. E, ao pensarmos na Modelagem para esses tópicos suscitou a preocupação quanto ao que de cada conteúdo poderia contribuir em maior grau para habilitar os alunos a escreverem com autonomia suas próprias *funções/modelo*.

Embora tenhamos alguma preocupação quanto ao cumprimento integral dos conteúdos previstos para qualquer que seja a série, posto que, para entender/traduzir e “resolver uma situação complexa, o primeiro elemento exigido é conhecer os seus conteúdos” (MORETTO, 2004, p.20), entendemos que precisamos fazer uma seleção do que seria, para o momento, mais pertinente trabalharmos dentro dos conteúdos elencados para a pesquisa, ou qual enfoque a ser dado, ou, em outras palavras, de que forma abordaremos essas *funções* dentro do Modelo de Modelagem proposto, levando em consideração nossos objetivos de ensino e o tempo disponível para o ensino e para a aprendizagem.

Vamos esclarecer um pouco mais, considerando o estudo inicial de funções que ocorre no ensino médio.

Um enfoque possível desse conteúdo [...], consiste em apresentar as funções como uma relação particular entre elementos de dois conjuntos, [...]. Seguem-se definições de conceitos como domínio, contra-domínio, [...] e exercícios pedindo que se encontre, digamos, a imagem, em funções abstratas, que não estão ligadas a nenhuma aplicação. Depois passa-se ao estudo de funções específicas [...].

Nesse tratamento, enfatizam-se problemas cujo contexto é exclusivamente matemático, [...] para os quais estabelecem-se procedimentos de resolução mais ou menos algorítmicos. Podem surgir alguns problemas ‘de aplicação’, [...] mas eles não constituem a parte fundamental do aprendizado.

Um outro enfoque do mesmo conteúdo aborda as funções como uma maneira de exprimir uma relação entre grandezas variáveis. Idéias como domínio, imagem, contra-domínio, são apresentadas com brevidade, somente em situações significativas [...].

Neste caso, os problemas mais importantes têm o objetivo de encontrar modelos matemáticos para certas variações, expressá-las algebricamente, calcular máximos, mínimos, etc.

Usando a conceituação da Didática da matemática dos franceses, no primeiro enfoque, as funções são objeto de estudo; no segundo, elas são **ferramentas para estudar a realidade**. Os objetos matemáticos podem ser estudados sempre num contexto matemático, enquanto que as ferramentas precisam ter como contexto as várias ciências. (LELLIS & IMENES, 2001. p. 44-5).
[grifos nossos]

Assim, se queremos ensinar *funções* de modo que estas seja um conhecimento útil para interpretar e resolver problemas, para que os alunos possam ter uma participação mais ativa no mundo em que vivem, então nosso enfoque, ao tratar o referido assunto, será o segundo. Portanto, entenderemos *funções* como “ferramentas para estudar a realidade” e trabalharemos para que os alunos adquiram habilidades em manuseá-las.

Para modelar situações com referência na realidade segundo *funções* polinomiais do 1º e 2º graus e/ou exponenciais e, com elas resolver problemas, entendemos que os alunos precisam

- ✓ Identificar as principais variáveis do problema e estabelecer a relação de dependência gerando o *modelo/função*, na forma analítica, gráfica e/ou tabular.
- ✓ Realizar corretamente inferências e projeções sobre o modelo obtido.

Com essa finalidade, será dado ao ensino das referidas *funções* ênfase nos seguintes aspectos:

- ✓ construções de tabelas em que seja possível identificar as variáveis, bem como a relação que as envolve (linear, quadrática ou exponencial);
- ✓ montagem e a análise de gráficos para o que é necessário os conceitos de domínio, de imagem, de crescimento e de decrescimento;
- ✓ cálculos de valores numéricos;
- ✓ resolução de equações para determinação das raízes
- ✓ e propriedades de logaritmos,

sempre a partir de uma situação com referência na realidade. Das inequações só utilizaremos o que for necessário para se fazer um estudo de sinal, por exemplo.

3.2 – o tema

Todas as etapas do processo de Modelagem são norteadas por um tema, que pode ser escolhido pelo professor ou pelos alunos, cuja finalidade é envolver e motivar os alunos, para a resolução de um problema.

A escolha pelos alunos tem vantagens e desvantagens. Uma vantagem é que se sentem participantes do processo. Em contrapartida, as desvantagens podem surgir se o *tema* não for adequado para desenvolver o programa ou, ainda, muito complexo, exigindo do professor um tempo de que não dispõe para aprender e ensinar. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p-20)

Reconhecemos que a escolha do tema feita pelos alunos pode trazer vantagens, como elemento motivador para o processo, já que “o ambiente de aprendizagem que o professor organiza pode apenas colocar o convite. O envolvimento dos alunos ocorre à medida que seus interesses se encontram com esse” (BARBOSA, 2001, p.6).

Entretanto, levando em conta as desvantagens citadas por Biembengut e Hein (2003), escolhemos o tema, acatando a sugestão de Caldeira (2004, p.10) de trabalharmos com temas “relacionados a sustentabilidade e qualidade de vida” com a intencionalidade de “*mudar as relações humanas, sociais e ambientais que temos hoje*” [grifo do autor].

Visto dessa forma, a Modelagem

[...] é algo mais que uma metodologia, ela propicia, através das abordagens dos temas, transitar por vários caminhos, mesmo aqueles que não são ligados à educação escolar, como é o caso da educação sustentável que vai além dos muros escolares e busca não somente uma relação saudável com o meio ambiente, mas um sentido mais profundo do que fazemos com a nossa existência no cotidiano fora da escola. (CALDEIRA, 2004, p.10).

Conforme alerta Barbosa (2000), ao escolhermos o tema, podemos antecipar os conteúdos matemáticos que serão usadas e, dessa forma, atender o que está preestabelecido no planejamento da escola. “Assumir configurações mais controladas [...] oportuniza um ‘caminho pavimentado’ aos professores e aos alunos não-familiarizados com a Modelagem para se moverem para este [e neste] ambiente” (p.58).

O tema deve ser abrangente para que possa propiciar uma gama de problematizações e não se tornar cansativo para o aluno. Ser de fácil acesso para o aluno investigar o que precisar. Além de ser relevante para a sua formação.

Nesses termos, escolhemos para a presente pesquisa, o tema “Meio Ambiente”, pois além de ser abrangente, os alunos, como fruto do meio que são, carregam informações adquiridas fora da escola através de conversas com outras pessoas, de experiências pessoais, ou dos meios de comunicação. Por outro lado, é fácil o acesso às informações pertinentes ao meio ambiente, já que as problemáticas com essa referência, são rotineiramente divulgadas pela mídia.

O homem ao longo de sua evolução, trabalhando em prol das Ciências, com vistas a melhorar a sua qualidade de vida, bem como da sua espécie, colecionou muitas conquistas. Entretanto, não conseguiu fazê-las de modo a não perturbar, de alguma forma, o equilíbrio da natureza, principalmente ao fazer uso abusivo dos recursos desta. O que nos mostra que o homem enquanto realiza o progresso material, também produz estragos, a ponto de nos perguntarmos: - Até quando a vida na Terra, tal como a conhecemos, vai agüentar, se nenhuma atitude para equilibrar progresso com preservação dos recursos naturais for tomada?

Portanto, é urgente que se trate desse tema nas escolas para que os alunos possam entender essa realidade, e assim, colaborar com as decisões e providências necessárias à sobrevivência e ao bem-estar da vida no Planeta, através de algo que está ao alcance de todos: - mudança de atitude com relação ao meio.

A situação de degradação ambiental vivida por diferentes sociedades, no mundo contemporâneo, tem originado em diferentes setores sociais preocupações de ordem científica e, ao mesmo tempo, políticas. Os meios de comunicação de massa divulgam cotidianamente questões de caráter ambiental, fornecendo dados e estimativas. Propostas científicas para solucionar esses problemas são divulgadas na mídia, utilizando-se de instrumentos matemáticos. (SOUZA, 199_ , p.21).

Logo, a compreensão dos fenômenos que ocorrem no ambiente pressupõe o domínio de alguns conceitos, de ferramentas e/ou de procedimentos matemáticos, dos quais podemos vislumbrar a possibilidade de ensinar Matemática e, ao mesmo tempo, sensibilizar os alunos para as questões ambientais.

Como “questões ambientais” é um tema amplo demais, o que em certa medida, dificultou a coleta e o tratamento das informações, escolhemos dentre essas questões, uma que fosse abrangente o suficiente para estarmos discutindo com os alunos diversos problemas ambientais, principalmente aqueles com os quais eles têm uma participação mais direta.

A água é um importante recurso natural que vem sendo mal utilizado e as conseqüências disso podem interferir de um modo direto na vida das pessoas e, por morarmos em uma região de grande potencial de recursos hídricos - o que aumenta nossas responsabilidades-, nos pareceu ser um assunto interessante para despertar no aluno idéias de que pequenas mudanças de atitude podem representar grandes ganhos para a natureza e, conseqüentemente, para a população do mundo. Assim escolhemos o tema “água” e a partir dele, estabelecemos *links* com diversas outras questões ambientais.

Para verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre a água e de que forma eles a percebem em sua vida, aplicamos sem referências prévias, um questionário (Anexo B). Por outro lado, tínhamos também interesse em verificar em que medida a relação dos conteúdos matemáticos, no caso *funções*, com a realidade sócio-ambiental do aluno, serve para a formação de um indivíduo que deve compreender e preservar o meio no qual está inserido.

Sobre as respostas dadas observamos que a maioria dos alunos reconheciam a água como um recurso finito e que, portanto precisa ser usado com parcimônia, entretanto, somente quatro citaram o “não desperdício” como uma medida de preservação da água. Nenhum exemplificou como isso poderia ser feito. Contudo, reconheceram a água como elemento imprescindível para a vida no Planeta.

Sem água não há vida, água é sinônimo de vida (Mi)

A água é importante para a Terra e para todos os seres vivos que nela habitam. [Su]

Sem água não viveríamos (Je)

Segundo os alunos a água serve principalmente para matar a sede, para fazer a higiene do corpo e da casa. Nem um aluno citou a água como fonte de lazer, por exemplo. Precisa ser filtrada e fervida antes de ser consumida, pois, caso contrário, pode provocar doenças. E, os principais problemas enfrentados pelas águas do Planeta são: o desperdício e a poluição por esgotos e lixões, o que pode aumentar em função do crescimento desordenado da população.

Apesar de os alunos demonstrarem um bom nível de conscientização com relação aos problemas das águas dos Planetas, colocaram com freqüência ações que pouco dependem deles para a conservar e preservar a água, como se esse problema não fosse deles também.

Não poluindo (Raw)

Não construir hidroculturas (Ge)

Não contaminando com produtos químicos (AnG)

Examinar os petroleiros para não haver derramamento de óleo (Pa)

3.3 – As Atividades de ensino-aprendizagem: problematizações com referência na realidade

Tomando por base os procedimentos²⁰ recomendados para a obtenção de um modelo e a forma como, aqui, concebemos Modelagem Matemática, elaboramos Atividades de ensino em que os alunos, a partir de um problema com referência na realidade, e de seus conhecimentos anteriores, deveriam escrever *funções*/modelos, para sobre eles, e, com eles, dar respostas ao problema.

Como já estava previsto que os alunos não sairiam da sala de aula para coletar dados, coube a nós fazermos a pesquisa de campo, buscando informações pertinentes ao assunto “água”. Dessa forma, fizemos duas visitas à Companhia de Água e Saneamento do Pará (COSANPA), onde entrevistamos o Coordenador Metropolitano, Eng. José Joaquim Melo Rodrigues, o químico responsável pelo controle da qualidade de água, José Carlos de Oliveira e o Sr. Rian, que nos explicou como são calculadas as contas referentes ao consumo de água da população no nosso Estado. Assistimos a uma palestra intitulada “Água – importância e desafios”, ministrada pela Prof. Vera Nobre Vaz, visitamos vários *sites* e fizemos recortes de jornais e revistas.

Já de posse de um considerável acervo sobre a água, começamos o difícil tratamento da informação, no sentido de reconhecer e selecionar variáveis relevantes que pudessem estar gerando dados para possíveis problematizações envolvendo *funções*. E, num genuíno trabalho de Modelagem Matemática, utilizamos quase dois meses para elaborar quatorze **Atividades** condizentes com nossos objetivos de ensino: trabalhar com as funções do 1º, 2º graus e exponencial como ferramentas para a compreensão de questões ambientais.

Todas as **Atividades de Modelagem**²¹ são compostas por um pequeno texto cujo objetivo é envolver o aluno com a problematização que vem a seguir. Algumas vezes foram

²⁰*Interação* – reconhecimento e/ou familiarização com a situação-problema que se quer modelar; *Matematização* – formulação/resolução do problema ou elaboração do modelo; *Modelo Matemático* – interpretação e validação do modelo obtido. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003)

²¹ Doravante chamadas apenas de **Atividades**

copiados de entrevistas, jornais, revistas ou páginas da Internet, e, outras vezes foram produzidos por nós com base em leituras realizadas.

Os textos não interferem na resolução do problema, mas, ilustram e, com isto nossa intenção foi, através da leitura, transportar o aluno para o problema. Acreditamos que se o aluno sente-se personagem do problema, este será seu e, por conseqüência ele buscará com mais afinco recursos para resolvê-lo.

Segundo Moretto (2004, p.110), “è laborar um bom contexto não é apenas inventar uma história, ou mesmo colocar um bom texto ligado ao assunto tratado na questão. É preciso que o aluno tenha que buscar dados no texto e, a partir deles, responder à questão”, se não o texto vira pretexto.

Conforme essa concepção, talvez nossos **textos** sejam realmente **pretextos**. Pretexto para estar falando com os alunos de questões ambientais que urgem pela participação deles, pretexto para contribuir com a formação de um cidadão responsável para com o meio em que vive e, ainda, pretexto para tornar as aulas de Matemática mais interessantes e atraentes.

Os dados numéricos utilizados foram, por via de regra, oriundos da pesquisa de campo, portanto, “reais”. Os problemas, entretanto, foram elaborados por nós, forçando os alunos a utilizarem o conteúdo determinado no planejamento. É o que estamos chamando de “problemas com referência na realidade”.

Assim, das etapas propostas por Biembengut e Hein (2003) para o processo de Modelagem, nos responsabilizamos pela interação ou familiarização com o tema, pela seleção e tratamento da informação necessária para a construção dos modelos/*funções* e por parte da Matematização, cabendo ao aluno a elaboração dos modelos bem como sua utilização na resolução dos problemas.

Para montar as **Atividades** precisamos também ter bem definido o que se queria ensinar. Portanto, como queríamos utilizar ensinar *funções* polinomiais do 1º e 2º grau e/ou exponenciais para a compreensão e solução de problemas, todas as **Atividades** primaram pela construção desses modelos, a partir da tradução de um texto, ou da análise de gráficos e tabelas, com os quais os alunos deveriam responder às perguntas subseqüentes.

Todo o instrumental necessário para esse fim foi fornecido ao aluno, em aulas que antecederiam a aplicação das **Atividades**, através de exercícios. Dessa forma, os alunos logo, ao chegarem a sala de aula, recebiam as **Atividades** nas quais eram “convidados” a trabalharem na solução de *problematizações de situações com referência na realidade*, contando com conhecimentos já adquiridos.

Procuramos também adequar cada uma das **Atividades**, ao nível cognitivo do aluno. Não eram nem muito fáceis, a ponto de o aluno não encarar como um verdadeiro problema, nem tão difíceis fazendo o aluno acreditar que não tinha condições de resolver, desmotivando-o, assim, na busca da solução. Todas sempre apresentavam alguma “novidade” para o aluno, fazendo-o avançar em seus conhecimentos.

Segundo a nossa proposta de Modelagem, é competência do professor dar oportunidade para que os alunos construam os modelos/*funções*, o que nos remete a refletir sobre como a professora deve conduzir a realização das **Atividades** ou qual o papel da professora nas aulas de Modelagem?

Como acreditamos que é o aluno, num esforço deliberado e individual, quem constrói seu próprio conhecimento, e que “o professor na verdade o ajuda nessa tarefa de construção, intermediando a relação entre o aluno e o saber” (ANTUNES, 2002, p.22), para que a professora, no momento da aplicação das **Atividades**, *conduzisse o aluno na/para a construção dos modelos/funções*, e dessa forma, construísse seus conhecimentos sobre *funções* seriam necessários os seguintes procedimentos:

- ✓ Posicionar-se sempre como alguém que não sabe a resposta do problema, mas como alguém que também está em busca de.
- ✓ Valorizar a resolução do aluno, muito mais do que a solução dada ao problema.
- ✓ Responder sempre uma pergunta com outra pergunta, direcionando sempre para que o próprio grupo chegasse a uma conclusão.
- ✓ Conduzir o aluno à constatação de seu erro através de perguntas realizadas sobre a sua produção.
- ✓ Não aceitar somente a resposta do problema, mas conduzir o aluno a explicitar por escrito cada passagem na/para a elaboração da solução.
- ✓ Insistir para que o aluno consulte seu próprio material e os componentes do grupo, antes de chamar a professora.

- ✓ Valorizar os acertos ou os progressos apresentados pelos alunos.

Durante três meses, em três encontros semanais de uma hora e meia cada, ora aplicando as **Atividades**, ora resolvendo exercícios, trabalhamos com uma perspectiva de Modelagem sobre a qual faremos, a seguir, uma avaliação com vistas a encontrar saberes interessantes para a utilização da Modelagem Matemática em cursos regulares.

Capítulo III

A avaliação

1- Introdução

De um “lugar onde está a hegemonia de nossas escolas e professores” (BARBOSA, 2000, p.58) de Ensino Médio, concebemos uma forma possível de utilizar a Modelagem Matemática em nossas salas de aula.

Foi materializado, de fato, em uma turma de 1^a série do EM, no final do segundo semestre do ano letivo de 2004, entretanto, todas as ações anteriores visaram a preparação do ambiente escolar para a sua utilização. Dessa forma, podemos dizer que, durante quase um ano, vivenciamos a perspectiva de Modelagem que concebemos.

Ao longo desse período colecionamos os materiais produzidos pelos alunos, fitas de áudio-vídeo gravadas, transcrições e observações registradas pela professora e pelos estagiários, sobre os quais nos debruçaremos, agora, para uma análise mais minuciosa sobre a aplicação da Modelagem Matemática, como um processo de ensino - aprendizagem de *funções*, com vistas a encontrar saberes interessantes para a utilização do referido método em cursos regulares.

Para analisar ou avaliar o *ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o professor, através de problematizações de situações com referência na realidade, oportuniza ao aluno a construção de modelos matemáticos, sobre os quais ele faça inferências e/ou projeções, cabendo ao professor, o acompanhamento das atividades, no sentido de conduzir o aluno na/para a construção do conhecimento matemático previsto no planejamento escolar,* precisamos levar em consideração diferentes pontos de vista.

Embora ensino e aprendizagem se encontrem estreitamente ligados e, façam parte de uma mesma unidade dentro da aula (ZABALA, 1998), podemos distinguir na presente perspectiva de Modelagem organizada e conduzida, duas vertentes: a maneira como os alunos estão construindo os modelos/*funções* e, portanto aprendendo e, o que faz o professor para que aprendam, ou seja, de que forma ensina.

Nesses termos, avaliar nossa perspectiva de Modelagem é verificar como a professora oportunizou aos alunos e alunas a construção de suas aprendizagens e, se estas foram realizadas de modo significativo. Portanto, interessa-nos verificar, as ações da professora e dos alunos, as relações da professora com os alunos e destes com o conteúdo matemático, bem como os respectivos resultados das ações e interações, na intenção de uma aprendizagem significativa de funções.

2- Aprendizagem significativa

Para que nós possamos avaliar ou verificar a ocorrência de aprendizagem significativa de *funções*, primeiramente precisamos entender um pouco sobre como se produzem as aprendizagens e quando elas podem ser consideradas significativas.

Aprender é o mesmo que construir ou apropriar-se de um conhecimento. O que acontece quando damos a uma informação, um significado dentro do contexto de nossas experiências pessoais e do contexto social em que vivemos, como consequência das diversas relações estabelecidas com outros conhecimentos já elaborados em nossa estrutura cognitiva. Assim, “aprender é construir significados” (MORETTO, 2003, p.9).

Em se tratando de aprendizagem escolar, para que esse

processo se desencadeie, não basta que os alunos se encontrem frente a conteúdos para aprender; é necessário que diante destes possam atualizar seus esquemas de conhecimento, compará-los com o que é novo, identificar semelhanças e diferenças e integrá-las em seus esquemas, comprovar que o resultado tem certa coerência etc. Quando acontece tudo isto – ou na medida em que acontece – podemos dizer que está se produzindo uma *aprendizagem significativa* dos conteúdos apresentados. (ZABALA, 1998, p.37).

Aprendizagem significativa é um conceito enfatizado pela teoria de David Ausubel conhecida desde a década de 60, cuja idéia central é a de que o mais importante é aquilo que o aprendiz já sabe. Essa teoria, baseada em modelos construtivistas dos processos cognitivos humanos, descreve como o estudante adquire conceitos, e como os organiza em sua estrutura cognitiva. Tem como premissa fundamental que o aprendizado significativo acontece, quando, mediante um esforço deliberado, o aprendiz relaciona novas informações com conceitos ou proposições relevantes, preexistentes em sua estrutura cognitiva.

Aos conceitos, idéias ou proposições já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, capaz de servir de “âncoradouro” a uma nova informação, de modo que esta adquira significado para o sujeito, Ausubel chama de “subsunçor”.

Pode-se dizer, então, que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação “âncora-se” em conhecimentos especificamente relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva. Ou seja, novas idéias, conceitos, proposições podem ser aprendidos significativamente (e retidos) na medida em que outras idéias, conceitos, proposições relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para os primeiros. (MOREIRA, 1999, p.11).

Nesse processo, o conhecimento preexistente não só serve de ancoradouro para o novo como acaba por ampliar-se e modificar-se, tornando-se mais abrangente e mais capaz de servir como subsunçor. Assim, por exemplo, se a idéia de *função* já existe na estrutura cognitiva do aluno, esta servirá de subsunçor para novas informações referentes às diversas *funções* existentes, e, na medida em que os novos conceitos forem aprendidos de maneira significativa, crescem e re-elaboram-se os conceitos subsunçores iniciais e o aluno amplia sua idéia inicial de *função*.

Quando o conteúdo a ser aprendido não consegue ligar-se a algo já conhecido, ou estabelece com estes relações pouco significativas, ocorre o que Ausubel chamou de aprendizagem mecânica. Isso ocorre quando as novas informações são aprendidas sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. A aprendizagem é memorística e realizada, na maioria das vezes para satisfazer uma necessidade momentânea, como conseqüência, o conteúdo é logo esquecido, assim que não mais for requerido. Assim, a pessoa decora fórmulas, leis, macetes para provas e esquece logo após a avaliação.

Em Matemática as questões do tipo “resolva -calcule”, que o aluno resolve sem saber o “porque” ou o “para quê” fazem, podem fomentar esse tipo de aprendizagem. Em contrapartida, a Modelagem Matemática por trazer significado e sentido aos conteúdos escolares, pode favorecê-la.

[...] embora a aprendizagem significativa deva ser preferida à mecânica por facilitar a aquisição de significados, a retenção e a transferência de aprendizagem, pode ocorrer que em certas situações a aprendizagem mecânica seja desejável ou necessária; por exemplo, em uma fase inicial da aquisição de um novo corpo de conhecimento. (MOREIRA, 1999, p.14).

Segundo a teoria ausubeliana, não existe uma dicotomia entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, ao contrário um *continuum*. Assim por exemplo, a simples memorização de fórmulas, de teoremas, de proposições ou de procedimentos algorítmicos podem estar num extremo (aprendizagem mecânica) necessário às aplicações dos conceitos e às relações matemáticas para a resolução de problemas com referência na realidade (aprendizagem significativa).

Moreira (1999, 20-3) evidencia duas condições necessárias para que a aprendizagem seja significativa, segundo a teoria em questão:

a) o material de ensino seja ‘potencialmente significativo’.

Um material com essa característica possui duas condições subjacentes: ser logicamente e psicologicamente significativo. Ser logicamente significativo ou ter significado lógico diz respeito à natureza do material que deve apresentar possibilidades de o indivíduo, relacionar de forma não-arbitrária²² e substantiva²³, o material e as idéias situadas no domínio da capacidade humana de aprender. Ser psicologicamente significativo diz respeito à natureza da estrutura cognitiva daquele a quem o material de ensino está dirigido.

Todavia, a maneira e a forma como se produzem as aprendizagens são o resultado de processos individuais e pessoais, pois dependem das características singulares de cada um dos aprendizes que se constroem, em grande parte, a partir das experiências que cada um viveu desde o nascimento. Em outras palavras, a forma como se aprende e os ritmos de aprendizagem variam segundo as capacidades, motivações e interesses de cada um dos meninos e meninas (ZABALA,1998).

Logo, enquanto ‘o conteúdo das disciplinas ensinadas na escola é, quase que por definição, logicamente significativo’(p.22), o significado psicológico, por estar relacionado à maneira individual de ver, de sentir, de agir e de reagir própria de cada pessoa/aprendiz leva cada aluno a dar um significado e um sentido próprio ao material.

Isso significa que a matéria de ensino pode, na melhor das hipóteses, ter significado lógico. Porém é o seu relacionamento, substantivo e não-

²² A não-arbitrariedade significa que os conceitos apresentados não devem ser ao acaso, ou seja, já devem constar um conceito específico ao qual o outro deve ser relacionado(ancoragem). (BARALDI, 1999, p.38)

²³ A substantividade significa que a relação entre o material a ser aprendido e a estrutura cognitiva não precisa ser ao pé da letra, ou seja, pode-se usar símbolos diferentes mas equivalentes aos já usados anteriormente. (idem, p.39)

arbitrário, com a estrutura cognitiva de um aprendiz em particular que a torna potencialmente significativa e, assim, cria a possibilidade de transformar significado lógico em psicológico, durante a aprendizagem significativa. Dessa forma, a emergência do significado psicológico depende não somente da apresentação, ao aprendiz, de um material logicamente significativo, mas também da disponibilidade, por parte desse aprendiz, do necessário conteúdo ideacional. (p.22)

Sendo assim, o significado lógico, próprio da Matemática, ou a seqüência ordenada de maneira hierárquica de seus conteúdos, não é suficiente para que uma atividade de ensino na referida disciplina seja potencialmente significativa. Há que se buscar uma forma de se relacionar, de forma substantiva e não-arbitrária, o conteúdo que se quer ensinar com a estrutura cognitiva do aluno/a através de conhecimentos preexistentes que possam servir de ancoragem e, assim, ao diminuir a distância entre o que o aluno já sabe (subsúncos) e o que ele precisa aprender, estamos criando a possibilidade de transformar o significado lógico da Matemática em significado psicológico. Para isso, na estrutura cognitiva do aluno, devem estar disponíveis os conceitos subsúncos específicos com os quais o novo material é relacionável.

Por outro lado, mesmo o material sendo potencialmente significativo, se a intenção do aluno for a de simplesmente realizar as atividades que o material propõe, de forma mecânica, somente para satisfazer uma imposição da professora ou a necessidade da obtenção de uma nota, a aprendizagem também não será significativa. O que gera a segunda condição para a aprendizagem significativa

b) o aluno precisa ter uma disposição para aprender ou para estabelecer as relações não-arbitrárias e substantivas entre o novo conhecimento e um outro preexistente em sua estrutura cognitiva. Se o indivíduo quiser memorizar o material arbitrariamente e literalmente, então tanto o processo, como o produto da aprendizagem, será mecânico ou sem significado.

Para Ausubel, a aprendizagem não necessita necessariamente da motivação. Ela ocorre por si só. Para ele, quando se aprende algo, há uma satisfação inicial, que estimula que o ato pedagógico continue se desenvolvendo, ou seja, a motivação do aluno é a sua própria aprendizagem.

O aluno estará predisposto a aprender conforme seus sentimentos no evento educativo.

A hipótese de Novak é que a experiência afetiva é positiva e intelectualmente construtiva quando o aprendiz ganha em compreensão; reciprocamente, a sensação afetiva é negativa e gera sentimentos de inadequação quando o aprendiz não sente que está aprendendo o novo conhecimento, ou a nova experiência de aprendizagem. Predisposição para aprender e aprendizagem significativa guardam entre si uma relação praticamente circular: a aprendizagem significativa requer predisposição para aprender e, ao mesmo tempo, gera esse tipo de experiência afetiva (MOREIRA, 1999, p.40).

Logo, atitudes e sentimentos positivos perante a Matemática têm suas raízes na aprendizagem significativa de seus conteúdos, que por sua vez facilita os subseqüentes eventos educativos, gerando algo do tipo: *gosto porque aprendo e aprendo porque gosto*. Como consequência, é preciso que o aluno reconheça alguma relevância no novo conhecimento para manifestar disposição em aprender.

A aquisição de significados tanto para “o quê” se aprende quanto para o “porque” se deve aprender é o produto final de uma aprendizagem significativa. Esse significado real (significado psicológico), emerge para o indivíduo quando o significado potencial (significado lógico) do material converte-se em conteúdo cognitivo de maneira substantiva e não-arbitrária, a partir de idéias relevantes pré-existentes na sua estrutura cognitiva.

Ao atribuir sentido e significado aos conteúdos de ensino, o aluno responsabiliza-se pelo seu processo de aprendizagem à medida em que constrói o seu conhecimento,

mas é o professor quem determina, com sua atuação, com o seu ensino, que as atividades nas quais o aluno participa possibilitem um maior ou menor grau de amplitude e profundidade dos significados construídos e, sobretudo, quem assume a responsabilidade de orientar esta construção numa determinada direção. (SALVADOR, 1994, p.156).

Com isso, destacamos que, para a ocorrência de aprendizagem significativa, além de um material potencialmente significativo ou de uma relação deliberado de relacionar o que já se sabe com o que se aprende, é necessário também, um professor que dirija o

processo de construção de conhecimento do aluno, fazendo-lhe participar em tarefas e atividades que lhes permitam construir significados cada vez mais próximos aos que os conteúdos do currículo escolar possuem (idem, p.157)

e que, já são bastante claros para o professor. Em outras palavras, é esse compartilhar de significados entre professor e aluno, mediados pelo conhecimento e resultantes de intercâmbios comunicativos que se estabelecem na sala de aula, que determinará o grau e a profundidade da aprendizagem.

3- Avaliação: algumas palavras

Queremos avaliar uma estratégia de ensino que centra na ação do aluno, motivada pela ação do professor, o elemento desencadeador da aprendizagem e, nesse sentido, o “objeto da avaliação deixa de se centrar exclusivamente nos resultados obtidos e se situa prioritariamente no processo de ensino/aprendizagem, tanto do grupo/classe como de cada um dos alunos” (ZABALA, 1998, p.198).

Zabala (1998) acrescenta ainda que a **atividade** ou **tarefa**²⁴, apesar de ser a unidade mais elementar que constitui o processo de ensino/aprendizagem, possui em seu conjunto todas as variáveis que incidem neste processo, tais como:

determinadas relações interativas professor/alunos e alunos/alunos, uma organização grupal, determinados conteúdos de aprendizagem, certos recursos didáticos, uma distribuição do tempo e do espaço, um critério avaliador; tudo isto em torno de determinadas intenções educacionais, mais ou menos implícitas. (p.17)

Assim, nos parece possível, fazer uma análise da estratégia utilizada, ou do processo de Modelagem nos termos aqui colocados, a partir das **Atividades** realizadas em sala, posto que envolvem a forma como a professora conduz e orienta os alunos no processo de construção e de utilização dos *modelos/funções* e do próprio conhecimento matemático; o modo como essa encaminha as dificuldades de aprendizagem; as reações dos alunos em resposta à metodologia utilizada; critérios e instrumentos avaliativos, tudo em torno de uma intenção educacional, que é levar os alunos a utilizarem *funções* como ferramenta para a compreensão da realidade.

Escolhido o referencial a partir do qual faremos nossa avaliação, resta-nos ainda definir a forma como transformaremos em notas as **Atividades** realizadas pelos alunos, haja vista que estamos inseridos em um curso regular constituinte de um sistema tradicional de ensino que exige uma nota, ao final de cada bimestre, como forma de verificar o progresso do aluno.

Partindo dessa necessidade e usando pressupostos da “Escala multidimensional de avaliação de relatórios” proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.121-123), montamos um quadro (**Tabela 1.3**) para nos servir de referencial para avaliar a aprendizagem

²⁴ Uma exposição, um debate, uma leitura, uma pesquisa bibliográfica, tomar notas, uma ação motivadora, uma observação, uma aplicação, um exercício, o estudo, etc. (ZABALA, 1998, p.17)

do conteúdo matemático de funções (linear, exponencial e quadrática), dos alunos envolvidos na modelação de problemas com referência na realidade.

A construção desse quadro fundamentou-se na escolha de um procedimento ou de um conjunto de procedimentos que deve ser realizado pelos alunos e que possa ser avaliado e pontuado conforme sua execução, ou não. A cada procedimento fez-se corresponder as estratégias e os processos de raciocínio requeridos pelos alunos para executarem os respectivos procedimentos.

De acordo com os procedimentos executados, ou não, pelos alunos eles foram enquadrados em um *Nível* que por sua vez correspondeu a um intervalo percentual com uma diferença de 20% entre seu limite inferior e superior, conforme quadro a seguir:

<i>Nível</i>	5	4	3	2	1	0
<i>Percentual</i>	[100%, 80%]]80%, 60%]]60%, 40%]]40%, 20%]]20%, 1%]]1%, 0%]

Assim, seja por exemplo um aluno enquadrado no *Nível* 4, porque conseguiu chegar ao *modelo/função* esperado, mas com ele, não conseguiu realizar com sucesso inferências e projeções. Esse aluno, certamente, possuiu dentro de sua produção, um nível de acertos que o colocou mais ou menos próximo dos resultados esperados. Essa proximidade julgada, atribuiu ao aluno uma nota de]80%, 60%] do valor total da **Atividade**.

As **Atividades** foram elaboradas de modo a exigir conhecimento matemático específico para a sua realização e a contribuir para a construção de novos referentes a *função*, ou ainda, foram elaboradas de modo a facilitar a aprendizagem significativa de *funções*, buscando construir o novo conhecimento a partir de outros preexistentes (subsúncos). Como, cada procedimento, exigido do aluno dentro da realização das **Atividades**, pede conteúdo matemático, ao avaliarmos o primeiro, paralelamente, estaremos avaliando o segundo.

É importante salientar que nosso objetivo com este quadro, não foi simplesmente transformar as **Atividades** dos alunos em nota para ser entregue na secretaria, mas sim verificar como ele se desenvolveu dentro do processo e o que podemos fazer para ajudá-lo a passar de um nível para outro mais elevado. Com isso, esperamos entregar na secretaria uma considerável quantidade de notas próximas de 100% do valor total das atividades realizadas.

<i>Nível</i>	<i>Procedimentos</i>	<i>Estratégias e processos de raciocínio</i>
5	✓ O problema é traduzido para a linguagem matemática.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Compreende os princípios matemáticos do problema. ✓ Utiliza conhecimentos pré-adquiridos. ✓ Identifica as variáveis importantes do problema ✓ Migra com o problema do contexto natural para o contexto da matemática.
	✓ O modelo/função (linear, quadrática ou exponencial) é elaborado.	✓ Executa completa e corretamente os algoritmos
	✓ O aluno utiliza o modelo encontrado para realizar inferências e projeções	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Calcula corretamente, valor numérico de funções. ✓ Identifica e trabalha corretamente com os conjuntos Domínio e Imagem. ✓ Identifica a monotonia das funções ✓ Com os dados obtidos nos item anteriores, recontextualiza o problema, constrói conhecimento “novo” e significativo.
4	✓ O aluno realiza os item um e dois do nível anterior, mas não consegue realizar com sucesso o item três.	
3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ O problema é parcialmente traduzido para a linguagem matemática. ✓ O aluno não chega ao <i>modelo/função</i> esperado. ✓ Um modelo/função é elaborado com o qual o aluno faz inferências e projeções de forma correta. 	
2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ O problema é incorretamente traduzido para a linguagem matemática. ✓ O aluno utiliza corretamente a função encontrada para realizar inferências e projeções. 	
1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ O problema é incorretamente ou parcialmente traduzido para a linguagem matemática. ✓ O aluno não realiza inferências e projeções com a função encontrada para. 	
0	✓ Nenhum procedimento foi feito	

Tabela 1.3- Grade de procedimentos e estratégias

4- Atividades de Ensino-Aprendizagem: o referencial de análise

Ao elaborarmos as **Atividades** tivemos a intenção de preparar um material que fosse potencialmente significativo, isto é “suscetível de dar lugar à construção de significados” (SALVADOR, 1994, p.150) relativos ao conteúdo de *funções*. Para isso, procuramos estruturar as **Atividades** de modo a facilitar aos alunos estabelecerem relações não-arbitrárias e substantivas de seus conhecimentos preexistentes com aqueles que deveriam aprender.

Por conseguinte, quase todas as **Atividades**, seguindo a estruturação lógica, intrínseca do conteúdo de *funções*, apresentam uma proposta de construção de conhecimento novo a partir de outro preexistente, tendo problemas com referência na realidade como mediadores. Iniciavam-se por algo que o aluno já sabia fazer, terminando por algo “novo”, que ele deveria construir ou aprender, que por sua vez deveria se transformar em conhecimento preexistente, ou subsunçor, para a próxima **Atividade**.

Esse “algo de novo que o aluno deveria aprender” foi o que fez a diferença entre as atividades que caracterizamos como exercícios, e as que caracterizaremos como atividades de Modelagem segundo a perspectiva proposta/aplicada. Tal caracterização esteve profundamente relacionada com a intenção da professora, a cada aula, no decorrer da aplicação do método.

Assim, as **Atividades** utilizadas para revisar conteúdos, reforçar ou desenvolver habilidades operatórias em algoritmos já vistos, foram consideradas exercícios, e, as que foram utilizadas para oportunizar ao aluno o avançar na elaboração de seus conhecimentos de *funções*, enquanto construía modelos matemáticos, foram consideradas problemas de Modelagem.

Ao mesmo tempo, como queríamos facilitar as relações não-arbitrárias e substantivas, procuramos adequar os problemas propostos de tal maneira que não fossem nem tão fáceis a ponto de não produzirem nenhum questionamento ou reorganização de conhecimentos adquiridos, nem tão difíceis a ponto de desencorajar a busca de soluções por parte dos alunos.

Para isso, buscamos informações pertinentes ao nível cognitivo da turma contidas no **diagnóstico** realizado, levando em conta que, embora os alunos tenham representações prévias diferentes provindas de histórias diferentes, o que os leva a interpretarem e realizarem

de modo diferente atividades propostas, eles pertencem a mesma Escola e a mesma turma já há algum tempo e, portanto, têm histórias e representações sociais bastante semelhantes, logo, formas de agir e modos de pensar mais ou menos homogêneos. (MORETTO, 2004, p.43).

Todas as **Atividades** serão apresentadas aqui, com as devidas respostas esperadas (sublinhado) e seguidas de uma análise conforme as seguintes categorias, elaboradas a partir da ‘Pauta para a observação e análise das atividades escolares de ensino e aprendizagem’ proposta por Coll et al. (2003, p.34):

- Intenções e objetivos de ensino da professora e conseqüente caracterização da **Atividade** como um exercício ou um problema de Modelagem, levando em consideração a relação de um exercício com uma prática que leve à consolidação de habilidades instrumentais básicas, interessantes para a evolução do aprendizado de *funções*, em especial, e, de um problema, com situações novas ou diferentes das já aprendidas, que requeiram a utilização estratégica de técnicas já conhecidas. (POZO, 1998). Dessa forma, para resolver um exercício o aluno precisa apenas lembrar os passos que deve dar no sentido de encontrar resposta ao que lhe está sendo solicitado, enquanto que, para dar resposta a um problema, o aluno necessita estabelecer relações não-arbitrárias e substantivas entre o que já sabe e o que precisa aprender/desenvolver.
- O desenvolvimento da Atividade que, dentre outras questões, aborda os comportamentos representativos e mais freqüentes da professora e dos alunos(as) nos momentos em que estes buscam construir os modelos/funções e através deles realizar inferências e projeções.
- Avaliação da produção do aluno, na perspectiva de uma aprendizagem significativa de *funções*, conforme **Tabela 1.3** - Grade de procedimentos e estratégias. Trata-se do que

os alunos finalmente aprenderam, ou não aprenderam, como conseqüência de sua participação na **atividade** [grifo nosso] observada, de como aprenderam e de como o professor tentou que isso ocorresse, e conseguiu ou não, incidindo sobre o processo de aprendizagem de seus alunos (COLL et al., 2003, p.38).

Vale ressaltar que somente os **problemas de Modelagem** serão analisados conforme as categorias estabelecidas, pois só interessa **avaliar a produção** do aluno, na perspectiva de uma aprendizagem significativa de *funções* na resolução de problemas que, “sem dúvida, é

um método válido e prático de se procurar evidências de aprendizagem significativa” (MOREIRA, 1999, p.56).

Argumenta [...] Ausubel que uma longa experiência em realizar exames faz com que os alunos se habituem a memorizar não só proposições e fórmulas, mas também causas, exemplos, explicações e maneiras de resolver “problemas típicos”. Propõe, então, que, ao se procurar evidências de compreensão significativa, a melhor maneira de se evitar a “simulação da aprendizagem significativa” é formular questões e problemas de maneira nova e não familiar que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido.

Testes de compreensão devem, no mínimo, ser escritos de maneira diferente e apresentados em um contexto distinto, de certa forma, daquele originalmente encontrado no material instrucional. (MOREIRA, 1999, p.56)

Um exercício é

importante porque permite consolidar habilidades instrumentais básicas, [imprescindíveis na] solução de um problema novo [que] requer a utilização estratégica de técnicas ou habilidades previamente exercitadas. [...] Se o aluno desconhecer a técnica instrumental básica, não será capaz de utilizá-la para resolver um problema novo. (POZO, 1998, p.17).

Assim, as **Atividades** categorizadas como exercícios tiveram a finalidade de fortalecer e/ou consolidar subsunçores e, dessa forma, para efeitos de avaliação de nossa perspectiva de Modelagem, estaremos observando o seu desenvolvimento, bem como analisando o conteúdo trabalhado, a sua relevância para a evolução da aprendizagem de funções e para sua utilização como subsunçor em **Atividades** subsequentes.

A maneira como estamos concebendo e materializando a Modelagem Matemática, na presente pesquisa, nos insere no *Caso 1* de Barbosa (2003, p.70), e nos coloca responsáveis pela coleta e simplificação dos dados, tanto qualitativos quanto quantitativos, e pela elaboração da situação-problema.

Dessa feita, selecionamos várias reportagens de jornais e de revistas, publicações e páginas da internet, além de duas visitas a COSANPA (Companhia de água e saneamento do estado do Pará), como fonte de informações interessantes para a elaboração de situações problemas que pudessem conduzir o aluno a apropriar-se do conteúdo matemático previsto para a 1ª série do EM no ano letivo de 2004.

Tal tarefa não se constituiu em uma ação tão trivial quanto parece na descrição. Elaborar problemas sobre situações com referência na realidade, por natureza multidisciplinar

marcada pela fluência e interdependência de suas variáveis, pode se constituir em uma complexa tarefa que demanda uma certa disponibilidade de tempo para ser concluída, além de um bom conhecimento do conteúdo disciplinar.

Logo, na perspectiva de que os caminhos descobertos na prática possam vir a enriquecer a teoria, e, dessa forma, viabilizar cada vez mais o uso da Modelagem para o ensino da Matemática em cursos regulares, apresentaremos também, de forma sucinta, concomitantemente a análise de cada **Atividade**, a forma como coletamos, selecionamos e simplificamos os dados, e como elaboramos os problemas.

4.1- Atividade 1: A água no Planeta Terra



A água é um dos recursos mais importantes para todos os seres vivos. Plantas, animais e principalmente, nós, os seres humanos necessitamos dela para sobreviver. Mas será que a água existirá para sempre?

Quem vê uma foto do planeta feita do espaço pode pensar que água é algo que nunca vai faltar. Afinal, temos 1,4 bilhão de quilômetros cúbicos desse líquido importante para a vida, distribuídos em mais de dois terços da superfície da Terra.

Entretanto, nos últimos 50 anos o consumo mundial de água aumentou 100% e continua aumentando a cada ano levando as reservas disponíveis a um esgotamento, o que nos leva a crer que a água pode acabar. Atualmente, a escassez de água potável já atinge 2 bilhões de pessoas em todo o planeta e 3 bilhões consomem água contaminada.

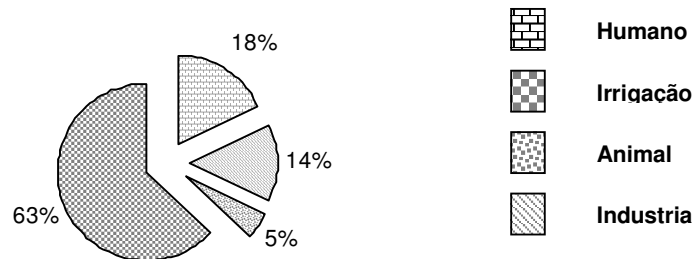
Isso acontece também porque a água é mal distribuída no planeta, e, de toda a quantidade existente, só podemos usar uma pequena parte, porque apenas 2,5 % da água do planeta, é doce. Dessa parte, tire dois terços, confinados nas calotas polares e no gelo eterno das montanhas. Do que sobrou, desconsidere a maior parte, escondida no subsolo. Resultado: a água pronta para beber e fácil de captar está nos rios e lagos, num total de 90 mil quilômetros cúbicos, ou 0,26% do estoque mundial.

Fontes: revista **Superinteressante**, junho/2003;
Revista **Veja** 21/08/2002;
www.educacional.com.br

A água no Brasil

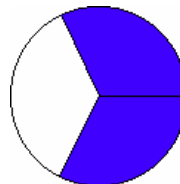
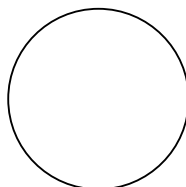
"O Brasil possui 13% de toda a água doce do mundo dos quais 80% estão na região Amazônica, o que dá aos habitantes da região uma grande responsabilidade na manutenção e preservação dos recursos hídricos". (Jornal *O liberal*, 10/10/2002)

Demandas de água no Brasil
(Fonte ANA, 2002)



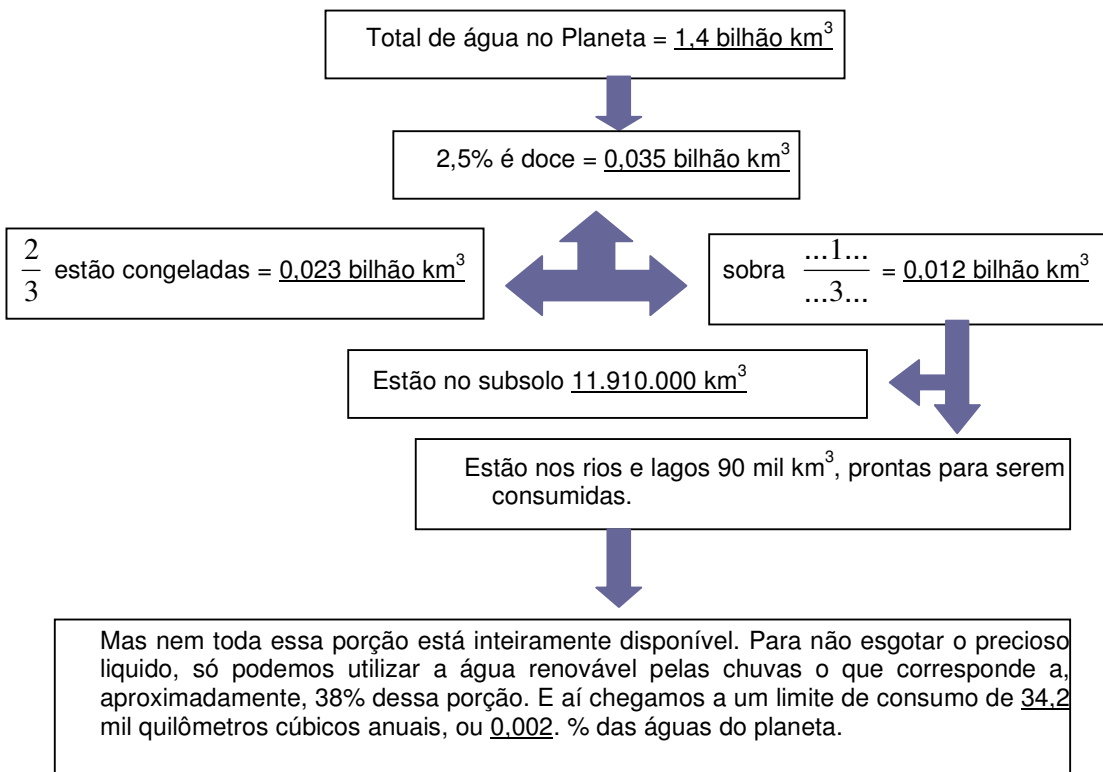
Os textos acima utilizam a Matemática para quantificar a água no Planeta Terra e, em especial no Brasil. Consultando esses textos, resolva as questões a seguir:

1ª) Se comparássemos a superfície da Terra com a superfície de uma pizza, por exemplo, quantas fatias seriam de água? Utilizando um transferidor divida o gráfico ao lado em fatias e hachure as que correspondem à água.



(Continua)

2ª) Complete corretamente o esquema abaixo:



3ª) Determine, em litros:

a) o total de água utilizado pela agricultura brasileira.

$$13\% \text{ de } 1,4 \text{ bilhão} = 13\% \times 1,4 \times 10^9 = 182 \times 10^6 \times 63\% = 114,66 \text{ milhões km}^3$$

b) a quantidade de água da região amazônica?

$$182 \times 10^6 \times 80\% = 145,6 \text{ bilhões km}^3$$

4ª) Qual a utilidade da matemática nos textos que você acabou de estudar? (Dica: Imagine o texto sem nenhum número)

quantificar

5ª) Ao longo do esquema montado na questão dois, alguns tipos de água que, por serem impróprias ao consumo ou de difícil captação, foram sendo descartadas. Onde estão localizadas essas águas?

Oceanos, congeladas e subsolo.

6ª) Comparando o início do esquema montado na 2ª questão como final a que conclusão você chega?

Que não temos tanta água quanto parece

Os textos acima foram selecionados de uma coleção de outros tantos, para desenvolvermos a primeira **Atividade**, integrante de nossa proposta, cuja intenção foi envolver o aluno com o tema a ser focado durante a pesquisa de campo e, já chamar atenção dele para a necessária economia dos nossos recursos hídricos.

Nesta primeira **Atividade**, o aluno não deveria escrever nenhum modelo matemático propriamente dito, mas traduzir os textos em esquemas e, com isso, fazer exercícios com unidades de medidas de volume bem como suas transformações, porcentagens, razões, potências de 10 e suas propriedades, números racionais e naturais com ordem de grandeza na casa dos milhões e bilhões.


Todos esses códigos e conceitos básicos, pertinentes a maioria das atividades subsequentes, fazem parte do conteúdo programático do Ensino Fundamental e, portanto, espera-se que o aluno do Ensino Médio já possua com esses uma certa habilidade. Mesmo assim, levando em conta a individualidade do aprendizado e/ou o esquecimento de assuntos que, de quando em vez, deixam de ser abordados, fizemos, a título de revisão, alguns exercícios envolvendo:

- Leitura, escrita, representação e operação com frações.
- Transformações de unidades de volume.
- Leitura e escrita de números muito grande ou muito pequenos, utilizando notação científica, inclusive.
- Cálculo de porcentagens com e sem o uso de calculadora.

Assim os exercícios presentes na **Atividade 1**, bem como todos os outros que a estes deram suporte, intencionaram revisar conteúdos já vistos ou reforçar os “subsúncos”, na perspectiva de contribuir para a compreensão efetiva dos textos apresentados, nesta e nas próximas atividades e, assim, favorecer o envolvimento do aluno com o tema a ser abordado.

4.2- Atividade 2: Contas de água

1) Observe a conta do consumo de água abaixo de uma residência de Belém:

		COMPANHIA DE SANEAMENTO DO PARÁ AV: MAGALHÃES BARATA, 1201, SÃO BRAZ CGC: 04.945.341/0001-90		NOTA FISCAL FATURA DE SERVIÇOS Pág.: 01/01 Via: 01				
Nome do Cliente		Matrícula		Localizador do Imóvel				
		00003453081		Localidade	Setor	Rota	Face	Seq.
				150140053	28	01	51	032
Endereço do Imóvel						Ít.	Número da Fatura	
						1	000.04.05850069-6	
Prod. Economias/Categ. res. com. ind. pub.		TF	Sit. Imóv.	GR/DT	Grupo	Datas		Mês/Ref.
A 1 E 1		N	RARE	MD /MD04	215	Leitura	Emissão	Próx. Leitura
						19/03/2004	27/08/2004	20/09/2004
								08/2004
Volumes Faturados			Código e Descrição de Lançamentos				Valor	
Mês/Ano	Vol.-m ³	CF	Período					
08/2004	14	02	30	005 AGUA				17,07
07/2004	10	02	30	015 ESGOTO				10,21
06/2004	17	02	31					
05/2004	15	04	28					
04/2004	22	02	31					
03/2004	20	02	31					
Ano Anterior								
08/2003	10	02	31					
TPS	PS	Hidrômetro	Leit. Ant.	Leit. Atual	Ocorrências	VENCIMENTO		VALOR A PAGAR
A	1	A98N0146675	785	799		08/09/2004		***** R\$

2) Agora responda:

- A conta é referente ao consumo de que mês? Agosto de 2004
- Qual o valor pago pela água e pelo esgoto, respectivamente? R\$ 17,07 e R\$ 10,21
- O “Valor a pagar” corresponde a R\$ 17,07 + R\$ 10,21, ou seja, o valor da água mais o valor do esgoto nos dá o total a pagar.
- Qual a relação existente entre o valor do esgoto e o valor da água? O valor do esgoto corresponde a 60% do valor da água
- Calcule o consumo em m³, dessa residência, sabendo que consumo = leitura atual – leitura anterior. 799 – 785 = 14
- Qual a média de consumo dos últimos seis meses dessa residência? (14 + 10 + 17 + 15 + 22 + 20) : 6 ≈ 16 m³

(Continua)

3) A COSANPA (Companhia de água e saneamento do Pará) calcula a conta do consumo de água das residências, por faixa de consumo conforme a Tabela 1, abaixo.

Com base nessa tabela, vamos determinar uma expressão, para o cálculo da conta de água de uma residência, cujos moradores consumiram 37m^3 no mês de março de 2004, por exemplo.

FAIXA DE CONSUMO (M^3)	VALOR R\$/ M^3	
	ÁGUA	ESGOTO
00-10	1,15	0,69
11-20	1,38	0,83
21-30	1,65	0,99
31-40	2,08	1,25
41-50	2,88	1,73
> 50	3,74	2,24

$$\begin{aligned} & 10.(1,15 + 0,69) + \\ & 10.(1,38 + 0,83) + \\ & 10.(1,65 + 0,99) + \\ & 7.(2,08 + 1,25) = \text{R\$ } 90,21 \end{aligned}$$

Tabela 1 - Fonte: www.cosanpa.pa.gov.br

4) Percebemos que a conta de água depende do consumo, ou que o valor em reais é função do consumo em m^3 . Dessa forma, determine para cada intervalo (faixa de consumo) abaixo, o valor a pagar “y” em função de “x” m^3 consumidos.

FAIXA DE CONSUMO (M^3)	Y = f(x)
[00,10]	$1,84x$
[11,20]	$2,21x - 3,7$
[21,30]	$2,64x - 12,30$
[31,40]	$3,33x - 33$
[41,50]	$4,61x - 84,2$
> 50	$5,98x - 152,7$

Tabela 2

5) Teste as funções obtidas na Tabela 2 nas contas de água dos elementos do seu grupo preenchendo a tabela abaixo;

Aluno	Consumo	Expressão utilizada	Valor encontrado	Valor Real
	18 m^3	$2,21x - 3,7$	R\$ 36,08	R\$ 36,14
	29 m^3	$2,64x - 12,30$	R\$ 64,26	R\$ 64,32
	42 m^3	$4,61x - 84,2$	R\$ 109,42	R\$ 109,48
	53 m^3	$5,98x - 152,7$	R\$ 164,24	R\$ 164,30

Tabela 3

6) Com as funções obtidas na Tabela 2 e o valor do consumo médio dos últimos seis meses de cada residência é possível prever o valor aproximado, da próxima conta. Dessa forma, complete a tabela abaixo:

Aluno	Consumo Médio	Expressão utilizada	Valor da próxima conta

Tabela 4

Nosso objetivo de ensino com a **Atividade 2**, categorizada como problema de Modelagem, foi apresentar, de forma significativa, para o aluno, a Função Polinomial do 1º grau ou Função Afim, ou seja, que ele, a partir da compreensão de que pagamos pela água conforme a quantidade que consumimos, chegasse a conclusão de que ao estabelecermos essa relação, encontramos uma função do tipo $y = ax + b$, onde x representa a quantidade de água consumida em m^3 e y o total a pagar em reais. Assim, o aluno deveria escrever um *modelo/função* para o cálculo do valor a pagar pelo consumo da água e sobre ele realizar inferências e projeções.

Por ocasião da elaboração da **Atividade 2**, após várias tentativas frustradas de se chegar a um *modelo/função* que atendesse às nossas expectativas, pois todos os que encontrávamos apresentavam resultados díspares do real, fizemos uma visita à COSANPA, mais especificamente ao setor responsável pelo cálculo do faturamento, a fim de entendermos como são calculadas as contas referente ao consumo de água (contas de água) da população de Belém e, dessa forma, traçarmos para o aluno um caminho para que ele chegasse ao respectivo *modelo/função*.

Nos foi informado que o cálculo das contas de água das residências de Belém é feita por faixa de consumo conforme a **Tabela 1** e seguindo os passos apresentados na resolução do item 3 da **Atividade 2**.

Para o desenvolvimento da **Atividade 2** em sala, pedimos que os alunos trouxessem contas de água de suas casas, calculadora e se dispusessem em grupos de no máximo quatro alunos. A mesma conta que eles possuíam impresso na ficha foi projetada na parede para facilitar a explicação da professora, sobre as informações contidas em cada campo da referida conta.

Os itens 1 e 2 da **Atividade 2**, foram resolvidos pelos alunos sem dificuldades. O item 3, que revela como se faz o cálculo da conta de água foi resolvido pela professora, que em seguida passou um exercício, através do qual verificou que os alunos tinham compreendido o processo. O item 4, desenvolvido na aula subsequente, no qual deveria ser escrito o *modelo/função* para o cálculo de contas de água, ficou a cargo dos alunos resolverem em companhia de seus pares de equipe sob a orientação da professora.

Embora na aula anterior os alunos tenham demonstrado através da resolução de um exercício ter compreendido o processo de cálculo da conta de água, ao serem exigidos escrever y (total a pagar em reais) em função de x (consumo em m^3), apresentaram o modelo $y = (\text{água} + \text{esgoto}) \cdot x$, a exemplo do exposto na **Figura 1.3**.

$$\begin{array}{l}
 * [0, 10] \quad y = (1,15 + 0,69) \cdot x \\
 \quad \quad \quad y = 1,84 \cdot x \\
 * [1, 20] \quad y = (1,38 + 0,83) \cdot x \\
 \quad \quad \quad y = 2,21 \cdot x \\
 * [2, 30] \quad y = (1,65 + 0,99) \cdot x \\
 \quad \quad \quad y = 2,64 \cdot x \\
 * [3, 40] \quad y = (2,08 + 1,25) \cdot x \\
 \quad \quad \quad y = 3,33 \cdot x \\
 * [4, 50] \quad y = (2,88 + 1,73) \cdot x \\
 \quad \quad \quad y = 4,61 \cdot x \\
 * > 50 \quad y = (3,74 + 2,24) \cdot x \\
 \quad \quad \quad y = 5,98 \cdot x
 \end{array}$$

Figura 1.3 – Modelo de An, And, Ba e Mi

Como todos os grupos apresentaram a mesma resolução, a professora, utilizando o quadro de giz e dialogando com os alunos, interveio no sentido de conduzi-los para a construção do modelo esperado, sobretudo, condizente com o processo realmente utilizado pela COSANPA para o cálculo das contas de água, ou seja, pela realidade.

1. P: - Na aula passada nós fizemos o cálculo de uma conta para $37m^3$, Foi assim que fizemos?
2. P: Vamos ver. Quanto deu a conta para o 37?
3. Al: 90 reais e 21 centavos
4. P: Tá. De acordo com as funções que vocês encontraram, qual deve ser usada para o 37?
5. Al: $3,33x$
6. P: Isso, $y = 3,33x$. Façam e vejam quanto dá.
7. Al.: Fazem em suas máquinas $3,33 \cdot 37$ e respondem: 123,21
8. P: E aí foi esse o valor que obtivemos para o 37 na aula passada?
9. Al: Não
10. P: Não. E então?
11. Al: Tá errada a função.
12. P: Tem alguma certa?
13. Al: a primeira
14. P: A Primeira, certo. Olha quando a gente não sabe montar a função de cara a gente faz com números até perceber onde está variando. Vamos ver para a segunda faixa de consumo. Por exemplo pra $12 m^3$
15. Al: $y = 10(1,15 + 0,69) + 2(1,38 + 0,83)$ (alunos falam e a professora escreve no quadro)
16. P: Certo. E pra $17 m^3$

17. Al: $y = 10(1,15 + 0,69) + 7(1,38 + 0,83)$ (alunos falam e a professora escreve no quadro)
18. P: Certo. E pra 19 m³
19. Al: $y = 10(1,15 + 0,69) + 9(1,38 + 0,83)$ (alunos falam e a professora escreve no quadro)
20. P: Certo. O que está variando em cada expressão (aponta para as expressões no quadro)
21. Al: 2... 7... e... 9
22. P: Como fica se eu consumir x m³?
23. Al: $y = 10(1,15 + 0,69) + x(1,38 + 0,83)$
24. P: x ? Quer dizer então que quando eu consumo 12 aqui é 12, quando eu consumo 17 aqui é 17 e quando eu consumo 19 aqui é 19 (fala apontando ora pro consumo, colocado no quadro ao lado das expressões, ora para o lugar onde está variando na expressão).
25. Al: Não
26. P: Olha só, quando eu consumi 12 aqui (aponta para o lugar das variações) ficou ...
27. Al: 2
28. P: quando consumi 17 ficou
29. Al: 7
30. P: Então o que fica se consumir x ?
31. Al: $(x + 10)$, $(x - 10)$, $(10 - x)$
32. P: Vamos ver qual é. Vamos experimentar o $(x + 10)$. Se aqui for $(x + 10)$ (aponta para o lugar da variação na expressão do cálculo para 12 m³), quanto fica?
33. Al : 22
34. P: 22. É isso que nos temos aqui?
35. Al: Não é $(x - 10)$ (ao mesmo tempo em que respondem a pergunta da professora chegam a conclusão da expressão correta a ser utilizada).
36. P: Então como fica a função para a segunda faixa de consumo?
37. Al: $y = 10(1,15 + 0,69) + (x - 10).(1,38 + 0,83)$
38. P: Vamos testar. Quando x for 12 aqui fica ...
39. Al: 2
40. Quando for 17 fica..
41. Al: 7
42. Então é isso! Vocês já tem a função da segunda faixa de consumo, agora é só fazer as continhas para simplificar um pouco a expressão. E depois utilizando o mesmo raciocínio façam para as funções das outras faixas de consumo.

De acordo com as interações ocorridas na sala de aula e, transcritas acima, podemos perceber que, a intervenção da professora, foi fundamental para que os alunos escrevessem, de forma coerente com a realidade, o total a pagar (y) em função dos metros cúbicos de água consumidos (x), para todas as faixas de consumo.

Ao confrontar o total a pagar para um consumo de 37m³, já calculado numericamente pelo aluno em aula anterior, com o resultado obtido após aplicação da função, levou o aluno a concluir, e, portanto a convencer-se de que a função elaborada não estava “correta”. Em seguida, estabeleceu-se com os alunos uma forma de encontrar a regularidade da função.

Após a intervenção da professora, só mais um grupo precisou ainda de utilizar exemplos numéricos, a exemplo do que foi feito com 12, 17 e 19 m³ na segunda faixa de

consumo, para chegar a conclusão de como ficaria a variação da função em x. Os demais passaram a refazer seus trabalhos de uma forma mais “direta”, conforme a **Figura 2.3**.

$$\begin{aligned}
 [21,30] \quad Y &= 40 \cdot (1,84) + 40 \cdot (2,21) + (x-20) \cdot 2,64 \\
 Y &= 47,40 + 22,40 + 2,64x - 52,80 \\
 Y &= -2,30 + 2,64x \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [31,40] \quad Y &= 40 \cdot (1,84) + 40 \cdot (2,21) + 40 \cdot (2,64) + (x-30) \cdot 3,33 \\
 Y &= 47,40 + 22,40 + 26,40 + 3,33x - 99,9 \\
 Y &= -33 + 3,33x \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [41,50] \quad Y &= 40 \cdot (1,84) + 40 \cdot (2,21) + 40 \cdot (2,64) + 40 \cdot (3,33) + (x-40) \cdot 4,61 \\
 Y &= 47,40 + 22,40 + 26,40 + 33,30 + 4,61x - 174,4 \\
 Y &= -24,20 + 4,61x \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 >50 \quad Y &= 40 \cdot (1,84) + 40 \cdot (2,21) + 40 \cdot (2,64) + 40 \cdot (3,33) + 40 \cdot (4,61) + (x-50) \cdot 5, \\
 Y &= 47,40 + 22,40 + 26,40 + 33,30 + 46,40 + 5,98x - 299,0 \\
 Y &= -452,40 + 5,98x \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Figura 2.3 – Trabalho de An, And, Ba e Mi, refeito.

Prosseguindo no desenvolvimento da **Atividade 2**, os alunos deveriam testar as funções obtidas em suas próprias contas de água (item 5) e realizar previsões para as próximas contas (item 6) como uma forma de conferir utilidade ao *modelo/função* obtido além de validá-lo como modelo capaz de produzir resultados bastante próximos do real.

Entretanto, como os alunos eram moradores de bairros sem tratamento de água servida, suas contas de água não apresentavam a taxa de esgoto. Logo, não poderiam utilizar o modelo encontrado em suas próprias contas. Para suprir tal lacuna, utilizando uma tabela fornecida pela COSANPA, que relaciona m³ consumido com total a pagar, completamos a coluna 2 e 5 da Tabela 3 do item 5 e passamos uma outra Atividade, apresentada a seguir, em que eles deveriam elaborar o *modelo/função* para o cálculo das contas de água de residências sem cobrança de esgoto e, com ele realizar inferências e projeções.

Trabalho 1

A COSANPA calcula a conta do consumo de água das residências, por faixa de consumo conforme a Tabela 1, ao lado.

FAIXA DE CONSUMO (M ³)	VALOR R\$/M ³	
	ÁGUA	ESGOTO
00-10	1,15	0,69
11-20	1,38	0,83
21-30	1,65	0,99
31-40	2,08	1,25
41-50	2,88	1,73
> 50	3,74	2,24

Tabela 1 - Fonte: www.cosanpa.pa.gov.br

Com base nessa tabela, determine para cada intervalo (faixa de consumo) ao lado, o valor a pagar “ y ” em função de “ x “ m³ consumidos, para residências que não sofrem cobrança de esgoto.

FAIXA DE CONSUMO (M ³)	Y = f(x)
[00,10]	
[11,20]	
[21,30]	
[31,40]	
[41,50]	
> 50	

Tabela 2

Utilizando contas de água de duas residências que não paguem pelo uso do esgoto e as funções obtidas na Tabela 2 preencha a tabela abaixo:

Consumidor	Consumo	Expressão utilizada	Valor encontrado	Valor Real

Tabela 3

Com as funções obtidas na Tabela 2 e o valor do consumo médio dos últimos seis meses de cada residência é possível prever o valor aproximado, da próxima conta. Dessa forma, complete a tabela abaixo, para as contas utilizadas na tabela anterior:

Consumidor	Consumo Médio	Expressão utilizada	Valor da próxima conta

Tabela 4

Avaliando a produção dos alunos, conforme a grade de procedimentos e estratégias (Tabela 1.3), verificamos que antes da ajuda da professora, os alunos traduziram incorretamente o problema, entretanto se mostraram capazes de com o *modelo/função* obtido (Figura 1.3) realizar inferências e projeções, o que os coloca no Nível 1.

Mas, se, com base em avaliações realizadas sobre exercícios, já tínhamos evidências de que os alunos haviam compreendido e internalizado o algoritmo que calcula o valor a

pagar pela água consumida, então porque não conseguiram expressá-lo em termos de x e y , mesmo o material (**Atividade**) estando a um nível passível de compreensão e oferecendo caminhos para o estabelecimento de relações não-arbitrárias e substantivas?

Acreditamos que tal fato ocorreu devido a duas situações. Os alunos não atribuem a “ x ” um significado numérico ou um caráter de variável, logo lhes faltava este ponto de ancoragem. Ao mesmo tempo, eles não se mostraram dispostos a desenvolver a Atividade de modo significativo, fazendo a princípio de modo mecânico sem a preocupação de estabelecer relações entre o que eles já haviam feito com números e o que eles precisavam fazer em termos de x e y .

Após a intervenção da professora, dos 26 alunos participantes e enquadrados no Nível 1 (**Tabela 1.3**) apenas 3 alunos permaneceram no mesmo nível, enquanto 23 evoluíram para o Nível 5, dando evidências de uma aprendizagem significativa, já que conseguiram fazer sozinhos, atividades²⁵ que anteriormente precisaram da ajuda dela, ou seja, conseguiram, de forma voluntária, estabelecer relações não-arbitrárias e substantivas.

Dessa forma entendemos que conseguimos apresentar a função do 1º grau ou uma função do tipo $y = ax + b$, de forma que os alunos atribuíssem significados, tanto no contexto da Matemática quanto no contexto da temática abordada, à variável x e y , cumprindo em grande parte com nosso objetivo de ensino proposto na **Atividade 2** e, abrindo caminho para a formalização do modelo/função do 1º grau, objetivo da próxima **Atividade**.

²⁵ constituintes da **Atividade 2** e do *Trabalho 1*

4.3 Atividade 3: Função do 1º Grau

1) Para cada função abaixo, complete as tabelas e trace os gráficos em papel milimetrado:

a) $f(x) = 3x - 6$

x	y= f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) $f(x) = -2x + 14$

x	y= f(x)
-7	
-5	
0	
5	
7	

c) $f(x) = 5x$

x	y= f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	

Atenção



Toda função do tipo $f(x) = ax + b$ é chamada **função polinomial do 1º grau** e seu gráfico é **uma reta**.

2) Utilizando uma folha de papel milimetrado e um único sistema de eixo cartesiano, trace os gráficos das funções obtidas na Tabela 2 da Atividade 2. (Use os números com aproximação de uma casa decimal)

O objetivo da **Atividade 3** foi formalizar a definição de função do 1º grau e traçar o seu gráfico, compreendendo o que corresponde a uma reta. Como os alunos já sabiam traçar gráficos, por conta de outras atividades realizadas com plano cartesiano, por ocasião de seus primeiros contatos com funções, esta **Atividade** foi categorizada como exercício e resolvida com êxito e interesse pelos alunos.

O trabalho foi realizado em dupla e pouca ajuda solicitaram. Quando o faziam é porque estavam com dúvidas em algum “jogo de sinal” ou em como utilizar a escala no papel milimetrado.

O trabalho com plano cartesiano, em que se incluem a localização de pontos, a construção de gráficos, o uso de escalas, um certo conhecimento sobre Domínio e sobre Imagem, o cálculo de valores numéricos ou de elementos da imagem foram alguns dos conteúdos trabalhados nesta atividade que são interessantes habilidades básicas para que o aluno possa continuar construindo seus *modelos/funções*, em especial do 1º grau, e utilizá-los para realizar inferências e projeções, na perspectiva de entender/resolver problemas com referência na realidade.

4.4- Atividade 4: A conta do desperdício



Atitudes simples, que devem fazer parte do cotidiano de qualquer residência, podem ajudar na preservação da água. Fechar a água da torneira enquanto se escova os dentes ou se ensaboa a louça na cozinha, fechar a água do chuveiro enquanto passamos sabão no corpo, lavar o carro com balde ao invés de mangueira ou acumular água da chuva para lavar roupa ou lavar quintais e calçadas, são bons exemplos de que economizar água tratada, própria para beber, não é tão difícil assim.

Para se ter uma idéia do quanto podemos economizar, vamos analisar a situação de uma família composta de quatro pessoas, moradora do bairro do Souza na cidade de Belém, cuja média de consumo dos últimos seis meses foi de 38 m^3 .

1) Utilizando o procedimento para o cálculo da conta de água, que você aprendeu na **Atividade 2**, calcule o valor atual da conta de água dessa residência)?

$$y = 3,33 (38) - 33 = 93,54 \rightarrow \text{R\$ } 93,54$$

2) Expresse o volume total de água utilizada (V_1) em uma higiene bucal em função do tempo (duração da higiene bucal), supondo a torneira com uma vazão de 8 litros/minuto.

$$V_1(t) = 8t$$

3) Faça o mesmo para o banho, supondo o chuveiro com uma vazão de 12 litros/minuto. (chame esse volume de V_2).

$$V_2(t) = 12t$$

4) Deixando-se a torneira fechada, enquanto se escova os dentes, se ensaboa o corpo ou se passa xampu no cabelo, percebe-se que somente $\frac{1}{3}$ do tempo em que as torneiras ficam abertas seria necessário para se fazer uma boa higiene. Com base nessa informação, reescreva as expressões V_1 e V_2 , chamando-as de V_1' e V_2' , respectivamente, de modo que estas representem o volume de água necessário para escovar os dentes e tomar banho.

$$V_1'(t) = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot t = \frac{8}{3} t$$

$$V_2'(t) = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot t = 4t$$

5) Expresse o volume de água desperdiçada na escovação de dentes em função do tempo ($VDE(t)$). Faça o mesmo para o banho ($VDB(t)$).

$$VDE(t) = 8t - \frac{8}{3} t = \frac{16}{3} t$$

$$VDB(t) = 12t - 4t = 8t$$

(Continua)

6) Se cada pessoa da família citada acima tomar banho e escovar dentes três vezes ao dia com duração média de 6 minutos e 3 minutos, respectivamente, determine o total de água, em m^3 , desperdiçada por mês.

Para escovar os dentes: 3 min. x 3 = 9 min x 4 pessoas = 36 minutos

$$\text{VDE (36)} = \frac{16}{3} \times 36 = 192 \text{ litros} = 0,192 \text{ m}^3$$

Para o banho: 6 min x 3 = 18 min x 4 = 72 min

$$\text{VDB(72)} = 8 \times 72 = 576 \text{ litros} = 0,576 \text{ m}^3$$

$$0,192 \text{ m}^3 + 0,576 \text{ m}^3 = 0,768 \text{ m}^3/\text{dia} \times 30 = 23,04 \text{ m}^3/\text{mês} \approx 23 \text{ m}^3$$

7) Se eles decidirem mudar seus hábitos usando água de forma mais racional durante o banho e a escovação de dentes, em quanto poderá ficar a conta de água dessa residência?

$$\text{Consumo atual} = \text{consumo anterior} - \text{desperdício} = 38 \text{ m}^3 - 23 \text{ m}^3 = 15 \text{ m}^3$$

$$y = 2,21 - 3,7 = 29,45 \rightarrow \text{R\$ } 29,45$$

O objetivo da **Atividade 4** foi modelar uma situação problema segundo uma função polinomial do 1º grau, mais especificamente uma função linear, a partir da idéia de proporção, estabelecendo a ponte entre o “novo” e o “velho”. Logo, a **Atividade 4**, se categorizou como um problema de Modelagem. Para ser elaborada, levou-se em conta as práticas cotidianas da maioria das famílias, quanto ao uso da água no banheiro e cálculos de vazão obtido empiricamente em uma experiência caseira.

Foi resolvida em dupla pelos alunos que precisaram de quatro horas aula para encerrá-la.

A primeira questão foi prontamente resolvida pelos alunos o que demonstra que eles atribuíram significado aos *modelos/funções* obtidos para o cálculo da conta de água na **Atividade 2** e, por conseqüência, sabem com eles realizar inferências e projeções.

A segunda e a terceira questão foram resolvidas através de regra de três, sem solicitações de ajuda, logo, estabeleceram a relação entre proporção e função. Entretanto, a fração solicitada na quarta questão, causou uma certa apreensão, fazendo aumentar o número de pedidos de ajuda, mais que isso, os alunos realmente não sabiam o que fazer com a fração.

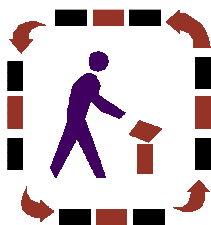
Após várias intervenções e interações, tentando inclusive que os alunos chegassem a uma conclusão pelo sentido do texto, e, já percebendo alguns sinais de desistência por parte deles, resolvemos dizer que “1/3 do tempo” seria o novo tempo, ou seja, enquanto para V_1 e V_2 o tempo era t , para V_1' e V_2' o tempo seria 1/3 do tempo anterior.

Resolvida essa pendência, todos os 28 alunos participantes, conseguiram construir os modelos/função referentes às questões 2, 3, 4 e 5. Entretanto, 10 não conseguiram realizar com sucesso, as inferências e projeções solicitadas nas questões 6 e 7, o que enquadra 65% da turma no *Nível 5* e 35% da turma no *Nível 4* (Tabela 1.3).

Como para realizar essas inferências e projeções os procedimentos esperados dos alunos tratavam-se de realizações de contas, ou de determinações de valores numéricos de funções e de transformações de medidas, entendemos que as principais causas que retiveram os alunos no *Nível 4*, não permitindo que evoluíssem ao *5*, foram: a má organização de alguns desenvolvimentos produzidos fazendo com que eles mesmos se perdessem nas próprias contas; a falta de uma leitura mais cuidadosa dos problemas, o que dificultou a interpretação; a falta de identificação dos resultados obtidos, mesmo tendo recebido a orientação para fazê-lo a cada valor encontrado, e a falta de disposição de alguns alunos em realizarem um trabalho de qualidade.

Antes da aplicação da próxima **Atividade**, utilizamos oito horas aula para realizar exercícios com os alunos, na perspectiva de fixar a definição de função do 1º grau e desenvolver neles habilidades interessantes para a utilização da referida função na resolução de problemas com referência na realidade, e conseqüente desenvolvimento das Atividades subseqüentes. Assim, propusemos exercícios em que os alunos deveriam traçar gráficos, dada a função e vice-versa, e fazer estudo de Domínio, de Imagem e de sinal da função do 1º grau.

4.5 – Atividade 5: O lixo nosso de cada dia e a água.



Milhares de pessoas, todos os dias, em nossa cidade jogam lixo no chão. Aqui mesmo na escola, você já reparou como fica o Salão Cinza ou o Vermelho após o recreio? Basta que um aluno passe para já deixar um rastro de papel de bombom, de chiclete ou pirulito.

De repente, alguém pode pensar que não tem nada demais jogar uma latinha de refrigerante, ou uma garrafinha de água, ou até mesmo um pequeno papel de bombom na rua. O problema é que vem a chuva e a água carrega todo esse lixo das ruas para os canais, e depois para os rios poluindo nossas praias.

Outra grave consequência do lixo jogado no chão é o entupimento dos bueiros, fazendo com que as ruas, depois de uma chuva se transformem em verdadeiros lagos de água contaminada, portadora de doenças como a leptospirose, por exemplo.

O que muita gente não pára e pensa que, na realidade, não existe lixo, pois quase tudo aquilo que descartamos pode ser reaproveitado, gerando economia, pois o que é reciclado é mais barato, dando oportunidade de emprego e renda pra muita gente, além de conservar e preservar o meio ambiente.

Agora vamos imaginar a seguinte situação:

Um grupo de alunos do NPI/EM resolve implantar um projeto de educação ambiental que consiste em coletar e selecionar o lixo produzido pelos alunos durante o recreio, ao mesmo tempo em que pretende conscientizar os colegas para jogar o lixo no lixo, selecionando sempre.

Decidiram que coletariam e selecionariam apenas garrafinhas ou copinhos de plástico e/ou latinhas de refrigerante. Todo o material seria vendido e o lucro revertido para a compra de quatro contêineres – para vidros, papel, plástico e metal, para implantar a coleta seletiva na escola, colaborando dessa forma, com milhares de pessoas que tiram do lixo o seu sustento.

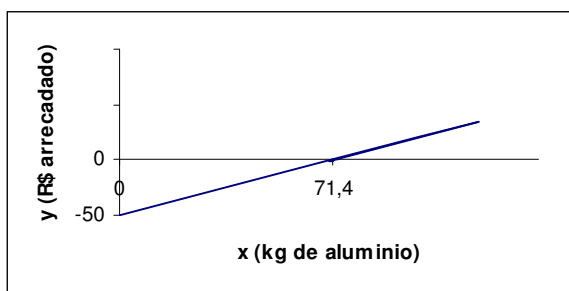


Sabendo que o preço de compra do quilo do alumínio é de R\$ 0,70 e, que os alunos querem reservar R\$ 50,00 para despesas diversas (como transporte, sacos para embalar, etc), determine:

- 1) O total em reais que poderá ser arrecadado em função do total de alumínio (em kg).

$$y = 0,7x - 50$$

- 2) Trace o gráfico da função encontrada.



- 3) Observando o gráfico determine onde a função é positiva, ou seja, para que valores de x , y é positivo. para $x > 71,4$
- 4) O que significa, no contexto do problema, o resultado obtido no item anterior?
Se conseguirem vender mais do que 71,4 kg de alumínio, os alunos terão lucro.
- 5) Onde a função é negativa? Para $x < 71,4$
- 6) O que significa, no contexto do problema, o resultado obtido no item anterior?
Se conseguirem vender menos que 71,4 kg de alumínio, os alunos terão prejuízo.

Essa atividade de ensino teve como objetivo levar o aluno a utilizar o estudo de sinal da função do 1º grau em situações problema do contexto ou dar significado e sentido ao referido assunto, estudado, na ocasião, somente no contexto da Matemática. Como, nesta **Atividade**, o aluno não deveria construir nenhum modelo ‘novo’, nem defrontar-se com situações novas ou diferentes das já apreendidas, apenas deveria fazer uma análise sobre a representação gráfica do modelo/função do 1º grau, em contexto diferente da Matemática, foi categorizada como exercício de Modelagem.

Os dados utilizados em sua elaboração foram coletados de uma reportagem apresentada em um programa de televisão e, com o objetivo de despertar no aluno a idéia de que ele, com pequenos gestos, pode contribuir para a manutenção de um ambiente limpo e saudável, utilizamos fatos que acontecem cotidianamente na Escola.

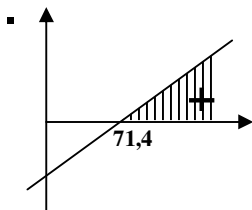
Foi realizada pelos alunos dispostos em duplas que utilizaram duas horas aula. Solicitações de ajuda foram poucas e nada que mereça maior destaque.

Todos escreveram o *modelo/função* requerido na primeira questão bem como construíram o gráfico da segunda questão. Entretanto, tiveram muita dificuldade, não em resolver, mas em responder as questões subseqüentes.

Misturando símbolos da linguagem matemática com a linguagem materna, produziram textos que demandaram tempo e paciência para compreendermos o que eles estavam realmente querendo dizer e, não julgar como errado porque simplesmente fugiam do padrão. Embora tenhamos nos questionado quanto a aceitar, ou não, um texto no qual a simbologia Matemática foi pobre ou mal utilizada, considerando certo ou errado a resposta dada pelo aluno, optamos por fazer a avaliação sobre a compreensão do aluno, pois dessa forma, estaríamos sendo mais coerente com o objetivo da **Atividade**.

A título de ilustração, apresentaremos, de forma fidedigna, algumas respostas dadas às questões da **Atividade 5**, pelos alunos e alunas, que aceitamos como corretas.

A resposta esperada, dentro dos padrões da linguagem matemática, para a 3ª questão seria “ $x > 71,4$ ” (ou seja, o eixo x é referencial para determinar onde $y = f(x)$ é positivo), entretanto, os alunos apresentaram:



A representação gráfica embora bastante significativa não esclarece se o aluno sabe, em termos textuais, para que valores de x a função é positiva, ou se, simplesmente escolheu a referida parte da reta como positiva porque está acima do eixo x .

- A função é positiva quando o $y >$ que a raiz que no caso é 71,4. (entendemos aqui que “ $y >$ que a raiz” representa a parte hachurada à direita no gráfico)

Para a 4ª questão, cuja resposta esperada foi : “se eles venderem mais do que 71,4 kg, terão lucro”, ou algo similar, obtivemos:

- O ponto x significa a quantidade de alumínio em kg. Para se obter lucro é necessário arrecadar mais de 71,4 kg de alumínio.
- Que todos os números positivos maior que 71,5 é lucro.
- Significa que qualquer valor acima da raiz, o saldo é positivo, assim ocorrendo o lucro.

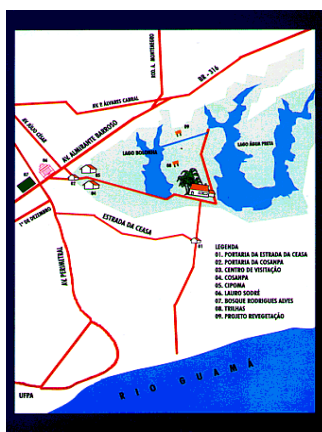
O que traduzimos como, “para qualquer valor de x maior que a raiz terão lucro”. O fato de considerar $y > 0$ para $x > 71,4$, ou seja olhar o sinal de um e dar a resposta com o outro parece confundir os alunos, ou no mínimo ser um obstáculo de difícil transposição.

- Significa que no eixo x a partir de 71,4 é positivo em que é o lucro.
- É o lucro que eles irão obter.

As respostas da 5ª e da 6ª questão seguiram as mesmas estruturas das respostas dadas às questões 3 e 4, respectivamente.

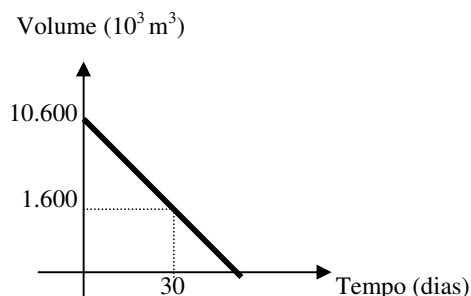
A despeito de toda a dificuldade de os alunos apresentarem respostas coesas, sejam na linguagem materna ou seja na linguagem matemática, entendemos que o objetivo da **Atividade**, de levar os alunos a darem um significado e um sentido ao estudo de sinais de funções polinomiais do 1º foi satisfeito. Evoluíram ainda, em suas habilidades em análise de gráficos.

4.6 – Atividade 6: A “nossa” água



A água que utilizamos em nossas residências aqui em Belém vem principalmente dos Lagos Bolonha e Água Preta localizados no Bairro do Utinga. Esses lagos possuem fontes naturais de abastecimento e têm capacidade para comportar $1.700.000 \text{ m}^3$ e $10.600.000 \text{ m}^3$ de água, respectivamente. Entretanto, como a quantidade que é retirada todos os dias para abastecer a população é muito grande, para que não secassem, houve a necessidade de alimentar os lagos com água do Rio Guamá, pois somente as fontes naturais de água não deram conta de tamanha demanda. (Coordenador Metropolitano da COSANPA – Eng^o José Joaquim Rodrigues em entrevista no dia 16/03/2004)

1) Suponha que o gráfico abaixo representa o consumo de água do Lago Água Preta sem a alimentação do Rio Guamá. Observe-o e determine a lei que o representa($V(t)$) :



$$y = ax + b$$

$$y = ax + 10.600$$

$$1600 = a \cdot 30 + 10.600$$

$$1600 - 10.600 = a \cdot 30$$

$$a = -300$$

2) Utilizando $v(t)$ encontrada, no item anterior, determine em quantos dias o Lago Água Preta poderia secar se não fosse devidamente alimentado.

$$V(t) = 0$$

$$-300t + 10.600 = 0$$

$$t \approx 35 \text{ dias}$$

A **Atividade 6** se propôs a convidar os alunos a escreverem o modelo/fórmula da função polinomial do 1^o grau a partir de um gráfico de uma situação com referência na realidade e, com ele, realizar inferências e projeções. Se levamos em conta que os alunos, em aulas anteriores, já haviam realizado exercícios, dentro do contexto da Matemática, nos quais deveriam escrever o modelo/função a partir de um gráfico dado, poderíamos considerar essa **Atividade** como um exercício de Modelagem. Porém, dado às dificuldades apresentadas pelos

alunos, no decorrer do seu desenvolvimento, a consideramos como um problema de Modelagem

Esta **Atividade** foi elaborada ainda com os dados obtidos de nossa visita à COSANPA e ao site : www.cosanpa.pa.gov.br.

De posse da informação de que, atualmente, 1.200.000 pessoas consomem água tratada e, que, este consumo corresponde a uma média diária de 250 litros, chegamos ao consumo diário da população de Belém que corresponde a 300.000.000 litros ou 300 mil m³.

Se, em 1 (um) dia, a população consome 300 mil m³, então, em 2 dias, consumirá 600 mil m³, logo a taxa de variação, ou o coeficiente angular é 300 mil m³. Tomando o referencial do tempo em dias (x) igual a zero, quando o Lago estava totalmente cheio, temos que o coeficiente linear é 10.600.000 m³. Portanto, temos que, $f(x) = -300x + 10.600$ ou $V(t) = -300t + 10.600$, representa o volume de água em m³, do Lago Água Preta consumido sem abastecimento, em função do tempo em dias.

Dessa feita, após um genuíno trabalho de Modelagem Matemática, que resultou em uma função que, aproximadamente, representa uma problematização sobre a realidade do Lago Água Preta, esboçamos um gráfico, a partir do qual convidamos os alunos a elaborarem o *modelo/função* e com este realizar inferências e projeções.

Para desenvolver a **Atividade 6** os alunos utilizaram duas horas-aula. E, como já tínhamos feito exercícios com eles, sobre o que tal **Atividade** propunha – escrever função a partir do gráfico -, dissemos que deveriam fazê-la sozinhos, sem a ajuda da professora, porém, poderiam consultar cadernos, livros e os colegas.

Dos 25 (vinte e cinco) alunos que realizaram a **Atividade**, somente 4 (quatro) conseguiram chegar ao *Nível 5 (Tabela 1.3)*, ou seja, conseguiram escrever o modelo/função a partir do gráfico e com ele resolver a questão n° 2, sem a ajuda da professora.

Conforme apresentado na resolução da questão de n°1 da **Atividade 6** os alunos deveriam escrever a fórmula da função do 1° grau, substituir pontos que pertencem à função – o que prescinde de uma análise gráfica, resolver o sistema que aparece após a substituição dos pontos, encontrar os valores do **a** (coeficiente angular) e do **b** (coeficiente linear) e, finalmente escrever o modelo/função referente à situação colocada.

Para resolver a questão de nº 2, bastava igualar a zero a *função*, resolver a equação do 1º grau e encontrar o valor de **t** para o qual **V** vale zero, para o quê seria necessário relacionar ‘em quantos dias o Lago Água Preta poderia secar’ com **V(t)** igual a zero. Obviamente, quem não conseguiu resolver a questão de nº1 não conseguiu resolver a questão nº2. Em outras palavras, se o aluno não encontrou o modelo, não conseguirá realizar as inferências e projeções.

Os procedimentos exigidos para a resolução das questões nº1 e nº2 nos pareceram bastante simples de serem executados pelos alunos, principalmente quando estes já tinham feitos exercícios que pudessem servir de suporte à **Atividade 6**. Entretanto, sobre a estatística dessa **Atividade**, temos:

- 04 (quatro) – realizaram corretamente toda a Atividade (*Nível 5*)
- 02 (dois) – realizaram corretamente a questão 1, mas não fizeram a questão 2, porque não relacionaram o que estava se pedindo com $V(t) = 0$ (*Nível 4*)
- 06 (seis) – apenas montaram o sistema, mas não sabiam resolver. O que significa que eles reconheceram o gráfico como uma representação do modelo/função do tipo $y = ax + b$, selecionaram pontos pertencentes à função e os substituíram corretamente. (*Nível 2*)
- 13 (treze) – não conseguiram nem montar o sistema, porque não conseguiram destacar os pontos do gráfico, embora tenham reconhecido que o modelo seria da forma $y = ax + b$. (*Nível 0*)

Concluimos, então, que os alunos não foram capazes de estabelecer relações não-arbitrárias e substantivas entre o que eles já sabiam fazer no contexto da Matemática - escrever uma função a partir do gráfico, com o que eles deveriam fazer em questões com referência na realidade, ou seja, não conseguiram transferir uma aprendizagem de um contexto para outro.

Tal situação nos levou a concordar com Pozo (1998, p.40) quando ressalta que,

A transferência ou generalização dos conhecimentos adquiridos para um novo contexto ou domínio constitui o problema de aprendizagem mais difícil de superar. [...] Muitas vezes não é difícil fazer com que os alunos aprendam a aplicar um determinado procedimento ou conceito no contexto de um problema determinado; o que é realmente difícil é que aprendam a usá-lo de forma relativamente autônoma, transferindo-o espontaneamente para novos problemas. [...] O principal motivo desta dificuldade de transferência é a

diferença existente entre os contextos nos quais o aluno aprende, inicialmente, a resolver um problema e os novos contextos para os quais deve fazer a transferência.

Dessa forma, entendemos que saber resolver um problema no contexto da Matemática, é necessário, mas não o suficiente para o aluno resolver problemas de Modelagem ou utilizar estrategicamente técnicas já conhecidas. Para isso é preciso que ele saiba transitar entre os diferentes contextos, trazendo as informações pertinentes aos problemas a serem resolvidos dentro do contexto da Matemática e, o resultado transformar em informação para o contexto do problema.

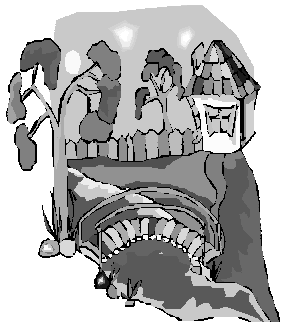
É necessário, portanto, embora reconhecendo o difícil processo de transferência, procurar desenvolver no aluno habilidades que o ajudem a transitar entre os diferentes contextos, contribuindo assim, não só para a utilização da Matemática para a resolução dos problemas propostos pela escola, como também dos propostos pela vida.

Logo, se esta Atividade não foi a que nos trouxe mais satisfação, quanto aos resultados obtidos, certamente, foi a que nos trouxe um significativo aprendizado.

Foi a partir desse momento, que passamos a trabalhar todos os conteúdos, interessantes para cada Atividade, tanto no contexto da Matemática como em outros, ou, em outras palavras, passamos a seguir as orientações de Biembengut e Hein, (2003), no que diz respeito a desenvolver paralelamente o conteúdo matemático necessário à modelagem-**Matematização** e à resolução do problema, bem como apresentar exemplos e exercícios análogos para aprimorar a apreensão dos conceitos.

Referendamos também a extrema importância da participação do professor na condução do processo de aprendizagem, para além de um material potencialmente significativo ou de uma relação deliberada de relacionar o que já se sabe com o que se aprende. A professora, ao eximir-se de interagir com os alunos, pedindo que resolvessem sozinhos a **Atividade**, deixou de oferecer um caminho pelo qual os alunos poderiam transitar entre o contexto que eles já sabiam resolver o problema para outro e, dessa forma estabelecer relações não-arbitrárias e substantivas.

4.7 – Atividade 7: A água que sai de nossas casas



Quanto mais cresce a população, mais água tratada se consome e mais “água suja” é eliminada pelos esgotos indo desembocar nos canais e conseqüentemente nos rios.

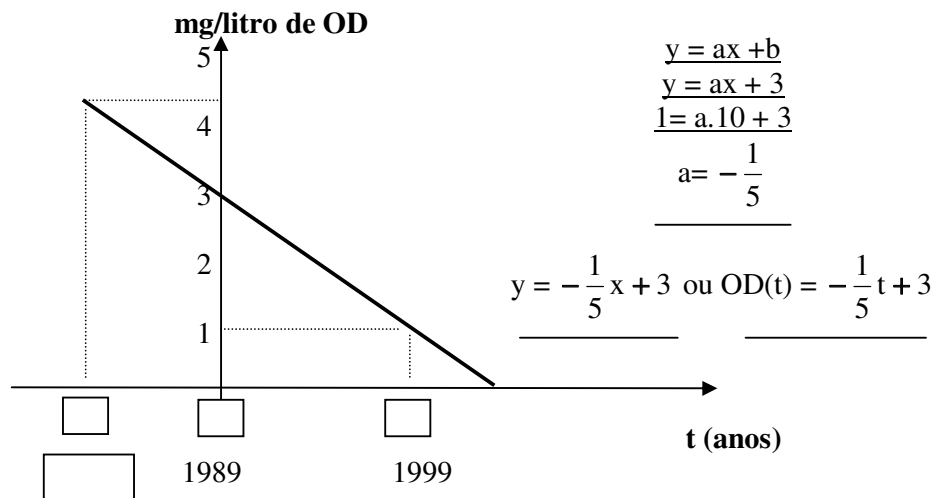
Aqui em Belém, detergentes, sabões, xampus, limpadores, desinfetantes, amaciantes de roupa, pesticidas, óleos, solventes, combustíveis variados e restos em decomposição deixam diariamente nossas casas pelas redes de esgoto indo desembocar, sem nem um tratamento, nos diversos canais e rios que cortam a cidade e fluem naturalmente para a Baía de Guajará.

Essas substâncias alimentam bactérias e microorganismos que se multiplicam com muita rapidez em águas contaminadas consumindo a maior parte ou a totalidade do oxigênio existente, o que destrói as outras formas de vida aquática por asfixia.

O oxigênio é indispensável à vida, aos animais e à maior parte dos microorganismos que vivem na água. Um rio é considerado limpo quando apresenta de 8 a 10 miligramas de oxigênio dissolvido (OD) por litro de água.

Fontes: Palestra Prof.a: Vera Braz em 23/03/2004 e www.discoveryportugues.com/water

O gráfico abaixo representa a média de OD no Rio Tucunduba, durante um determinado tempo em anos:



Complete as lacunas existentes no gráfico e determine:

- em quantos anos a quantidade de OD caiu de 3 para 1 mg/l. 10 anos
- a quantidade de OD (mg/l) em função do tempo (anos). ao lado do gráfico
- se a função é crescente ou decrescente e o que isso significa no contexto. Decrescente. Com o passar do tempo diminui a quantidade de OD
- em que ano a quantidade de O_2 chegaria a zero se nenhuma providência tivesse sido tomada. $0 = -\frac{1}{5}t + 3 \Rightarrow t = 15$ anos. Fazendo $1989 + 15$ temos o ano de 2004.
- o ano em que a quantidade de OD no rio Tucunduba era de 5 mg/l. $x = -10$, ano de 1979
- o domínio e a imagem da função encontrada, e o significado de cada um destes conjuntos no contexto do problema. $D(f) = [-10, 15]$ é tempo de observação. $Im(f) = [0, 5]$ representa a quantidade de oxigênio dissolvido.

Os procedimentos que os alunos deveriam utilizar nesta **Atividade** são semelhantes aos requeridos na anterior. Logo categorizaremos a **Atividade 7**, como exercício de Modelagem, que foi elaborada segundo as informações obtidas na palestra da Prof. Vera Brás sobre os níveis de oxigênio dissolvido no canal do Tucunduba, nos últimos anos.

A partir das conclusões obtidas por ocasião da aplicação da **Atividade 6**, utilizamos quatro horas aula para resolver com os alunos diversos exercícios, em diferenciados contextos, em que dado o gráfico eles deveriam escrever a função e, com ela, mais o gráfico, realizar inferências e projeções.

Devido aos excelentes resultados obtidos pelos alunos na presente **Atividade 7**, podemos inferir que tais exercícios foram eficazes no desenvolvimento de habilidades interessante para o transito deles, mediados pela Matemática, entre diversos contextos. Tivemos, agora, 18 (dezoito) alunos enquadrados no *Nível 5*, 4 (quatro) no *Nível 3* e nem um no *Nível 0*.

Dessa feita, a partir do momento em que, na presente **Atividade**, última a ser trabalhada função do 1º grau, o aluno, no desenvolvimento de seus procedimentos, deu evidências de estabelecer relações não-arbitrárias e substantivas entre o que ele já sabia e o que deveria aprender, podemos dizer que a aprendizagem do referido assunto foi significativa, principalmente no que diz respeito à análise gráfica, competência interessante para a compreensão das informações no mundo atual.

Sobretudo, ressaltamos ainda, a grande importância dos exercícios realizados em sala, pela professora, que fez com que os alunos migrassem para níveis mais elevados de produção e conseqüentemente aprendido, além de promover um genuíno trabalho de recuperação paralela.

4.8- Atividade 8: O Lírio da Esperança



Está comprovada a eficácia do cultivo de lírios aquáticos (*Eichhornia crassipes* – Aguapé) para a limpeza da água. Estas plantas aquáticas flutuantes atuam como purificadores de águas contaminadas por resíduos de esgoto e industriais, com alto percentual de eficiência, e baixo custo se comprovado com outras técnicas. Em águas puras, águas claras ou nos rios de águas negras do Amazonas o Aguapé não cresce nem prolifera, mas cresce com força em águas barrentas ou poluídas. Quanto mais rapidamente ele cresce maior o grau de poluição.

Assim, o Aguapé, é um termômetro de poluição, ao mesmo tempo em que constitui magnífico instrumento de purificação de águas.

Fontes: www.discoveryportugues.com/water
José Lutzenberger em www.fgaia.org.br

Sabendo que o Aguapé é pouco tolerante ao frio, entretanto, no verão e em lagoas poluídas ele consegue crescer 8% ao dia, preencha o quadro abaixo com o objetivo de escrever a área (m^2) de cobertura do Aguapé em função do tempo (dias) em uma lagoa com essas características:

	Tempo	Área Inicial	Área final
1° dia	<u>0</u>	<u>a</u>	<u>a</u>
2° dia	<u>1</u>	<u>a</u>	<u>$a+0,08a = a(1+0,08)=a(1,08)$</u>
3° dia	<u>2</u>	<u>$a(1,08)$</u>	<u>$a(1,08) + 0,08 a(1,08) = a(1,08)(1+0,08) = a(1,08)(1,08) = a(1,08)^2$</u>
4° dia	<u>3</u>	<u>$a(1,08)^2$</u>	<u>$a(1,08)^2 + 0,08 a(1,08)^2 = a(1,08)^2(1+0,08) = a(1,08)(1,08) = a(1,08)^3$</u>
5° dia	<u>4</u>	<u>$a(1,08)^3$</u>	<u>$a(1,08)^3 + 0,08 a(1,08)^3 = a(1,08)^3 (1 + 0,08) = a(1,08)^4$</u>

Resumindo, temos então:

Tempo (dias)	Área final (m^2)
<u>0</u>	<u>$a(1,08)^0 = a$</u>
<u>1</u>	<u>$a(1,08)$</u>
<u>2</u>	<u>$a(1,08)^2$</u>
<u>4</u>	<u>$a(1,08)^4$</u>
<u>7</u>	<u>$a(1,08)^7$</u>
<u>12</u>	<u>$a(1,08)^{12}$</u>
<u>t</u>	<u>$a(1,08)^t$</u>

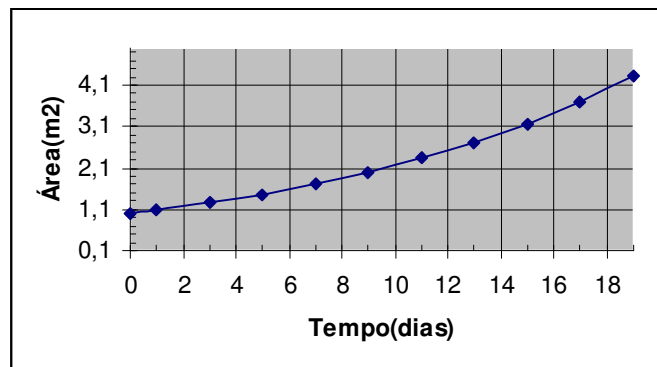
De onde concluímos que a área de cobertura do Aguapé em função do tempo pode ser expressa por $A(t) = a(1,08)^t$

Toda função do tipo $f(x) = a^x$, onde a seja um número real positivo diferente de um é chamada **função exponencial**.

2) Utilizando a função encontrada no item anterior e supondo $a = 1m^2$, complete a tabela abaixo e monte o gráfico da função em papel quadriculado:

Tempo (dias)	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Área (m^2)	1	1,1	1,3	1,5	1,7	2	2,3	2,7	3,2	3,7	4,3

(Continua)



3) A partir do gráfico montado, determine:

- O Domínio e a Imagem: $D = \mathbb{R}^+$ e $Im = [1, +\infty)$
- O valor aproximado da área para $t = 4$ dias, 10 dias, 12 dias: 1,4 ; 2,2; 2,5
- Após quantos dias a área total de cobertura chega à $2,3 \text{ m}^2$ e $4,3 \text{ m}^2$: 11 e 19

O objetivo de ensino desta **Atividade** foi apresentar e introduzir a *função* exponencial, a partir da construção de um modelo do tipo $y = a^x$, elaborado pelo próprio aluno, em comunicação com seus pares e a professora, apoiados em conhecimentos pré-adquiridos.

Levando em conta que, para desenvolver a **Atividade 7**, os alunos confrontaram-se com situações diferentes das já aprendidas ou com *modelos/função* diferentes dos já vistos e, que precisaram da utilização estratégica de técnicas já conhecidas, essa **Atividade** foi classificada como problema de Modelagem.

Para a sua elaboração contamos com o apoio de dois sites www.discoveryportugues.com/water e www.fgaia.org.br. As informações obtidas mais os conhecimentos de progressões geométricas, foram suficientes para problematizarmos uma situação com referência na realidade, capaz de conduzir o aluno à construção de seus conhecimentos sobre funções exponenciais.

Como os alunos da 1ª série de Ensino Médio não têm ainda em seu currículo o assunto de Progressões Geométricas, utilizaram na questão n° 1, os conhecimentos de porcentagem, de fatoração e de potenciação.

Ao chegarem no “4º dia” ou no “tempo 3” da tabela, eles descobriram a regularidade da função, a ponto de, não fazerem mais os cálculos para o dia seguinte colocando direto a resposta. Na tabela seguinte, checamos que eles, de fato, sabiam o que estavam fazendo.

O objetivo da segunda e da terceira questão foi a construção do gráfico da função encontrada, o reconhecimento de uma nova curva, diferente da reta da função anterior e a realização de inferências e projeções a partir do gráfico.

Dos 23 alunos participantes, apenas 2 (dois) não conseguiram chegar ao *modelo/função* esperado: $A(t) = a(1,08)^t$, porque não conseguiram aplicar corretamente os conteúdos necessários ao desenvolvimento da questão, ou não produziram textos com coerência Matemática na primeira tabela, ou ainda, não estavam dispostos. Dessa forma, foi possível enquadrar 13 (treze) alunos no *Nível 5*, 8 (oito) no *Nível 4* e apenas 2 (dois) no *Nível 2*.

De todas as Atividades, foi com esta que obtivemos os melhores resultados tanto quanto aos níveis alcançados de aprendizagem quanto aos níveis de envolvimento dos alunos.

4.9 – Atividade 9: A qualidade da água



A água pode ser saudável ou nociva. Para ser saudável, a água não pode conter substâncias tóxicas, vírus, bactérias, parasitos. Quando não tratada, a água pode se tornar um importante veículo de transmissão de doenças, principalmente as do aparelho intestinal, como a cólera, a amebíase e a disenteria bacilar, além da esquistossomose.

A amebíase é uma doença causada pela *Entamoeba histolytica*, cujos sintomas são diarreia, dor de estômago e, em estágios mais avançados anemia. Adquire-se essa parasitose ao ingerir cistos de entamoeba presentes na água ou em alimentos contaminados com fezes de pessoas

doentes.

Um cisto é uma bolsa rígida que contém em seu interior amebas jovens capazes de infestar um novo hospedeiro. No intestino, a parede do cisto se rompe e liberta as amebas, que invadem as glândulas da parede intestinal, passando a se alimentar de sangue e de células do hospedeiro. Esses locais podem se inflamar e se romper, liberando sangue, muco e milhares de amebas muitas na forma de cistos, que eliminados com as fezes, esses cistos, podem contaminar água e alimentos (como verduras, por exemplo) e desse modo ser transmitidos a outras pessoas.

Para nos prevenirmos da ameba, devemos lavar as mãos com freqüência, utilizar instalações sanitárias adequadas, lavar bem os alimentos, ter cuidado com a água que ingerimos quer seja na alimentação quer seja durante o banho ou escovação dos dentes.

Fonte: Amabis e Martho: Conceitos de Biologia V.2 Ed. Moderna

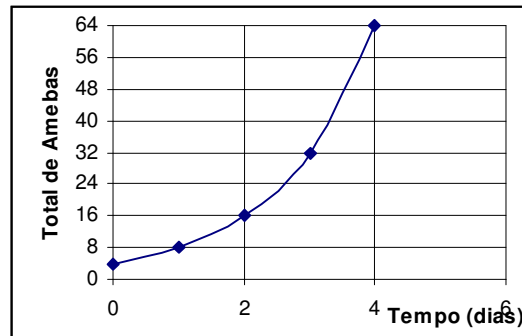
Sabendo que um cisto depois de instalado no intestino libera quatro amebas e a partir deste momento estas se reproduzem a cada vinte minutos por bipartição, determine:

- 1) O total de amebas (M) que se reproduzem em função do tempo (t) em minutos.

$$Q = q_0 (1 + i)^t$$

$$Q = 4 \cdot (1 + 1)^t = 4 \cdot (2)^t = 2^2 \cdot 2^t = 2^{2+t} \quad \text{logo} \quad Q(t) = 2^{2+t}$$

- 2) O gráfico da função obtida utilizando uma tabela.



- 3) Utilizando a função obtida, preencha a tabela abaixo.

$$128 = 2^{t+2} \rightarrow t = 5 \times 20 = 100$$

$$512 = 2^{t+2} \rightarrow t = 7 \times 20 = 140$$

$$2048 = 2^{t+2} \rightarrow t = 9 \times 20 = 180$$

$$8192 = 2^{t+2} \rightarrow t = 11 \times 20 = 220$$

Tempo (minutos)	Total de amebas (M)
100	128
140	512
180	2048
220	8192

Após o encerramento da **Atividade** anterior (n° 8), utilizamos quatro horas aula para resolver com os alunos problemas em que eles deveriam modelar, segundo uma função exponencial, situações que apresentavam uma quantidade inicial de alguma coisa que sofrendo uma taxa de crescimento ou decrescimento, resultava em uma quantidade final.

Assim, utilizando o mesmo processo desenvolvido na **Atividade 8** para a determinação do *modelo/função*, vimos que:

- $P(t) = P_o (1,03)^t$ pode representar o número de pessoas em função do tempo, em um país cuja taxa de crescimento é 3%.
- $V(t) = V_o(0,8)^t$ pode representar o valor de um carro em função do tempo que o desvaloriza segundo uma taxa de 20% ao ano.

Como o processo até então utilizado pelos alunos tornava-se bastante trabalhoso e demorado, a professora propôs que observassem os *modelos/funções* obtidos para encontrarem uma fórmula que os levassem às *funções* desejadas.

Colocou no quadro todos os *modelos/funções* encontrados e num jogo de perguntas e respostas foi, juntamente com os alunos, descostruindo cada uma delas:

$$A(t) = a(1,08)^t = a (1 + 0,08)^t = a (1 + 8\%)^t$$

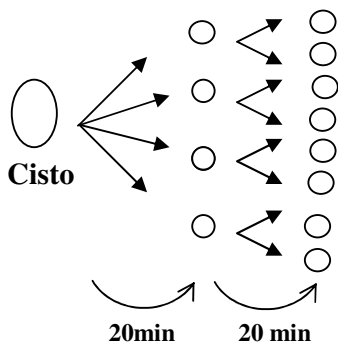
$$P(t) = P_o (1,03)^t = P_o (1 + 0,03)^t = P_o (1 + 3\%)^t$$

$$V(t) = V_o(0,8)^t = V_o (1 - 0,2)^t = V_o (1 - 20\%)^t$$

Concluíram que todas elas seguiam uma mesma forma, na qual sempre tínhamos uma quantidade final, igual a uma quantidade inicial, multiplicada por $(1 \pm \text{taxa})^{\text{tempo}}$. Ou seja, $Q = q_o(1 \pm i)^t$, que nada mais é do que a fórmula do Montante, muito utilizada em Juros Compostos. Após a “descoberta” da fórmula, a professora propôs novos exercícios, a fim de que os alunos escrevessem os *modelos/funções* através do uso da fórmula.

A **Atividade 9** elaborada com o apoio de uma professora de Biologia e o livro de Amabis e Martho, foi mais um desses exercícios, através do qual aproveitamos também para avaliar a aprendizagem do aluno com relação a montagem dos *modelos/funções* exponenciais, o que nos levou a enquadrá-los nos *Níveis* da **Tabela 1.3**.

Na questão 1 os alunos foram tendenciosos em substituir em $Q = q_0(1 \pm i)^t$, a taxa por 20%. Alguns justificaram com a “bipartição” outros com “cada vinte minutos”, citados no problema. Na tentativa de levar os alunos a substituírem corretamente a taxa por 100%, a professora desenhou no quadro e buscou respostas da classe:



P: Reparem, no tempo zero é apenas um cisto. Após 20 minutos, temos 4 amebas, após 20 minutos cada uma delas é ela e mais outra. Isso é 20%? Se após 20 minutos temos ela e outra igual a ela isso é 20%?

Ge: é 50%

P: 50%, se fosse ela e mais metade dela, mas é ela e mais ela, quanto é?

Wil: 100%

P: 100%. Certo.

Após a dissolução desse obstáculo, todos os alunos substituíram em seus trabalhos 20% por 100% e dando prosseguimento ao processo, escreveram o *modelo/função* $Q(t) = 4 \cdot 2^t$, que de forma não espontânea mas incentivados pela professora, transformaram em $Q(t) = 2^{2+t}$. Em seguida, com a função encontrada, resolveram as questões de nº 1 e de nº 2.

Embora todos os alunos tenham escrito de forma correta o *modelo/função* esperado, alguns atrapalharam-se quanto às inferências e às projeções pedidas, pois, perdiam-se em contas ou em propriedades que não sabiam utilizar. Contudo, classificamos 11(onze) alunos no *Nível 5*, 10 (dez) alunos no *Nível 4*, 4(quatro) alunos no *Nível 3* e 2(dois) no *Nível 1* da **Tabela 1.3**.

4-10- Atividade 10 : Água Potável: Direito ou mercadoria?



“Com a globalização, grandes empresas transnacionais estão ampliando sua presença em serviços de saneamento e ganhando o direito de explorar fontes de água, o que, para os ambientalistas, pode comprometer o acesso das populações mais pobres. Estamos falando aqui de um choque de ideologias completamente diferentes, com concepções de mundo antagônicas. De um lado, há os que entendem a água como um produto que se pode manejar, engarrafar, pôr preço e vender. Para eles, a água pode e talvez deva se tornar ‘o petróleo do século 21’.

Do lado oposto, estão os ambientalistas, para quem a água não tem preço nem dono, pois pertence a todos. Eles acreditam no resgate da relação primitiva com a natureza (...) no manejo sustentável e vêem a água como um direito fundamental e inegociável”.

Quadrado, Adriano e Vergara, Rodrigo,
Revista Superinteressante, Ed. Abril: junho/2003

A despeito desse “choque de ideologias”, o consumo de água engarrafada cresce no mundo todo. Em 1998 registrou-se uma venda de 3 bilhões de litros correspondendo a um crescimento anual de 20%.

Com base nessa informação e supondo que a taxa de crescimento manteve-se constante determine:

- 1) o consumo total de água mineral em função do tempo, tendo 1998 como ano inicial.

$$C(t) = 3 \times 10^9 (1 + 0,2)^t \rightarrow C(t) = 3 \times 10^9 (1,2)^t$$

- 2) o total do consumo em 2000, 2002, 2004.

$$C(2) = 3 \times 10^9 \times (1,2)^2 = 4 \text{ bilhões e } 320 \text{ milhões de litros de água}$$

$$C(4) = 3 \times 10^9 \times (1,2)^4 = 6 \text{ bilhões, } 220 \text{ milhões e } 800 \text{ mil litros de água}$$

$$C(6) = 3 \times 10^9 \times (1,2)^6 = 8 \text{ bilhões, } 957 \text{ milhões e } 952 \text{ mil litros de água}$$

- 3) o tempo necessário para que o consumo duplique, triplique, quadruplique (Dado: $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$)

$\frac{2 \times 3 \times 10^9}{2} = \frac{3 \times 10^9 (1,2)^t}{(1,2)^t}$ $\log 2 = t \cdot \log 1,2$ $\log 2 = t(\log 12 - \log 10)$ $\log 2 = t(\log 2^2 \cdot 3 - 1)$ $\log 2 = t(2\log 2 + \log 3 - 1)$ $\log 2 = t(2 \cdot 0,30 + 0,48 - 1)$ $0,30 = t(0,08)$ $t \approx 4 \text{ anos}$	$\frac{3 \times 3 \times 10^9}{3} = \frac{3 \times 10^9 (1,2)^t}{(1,2)^t}$ $\log 3 = t \cdot \log 1,2$ $\log 3 = t(\log 12 - \log 10)$ $\log 3 = t(\log 2^2 \cdot 3 - 1)$ $\log 3 = t(2\log 2 + \log 3 - 1)$ $\log 3 = t(2 \cdot 0,30 + 0,48 - 1)$ $0,48 = t(0,08)$ $t = 6 \text{ anos}$	$\frac{4 \times 3 \times 10^9}{4} = \frac{3 \times 10^9 (1,2)^t}{(1,2)^t}$ $\log 4 = t \cdot \log 1,2$ $\log 2^2 = t(\log 12 - \log 10)$ $2 \cdot \log 2 = t(\log 2^2 \cdot 3 - 1)$ $2 \cdot \log 2 = t(2\log 2 + \log 3 - 1)$ $2 \cdot 0,30 = t(2 \cdot 0,30 + 0,48 - 1)$ $2 \cdot 0,30 = t(0,08)$ $t = 7 \text{ anos e meio}$
--	--	---

A **Atividade 10**, última para o trabalho com função exponencial, foi elaborada nos moldes da anterior a partir de uma reportagem da Revista Superinteressante.

Antes da aplicação desta **Atividade**, foram feitos vários exercícios em sala que tiveram como objetivo a consolidação de habilidades básicas em resolução de equações exponenciais, cálculo de logaritmos com utilização de propriedades e aplicações em resolução de problemas. Logo, esta **Atividade** não representa uma situação diferente das já encontradas pelos alunos, e, dessa forma, foi categorizada como exercício de Modelagem, com um objetivo especial para avaliar a utilização por parte dos alunos dos logaritmos para a resolução de equações exponenciais de bases diferentes.

A **Atividade 10** foi resolvida pelos alunos dispostos em duplas, em quatro horas aula. As orientações dadas foram gerais, o que significa dizer que os alunos a resolveram de forma bastante autônoma.

Dos 27 alunos que participaram da **Atividade**, 100% encontraram o *modelo/função* esperado na questão 1, ou seja, aplicaram corretamente a fórmula $Q = q_0(1 \pm i)^t$ e, através dela realizaram as inferências e projeções solicitadas na questão 2.

Dois alunos não fizeram a questão de nº3 porque faltaram em uma das aulas e, 4 (quatro), a fizeram com erros que podem, inclusive ser classificados como “falta de atenção”. Algo do tipo, esquecer/trocar sinais ou fazer $\log \frac{12}{10} = \log 2^2 \cdot 3$. Entretanto, podemos julgar que esses alunos, exceto os dois que não fizeram, conferem utilidade aos logaritmos enquanto instrumental para a resolução de equações exponenciais com bases diferentes, porque o aplicaram.

Além disso, considerando que já tínhamos exercitado as propriedades dos logaritmos, em contexto Matemático, podemos inferir que fizeram a transferência de aprendizagem ou realizaram relações não- arbitrárias e substantivas entre as propriedades dos logaritmos e suas aplicações. Logo, como esse foi nosso objetivo de avaliação com a presente Atividade, enquadramos, praticamente 100% da turma, no **Nível 5- Tabela 1-3**.

Após a realização da **Atividade 10**, quando faltava apenas um mês para o término do 4º bimestre, ainda aplicamos mais quatro **Atividades** que objetivaram dar significado e sentido aos modelos funções polinomiais do 2º grau, através de exercícios de Modelagem, nos termos colocados no presente trabalho.

Entretanto, levando em conta as limitações do presente trabalho, o fato de que, faltando pouco tempo para o término das aulas precisamos fazer algumas alterações no modo como aplicávamos as **Atividades**, principalmente com relação ao aspecto “tempo dado ao aluno” e que, nossas observações não apontaram nem um dado novo e portanto, estaríamos sendo repetitivos se analisássemos essas **Atividades** (Anexo C), encerraremos a avaliação da perspectiva de Modelagem organizada e conduzida neste ponto.

5- Resultados

A produção dos alunos medida conforme a **Tabela 1.3** gerou o quadro a seguir, no qual podemos visualizar melhor os níveis alcançados pelos alunos, de um modo geral.

Atividade	Categorização	Nível	Porcentagem
1	Exercício	-	-
2	Problema	5	88%
		4	12%
3	Exercício	-	-
4	Problema	5	65%
		4	35%
5	Exercício	-	-
6	Problema	5	16%
		4	8%
		2	24%
		0	52%
7	Exercício Avaliativo	5	82%
		4	18%
8	Problema	5	56%
		4	35%
		2	9%
9	Problema	5	40%
		4	36%
		3	17%
		2	7%
10	Exercício	-	-

Tabela 2.3 – Níveis alcançados pela turma

Conforme previsto, anteriormente, em nossas categorias de análise, somente as **Atividades** categorizadas como Problema foram avaliadas quanto à produção (ou não) de aprendizagem significativa, pois, somente essas exigiam transformação do conhecimento

adquirido, sendo assim, um *locus* ideal para buscar-se evidências de aprendizagem significativa, conforme a teoria ausubeliana.

Os exercícios, por não se tratarem de transformação de conhecimento, mas de aplicação, não foram avaliados quanto a evidências de aprendizagem significativa. Abrimos uma exceção para a **Atividade 7**, que, elaborada nos moldes da anterior, serviu para verificar se os alunos haviam superado as dificuldades apresentadas na Atividade 6, na qual tivemos mais da metade da turma enquadrada no *Nível 0*, elevando dessa forma, seus respectivos níveis de aprendizagem.

A **Tabela 1**, em todos os Problemas de Modelagem, mostra maior incidência de alunos enquadrados no *Nível 5*, o que significa dizer que, em sua maioria, eles conseguiram efetivar a tradução para a linguagem simbólica da Matemática e portanto, construíram o *modelo/função* esperado, e, com esse, realizaram inferências e projeções.

Em menor frequência que o *Nível 5* tivemos alunos enquadrados no *Nível 4*, porque apesar de construírem o *modelo/função* não conseguiram realizar com eles inferências e projeções. Uns por apresentarem defasagens de conteúdos próprios de Ensino Fundamental, o que os impedia de resolver uma equação, um sistema ou uma expressão numérica, outros porque conseguiam trazer o problema para o contexto da Matemática, através da tradução, mas, não conseguiam voltar os resultados obtidos para o contexto.

Levando em conta tais critérios, podemos inferir que, de um modo geral, esses alunos desenvolveram habilidades e capacidades em compreender os princípios matemáticos do problema, utilizar/transformar conhecimentos pré-adquiridos, identificar variáveis importantes no problema, transitar entre os diversos contextos propostos, inclusive o da Matemática, calcular valor numérico e raízes, identificar os conjuntos Domínio e Imagens da funções, analisar e interpretar gráficos.

Dessa forma, acreditamos poder dizer que esses alunos aprenderam de forma significativa a utilizar as funções como ferramenta para a compreensão de problemas com referência na realidade e, que, a Modelagem, nos termos aqui colocado, favoreceu essa aprendizagem.

Considerações Finais

Interessados em estratégias de ensino que tornassem as aulas de Matemática mais atraentes e agradáveis, tanto para nós quanto para os alunos, que levassem os alunos a darem sentido e alguma utilidade ao conteúdo escolar, bem como aumentassem seus interesses e responsabilidades por suas próprias aprendizagens e, que contribuíssem para habilitá-los a, de forma autônoma, construir seus próprios conhecimentos a partir de seus próprios recursos, ou do grupo no qual estão inseridos, nos aproximamos da Modelagem Matemática.

Entretanto, contrapondo nossos primeiros estudos em Modelagem Matemática com nossas vivências de sala de aula, ao mesmo tempo em que concordávamos com todas as habilidades e competências que o ensino de Matemática através da Modelagem poderia desenvolver no aluno, além de tornar o curso mais interessante, também tivemos que concordar que sua utilização em cursos regulares com todas as suas variáveis condicionantes, como conteúdo programático a cumprir em predeterminado e, as vezes restrito tempo, pode ser extremamente complicado, ou até mesmo impossível, conforme a realidade educacional, na qual o professor esteja inserido.

Assim, entre a sedução das vantagens para a aprendizagem e o reconhecimento das dificuldades de ensino que pudessem se afigurar e, estando inseridos em uma realidade, embora não livre das variáveis condicionantes comuns, mas propícia a experimentação, nos propomos a descobrir caminhos para a utilização e implementação da Modelagem Matemática no ensino regular, em particular no Nível Médio, além de avaliá-la quanto à produção de aprendizagens significativas.

Levando em conta as variáveis do Ensino Médio, especialmente da realidade na qual estamos inseridos, mais os obstáculos já detectados por aqueles que nos antecederam na pesquisa - principalmente os que dizem respeito ao tempo e ao conteúdo programático a cumprir - e mais as nossas limitações enquanto principiantes no ensino através de Modelagem Matemática, concebemos uma forma possível de materializar o referido método em nossas salas de aula, gerando uma perspectiva de Modelagem, sobre a qual passaremos a fazer nossas considerações finais.

- Sobre a Modelagem Matemática como método de ensino.

A partir do momento que compreendemos que a utilização da Modelagem Matemática em cursos regulares, com conteúdos e tempo predefinidos, precisa sofrer alguma alterações/adaptações, passamos a ver os obstáculos e as dificuldades à sua implementação como variáveis condicionantes, que estão relacionadas com a estrutura organizacional da escola, as limitações e os interesses do professor e dos alunos.

Assim, unindo os pressupostos da Modelagem às variáveis condicionantes de cada ambiente de ensino-aprendizagem, podemos, de várias formas, conceber e materializar a referida estratégia de ensino-aprendizagem.

Acreditamos que a original Modelagem Matemática, método de ensino-aprendizagem, que parte de uma situação–tema, escolhida pelos alunos e/ou pelos professores e, sobre os quais se desenvolvem questões que tentarão ser respondidas mediante o uso do ferramental matemático, para ser **fielmente** e **continuamente** aplicada em nossas salas de aula para o ensino de Matemática, precisa de um projeto pedagógico que a contemple. Caso contrário, seu uso, ficará restrito a experiências isoladas.

Enquanto estivermos “presos” a conteúdos a cumprir em predeterminado tempo, enquanto os currículos de nossas escolas estiverem com as disciplinas fragmentadas, onde cada professor que as representa fala de um conhecimento de forma isolada, o máximo que conseguiremos é utilizar a Modelagem de forma esporádica e ainda com adaptações.

A Modelagem Matemática prescinde de intra - inter e multi-disciplinaridade, além da liberdade de se trabalhar com vários e incertos (no sentido de não previsto em planejamentos anuais) conteúdos, matemáticos ou não, em um tempo determinado pelo nível cognitivo do modelador, no caso, o aluno.

Entretanto, sabemos que esse cenário instalado nas escolas está longe de ser modificado, principalmente nas escolas de nível médio, no qual ainda temos os processos seletivos de ingresso ao Ensino Superior a nos determinar procedimentos. Logo, referendamos as adaptações ao processo original como uma alternativa de se utilizar a Modelagem Matemática nas salas de aula para o ensino e a aprendizagem significativa de conteúdos.

E, dessa forma concordamos que a

Modelagem não pode ser uma proposta devotada a um pequeno grupo de professores e a alguns ambientes mais abertos às inovações. Sobretudo, devemos assumir uma perspectiva de possibilidades reais, considerando o “lugar” onde está a hegemonia de nossas escolas e professores. Considerar a Modelagem através de configurações diferentes representa uma avanço em sua viabilidade [e nas formas de se ensinar e se aprender Matemática]. (BARBOSA, 2000, p.59).

Todavia, sugerimos que, na medida do possível ou conforme a sua disponibilidade, o professor, dentro do processo de Modelagem adaptado, transfira progressivamente mais tarefas para os alunos, assumindo uma postura cada vez mais dominante de mediador do conhecimento e, contribuindo para ensinar o aluno a aprender, o que certamente lhe será útil em qualquer fase de sua formação.

- Sobre o conteúdo matemático

Mesmo tendo nos esforçado para colocar o aluno como o centro do processo de ensino aprendizagem no momento do planejamento e da elaboração das **Atividades de Modelagem**, foi o conteúdo a cumprir, exigido pela realidade na qual estamos inseridos, que falou mais alto e, todas as nossas intenções de ensino visaram o aprendizado desse conteúdo.

Desde o planejamento, nossa meta foi não somente cumprir o conteúdo, mas também uma aprendizagem significativa deste, o que prescindiu de um tempo maior para o desenvolvimento das **Atividades**. Um tempo para que os alunos conseguissem estabelecer as relações substantivas e não-arbitrárias entre o que já sabia e o que precisava aprender.

Trabalhar com Modelagem, ou com qualquer outro método de ensino que se proponha a fazer do aluno o centro do processo de ensino-aprendizagem, demanda tempo em horas aula, e, levando em consideração que em uma escola o tempo determinado a cada disciplina é fechado/inflexível, precisamos estabelecer algumas metas mínimas dando maior/menor ênfase a determinados conteúdos, conforme seu nível de importância na utilização das *funções* (afim, quadrática e exponencial) como ferramenta para a compreensão da realidade, para que chegássemos ao final do ano com o conteúdo cumprido. Ou seja, subordinamos o conteúdo ao desenvolvimento de capacidades conforme nos recomenda Pozo (2003, p.49):

Não se trata de renunciar a ensinar esses conteúdos, mas de compreender que sua seleção, sua organização e o nível de exigência com o qual são propostos devem estar subordinados a outras metas mais gerais. A entropia, a mudança climática, as **funções matemáticas** ou a morfossintaxe serão dominadas e compreendidas mais facilmente à medida que seu ensino estiver

dirigido ao desenvolvimento de capacidades que tornam possível seu uso, à medida que esses conteúdos específicos forem trabalhados para desenvolver capacidades e não como um fim em si mesmos. [**grifos nossos**]

Logo, estabelecer os objetivos de ensino e reestruturar o currículo de forma a dar conta desses, são ações necessárias ao trabalho com Modelagem Matemática que traz implícita em seus procedimentos o fomento ao desenvolvimento de capacidades discente, dentre as quais destacamos a de aprender a aprender.

- Sobre o aluno e a Modelagem

Um dos obstáculos apontados por professores para a utilização da Modelagem Matemática em cursos regulares, citado em Bassanezi (2002, p.37), e que mereceu a nossa atenção, diz respeito ao fato de o aluno estar acostumado ao ensino tradicional, em especial, o da Matemática, e, com o uso da Modelagem, ele pode perder-se ou tornar-se apático, além do tema ser interessante para alguns e desinteressante para outros, dado a heterogeneidade da turma.

De fato, os alunos, principalmente os do Ensino Médio, com um mínimo de 9 (nove) anos de escolaridade regular, apresentam algumas atitudes comuns, que acreditamos serem resultados do ensino tradicional, com qual o aluno demonstra uma certa identificação, gerando uma resistência a qualquer outro tipo de método.

O ensino tradicional da Matemática, embora tenha um certo poder de exclusão, é mais cômodo para o aluno. É exigido deste apenas a memória para gravar todos os procedimentos realizados na sala de aula e saber reproduzi-los nas provas e testes, em que avaliam-se os resultados obtidos e não o processo de aprendizagem, tendo esta ocorrida ou não.

O aluno não tem oportunidade para refazer suas tarefas ou estabelecer novas e mais coerentes relações com o objeto de aprendizagem. Os conteúdos são normalmente apresentados desconectados dos demais em aulas organizadas segundo a seqüência: definição-exemplos-exercícios-aplicações.

No ensino por Modelagem exigem-se outras atitudes do aluno em sala de aula. Ele passa a ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, pois é responsável pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo. Em contrapartida, conta com uma certa liberdade para resolver os problemas que lhe são propostos, a ênfase na avaliação é colocada no processo de

obtenção do modelo, que no mínimo pode estar incoerente ou inconsistente, levando-se em conta a realidade que representa, mas que, o próprio aluno, dentro do processo de Modelagem, tem condições de testar e otimizar, refazendo seu trabalho, elevando seu nível de aprendizagem e conseqüente nota.

O que colaborou, no nosso caso, para que os alunos, em sua maioria, fossem enquadrados nos *Níveis 4 e 5* da **Tabela 1.3**, por ocasião da avaliação, quanto à produção de aprendizagens significativas.

Bassanezi (2002, p.38) argumenta que, na Modelagem, “mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado”, pois é nesse momento que o aluno tem oportunidade de estabelecer relações não arbitrárias e substantivas entre o que já sabe e o que precisa aprender, e esforçar-se para tal, desenvolvendo assim, capacidades.

Dessa forma, por todas as vantagens oferecidas ao aluno no trabalho com Modelagem, não se torna difícil “convencê-lo” a participar, mesmo esse necessitando de um maior empenho deles em sala de aula.

No nosso caso, em especial, não existiu um convite formal. Não dissemos aos nossos alunos que iríamos trabalhar com Modelagem Matemática, simplesmente fomos trabalhando conforme os critérios já elencados aqui, procurando vencer a resistência dos alunos e, aos poucos, eles foram se deixando seduzir por uma forma de ensino que “hós da 101[identificação da turma] nunca tínhamos trabalhado” (Mu).

Em uma pesquisa feita com os alunos participantes da pesquisa sobre a satisfação pessoal quanto ao método de ensino utilizado, só não registramos 100% de aceitação porque 01 (um) aluno manifestou-se contrário.

tá muito devagar ... tipo, eu acho que cabe a nós, alunos, nos adequarmos ao método de ensino do professor, e não o professor a nossa ‘lentidão’. A gente passa 2 horas de aula só em uma atividade” (An).

Realmente, o trabalho fluía devagar, porque seguia o ritmo da maioria dos alunos, que talvez, para esse aluno, pudesse ser um pouco mais acelerado. Entretanto, ficamos satisfeitos com os níveis de aprendizagem alcançados pelos alunos, quando tiveram oportunidade de

construir seu conhecimento a partir de seu próprio recurso, e sobre ele realizar abstrações e generalizações.

O tempo utilizado se revelou extremamente útil e produtivo, porque o aluno desenvolveu capacidades, tais como, leitura e interpretação de gráficos, tradução de um problema para a linguagem simbólica da matemática, criticar as diferentes soluções obtidas para um problema e procurar de forma autônoma resolver os problemas propostos.

E as capacidades são mais duradouras e transferíveis do que os conteúdos concretos dos quais são adquiridas. Quem adquiriu alguma das capacidades descritas dificilmente esquece; em troca, pode esquecer com muita facilidade, todos nós o fazemos, os dados e, inclusive, as interpretações em que se apóiam. (POZO, 2003, p.48)

Ao mesmo tempo, o trabalho por Modelagem transformou a turma apática e desinteressada em participativa e questionadora. Ao “convidarmos” os alunos a resolverem problemas com referências na realidade a partir de conhecimentos já adquiridos por eles ou pelo grupo, com vistas a formação de outros, víamos a turma toda se mobilizar para o desenvolvimento das **Atividades**. Para evitar que o aluno se perdesse e até para organizar as suas “descobertas” fazíamos constantemente esquemas, resumos e exercícios de fixação.

Entretanto, por vezes, os hábitos oriundos de outro sistema de ensino, se afiguravam. Achavam alguns alunos que, sem um apontamento feito pelo professor, algo do tipo, título-definição-exemplo- exercício não estavam aprendendo ou no mínimo, a professora não estava ensinando, como podemos inferir a partir do seguinte relato:

- Depois de faltar algumas aulas, uma aluna me procura, dizendo não estar entendendo nada e estar completamente perdida no assunto. Levando em conta que, as **Atividades de Modelagem** foram elaboradas de forma a, uma servir de “âncoradouro” a outra, era bastante compreensível e pertinente a situação exposta pela aluna. Disse a ela então que pedisse ao estagiário, que nos acompanhava na pesquisa, algumas orientações em horário extra-classe. Argüida por ele sobre o que havia perdido ou em que assunto estava em dúvida, respondeu que não sabia porque a professora não dava matéria, no caderno dos outros não tinha quase nada, ela só passa atividade.

Por outro lado, a partir de outros depoimentos, e de nossas observações podemos inferir que “o procedimento de uma modelagem pode ser muito mais eficiente do que simplesmente trabalhar com o método tradicional” (BASSANEZI e BIEMBENGUT, 1997) porque:

i) o aluno consegue compreender os conceitos e entes matemáticos e por conseqüência, atribuir alguma utilidade à Matemática, ou algum sentido para o que estudam na escola.

Antes achava a Matemática difícil, sem utilidade e não conseguia acompanhar (Ka)

A vantagem é que a gente consegue relacionar a Matemática com o dia-a-dia (An)

Eu gostei muito das aulas de Matemática, porque consegui entender os porques (*sic*) que essa matéria tem. (Wi)

Antes Matemática para mim era só teoria e conceito e servia somente para fazer contas. Agora acho que ela serve para entender os problemas da sociedade (An).

ii) motiva o aluno para aprender e estudar Matemática, além de favorecer uma maior participação dos alunos em sala.

Antes não me esforçava nas aulas de Matemática (Za)

O método utilizado foi bem interessante, até motivou quem não queria nada.(Ge).

Vou lhe contar o quanto eu passei a gostar de Matemática. Na minha sala de aula, a professora de matemática ensina a gente brincando, o método que ela utiliza é bem legal, ou seja, interessante,dá vontade de aprender participar. (Za)

Esse ano foi a primeira vez que eu realmente gostei de estudar matemática, achei muito legal essa forma como nos ensinaram. (Su)

O método utilizado me ajudou a gostar mais de matemática (Jé).

iii) facilita a aprendizagem significativa porque são instigados a resolver problemas que lhe são concretos, através de conceitos e de procedimentos que já lhes são conhecidos, no sentido de construir outros, o que contribui para o estabelecimento de relações não arbitrárias e substantivas.

Ajudou a gente a entender melhor a ter vontade de aprender. (Lo)

As aulas de Matemática durante o ano letivo de 2004, foram boas e proveitosas, devido a esta nova metodologia que fez com que eu aprendesse de uma forma simples. (Su)

Eu no começo estava sem vontade mas depois que consegui resolver os problemas que foram passados em sala de aula, me senti, feliz, contente, confiante (Wi).

iv) favorece as relações inter-pessoais, aluno-professor e aluno-aluno, contribuindo para a manutenção de ambientes de ensino-aprendizagem atraentes e agradáveis.

Minhas aulas de Matemática foram ótimas, aprendi muitas coisas com a professora os estagiários até com meus colegas, aprendi a gostar de matemática. (Ba)

Não só pelo aspecto motivacional o método se revelou eficiente, mas também com relação às aprendizagens significativas que favoreceu. O trabalho com Modelagem parece favorecer as relações substantivas e não arbitrárias entre o que o aluno já sabe e o que precisa aprender, conforme podemos observar na transcrição colocada a seguir, resultado de um diálogo ocorrido entre a professora e uma aluna, por ocasião do término do estudo da função linear e início do estudo da função exponencial, segundo os mesmos critérios.

Ka: Professora, agora vai ser tudo mais fácil

Prof.: Por que?

Ka: Porque vai ser só repetir tudo o que fizemos para a outra função. Agora a gente já sabe dessas coisas de domínio, imagem e gráfico.

Prof.: é verdade.

Embora, não possamos dizer muita coisa com relação à mudança de atitudes dos alunos, com relação às questões ambientais relacionadas com a água, pois não temos informação sobre como agiam ao retornarem para suas casas, podemos inferir que nossa abordagem parece ter influenciado de alguma maneira as opiniões dos alunos sobre a água, o que pode ser considerado como um indicativo para mudanças de atitudes.

No início do ano, ao serem sondados com um questionário sobre a forma como percebiam a água e que importância a mesma tinha na vida dos seres vivos (Anexo B), os alunos, apesar de demonstrarem uma boa conscientização com relação aos problemas que o Planeta enfrenta com relação a água, apenas 04 (quatro) deles citaram o não desperdício como forma de prevenção, embora demonstrassem não saber como fazê-lo.

No final do ano, distribuímos a cada um deles um pequeno quadro que deveriam preencher com o que pensavam antes, no começo do ano, e o que pensavam naquele outro momento, final do ano, com relação à água, onde, em maior incidência, surgiram comentários do tipo:

Aluno	Antes	Depois
Wi	Sabia que não podia desperdiçar	Agora sei que a gente gasta muita água
Raw	Não ligava para economizá-la	Aprendi a economizá-la
Iv	Não economizava	Agora eu cuido melhor para preservar um pouco que temos.
Za	Achava que servia só pra tomar banho e beber	Descobri que serve pra outras coisas, o lazer por exemplo.
An	Importante para matar a sede e fazer higiene	É vital para toda a vida no planeta
Mu	Não me interessava	Temos que saber usar pois é um bem da humanidade
Ra	Algo comum	Soube da sua importância
Ka	Desperdiçar	Economizar
Jé	Não dava muita importância	Bem precioso e não é inesgotável
Mi	Pensava que não acabaria tão cedo	Tem que preservar

De todos os argumentos favoráveis para a utilização da Modelagem Matemática, podemos classificar como os mais visíveis, a motivação para aprender, bem como a facilitação do aprendizado e a melhora nos níveis de participação, contribuindo dessa forma, para a diminuição da passividade do aluno perante a Matemática e sua própria aprendizagem, além da implantação e da manutenção de um atraente e agradável ambiente de ensino e aprendizagem.

- Sobre os professores e a Modelagem

A condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas mais significativas. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 29)

Foi o desejo de modificar nossa prática e melhor contribuir para a formação dos alunos, conforme às demandas atuais da sociedade, que nos moveu até aqui. E agora, olhando para os resultados obtidos, referendamos nossas crenças de que a Modelagem Matemática pode ser uma alternativa.

Como re-significamos a Modelagem Matemática ou adaptamos o método segundo as variáveis condicionantes da realidade na qual estamos inseridos, e que já foram apontados como obstáculos à implantação da Modelagem, em pesquisas anteriores, tais como tempo e

conteúdo programático a cumprir, ou falta de preparo dos alunos para a referida abordagem, estes não se afiguraram para nós como obstáculos.

Entretanto, outros obstáculos evidenciaram-se, na forma de dificuldades, por ocasião da aplicação do método em sala de aula, o que está intimamente relacionado com nossa forma habitual de ensinar ou com o fato de sermos iniciante nesse tipo de abordagem pedagógica.

Oportunizar a construção de conhecimento, não faz parte da maioria das aulas de matemática, nas quais tradicionalmente, os professores esforçam-se em transmitir conhecimentos, predeterminados nos planejamentos escolares. E, dessa feita, criar tal oportunidade.

É muito fácil e cômodo chegar a frente de uma turma e dali discursar sobre um conhecimento, diante de alunos quietos a copiar nos dando a ilusão de que estão entendendo/aprendendo tudo, e assim, saímos de uma sala e entramos na outra com um sentimento de dever cumprido. Difícil é, ser hábil para oferecer ao aluno condições para que ele próprio construa e discursar sobre o conhecimento, e ser paciente para esperar o tempo que for necessário para que isso ocorra.

Embora tenhamos elaborado uma forma de nos posicionar em sala de aula, por ocasião da aplicação das Atividades de Modelagem (Capítulo II, pág. 68), a partir da compreensão de que, é o aluno, num esforço individual e deliberado, quem constrói seu próprio conhecimento e que o professor apenas intermedia a relação entre o aluno e o conhecimento, em muitos momentos, não sabíamos o que fazer e, em outros, nos arrependíamos do que tínhamos feito ou, no mínimo, achávamos que estávamos fazendo tudo errado.

Por outro lado, a reflexão sobre as práticas, quase que invariavelmente, produziam algum conhecimento sobre a forma como os alunos aprendem ou não, que dúvidas tem ou que interpretações fazem. Isso nos favorecia uma nova ação na perspectiva de otimizar a aplicação das **Atividades**.

Acreditamos que tais circunstâncias sejam, sobretudo, inerentes à pesquisa sobre a ação, e que não devem servir de desmotivação para a utilização da Modelagem, pois, entendemos que nesse caso, em especial, “Habilidade e segurança só se ganham com experiência” (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.29).

Entre o reconhecimento das vantagens que a Modelagem Matemática pode trazer para o ensino-aprendizagem e a sua aplicação, existe um caminho permeado de estudos e de pesquisas a ser percorrido. Daí vem que, a adoção da Modelagem, como método de ensino da Matemática demanda do professor disposição para adquirir conhecimentos interdisciplinares e multidisciplinares, e um espírito inovador, aumentando sua iniciativa para a pesquisa e de flexibilidade perante os obstáculos (BARBOSA, 1999).

Referências

ANTUNES, C. Vygotsky, quem diria?! Em minha sala de aula. 2. ed. f. 12. In: _____ **Na sala de aula**. Petrópolis- RJ: Vozes, 2002.

BARALDI, I.M. **Matemática na escola: que ciência é esta?** Bauru: EDUSC, 1999.

BARBOSA, J.C. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas, v.7, n.11, 1999. Disponível em: <http://sites.uol.com.br/joneicb> . Acesso em: 05/06/2004.

_____. Uma perspectiva para a modelagem matemática. In: **Anais do IV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática**. Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, 2000.

_____. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais ...Caxambu: ANPED, 2001**. Disponível em: www.anped.org.br/24/tp1.htm#gt19 . Acesso em; 08/07/2004.

_____. Uma perspectiva de modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3.,2003a, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1. Disponível em: <http://sites.uol.com.br/joneicb> . Acesso em: 05/06/2004.

_____. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erichim (RS), v.27, n.98, junho/2003b.

BASSANEZI, C.B. **Ensino –aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, C.B. e BIEMBENGUT, M.S. Modelação Matemática: uma velha forma de pesquisa - um novo método de ensino. **Revista Números**, Tenerife, Espanha: 1997.CD-ROM.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. Campinas: UNICAMP-FE, 1992 (Tese, Doutorado).

BRASIL, **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CALDEIRA, A.D. Modelagem matemática: produção e dissolução da realidade. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais ... Recife: SBEM/PE, 2004**, 1 CD-ROM

CARAÇA, B.de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa , 1989.

CHAVES, M.I.A. e CARVALHO H.C. de Formalização do conceito de função no ensino médio: uma seqüência de ensino-aprendizagem.In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais ...** Recife: SBEM/PE, 2004, 1 CD-ROM

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. & GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto alegre: Artmed , 2001.

COLL, C. et al. A concepção construtivista como instrumento para análise das práticas escolares In: _____ **Psicologia da aprendizagem no ensino médio**. Trad. Cristina M. Oliveira. Porto Alegre: Artmed, 2003.

D'AMBRÓSIO, U. **Dos fatos reais à modelagem uma proposta de conhecimento matemático**, 1999. Disponível em: <http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm> Acesso em: 21/06/2004.

_____. **Educação matemática da teoria á prática**. 8ed. São Paulo: Papyrus, 2001.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. 12.ed. São Paulo: Ática, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, trad. Hygino H. Domingues,3ed. Campinas, SP: UNICAMP, 2002.

FITA, E.C. O professor e a motivação dos alunos. In: **A motivação na sala de aula: o que é e como se faz**. 5 ed. São Paulo: Edições Loyola, 1999. p. 65-135.

GARDING, L. **Encontro com a matemática**. 2.ed. Trad. Célio Alvarenga e Maria Manuela Albvarenga. Brasília: Universidade de Brasília, 1997.

GUELLI, O. Equação: O idioma da álgebra. **Contando a história da Matemática**, v.2 São Paulo: Ática, 1992.

GUNDLACH, B.H. Números e numerais. Tradução: Hygino H. Domingues. In: _____ **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1992.

IMENES, L.M. **Palestra proferida por ocasião da divulgação de livros didáticos para o Ensino Fundamental**. Hotel Sagres. Belém, 21 maio, 2004.

LELLIS, M. & IMENES, L.M. A Matemática e o novo ensino médio. **Educação Matemática em Revista**. n. 9/10. p.40-8. Abril, 2001

MIORIM, M.A. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem Significativa**. Brasília: Universidade de Brasília, 1999.

MOREIRA, M. A. e MASINI, E.F.S. **Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2001.

MORETTO, V.P. **Construtivismo: a produção do conhecimento em aula**. 3.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

_____. **Prova – um momento privilegiado de estudo – não um acerto de contas**. 4.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

MORTIMER, E.F. & SCOTT, P. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino**. Disponível em: www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n3/v7_n3_a7.htm Acesso em: 15/10/2003.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. 5.ed. Campinas: Papirus, 2003

PAIS, L.C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PATROCÍNIO Jr, C.A. do, **Modelagem Matemática: algumas formas de organizar e conduzir**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais ... Recife: SBEM/PE, 2004, 1 CD-ROM.**

POLYA, G.G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2.reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995

PONTE, J.P. da, BROCARD, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POZO, J.I. (Org.) **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Trad.: Beatriz Afonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

_____. **Aprendizagem de conteúdos e desenvolvimento de capacidades no ensino médio**. In: COLL, C. et al. **Psicologia da aprendizagem no ensino médio**. Trad. Cristina M. Oliveira. Porto Alegre: Artmed, 2003.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar**. Campinas, SP: Papirus, 2000.

ROSA, S. S. **Construtivismo e Mudança**. 8.ed. São Paulo: Cortez, 2002

SALVADOR, C.C. **Aprendizagem escolar e construção de conhecimento**. Porto Alegre: ArtMed, 1994.

SAMPAIO, J.C.V. **Funções e alguma história**. DM-UFSCar. Disponível em: <http://www2.dm.ufscar.br/~sampaio/funcoesgalileu.PDF> Acesso em: 31/01/2004.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, n.14, p.66-91, 2000.

SOUZA, A.C.C. de. Educação Matemática e a questão ambiental. **Temas & Debates** – publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática- SBEM. Rio Claro, n.5, p. 21-28, 199_.

TAPIA, J.A. Contexto, motivação e aprendizagem. In: **A motivação na sala de aula: o que é e como se faz**. 5 ed. São Paulo: Edições Loyola, 1999. p. 12-61.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ANEXOS

A- Questionário 1	134
B- Questionário 2	136
C- Função do 2º Grau – Atividades	
Atividade 11- A água na floresta de várzea	137
Atividade 12- Água e aventura radical	139
Atividade 13- Aguapé e o OD	141
Atividade 14- Quando o excesso de água é problema	142

- Questionário 1

Oi, _____, seja bem vindo ao Ensino Médio.

Que neste novo nível de ensino você colecionasse sucessos.

O objetivo deste questionário é conhecê-lo um pouco melhor, para que eu possa desenvolver um ensino da matemática que corresponda melhor às suas expectativas, e, que de fato, sirva para a sua formação científica, cultural e cidadã. Portanto, ao respondê-lo, você estará contribuindo para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática em nossa classe.

1) Nas linhas abaixo, conte-me um pouco do seu dia-a-dia, como você desenvolve suas atividades cotidianas:

.....
.....

2) Nas horas de folga, qual sua distração preferida?

3) Você pratica algum esporte? Qual?

4) Que tipo de leitura você gosta?

5) Com qual área do conhecimento você mais se identifica? () humana () biológica
() tecnológica

6) Você mantém-se informado sobre as coisas que acontecem no mundo através de (marque de acordo com os meios de comunicação que fazem parte do seu dia-a-dia):
() televisão () rádio () revistas () jornais () internet () não me interessa pelas questões da atualidade.

7) Nas notícias ou informações que chegam até você todos os dias têm alguma Matemática? Cite onde

8) Na sua opinião, qual a utilidade da Matemática na vida das pessoas e na sua em particular?

9) Você vê alguma relação da Matemática com as outras disciplinas que você estuda? Cite algumas relações?

10) De um modo geral, você gosta de Matemática? Por que?

11) O que você considera uma aula de Matemática "legal"?

(Continua)

12) Nas aulas de Matemática, você normalmente:

- apenas copio tudo o que é colocado no quadro, tendo entendido ou não.
- esforça-se por acompanhar o raciocínio do professor e copia o que ele faz no quadro.
- esforça-se por acompanhar o raciocínio do professor, copia o que ele faz no quadro e suas observações também.
- sempre pergunto quando não entendo.
- se não sei fazer algum exercício fico esperando o professor fazer no quadro para copiar.
- se não sei fazer algum exercício solicito ajuda do professor ou de algum colega pois não gosto de apenas copiar do quadro.

13) Com relação ao seu estudo em Matemática:

- estuda sozinho
- tem grupo de estudo
- tem aula particular

11) Com que frequência você estuda Matemática?

- uma vez por semana, durante ____ horas, aproximadamente
- véspera de avaliações
- nunca estudo

14) Normalmente suas notas em Matemática são:

- Acima da nota da maioria dos seus colegas de classe.
- Igual à nota da maioria dos seus colegas de classe.
- Menor que a nota da maioria dos seus colegas de classe.

15) Quais as causas do seu sucesso
insucesso em Matemática? Como você e os professores de Matemática têm contribuído para manter ou modificar esta situação?

- Questionário 2

Caro aluno, o objetivo deste questionário é verificar seus conhecimentos sobre a água e de que forma você a percebe na vida das pessoas. Não deixe nenhuma questão em branco, caso não saiba, responda “não sei”. Este questionário é só uma sondagem de conhecimentos pessoais, não vale nota, portanto, fique à vontade para responder.

1) Assinale e justifique o item que melhor corresponde ao que você pensa sobre cada afirmação:

a) Podemos usar água à vontade.

() *Concordo* () *Não concordo* *porque*

b) A água só se relaciona com saúde e vida.

() *Concordo* () *Não concordo* *porque*

c) O crescimento populacional não traz nenhuma consequência para as águas própria para consumo.

() *Concordo* () *Não concordo* *porque*

2) Responda:

a) A água é importante para quem e por quê?

.....

b) Que cuidados deve receber a água antes de ser consumida?

.....

c) Como você pode contribuir para a conservação e preservação das nossas águas (mananciais, lagos, rios, mares, igarapés, etc)?

.....

d) Cite alguns problemas que nossas águas enfrentam atualmente?

.....

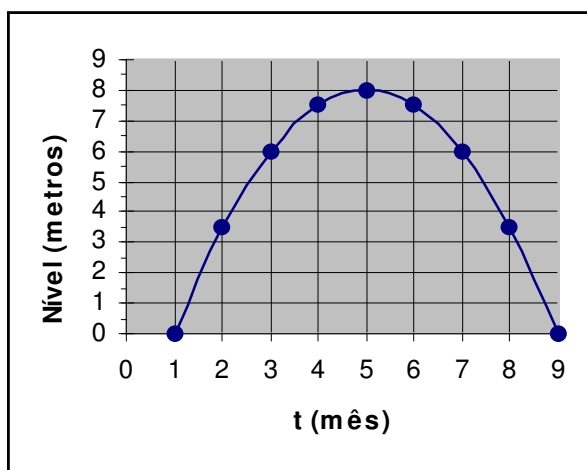
Atividade 11- Água na Floresta de Várzea

Várzea é a denominação usual para designar as grandes faixas de florestas que ficam às margens dos rios. Seus terrenos ficam periodicamente cobertos pelas águas dos rios amazônicos. Essas enormes faixas de terra, juntamente com sua vegetação, outrora foram chamados de Igapó, o que significa “lugar inundado” em linguagem indígena. Nessas áreas a produção agrícola das comunidades varzeiras está limitada ao período de descida das águas quando se pratica as lavouras de ciclo curto – melancia, feijão, milho e jerimum.

Fonte: Rocha, Carlos e Canto, Otávio do. **Ambiente: Ecologia para a escola básica**

1) Supondo que $N(t) = -0,5t^2 + 5t - 4,5$ representa o nível da água em função dos meses do ano em uma floresta de Várzea na região da cidade de Óbidos, preencha a tabela abaixo e construa o gráfico da função.

Tempo (mês)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nível da água (metros)	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0



2) Observe o gráfico acima e complete o quadro abaixo:

	Resposta Matemática	Significado no contexto do problema
Domínio de $N(t)$	$[1,9]$	<u>Meses do ano</u>
Imagem de $N(t)$	$[0,8]$	<u>Nível da água</u>
Intervalo de crescimento da função	$[1,5]$	<u>Nível da água subindo</u>
Intervalo de decrescimento da função	$[5,9]$	<u>Nível da água baixando</u>
Intervalo(s) onde a função é positiva	$[1,9]$	<u>Época de cheia</u>
Intervalo(s) onde a função é negativa	$(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$	<u>Época de seca</u>
Ponto máximo (Vértice)	$(5,8)$	<u>Nível máximo = 8m no 5º mês</u>
Raízes da função (ou zeros da função)	<u>1 e 9</u>	<u>Início e fim do período de cheia</u>

3) Observe o gráfico e escreva a relação existente entre x_v e as raízes (x' e x'')

No gráfico $5 = \frac{1+9}{2}$ logo $x_v = \frac{x' + x''}{2}$

Toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada **função do 2º Grau** ou **função Quadrática** e seu gráfico é uma curva semelhante à obtida no exemplo acima chamada de **parábola**.

Atividade 12: Água e aventura radical



rios,

Os ribeirinhos, obedecendo ao ritmo das águas, constroem suas casas sobre palafitas e não se atrevem sair para navegar quando passa a pororoca. Entretanto, o que é preocupação para alguns é aventura para outros. Todos os anos são organizados campeonatos de surfe na pororoca. O recorde deste campeonato está com o cearense Marcelo Bibita que, em 2001, ficou 19 minutos e 14 segundos surfando sem parar.



Fonte: Revista *Mundo Estranho*, Abril 2002.

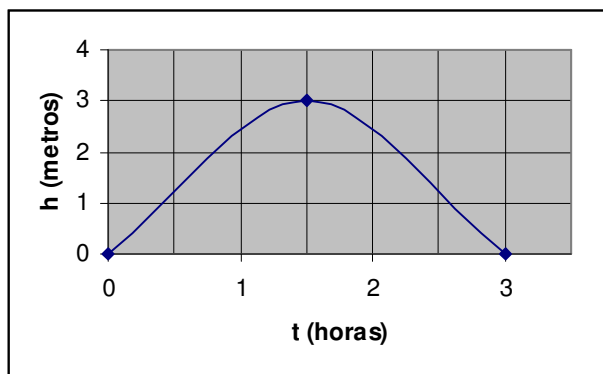
1) Supondo que a altura (metros) da “grande onda” em função do tempo (horas), em 2001 foi dada

por $h(t) = -\frac{4}{3}t^2 + 4t$, construa um gráfico utilizando o vértice e os pontos em que a função

intercepta os eixos (x e y) do plano cartesiano. A seguir, observando o gráfico, responda as perguntas abaixo:

- Qual a altura máxima que a onda atingiu? 3 metros
- Quanto levou até que atingisse a altura máxima? 1 hora e 30 minutos
- Quanto tempo durou o fenômeno? 3 horas

$$-\frac{4}{3}t^2 + 4t = 0 \quad x_v = \frac{3}{2} \text{ e } y_v = 3$$
$$t = 0 \text{ ou } t = 3$$



2) Na atividade da aula anterior vimos que $x_v = \frac{x' + x''}{2}$.

E sabemos que podemos calcular as raízes pelas fórmulas

$$\underline{x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Agora, com base nessas informações determine uma fórmula para o cálculo do x_v e do y_v .

$$\underline{x_v = \frac{x' + x''}{2}}$$

$$\underline{x_v = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a} \quad \text{logo } \underline{x_v = \frac{-b}{2a}}$$

$$\underline{y_v = f(x_v)}$$

$$\underline{y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c}$$

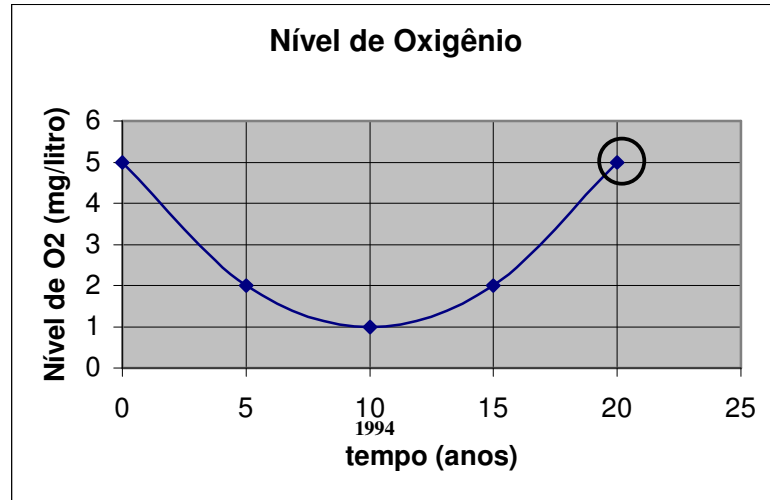
$$\underline{y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}}$$

$$\underline{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Atividade 13 : Aguapés e OD



Suponha uma lagoa poluída por esgotos domésticos onde, um centro de pesquisas, em 1994, começou a cultivar Aguapés com o objetivo de verificar a ação purificadora desses lírios aquáticos. Ao longo do tempo foi elaborado o gráfico abaixo, que representa a quantidade média de OD (Oxigênio dissolvido) na lagoa, em função do tempo (anos) antes e depois do cultivo do Aguapé.



Estude o gráfico com atenção e determine:

- 1) Em que ano a lagoa estava com 5mg/litro de OD? 1984
- 2) Qual o mínimo de OD foi registrado nessa lagoa? Em que ano isto aconteceu? 1 mg/l em 1994
- 3) A expressão que relaciona **Nível de O2** (N) em função do **tempo** (t) correspondente ao gráfico acima.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + 5 \\ 2 = a \cdot 25 + b \cdot 5 + 5 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{25} \quad e \quad b = \frac{-4}{5} \quad \text{logo:} \quad N(t) = \frac{1}{25}t^2 - \frac{8}{10}t + 5$$

- 4) Com a função obtida no item anterior o ano em que a lagoa voltará a ter 5 mg/litro de OD. 2004
- 5) Marque no gráfico o ponto que corresponde a resposta encontrada no item anterior.

Atividade 14: Quando o excesso de água é problema

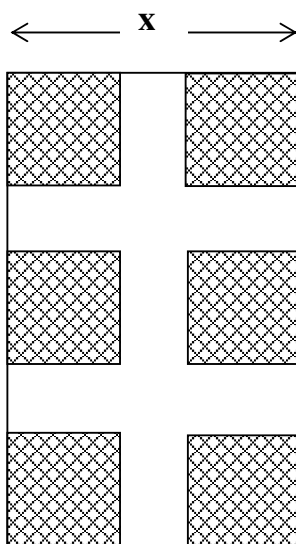
O período chuvoso que faz elevar o volume de diversos rios no Estado do Pará já desabrigou ou desalojou mais de 25 mil pessoas desde o início do ano.
Jornal **Diário do Pará**,
09/04/2004.



Desabrigados pelas enchentes do rio Xingu, em Altamira, oeste do Estado, receberão casas próprias doadas pela prefeitura. Ao todo 2000 casas serão construídas
Jornal **Diário do Pará**,
08/04/2004.

Supondo que a Prefeitura de Altamira doou um terreno cujo perímetro é 3000 metros para lotear entre os desabrigados e que pretende construir passagens com 3 m de largura entre as quadras, conforme a figura abaixo, determine:

- 1) A área a ser loteada em função da medida de um dos lados.
- 2) Utilizando a função encontrada no item anterior, determine a área máxima que pode ser utilizada para a construção de casas.
- 3) Se 2000 famílias serão contempladas com terrenos de mesma forma e dimensões, qual a área máxima que cada família poderá receber?



$$1) \underline{2x + 2y = 3000}$$

$$\underline{y = 1500 - x}$$

$$\underline{A = b \cdot h}$$

$$\underline{A = (x - 3) \cdot (y - 6)}$$

$$\underline{A = (x - 3) \cdot (1500 - x - 6)}$$

$$\underline{A(x) = -x^2 + 1497x - 4482}$$

$$2) \underline{\Delta = 2241009 - 17928 = 2223081}$$

$$\underline{y_v = \frac{2223081}{4} = 555770,25 \text{m}^2}$$

$$3) \underline{\frac{555770,25}{2000} = 277,89 \text{m}^2 \text{ para cada família.}}$$