



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS
E MATEMÁTICAS – MESTRADO PROFISSIONAL

NAZARÉ DO SOCORRO MORAES DA SILVA

**MEDIDA DE COMPRIMENTO:
uma sequência didática na perspectiva da grandeza e medida**

Belém
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS
E MATEMÁTICAS – MESTRADO PROFISSIONAL

NAZARÉ DO SOCORRO MORAES DA SILVA

MEDIDA DE COMPRIMENTO:

uma sequência didática na perspectiva da grandeza e medida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas - Mestrado Profissional, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Área de Concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de Professores de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

Belém

2017

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA**

Silva, Nazaré do Socorro Moraes da.

Medida de comprimento: uma sequência na perspectiva da grandeza e medida / Nazaré do Socorro Moraes da Silva, orientador Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação – Matemática. Peso e Medidas. 4. Didática. I. Nunes, José Messildo Viana, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

NAZARÉ DO SOCORRO MORAES DA SILVA

**MEDIDA DE COMPRIMENTO:
uma sequência didática na perspectiva da grandeza e medida**

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes - Presidente
IEMCI/UFPA

Prof. Dr. Arthur Gonçalves Machado Júnior - Membro Interno
IEMCI/UFPA

Prof.^a Dr.^a Elizabeth Gomes Souza - Membro Externo
PPGECM/IEMCI/UFPA

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá - Membro Externo
CCSE/UEPA

Data de defesa: 15/09/2017

Belém
2017

Dedico ao meu esposo, Clenildo Lemos, pelo incentivo, compreensão, e também pela contribuição na elaboração inicial do projeto de pesquisa. Aos meus filhos, Yasmin e Rafael Lemos, pela força e paciência. Obrigada, minha linda família, por todo amor e carinho, ingredientes fundamentais para concretude dessa trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, o nosso senhor todo poderoso, que direciona todos os meus passos e minhas decisões.

Aos meus pais e irmãos, pelo o amor e compreensão. Em especial a minha mãe, Maria do Socorro, que sempre me ensinou que a educação, o amor e respeito ao próximo são valores primordiais para trilharmos o caminho do bem.

À minha amada avó, Sebastiana, que me proporcionou as primeiras práticas com a matemática. (In memoriam)

Ao meu orientador, Professor Doutor José Messildo, pelas valiosas orientações e amizade, e também pela confiança no desenvolvimento do presente trabalho. Muito obrigada, por estarmos juntos nessa jornada e por contribuir para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos professores Doutores Arthur Gonçalves, Elizabeth Gomes, Pedro Sá, pelas suas respectivas participações e contribuições relevantes para enriquecimento deste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGDOC), em conjunto com seu corpo docente, me oportunizou conhecimentos relevantes que me auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho, e a realização de um sonho. Aos funcionários desta Instituição, em especial, Naldo e João, pela atenção e profissionalismo.

Aos amigos e parceiros da turma de mestrado e do grupo GEDIM, pela convivência e companheirismo, que também contribuíram com boas discussões durante o curso. Em especial a Regiane Reinaldo, Márcia Contente e Wellington Duarte.

Aos amigos confidentes, em especial Elise Pires, pelos diálogos e pelo incentivo nos momentos difíceis do desenvolvimento deste trabalho.

Ao corpo técnico da Escola Lucy Corrêa de Araújo, em especial à diretora Cristina Brandão, por permitir a realização da pesquisa nessa instituição, aos alunos participantes desta e a professora Maria Guimarães, pelo apoio, amizade e contribuição.

Em suma, a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para materialização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho sobre grandezas e medidas, em particular medida de comprimento, objetivou legitimar uma sequência didática que favorecesse o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida. Esta pesquisa foi desenvolvida com base na Teoria das Situações Didática de Guy Brousseau, inspirada no modelo didático de Régine Douady e Marie Jeanne Perrin-Glorian, entre outros referenciais fundamentais para elaboração da sequência didática. A abordagem desta pesquisa foi de cunho qualitativo e como percurso metodológico adotamos os aspectos da Engenharia Didática. A sequência foi aplicada em uma escola estadual de ensino fundamental e médio, localizada na região metropolitana de Belém do Pará, em uma turma de 25 alunos, do 6º ano do ensino fundamental. As análises das atividades apontaram que, propor uma sequência didática que explore o comprimento nos domínios da grandeza e da medida favorece a compreensão de noções de conceitos atrelados à grandeza e medida, como medir, necessidade de medir, medida, grandeza comprimento e sua quantificação (medida). Assim como também o entendimento por parte dos alunos em relação às conversões de unidades de medida e a constituição do sistema métrico decimal. A partir desses resultados esta pesquisa gerou um produto educacional denominado, sequência didática para o ensino de medida de comprimento.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria das Situações Didática. Sequência Didática. Grandeza comprimento. Medida de comprimento.

ABSTRACT

This research about greatness and measures, in particular measure of length, aimed to legitimize a didactic sequence that favored the teaching of measure of length from the notion of magnitude and measure. The research was developed based on Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations, inspired by the didactic model of Régine Douady and Marie Jeanne Perrin-Glorian, among other fundamental references for the elaboration of the didactic sequence. The approach of this research was qualitative in a methodological conception supported in the aspects of Didactic Engineering. The sequence was applied in a public school of elementary and middle, located in the metropolitan area of Belém do Pará, in a class of 25 students, from the 6th year of elementary school. The analyzes of the activities indicated that, proposing a didactic sequence that explores length in the domains of greatness and measure favors the comprehension of notions of concepts linked to greatness and measure, such as measuring, measuring need, measure, length and quantification (measure). As well as the understanding on the part of the students regarding the conversions of units of measurement and the constitution of the metric system decimal. From these results, this research generated an educational product called, didactic sequence for the teaching of length measurement.

Keywords: Mathematics Education. Theory of Didactic Situations. Didactic Sequence. Greatness length. Measure of length.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Quadro de atividade conversão de unidades.....	36
Figura 2- Convenções entre unidades de medida de comprimento.....	38
Figura 3- Exemplificando função - medida.....	52
Figura 4- Modelo didático adaptado Brito (2003).....	55
Figura 5- Segmentos.....	60
Figura 6- Semirreta AB.....	60
Figura 7- Unidade U.....	60
Figura 8- Subdivisão do segmento U.....	61
Figura 9- Segmentos por falta ou por excesso.....	62
Figura 10- Atividade 2: Mapa da escola.....	82
Figura 11- Atividade 2/Jardim das Flores e rua Santarém.....	83
Figura 12- Atividade 2/Alameda A.....	83
Figura 13- Exemplo da graduação da tira padrão.....	89
Figura 14- Momento de leitura do texto histórico.....	98
Figura 15- Momento de anotações sobre texto.....	99
Figura 16- “Caixa de ferramentas”.....	103
Figura 17- Escolha de objetos da “caixa de ferramentas”.....	103
Figura 18- Foto de alunos manipulando objetos da caixa de ferramentas.....	105
Figura 19- Alunos em ordem crescente de altura.....	107
Figura 20- Medida antropométrica adotada pelos grupos.....	109
Figura 21- Momento da escolha dos objetos da caixa de ferramentas Atividade 3.....	110
Figura 22- Primeira questão da atividade complementar.....	112
Figura 23- Segunda e terceira questão da atividade 3.....	115
Figura 24- Escala de Cuisenaire.....	120
Figura 25- Momento de ação da atividade 4.....	120
Figura 26- Transcrição da tira padrão.....	122
Figura 27- Turma em ação na atividade 5.....	126
Figura 28- Atividade 8 da sequência.....	129
Figura 29- Processo realizado pelo do grupo bolinhas.....	146
Figura 30- Produção do grupo L / atividade 8.....	155

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Síntese dos aspectos de comprimento atribuído aos três quadros.....	56
Quadro 2- Síntese da sequência didática	78
Quadro 3- Percurso do experimento.....	96
Quadro 4- Registro da terceira questão / Atividade complementar.....	117
Quadro 5- Relacionando o objeto e unidade de medida.....	123
Quadro 6- Identificando as unidades adequadas em cada caso	128
Quadro 7- Síntese dos registros da atividade 2.....	137
Quadro 9- Registro sobre as barras utilizadas por cada grupo	150
Quadro 10- Medida da distância entre sala de aula e quadra de esporte da escola	152

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 ANÁLISES PRÉVIAS	19
1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE PESOS E MEDIDAS	19
1.1.1 Os primeiros passos em direção ao recorte da história sobre pesos e medida.....	19
1.1.2 Um apanhado geral das práticas de medidas de alguns antigos povos	20
1.1.3 Em direção à medida de comprimento de padrão universal.....	24
1.2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO ACERCA DO ENSINO DE GRANDEZAS E MEDIDAS COM ENFÂSE NO COMPRIMENTO	26
1.2.1 Estudos que evidenciam o comprimento na perspectiva de grandeza	27
1.2.2 Estudos que evidenciam o comprimento na perspectiva de medida	32
1.2.3 Considerações gerais sobre as duas categorias	39
1.3 JUSTIFICATIVA E PROBLEMÁTICA	43
2 REFERENCIAL TEÓRICO	45
2.1 NOÇÕES DE GRANDEZAS E MEDIDAS	45
2.1.1 Grandeza.....	45
2.1.2 Medida.....	50
2.2 CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COMPRIMENTO TOMANDO COMO BASE O MODELO PROPOSTO POR DOUADY E PERRIN-GLORIAN	54
2.3 A NOÇÃO DE COMPRIMENTO COMO MEDIDA POR MEIO DA SUBDIVISÃO DE SEGMENTO DEFENDIDO POR LEBESGUE	59
2.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE BROUSSEAU	62
2.5 ASPECTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO PERCURSO DE PESQUISA	69
3 CONCEPÇÕES E ANÁLISE A PRIORI	73
3.1 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	73
3.1.1 Conhecendo o ambiente e sujeitos de investigação.....	73
3.1.2 Proposta e o objetivo da sequência didática.....	74
3.1.3 Descrição da construção da sequência e análise a priori.....	75
3.2 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA E ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES	80

4 EXPERIMENTO	95
4.1 DESCRIÇÃO GERAL DO EXPERIMENTO	95
4.2 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	97
4.2.1 Primeiro encontro	97
4.2.2 Segundo encontro	102
4.2.3 Terceiro Encontro	106
4.2.4 Quarto encontro	112
4.2.5 Quinto encontro	119
4.2.6 Sexto encontro	124
4.2.7 Sétimo encontro	127
5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES	131
5.1 ASPECTOS SOBRE AS ANÁLISES DAS ATIVIDADES	131
5.1.1 Situação histórica	132
5.1.2 Situação de comparação	136
5.1.3 Situação de medida	142
CONSIDERAÇÕES FINAIS	157
REFERÊNCIAS	162
APÊNDICES	166

INTRODUÇÃO

Retalhos de minhas histórias que tecem minha formação profissional

A matemática sempre esteve presente em minha vida, mesmo de modo inconsciente. Tal presença se fez diante de algumas experiências, ora por necessidade, ora por oportunidade, discorridas sucintamente neste recorte de minha história de vida e formação docente.

Uma dessas experiências implica em práticas com a matemática, na qual vivenciei com minha avó, durante certo período. Tudo começou quando [...] Todos os dias ao sair da escola, tomava uma condução para chegar até minha residência, uma vez que a escola localizava-se em um bairro distante. Ao descer da condução eu tinha uma parada obrigatória – a barraca de venda de frutas e verduras de minha avó, pois tinha que lhe pedir a bênção. Com isso por lá ficava alguns minutos.

Para mim, estar nesse lugar configurava-se um momento de diversão e, ao mesmo tempo, uma maneira de exercitar meus conhecimentos matemáticos referentes a contar e medir, porque trabalhava direto com dinheiro e com um instrumento de medida, a balança. Ao receber e devolver o troco, eu fazia uso constante das quatro operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão). Por cursar a 4ª série do Ensino Fundamental (antigo 1º Grau), já “dominava” as operações e exercitava esses conhecimentos. Momentos que aproveitava para melhorar o meu desempenho e interesse nas aulas de matemática.

Outros momentos relativos a essas experiências ocorreram durante as atividades escolares que eu desenvolvia junto a alguns colegas de grupo, com apresentação de seminários sobre conhecimentos matemáticos. Com a preocupação de apresentar um bom trabalho, estudávamos o conteúdo com afinco, com o propósito de deixar claro o nosso trabalho aos demais colegas da turma. Assim, inconscientemente sinalizava alguma prática docente de ensino no sentido de explicitar o assunto e resolver tarefas para a turma.

A partir deste momento começamos a fazer grupos de estudo para resolução das atividades matemáticas. Isto perdurou por todo o ensino fundamental e médio. Durante essas reuniões sempre alguém era eleito para resolver as questões e as apresentar aos demais, e claro que os eleitos eram aqueles que tinham uma boa relação com a matemática. Essa dinâmica despertou o meu interesse de prestar vestibular para Matemática.

Vista nesses termos, a matemática como atividade humana, que permeou a minha vida, motivou-me a ir em busca de seu conhecimento enquanto ciência. A respeito dessa relação com a matemática, temos:

Na escola, a matemática é uma ciência, ensinada em um momento definido por alguém de maior competência, enquanto na vida, a matemática é parte da atividade de um sujeito que compra, que vende, que mede e encomenda peças, entre outras práticas. (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2010, p.19).

Assim, com esse olhar mencionado anteriormente, de uma matemática escolar posta como um conhecimento científico e com matemática como práticas sociais vivenciadas pelas pessoas, ingressei em 1996 no Curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade do Estado do Pará. Durante a graduação, 60% da grade curricular remetia-se a conteúdo da área de matemática e os demais relativos a questões pedagógicas e disciplinas complementares. No entanto, as disciplinas que mais me interessavam eram do campo da matemática, pois acreditava que para iniciar as práticas em sala de aula, apenas saber os conteúdos seria o suficiente. Contudo, este pensamento foi se modificando com disciplinas de práticas de ensino e instrumentação para o ensino. Foram momentos que tive oportunidade de conhecer recursos didáticos que poderiam auxiliar-me em minhas práticas docentes, como ábaco, material dourado e jogos didáticos.

Com a conclusão do curso caminhei para prática docente. Foi o momento em que me assumi como professor de fato, enfrentando turmas diante de situações adversas e imprevistos, salas lotadas, alunos pouco motivados, distorção série e idade, aula modo mecânico e memorialístico e sem contexto que pudesse dar sentido dos conteúdos matemáticos para os alunos, entre outros fatores.

Diante dessas situações, percebi que dominar o conteúdo a ser ensinado não era o suficiente para atender esses conflitos do ensino de matemática. Além disso, outras variáveis relevantes influenciavam no processo de ensino e aprendizagem, O que fazer? Por que fazer? E como fazer? Diante dessas inquietações, emergiu a necessidade de formação continuada, pesquisas e leituras para o seu enfrentamento. Foi então que iniciei uma nova caminhada, no período de 2008 a 2010 com a Especialização em Educação Matemática ofertado pela Universidade do Estado do Pará, com intenção de buscar respostas para esses questionamentos.

As buscas de respostas para tais perguntas ainda me fizeram caminhar em direção ao conhecimento. Assim, tive a oportunidade de participar de disciplinas que nortearam

discussões pertinentes sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Entre as disciplinas remeto-me a tópicos de matemática, disciplina relativa a conteúdos de matemática, em que consistia em discussões sobre algumas propriedades, demonstrações de determinados conteúdos e de como abordá-las em sala de aula.

Durante esta disciplina, sob a orientação do professor Dr. Pedro Sá, construímos o nosso objeto de investigação como conclusão de curso, no caso a fração, em particular a adição e subtração de frações. Outra disciplina que me oportunizou boas contribuições refere-se aos tópicos de história da matemática, embora eu tenha estudado na graduação, foi na especialização que visualizei uma perspectiva inerente para a prática docente. Durante a disciplina percebemos quão importante é sua utilização em sala de aula, para compreensão dos *porquês* de se estudar os conteúdos de matemática e a sua evolução. Postura que encontramos nos estudos de Mendes et al. (2005, p.53) ao afirmar que “A história pode ser nossa grande aliada quanto à explicação desses porquês”.

A especialização foi uma renovação em minha trajetória profissional. Como anunciado anteriormente, as discussões e descobertas associadas ao aporte teórico estudado contribuíram para um melhor desempenho em sala de aula, além de fomentar a continuação desta caminhada, assumindo uma nova postura, um professor reflexivo, que pensa sobre sua ação, a esta associa a teoria necessária, resultando no seu aprimoramento, ou em uma nova ação.

Após a conclusão da especialização continuei com as atividades em sala de aula, com um olhar de renovado, cheio de ideias, entusiasmos, comprometida com o trabalho e com a consciência do papel social para com os alunos. Esse olhar não se remete a uma simples visão, e sim a um olhar diferenciado, com os óculos da teoria. Assim como os óculos nos ajudam a ver melhor as coisas, a teoria nos ajuda a encontrar caminhos que possam levar-nos a uma reflexão sobre nossas práticas docentes.

O compromisso com o trabalho, o desejo de buscar e propor estratégias para serem desenvolvidas em sala de aula, faz com que novos questionamentos eclodam e alguns permaneçam, na intenção de adequar os objetos matemáticos ao contexto do aluno.

Assim, em 2015 com ingresso no Mestrado Profissional do Instituto de Educação Matemática e Científica-IEMCI oferecido pela Universidade Federal do Pará, prossegui com a minha caminhada. Este mestrado despertou-me um grande interesse, por ter como objetivo formar professores pesquisadores de sua própria prática.

Nessa perspectiva de professor, que reflete sobre sua prática em sala de aula elegi o sistema de medidas como tema do anteprojeto que utilizei para inserção no programa. Isto, devido a algumas situações que vivenciei, ora na prática em sala de aula, diante de alunos

com dificuldades em solucionar problemas envolvendo grandezas e medidas, principalmente conversões das unidades de medidas, tanto em relação à medida de comprimento quanto à medida de área, ora em diálogos em pares (colegas professores de matemática). Nestes pude perceber que essas inquietações eram pertinentes, pois não eram somente minhas, mas sim de outrem. Diálogos, que reconheço informais, ocorridos em intervalos de aulas das escolas, as quais lecionei, e também em outros momentos na participação em eventos, como seminários, congressos e encontros realizados no campo da Educação Matemática.

O sistema de medidas é um objeto matemático que sempre provoca dúvidas, tanto pelo modo que se apresenta nos livros, como pela abordagem que nós professores fazemos. Um conteúdo cheio de regras, que geralmente leva o aluno a decorar e após algum tempo, esquecer. Justificativa denotada por Silva, C. (2011) ao se referir a conteúdos sobre grandezas e medidas, principalmente ao ensino com base nas unidades padrão estabelecidas e nas transformações mecânicas de múltiplo e submúltiplo, nem sempre entrelaçadas nas percepções da vida cotidiana do aluno.

No entanto, no decorrer do curso com participação em algumas disciplinas e sob a orientação do professor Dr. José Messildo Nunes o objeto de investigação foi se moldando, sofrendo algumas transformações, que discorreremos ao longo desta introdução.

Essas transformações começaram a partir do momento que nos permitimos refletir sobre nossas práticas, no desejo de mudar, melhorar, (re) construir e deixar de sermos meros reprodutores de práticas que há muito tempo não contribuem para o ensino de qualidade. Nesta direção Alarcão (2013) afirma que é nessa conscientização da capacidade de pensamento e reflexão, que evidencia o ser humano como criativo e não reprodutor de ideias e práticas exteriores, que se baseia a noção de professor reflexivo. Tal pensamento desembocou-se da necessidade de ampliar meu conhecimento diante de tantas inquietações.

No decorrer do curso, nas disciplinas que participamos, entre elas Formação de professor pesquisador de sua própria prática, sob a orientação da Prof.^a Dra. France Fraiha, esta sugeriu-nos literaturas que fizeram com que essa reflexão despertasse e se estruturasse, proporcionando-nos um novo olhar. Segundo Esteban e Zaccur (2002, p. 21) “A teoria é proposta como um instrumento que ajuda a olhar e apreender o real”, funcionando como lentes postas diante de nossos olhos, ajudando-nos a ver o que antes não éramos capazes. No entanto, somente a teoria não é o suficiente, se não fizermos uma reflexão sobre a nossa prática, é fundamental que nós professores instrumentalizemo-nos para observar, questionar e redimensionar o cotidiano.

Por meio dos artigos abordados, relatos e discussões levantadas durante essa disciplina, pude me identificar em alguns parágrafos nos retalhos que alguns autores explicitavam, bem como nas histórias dos meus colegas de curso. Sem me conter, assim como os demais colegas, socializei minhas experiências, certas ou erradas, não sei, mas percebi que muitas delas haviam sido vivenciadas por eles. Entre as leituras, destacamos o artigo de Maria Teresa Esteban e Edwiges Zaccur ao retratarem a pesquisa como eixo de formação docente.

Esse texto nos levou a refletir sobre o desejo de mudança que estamos em busca, reconhecendo-nos e processando informações recebidas, entrelaçando-as à nossa história, sempre atenta às leituras. “A prática sinaliza questões e a teoria ajuda a apreender estas sinalizações, a interpretá-las e a propor alternativas, que se transformem em novas práticas” (ESTEBAN; ZACCUR, 2002, p. 21).

Em minha prática foram apontados questionamentos sobre o ensino de medida, as dificuldades levantadas com os meus alunos ao longo da experiência como docente. Essas dificuldades fizeram-me refletir e debruçar em teorias para auxiliar-me na construção de uma nova prática, em um diálogo prática-teoria-prática. A busca pela teoria encontra-se em processo, mas algumas já apontaram transformações na estrutura do produto educacional, acerca do objeto de estudo apresentado no pré-projeto de seleção do mestrado.

A princípio, o produto seria uma sequência didática sobre unidade de comprimento, com o auxílio da fita métrica, como recurso didático em conjunto com história da matemática. No entanto, com leituras indicadas sobre o tema em questão pelo meu orientador e literaturas abordadas e indicadas nas disciplinas e nos fóruns, o presente estudo foi crescendo e se solidificando, de modo a refundar e lapidar este produto com uma base teórica, transformando-se em uma sequência didática acerca do ensino de medida de comprimento, para alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Entre essas leituras destaco o livro “Filosofia da Educação Matemática”, de Bicudo e Garnica (2006), que versa sobre as filosofias: filosofia, filosofia da educação, filosofia da matemática e filosofia da educação matemática, sendo a última junção das duas anteriores. Segundo esses autores, aprendemos que a filosofia é analisar e refletir criticamente sobre algo. Livro que nos foi apresentado no fórum de matemática, que me levou a refletir sobre objeto de estudo, *Reflexões a respeito do estudo de grandezas e medidas*. De maneira particular, medida de comprimento, surgimento e evolução, sua importância no contexto social do aluno. Tais reflexões auxiliaram na condução desta pesquisa, levando-me a dialogar com o orientador sobre a investigação a respeito do objeto de estudo. A partir desse momento a

pesquisa sofreu uma modificação do foco, que passou de sistema de medida para grandezas e medidas.

Assim, elegemos como objeto de estudo o ensino de grandezas e medidas, com ênfase na medida de comprimento, na intenção de realizar uma investigação acerca deste, para construir uma sequência didática, com conjunto de atividades organizadas em situações de ensino, na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau.

Para abordarmos o tema grandeza e medidas, em particular medida de comprimento, apoiamo-nos em algumas pesquisas realizadas anteriormente, que foram fundamentais para justificar a relevância de nosso estudo. Isto, além de indicar-nos alguns referenciais, entre eles Douady e Perrin-Glorian (1989), Henri Leon Lebesgue citado por Palaro (2006) e outros, que nos possibilitaram investigar a concepção de comprimento, tanto no domínio grandeza quanto da medida. Sendo esta última com maior ênfase, por ser o foco do presente estudo.

Essas pesquisas foram explicitadas por meio do levantamento bibliográfico, exposto na primeira seção, que nos levou a seguinte questão: **Em que termos uma sequência didática constituída de situações que explore o ensino de medida de comprimento, a partir de sua grandeza, pode favorecer a noção de medir, medida, unidade e suas conversões para alunos do 6.º ano do ensino fundamental?**

Para tentar responder esse questionamento, traçamos o seguinte objetivo: **Legitimar uma sequência didática que favoreça o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida.**

Neste sentido, para alcançar o objetivo, desenvolvemos uma investigação de cunho qualitativo, tendo como metodologia de pesquisa os aspectos da Engenharia Didática defendida por Artigue (1996), tomando como referências os estudos de Almouloud (2007), Pais (2008) e Artigue (1996). Essa metodologia é constituída por quatro fases: a primeira, as análises prévias, permitiu-nos uma investigação aprofundada acerca do tema em questão; a segunda, concepções e análise a priori, nesta fase construímos a sequência didática com base no estudo realizado na primeira fase; a terceira, experimentação, refere-se à parte prática da pesquisa, ou seja, a aplicação da sequência didática, e quarta, a análise a posteriori e validação, corresponde à última fase em que trata a análise do que ocorreu durante o desenvolvimento da sequência, bem como o confronto das análises a priori e a posteriori, a validar ou não a sequência.

As análises das atividades foram compreendidas na perspectiva da TSD, defendida por Brousseau, por meio dos quatro momentos da situação didática: ação, formulação, validação e institucionalização. Os três primeiros caracterizam-se em situações adidáticas, por fazerem

parte de momentos que possibilitam a construção do conhecimento por parte do aluno, enquanto que o último caracteriza-se por natureza didática, por se tratar do momento em que o professor procura reforçar e generalizar o conhecimento adquirido pelo aluno.

Esta pesquisa apresenta-se estruturada em cinco seções. A primeira, denominada análises prévias ou preliminares, apresenta justificativa e problemática, levantamento bibliográfico organizado em duas categorias, que nos auxiliou na delimitação da questão de investigação e objetivos gerais. Além dos aspectos históricos sobre grandezas e medidas, concernentes a literaturas como: Dilke (1988), Eves (2004), Silva (2004), Boyer (1981) e Zuin (2009).

Na segunda seção abordamos os referenciais teóricos basilares para consolidação do presente estudo, acerca das grandezas e medidas, noções de comprimento defendida por Lebesgue, por meio da comparação de um segmento a um segmento unitário; conceito de grandeza de comprimento na perspectiva de Regine Douady e Perrin-Glorian e a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1986), Engenharia Didática de Michele Artigue, entre outros referenciais.

Na terceira seção discorremos a respeito da caracterização dos sujeitos de nossa pesquisa, construção e apresentação da sequência didática, com análise a priori de cada atividade. A esta denominamos a segunda fase da engenharia didática – concepções e análise a priori. Enveredando para quarta seção, que designamos de experimentação, em que descrevemos o ocorrido no desenvolvimento das atividades.

Na quinta seção apresentamos as análises das atividades, em três categorias organizadas a priori: situação histórica, situação de comparação e situação de medida. Retratamos também, com base na observação do desenvolvimento das atividades dos alunos e de suas produções, a validação da sequência didática por meio do confronto das análises a priori e a posteriori. A esta seção designamos a última fase da engenharia.

Concluimos, por fim, nosso estudo, apresentando algumas considerações apontadas nas análises, destacando alguns resultados das atividades, que apontam as contribuições de uma sequência didática, como proposta de produto para as práticas docentes, bem como para sinalizarmos algumas limitações do mesmo, que nos levaram à indicação de novos estudos.

1 ANÁLISES PRÉVIAS

Esta seção corresponde à primeira fase da engenharia didática, que tem a finalidade de investigar e analisar como se assenta o tema *grandezas e medidas, em particular medida de comprimento* nas literaturas. Examinando sua origem e evolução, a abordagem em pesquisas anteriores no âmbito da Educação Matemática, bem como o tratamento desse objeto de estudo na ambiência escolar e concepções dos alunos a respeito. Para isso discorreremos sobre alguns componentes que delinearão a trajetória da nossa pesquisa e a construção do nosso produto educacional, uma sequência didática.

Tais componentes consistem em um apanhado histórico sobre pesos e medidas, levantamento bibliográfico referente a estudos correlatos a nossa pesquisa, que junto com algumas reflexões acerca dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) nos conduziram à consistência da justificativa e problemática em questão, permitindo-nos elaborar nossa questão de pesquisa, os objetivos e o caminho para alcançá-los.

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE PESOS E MEDIDAS

Nesta subseção faremos uma breve abordagem histórica sobre pesos e medidas, com o propósito de evidenciar a origem de conceitos matemáticos referentes à Grandeza e Medidas, por meio da trajetória e a evolução dos sistemas de medidas desde as primeiras ações de medir praticadas pelo homem, em busca de seu alimento para sobreviver. Perpassando, dessa maneira, por diversas situações de medida até a elaboração do primeiro sistema de pesos e medidas para ser utilizado internacionalmente. Para este estudo histórico nos apoiamos nos seguintes referenciais: Boyer (1981), Machado (1987), Dilke (1988), Eves (2004), Silva (2004) e Zuin (2009).

1.1.1 Os primeiros passos em direção ao recorte da história sobre pesos e medida

Para os PCN a história da matemática pode oferecer contribuições ao processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, revelando estes como uma criação humana, por meio de suas necessidades de contar e medir. (BRASIL, 1998).

O professor ao abordar conceitos matemáticos atrelados a sua história oportuniza ao aluno a origem e evolução desses conceitos, clarificando e buscando dar respostas a alguns “porquês” que permeia o pensamento do aluno. Nesta direção, conforme os PCN, a história da

matemática acaba constituindo veículos de informação cultural, sociológica, antropológica de grande valor formativo. Assim tornando-se um instrumento de resgate da própria identidade cultural e também contribui para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1998).

A história sobre pesos e medidas faz parte de um dos grandes blocos de conteúdos da matemática que constitui os PCN, o de "Grandezas e Medidas", o qual se mostra fortemente ligado ao contexto histórico e social da humanidade, nas práticas cotidianas das pessoas, que muitas das vezes, sem perceber confrontam-se com diferentes grandezas, entre elas: comprimento, massa, capacidade, área, volume entre outras. Essas práticas ocorrem há muito tempo, por meio das variadas formas de medir.

Desde os primórdios até os dias atuais o ato de medir é tratado como um conhecimento inerente ao homem para perceber o seu meio físico. As coisas que comemos, usamos, compramos, o tempo que levamos para acordar, nos deslocar de um lugar a outro, o modo como comercializamos entre outros, tudo nos remete a ações de medir referente a alguma grandeza. Uma das primeiras formas em que se fez o uso da medida foi pela necessidade do homem em medir as coisas, adotando inicialmente partes do corpo para mensurar, como pés, mãos, dedos entre outros. (detalharemos mais a frente).

No entanto, à medida que as civilizações e o comércio foram crescendo, foi-se exigindo uma comunicação mais cuidadosa a respeito de tal prática, uma forma padronizada, que atendesse às diversas civilizações. O homem foi observando que suas práticas em medir eram complexas, pois como medir com o pé, uma vez que este variava de uma pessoa para outra?

Nesse contexto, evidenciamos um percurso histórico sobre pesos e medidas, em particular medida de comprimento, desde os primeiros movimentos em relação à ação de medir até a oficialização do sistema de medida padrão, organizados em dois momentos: o primeiro aborda as primeiras práticas referentes ao ato de medir, e o segundo consiste num breve apanhado da busca pela medida padrão universal.

1.1.2 Um apanhado geral das práticas de medidas de alguns antigos povos

De acordo com algumas literaturas, entre elas Boyer (1981), Eves (2004), que abordam estudos acerca da história da matemática, e autores que realizaram pesquisas a respeito das histórias dos pesos e medidas Silva (2004); Machado (1987) e Zuin (2009)

ênfatizam as primeiras relações do homem com as práticas matemáticas diante da necessidade de medir e contar.

Segundo Eves (2004), desde a Idade da Pedra (talvez 5000 000 a. C.), que não sabemos ao certo quando se iniciou, os primeiros povos que habitavam em áreas abertas das savanas com erva alta que cobria grande parte das porções habitáveis da África, sul da Europa, sul da Ásia e América Central, viviam da caça de pequenos animais selvagens, de frutas e raízes que colhiam. Eram nômades e quando o lugar não oferecia mais o seu sustento, partiam em busca de outra morada, deslocavam-se de um lugar para outro, em busca de alimentos e de um clima que favorecesse a sua sobrevivência, deste modo não necessitavam de um sistema de medida elaborado. Só precisavam de noções básicas como “maior que”, “menor que”, desenvolvendo instintivamente o processo de comparação para escolha de seus alimentos e para produzir seus instrumentos de caça de acordo com o tamanho de sua presa.

No entanto, perto do final da idade da pedra, aproximadamente 3000 a.c, em algumas partes do mundo o homem primitivo passou por dificuldades de sobrevivência devido as mudanças climáticas, pois as savanas se tornavam áridas e sem vida, como foi caso do norte da África, do Oriente Médio e da Ásia. Os povos da África encontraram água no vale do rio Nilo, enquanto que do Oriente médio foram amparados pelos rios Tigres e Eufrates (EVES, 2004).

Com crescimento populacional, as práticas de colheita e caça não eram suficientes para esses povos se alimentarem. Devido isso, houve a necessidade de desenvolver uma agricultura intensiva em grande escala e a domesticação de animais, surgindo profundas modificações culturais. O homem deixou de ser nômade, começou a cultivar a terra e construir suas casas, precisando assim, criar meios de realizar medições. Segundo Silva (2004), pode ter sido a partir desse momento que surgiram as primeiras unidades de medida, e por facilidades, elas foram baseadas nas dimensões do próprio corpo, denominadas medidas antropométricas, entre elas destacam-se: as mãos, pés, dedos, polegada, jarda ou a medida dos braços abertos, uma vez que, não era necessário carregar um padrão. Por ser uma forma de mensuração acessível, algumas dessas medidas, como a polegada, os palmos e a jarda continuam sendo empregadas até hoje. No entanto, com valores correspondendo a unidade centímetro: 1 polegada = 2,54 cm; 1 pé = 30,48 cm e 1 jarda 91,44 cm.

Segundo Zuin (2007), há indícios que essas práticas se remetem à origem das civilizações, entre os primeiros grupos, as civilizações antigas no Egito e na Mesopotâmia. No Egito, por conta dos povos estavam localizados nas margens do rio Nilo e Mesopotâmia, por estarem localizados nas delimitações entre os vales dos os rios Tigres e Eufrates.

Essas medidas foram utilizadas por muito tempo pelas civilizações egípcias babilônicas, entre outras (destacaremos a frente) para calcular o comprimento, tornando o sistema de medidas mais antigo e universal, um sistema acessível, onde todas as pessoas o compreendiam facilmente, além de portá-lo consigo mesmas (SILVA, 2004). No entanto, a inconveniência dessas medidas foi surgindo, pois, esse modo de medir não era preciso e se diferenciava de indivíduo para indivíduo, causando confusões e dificuldades na comunicação. Mesmo porque, essas medidas não possuíam múltiplos e submúltiplos derivados de uma determinada unidade.

Com a comercialização, construção de cidades, de navios, divisão de terras, crescimento das atividades de modo geral, o indivíduo teve que encontrar uma alternativa para utilizar essas medidas, para promover o convívio em sociedade e negociações justas entre todos em qualquer lugar. Foi então que, embora menos prático, foram criados os padrões materiais, como barras de pedra, para representar o cúbito padrão, que por sua vez havia de vários tamanhos. O cúbito padronizado pelos sumérios (49,5 cm), por exemplo, era diferente dos egípcios (52,3 cm), que por sua vez, distinto dos assírios (54,9 cm) (MACHADO, 1987).

O pé foi usado por vários povos, como medida linear, e padrões que variavam entre 10 e 12 polegadas ou, ainda 16 dedos. O padrão mais antigo dessa medida estava representado no regaço (espaço da saia ou avental no corpo da estátua) da estátua de Gudea, com o desenho de uma régua equivalente a medida de um pé, dividida em 16 partes, tendo um comprimento de 26 cm. “Gudea fora governador de Lagash no período de 2144 a. C a 2124 a. C”. (LEÓN, 2006, apud ZUIN, 2009, p. 10). Nessa época essas medidas eram representadas em monumentos, por serem meios estratégicos de acesso à visualização por parte dos povos e pela relevância que eles atribuía a tais medidas.

Em face das medidas antropométricas, o uso de membros do corpo humano como unidade de medida não foi atributo somente de medidas lineares. O homem também utilizou o punhado como unidade de medida de volume, e fez uso de suas mãos para comparar o peso de objetos. Colocavam objetos um em cada uma das mãos para verificar a desigualdade do peso, utilizando as mãos como balança. (SILVA, 2004).

No Egito há cerca de 4000 anos, as medidas lineares foram baseadas no cúbito real ou côvado (antebraço), que consistia na distância do cotovelo até a ponta do dedo médio do faraó. No entanto, como as pessoas têm tamanhos diferentes, o cúbito variava de uma pessoa para outra, eclodindo assim confusões nos resultados das medidas, como citado acima. Para minimizar tal problema os egípcios resolveram fixar um padrão único, substituindo as partes do corpo como instrumento de medida por barras de pedras com o mesmo comprimento, dando

origem ao cúbito padrão. Este por sua vez, passou a corresponder aproximadamente a 52,3 centímetros cujas subdivisões foram palmas (a largura da palma da mão excluindo o polegar) e o dígito (largura do dedo). Sendo uma palma (7,5 cm) correspondente a quatro dígitos (4 x 1,87 cm), sete palmas correspondente a um cúbito (DILKE, 1988). Além dessas medidas, desenvolveu também medidas para grandes extensões, como o caso das cordas que continham nós, a cada intervalo entre dois, correspondiam a 5 cúbitos. Esticando essas cordas, era possível medir facilmente grandes distâncias.

De acordo com Silva (2004) apoiado em Oates (1979), os povos da Mesopotâmia (entre eles babilônios, assírios e sumérios), possuíam um sistema de medida excepcionalmente consistente e simples, mas os valores exatos das unidades não são conhecidos por nós, pois variavam de uma cidade para outra, principalmente entre os períodos históricos.

As medidas lineares tinham como base o cúbito sumeriano de aproximadamente 49,5 centímetros. Para esta civilização 1 dígito corresponde 1,65 cm; 30 dígitos = 1 cúbito (côvado), o qual corresponde a 49,5 cm. Enquanto que na Grécia, havia como base para medida de comprimento o *pé*, seu valor numérico variava de uma região para outra entre 27 e 35 cm. No entanto, mesmo com a padronização do cúbito adotado pelas civilizações, ainda havia necessidade de se uniformizar uma medida, ou seja, que atendesse a todos os povos, justamente para evitar as confusões referentes a cada sistema de medida.

Tal problema tornou-se latente com a expansão das relações comerciais e o colonialismo. Segundo Zuin (2009), diante dessas situações, algumas comunidades aceitavam e mesclavam o seu sistema com outros povos, e outros rejeitavam qualquer envolvimento, pois a tradição predominava, de modo a não cederem às unidades de medidas estrangeiras. Outro motivo se remetia à própria comodidade e questões religiosas. Sendo este último inerente às formas de representar as medidas, por exemplo: os crucifixos possuíam altura de uma braça (medidas do braço aberto).

Conforme a autora, esses padrões de medidas oficiais eram reproduzidos e mantidos em palácios, templos, igrejas e alcançavam status de objeto venerável, com isso contribuía para o fortalecimento da oposição em relação aos padrões que surgiam ou padrões oriundos de outras regiões. Isso era uma forma de se resguardarem e manterem tal padrão. Contudo, com o crescimento social a necessidade de comunicação e comercialização entre diferentes regiões fez com que perdurasse a busca pela padronização de medidas que atendessem a todos.

1.1.3 Em direção à medida de comprimento de padrão universal

Algumas tentativas de padronização das medidas perduraram ao longo do tempo. No fim do século XVIII, com o avanço do comércio e da indústria na Europa houve a necessidade de se implantar uma linguagem de medidas, emergindo na França o movimento pela uniformização dos padrões de medida. Contudo, assim como nas antigas civilizações, na França e demais países da Europa, existiam diferentes padrões de peso e medida. Utilizavam como unidade francesa de medida linear, a toesa, que correspondia ao comprimento de seis pés, ou aproximadamente 182,9 cm, padronizada no século XVII.

Segundo Zuin (2009), na Inglaterra os padrões mais usados para medir comprimento eram a polegada, o pé, a jarda e a milha terrestre. O valor da jarda correspondia à distância entre o nariz e o polegar do braço estendido de Henrique I, enquanto no norte da Europa, a jarda equivalia ao comprimento do cinto masculino utilizado pelos anglo-saxões, enquanto no sul, era o dobro da medida de um cúbito. A milha terrestre correspondia a mil passadas percorridas pelos soldados romanos ao caminharem pelas terras conquistadas. Essas passadas equivalem ao comprimento de um passo duplo, que por sua vez correspondia aproximadamente a 5 pés. “Esse padrão ainda é utilizado atualmente, com algumas modificações, e equivale a 1609 metros”. (MACHADO, 1987, p. 22).

Diante dessas complexidades surgiu na França o movimento pela uniformização dos padrões de medida. Uma trajetória lenta, que perdurou por alguns anos. O primeiro a tentar estabelecer uma medida padrão foi Jean Felix Picard (1620-1682), clérigo e astrônomo francês, ao medir a distância entre dois meridianos e propor como medida a longitude percorrida por um pêndulo simples em um segundo (ZUIN, 2009). Contudo, nessa época verificou-se que a medida não era constante, dependia da aceleração do peso dependurado ao fio, e esta variava com a altitude.

Com o fim da Revolução Francesa, a Academia de Ciências de Paris, em 1790 organizou-se e criou uma comissão para elaboração do sistema padrão de medida, pois a multiplicidade das medidas provocava problemas notórios nas atividades administrativas, comerciais e científicas. A comissão foi constituída por um grupo de cientistas, como astrônomos, matemáticos, diplomatas entre outros, com intuito de buscar uma medida padrão com base na natureza, fixo e imutável, além de ser facilmente determinado e com acesso ao mundo todo. (ZUIN, 2009).

De acordo com Silva (2004), com a incumbência de desenvolver um novo sistema de pesos e medidas, a Academia adotou três possibilidades a serem discutidas para unidade de

medida linear: a adoção do comprimento do pêndulo batendo o segundo; uma fração de um arco do equador terrestre; ou uma fração de um arco de meridiano terrestre. As duas primeiras possibilidades foram criticadas e abandonadas, a Academia acolheu a ideia referente à fração de um arco de meridiano, dando um grande passo a caminho do sistema métrico decimal. A respeito disso, a autora detalha o processo:

Fixou-se que a décima milionésima parte da quarta parte de um arco de meridiano terrestre, medido entre o Equador e o Pólo Norte seria adotada como unidade de medida linear, denominado *metro*. Estabeleceu-se, então, que um arco meridiano de aproximadamente 9,5 graus seria medido entre Dunkerque, na França, e Barcelona, na Espanha, e o resultado dessa medição seria usado como unidade-padrão para a nova unidade de medida linear. (SILVA, 2004, p. 83).

Essa proposta da Academia foi aceita pela Assembleia Nacional e sancionada por Luis XVI, mas o problema prático da realização das medidas mantinha-se. Foi então autorizada a construção de padrões de comprimento e massa, somente para uso provisório, uma vez que a empreitada da medição do meridiano seria longa. Com isso, foram confeccionados uma barra de platina pura, para representar o *metro*, e um quilograma, denominado *grave* (unidade de massa). O metro provisório, em latão, correspondia a 0,512907 toesa¹. Para os submúltiplos do metro, foram determinados os prefixos latinos- déci, centi, milli – e, para os múltiplos, prefixos gregos – deca, hecto, kilo (ZUIN, 2009, p. 25).

No entanto, segundo Silva (2004) o propósito dos cientistas era desenvolver um novo sistema de pesos e medidas que pudesse ser adotado internacionalmente. Mas todos os sábios estrangeiros convidados a participar das medições, não concordaram com tal proposta e retiraram o apoio a este sistema métrico. Pois, muitos consideravam que os gastos previstos para esse implemento era excessivo.

Com a conclusão das medições do meridiano de Dunkerque em 1798, foi definida a unidade padrão de comprimento, o metro como a *décima milionésima parte de um quarto de meridiano terrestre*. Deste modo o metro corresponderia a um comprimento de 0,513074 da toesa, em virtude de dois cientistas da academia responsáveis por esta medição, Delambre e Méchain, estabelecerem que o quarto do meridiano de Paris fosse equivlente a 5.130740 da toesa.

¹Zuin (2009) – Toesa, unidade francesa de medida linear, que foi padronizada no século XVII, representada por uma barra de ferro com dois pinos nas extremidades. A medida padrão de uma toesa correspondia a seis pés ou, aproximadamente, 182,9 cm.

Esses padrões construídos (metro e massa) foram transformados em padrões nacionais no final de 1799, na França para posteriormente atingir outros países do mundo. Com a necessidade de um bom sistema de medida em toda Europa, este logo foi adotado como sistema francês. No entanto, o país que mais postergou a sua implementação foi a própria França, onde se tornaram popular 40 anos depois. Já no Brasil esse sistema passou a ser usado oficialmente a partir de 1938.

No entanto, Machado (1987) destaca que a definição do metro não encerrou por aí, houve novas propostas. A mais recente, passou a vigorar em 1983, com base na velocidade da propagação da luz, a qual corresponde a “uma fração da distância percorrida pela luz no vácuo, em um determinado espaço de tempo.” (SILVA, 2004, p. 97). Ao se propagar a luz percorre 300.000 km a cada segundo, com isso, o metro equivale $1/300.000.000$ desta distância, em 1 segundo.

Esse apanhado histórico contribuiu para que tivéssemos uma compreensão da origem e evolução de conceitos referentes à grandeza e medida, ao ponto de enfrentarmos um grande desafio, elaborar uma sequência didática, que fomente os alunos à investigação dos porquês e da relevância do objeto de estudo em questão. A partir desse percurso histórico construímos um pequeno texto com recortes inerente a pesos e medidas, evidenciando informações importantes para o desdobramento das atividades desta sequência, para ser trabalhado com os alunos do 6.º ano do ensino fundamental.

Isto, com a intenção de motivá-los e provocar indagações, discussão sobre o texto, o desejo de conhecer a trajetória e a evolução do sistema de medidas, e as dificuldades enfrentadas pelos povos antigos para dinamizar suas práticas em relação a grandezas e medidas. Além de suscitar questões que lhes direcionem para a importância da necessidade de medir, como medir, abordar diferentes formas de medir, até chegar à unidade de medida de comprimento padrão e suas convenções, de modo a apresentar aos alunos a contribuição social e histórica desses conceitos matemáticos.

1.2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO ACERCA DO ENSINO DE GRANDEZAS E MEDIDAS COM ÊNFASE NO COMPRIMENTO

Nesta subseção apresentamos recortes de algumas dissertações e teses nacionais publicadas de 1995 a 2013, correlacionados com o estudo de grandezas e medidas, em particular o comprimento, com intuito de prover consistência e delimitar a nossa questão, o objetivo, além de apontar alguns referenciais teóricos, ao quais delinearão a construção do

nosso produto pedagógico, a sequência didática. Deste modo, detivemo-nos na busca por estudos com temas que remetem, de alguma forma, direta ou indiretamente às noções de comprimento.

Para realizar este levantamento utilizamos como fonte de busca o portal da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) Nacional, portal da Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior (CAPES) e o portal da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Esta última possui um Grupo de Pesquisa Pró-Grandeza do Programa de Pós-Graduação da UFPE, que desenvolve estudos acerca de grandezas e medidas, com foco em grandezas geométricas, contemplando pesquisas relevantes para o nosso estudo.

Dentre as pesquisas encontradas, selecionamos dez trabalhos, entre eles três teses e sete dissertações, sendo uma com abordagem referente à formação de professores e as demais voltadas para o ensino. Todas com temas que remetem de alguma forma direta ou indiretamente ao conceito de comprimento, ora enfatizando como grandeza como estudos de Brito (2003), Teixeira (2004), Barbosa (2007) e Silva, J. (2011), ora como medida. Entre eles destacamos os trabalhos de Moura (1995), Palaro (2006), Backendorf (2010), Rodrigues (2007), Silva, C. (2011), Abbondati (2013). Neste sentido, classificamos este levantamento bibliográfico em duas categorias: estudos que evidenciam o conceito de comprimento na perspectiva de grandeza, e estudos que evidenciam o conceito de comprimento na perspectiva de medida.

1.2.1 Estudos que evidenciam o comprimento na perspectiva de grandeza

Para esta categoria consideramos os trabalhos que abordam o conceito de comprimento como grandeza, por meio da comparação sem ação de medir, estabelecendo a relação de maior, menor ou igual. Entre os trabalhos, destacamos: Brito (2003), Teixeira (2004), Barbosa (2007) e Silva, J. (2011).

Nesta categoria todos os autores acima selecionados fazem parte do Grupo de Pesquisa Pró-Grandezas: ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, constituído em sua maioria por professores da educação básica e alunos de pós-graduação. Este grupo faz parte do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPE, tem o objetivo de discutir situações de ensino e aprendizagem de grandezas geométricas.

Brito (2003), Teixeira (2004), Barbosa (2007) e Silva, J. (2011) para realizar seus respectivos estudos apoiaram-se no modelo didático proposto por Regine Douady e Perrin-

Glorian (1989) na abordagem do conceito de área, enfatizando a distinção e articulação entre três quadros²: o geométrico, o das grandezas e o numérico. Sobre esses quadros, Silva, J. (2011) apoiado em Perrot (1998) discorre:

Quadro geométrico: constituído pelas linhas e superfícies. Quadro das grandezas, comprimento e áreas: com processo de comparação bem escolhida, nem sempre numéricos, se pode realizar classes de equivalências de linhas, de superfícies; com processos operatórios adequados sobre linhas, superfícies, se pode induzir uma lei interna sobre as grandezas. O quadro numérico, consistindo nas medidas do comprimento das linhas e da área das superfícies, que pertencem ao conjunto de números reais não negativos: linhas ou superfícies pertencendo a mesma classe, tendo a mesma grandeza, têm também a mesma medida, qualquer que seja unidade escolhida. (PERROT et al., 1998, apud SILVA, J., 2011, p.30).

De modo análogo esses autores utilizaram a relação entre os três quadros para construção do conceito da grandeza comprimento, atribuindo ao quadro geométrico as linhas abertas ou fechadas, ao das grandezas o comprimento e ao numérico, por sua vez, a medida de comprimento.

As situações exploradas por esses autores, com exceção de Silva, J. (2011), restringiram-se à passagem do quadro geométrico para o das grandezas, sem intervir no quadro numérico, ou seja, das medidas, com intenção de comparar comprimentos sem fazer uso dos números, estabelecendo uma comparação, se tal comprimento é maior, menor ou igual, possibilitando ao aluno a compreensão do conceito deste como grandeza. Enquanto que Silva, J. (2011) procurou analisar os livros didáticos apoiado na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e também utilizando os três quadros.

Brito (2003), com base no modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) para abordar o conceito de comprimento como grandeza, realizou um estudo exploratório com aplicação de teste diagnóstico em uma turma com 35 alunos do 2º ciclo (5º ano), do ensino fundamental, composto de seis questões, envolvendo situações problemas acerca da comparação sem ação de medir e produção de comprimento (segmentos, linhas poligonais abertas e curvas planas) e de perímetro (curvas planas fechadas), para serem resolvidas em dois momentos: um no ambiente papel e lápis, outro com uso de materiais manipuláveis.

O teste foi elaborado pela autora com situações-problema, explorando a distinção e articulação entre os dois primeiros quadros, com o intuito de evidenciar que linhas diferentes

² Douady (1993) apud Almouloud (2007, p.64) - Caracteriza o quadro como sendo constituído de ferramentas de uma parte matemática, de relação entre os objetos, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e ser diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida.

podem ter o mesmo comprimento, que tanto segmentos de reta como linhas curvas têm comprimento. Além de considerar o comprimento de um contorno como uma propriedade dele próprio, que não se confunde com ele e que é invariante, para algumas transformações nele operadas.

De acordo com a autora em ambos os momentos para resolução das questões os alunos tiveram o auxílio de uma “caixa de ferramentas”, contendo borracha, canetas hidrográficas de cores diferentes, lápis e tesoura escolar. E também alguns instrumentos que serviram de medianeiros³ para trabalhar a comparação de grandezas como régua transparente, régua de cartolina não graduada, fios finos e flexíveis e dois cordões com cores diferentes.

Conforme a análise dos resultados ao final das atividades, a autora apontou que os alunos obtiveram um melhor resultado diante de situações problema apresentados na medida em que utilizaram os materiais manipulativos. Isto, além de observar que o uso dos instrumentos nos dois testes permitiu uma comparação direta dos comprimentos, possibilitando a compreensão da noção de comprimento como do perímetro, sem que fosse necessário se apropriar do quadro numérico. No entanto, Brito (2003) salienta que a noção de comprimento quando faz referência apenas a segmento de reta, é mais bem compreendida pelos alunos, do que quando se explora situações envolvendo linhas poligonais abertas ou linhas curvas.

Por sua vez, Teixeira (2004) realizou um estudo com objetivo de investigar e identificar as concepções de alunos do 2º e 8º períodos do curso de Pedagogia (futuros professores) sobre as noções de comprimento e perímetro.

A autora desenvolveu ações sobre as noções de comprimento e perímetro, distinguindo e articulando o quadro geométrico e o das grandezas, sem intervir no numérico, evidenciando o comprimento sem fazer o uso de números. Para a autora, a comparação entre comprimentos só é possível pela relação de ordem firmada no domínio das grandezas em jogo, indagando se tal comprimento é maior, menor ou igual a outro.

Nas atividades propostas, a autora explora as noções de comprimento de linhas, tanto retas como curvas, relativas à comparação se é maior, menor ou igual e as estratégias utilizadas (por sobreposição dos instrumentos ou pela observação visual) para solução. Isto, além de situações que identificassem se alunos apresentavam dificuldades entre grandezas e medida de grandezas, ou seja, se conseguiam dissociar a grandeza comprimento de seu valor numérico.

³ Medianeiros: Caracterizados por Brito (2003) como instrumentos da caixa de ferramentas que servem para mediar comparações que não podem ser feitas diretamente.

De acordo com a autora, os resultados apontaram que os alunos, dependendo da atividade, apresentavam concepções distintas, tanto relativas ao quadro das grandezas, como ao quadro geométrico. Além disso, um alto índice do uso de instrumentos flexíveis (cordão, fio e canudo) na resolução da atividade foi fundamental para a compreensão dos alunos a respeito de que o comprimento não é alterado se modificada a forma da figura. Situação que contribuiu para a ruptura da concepção geométrica de comprimento, geralmente encontrada nas salas de aula em que a linha e o seu comprimento são confundidos. Para a autora, os alunos conseguem compreender melhor a grandeza comprimento quando se apresentam figuras retilíneas, contrariamente à exploração das figuras curvilíneas.

Barbosa (2007) realizou um estudo com intuito de investigar, por meio de uma sequência de atividades, os eventos de visualização intitulados efeitos visuais a partir de comparações de comprimentos entre pares de linhas abertas. Tomando como base o quadro teórico de Douady e Perrin-Glorian, como fizeram Brito (2003) e Teixeira (2004), mas constatou que as dificuldades dos alunos nas atividades com a grandeza comprimento não eram genuinamente de natureza matemática, mas tinha outra raiz, a visualização. O autor propõe a inserção do aspecto de visualização que transversaliza os três quadros como viés, não de conhecimento matemático e, sim, cognitivo⁴, por entender que a visualização seja um aspecto integrante na construção do conceito da grandeza comprimento.

Nessa perspectiva, o autor realizou um experimento com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental por meio da aplicação de sequência de atividades, envolvendo situações que explorassem a transição do quadro geométrico para quadro das grandezas, sem auxílio de instrumento para sobreposição, apenas com recurso da visualização, devido ao foco de seu estudo ser: verificar as ocorrências de efeitos visuais, explorar atividades contendo comparações apenas entre segmentos de reta, sem o uso de medida, atrelado mais à observação visual e discriminação visual passiva. Neste sentido, Barbosa ficou atento durante as atividades nas possíveis influências visuais, tanto nas soluções corretas como nas incorretas.

Os resultados sinalizam que os alunos ao compararem comprimentos entre linhas abertas, evocam conhecimentos influenciados por fenômenos visuais (projeção horizontal e projeção vertical), os quais interferem nas respostas indicadas e que estão delimitados como integrantes da operação cognitiva de visualização. Conforme o autor, entre os efeitos detectados, o que mais ocorreu foi associação de números a comprimento. Algo que estava

⁴ Barbosa (2007) em seu estudo compreende que a noção de grandeza comprimento está conectada a visualização, que é uma manifestação que mantém a afinidade mais próxima ao campo cognitivo.

previsto pelo autor apenas para uma das atividades. Em seguida, apontou a ocorrência de efeitos que já eram esperados pelo autor, por ter ocorrência em experimentos anteriores como efeito de projeção horizontal, efeito espaço ocupado, além de detectar outras modalidades distintas de efeitos, que o denominou de Interferência, sendo elas projeções oblíquas e associar posição a comprimento.

Segundo o autor, o procedimento mais utilizado pelos alunos para a resolução das atividades foi a observação visual e depois o uso de artifício⁵. O primeiro representou 74,20% dos casos e o segundo, 25,80%. Para Barbosa, esse índice é natural, pelo fato de não ter sido disponibilizado “ferramentas” que servissem como medianeiros, fato que acabou favorecendo a busca por esse recurso. Diante disso, Barbosa indica novos estudos que possam explorar as comparações, considerando as duas etapas da discriminação visual ativa de natureza contínua: direta e indireta. Nesse caso, envolvendo situações com entes fixos e com entes móveis.

Silva, J. (2011) em seu estudo fez uma análise sobre abordagem das grandezas geométrica de comprimento, área e perímetro por meio da análise em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental, a luz teórica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores. O autor toma como base para tal análise o modelo de Douady e Perrin-Glorian (1989).

O autor buscou investigar como os livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental que abordam as noções de comprimento, área e perímetro fazendo uso de livros aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2008 e de 2011 e elegeu 16 livros para ser analisados, dividindo em três etapas e criando critérios para efetivar seu refinamento.

Seus resultados apontaram que o conteúdo em questão concentrava-se na segunda metade do livro, e muitas vezes no final, na iminência de não serem trabalhados com os alunos. As tarefas preponderantes identificadas nos livros foram: “Medir o comprimento”, converter uma unidade de medida de comprimento em outra unidade de comprimento e escolher uma unidade de medida.

Para o autor, esses tipos de tarefas podem levar os alunos a desenvolver concepções numéricas considerando o comprimento como apenas número, minimamente explora o comprimento como grandeza. Por outro lado, as tarefas menos exploradas nos livros são as que envolvem medida de comprimento de curvas simples não poligonais.

⁵ Segundo Barbosa (2007) o uso de artifício remete a categoria de procedimento adotado pelo aluno para descobrir a linha mais curta em cada atividade.

A partir dos resultados das análises o autor concluiu que o foco dos capítulos de comprimento, área e perímetro, assenta-se nas medidas e com a ausência de abordagem acerca da grandeza, ou seja, com tarefas dentro campo numérico, remetendo a uma ideia de que só existe grandeza nas situações com números.

Nesta categoria observamos que os autores citados partiram do mesmo pressuposto teórico (Douady; Perrin-Glorian, 1989). Assumindo inicialmente a necessidade de desenvolver em sala de aula de matemática tarefas que enfoquem as noções de área e comprimento considerado como grandeza. Após a construção dessa ideia é que se deve abordar tais noções no campo numérico. Os autores em estudo consideram como fonte de dificuldade de aprendizagem para os alunos quando não se toma os devidos cuidados na diferenciação entre grandeza e medida.

Estas pesquisas chamaram nossa atenção para forma como tratamos os conteúdos do bloco grandezas e medidas na ambiência escolar, principalmente conceitos relativos às grandezas geométricas. Segundo esses autores, geralmente a ênfase está sobre as medidas. Essa situação clarifica-se quando compreendemos o modelo proposto pelas pesquisadoras Douady e Perrin-Glorian (1989) para o conceito de área como grandeza autônoma (detalhes mais a frente).

1.2.2 Estudos que evidenciam o comprimento na perspectiva de medida

Os estudos que evidenciam o comprimento na perspectiva de medida foram caracterizados pelas pesquisas que abordaram o conceito comprimento com enfoque na medida, explorando as diferentes unidades expressas por números reais positivos, utilizando o contexto histórico, práticas não convencionais de medir para introduzir tanto o conceito de medida, como medida de comprimento. Entre os trabalhos apontamos Moura (1995), Backendorf (2010), Rodrigues (2007), Silva, C. (2011), Abbondati (2013) e Palaro (2006). Esta última será apenas mencionada neste levantamento, pois utilizaremos como apoio no referencial teórico como basilar para noção de comprimento o defendido por Lebesgue.

Moura (1995) desenvolveu um estudo intitulado *A medida e a criança na pré-escola*, com o objetivo de observar as ações de medidas da criança a partir de situações interativas. Para alcançar esse objetivo desenvolveu um estudo histórico e epistemológico, acerca da medida tomando como base a teoria dos estágios cognitivo do desenvolvimento, da noção de medida de Piaget, na intenção de esclarecer os níveis atingidos pelos alunos durante as

atividades. Para análise das medidas, a autora fundamentou-se em Vygotsky com enfoque sócio-interacionista.

Moura (1995) analisou oito episódios selecionados, com oito atividades de ensino acerca da ação de medir, aplicada em duas turmas com alunos de faixa etária de 5 e 7 anos. Nessas atividades, a autora procurou explorar o conceito de medida que as crianças traziam consigo, umas das atividades atreladas a esse conhecimento cultural foi a questão: o que significa medir? Para as crianças: “*medir significa, quanto a gente comeu, quanto a gente pesa, ver a nossa altura*” (MOURA, 1995).

A pesquisa foi fundamentada sob dois enfoques: matemático e educacional. O primeiro referente aos aspectos que constituem a ideia matemática de medida, a seleção da unidade de medida, a comparação com a grandeza a ser medida e a expressão numérica desta comparação. O segundo relativo a aspectos educacionais da teoria sócio histórica na formação da noção de medida, como: o imaginário, o simbólico, os significados culturais e o lúdico. Aspectos que ocorrem por meio de uma situação de ensino e que ao mesmo tempo contribuem para formação integral da criança.

Para a autora, explorar o conceito de medida que suscite o conhecimento prévio das crianças é essencial para a construção gradativa do conhecimento escolar matemático. Além de propor situações que relacione medida à contagem da realidade discreta, e situações que provocam a criança a sentir a necessidade de transcender esse campo, ao conhecer e utilizar as grandezas contínuas, explicitando o número que expressa a medida é diferente do número que expressa um conjunto de objetos.

Rodrigues (2007) buscou validar a aplicação de um módulo de ensino sobre medidas e grandezas no ensino fundamental, envolvendo comprimento, capacidade, massa, área e volume. Ela realizou uma pesquisa experimental, com intuito de caracterizar as concepções que os alunos do 9º ano do ensino fundamental tinham sobre medir, medidas e sistemas de medidas, com base na visão de Skemp (1980) sobre conceitos e esquemas.

A autora realizou inicialmente uma pesquisa exploratória, por meio de questionários investigativos, envolvendo situações-problema acerca dos assuntos relacionados medidas e grandezas. Os resultados revelaram que os alunos possuíam conceitos incompletos, superficiais e primários sobre medidas, unidades de medidas e seus instrumentos, algumas dificuldades nas transformações de medidas de comprimento, capacidade, massa, área e volume. Além disso, geralmente não conseguiam relacionar esses assuntos com o cotidiano. Para a autora, os alunos não tinham o conceito de medir como comparação entre grandezas de mesma natureza necessitando, assim, de uma intervenção pedagógica sobre esse assunto.

Diante desse resultado a autora produziu um módulo de ensino que abrangesse as dificuldades destacadas anteriormente. Com objetivo de identificar os limites e as possibilidades de aplicação dos conceitos matemáticos, para promover aos alunos a construção das competências métrica presentes nos PCN do 2º ciclo referente à ampliação e construção da noção de medir de diferentes grandezas e uso de fórmulas para o cálculo de área de superfícies planas e cálculo de volume de sólidos geométricos.

Para tanto, Rodrigues (2007) elaborou uma sequência de atividades com questões que foram selecionadas e adaptadas de acordo com o grau de conhecimento prévio do aluno, enfatizando todos os assuntos supracitados referentes a grandezas e medidas. Após o desenvolvimento das atividades a autora apresentou uma avaliação final com as mesmas questões da avaliação inicial, composta por quatro questionários, distribuídos de maneira aleatória entre os alunos. Isto, com o intuito de verificar se houve a aprendizagem sobre os assuntos básicos de medidas e grandezas e assim, validar sua pesquisa.

A autora afirma ser relevante trabalhar a construção dos saberes a partir daquilo que o aluno traz com as experiências do cotidiano. Buscar, assim, caminhos para desenvolver ações investigatórias, que levem o aluno a aguçar suas curiosidades e sua criatividade, de modo a inter-relacionar as diferentes formas de expressar o seu conhecimento dentro e fora de sala de aula. Deve, também, promover atividades que os alunos possam utilizar diversas unidades não convencionais para poder chegar às convencionais.

Os resultados da pesquisa investigatória acerca dos questionários da avaliação inicial realizado pela autora são de grande relevância, pois reforçam o nosso pensamento em desenvolver estudos referentes a grandezas e medidas. Principalmente quando a autora destaca que poucos alunos possuem a compreensão sobre o conceito de medir, a necessidade de medir, o uso dos instrumentos adequados, conversão das unidades entre outros. Isto fica claro em umas das perguntas dos questionários: *Quais são suas dificuldades sobre conceito de medidas?* Em resposta, a autora obteve 35% que responderam: *tudo* e 34% não responderam.

Diante disso, é pertinente evidenciarmos a problemática que envolve o processo de ensino e aprendizagem acerca de grandezas e medidas, uma vez que os estudos de Rodrigues (2007) têm como sujeitos, alunos que se encontram no 9º ano do ensino fundamental. Subtende-se que tal conteúdo seria de conhecimento destes, pois esse assunto, conforme o currículo, se introduz a partir do 1º ciclo do ensino fundamental. Outra pergunta que nos chamou a atenção, ou melhor, o resultado das repostas dos alunos: *Em sua concepção, o que é medir?* 60% dos alunos responderam: *saber o tamanho exato de uma certa coisa*. Isso nos faz

refletir que talvez tenham uma noção sobre medir, porém um pouco superficial, a ideia do que seja medir. Sobre esse resultado comungamos da mesma análise da autora, em que afirma que os alunos ainda não compreendem completamente o conceito de medir, eles relacionam o comprimento do objeto ao conceito.

Banckendorf (2010) fez um estudo sobre medida de comprimento e área em virtude das dificuldades apresentadas por seus alunos do ensino médio relacionado a este tema, principalmente na conversão de unidade e confusão entre perímetro e área. A autora elaborou e aplicou uma sequência didática em uma turma do 5.º ano do ensino fundamental, com o objetivo de possibilitar a construção do conceito de medida de comprimento e área.

Para aproximar esses conceitos da realidade dos alunos, a autora elaborou questões, tendo como pano de fundo situações-problema da escola, como o caso de descobrir a quantidade de material necessário para fazer cortinas, sarrafos e outros. A partir dessas questões a autora desenvolveu atividades que instigassem os alunos a criarem estratégias para medir comprimento sem o uso de instrumento de medidas conhecido. Dessa forma, motivando-os à comparação de grandezas, a necessidade de criar unidades padrão para medir comprimento, a expressar numericamente o resultado da comparação de grandezas e a realizar trabalhos em grupo, a fim de trocar informações para solucionar o problema proposto.

Nesse contexto, percebemos que a autora buscou explorar o conhecimento prévio do aluno e sua criatividade diante de uma situação-problema. Sugeriu aos alunos que utilizassem o próprio corpo como instrumento de medida (dedo, palmo e dedinho) e incentivou-os a pesquisar a história sobre o metro, incluindo os seus múltiplos e submúltiplos.

A visão da autora em buscar na história o surgimento do metro foi de promover ao aluno o poder de decisão, pois a aula seguinte seria com base nas informações obtidas da pesquisa, para depois praticar os conhecimentos adquiridos. A partir desse momento os alunos puderam utilizar instrumentos de medidas conhecidos, como trena e régua graduada, para solucionar atividades referentes a convenções das medidas. Também foram utilizadas como instrumento palmo, dedo e dedinho. As conversões entre as unidades como metro, centímetro e milímetro. Por exemplo, Backendorf (2010) como mostra a figura 1:

Figura 1 - Quadro de atividade conversão de unidades
Cada grupo deverá converter em metros, centímetros e milímetros o que a turma toda mediu.

UNIDADE	TRILHOS DE ALUMÍNIO	SARRAFOS
PALMO		
METRO		
CENTÍMETRO		
MILÍMETRO		

Fonte: Backendorf (2010, p.174)

Backendorf (2010) conclui que por meio da proposta da sequência didática com atividades que envolvem questões relacionadas com a realidade dos alunos é possível promover a compreensão dos conceitos de medidas de comprimento, de perímetro e de área para alunos do 5º ano do ensino fundamental. Sugere que esta proposta pode ser utilizada com alunos do 6º ano.

Silva, C. (2011) desenvolveu um estudo acerca do tema grandezas e medidas, com o intuito de analisar indícios da formação de conceitos no campo das grandezas e medidas comprimento, massa e capacidade, com alunos do 4º ano do ensino fundamental. Para alcançar tal objetivo a autora elaborou sequências didáticas referentes às medidas de comprimento, massa e de capacidade com base nos 12 princípios propostos por Munis, Batista e Silva (2008):

1º princípio: O ponto de partida do estudo de medida é a percepção;

2º princípio: O estudo das medidas deve perpassar todo espaço curricular, fazendo-se presente do primeiro ao último dia de aula;

3º princípio: Todas as medidas devem iniciar com unidades arbitrárias;

4º princípio: A transferência da unidade arbitrária para unidade padrão deve ser uma decorrência de uma relação social do grupo em questão;

5º princípio: A transferência da unidade padrão para a unidade legal deve estar vinculada à história da civilização, de acordo com o nível de ensino;

6º princípio: É de fundamental importância que a escola estabeleça a relação entre as unidades legais com unidades culturais, caso não queira alijar sua função social;

7º princípio: No estudo de medidas, é importante que conheçamos a real função da manipulação do material concreto;

8º princípio: É preciso trabalhar a real dimensão do sistema de medidas adotado pela nossa cultura;

9º princípio: É preciso trabalhar com medidas, o professor deve ficar especialmente atento a esta fragmentação curricular. Sua atitude deve ser no sentido de tentar vincular as medidas, especialmente quando se trata de medidas de capacidade, volume, de comprimento, de superfície e de massa;

10º princípio: É preciso aceitar e explorar a inter-relação entre medidas e geometria;

11º princípio: A escola deve ser o espaço de se trabalhar o sistema legal de medidas, à medida que é, por excelência, espaço de socialização e de compreensão das relações estabelecidas na sociedade;

12º princípio: Este último princípio deve direcionar não só o estudo de decimais, como de qualquer outro conteúdo e de qualquer área do conhecimento. A escola deve estar atenta à capacidade do aluno de criar situações-problema e propor soluções para os impasses e conflitos gerados por estas situações vinculadas a sua vida cotidiana. (MUNIS; BATISTA; SILVA, 2008, apud SILVA, C., 2011, p. 67).

A partir desses princípios, Silva, C. (2011) realizou um trabalho para introduzir noções de grandezas de comprimento a partir da percepção dos alunos ao se referirem a perto, a longe e a curto, fazer uso das partes do corpo para medir distância e objetos; chegar à unidade padrão a partir de unidades relacionadas com a vida cotidiana dos alunos.

Segundo a autora o estudo apontou que propor situações-problema para relacionar grandezas e medidas de comprimento, massa e capacidade proporciona tanto a construção dos conceitos referidos como outros. Entre eles: comparação, quantificação, proporção e números decimais, pois, os alunos compreenderam que para medir uma grandeza é necessário comparar, escolher a unidade a ser medida de forma que possamos quantificar e expressar a grandeza em forma de número.

Abbondati (2013) desenvolveu um estudo relacionando a conteúdo da matemática com uso das tecnologias, elegendo os tópicos grandezas e medidas e porcentagem. O autor objetivou o desenvolvimento e aplicação de Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) na plataforma Moodle, para ser trabalhado com alunos do 9º ano do ensino fundamental.

A respeito de grandezas e medidas, Abbondati (2013) procurou enfatizar o conceito de medidas por meio de estudos de diferentes grandezas, utilizando diversas abordagens, como história, o emprego de padrões não usuais de unidades e o uso de atividades interativas com os seguintes recursos: textos, imagens, áudio, vídeo, animações em flash e aplicativos geogebra⁶.

Assim, o autor apresentou algumas atividades denominadas de lições sobre noções de grandezas e medidas, divididas em quatro unidades: unidade 1- comprimento; 2- superfície; 3- volume e 4-porcentagem. Ressaltamos que evidenciaremos apenas a unidade 1, pois enfoca medida de comprimento, nosso principal objeto de pesquisa.

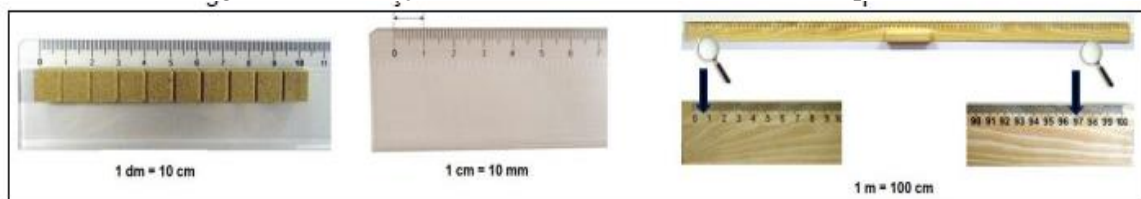
Abbondati (2013) elaborou atividades no ambiente virtual para introduzir o conceito de medidas, partindo de situações do cotidiano do aluno. Fez uso da história das medidas e de

⁶ Geogebra é um software livre que apresenta recursos de álgebra, de cálculo e da geometria dinâmica (ABBONDATI, 2013).

aplicativo no geogebra. Este último, principalmente para resolução de exercício propostos acerca de medida de comprimento, envolvendo medidas não convencionais, convencionais e transformações de unidades.

No entanto, antes de trabalhar as transformações de unidade de medida comprimento, o autor fez a revisão sobre as operações com números decimais e dimensão desses números por potência de base 10. Acreditamos que o autor preocupou-se em deixar claro tais conceitos para dar subsídio à introdução do metro e seus múltiplos e submúltiplos, enfatizando a relação decimal entre as unidades de comprimento. Como mostra a figura 2.

Figura 2- Convenções entre unidades de medida de comprimento



Fonte: Abbondati (2013, p.61)

O autor apontou que o AVA pode ser um instrumento valioso para o professor no ensino básico, pois pode motivar e incentivar o aluno a estudar, a trocar informações e ideias com seus colegas e professores por meio de uma aprendizagem colaborativa, proporcionando um ensino mais atraente e mais próximo da realidade. Deste modo, possibilitando uma conexão do processo de ensino e aprendizagem às tecnologias disponíveis para atender a sociedade moderna. O autor aponta também que os AVAs proporcionam uma aprendizagem personalizada, de acordo com a necessidade e disponibilidade e ritmo de cada aluno.

Nesta categoria ficou perceptível a preocupação dos autores com o ato de medir, como medir, a necessidade de uma unidade padrão, medida de comprimento entre outras. Além de desenvolver atividades que relacione o contexto histórico, como fonte de justificativa, em dar razão de ser às grandezas e medidas. Outro aspecto que se evidenciou nessas pesquisas refere-se à conexão do conhecimento cultural do aluno com o escolar, com questões relacionadas com a realidade dos alunos para promover a compreensão dos conceitos de medir, medidas, medida de comprimentos e as convenções de suas unidades. Este último abordado mais como exercício, devido a alguns autores abordarem em suas pesquisas mais de uma grandeza.

1.2.3 Considerações gerais sobre as duas categorias

Acerca da categoria concernente ao comprimento como grandezas, observamos que os autores pouco ou não enfatizaram as convenções das unidades de comprimento, e não relacionaram as atividades ao contexto histórico. Acreditamos, pelo fato de que o foco das pesquisas refere-se à construção desses conceitos como grandeza, ao relacionarem somente o quadro geométrico e das grandezas. Tendo como um dos principais motivos apontado em seus estudos, a passagem precoce do quadro geométrico para quadro numérico, desconsiderando o quadro das grandezas, revela-se fonte de dificuldades para os alunos.

No que se refere à categoria em que evidencia a medida de comprimento, verificamos que se remeteram mais ao quadro numérico, ao explorarem situações acerca de medir, medida, medida de comprimento. Nessa direção, para discutirmos em nossa pesquisa sobre a noção de comprimento quanto medida, ou melhor, a quantificação da grandeza comprimento, lançamos mão da noção de medida de comprimento defendida por Lebesgue citado por Palaro. (2006).

Essa autora em seu estudo faz uma explanação sobre a teoria das funções e um estudo da obra de Henri Lebesgue, sobre a medida das grandezas no século XX, sendo este último, de grande interesse para o nosso estudo, principalmente ao descrever a introdução da noção de comprimento e número, por meio da comparação de segmento. A partir dessa noção procuramos fundamentar a abordagem dos múltiplos e submúltiplos da unidade de medida padrão Metro, para desenvolver algumas atividades da sequência didática, explorando situações de medida.

Entre os estudos referentes à categoria comprimento enquanto medida, identificamos que as pesquisas de Moura (1995), Backendorf (2010) e Silva, C. (2011) são as que mais se aproximam do que pretendemos desenvolver em nossa pesquisa, com o uso da história da matemática, não de modo informativo, mas que possa contribuir para dar um significado a matemática ensinada em sala de aula. A construção de uma sequência didática, assim como Silva, C. (2011) e Backendorf (2010), e também abordar as conversões da unidade de medida de comprimento, como desenvolvido por Backendorf (2010). No entanto, com alguns pontos que as diferem do nosso estudo como:

- Nossa pesquisa tem como foco o ensino de medida de comprimento para alunos do 6º ano do ensino fundamental;
- A sequência didática será nos moldes da Teoria da situação didática de Brousseau;

- Com a abordagem das transformações de unidades subsidiada pelas noções de comprimento defendida por Lebesgue;
- A conexão da construção dos conceitos de grandeza e de medida para compreender os conceitos da grandeza comprimento e medida de comprimento;
- O desenvolvimento de atividades que possam comparar comprimento estabelecendo a relação de maior, menor ou igual, longe, perto, curto.

A título de esclarecimento, a condução deste levantamento em categorias não se remete as críticas, e nem a valorização de uma em detrimento da outra, mas sim um caminho que trilhamos para apontar a relevância de se realizar investigações acerca do tema grandezas e medidas, em particular medida de comprimento. E assim, a partir disso, refletir e delinear a questão problema, o objetivo e junto com a análise prévia do presente estudo, nortear a elaboração do nosso produto educacional, no caso uma sequência didática acerca do tema em questão para ser desenvolvida com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Esta revisão de estudos nos remete a uma reflexão sobre como foram abordados com base nessas pesquisas tais conceitos em sala de aula e como aparecem organizados nos livros didáticos, a forma que elaboramos e aplicamos as atividades, ao trabalhar o bloco grandezas e medidas com os nossos alunos. Como grandeza e medida vêm sendo tratadas no livro didático, conforme apontado nos estudos Silva, J. (2011), comumente evidenciando tarefas que se remete a medir o comprimento, converter uma unidade de medida, escolha de uma unidade, além de tarefas que se referem a linhas retilíneas, não explorando linhas curvas, reforçando assim o conceito de comprimento por parte do aluno somente a segmento de reta.

Outro ponto importante para refletir refere-se ao que foi denotado por Teixeira (2004), quando discorre sobre a utilização de instrumentos que possibilite a sobreposição em forma de linhas curvas, para que o aluno perceba que a ideia de que o comprimento não é alterado quando modificado e, que diferentes linhas podem ter o mesmo comprimento.

Com base em tudo que foi discutido nessas categorias e também conforme nossas experiências de sala de aula atrevemo-nos em dizer que é relevante tratarmos grandeza e medida com um olhar, não de junção, como se tratassem de mesma coisa, ou suprimindo o papel (grandeza) de uma em detrimento da outra (medida), mas sim, como uma “dupla” evidenciando o papel de ambas, uma como propriedade ou atributo de objetos ou coisas e a outra como a quantificação destes.

Neste sentido, para refundar essa reflexão, trouxemos alguns excertos referentes a conceitos e procedimentos acerca de grandeza e medida, apresentados nos PCN, como mostramos a seguir:

1º ciclo

Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos – balança, fita métrica, balança, recipiente de um litro etc.

2º ciclo

- Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado.
- Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade, superfície etc.
- Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, grama, miligrama, quilograma, litro, mililitro, metro quadrado, alqueire etc.
- Estabelecimento das relações entre unidades usuais de medida de uma mesma grandeza.
- Reconhecimento dos sistemas de medida que são decimais e conversões usuais, utilizando-as nas regras desse sistema. (BRASIL, 1997, p. 61).

3º ciclo

Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria. (BRASIL, 1998, p. 73).

Conforme apresentado anteriormente, compreendemos que os PCN anunciam o bloco de conteúdos grandezas e medidas, e apontam a relevância de se trabalhar conceitos referentes a esse bloco, aproximando-se do contexto diário dos alunos. Entretanto, não evidencia a grandeza, conduzido os conteúdos conceituais e procedimentais à medida, conforme os ciclos citados. Percebemos que no 2º ciclo, ao falarem de comparação os PCN postulam a comparação entre grandezas de mesma espécie, e não mencionam comparação sem ação de medir, situação que poderia favorecer a compreensão de grandeza. Mas, se referem à comparação entre grandezas de mesma espécie, a partir da escolha de uma unidade de medida. Segundo Bellemain e Lima (2002, p.74) “comparar objetos segundo um atributo e decidir quem é maior ou menor segundo este atributo, contribui para elaborar a noção de grandeza”.

O nosso ponto de vista a respeito ao PCN em relação a grandezas e medidas converge com as ideias de Bellemain e Lima (2002), ao discorrerem que o papel das grandezas e medidas é prioritariamente de ferramenta⁷ de resolução de problema, pois tomar as grandezas como objeto de estudo parece não ser preconizado nos PCN. Segundo os autores, isto se deve à relevância do papel desse bloco no ensino fundamental, como articulador de conhecimentos escolares com a vida social do aluno, de estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e da Matemática com outras áreas disciplinares. Apesar de concordarem com a relevância

⁷ Segundo Douady (1986) citado por Almouloud (2007) - *ferramenta* é o estatuto dado a uma noção ou conceito quando intervém na resolução de problema, e *objeto* quando é identificado como conteúdo de aprendizagem.

desse papel, os autores afirmam que isso pode implicar no erro de não considerar de forma satisfatória seu caráter de objeto de estudo.

Esses autores destacam que se pode levantar alguns questionamentos e comentários críticos sobre abordagem proposta nos PCN acerca de Grandezas e Medidas no Ensino Fundamental, por observarem uma ênfase insuficiente na comparação de grandezas sem o uso de número.

Para tanto, vale ressaltar que não estamos criticando a postura dos PCN, apenas chamamos a atenção para a importância de se trabalhar o comprimento enquanto grandeza, para depois abordar a sua medida, para que os alunos possam ter a percepção de que grandeza estão tratando, de modo a identificar os atributos a serem medidos e construir a noção de medida. Bellemain e Lima (2002), afirmam em seus estudos que algumas pesquisas sugerem que a associação da grandeza à sua medida deve ser retardada para favorecer uma construção mais consistente da noção de grandeza.

Tais reflexões nos levaram alguns questionamentos, como: É possível utilizar a história da matemática para abordar grandezas e medidas de comprimento? Em que termos desenvolveremos atividades que explorem a distinção de grandeza e medida dessa grandeza, o comprimento? É possível elaborar atividades que evidenciem a grandeza comprimento, para depois trabalhar sua medida?

Os questionamentos supracitados delimitaram a seguinte questão de investigação: **Em que termos uma sequência didática constituída de situações que explore o ensino de medida de comprimento a partir da grandeza, pode favorecer a noção de medir, medida, unidade e suas conversões para alunos do 6º ano do ensino fundamental?**

Em suma, essas reflexões reforçam o nosso interesse em desenvolver uma investigação sobre grandezas e medidas, principalmente medida de comprimento, com o objetivo de **legitimar uma sequência didática que favoreça o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida**. Para esta sequência pretendemos explorar atividades que evidenciem a grandeza comprimento, para depois trabalhar sua medida. Queremos enfatizar que a grandeza tem sua relevância, principalmente para evitarmos a ideia que apenas segmento de reta tem comprimento, oportunizando aos alunos atividades que explorem comprimento de linhas curvas. Além levar os alunos a trabalharem medidas, iniciando com medidas não convencionais e depois as convencionais.

1.3 JUSTIFICATIVA E PROBLEMÁTICA

Grandezas e Medidas compõem um dos blocos de conteúdos da matemática apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e apresentam extrema importância no meio social devido ao seu caráter prático e utilitário, além de possibilitar diversas conexões com outras áreas do conhecimento, favorece uma melhor compreensão de conceitos referentes ao espaço e às formas. (BRASIL, 1998).

Vale ressaltar que a abordagem de seus conteúdos encontra-se imbricada no cotidiano do aluno. Ler unidades de medidas, saber representá-las por símbolos, seja em casa, no supermercado, no convívio com amigos ou em alguma prática, bem como reconhecer as grandezas de comprimento, de massa, área, volume entre outras, faz parte de seu histórico sociocultural.

A título de investigação, elegemos os conteúdos deste bloco, em particular grandeza e medida de comprimento, por observar no decorrer de minhas práticas de docência, as dificuldades apresentadas pelos discentes, que permeiam comumente toda a Educação Básica. Tais dificuldades, segundo minhas experiências e em conversa com alguns pares de profissão e com meu orientador, são apontadas do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio, principalmente em relação à medida de comprimento e as convenções de suas unidades. Alguns estudos corroboram com esta situação, entre eles Abbondati (2013), Rodrigues (2007), Backendorf (2010), ao aplicarem testes diagnósticos com questões envolvendo situações problemas acerca dos conceitos de medir, medida, medida de comprimento e as transformações de unidades de comprimento, com alunos do 9º ano do ensino fundamental e do ensino médio.

Segundo os PCN, a abordagem de medidas deve se dá por meio de atividades que explorem situações práticas que levem o aluno a compreender o sentido real das medidas. Possibilitar a construção das noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, mostrando ao aluno que no seu cotidiano, ele está cercado de situações que lhe remete alguma grandeza, como o tempo que leva para tomar banho, o consumo de água, a distância de sua casa até a escola entre outras. Além da abordagem de alguns problemas históricos que impulsionaram a construção de medida, para despertar o interesse do aluno. (BRASIL, 1998). Ainda nos PCN é relevante “proporcionar ao aluno experiências que permitam ampliar sua compreensão sobre o processo de medição e perceber que as medidas são úteis para descrever e comparar fenômenos”. (BRASIL, 1998, p. 69).

Estudos também como de Silva, J. (2011), Brito (2003), Barbosa (2007) apontam uma preocupação acerca da abordagem desses conteúdos em livros didáticos, comumente sem explorar a concepção de grandeza de comprimento e área, com situações de comparação (sem ação de medir) e de se direcionar mais para situações de medidas, com a valorização dos aspectos numéricos em detrimento dos aspectos da grandeza. Outro ponto é discutido na pesquisa de Silva, J (2011), que ao analisar os livros didáticos, percebeu que a abordagem desses conteúdos concentra-se na metade do livro, ou seja, correndo o risco de não serem vivenciado pelos alunos.

A nossa experiência trabalhando com esse tema leva-nos a concordar com Silva, C. (2011), quando afirma que os livros vinculam a abordagem de grandezas e medidas em unidades de medida padrão estabelecidas em transformações mecânicas de múltiplos e submúltiplos. Tal afirmação converge com um dos pontos latentes de nossa justificativa, em desenvolver este estudo por acreditarmos que devemos propor atividades, em que o conteúdo possa ter significado para o aluno e não apenas apresentar de forma mecânica.

Diante do exposto e com base no levantamento bibliográfico discutido nesta seção, procuramos desenvolver uma pesquisa acerca de grandezas e medidas, com ênfase em medida de comprimento, para subsidiar a construção de uma sequência didática, envolvendo atividades que explorassem a noção de comprimento enquanto grandeza, desvelando inicialmente situações de comparação sem ação de medir, para depois quantificar sua grandeza (medida). Sendo esta última com mais ênfase, em virtude de desenvolver atividades que levem os alunos à constituição do metro e seus múltiplos e submúltiplos.

Para desenvolver tais atividades elegemos o 6º ano, em virtude das noções de grandeza e medida serem introduzidas nos 1º e 2º ciclos, e serem resgatadas no do 3º ciclo (6º e 7º anos). Assim poderemos realizar um trabalho de investigação, sobre a concepção dos alunos acerca desse conteúdo, identificar as possíveis dificuldades, como se deu a abordagem nos anos anteriores e organizar uma sequência didática que possibilite a compreensão de grandeza e medida de comprimento.

De acordo com os PCN a aprendizagem ocorre de forma gradual, em diferentes níveis e estão relacionados a conceitos anteriores. No entanto, há uma forte tendência no 6º ano do ensino fundamental, fazer deste, um ano de revisão de conteúdos anteriores, pois os professores julgam que os alunos apresentam pouco domínio desses conteúdos e algumas vezes, sem fazer um diagnóstico detalhado e organizado. Ainda acreditam que tal revisão poderá solucionar o problema. Sendo assim, propomos realizar uma retomada e aprofundar os conceitos atrelados ao tema em questão.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, abordamos estudos de alguns autores referentes a noções de grandezas e medidas e suas relações, percorrendo o caminho a partir do significado de grandeza, medir, medida, comprimento e medida de comprimento. Além da abordagem da Teoria das Situações Didáticas adotada na construção de uma sequência didática para o ensino de medidas de comprimento e explicitação da metodologia de pesquisa adotada, Engenharia Didática. Vale salientar, no entanto, que a grandeza a ser tratada nesta pesquisa refere-se como um atributo a ser medido.

2.1 NOÇÕES DE GRANDEZAS E MEDIDAS

Vários autores no âmbito da Educação Matemática desenvolveram pesquisas relativas ao ensino e aprendizagem acerca do tema grandezas e medidas, ora com foco nas grandezas geométricas, ora com foco nas medidas. Elegemos alguns desses estudos para contribuir com a nossa pesquisa, principalmente os que se remetem a grandeza e medida de comprimento. Para concretude desta pesquisa e explanação desses conceitos nos apoiaremos em Douady e Perrin Glorian (1989), que fazem parte de estudos da vertente francesa da didática da matemática, Palaro (2006) citando Lebesgue, Caraça (1951), Brolezzi (1996), Russel (1967), Brousseau e Brousseau (1991-1992) e outros autores que constituem o levantamento bibliográfico explicitado na seção anterior.

De acordo com os PCN, o bloco grandezas e medidas possui uma grande relevância social, citado na seção anterior, tanto referente às práticas cotidianas das pessoas como nos seus aspectos histórico e cultural. Ao desenvolvermos esse tema em sala de aula, nossos alunos já trazem de casa algum conhecimento cultural, denominado por Moura “conhecimentos adquiridos culturalmente do que ouve e vê em seu meio ambiente” (MOURA, 1995, p. 80).

2.1.1 Grandeza

No âmbito da Física, grandezas é tudo suscetível de medida. As grandezas físicas podem ser escalares e vetoriais. Escalares são grandezas que se caracterizam quando se conhece apenas seu valor numérico acompanhado pela correspondente unidade de medida. Por exemplo, a massa de um corpo (50 kg), a temperatura (36°C) e outras. Enquanto que para

uma grandeza vetorial ficar perfeitamente caracterizada, além do número e unidade (isto é, sua intensidade ou módulo) precisa-se indicar a direção e o sentido, por exemplo: a grandeza força. (TORRES; FERRARO; SOARES, 2010).

Já no âmbito da Matemática trata-se da grandeza mensurável, sendo esta a grandeza a ser abordada na presente pesquisa. Denominamos essa grandeza como atributo ou característica ou propriedade do objeto ou corpo a ser medido. Neste contexto, explanaremos uma breve discussão sobre as noções de grandeza, com base em alguns estudos (mencionados anteriormente) no âmbito da Educação Matemática. Nesta direção, Bellemain e Lima (2002), referem-se à grandeza apoiados em Comberousse (1929):

Chamamos **grandeza** tudo que é susceptível de aumento e diminuição. A **Matemática** é a ciência das grandezas. Adotado este ponto de vista, tudo seria do domínio da Matemática, pois tudo é suscetível de aumento ou diminuição; mas a Matemática trata apenas das grandezas mensuráveis. O gênio, a coragem, a bondade escapa pela sua própria natureza, de qualquer procedimento exato de medição. (COMBEROUSSE, 1929 apud BELLEMAIN E LIMA, 2002, p.88).

O pensamento desses autores corrobora com a ideia de Lebesgue citado por Palaro (2006), no sentido de limitar a noção de grandeza. Para o autor, o estudo de grandezas não se reduz a tudo que é suscetível de aumentar ou diminuir, pois dessa forma seria difícil encontrar qualquer coisa que não pertencesse à categoria das grandezas. A exemplo volume e ambição, temperatura e apetite, neste caso tanto ambição como apetite seriam consideradas grandezas. Segundo Palaro (2006), na concepção de Lebesgue o significado da palavra grandeza teria que se restringir para evitar confusões e seguir com um estudo possível sobre grandezas. Para o autor grandeza é qualquer “[...] ser matemático para o qual a adição teria sido definida”. (LEBESGUE, 1935, apud PALARO, 2006, p. 213). Pois, ele parte da denominação de grandeza diretamente mensurável, a qual permite que se fale de igualdade e soma.

Nesse contexto Perez (2008), apoiada em Chamorro-Plaza e Belmonte-Gomez (2000) refere-se a essa grandeza como grandeza extensiva, em que a sua medida pode ser feita de forma direta. Enquanto, as grandezas que só podem ser medidas, só podem ser feitas de forma indireta (temperatura, velocidade entre outras), são grandezas que não se opera a adição, estas se denominam de grandezas intensivas. (PEREZ, 2008).

Palaro (2006) ainda apresenta dois exemplos citados por Lebesgue, o de massa, que faz parte dessa categoria por atender tanto a soma como a igualdade, e da temperatura, que não faz parte das grandezas diretamente mensuráveis, pois embora atenda à igualdade, não é possível falar de temperaturas, como sendo soma de outras temperaturas, pelo fato que a soma

de duas temperaturas não tem significado no mundo físico. Para deixar mais claro, este caso, Palaro exemplifica: “o fato de juntar em um mesmo recipiente dois líquidos, um com 50° C e outro com 60°C não fará com que a temperatura passe a ser 110° C”. (PALARO, 2006, p.214).

Teixeira (2004) apoiando-se em Ermel (1997), corrobora com o pensamento de Lebesgue ao denominar grandeza a todos os objetos passíveis suscetíveis de variação, qualificando esta como “mensuráveis” quando for possível definir:

- Uma relação de equivalência (como “...tão comprido quanto...” para os comprimentos);
- Uma relação de ordem (como “...mais longo que...” para os comprimentos);
- Uma operação interna (soma);
- Uma operação externa (multiplicação por um número: nós podemos falar de uma “corda” 2 vezes mais comprida que a outra) (ERMEL, 1997, apud TEIXEIRA, 2004, p.69).

De acordo com os estudos de Russel (1967), grandezas são propriedades em comum de objetos possíveis de serem medidos, mas que também podem ser comparadas, estabelecendo uma relação de maior que ou menor que. No entanto, esta comparação ocorre somente entre grandezas de mesma natureza. Além disso, Russel em seu livro *The Principles of Mathematics* (1967) para esclarecer a noção de grandeza, faz uma distinção entre grandeza e quantidade, as grandezas são consideradas mais abstratas do que a quantidade, está definida pelo autor como qualquer coisa que é capaz de igualdade quantitativa para outra coisa.

Russel aponta que todas as grandezas são conceitos simples e são classificadas em tipos por sua relação com alguma qualidade, relativa à propriedade do objeto. Para tanto relaciona axiomas que caracterizam uma grandeza geral: cada grandeza refere-se a um termo da relação que faz de um certo tipo; duas grandezas do mesmo tipo, uma é maior e a outra menor; nenhuma grandeza é maior ou menor que ela mesma; duas grandezas do mesmo tipo, não podem ter a mesma posição espaço-temporal; se A é maior que B, B é menor que A, ou vice-versa e se A é maior que B e B é maior que C, então A é maior que C.

Esses axiomas reforçam o significado de grandeza supracitado pelo autor em relação à comparação, dado duas grandezas, só podemos afirmar que uma é maior ou menor que outra, se elas forem de mesma espécie. Sendo assim, duas grandezas serão numericamente comparáveis se corresponderem também a mesma espécie, em que uma terá que ser menor que a outra, para que a menor possa caber o número de vezes na maior.

Lebesgue citado por Palaro (2006) e Silva (2004), destacam em seus estudos, que a grandeza é um atributo passível de ser medido, corroborando com o pensamento de Russel.

Silva define grandeza (mensurável) com base no Instituto Nacional de Metrologia (INMETRO), como sendo “atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado” (SILVA, 2004, p.16). Observamos que a autora corrobora com Russel, que as grandezas denominam-se pela sua qualidade ou propriedade, mas que podem ser quantificadas por meio de comparação, em que se eleja uma unidade para efetiva comparação, que por sua vez, expressará o valor numérico.

Segundo Palaro (2006), Lebesgue afirma em seu livro *Sur La mesure des grandeurs*, que a medida das grandezas é o ponto de partida a todas as aplicações da matemática e é por meio da medida que se chega ao número. A partir da quantificação da grandeza se chega à medida. Nesta direção, Palaro afirma, apoiado em Lebesgue, que para que o conceito de grandeza seja claro, deve-se atentar para uma dificuldade:

[...] inteiramente metafísica e de mesma natureza que aquela encontrada para o número. Do mesmo modo que se recomendava não confundir o número e o símbolo que o representa, deseja-se distinguir entre grandeza e número medindo a grandeza, deseja-se, mesmo, servir-se da grandeza para ampliar a noção de número, chegar às frações e aos números mais gerais. Trata-se, portanto, de definir o comprimento, a superfície, o volume ou, mais exatamente, uma noção compreendendo comprimento, superfície, volume, sem fala de número. (LEBESGUE, apud PALARO, 2006, p. 212).

A preocupação deste autor em deixar clara a noção de grandeza e como se deve defini-la ao apresentar a ideia de comprimento, superfície, volume, como uma grandeza, não se atrelando apenas à medida de grandeza, vai ao encontro a proposta do presente estudo, em apresentá-la como uma propriedade de objeto. Dessa maneira, realizando comparações em que se estabeleçam relações de maior, menor, ou igual, ou mais pesado ou menos pesado. Por exemplo: ao comprimento de duas cordas, ao verificar qual a mais curta ou mais comprida, a duas caixas de leites, qual tem a maior, ou menor volume.

Esse ponto de vista do autor converge também com as ideias das pesquisadoras Douady e Perrin-Glorian (1989) acerca de se trabalhar comprimento, área e volume como grandeza, estabelecendo comparações sem utilizar a medida, ou seja, sem falar em número, explorando primeiramente a grandezas geométricas para depois trabalhar a medida dessas grandezas.

Nesta direção é relevante destacar que o mesmo objeto, corpo ou substância podem representar diferentes grandezas como uma folha de papel A4, que dependendo do que se queira pergunta referente ao seu tamanho, poderemos ter o comprimento, ou poderemos ter a área da folha. Sobre este exemplo, Chevallard e Bosch discorrem:

Sobre um mesmo objeto, várias grandezas podem ser previstas. O tipo de manipulação sobre este objeto permitirá que você especifique a grandeza que representa, o que nos leva a um vocabulário apropriado. Além de ficar atento para algumas situações devido ao uso da linguagem ordinária. Por exemplo: este recipiente é maior do que esse outro. Isto pode se referir à altura, com sua maior dimensão horizontal, ao volume interior (capacidade) ou seu volume externo? (CHEVALLARD; BOSCH 2002, p.1-2, tradução nossa).

Nesta situação indicada por Chevallard e Bosch percebemos a importância de se estabelecer a relação de maior ou menor, ou igual entre duas grandezas de mesma espécie. Faz-se necessário, entretanto, deixar claro a que grandeza nos referimos, uma vez que dependendo do objeto em jogo, ou do modo que os manipulamos, ele será designado por diferentes grandezas. Essa manipulação referida pelo autor consiste em que grandeza se quer determinar em relação ao objeto, seja ao comprimento da folha, ou espaço ocupado pela folha, neste caso a área ou massa dessa folha.

A respeito da quantificação compreendemos que remete à medida de uma grandeza, no entanto Bellemain e Lima (2002), em seus estudos sobre grandezas, chamam a atenção para a distinção entre quantidade e medida, apoiada em Rey Pastor (1983), em que ambas apenas referem-se ao mesmo número, mas têm conceitos diferentes, pois enquanto a quantidade é única, em cada situação, suas medidas por sua vez podem variar dependendo da unidade escolhida.

Trajano, em seu livro intitulado *Aritmética elementar: ensino teórico e prático* define quantidade como “Uma porção de alguma coisa que se pode medir ou contar. Uma quantidade de café pode ser pesada; uma quantidade de vinho poder ser medida com litro, uma quantidade de pano pode ser medida com metro e uma quantidade de laranja pode ser contada” (TRAJANO, 1941, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 90).

De acordo com Brolezzi (1996) contar e medir são duas ações básicas da matemática que constituem a origem do número. Desde o primórdio o homem desenvolvia atividades referentes tanto a contagem, ao relacionar a correspondência de um a um, quanto à medida, com ideias associadas a ordem, realizando comparação entre duas quantidades ou medidas diferentes, estabelecendo ordem entre elas: maior ou menor tamanho, segundo, terceiro etc. Situações que ocorriam principalmente durante as caças de animais, para a sobrevivência. Essas ações complementam-se e contribuem para o desenvolvimento do conceito de número e demais conceitos matemáticos.

Segundo o autor contar e medir corresponde respectivamente aos termos discretos e contínuos. Para o autor o ato de contar alude às grandezas contáveis, em que as unidades são naturais, chamadas por Brolezzi de grandezas *discretas*. Por exemplo, no caso objetos como a

quantidade de alunos em sala de aula, o número de cadeiras, denominado a grandezas discretas. Por outro lado, têm-se as grandezas passíveis de medidas, que são denominadas *contínuas*, como o comprimento de uma mesa, comprimento de uma corda, o peso de um objeto, que por sua vez, pode ser determinada por diferentes unidades convencionais. Desde que no ato de medir possa eleger uma como padrão, para realizar a comparação, ou seja, a necessidade de um acordo a respeito de qual unidade a ser adotada.

Com base nos referenciais discutidos nesta seção, trataremos a noção de grandeza como um atributo ou propriedade do objeto a ser medido, apoiado nas seguintes características:

- O que se pode comparar estabelecendo a relação de maior, menor ou igual;
- A quantificação do corpo ou do objeto;
- Ente matemático em que a adição é definida;
- Associada ao produto de um número real positivo por uma unidade de medida.

2.1.2 Medida

Situamos a definição de medir e medida, de acordo com Silva (2004, p.16 -17):

Medir: ação de avaliar uma grandeza comparando-a com outra de mesma espécie, adotada como referência. Medida: valor numérico do resultado da comparação entre uma grandeza a ser avaliada e uma grandeza de referência. Termo também usado para escrever o ato ou processo de comparar uma grandeza a outra, com o objetivo de associar a primeira um número característico de seu valor diante da grandeza com qual foi comparada (realizar uma medida). Dimensão, tamanho.

O ato de medir, conforme exposto por Silva (2014), perpassa pela maneira de expressar determinada grandeza por meio de um valor numérico, no caso a medida. Este processo ocorre somente com a comparação entre duas grandezas de mesma espécie, tomando uma como referência, neste caso a menor. A esta se chama unidade para se verificar quantas vezes a grandeza maior contém a menor, resultando assim uma medida para quantificar a grandeza (maior). A respeito do tratamento da noção de medida, Brousseau e Brousseau (1991-1992) fazem uma discussão quanto à complexidade deste conceito.

De acordo com esses autores o conceito de medida foi elucidado muito tarde na história da humanidade de forma dolorosa e hoje é um conceito muito antigo e usado universalmente. Em virtude dessa universalidade em torno da medida, tendem a acreditar a ser um conceito simples, logo não se esclarecem a dificuldades que surgem na prática ou no

ensino. Os autores argumentam como se houvesse um paraíso original ao incluir a medida, sem mistério com “ideias concretas”.

Para os autores a medida é um objeto complexo, que apresentada em pelo menos oito colocações distintas.

1. Enquanto objeto “portador” de característica a ser medido: objetos concretos (uma mesa) ou “já matematizado” (retângulo, o seu comprimento, sua largura, como segmentos) ou conceituado.

A este objeto Chamorro (1995) refere-se em dois casos: teóricos idealizados que dão suporte para a medida como segmento, retângulo e as formas geométricas em geral e os concretos que são medidos, a exemplo uma barra, uma fita ou chão de uma casa etc.. Enquanto que Bellemain e Lima (2010) atribuem esses casos de objetos, a objeto geométrico (detalharemos este mais a frente).

2. A grandeza, conceito que permite apreender "o que pode tornar-se maior ou menor, em relação a objetos concretos (1)". Este tópico corrobora com o postulado por Russel ao expressar sobre grandeza mensurável, mencionado anteriormente.

Conforme Brousseau e Brousseau (1991-92) a grandeza é um conjunto de propriedades comuns a várias grandezas particulares: por exemplo, a área, a massa, a capacidade. Os autores destacam que o comprimento e largura de um retângulo são segmentos, e esses se referem à grandeza “comprimento”.

Uma estrutura matemática explicita essas propriedades comuns e descreve o que é suscetível de ser medido, um conjunto mensurável referente ao conjunto numérico dos reais positivos (conjunto, eventos, segmentos, superfícies etc.).

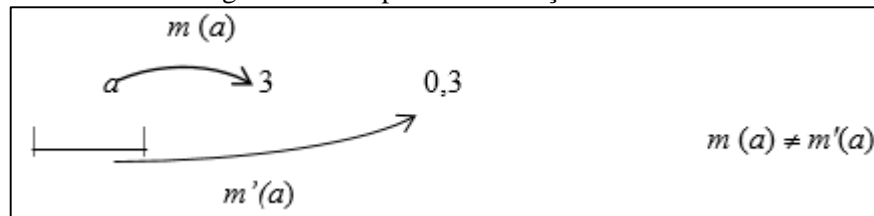
3. O valor particular da grandeza, relativo a um objeto particular independente do sistema utilizado para quantificar, ou seja, independente da unidade.

A este caso Brousseau e Brousseau referem-se à classe de equivalência de determinada grandeza, a exemplo: o comprimento de um segmento é uma classe de todos os segmentos que permitem coincidir com ele por isometria, seja por translação, rotação. Não importa qual a posição do segmento, mas seu comprimento será o mesmo, ou seja, o comprimento do segmento será conservado.

4. Uma medida como função (Função-medida), a esta os autores referem-se a uma aplicação aditiva e positiva de um conjunto mensurável dos reais. Uma aplicação de medida atribui cada parte deste conjunto (um segmento, uma superfície, um evento, uma massa) um (único) número real positivo.

Sendo assim, os autores postulam que a unidade, enquanto (quantidade) grandeza muda com a medida: é o objeto cuja imagem é única. Conforme, mostra a figura 3.

Figura 3- Exemplificando função - medida



Fonte: Brousseau e Brousseau (1991-92, p.82)

Nesta direção Chamorro (1995) comunga do mesmo pensamento de Brousseau e Brousseau, ao afirmar que a medida enquanto aplicação proporciona sempre um número e também único número. Assim para autora, cada aplicação permitirá uma imagem diferente por meio de escolha de diferentes unidades com que se mede.

5. O valor desta medida (medida-imagem) de um objeto referente a uma determinada grandeza, seja ela comprimento, área ou massa, é um número positivo (natural, decimal, racional ou real) de uma medida no sentido de aplicação que faz corresponder ao objeto, a qual tem interesse. Esta “medida” não comporta nenhum traço com a aplicação medida: 3 é apenas um número, podendo ser a imagem medida em centímetro (cm) de tal segmento.

Deste modo, compreendemos que os autores fazem referência ao número obtido como imagem de uma aplicação medida, que geralmente é denominado como medida. No entanto, não devemos confundir este número com a medida de aplicação. Sendo assim, este número corresponde ao valor desta medida e não medida em si. Este número depois se torna independente.

6. A medida como concreto ou número concreto: constitui-se pelo par formado de imagem (o número) e por uma função (medida no sentido 4), representado por uma unidade, ou seja, sendo expressa como produto de um número por unidade de medida:

Exemplo: 3 cm 0,03m

Como objeto, um tal elemento é identificável como uma classe de equivalência, ao sofrer transformações: 3cm é a mesma classe que 0,03 m, enquanto $0,03 \neq 3$. Mas sua forma confere propriedades muito úteis na física e na prática (tratamento de equações com dimensões).

7. A *medição* palavra que designa operação material ou o método que permite determinar efetivamente ao objeto do tipo (1) um número e um intervalo (ou uma família de

intervalos) que possua certa confiança. A palavra também designa o resultado como na medida função (4) e valor desta medida (5). Exemplo: o comprimento da mesa (tal segmento tem comprimento) $1'35 \text{ m} \pm 0'002$. Os procedimentos para a medição da espessura de uma placa, a largura de uma fenda, a distância entre duas paredes são medidas de comprimentos.

A esta colocação da medida, Brousseau e Brousseau (1991-92) chamam a atenção ao realizarmos medições em objetos concretos, pois aparecerão erros ainda que eles sejam mínimos, uma vez que esta prática não se trabalha com a exatidão.

A esse respeito Chomorro (1995) afirma que uma medida exata não existe na prática, a metrologia limita-se a estudar os métodos para controlar e diminuir o erro, mas sabendo que nunca poderá eliminá-lo. No entanto, como já foi mencionado, a medida enquanto aplicação, favorece sempre um (único) número.

8. A evolução da medida: esta se refere a uma espécie de julgamento ou de “medida” sobre medida, sobre a expressão que representa o tamanho, a relativa grandeza, a raridade, qualidade, precisão etc. e serve como um meio de controle em atividades de medição, em cálculos ou comparações. Exemplos: ordem de grandeza de uma medida; o tamanho de um número; o número estatístico significativo; a porcentagem de objetos de mesmo tipo maior que objetos considerado (raridade relativa) permite comparar os tamanhos relativos: um rato de 10 cm é maior (no sentido de mais raro, menos frequente) que um elefante de 2 m.

Brousseau e Brousseau (1991-92) atribuem à medida diferente objetos de significado, pois para eles esses objetos (diferentes colocações da medida) pertencem a meios diferentes e, por sua vez seguem regras também diferentes. Para os autores tais objetos são conhecidos em várias instituições e são colocados de várias maneiras. Todos envolvidos na concepção e implementação das medidas.

Para tanto, afirmam que seria prematuro apresentar essas diferentes maneiras de se tratar de medida aos alunos em escolas primárias, mas abandoná-lo completamente leva a abster-se de tratar adequadamente ambos os problemas práticos e noções teóricas. Deste modo, os autores enfatizam a relevância de que o professor tenha o conhecimento destas diferentes colocações encontradas em torno da medida e reconheça sua relevância cultural com uma certa vigilância.

Sendo assim, acreditamos que essa breve explanação acerca de grandeza e medida, possa auxiliar na elaboração de atividades que evidencie a noção de conceitos atrelada a grandezas e medidas, em particular comprimento, por compreendemos que a noção de grandeza constitui-se como uma noção relevante a ser construída para se entender o processo de medir.

2.2 CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COMPRIMENTO TOMANDO COMO BASE O MODELO PROPOSTO POR DOUADY E PERRIN-GLORIAN

Bellemain e Lima (2002) em seus estudos acerca do ensino aprendizagem de grandezas geométricas apoiam-se em algumas pesquisas como de Baltar (1996), Lima (1995), Douady e Perrin-Glorian (1988), que indicam dificuldades dos alunos em relação aos conceitos de área e perímetro, principalmente em situações como: o uso de fórmulas errôneas considerando $\text{área} = \text{perímetro} \text{ vezes } 2$, ou $\text{área} = \text{soma dos lados}$. Ao alterar a área de uma superfície plana, conseqüentemente altera-se o seu perímetro, superfícies diferentes tem áreas diferentes.

Os autores, assim como Douady e Perrin- Glorian (1988) afirmam que isso ocorre pelo fato dos alunos desenvolverem a “ideia de forma” ligada ao quadro geométrico e “ideia de números” ao quadro numérico, ou ainda, tratam ambas de modo dissociável. Em relação a essas concepções Bellemain e Lima afirmam que “Quanto à construção do conceito de área, um dos resultados importantes é a classificação das concepções de área em dois polos – as concepções geométricas e as concepções numéricas – proposta por Perrin-Glorian & Douady (1988) e por Balacheff (1988)” (BELLEMAIM; LIMA, 2002, p. 28).

Conforme os autores essas concepções numéricas referem-se àquelas em que os alunos associam ao conceito de área somente a medida, considerando apenas o cálculo da medida de área. Enquanto que a concepção geométrica está atrelada às formas, em que os alunos confundem superfície com a área da superfície, ou seja, que superfícies distintas possuem áreas diferentes, além da confusão entre perímetro e contorno. Para superar esses entraves causados por essas concepções, Douady e Perrin-Glorian (1989) anunciaram que é preciso esclarecer as relações geométrica e numérica a partir do enfoque da noção de grandeza.

Nesta perspectiva, para construir o conceito de área, as autoras propuseram um modelo didático a distinguir em três quadros: o geométrico, constituído pelas superfícies planas; o numérico, referindo-se às medidas da área de superfície, que correspondem ao conjunto dos números reais positivos; das grandezas constituído pela noção de área e é caracterizado pelas classes equivalentes de superfícies de mesma área.

De acordo com as autoras o conceito de área como grandeza poderá ser construído a partir do momento que se proporcionar a distinção entre esses quadros, apresentando situações em que a área de uma superfície plana aparecerá como um objeto matemático diferente da superfície plana, ou seja, ao evidenciar que superfícies distintas podem possuir a mesma área. Outra situação remete-se ao distinguir que o número associado à superfície

dependerá da escolha da superfície unitária para medi-la, ou seja, ao mudar a superfície unitária a medida de área altera, mas a área permanecerá a mesma.

As autoras, partindo deste ponto de vista, desenvolveram um estudo na França com alunos de idade entre 9 e 12 anos, do nível escolar correspondente ao 2º ciclo no Brasil, explorando o conceito de área como grandeza autônoma, utilizando o modelo didático com base nas seguintes hipóteses:

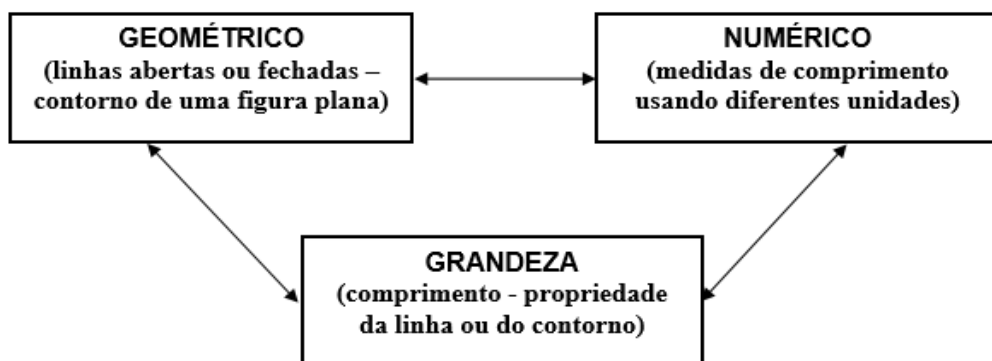
- * Trabalhar o conceito de área como grandeza ajuda o aluno a estabelecer a relação entre ao geométrico e numérico;

- * Uma identificação precoce entre grandeza e número leva os alunos à confusão entre área e comprimento.

Com intuito de construir o conceito de área e medir a aplicação entre superfícies e números para que esses conceitos fizessem sentido para os alunos, as autoras desenvolveram “atividades que envolvessem a comparação concebível de área sem utilizar a medida e outras com o uso de medidas” (DOUADY; PERRIN-GLORIAN 1989, p.418 – tradução nossa). Distinguido e articulando esses três quadros.

De modo análogo Brito (2003) utilizou o modelo didático proposto pelas autoras para conceito de área, e adaptou para abordar a construção do conceito de comprimento como grandeza, de acordo com a figura 4:

Figura 4- Modelo didático adaptado por Brito (2003)



Fonte: Brito (2003, p. 34)

Na perspectiva do quadro geométrico, a autora atribuiu as formas geométricas como linhas abertas ou fechadas, esta última denominada de contorno de uma figura plana poligonal ou não. O quadro da grandeza fez referência ao comprimento, em que se pode realizar classes de equivalência das linhas, pois diferentes linhas podem possuir o mesmo comprimento. Isto ocorre com a transição do quadro geométrico para o das grandezas, por meio da comparação dessas linhas, sem ação de medir. Brito (2003, p. 30) considera também como parte deste

quadro o perímetro, apoiado em Barbosa (2002) definindo perímetro “como um caso particular da grandeza comprimento, diferenciando-se do objeto geométrico, em si, que é uma linha fechada”. Por fim, o quadro numérico é constituído pelas medidas de comprimento utilizando diferentes unidades expressas por números reais positivos, de modo a representar a medida da grandeza.

Brito adaptou o modelo didático de Douady e Perrin-Glorian para tratar o conceito de comprimento, entretanto explorou somente os quadros geométrico e de grandeza, conforme o exposto no levantamento bibliográfico. Nesta direção, em virtude de nossa pesquisa referir-se à grandeza e medida com o foco em medida de comprimento, nos inspiramos no modelo de Douady e Perrin-Glorian, e adaptamos o modelo de Brito, para abordarmos o comprimento, relacionando os três quadros: geométrico, grandeza e numérico. Tomando como base as características atribuídas pelas autoras a esses quadros. Tais características nos permitiram organizar e elencar alguns aspectos de comprimento relacionado a cada quadro, mostrado no quadro 1.

Quadro 1- Síntese dos aspectos de comprimento atribuído aos três quadros

Geométrico	Grandeza	Numérico
Objetos geométricos que se remete ao comprimento – linhas abertas poligonais, não poligonais e segmento de reta.	Comprimento como propriedade do objeto - Classe de equivalência, relação de ordem e grandezas particulares ao comprimento, como distância, perímetro e largura.	Medidas de comprimento usando diferentes unidades: Quantificação da grandeza comprimento - atribuir um número real positivo a uma quantidade de grandeza.

Fonte: Elaborado pela Autora (2016)

Em relação ao quadro geométrico, assim como Brito (2003) atribuímos os objetos geométricos, entretanto em nossa pesquisa fazemos referência às linhas abertas poligonais, não poligonais e ao segmento de reta. Enquanto que ao quadro da grandeza caracterizamos o comprimento como propriedade do objeto, em que se realiza a comparação de comprimentos de objetos sem ação de medir (sem usar número), estabelecendo a relação de maior, menor ou igual (relação de ordem). Fazemos, também, a comparação entre comprimentos de objetos que possuem linhas diferentes pode possuir a mesma quantidade de comprimento (classes de equivalência). Atribuímos a este quadro a distância, como caso particular da grandeza comprimento, pois segundo Barbosa (1997) a distância é o comprimento do segmento determinado por dois pontos.

O quadro numérico refere-se à quantificação da grandeza *comprimento* em que se atribui um número real positivo a uma quantidade de grandeza (comprimento) elegendo uma

unidade, seja não padronizada ou padronizada, comparar com a grandeza a ser medida e expressar um resultado, a ser medido da grandeza.

A respeito de conexão entre os quadros:

- A relação de equivalência permite a passagem do quadro geométrico para o quadro da grandeza;
- Eleger uma unidade de medida, ou seja, quantificar a grandeza permite a passagem do quadro da grandeza para o quadro numérico.

Na concepção de Bellemain e Lima (2010) as noções referentes às grandezas geométricas podem ser organizadas em três domínios: objeto geométrico, grandeza e número, estes com características distintas, mas estão estreitamente ligados para a compreensão dos conceitos em jogo. Trazemos para clarificar a concepção dos autores, o exemplo apresentado por eles de uma vareta (considerado objeto físico), o desenho da vareta, representado pelo segmento de reta AB (objeto gráfico) e ainda o conceito matemático de “segmento de reta AB” (objeto matemático). A estes objetos, os autores denominaram objetos geométricos, uma vez que, o foco em questão não era geometria e sim a grandeza.

A partir dessa ideia os autores associaram ao *objeto geométrico* (vareta) uma *grandeza*, no caso, comprimento. Este por sua vez, atributo do objeto em jogo, compreendido pelos autores como tanto de espaço linear que o objeto possui. A este objeto ainda se pode atribuir um *número*. Neste caso ocorre o processo de medição, por meio de uma unidade que lhe é conferida. Atribuindo assim, a grandeza comprimento, uma medida denominada medida de comprimento.

A partir do modelo didático de Douady e Perrin-Glorian adaptado por Brito (2003) e pela organização de se trabalhar os conceitos em jogo, percorrido anteriormente por Bellemain e Lima (2010), percebemos a relevância de abordar a construção do conceito comprimento enquanto grandeza, embora o nosso foco seja medida de comprimento. Pois acreditamos que se trabalharmos a articulação entre os dois primeiros quadros (geométrico e o da grandeza) estabelecendo a relação de maior, menor ou igual, favorecerá a compreensão do comprimento enquanto grandeza. Ao explorarmos a necessidade de quantificar essa grandeza evidenciando a articulação entre os quadros da grandeza e o numérico por meio da escolha de unidade favorecerá a compreensão da medida de comprimento.

Com isso, em nossa pesquisa procuramos evidenciar a grandeza comprimento, articulando o quadro geométrico com o das grandezas, mas com ênfase na medida de

comprimento, articulando o quadro das grandezas com o quadro numérico até chegarmos à constituição do metro e o sistema métrico decimal.

Deste modo, buscamos elaborar e aplicar uma sequência didática constituída de atividades que explore situações-problema, envolvendo a articulação e distinção desses três quadros. Para principiar a sequência faremos o uso da história da matemática acerca de pesos e medidas como fio condutor para desdobramento dessas atividades.

Para a realização das atividades que evidencie a passagem da grandeza para medida da grandeza, nos apoiamos no discurso de Caraça (1951), que discorre que comparar estabelecendo a relação de maior que, ou menor que é relevante, mas não é o suficiente. Há situações que envolvem o contexto social, há necessidade de saber quanto é maior ou quanto é menor. Para isto precisa eleger um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie. Neste caso, precisamos comparar com ação de medir.

Conforme o autor, para realizar ação de medir é necessário, primeiramente eleger uma unidade de medida, fazer a comparação entre a unidade e grandeza ser medida e por fim, expressar o resultado dessa comparação por um número, ou seja, o resultado é a medida, que é composta por um número seguido de sua unidade. O autor chama a atenção para quando eleger a unidade de medida procurar escolher uma adequada para cada situação a ser medida. A respeito de tal escolha Caraça, assevera que “Uma mesma grandeza tem, portanto, tantas medidas quantas as unidades com que a medição se faça. Se, com a unidade u , uma grandeza tem medida m , com outra unidade $u' = u : k$ a mesma grandeza tem medida $m' = m \cdot k$.” (CARAÇA, 1951, p. 31).

O contexto citado acima é acerca de que uma mesma grandeza possui diferentes medidas, as quais dependerão da unidade de medida eleita. Isso nos leva a inferir que, ao verificarmos o tamanho de determinado objeto, independente da unidade a ser usada para medir, o comprimento será o mesmo, o que mudará o valor que expressa a sua medida. Prevalecendo assim, que o comprimento enquanto grandeza não varia, é autônomo, o que varia é a sua medida, devido à unidade de medida adotada. Apontamos que esta situação refere-se à distinção e articulação de dois quadros, o da grandeza e o numérico. Envolvendo a grandeza e medida dessa grandeza.

Para Brito (2003) e Teixeira (2004) o conceito de comprimento refere-se ao campo das grandezas realizando comparações como: menor comprimento, maior comprimento, mesmo comprimento, evitando evidenciar o comprimento no campo numérico, ou seja, propondo atividades aos alunos que permitam fazer essas comparações sem ação de medir.

Em nossa concepção a grandeza comprimento refere-se à qualidade, característica ou atributo de objeto as quais se faz referência à dimensão linear que este possui. A essa grandeza designa-se diferentes tipos de comprimentos, no âmbito da matemática como: largura, altura, espessura, distância, perímetro, entre outros. A qual se pode fazer comparações sem usar números, estabelecendo a relação de maior, menor, igual, curto, longo.

No entanto, nas práticas sociais faz-se necessário ir além desta comparação, precisa-se saber o quanto é maior, menor, ou quanto é mais curto ou mais longo. Neste caso, temos que mensurar essa grandeza, ou seja, fazer comparações usando números, por meio da escolha de uma unidade de medida da mesma espécie dessa grandeza.

De acordo com este ponto de vista caminhamos para a noção de comprimento por meio da subdivisão de segmento defendido por Lebesgue, citado por Palaro (2006).

2.3 A NOÇÃO DE COMPRIMENTO COMO MEDIDA POR MEIO DA SUBDIVISÃO DE SEGMENTO DEFENDIDO POR LEBESGUE

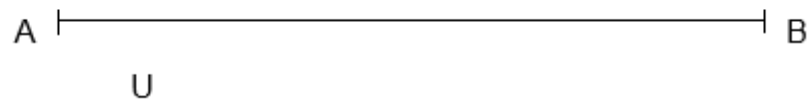
De acordo com Palaro (2006), Lebesgue em seu livro *Sur la mesure des grandeurs*⁸ de 1935, faz um julgamento do ensino da matemática tomando como base a discussão sobre a aprendizagem de medidas das grandezas, perpassando por todos os níveis de ensino, desde do mais elementar ao mais complexo. Para o autor a medida das grandezas é o ponto inicial de todas as explicações matemáticas.

Nesta obra Lebesgue afirma que para conduzir noções de matemática deve-se partir de situações práticas e fazer uma discussão iniciando com a comparação de conjuntos e números inteiros, depois comprimento de segmento e números, em seguida área, volumes e grandezas mensuráveis, e por fim integração e diferenciação. Entretanto, nos reportaremos nesta seção apenas à noção de comprimentos e números, por ser inerente à medida de comprimento.

Lebesgue introduz as noções de comprimento e número por meio do processo de comparação entre segmentos. Utilizando dois segmentos inicialmente, um segmento AB e outro segmento U , que chamou de unitário. A autora descreve o seguinte procedimento desenvolvido por Lebesgue: Ele considera inicialmente um segmento AB e um segmento U , denominado unitário. De acordo com a Figura 5.

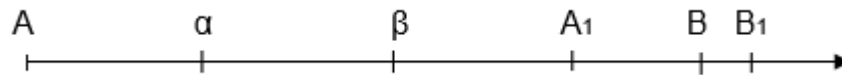
⁸ Na medida das grandezas (tradução nossa).

Figura 5- Segmentos



Fonte: Palaro (2006, p. 187)

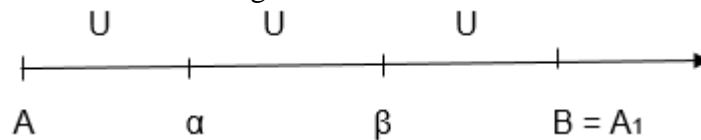
Então sobrepõe o segmento U a semirreta AB , a partir de A , marcando inicialmente o segmento $A\alpha$, em seguida o segmento $\alpha\beta$ e assim por diante, conforme a Figura 6, de maneira que A_1 seja o último ponto a ser marcado, que não ultrapasse o ponto B e outro ponto, o B_1 seja o primeiro ponto marcado que ultrapasse B , por conseguinte, conta quantas unidades U são suficientes para cobrir o segmento AB .

Figura 6-Semirreta AB 

Fonte: Palaro (2006, p. 188)

Com isso, duas situações podem ocorrer:

Primeira: A_1 coincidir com o ponto B , existirá uma quantidade inteira de vezes do segmento U , que cobrirá o segmento AB . Neste caso a quantidade será 3. Então, a autora informa de acordo com Lebesgue o comprimento do segmento AB na unidade U é 3, como mostra a figura 7.

Figura 7- Unidade U 

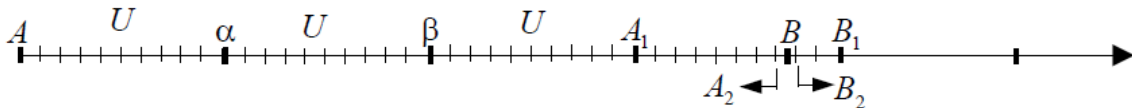
Fonte: Palaro (2006, p. 188)

Segunda: Se A_1 não coincidir com o ponto B , logo o comprimento de AB não será múltiplo inteiro de U .

Então, para Lebesgue o comprimento de AB será um valor maior do que AA_1 e menor do que AB_1 , pois B será um ponto unitário A_1B_1 , mas não coincidirá com o ponto B_1 . Isso ocorre com um exemplo da figura 6, evidenciado pela autora, em uma situação em que o comprimento de AB é um valor maior do $3U$ e menor do que $4U$. Segundo a autora quando a segunda situação ocorre, Lebesgue orienta que se deve dividir o segmento U em dez partes iguais a U_1 , significando $U_1 = \frac{1}{10} U$ e repete esse processo, chegando a um segmento A_2B_2

contido em A_1B_1 . Como B não coincide com B_1 , O comprimento será um valor variando de $30U_1$ a $39U_1$. Conforme a figura 4, este valor poderia ser, por exemplo, $37U_1$, ou seja, o comprimento do segmento AB , em relação à unidade U_1 seria no mínimo igual a 37, porém, menor que 38. Veja a figura 8.

Figura 8- Subdivisão do segmento U



Fonte: Palaro (2006, p. 189)

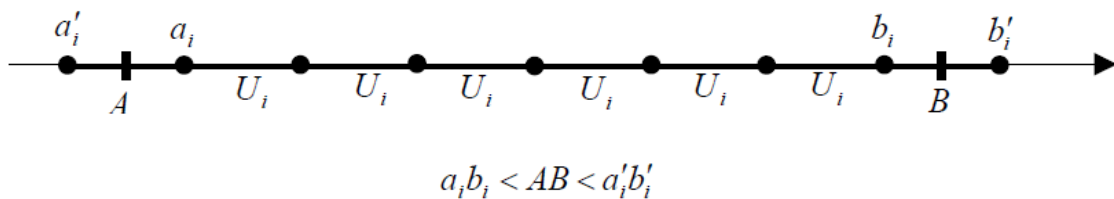
A partir do mesmo processo construir $U_2 = \frac{1}{10} U_1$, depois $U_3 = \frac{1}{10} U_2$ e, assim sucessivamente. Poderia ocorrer que o comprimento de AB na unidade U_2 estivesse entre 376 e 377, depois na unidade U_3 estivesse entre 3760 e 3761, e assim por diante. Gerando uma sequência de dígitos infinitas para a direita de acordo com estágio que se enquadre em relação U_1, U_2, U_3 , e sucessivamente. Para se certificar que esta sequência resulta da comparação de um segmento AB com a unidade U . Uma vez que, conhecida a sequência, busca-se construir AB , a partir de A , sobre uma semirreta AX , o que levará a uma sequência de segmentos A_1B_1, A_2B_2, \dots encaixados uns nos outros e tomando B como ponto em comum. Partindo deste argumento para chegar ao resultado geral:

[...] um segmento AB em uma reta AX conhecida, cuja origem A é conhecida, está determinado quando se sabe que sua extremidade B pertence a uma sequência infinita de segmentos $\alpha_n \beta_n$ de AX e encaixados uns nos outros contanto que qualquer que seja n , o comprimento de um segmento fixo U seja superior à n desde que se fixe por uma unidade um segmento seja conhecida $\alpha_n \beta_n$ de índice suficientemente grande. Quando estas condições são realizadas, diz-se que o comprimento de $A\alpha_n$ (ou $A\beta_n$) é um valor por falta ou (por excesso) do comprimento AB e que essas duas sequências de valores são indefinidamente aproximadas. Um número é, portanto, determinado, quando se conhece para ele duas tais sequências de valores aproximados; se observaria, além disso, facilmente, que o p -ésimo dígito decimal desse número é o p -ésimo dígito decimal desses valores aproximados por excesso em que o índice é suficiente grande. (LEBESGUE, 1935, apud PALARO, 2006, p. 191).

Segundo a autora, com essa visão geral, Lebesgue generaliza o procedimento de medida, ou seja, utiliza a comparação do segmento AB em relação ao segmento unitário U , a partir de qualquer ponto pertencente ao segmento AB , que denominou de ω . Aplicando nos dois sentidos, partindo de ω , o segmento U , depois o segmento U_1 , e assim, por diante,

obtem-se uma graduação T que possibilitaria a determinação da medida de AB . Pois em cada etapa do processo de comparação, encontra-se um a_1b_1 que é o maior segmento contido em AB e um $a'_1b'_1$ que é o menor segmento que contém AB . Logo se o segmento a_1b_1 for composto por n segmentos U_1 , então, $a'_1b'_1$ será composto de $n + 2$ desses segmentos. Com isso os comprimentos a_1b_1 e $a'_1b'_1$, são dois valores aproximados do comprimento de AB , respectivamente por falta ou por excesso, em relação à unidade U_1 , conforme mostrado na Figura 9:

Figura 9- Segmentos por falta ou por excesso



Fonte: Palaro (2006, p. 192)

De acordo com a descrição da autora sobre o processo de comparação de segmentos, percebemos que Lebesgue parte de uma situação concreta, comparando o segmento AB com o segmento U , que denominou unitário, para então determinar a noção de comprimento e número, utilizando um ponto de referência inicialmente, para depois com o uso de um ponto qualquer, chegar à generalização do processo de medição de segmento: $a_1b_1 < AB < a'_1b'_1$.

Neste sentido, com base na subdivisão de segmentos acima exposto, buscamos desenvolver atividades que favoreçam a compreensão de comparação com ação de medir de modo direto ou indireto, com sobreposição de objetos contidos em uma “caixa de ferramentas”, inspirada na caixa utilizada nos estudos de Brito (2003), exposto no levantamento bibliográfico. Além de fomentar os alunos a estimarem medidas, tomar decisão e criar estratégias quanto à escolha do (s) objeto (s), como unidade para verificar a medida de comprimento para solucionar os problemas propostos.

Por fim, o estudo sobre a subdivisão de segmentos é um grande suporte para expressarmos e justificarmos a relevância da construção do sistema métrico decimal, bem como explorarmos situações que apresentem a necessidade de anunciarmos unidades maiores e menores que a unidade de medida de comprimento padrão, o metro.

2.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE BROUSSEAU

A presente pesquisa tem como basilar a Teoria das Situações Didáticas, por acreditarmos que esta possui características que possam auxiliar uma prática docente,

permitindo ao professor planejar e nortear situações de ensino que favoreçam ao aluno a construção de conhecimentos matemáticos, suscitando-lhes a tomada de decisão, estratégias na resolução de situações problema. A respeito desse modo de abordagem Brousseau assevera que “Para tornar possível uma actividade desse género, o professor tem, pois, de imaginar e propor aos alunos situações que eles possam viver e nas quais os conhecimentos apareçam como a solução óptima e passível de ser descoberta para os problemas colocados” (BROUSSEAU, 1996, p. 38).

Com este pensamento de propor aos alunos situações que os levem a vivenciar situações que exija tomar decisões e procurar soluções que lhes permitam a construção do conhecimento, fez com que o Guy Brousseau desenvolvesse a Teoria das Situações Didáticas. Isto, para modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, criando um modelo de interação entre o aluno, o saber e o *milieu*⁹ (meio), em que a aprendizagem possa se desenvolver. Pois para ele, “o aluno aprende se adaptando com o *milieu* que é um fator de contradição, de dificuldade, de desequilíbrio, um pouco como fez a sociedade humana” (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

Em nossa concepção esse *milieu* consiste em um ambiente organizado pelo professor com o intuito de provocar conflito no esquema cognitivo do aluno, diante de um problema, que o leve a mobilizar seu conhecimento prévio, para a solução deste problema, emergindo em um novo conhecimento. Brousseau (2008) parte, a princípio, da ideia construtivista de Piaget que o indivíduo desenvolve-se no processo de assimilação e acomodação em busca do equilíbrio, ou seja, produzindo mudanças no esquema cognitivo, para que novas experiências sejam incorporadas.

Na concepção de Brousseau (1986) o conhecimento não é adquirido no mesmo momento pelo aluno, nem nas mesmas condições. Para o autor, o ensino provoca nos alunos formas de conhecimento que dependem das condições didáticas apresentadas e que se diferem dos saberes de referência. Dependem das situações que são preparadas para que ocorra aprendizagem do discente, e não do modo que ocorrem as situações de ensino clássicas, relacionando apenas o sistema educacional e aluno, com a transmissão de determinado conhecimento. “Uma “situação” é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (BROUSSEAU, 2008, p. 21).

⁹ Segundo Pommer (2008) O termo “milieu” indica o meio a-didático, um sistema antagonista, sem intenção didática explícita e exterior ao aluno, que pode abranger, dentre outros, situações-problema, jogos, os conhecimentos dos colegas e professor.

Brousseau, preocupado com esse modo de ensino, procurou desenvolver situações de ensino que valorizassem tanto os conhecimentos prévios dos alunos e seu envolvimento na construção do conhecimento matemático, como o trabalho do professor, ao criar condições necessárias para que o aluno aproprie-se de tal conhecimento, a qual denominou situação didática. Conforme Almouloud (2007), esta situação é o objeto central das teorias das situações, como define:

O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição. (BROUSSEAU, 1978, apud ALMOULOU, 2007, p.33).

Esse processo ocorre perante um “jogo hipotético” que expressa um sistema de condições necessárias mínimas para o conhecimento definido, em que pode ocorrer pelas decisões para efeitos observáveis de uma atuação em um meio regido de regras estabelecidas explícita ou implicitamente entre professor, aluno e o conteúdo em jogo, chamado de contrato didático. Brousseau define o contrato didático, como:

Uma relação que determina explicitamente, em certa medida, mas principalmente, implicitamente, o que cada parceiro, professor e aluno terá a responsabilidade de gerir e, de uma forma ou de outra, ser responsável perante o outro. Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que interessa nesse contexto é o contrato didático, ou seja, a parte deste contrato que é específica ao "conteúdo", o conhecimento matemático alvo. (BROUSSEAU, 1986, p. 31-32).

Nesta direção, compreendemos que o contrato didático regula as intenções dos envolvidos (professor e aluno) perante a situação didática. Ao assumirem responsabilidades recíprocas, o professor tem o papel de promover situações de ensino que favoreçam ao aluno aprendizagem do conteúdo em jogo e, o aluno por sua vez, com o papel de tentar resolver o problema proposto, em que a solução se dirige remete à apropriação do conhecimento em jogo. Mas para Brousseau (1996) este contrato não se remete ao contrato pedagógico geral, e sim à relação didática professor, aluno e conhecimento, pois ele depende estritamente do conhecimento em jogo.

O contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática, no entanto a evolução da situação pode modificar o contrato, levando-o a sua ruptura, que é algo importante, uma vez que poderá permitir a obtenção de situações novas.

Segundo o autor, para modelar uma situação didática que possa permitir a aquisição do conhecimento por parte do aluno é necessário que o meio esteja munido de intenções didáticas, mas para que isso ocorra, o professor precisa criar condições que provoquem a aprendizagem. Neste caso a situação didática é uma grande aliada.

De acordo com Almouloud (2007) a situação didática tem como parte substancial a situação didática, em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi planejada e construída pelo professor com o intuito de proporcionar a ele condições que o leve a aquisição do novo saber, que se deseja ensinar. Esta situação apresenta as seguintes características:

- O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser constituídos sem apelo às razões didáticas;
- O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos, a partir da(s) atividade(s) proposta(s). (BROUSSEAU, 1986, apud AMOULOU, 2007, p. 33).

Essas situações didáticas são construídas com fins didáticos, ou seja, com intenção de ensino, embora sejam circunstâncias que se apresentem sem intencionalidade didática, as quais o professor apresenta um problema para o aluno, de modo que este possa resolvê-lo sem necessariamente a intervenção do seu mestre. A solução será o conhecimento que o aluno irá construir durante a resolução. Salientamos que este processo ocorre em um jogo envolvendo professor e o sistema de interação do aluno com o problema, o qual foi proposto pelo professor ao aluno.

Este jogo faz parte de uma situação mais ampla, a situação didática que ocorre a partir do momento que o professor propõe o problema ao aluno para que ele resolva, tomando para si parte da responsabilidade pela aprendizagem, denominado de *devolução*¹⁰, que por sua vez, deve ter a intenção de provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno o desenvolvimento autônomo. Essa situação didática conclui-se com a institucionalização em que o professor dá estatuto ao conhecimento produzido pelo aluno. Agora, se o aluno aceitar tal desafio e obtiver sucesso, inicia-se o processo de aprendizagem. No entanto, entre esses dois momentos há um longo caminho a ser percorrido. É necessário, portanto, outros

¹⁰ Segundo Brousseau (2008) a devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência.

momentos que fazem parte da situação didática, os quais discorreremos mais a frente e serão fundamentais para o desenvolvimento da proposta do nosso estudo, a sequência didática.

Para Brousseau (1996) cada conhecimento pode ser determinado por uma ou várias situações adidáticas, que mantenham o seu sentido, designando assim uma *situação fundamental*. Esta situação caracteriza-se por ser mais ampla possível e conter todas as possibilidades de utilização de um conhecimento.

Na concepção de Almouloud (2007) o conjunto dessas situações adidáticas constitui uma situação fundamental, cuja noção de ensinar é a resposta considerada a mais adequada. Essas situações proporcionam a introdução do conhecimento com base em uma epistemologia científica.

De acordo com Brousseau (2008) uma situação fundamental não é a priori uma situação “ideal” para o ensino, tampouco mais eficaz. Ela representa um conhecimento e os diferentes tipos de problemas que permitem solucionar, por meio de um jogo sobre as condições que o determinam. Neste sentido, consideramos uma situação fundamental um conjunto de situações adidáticas que representa um conhecimento pelas condições que foram criadas.

A existência de uma situação fundamental representativa de um saber não implica necessariamente a existência de uma situação didática que permite ensinar ou aprender esse saber num determinado nível de ensino, pois isto significa também a existência de um contrato didático que permite fazer a devolução para o funcionamento dessa situação fundamental (PERRIN-GLORIAN, 1999, apud AMOULOUD, 2007, p.36).

Brousseau (2008) tem como seu principal objeto de pesquisa as práticas de sala de aula, ou seja, as condições as que os alunos fazem matemática, aprendem, resolvem questões matemáticas. Para isto, se faz necessário a observação e decomposição desse processo. Para análise do processo de aprendizagem, o autor distingue quatro tipos de situações: ação, formulação, validação e institucionalização.

Situação de ação: exige que o conhecimento do aluno manifeste-se por decisões e ações adequadas e eficazes sobre o meio. O aluno não precisa expressar essas ações por meio de algum discurso e nem explicar o conhecimento. Apenas apresentar resposta a um problema, de modo mais experimental e intuitivo do que teórico.

Situação de formulação: nesta situação é necessário comunicar uma informação matemática, ou seja, expressar o seu conhecimento de forma mais elaborada, apoiado em alguma teoria, para explicitar ao parceiro ou a outro e convencê-los, e ambos chegarem a uma

decisão satisfatória sobre o meio. Neste caso, o aluno precisará mobilizar conhecimentos anteriores. Em suma, o aluno deverá apresentar justificativas com base em aspectos teóricos, que os levaram chegar à determinada solução.

Situação de validação: esta é a situação em que o aluno precisa provar o seu conhecimento formulado, por meio de debates, discussões confrontando opiniões, e procurar entrar em acordo utilizando argumentos, teoremas, leis que possam validar o seu conhecimento. Em relação a esta situação, Pais (2008, p.73) discorre “Situações de validação são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de provas e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma finalidade de natureza essencialmente teórica”.

Por fim a *situação de institucionalização:* esta situação refere-se ao professor, que dará estatuto aos conhecimentos validados pelos alunos, com o intuito de situar um caráter universal, articulando com outros conhecimentos. Tornando assim, o conhecimento novo produzido pelos alunos socialmente aceito.

A situação de institucionalização tem a finalidade de buscar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Sob o controle do professor, é o momento em que se tenta proceder à passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico. (PAIS, 2008).

Essas situações de ação, formulação e validação caracterizam-se como adidáticas, por fazerem parte de momentos que possibilitam a construção do conhecimento por parte do aluno, ou seja, o controle sobre produção do conhecimento está nas mãos do aluno e, por sua vez, o professor tem o controle somente do andamento da situação. A institucionalização é uma situação de natureza didática, em que o professor tem o controle do conhecimento produzido pelo aluno, reforçando e generalizando, dando-lhe um estatuto, em uma passagem desse conhecimento em jogo para uma dimensão histórica e cultural do saber científico.

Outro ponto importante a destacar é que essas situações se entrelaçam, podendo ocorrer ao mesmo tempo ação e formulação por parte do aluno durante o processo de aprendizagem. A forma que apresentamos foi somente para evidenciarmos os aspectos fundamentais de cada uma. Conforme Brousseau (2008), mencionamos acima, a análise do processo de aprendizagem caracteriza-se nessas quatro situações. Desse modo pretendemos analisar o desenvolvimento da sequência didática identificando essas situações.

Para o autor cada situação pode fazer com que o aluno progrida, e devido a isto também pode progredir, de tal forma que a gênese de um conhecimento pode emergir durante uma sucessão de perguntas e respostas (espontâneas ou não), em um processo que autor denomina de “dialética”.

Almouloud (2007) refere-se à dialética como sendo as interações fundamentais do aluno com *milieu* nessas diferentes situações, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. No caso dialética de ação, no momento da situação de ação, dialética de formulação durante a situação de formulação e assim, a dialética de validação e institucionalização.

Diante do exposto, refletimos que a teoria de Brousseau procura proporcionar ao aluno um papel de ator de sua própria aprendizagem, diante de um determinado conteúdo. Perpassando pelos tipos de situações explicitadas anteriormente, que aproximam este aluno de um pesquisador, com a oportunidade de tomada de decisão, comunicação, validação diante da resolução de problema. O professor, por sua vez, também com uma grande importância de ser o grande responsável pela participação ativa do aluno, pois, é o professor que organiza e planeja as situações para que possibilite esse processo de aprendizagem. Mas, com dois elementos fundamentais, o *milieu* e o contrato didático.

Com isso, acreditamos na possibilidade de promover práticas docentes que oportunizem ao aluno uma participação mais ativa na construção de conhecimento acerca de grandezas e medidas, em particular medida de comprimento. Para tanto, nos ancoramos na Teoria das Situações Didática de Brousseau para elaboramos uma sequência didática, conforme o seu modelo de ensino, considerando o contexto dos sujeitos envolvidos e objetivo a ser alcançado.

A sequência se assenta em uma situação fundamental. Concebemos esta como uma ou mais situação adidática, que representa ou caracteriza um conhecimento, de modo a explorar todas as possibilidades de utilização deste. A situação adidática caracteriza-se por momentos do processo de aprendizagem, em que o aluno trabalha de forma independente, sem a intervenção do professor.

Neste sentido, interpretamos que toda situação fundamental é uma situação adidática, mas nem toda situação adidática é uma situação fundamental. A diferença está no alcance da situação fundamental, ao ser mais ampla possível para representar um conhecimento.

Assim, propomos a elaboração e aplicação de uma sequência didática, com um conjunto de atividades atrelado a situações que possam favorecer o ensino de medida de comprimento, evidenciando a priori a grandeza comprimento, conforme as considerações anunciadas no modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989), com situações de comparação sem ação de medir, além de situações com ações de medir, apoiadas nos três aspectos anunciado por Caraça (1951) e, por fim, a noção de medida de comprimento por meio de subdivisão de segmentos, apontada por Lebesgue.

2.5 ASPECTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO PERCURSO DE PESQUISA

Segundo Artigue (1996), a noção de Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática no início da década de 80, com o intuito de desenvolver um trabalho didático comparado com o trabalho de um engenheiro que, para realizar projeto preciso, mergulha no conhecimento científico de seu domínio. Assim, submetendo-se ao controle do tipo científico, mas isso não é suficiente, pois precisa pôr em prática esses conhecimentos, no caso a execução do projeto.

Neste sentido, compreendemos que a autora remete-se à posição de um professor pesquisador, quando pretende realizar uma atividade para o ensino de um determinado conteúdo, além de ter o domínio do conhecimento em jogo, precisa ter informações dos sujeitos e contexto, em que as atividades serão realizadas. Segundo Pais (2008, p. 99) a engenharia didática refere-se “a uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática”. Com base nesta concepção e por se tratar de um processo que possibilita conexão entre pesquisa (teoria) e ação pedagógica (prática) de um determinado fenômeno didático é que adotamos a engenharia didática como metodologia de pesquisa para o nosso estudo, em uma abordagem qualitativa.

Conforme Artigue (1996) esta metodologia de pesquisa apoia-se na TSD de Brousseau, para constituir-se como uma teoria de controle das relações entre sentido e situação. Controle necessário para análise a priori, em que consiste um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino que veremos mais à frente.

Segundo Almouloud (2007), a engenharia didática como metodologia de pesquisa apresenta duas características fundamentais: uma refere-se a um esquema experimental, com base em “realizações didáticas”, em que consiste na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino, e a outra se refere à pesquisa experimental, por meio do registro em que se estabelece o modo de validação que lhes confere: confronto entre análise a priori e a posteriori, sem necessariamente utilizar o recurso de teste ou pós-teste.

Diante dessas características, para alcançar o objetivo de nossa pesquisa, que versa em **legitimar uma sequência didática que favoreça o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida**, procuramos organizá-la percorrendo alguns caminhos das fases que constitui a metodologia da engenharia didática. Segundo Artigue (1996) esta metodologia contempla quatro fases: 1) análises preliminares, 2) concepções e análise a priori das situações didáticas da engenharia, 3) experimentação, 4) análise a posteriori e validação.

A etapa das análises preliminares é constituída de um quadro teórico didático geral. Incluindo também conhecimentos didáticos do domínio do pesquisador, para que possa identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e, por conseguinte delinear de forma fundamentada as questões, as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. Mas, para que isso ocorra é necessário realizar estudos preliminares acerca das dimensões que participam da constituição do objeto de estudo, no caso, epistemológica (referente ao saber em jogo), cognitiva (associada às características cognitivas dos sujeitos, a qual se dirige o ensino), didática (referente ao funcionamento do sistema de ensino no qual os sujeitos estão inseridos) entre outras.

Esta etapa poderá ser retomada e aprofundada no decorrer do processo, permeando as demais etapas. As análises preliminares compreendem as seguintes vertentes:

- Epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino habitual e dos seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- do campo de constrangimento, no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- E, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1996, p. 198).

Para atender algumas vertentes desta fase da pesquisa, realizamos um levantamento bibliográfico referente a estudos correlatos à nossa pesquisa. O que nos permitiu evidenciar o tratamento de cada autor em relação ao objeto de estudo, com seus respectivos objetivos, das possíveis dificuldades apontadas e intervenções desenvolvidas Junto com nossas práticas de sala aula e com apoio em documento oficial permitiu-nos delinear a nossa questão de pesquisa, objetivo, referencial teórico e caminho que deveríamos percorrer. Apoiamo-nos na Teoria das Situações Didáticas defendida por Brousseau, nas noções de comprimento de Lebesgue, referências na noção de comprimento como grandeza autônoma de Douady e Perrin-Glorian (1989) e algumas referências. Entre elas Caraça (1951), Brolezzi (1996), Russel (1967) entre outros, estes últimos para abordar a noção de grandezas e medidas.

Também utilizamos aspectos da história da matemática referente ao objeto de estudo, para possibilitar a construção e evolução de conceitos relacionados à grandeza e medida de comprimento, e como este se constituiu. Tomamos esta fase como fundamental para nortear a elaboração da sequência didática, principalmente no que concerne às escolhas que serão tomadas e explicitadas na análise a priori.

Com base nos estudos da etapa anterior, foi possível passarmos para a segunda etapa, que nos leva à concepção e análise a priori. Segundo Artigue, nesta fase o pesquisador toma a decisão de agir sobre certo número de variáveis do sistema, que ele supõe referentes ao fenômeno estudado, apontados na fase anterior. A essas variáveis a autora denomina variáveis de comando, manipuladas pelo pesquisador, que por sua vez, a autora distingue em dois tipos: macrodidáticas ou globais, relativas à organização geral da engenharia; microdidáticas ou locais, que se referem à organização local da engenharia, isto é, organização de uma sessão ou de uma fase.

Nesta fase elaboram-se as atividades da sequência didática, com atenção especial nessas variáveis didáticas, para que o pesquisador possa exercer algum tipo de controle, o qual atribui a análise a priori à função de descrever e prever o que poderá ocorrer na sequência. Dessa forma, em uma análise a priori devemos:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida;
- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOU E COUTINHO, 2008, p. 67).

Deste modo, a segunda fase com o auxílio da primeira permitiu-nos elaborar as atividades destacando os seus respectivos objetivos e as previsões das possíveis dificuldades que alunos poderão enfrentar durante a realização. Isto, bem como as estratégias e tomadas de decisão na resolução das situações propostas, além de prevermos as possíveis soluções encontradas pelos alunos.

A terceira fase denominada experimentação refere-se à realização da parte prática da engenharia didática. Esta fase propiciou-se no momento em que nos direcionamos à sala de aula para o contato com uma turma de 25 alunos do 6º ano do ensino fundamental, de uma escola pública estadual, localizada na região metropolitana de Belém do Pará. Apresentamos a eles os objetivos e as devidas orientações da pesquisa, estabelecendo o contrato didático, para aplicação da sequência com atividades realizadas em grupos de no máximo cinco integrantes. Os dados produzidos foram obtidos por meio das observações durante todo experimento, dos

registros escritos na própria atividade (produção dos alunos), discursos dos alunos, fotografias e áudio.

Nesta fase adentramos no contexto dos sujeitos da pesquisa e conhecemos a sua realidade na comunidade escolar e faixa etária. Acreditamos que esta fase encontra-se fortemente imbricada com a fase anterior em nosso estudo, pois obtivemos as informações acerca da turma e algumas sobre o espaço físico da escola, por meio da professora regente de matemática, junto com os estudos preliminares. Assim, elaboramos o conjunto de atividades que constituiu o produto educacional de nossa pesquisa, a sequência didática.

Por fim, a última fase intitulada análise a posteriori e validação. Nesta etapa fizemos uma análise detalhada dos dados produzidos durante a experimentação, com uma abordagem de cunho qualitativo. Esses dados foram obtidos por meio da observação durante o experimento e dos registros das atividades realizadas pelos alunos, com o auxílio dos recursos de áudio, fotos e os protocolos das atividades, que nos permitiram uma análise mais consistente.

Por se tratar de uma sequência didática constituída de conjunto de situações didáticas, conforme anunciado na seção anterior, essa análise teve como base a TSD de Brousseau. A validação se deu por meio do confronto entre os dados obtidos na análise a priori (o que estava previsto) e a posteriori (o que ocorreu no experimento), a partir dessas informações verificamos se a questão de investigação foi respondida.

Vale ressaltar, que “o objetivo dessa fase é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados” (ALMOULOU E COUTINHO, 2008, p. 68). Sendo assim, compreendemos que essa validação tem o intuito de identificar nas análises da parte prática da pesquisa, o que foi previsto na parte teórica.

3 CONCEPÇÕES E ANÁLISE A PRIORI

Nesta seção, apresentamos a segunda fase da engenharia, a qual se constitui com a construção da sequência didática e análises a priori, esta consistirá com base na análise preliminares, no sentido de apontar certo número de variáveis do sistema sobre o qual ensino podemos atuar, de modo a descrever as escolhas que tomamos, deixando tangível essas variáveis e prever acerca da nossa expectativa em relação aos alunos diante das atividades.

3.1 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De acordo com Pais (2008) uma sequência didática é constituída por certos números de aulas planejadas e analisadas previamente, com o intuito de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Segundo o autor essas aulas também são denominadas *sessões* em vista do seu caráter específico para a pesquisa. Não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula. É preciso, durante o processo de aprendizagem, que o pesquisador fique atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno estudado.

Para construir a sequência didática de modo organizado e proposta nessa versão, procuramos estruturá-la conforme os pressupostos da engenharia didática, delineada com base nos estudos preliminares anunciados anteriormente na seção I. No entanto, para aproximar as atividades do contexto dos alunos, entramos em contato com a professora de matemática regente da turma, com a qual prevemos realizar o experimento, para obtermos informações do *lôcus* de investigação e dos alunos.

3.1.1 Conhecendo o ambiente e sujeitos de investigação

O *lôcus* de investigação refere-se à Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na região metropolitana de Belém do Pará. Constituída pelas etapas do ensino fundamental, médio e educação de jovens e adultos (EJA), com funcionamento nos turnos manhã, tarde e noite. Uma escola de grande porte, com 1802 alunos matriculados no ano de 2016, informação obtida pelo site da Secretaria de Estado de Educação do Estado do Pará.

Nessa escola, realizamos o experimento com 25 alunos de uma turma do 6º ano do ensino fundamental, na faixa etária de 10 a 12 anos. Discentes participativos nas atividades desenvolvidas nas aulas de matemática.

Nosso contrato com essa instituição ocorreu por meio de uma professora de matemática desta escola, durante um diálogo informal em que expusemos a nossa proposta de pesquisa. A docente mostrou interesse, e nos informou que atualmente estava lecionando em uma turma que apresentava o perfil que se aproximava da postura adotada pela investigação, com alunos do 6º ano do ensino fundamental que ainda não tinham visto no ano corrente o conteúdo medida de comprimento, apenas no ano anterior. (5º ano).

Durante o diálogo com a professora regente obtivemos as informações expostas como localização da escola, o número de alunos, faixa etária, e também os conteúdos estudados. Estes últimos tínhamos conhecimento, devido à experiência de sala de aula, durante alguns anos lecionando no 6º ano e também por informações dos PCN, em que foram corroboradas pela professora regente, ao nos dizer que os alunos apresentavam uma noção de fração, por ter sido trabalhado no 5º ano e revisado por ela no início do ano letivo.

Quanto aos conteúdos sobre grandezas e medidas, a professora regente informou que o conhecimento da turma se referia à medida, expressando medir tamanho das coisas, como tamanho da sala, comprimento da porta. Em relação às unidades de medidas tinham o conhecimento de metro, como instrumento, não como unidade de medida. Alguns alunos relacionavam 1000 metros a 1 quilômetro, mas não tinham a noção da extensão deste.

A partir das análises preliminares desta pesquisa mais as informações obtidas pela professora, elaboramos um conjunto de atividades, e apresentamos a professora regente para que pudesse verificá-las, quanto à sua relevância e possíveis sugestões, que achasse pertinente. A professora entregou-nos as atividades com uma sugestão para atividade sobre os múltiplos do metro, para que elaborássemos uma atividade para calcular a distância entre sala de aula da turma e quadra de esporte da escola. As demais atividades, a professora regente esteve de pleno acordo.

Com o aval da professora regente, elaboramos um documento para oficializar a solicitação à diretora da escola, para que permitisse a realização do experimento. Tal documento encontra-se no apêndice B.

3.1.2 Proposta e o objetivo da sequência didática

Esta sequência é constituída por atividades modelada a TSD, com situações de ensino preparadas e organizadas pelo pesquisador, composta de elementos fundamentais desta teoria como o contrato didático e o *milieu*. Estes preciosos para surgimento das situações didáticas durante o processo de aprendizagem.

Proposta da sequência: abordar a noção de comprimento permeando os domínios da grandeza e da medida. Para concretude desta, pretende-se trabalhar atividades que evidenciam situações problemas comportando três situações¹¹:

- Situação histórico-epistemológica remete-se ao contexto histórico, que versa sobre a abordagem da origem e evolução das grandezas e medidas, em particular o comprimento. Nesta situação é relevante evidenciar as primeiras ações em relação ao ato de medir, a necessidade de medir, os instrumentos de medida utilizados pelos povos antigos e a necessidade de uma padronização universal de medida.
- Situação de comparação refere-se às situações que exploram comparação de comprimentos sem ação de medir (sem uso de número). Com atividades que proporcione ao aluno realizar comparação por meio da visualização ou com auxílio de objetos como referência. Por exemplo, o barbante, para verificar se um comprimento de um determinado objeto ou percurso é maior, menor ou igual ao outro. Esta situação evidencia o comprimento no domínio da grandeza.
- Situação de medida alude às situações que exploram a quantificação da grandeza, na qual se atribui um valor numérico a esta grandeza. Esta situação evidencia o comprimento no domínio da medida, com atividades que abordam a necessidade de medir e como medir, passando da grandeza (comprimento) para medida dessa grandeza, elegendo unidades de medida não padronizada, padronizada para se chegar até a constituição do sistema métrico decimal e conversão de unidades de medida.

A sequência objetiva favorecer a noção de comprimento, bem como a conversão de suas unidades de medida e constituição do sistema métrico decimal para alunos do 6º do ensino fundamental.

3.1.3 Descrição da construção da sequência e análise a priori

Para iniciar a sequência tomamos como primeira atividade um texto construído a partir de recortes de aspectos históricos sobre pesos e medidas, tomando como referência as literaturas indicadas. Esta atividade foi inspirada em uma das atividades propostas pela sequência didática, desenvolvida no estudo de Nunes (2007) intitulado *História da matemática e aprendizagem significativa da área do círculo: uma experiência de ensino-aprendizagem*, em que o autor faz uso de um texto histórico como organizador prévio. Para

¹¹ Esta situação refere-se ao tipo de atividades e não ao sentido da situação de ensino e seus momentos que Brousseau faz referência.

esta pesquisa utilizaremos a história da matemática para introduzir uma situação adidática que mostre aos alunos a evolução e os porquês dos conceitos matemáticos citados acima e auxiliá-los nas ações que poderão desenvolver no decorrer das demais atividades.

Esta atividade contém recortes dos aspectos históricos sobre pesos e medidas com informações concernentes às civilizações desde a Antiguidade, com práticas matemáticas envolvendo a comparação de grandezas, a necessidade de medir, o uso do próprio corpo como as primeiras formas de realizar medição até a oficialização da unidade de medida padrão de comprimento, no caso o metro e seus múltiplos e submúltiplos.

Para auxiliar os alunos no desenvolvimento das atividades posteriores na primeira foi disponibilizada uma “caixa de ferramentas”, inspirada em Brito (2003). Segundo a autora, essa caixa é composta por material escolar como: borracha branca, canetas hidrográficas de cores diferentes, lápis grafite e tesoura escolar, além de alguns instrumentos como “régua” feita de cartolina branca, não-graduada, um fio fino e flexível e dois cordões de cores diferentes. Materiais caracterizados por ele como medianeiros por servirem para mediar as comparações que não podem ser feitas diretamente.

A partir dessas ideias Brito (2003), que evidenciou o comprimento como grandeza, organizamos a nossa “caixa de ferramentas” com algumas adaptações em relação aos instrumentos que a autora denominou de medianeiros. Utilizamos outros materiais como medianeiros devido ao foco de nossa pesquisa explorar grandezas e medidas, em particular medida de comprimento. Sendo assim, a nossa caixa comporta os seguintes objetos: “régua” feita de papel cartão de 10 centímetros (cm) sem graduação, cliques, canudo de plástico, barbante, linha de crochê, palito de picolé, barrinhas de madeira de 3 cm (sem graduação), além dos objetos escolares, parecidos usados por Brito (2003). Utilizamos também as barras de madeiras da escala de cuisenaire¹² e os blocos do material dourados (somente os cubos soltos). Estes dois últimos de fundamental importância para constituição da unidade padrão de comprimento, o metro e serão apresentados e utilizados a partir da atividade 4.

A respeito desses materiais salientamos que embora a barrinha de madeira e bloco do material dourado apresentem forma de sólidos geométricos, apenas faremos uso do comprimento da aresta desses objetos, o cubo com medida corresponde a 1centímetro (cm) e a aresta de maior comprimento da barra de madeira, sobreposta na posição horizontal com dimensão de 1 a 10 cm. Haja vista, que todas as arestas do bloco de madeira de forma cúbica

¹² Conforme Boldrin (2009) - Escala de cuisenaire é um material concreto constituído por uma série de barras de madeira, sem divisão em unidades e com tamanhos variando de uma a dez unidades. Cada tamanho corresponde a uma cor.

possuem a mesma medida, por isso acreditamos que esse objeto não provocará obstáculo didático¹³ ao aluno.

De acordo com o exposto, o texto histórico é de suma importância para desdobramento das demais atividades, pois com os possíveis questionamentos por parte dos alunos, faremos uma relação do texto com situações problemas do cotidiano do aluno. Assim, propondo primeiramente uma atividade que evidencie a concepção de comprimento como grandeza, utilizando o modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989). Articulando o quadro geométrico e o das grandezas com situações envolvendo atividades de comparação (sem ação do medir) entre linhas retas e curvas, estabelecendo a relação de maior, menor, ou igual, mais curto, mais longo, para que o aluno perceba que diferentes linhas podem ter o mesmo comprimento.

Essas situações são relevantes para clarificar uma das dificuldades apontadas por estudos anteriores no campo da Educação Matemática, expostos nas análises preliminares, como estudos de Brito (2003), Barbosa (2007), Teixeira (2004) apoiados em Perrot et al. (1998) acerca das dificuldades conceituais de aprendizagem. Tais como confusão que os alunos fazem entre grandeza e medida da grandeza, que na ausência de números não existem grandezas, levando a concepção de que a única forma de comparar grandezas é comparando números. Também a ideia que os alunos têm que apenas os segmentos de reta possuem comprimento. Esta última, de acordo com Teixeira que comunga com o ponto de vista de Câmara dos Santos (1999), está associada a um obstáculo do tipo didático:

A utilização de régua como ferramenta privilegiada na medição de comprimento faz com que os alunos, se não tiverem contato com outras experiências em na sala de aula construam associações entre comprimento e linha reta, gerando a concepção que “somente polígonos têm perímetro, e a única maneira de determina-lo é apoiando-se nos vértices para medir os lados”. (CÂMARA DOS SANTOS, 1999, apud TEIXEIRA, 2004, p. 58).

As demais atividades consistiram em situações-problema que exploraram o comprimento como medida. Isto, partindo dos questionamentos que evidenciam a relevância do ato de medir, por que medir, estimar a medida de comprimento utilizar instrumentos não convencionais, usando o próprio corpo assim como os povos antigos, ou criar seus próprios instrumentos convencionais usando os objetos da caixa de ferramentas para ações de medir diante de situação-problema concreta que os levem à tomada de decisões exigida pelo

¹³ Conforme Almouloud (2007) apoiado em Brousseau (1986) - Obstáculo didático são os “obstáculos que surgem a partir das escolhas feitas no processo de ensino e provocadas por uma transposição didática que o professor dificilmente poderá renegociar no momento restrito de sala de aula”.

problema em jogo e não porque o professor deseja. Mas sim pelo interesse e necessidade do aluno em resolver. Assim, como nas atividades propostas nos trabalhos realizados por Silva, C. (2011), Backendorf (2010), Rodrigues (2007) e Moura (1995) explicitado no levantamento bibliográfico do presente estudo.

A sequência didática proposta nesta investigação é constituída por sete atividades, com aplicação prevista para seis encontros, conforme apresentada no quadro 2:

Quadro 2- Síntese da sequência didática

Encontros	Atividades	Objetivos
Primeiro	Os primeiros passos para medir	Ler, interpretar e discutir sobre o texto; destacar palavras e excertos do texto.
Segundo	Comparação de caminhos	Comparação de comprimentos sem ação de medir.
Terceiro	A medida da altura dos alunos	Construir da noção de medida empregando unidades não padronizadas e padronizadas.
Quarto	A medida padrão – o metro e seus submúltiplos.	Construção de um instrumento de medida padrão da turma; reconhecer o instrumento de medida padrão oficial; construção do metro e seus submúltiplos.
Quinto	A distância entre os espaços da escola	Compreender a necessidade de unidades de medida maiores que o metro; conceber os múltiplos do metro.
Sexto	Unidades de medida convenientes a cada situação	Associar uma unidade de medida em cada situação.
Sexto	Conversão de unidades de medida	Realizar conversão entre as unidades de medida de comprimento; compreender a relação de equivalência entre as unidades de medida.

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

Nossa expectativa é que essa sequência favoreça ao aluno a noção de comprimento permeando o domínio da grandeza e da medida, de modo que o discente possa perceber a grandeza comprimento, e a relevância de sua quantificação, ou seja, sua medida. Bem como compreender que independente da unidade de medida a ser adotada para medir o comprimento de qualquer coisa ou objeto, esse será o mesmo, o que mudará será o valor atribuído a ele. A partir dessa noção, as transformações entre suas unidades poderão fazer sentido para os discentes. Nessa direção, esperamos que os alunos possam:

- (Re) conhecer os primeiros movimentos dos povos antigos relacionados à medida, partindo da comparação sem ação de medir (maior que, menor que) para as primeiras ações de medir;

- Perceber a necessidade de medir e a importância das medidas antropométricas;
- Perceber que se pode realizar comparação sem o uso de número;
- Compreender que independente da forma das linhas, seus comprimentos podem ser os mesmos;
- Perceber a ideia da grandeza comprimento como uma propriedade do objeto;
- Perceber que comparar os comprimentos dos objetos é importante, mas que se faz necessário quantificar esses comprimentos, elegendo uma unidade para medi-los, para expressar um valor numérico seguido de sua unidade adotada, ou seja, apresentar uma medida;
- Compreender a necessidade de se ter uma medida padrão;
- Perceber que para cada situação há unidade de medida conveniente;
- Compreender a necessidade de se ter uma medida padrão oficial;
- Compreender as diferentes unidades de medidas de comprimento por meio da subdivisão de segmentos;
- Compreender que o valor da medida de comprimento se altera de acordo com a escolha da unidade, mas o comprimento permanece o mesmo.

Também esperamos que o desenvolvimento durante a resolução do problema possa percorrer os momentos que fazem parte do modelo de ensino defendido por Brousseau: ação, formulação, validação e institucionalização. Ressaltamos que essa trajetória, não precisa acontecer necessariamente separada, podendo uma estar imbricada na outra, até mesmo uma suprimir a outra, ou uma sobressair sobre as outras. Neste sentido, esperamos estabelecer um contrato didático que favoreça a devolução ao aluno, e com isso possa:

- Ter interesse em realizar as atividades;
- Aceitar resolver os problemas propostos;
- Tomar decisões e criar estratégias para resolução dos problemas propostos;
- Desenvolver diálogos entre os componentes do grupo para a resolução dos problemas propostos;
- Agir, falar e evoluir por ele mesmo ou por meio do diálogo com os pares;
- Socializar e discutir as soluções encontradas entre os grupos;
- Procurar resolver os problemas sem intervenção do professor pesquisador.

3.2 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA E ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES

Nesta subseção, apresentamos a sequência didática constituída de sete atividades. Cada atividade é composta respectivamente de título, objetivos, material, procedimento e análise a priori.

Atividade 1 – Os primeiros passos para medir

Objetivos

- Promover a leitura, interpretação e discussão de um texto sobre história de pesos e medidas aos alunos;
- (Re) conhecer as práticas de medidas abordadas no texto;
- Destacar palavras e/ou excertos do texto que possam potencializar a discussão deste, bem como auxiliar os alunos no desenvolvimento das atividades subsequentes da sequência.

Material

- Texto histórico com duas laudas;
- Folha em branco para registro;
- Dicionário de língua portuguesa (sugestão).

Procedimento

- Organizar a turma em grupos com no máximo 5 integrantes cada. Eleger entre os componentes um representante (a critério de cada grupo), para auxiliar no desenvolvimento das atividades.
 - Apresentar e entregar o texto aos grupos.
 - Sugestão: usar dicionário de português
 - Solicitar aos grupos que registrem de modo escrito ou oral, os excertos ou palavras que lhes chamarem atenção e que possam fomentar discussões sobre grandezas e medidas, em particular comprimento.
- Dos registros apontados, utilizar os que forem relevantes para o desencadeamento das atividades subsequentes.

Análise a priori da primeira atividade

Nesta atividade pretendemos apresentar um texto com recorte do histórico sobre pesos e medidas intitulado *Os primeiros caminhos para medir* (cf. apêndice A). Conforme os aspectos históricos explicitados na seção II desta pesquisa, esperamos que os alunos percebam como surgiram as grandezas e medidas, como as ações de pesar e medir fazem parte da vida

da humanidade, desde os primórdios até os dias de hoje. Esperamos também, que os discentes possam ter compreensão do texto sobre os instrumentos utilizados pelos povos antigos para medir, e que estes foram suficientes para práticas sociais e culturais em um determinado tempo, mas que necessitou de uma padronização universal.

Em relação aos excertos e palavras do texto, esperamos que os discentes destaquem situações ocorridas na história que evidenciem as práticas de medidas, que possa lhes permitir discussões relevantes sobre essas práticas para auxiliá-los no desenvolvimento das atividades subsequentes. Pretendemos também identificar, por meio desta atividade, as noções em torno do conceito de medir, medida, medida de comprimento que os alunos possuem, uma vez que, por ser uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, devem ter algum conhecimento a respeito. Conforme os PCN o tema grandeza e medida é abordado desde do 1º ciclo, com intuito de não formalizar o sistema de medida, e sim fazer com que a criança compreenda o processo de medir. (BRASIL, 1997).

Atividade 2 Comparando os caminhos

Objetivos

- Realizar comparação de comprimentos sem ação de medir (sem uso de número) envolvendo caminhos de formas distintas;
- Identificar que linhas diferentes podem possuir o mesmo comprimento.

Material

- Folha de atividade com duas laudas;
- Caixa de ferramentas, contendo vários objetos como: borracha branca, canetas hidrográficas de cores diferentes, lápis grafite, tesoura escolar cliques, canudo de plástico, barbante, linha de crochê, palito de picolé.

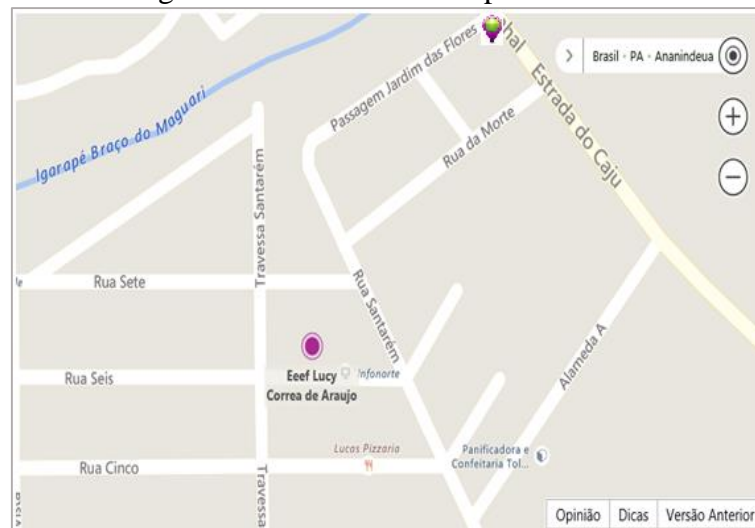
Procedimento

- Organizar os alunos em grupo, preferencialmente manter os mesmos componentes da atividade anterior.
- Solicitar que os alunos observem o mapa para responder às questões da atividade.
- Utilizar a caixa de ferramentas para auxiliar na resolução da atividade.
- Tomar decisão para escolha dos objetos a serem utilizados.
- Cada grupo deverá encontrar estratégia (s) para a solução da atividade.
- Fazer registro oral ou escrito, sendo este previsto como parte da atividade.

- Solicitar aos alunos que registrem na lousa (quadro negro/magnético) as estratégias adotadas, a serem organizadas em um quadro.
- Análise e discussão a respeito das estratégias e resultados encontrados.
- Institucionalização acerca de comprimento enquanto grandeza.

A Figura 10 representa o mapa com ruas, travessas e alguns pontos comerciais que se encontram próximos da escola dos sujeitos pesquisados. Baseado neste desenho, responda às questões que seguem.

Figura 10- Atividade 2: Mapa da Escola



Fonte: www.google.com.br/maps acesso em julho/2016

Questão 1 - Qual o caminho mais curto da escola à Lucas Pizzaria, considerando que o caminho a ser percorrido deverá ser feito pelas ruas travessas identificadas no mapa.

- partindo da escola, passando pela travessa Santarém com a rua cinco.
- partindo da escola, passando pela rua Santarém com a rua cinco.
- ambos têm o mesmo comprimento.

Descreva o processo para chegar a resposta:

Questão 2 - Considerando a casa de João representada pelo balão, localizada na esquina da passagem Jardins das Flores com a Estrada do Caju. Qual o caminho mais curto para ele chegar a escola?

- o caminho que contem linha curva
- o caminho que contém linhas retas
- ambos têm o mesmo comprimento

Descreva o processo para chegar à solução e identifique as ruas por onde João irá percorrer:

Figura 11- Atividade 2/Jardim das Flores e rua Santarém



Fonte: www.google.com.br/maps acesso em julho/2016 (adaptado)

Figura 12- Atividade 2/Alameda A



Fonte: www.google.com.br/maps acesso em julho/2016 (adaptado)

Questão 3- Observe as figuras acima (9 e 10) e identifique qual o maior caminho?

- a) () a linha curva entre a localização da aluna e a casa de João
- b) () Alameda A.
- c) () ambos têm o mesmo comprimento.

Descreva o processo para chegar a resposta:

Análise a priori da segunda atividade

Esta atividade consiste em três questões, elaboradas com base em um mapa, que situa as ruas, travessas e pontos comerciais em torno da escola, lócus de investigação. Nesta atividade, para oportunizarmos a noção de comprimento como grandeza ao aluno, pretendemos explorar a distinção e relação entre os quadros geométrico e da grandeza, apoiado no modelo didático de Brito (2003) e inspirado no modelo de Douady e Perrin-

Glorian (1989), por meio de situações problema envolvendo linhas retas e curvas. Para tanto, disponibilizaremos uma caixa de ferramentas para auxiliar os discentes no desenvolvimento da atividade.

Com auxílio da caixa de ferramentas esperamos que os alunos comparem os comprimentos dos caminhos previstos na atividade e percebam que diferentes linhas podem ter o mesmo comprimento. Esta relação nos remete à classe de equivalência mencionada por Teixeira (2010) e Brito (2003). Por outro lado, esperamos também que os alunos percebam que linhas curvas podem ser medidas, ou seja, têm comprimento. Confrontando com uma das dificuldades conceituais apontadas no levantamento bibliográfico e discutida nos estudos de Brito (2003), quando afirma que “alunos acham que somente segmentos de reta têm comprimento” (PERROT et al. 1998, apud BRITO, 2003, p. 18).

Tais variáveis didáticas mencionadas no parágrafo anterior podem ser exploradas diante de situações de comparação (sem ação de medir), estabelecendo a relação de maior, menor ou igual, mais curto, mais longo. Deste modo, oportunizando o processo de conceitualização de comprimento como grandeza. Em relação a este processo Bellemain e Lima afirmam que “É possível fazermos comparações de grandezas sem realizar medição. Nessas comparações procuramos apenas estabelecer uma relação – maior, menor, igual – entre as grandezas. Atividades desse tipo são muito significativas na aprendizagem inicial desses conceitos” (BELLEMAIM; LIMA, 2010, p.175).

Para realizar estas comparações, vislumbramos que os grupos utilizem como estratégia a visualização e/ou a sobreposição de objetos medianeiros, retirados da caixa de ferramentas, assim como foram utilizados nas atividades desenvolvidas por Brito (2003). Entre os objetos, o uso de barbante para sobreposição das linhas curvas e para as linhas retas, poderão usar tanto o barbante, como os demais objetos. Além de utilizarem a própria régua não graduada, representada por uma tira de papel cartão de 10 cm para fazer as marcações com lápis ou canetas das sobreposições dos objetos medianeiros, para favorecer na comparação entre as diferentes linhas. Por outro lado, fazer uso somente das régua não graduadas, ou objetos que remetem à segmento de reta, como canudo, os palitos de picolé, é algo comum em suas em atividades escolares, segundo Câmara dos Santos (1999), citado por Teixeira (2004), comumente os alunos usam régua para verificar o comprimento de determinado objeto.

Quanto à questão 1, esperamos que os alunos percebam por meio da sobreposição a resposta correta o caminho representado no item *a*, com comprimento de 6,0 centímetros, sendo menor que o caminho que representado no item *b*, o qual possuem 6,5 centímetros, por ser uma diferença muito pequena, talvez a visualização não seja, uma boa estratégia. Por outro

lado, utilizar os objetos que representam a forma de segmento de reta também é válido, pois esta questão apresenta “caminhos retilíneos”.

Enquanto que na segunda questão, o caminho representado pelo item *a* por conter linha curva, poderá influenciar os alunos a perceberem que será o mais curto, neste caso poderá utilizar ambas as estratégias, porém se usarem os objetos medianeiros será mais aconselhável fazer uso do barbante, por conter a linha curva. No entanto, se utilizarem somente a visualização, será uma estratégia que poderá levá-los ao erro, em virtude que os desenhos apresentam medida de comprimento próximos.

Por fim, a questão 3, por se tratar de figuras com linhas distintas, os alunos podem apresentar um pouco de dificuldade, uma vez que, ambos os caminhos possuem o mesmo comprimento, no caso 6,5 centímetros. Esperamos que seja fundamental para atingir o objetivo desta atividade, que versa sobre a noção de comprimento como grandeza ao evidenciar que não só o segmento de reta possui comprimento, também as linhas curvas, assim como, que linhas distintas podem ter o mesmo comprimento.

No final desta atividade, instigaremos os grupos para informarem por meio de registros escritos na lousa, a estratégia adotada para resolução de cada questão. Com base na análise e discussões desses registros seguiremos para a institucionalização do comprimento enquanto grandeza.

Atividade 3 - A medida da altura dos alunos

Observação: esta atividade será dividida em dois momentos: medindo a altura adotando como unidade parte do corpo e medindo a altura adotando como unidade objetos da caixa de ferramentas.

Objetivo: Oportunizar aos alunos a construção da noção de medida empregando unidades não padronizadas e padronizadas não oficiais¹⁴.

Material

- Medidas antropométricas (primeiro momento);
- Folha em branco para calcular e registrar a medida da altura do aluno referência (nos dois momentos);
- Caixa de ferramentas (segundo momento);
- Lousa (nos dois momentos).

¹⁴ Padrões não oficiais são os objetos da caixa de ferramentas que adotamos como unidades de medida padrões utilizados pela turma, como o canudo de plástico entre outros, mas que não são oficiais, como as unidades de medidas do Sistema Métrico Decimal.

Primeiro momento

Procedimento

- Eleger três alunos da turma para verificar os seus respectivos tamanhos, no caso a altura.
- Anunciar a comparação entre os alunos.
- Fazer comparação estabelecendo a relação de maior, menor ou igual.
- Eleger entre os três alunos um como referência para verificar a sua altura e dos demais.
- Utilizar o barbante para representar a altura de cada um.
- Sobrepor o barbante com a altura dos respectivos alunos na fita crepe, e fixá-la no quadro da sala (lousa).
- Cada equipe receberá o barbante que representa a altura do aluno referência.
- Discutir e decidir em grupo os meios para medir a altura do aluno referência.
- Sugestão utilizar a parte do corpo para medir, assim como os povos antigos.
- Registro, oral e/ou escrito das ações realizadas por cada grupo.
- Registro escrito na lousa e organizado em um quadro constituído de três colunas: identificação das equipes, as medidas antropométricas adotadas para realizar a medição e resultados encontrados.

Segundo momento

- Manipular os demais objetos da caixa de ferramentas.
- Utilizar os objetos da caixa de ferramentas para realizar ações de medir.
- Solicitar aos alunos que busquem estratégia de como medir a altura do aluno referência, utilizando objetos da caixa de ferramentas.
- Solicitar que cada grupo registre as estratégias adotadas.
- Registro oral e/ou escrito das ações realizadas por cada grupo.
- Solicitar aos grupos que registrem suas respectivas estratégias e o resultado encontrado para solucionar o problema, no caso a altura do aluno referência.
- Socializar os registros dos grupos na lousa, organizados em um quadro, identificando cada grupo e seus respectivos registros deste momento da atividade.
- Registro oral ou escrito da concepção de cada grupo sobre o que é medir? Como medir?
- Institucionalização acerca da noção de medir, unidade de medida e medida de comprimento.

Análise a priori da terceira atividade

Esta atividade foi experimentada com os alunos de graduação, futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, com o intuito de oportunizar práticas docentes que possibilitem a construção da noção de grandeza, medir, medida, unidade, comprimento com uso de materiais concretos. Este experimento foi importante para identificarmos situações, que nos permitiram aprimorar a atividade com algumas adaptações na organização e procedimento, e direcioná-la aos alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Nessa perspectiva, esperamos que os grupos ao realizarem a comparação entre as alturas dos alunos eleitos, primeiramente por meio da visualização, ao estabelecerem a relação de maior, menor percebam que é importante, mas não o suficiente. Além disso, precisa-se determinar o quanto é maior ou menor. Para tanto há a necessidade de medir, adotando algo para esta ação. Passando assim, da grandeza para a medida desta grandeza (medida de comprimento). Nesse processo seguiremos os três momentos defendidos por Caraça (1951), que assevera que para medir temos que eleger uma unidade, compará-la e expressar o seu valor por números reais positivos.

A priori, nossa expectativa é de que os discentes utilizem como forma para medir, partes do próprio corpo como padrão de referência, assim como fora adotado pelos povos antigos. No entanto, da mesma maneira que ocorreu nas antigas civilizações, essa forma de medir não apresenta um longo alcance. Com isto, esperamos que os discentes observem as dificuldades que enfrentarão adotando essas unidades não padrão. A partir deste momento, seguiremos para segunda parte da atividade, que corresponde ao uso dos objetos da caixa de ferramentas.

No segundo momento da atividade, pretendemos que os alunos construam a ideia de unidade, ao utilizar diversos objetos, em que cada objeto escolhido por eles possa suscitar a existência de uma ou mais unidades. Isto, além de perceberem que a unidade a ser adotada depende do que será medido e quanto menor o objeto para representar a unidade, mais próximo estarão da medida estimada. A partir disto, chegarem ao resultado, que será expresso por meio de um número seguido de sua unidade de medida, este denominamos a medida de comprimento.

Ao registrarem no quadro (lousa) os objetos utilizados para mensurar a altura do aluno referência, faremos discussão e análise dos resultados encontrados e das estratégias adotadas para iniciarmos a institucionalização acerca da ideia de medir, unidade, medida e medida de comprimento.

Essa atividade será de grande relevância, pois, por meio dela exploraremos a passagem do quadro da grandeza para o quadro numérico.

Atividade 4 - A medida padrão oficial – o metro e seus submúltiplos

Observação: esta atividade é continuação do problema proposto na atividade 3, sobre a medida da altura do aluno referência. Para o seu desenvolvimento nos apoiaremos na noção de medida de comprimento defendida por Lebesgue (1935), por meio da subdivisão de segmentos.

Objetivos

- Construir um instrumento de medida padrão da turma;
- Reconhecer alguns instrumentos de medida padrão oficial (fita métrica, régua, trena);
- Compreender a constituição do metro e seus submúltiplos;
- Reconhecer que para cada situação há unidades adequadas.

Material

- Folha em branco para calcular e registrar a medida da altura do aluno referência;
- “Caixa de ferramentas” acrescida de tiras de papel 40 quilos sem graduação correspondendo a 1 metro;
- Escala de cuisenaire;
- Fita métrica;
- Régua graduada;
- Trena;
- Lousa.

Procedimento

- Breve reflexão da atividade anterior.
- Apresentar aos alunos tiras de papel como uma unidade de medida única da turma, chamaremos “tira padrão”.
- Solicitar que os alunos utilizem a tira de papel para verificar a altura do aluno referência.
- Solicitar que cada grupo escolha uma quantidade de barras de mesma cor para sobrepor a tira de papel.
- Eleger as barras como unidade de medida.
- Registrar as ações de cada grupo.

- Usar as barras para construir o metro como unidade de medida padrão de comprimento.
- Graduar a tira de papel, por meio da sobreposição das barras e marcação das barras justapostas pela extremidade.

Figura 13- Exemplo da graduação da tira padrão



Fonte: Autora (2016)

- Utilizar barras menores para chegar às unidades menores que o metro
- Construção do instrumento de medida da turma, denominá-la tira padrão métrica ou simplesmente “tira métrica”.
 - Apresentar aos grupos a fita métrica e compará-la com a tira métrica.
 - Entregar uma fita métrica para cada grupo.
 - Solicitar aos grupos que usem a fita métrica ou a tira métrica para mensurar os resultados encontrados da atividade anterior, ou seja, a altura do aluno referência.
 - Anunciar as unidades de medida menores que o metro por meio da fita ou tira métrica.
 - Explorar a fita métrica para refundar a noção submúltiplos do metro.
 - Fazer a relação entre as unidades de medida. Apontando que 1 metro (m) pode ser subdividido em 10 partes iguais, ou segmentos e, que cada parte corresponde a $1/10$ do metro, denominada décímetro, ou seja, a décima parte do metro. De modo análogo o centímetro (cm) e o milímetro (mm).
- Institucionalização dos submúltiplos do metro (uma parte do Sistema Métrico decimal).

Análise a priori da quarta atividade

Com esta atividade pretendemos mostrar aos alunos que precisam criar unidade de medida única da turma e instrumento de medida padrão. Nessa direção aproveitar para retomar as situações ocorridas no texto histórico, além de evidenciar que cada situação a ser medida, necessita de uma unidade adequada. Deste modo, os alunos podem perceber que as dificuldades vivenciadas por eles foram enfrentadas pelos povos antigos. Diante dessas

colocações, nossa expectativa é que os discentes possam tomar decisões para adotar a melhor estratégia, elegendo as barras mais adequadas¹⁵ para sobrepor tira e efetivar sua graduação.

Nesse contexto, esperamos que os discentes construam um instrumento de medida padrão da turma, com auxílio das barrinhas da escala de cuisenaire. Sobrepondo essas barras na tira de papel, preferencialmente com a menor barrinha que corresponde a 1 cm de comprimento, mas também a barra de 10 cm. Para que a turma perceba que tal tira corresponde a 100 barrinhas, mas que também pode corresponder a 10 barras. E a partir dessa construção compará-la com a fita métrica, e assim poderem ter uma compreensão do metro e seus submúltiplos. Após a construção deste, pretendemos apresentar outros instrumentos de medida padrão. Em seguida anunciamos uma parte do sistema métrico decimal com submúltiplos (metro, decímetro, centímetro e milímetro) e por meio do processo de subdivisão de unidades realizamos as conversões entre essas unidades.

Nossa expectativa é que os grupos escolham quais instrumentos utilizarão para solucionar o problema da atividade anterior, no caso encontrar a altura do aluno referência. Por outro lado, aproveitaremos as sobreposições das barras para expor aos alunos que independente da unidade adotada o comprimento da tira permanecerá o mesmo, o que irá mudar será o resultado. Refundamos assim, a ideia e a distinção da grandeza comprimento e sua medida. Também esperamos, que os alunos mobilizem seus conhecimentos anteriores sobre multiplicação, divisão e fração.

Atividade 5 – A distância entre os espaços da escola

Objetivos

- Compreender a necessidade de unidades medida maiores que o metro;
- (Re) conhecer os múltiplos do metro.

Material

- Folha em branco para calcular e registrar a medida da altura do aluno referência;
- “Caixa de ferramentas” acrescida de tiras de papel 40 quilos sem graduação, porém correspondendo a 1 metro;
- Fita métrica;
- Régua;
- Trena;

¹⁵ Referimo-nos as barras mais adequadas, aquelas que possuem valor de medida de comprimento divisível por 100, como 1cm, 2cm, 4cm, 5cm. Essas barras não estão graduadas e seu tamanho (comprimento) se diferem pela cor que possuem. As barras possuem comprimento de 1 até 10 cm.

- Lousa.

Procedimento

- Solicitar a participação de alguns alunos para representar pontos de localização no percurso da sala de aula até a quadra de esporte da escola.
- Solicitar aos grupos que elejam algum objeto da “caixa de ferramentas” para percorrer o caminho proposto.
- Solicitar qual a melhor estratégia para medir a distância do percurso da sala de aula até a quadra de esporte.
- Solicitar que os alunos meçam o comprimento do percurso (distância).
- Verificar o resultado encontrado pelos alunos.
- Reconhecimento do aluno sobre a necessidade de unidades maiores que o metro.
- Discutir com a turma a noção de espaço em relação a unidades maiores que o metro e sua relação com essas unidades.
- Apresentar aos alunos os múltiplos do metro.
- Apresentar a relação do metro com seus múltiplos.
- Institucionalizar o Sistema Métrico Decimal.

Análise a priori da quinta atividade

Como estratégia esperamos que os alunos possam utilizar o barbante para percorrer o trajeto que vai da sala de aula até a quadra de esporte. Em seguida realizarem a sobreposição com um instrumento de medida sobre o barbante para calcular tal distância. Diante do comprimento do barbante, acreditamos que os alunos podem utilizar a tira métrica (graduada por 100 espaços de 1 cm cada) ou a fita métrica (150 cm) ou a Trena (5 m) para encontrar a distância entre as localizações. No entanto, isso não impedirá que aos alunos elejam outros objetos da “caixa de ferramentas”, neste sentido será relevante que usem para perceber quais unidades são mais adequadas para medir longas distâncias. Além de perceberem que existem outras unidades maiores que o metro.

Para fundamentarmos esta atividade utilizaremos a noção de medida de comprimento por meio das subdivisões de segmentos defendidas por Lebesgue, assim como foi explorado na atividade anterior, no entanto com foco para unidades maiores que o metro. Mas antes, indagaremos se a turma conhece alguma unidade que possa representar longas distância. Neste caso, esperamos que a turma comente sobre o quilômetro, uma vez que esta medida de comprimento já tenha sido trabalhada no 2º ciclo, como informado pelos PCN, por algumas

pesquisas expostas no levantamento bibliográfico do presente estudo e por obtermos a informação da professora regente que grande parte da turma sabem que 1 km corresponde a mil metros.

A partir desses possíveis acontecimentos iremos comparar se a medida da distância encontrada aproxima-se de mil metros, para que a turma perceba a noção de espaço que corresponde 1 km. Caso fique uma medida distante desse valor, algo que seja provável, por conta de 1000 m ser uma medida muito grande, esperamos que se possa chegar a uma medida que leve o aluno a refletir e aproximar esta a distância de 1 km.

Diante desses conflitos comentaremos a necessidade de outras unidades de medida que existem entre o metro e o quilômetro. Mostraremos à turma que a cada 10 m podemos determinar uma unidade superior, que apresentaremos como decâmetro e as demais unidades até chegar ao quilômetro, e assim realizaremos a institucionalização do Sistema Métrico Decimal, o metro com seus múltiplos e submúltiplos.

Atividade 6 – Unidades de medida convenientes a cada situação

Observação: Esta atividade foi inspirada em um exercício proposto do livro didático de Matemática do 6º ano de Edwaldo Bianchini 2006.

Objetivo: Associar uma unidade de medida em cada situação.

Procedimento

- Solicitar que cada grupo identifique a unidade mais adequada a ser utilizada nas situações em jogo.
- Justifiquem suas respostas.

Material: Folha de atividade

Diariamente nos deparamos com várias situações que envolvem medida de comprimento: ao caminharmos pelas ruas, ao nos deslocarmos de um lugar a outro, ao utilizarmos alguns objetos, ao passarmos pela porta da sala de aula ou do quarto de casa, entre outros. Nessa direção podemos relacionar a cada situação diferentes unidades de medida de comprimento.

- 1) Escolha a unidade de medida mais adequada (quilômetro, metro, decímetro, centímetro, milímetro) para cada situação exposta abaixo:

- a) Distância de sua casa até a escola;

Justifique sua resposta: _____

- b) Comprimento da sua casa;

Justifique sua resposta: _____

- c) Comprimento do seu caderno;

Justifique sua resposta: _____

- d) Espessura de sua borracha;

Justifique sua resposta: _____

- e) Altura da porta da sala de aula.

Justifique sua resposta: _____

Análise a priori da sexta atividade

Nesta atividade, esperamos que os alunos percebam que dependendo de cada situação, há unidades mais adequadas, ou seja, que não é conveniente utilizar unidades de comprimento com dimensões muito pequenas para mensurar comprimento de objetos de grande dimensão ou vice-versa. Por exemplo, adotar o milímetro como unidade para mensurar o comprimento de uma casa. No entanto, há situações que convêm dependendo do contexto para se usar a unidade mais conveniente. No caso, pode ocorrer que na turma alguns alunos morem tão próximos da escola que a unidade melhor a ser utilizada seja o metro, por outro lado, pode haver alunos que morem em outro bairro, que neste caso ideal será escolher o quilômetro.

Nesse sentido, esperamos que com as escolhas adotadas pelos grupos, junto às suas respectivas justificativas, a turma possa expor a sua compreensão em relação à noção de espaço ocupado por essas unidades de medida.

Atividade 7 - Conversão de unidades de medida

Objetivos

- Realizar a conversão entre as unidades de medida de comprimento;
- Compreender a relação de equivalência entre as unidades de medida.

Procedimento

- Utilizar os conhecimentos abordados na atividade anteriores (4 e 5);
- Utilizar os múltiplos de 10 para partir do metro até ao km;
- Solicitar aos grupos os registros de suas transformações de unidades.

Material utilizado: Folha de atividade

A distância entre a localização do Centro de convenções da Amazônia – Hangar e as proximidades da escola Lucy corresponde aproximadamente a um percurso de 11 quilômetros (km). Determine:

- a) Quantos metros corresponde esse percurso?

Descreva o processo para chegar ao resultado:

b) Essa distância equivale a quantos centímetros?

Descreva o processo para chegar ao resultado:

Análise a priori da sétima atividade

Nesta atividade, esperamos que os alunos possam praticar as conversões de unidades de medida, quilômetro, metro e centímetro, fazendo a relação entre elas, com base no desenvolvimento da atividade 5, conforme a institucionalização do sistema métrico decimal. Além de reconhecerem que os resultados encontrados apresentam entre si uma relação de equivalência, em que a medida de 11 km corresponde a 11.000 metros, 11 km também corresponde a 1.100.000 cm. Desse modo, terem a percepção que a distância entre as localizações permanece a mesma, não aumentam nem diminuem, apenas apresentam resultados diferentes, devido às unidades adotadas serem diferentes.

Nessa atividade procuramos explorar mais uma vez a diferença entre a grandeza comprimento e a medida dessa grandeza, com situação que mostra que dependendo da unidade a ser utilizada o comprimento será o mesmo, o que mudará é o resultado. Esse por sua vez, faz parte da mesma classe de equivalência. Além de evidenciar que quanto menor for a medida da unidade adotada para mensurar a distância maior será o valor que expressa a distância, ou vice-versa.

4 EXPERIMENTO

Nesta seção, discorreremos com o relato da aplicação da sequência didática, ou seja, a parte prática de nossa pesquisa, denominada a quarta fase da engenharia, a experimentação.

4.1 DESCRIÇÃO GERAL DO EXPERIMENTO

O experimento foi realizado na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na região metropolitana de Belém do Pará, em uma turma do 6º ano do ensino fundamental, composta de 25 alunos, que estudam no turno da manhã, com faixa etária de 10 a 12 anos. A turma tem seis aulas semanais de Matemática, com duas aulas por dia uma seguida de outra, com 45 minutos cada três vezes por semana. O tempo para a realização do experimento, inicialmente estava previsto para seis encontros, equivalente a 12 aulas, no entanto houve uma alteração, que necessitou que os encontros se estendessem, devido a algumas variáveis didáticas não previstas, as quais discorreremos mais em frente. Quanto à previsão do desenvolvimento de uma sequência, Passos e Teixeira em seus estudos, afirmam que:

Uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado. Desse modo, uma sequência didática não pode, a priori, ter seu tempo de duração estipulado de acordo com o programado, pois o seu cumprimento leva em conta as necessidades e as dificuldades dos alunos durante o processo. (PASSOS; TEIXEIRA, 2013, p. 162).

O pensamento de Passos e Teixeira (2013) converge com o nosso, pois não temos o controle de todas as variáveis, sejam elas didáticas ou cognitivas que possam surgir, ainda que nosso estudo estruture-se na perspectiva de engenharia didática de Artigue (1996). Esta nos permite o controle de variáveis obtidas durante as análises preliminares. Diante disso, o tempo que estipulamos para o experimento refere-se a uma previsão. Além disso, pelo fato da sequência didática ser constituída por um conjunto de atividades modelada na TSD, em que grande parte das situações em jogo encontra-se na etapa adidática requerendo que o aluno tome decisões, conjecture, julgue os resultados encontrados, independente da intervenção do professor, sendo este o mediador do processo.

A sequência inicialmente se constituiu por sete atividades, com abordagem da história do pesos e medidas, comprimento enquanto grandeza e medida de comprimento, este último envolvendo noção de medir, medida e unidades de medida de comprimento. Com o intuito de favorecer a noção de comprimento, bem como a conversão de suas unidades de medida e constituição do sistema métrico decimal para os alunos do 6º do ensino fundamental.

Cada atividade da sequência foi composta de título, objetivo, procedimento, material utilizado e análise a priori, para ser desenvolvida durante seis encontros. No entanto, em virtude de percebermos no início do experimento a importância de envolver a ação de medir em torno da própria sala de aula, e também de levar os alunos a aproximarem a grandeza, a partir de seu corpo. Acrescentamos após a atividade 3, uma atividade que denominamos de complementar, para refundar a noção de medir, possibilitando aos alunos a relação entre as medidas de objetos da sala e os objetos da caixa de ferramentas, além da comparação entre as medidas antropométricas.

Diante disso, o experimento passou de seis encontros, totalizando 12 aulas de 45 minutos cada, para sete encontros, sendo dois destes com 3 aulas, fechando o tempo do experimento com 16 aulas de 45 minutos cada. A aplicação da sequência sofreu uma alteração em relação ao número de encontro. Ficando o 4º encontro para atividade complementar, o 5º para atividade 4 e assim, sucessivamente, como mostra o quadro 3:

Quadro 3- Percurso do experimento

Encontros	Roteiro da sequência
1º (duas aulas) 14/10/16	Os primeiros passos para medir
2º (duas aulas) 18/10/16	Comparação de caminhos
3º (três aulas) 19/10/16	A medida da altura dos alunos
4º (duas aulas) 21/10/16	Objetos de sala de aula e partes do corpo como meio para medir
5º (duas aulas) 25/10/16	A medida padrão – o metro e seus submúltiplos
6º (duas aulas) 26/10/16	A distância entre os espaços da escola
7º (uma aula) 08/11/16	Unidades de medida convenientes a cada situação
7º (duas aulas) 08/11/16	Conversão de unidades de medida

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

O experimento realizou-se nos horários das aulas de matemática, concedidos pela professora regente, três dias por semana sendo dois destes no terceiro e quarto horários, não

conjugados, devido ao intervalo escolar. Cada encontro foi organizado em quatro momentos: apresentação da atividade e devidas orientações; desenvolvimento da atividade pelos alunos; discussão e análise acerca das estratégias adotadas pelos alunos para resolução do problema proposto, por meio de registro escrito, ou oral, e por último a institucionalização. Exceto o primeiro encontro, embora tenha ocorrido em quatro momentos, porém com uma pequena diferença, no primeiro momento a apresentação entre a pesquisadora e a turma foi mediado pela professora regente, sem a institucionalização.

4.2 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta subseção discorreremos sobre o desenvolvimento sequência didática, com indicação de pontos relevantes para as análises. Salientamos que evidenciaremos no relato desta aplicação a produção de grupos, excertos e momentos relevante que contribuirão para o alcance do objetivo da presente pesquisa.

4.2.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro ocorreu no dia 14/10/16, com duração de duas aulas, por se tratar de um dia pós-feriado, a turma encontrava-se em um número reduzido de alunos em relação a um dia “normal”, de 25 alunos, só haviam 19 presentes.

Este encontro deu início ao experimento, com apresentação entre pesquisadora e a turma. Momento que tivemos oportunidade de conhecer um pouco mais sobre turma, a partir das vozes de alguns alunos, a respeito principalmente, de suas relações com a matemática escolar, no sentido de informar suas dificuldades e gosto pela disciplina. Alguns comentaram que se interessam pela matemática, porque gostam de fazer contas, e outros disseram que não gostam porque acham difícil.

Após esse acolhimento, proferimos sobre a sequência didática e os encontros previstos para o seu desenvolvimento. A professora regente deixou-nos à vontade para pôr em ação o experimento. Aproveitamos para organizar a turma em grupos com no máximo cinco integrantes para o desenvolvimento da sequência, propusemos que os grupos se mantivessem com os mesmos componentes durante todo o experimento. Esta sugestão foi aceita pela turma.

Os grupos foram formados e nomeados pelos próprios alunos, os quais atribuímos pseudônimos para inserção no presente estudo. Os nomes sugeridos pelos grupos foram: diamante negro, fadinhas, lista negra, matemática legal, bolinhas e poderosas. Contudo, para

efeito de registro, representaremos esses nomes pela letra inicial. Assim, denominamos os grupos com seus respectivos integrantes: M (Daniel, Caio, Carlos, Yana e Rick); D (Arthur e Nilson); F (Ana, Eva, Manu, Renata e Rosa); L (André, Andrey e Leo); M (Bianca, Elyna, Isis, Ivana e Ray) e P (Joice, Lola, Mila, Nanda e Suzi). A partir disto prosseguimos com a primeira atividade e as orientações.

Neste encontro trabalhamos a atividade 1 da sequência intitulada *Os primeiros passos para medir*. Apresentamos e explicitamos esta atividade, conforme traçado na análise a priori. Em seguida entregamos para cada grupo o texto histórico sobre pesos e medida, com o título *Os primeiros caminhos para medir*, para lerem, interpretarem e discutirem entre si sobre o exposto no texto. Em seguida apresentar para os demais grupos seus questionamentos sobre as práticas de medidas, além de destacar palavras e excertos do texto que possam potencializar a discussão. A seguir registramos os alunos em ação durante a leitura, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14- Momento de leitura do texto histórico



Fonte: Autora (2016)

Para leitura do texto estipulamos um tempo de 15 minutos. No entanto, acreditávamos que o tempo seria o suficiente, por ser um texto de uma lauda e meia, incluindo figuras, justamente para não ficar cansativo ou desviar a atenção de alunos do 6º ano do ensino fundamental. Contudo, um dos grupos concluiu a leitura em 25 minutos, enquanto os demais finalizaram em torno de 19 minutos. Vale ressaltar que o tempo em questão se deve também a escolha do representante do grupo, pois, ficaram decidindo quem conduziria a leitura para os demais integrantes. Os grupos que continham 5 componentes utilizaram dois textos, justamente para que todos se entretivessem com a leitura.

Durante a leitura, sugerimos o uso de dicionário, caso houvesse necessidade. Observamos que enquanto um dos integrantes lia o texto, os demais faziam as anotações, como palavras que desconheciam, e excertos que aguçaram a curiosidade do grupo. Como mostra a Figura 15.

Figura 15- Momento de anotações sobre texto



Fonte: Autora (2016)

Após a leitura nos direcionamos para impressões dos grupos sobre suas respectivas interpretações, registros oral ou escrito sobre excertos e palavras apontados no texto. Dentre as palavras e excertos apontados pelos grupos, listamos as que mais foram mencionadas e as que serão fundamentais para auxiliá-los no desenvolvimento das atividades subsequentes.

O que é ser nômade?

O que significa a medida antropométrica?

O que é cúbito?

Excerto do texto: Noções rústicas como “maior que”, “menor que”

O significado dos prefixos gregos deca, hecto e kilo?

O que é padronização?

O que é milionésima?

Em relação ao uso do dicionário, verificamos que apenas o grupo M usou. Contudo esperávamos que a maioria dos grupos utilizassem, justamente por ser um texto, com palavras que supostamente desconheciam como: rústicas, padronização, milionésima, côvado, entre outras. Além de conter excertos, referente à informação importante a respeito da história pesos e medida como: *décima milionésima parte de um quarto meridiano terrestre* e medidas antropométrica, esta fundamental para gerar discussão acerca da evolução das medidas de comprimento até a oficialização do sistema métrico decimal.

Nômade, antropométrica, cúbito foram as palavras mais destacadas entre os grupos. O significado dessas palavras encontrava-se no corpo do texto, porém não de modo explícito, embora interpretável. Algo que nos inquietou, será que o texto não estava inteligível para alunos do 6º ano, ou não se debruçaram em leitura com atenção?

Em conversa no final do encontro com alguns alunos, soubemos que não haviam entendido, por que o texto não estava claro, principalmente a palavra *antropométrica* e *cúbito*, informaram que não tinham visto antes. Quanto à palavra *nômade*, já tinham visto na

disciplina de história. Antes, que esclarecêssemos os significados das respectivas palavras, procuramos ouvir o grupo M, que havia se manifestado para falar sobre sua compreensão a respeito da palavra *nômade*. Trouxemos alguns excertos das falas, registradas em áudio.

Isis (Grupo M) – no texto entendemos que nômade era o homem que vivia atrás de alimento para sobreviver.

Pesquisadora – Por que?

Isis (Grupo M) e outros alunos integrantes de outros grupos – se não ele morria de fome, porque os alimentos acabavam e eles não plantavam.

De acordo com o discurso anterior percebemos que grande parte da turma inicialmente não manifestou o entendimento sobre o que era ser *nômade*, pois não associaram a palavra ao exposto no texto, somente após a explicitação de Isis (grupo M), que conseguiram associar e completar o significado da palavra. Em relação à medida antropométrica e noção rústica “maior que” e “menor que”, foi necessário esclarecer e promover discussão a respeito dessas expressões, embora alguns tivessem utilizado o dicionário.

Algumas informações do texto não eram do conhecimento da turma, por isso que eles precisavam destacar palavras ou excerto que desconheciam ou que não compreenderam, justamente para fomentar uma discussão. Contudo, um dos grupos conseguiu entender sobre esses excertos, mas para os demais grupos tivemos que retomar a leitura para esclarecer que foram as primeiras práticas criadas pelos povos antigos para sobreviver, partindo do processo de comparação intuitiva para produzirem suas armas conforme o “tamanho” da presa, até chegarem à necessidade de medir, adotando as partes do corpo como padrão de referência para medir comprimento. Esse momento foi importante devido à relevância desses excertos para o desenvolvimento das atividades posteriores.

Nas demais palavras solicitamos que consultassem o dicionário e outras que eram relevantes para as discussões como: padronização, os prefixos gregos, metro foram esclarecidas com auxílio do dicionário durante o encontro, mas precisam ser refundadas nas atividades subsequentes por serem inerentes à grandeza e medida, especialmente o comprimento.

A respeito da *décima milionésima parte de um quarto meridiano terrestre*, perguntamos à turma, se saberiam informar o que seria decima milionésima, um quarto, e meridiano. Não souberam expressar de forma clara. Um dos grupos comentou que se referia a decima parte de algo, mas que não sabia representar em número. Então, tivemos que intervir. ao explicitar o que corresponderia à décima milionésima em sua representação numérica, para terem a noção de sua relevância no corpo do texto e na busca pela unidade de medida padrão

universal. Observamos que a turma desconhecia realmente o termo milionésima, mas tinha noção do termo décima parte, por terem visto fração com a professora regente no ano anterior (4º ano do ensino fundamental). Em relação a um quarto, a maioria da turma referiu-se à fração, que representa a quarta parte de alguma coisa. Constatamos que os alunos tinham uma noção de fração, conforme a professora regente informou. Mas o que nos surpreendeu foi uma breve discussão sobre meridiano, entre Daniel (B) e André (L).

Daniel (grupo B) – Meridiano são linhas imaginárias vertical do globo terrestre.

André (grupo L) - não é só isso, essas linhas são iguais que se cruzam no polo norte e no polo sul.

Após o discurso de André, utilizamos as informações dos alunos acima e proferimos, que o Meridiano seriam linhas curvas de mesmo comprimento que passam pelos polos Norte e Sul. Percebemos, durante a discussão, que ambos tinham um conhecimento sobre meridiano. Segundo informado por eles, tomaram conhecimento durante aulas de geografia. André (grupo L) citou que o discurso de Daniel (grupo B) estava incompleto e resolveu concluí-lo. Fato que em nossa concepção foi relevante, justamente por observarmos o comportamento deste aluno em melhorar a informação proferida pelo colega. Esta situação enquadra-se em uma situação de formulação defendida por Brousseau (2008), embora seja de forma pontual, no caso apenas se referindo ao significado do meridiano e não em relação ao contexto em geral. Para Almouloud (2007), o objetivo da dialética de formulação é a troca de informação entre duas ou mais pessoas, que serão emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. Vale ressaltar que nessa troca de informações se faz necessário retroações com a situação e entre o emissor e receptor.

Durante a realização da atividade, observamos que mesmo com o envolvimento dos alunos, a quebra de contrato de ações estabelecidas entre professor e alunos mostrou-nos que parte dos grupos ao serem provocados para falar sobre o texto, não estavam habituados com esse tipo de situação. Com isso, tivemos que incitá-los com alguns questionamentos para potencializar a discussão, com o intuito de identificar em suas possíveis respostas, o entendimento sobre o texto. Situação que nos levou a quebra de contrato didático para prosseguirmos com o desenvolvimento da atividade. Para Machado (2010) é preciso que ocorra a ruptura e renegociação do contrato para o avanço do aprendizado. Com isso apresentamos as seguintes perguntas:

- 1) A princípio o povo precisava ter uma noção de medida, necessitavam medir? Sim, por quê? Não, por quê?
- 2) Quais as medidas adotadas pelos povos antigos?
- 3) As medidas adotadas tinham algum benefício?
- 4) Essa estratégia para medir, foi o suficiente para homem acompanhar o crescimento das civilizações e do comércio?
- 5) Vocês podem citar um exemplo ou expor uma situação que possa representar a dificuldade de se utilizar as medidas antropométricas como medidas das coisas?

A cada pergunta, alguns grupos teciam comentários a respeito de suas compreensões que obtinham, tanto por meio da interpretação do texto, quanto pela discussão fomentada pela pesquisadora, que foram relevantes para a análise da atividade, em relação ao conhecimento dos alunos em torno da noção de medir, necessidade de medir e ideia de medida.

No final desse encontro, os alunos relataram que gostaram da atividade, embora não estivessem acostumados com esse tipo de atividade. Para eles, ler e interpretar geralmente só na disciplina de português. Na disciplina de matemática, eles fazem conta e resolvem problemas envolvendo operações.

4.2.2 Segundo encontro

Este encontro ocorreu no dia 18/10/16, com duração de duas aulas, com a presença de 22 alunos, que nos receberam bastante animados, já perguntando o que ocorreria naquele dia, embora já tivéssemos explicitado de forma breve no primeiro encontro, o que pretendíamos desenvolver com eles.

Nesse encontro trabalhamos a *atividade 2* da sequência intitulada *Comparação de caminhos*, com o intuito de oportunizar aos alunos situações problema que evidenciem a noção de comprimento como grandeza, por meio de comparação sem ação de medir estabelecendo a relação de maior, menor ou igual, bem como perceberem que linhas distintas podem possuir o mesmo comprimento. Antes de iniciarmos com essa atividade fizemos uma retrospectiva do encontro anterior (1º), ressaltando o ocorrido durante a atividade 1. Após esse momento apresentamos e explicamos a segunda atividade com seus procedimentos, objetivos e a caixa de ferramentas¹⁶ (Figura 16).

¹⁶ Caixa de ferramentas, contendo objetos fundamentais como: borracha branca, canetas hidrográficas de cores diferentes, lápis grafite e tesoura escolar e outros materiais que utilizamos como medianeiros, no caso, barbante,

Figura 16- “Caixa de ferramentas”



Fonte: Autora (2016)

Esta atividade foi composta de três questões envolvendo figuras com linhas retas e curvas, tomando como referência o mapa que representa o entorno da escola. Cada questão seguia de enunciado com análises apoiadas no mapa, três alternativas (identificadas pelas letras *a*, *b* e *c*) e espaço para que cada grupo escrevesse o processo para chegar à solução ou quais estratégias utilizaram. Para a resolução os alunos poderiam usar como estratégia a visualização e/ou sobreposição de objetos da “caixa de ferramentas”.

Para cada grupo orientamos que poderiam utilizar, caso fosse necessário, alguns objetos da “caixa de ferramentas” para lhes auxiliarem na resolução do problema. Ao tomarem o problema como seu, alguns integrantes de cada grupo se direcionaram para a “caixa de ferramentas” em busca de objetos que os auxiliassem na resolução, sem ao menos terem noção de que objetos realmente necessitariam. A princípio pegaram objetos que aparentemente lhes agradaram. Como mostra a figura 17:

Figura 17- Escolha de objetos da “caixa de ferramentas”



Fonte: Autora (2016)

Ao retornarem para seus respectivos grupos, durante o diálogo com os demais componentes que se detiveram na leitura, os alunos perceberam que nem todos os objetos que

linha de crochê, canudo de plástico, palitos de picolé, fita crepe e barra de madeira com aproximadamente 3 centímetros sem graduação.

havia escolhidos seriam usados para auxiliar na resolução do problema. Com isso fizeram um refinamento para escolha de objetos mais necessários a serem usados.

A partir dessa percepção cada grupo deteve-se nos problemas propostos. Durante o desenvolvimento das atividades os integrantes dos grupos discutiam entre si na busca da melhor estratégia a ser adotada, como a maneira de melhor chegar à solução correta, utilizando os objetos que melhor serviam para fazer a comparação entre comprimentos dos caminhos expostos no mapa.

Nessa questão não houve dificuldade para a solução, pois a tarefa se restringia a comparar os comprimentos de dois caminhos com linhas retas. Para este caso a melhor estratégia seria sobreposição de objetos que servissem de medianeiro (palito de picolé, canudo de plástico ou a barra), desde que fossem sobrepostos corretamente e feitas as marcações para não perder as extremidades de cada caminho. Isto, para depois fazerem a comparação e assim alcançarem a alternativa correta corresponde a letra *a*, sendo o caminho mais curto aquele em que a referência se dá partindo da escola, passando pela travessa Santarém com a rua cinco, com o percurso de 6,0 centímetros de comprimento.

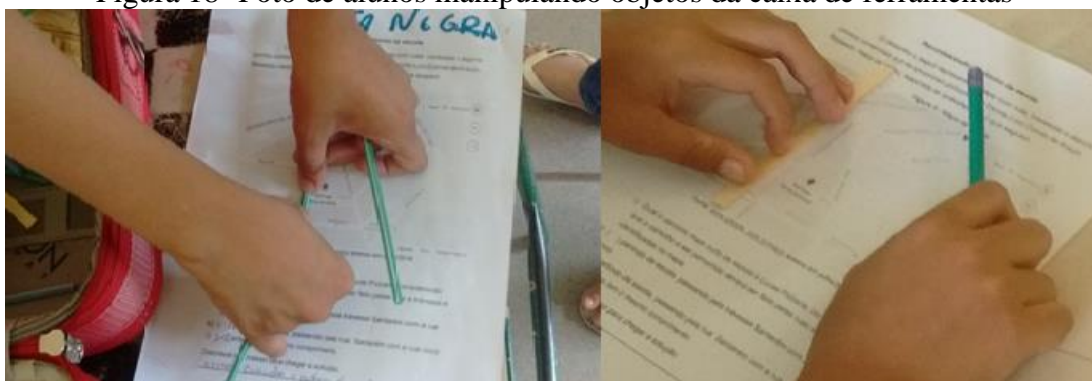
Todos os grupos utilizaram objetos da caixa de ferramentas. O mais usado foi o palito de picolé, seguido do canudo de plástico. O grupo B utilizou canudo de plástico para a sobreposição dos caminhos e fez a marcação no palito de picolé, pois alegaram que poderiam se perder no momento de fazer a comparação entre os caminhos, se utilizassem só os canudos. Enquanto que o grupo F utilizou a barra de madeira como medianeiro, fazendo marcações sobre a própria barra para representar os comprimentos dos caminhos e efetivarem as comparações. Já o grupo L manipulou da mesma forma que o grupo B, entretanto não chegou à alternativa correta. O grupo D primeiramente usou a caneta hidrocor para refazer os caminhos, em seguida sobrepôs o palito de picolé, fato que levou este grupo ao erro, pois observamos que ao refazerem um dos caminhos não partiram exatamente do local que representava a escola. Os grupos M e P utilizaram apenas um objeto para sobreposição e comparação e chegaram à resposta correta.

Na segunda questão, a estratégia melhor a ser adotada era a sobreposição do barbante, principalmente no caminho de linha curva, e a solução correta encontrada correspondia à alternativa *a* (o caminho que contém linha curva). Durante o seu desenvolvimento observamos que os grupos tiveram um pouco de dificuldade para chegar à solução correta. Isto, em virtude da questão exigir mais cuidado na escolha e na sobreposição dos objetos da caixa de ferramentas, uma vez que a tarefa referia-se a comparar os comprimentos de caminhos, um sendo linha reta e outro linha curva. Essa questão provocou discussões entre os

grupos e reflexões sobre a estratégia adotada, por um dos grupos (grupo D) da turma e de como eles chegaram à solução. Durante os registros no quadro a pesquisadora solicitou que esse grupo explicasse o processo realizado por eles para chegarem à alternativa correta, pois, foi o único que chegou à solução certa.

Primeiramente utilizaram a visualização para verificar o caminho mais curto. Em virtude desta escolha houve discussão entre os componentes do grupo quanto à solução, pois um dizia que a alternativa a era a correta, e outro componente afirmava ser b (sendo caminho com linha reta ser o mais curto) e por não chegarem a uma única alternativa, refizeram o processo utilizando objetos da caixa, como palito de picolé e canudo de plástico, mas a dúvida persistia entre os integrantes do grupo. Depois perceberam que o problema encontrava-se na parte do caminho curvo, e os objetos que estavam utilizando tinha forma retilínea. Foi então, que lançaram mão do barbante e sobrepuseram em ambos os caminhos, de modo que um dos integrantes (Arthur) fixou os pontos críticos, no caso da curva e os cantos retilíneos enquanto outro (Nilson) prosseguia com sobreposição, como mostra a figura 18.

Figura 18- Foto de alunos manipulando objetos da caixa de ferramentas



Fonte: Autora (2016)

Em seguida recortaram pedaços de barbante referente a cada caminho e realizaram a comparação entre eles. Confirmando assim, que o caminho que continha linha curva era mais curto (alternativa correta). Eles explicaram e conseguiram convencer os demais grupos que a estratégia por eles adotada era a melhor, no entanto constatamos no relato dos componentes desse grupo, que não foi algo fácil, pois passaram por uma longa discussão.

Na terceira questão, a tarefa também envolveu a comparação entre dois caminhos de linhas distintas, assim como na questão anterior, por isso não tiveram dificuldade em eleger a melhor estratégia para chegar à solução, a sobreposição com uso de barbante. Entretanto o problema foi em relação ao resultado desta solução, por conta da questão obter como resposta correta que os caminhos possuíam o mesmo comprimento. Isso fez com que alguns grupos refizessem essa questão mais de uma vez, utilizando além do barbante outros objetos, como

palito de picolé e canudo de plástico. A solução desta questão direciona-se à alternativa *c* (ambos têm o mesmo comprimento).

Nessa questão a maior parte dos grupos utilizou o barbante como mediano, em virtude do que aconteceu na questão anterior, perceberam após o discurso do grupo D, que para sobrepor caminhos com linha que possuem parte curva o ideal seria o barbante. No entanto, dos seis grupos, três chegaram à alternativa correta. Dos quatro que utilizaram o barbante, um não chegou à resposta certa.

Após o registro de cada questão, principalmente em relação a segunda e, sobretudo, a terceira questão, a professora pesquisadora junto com a turma foi analisando e discutindo as estratégias adotadas e os resultados encontrados. Destacando, desta maneira, pontos pertinentes referentes à melhor estratégia, de modo que pudesse aproximar o que foi desenvolvido pelos grupos à institucionalização sobre a noção de comprimento como grandeza. Observamos essa aproximação principalmente no discurso de alguns grupos durante a solução da terceira questão (detalhes na análise desta atividade).

A partir desse momento institucionalizamos a noção da grandeza comprimento, explicitando que podemos comparar sem usar números, e apresentamos à turma que o comprimento é uma grandeza, referindo-nos a esta como propriedade ou atributo do objeto a ser medido, e que tal grandeza não se refere somente a objetos que tenham forma retilínea. Isto porque geralmente é visto dessa maneira, mas também pode ocorrer com objetos que tenham forma curva, pois o comprimento não é o objeto em si, mas a propriedade deste. Informamos também que na situação proposta não foi preciso medir o comprimento para ter uma noção desta grandeza.

O importante era perceberem que os comprimentos de caminhos de formas distintas (linhas retas ou curvas) poderiam possuir a mesma medida de comprimento, sem necessariamente medi-las, somente comparando os objetos ou coisas estabelecendo a relação de maior, menor ou igual. Vale salientar, que a institucionalização não é pontual, mas um processo que se dá ao longo dos debates no decorrer da formulação e validação.

4.2.3 Terceiro Encontro

Este encontro ocorreu no dia 19/10/16 com duração de duas aulas, com a presença de 23 alunos. Os dois alunos que se ausentaram fazem parte do grupo D, portanto essas ações não constarão no relato nem nas análises.

Neste encontro, trabalhamos a *atividade 3* da sequência intitulada *A medida da altura dos alunos*, com o intuito de oportunizar aos alunos a construção da noção de medida empregando unidades não padronizadas e padronizadas. Antes de iniciarmos com essa atividade realizamos uma breve retrospectiva das atividades anteriores, como de praxe, desde a primeira atividade. Após esse momento apresentamos e explicamos a terceira atividade com seu objetivo e procedimentos.

Esta atividade consistiu em uma situação-problema, em que os componentes dos grupos tinham que descobrir a altura de alguns alunos da turma, estes a ser escolhidos pela própria classe. A atividade foi dividida em dois momentos: medindo a altura adotando como unidade de medida parte do corpo e medindo a altura adotando como unidade objetos da “caixa de ferramentas”.

Em um primeiro momento da atividade solicitamos à turma que elegeisse três alunos para verificarmos suas respectivas alturas. Para nossa surpresa mais de três se candidataram a participar. Com isso elegemos os primeiros que se candidataram. Em seguida, organizamos os três alunos e solicitamos que a turma fizesse a comparação do tamanho da altura (comprimento) desses alunos. Propiciamos esse momento com cautela, para que não houvesse nenhum tipo de constrangimento por parte dos alunos escolhidos, em razão de suas alturas. Reforçamos que se tratava de uma atividade em que a participação da turma era muito importante.

Para estabelecerem a relação de maior, menor ou igual em relação à altura dos alunos, solicitamos a colaboração de alguns alunos para nos auxiliarem nesta comparação. Então os alunos organizaram os escolhidos em ordem crescente de tamanho da altura (comprimento). Como mostra a figura 19.

Figura 19- Alunos em ordem crescente de altura



Fonte: Autora (2016)

A partir dessa organização a turma realizou a comparação entre a altura dos três alunos somente com a visualização, pois a diferença do comprimento entre os três era perceptível. Nesse momento reforçamos a prática desenvolvida na atividade anterior, para abordar a noção da grandeza comprimento, pois realizaram a comparação sem usar o número. Logo em seguida questionamos a turma com a seguinte pergunta: Será que a informação de saber que é maior ou menor ou se tem a mesma altura, é o suficiente ou tem algo que podemos descobrir além disso?

A partir desse questionamento, alguns alunos disseram que gostariam de saber quanto correspondia a altura de cada um dos três. Neste momento relembramos com os alunos uma parte do texto sobre pesos e medidas, justamente no excerto: *“não necessitava de um sistema de medida elaborado, só precisava de noções rústicas como “maior que”, “menor que” desenvolvendo instintivamente o processo de comparação para escolha de seus alimentos e para produzir seus instrumentos de caça de acordo com o tamanho de sua presa. Mas a partir do momento que deixaram de ser nômades, foi necessário buscar meios para medir, adotaram então, as partes do corpo como unidade de medidas.*

Em seguida, solicitamos um componente de cada grupo para utilizar o barbante e verificar a altura dos alunos e sobrepor o comprimento do barbante com altura dos respectivos alunos na fita crepe. Como eram seis grupos, ficaram dois representantes para realizar essa tarefa, ou seja, cada dois alunos para verificar o tamanho de um dos três alunos escolhidos. Em seguida solicitamos que os alunos elessem entre os três alunos, um aluno, este denominado aluno referência, para que cada grupo pudesse descobrir sua altura (aluno referência).

Com isso entregamos para cada grupo a altura do aluno referência representado por um pedaço de barbante e fizemos as devidas orientações. Após essas orientações cada grupo tomou para si a responsabilidade em resolver o problema, no caso encontrar a medida da altura do aluno referência. Assim, cada grupo reuniu-se para discutir a estratégia a ser adotada quanto ao uso das partes do corpo (medida antropométrica) para obter a medida da altura do aluno referência. Apresentamos a seguir registros das ações dos grupos, conforme mostra a figura 20.

Figura 20- Medida antropométrica adotada pelos grupos



Fonte: Autora (2016)

Os grupos utilizaram mais de um tipo de medida antropométrica para medir o comprimento do barbante (altura do aluno referência). Entre as mais adotadas pelos grupos, foram palmos, palma e dedos. Grande parte dos grupos utilizou mais de uma parte do corpo para medir a altura do aluno referência. A exemplo destacamos o grupo (L) o resultado encontrado correspondeu a 5 pés, 1 palmo e 2 dedos, esse grupo iniciou com os passos, mas perceberam que ainda sobrou um pedaço de barbante, com isso procurou o palmo, por ter um comprimento menor que o passo, ainda sim sobrou mais pedaço do barbante a ser completado pela largura de dois dedos, por esses possuírem um comprimento menor que as demais parte do corpo por eles utilizado.

Depois de encontrada a medida do comprimento do barbante, os grupos registraram na lousa a parte do corpo que utilizaram para medir e o resultado encontrado (a medida da altura do aluno referência). Diante dos registros, discutimos e analisamos junto à turma as estratégias e seus resultados.

Durante a discussão a turma observou que usar as partes do corpo como meios para medir pode ser uma estratégia que provoca grandes conflitos, pois o comprimento de um determinado objeto ou coisa, ou até mesmo o caso da altura de pessoa apresenta medidas diferentes, devido à escolha do que se utiliza como unidade de medida. Ao medirem, os grupos procuraram resolver o problema dos pedaços que sobravam em relação à unidade adotada. Com isso encontram outras parte do corpo para representrar unidades menores, sem fazerem a relação entre essas unidades. Por exemplo: 8 palmos e 4 dedos (dedos juntos), a equipe não verificou quantos dedos juntos constituem um palmo.

Nessa discussão percebemos a preocupação dos alunos em encontrar uma medida padrão, uma vez que, eles vivenciaram um pouco do que aconteceu com povos antigos, em cada civilização adotou um cubo padrão e o representou por meio de barras de platina. Diante de tal necessidade, esta atividade seguiu para seu segundo momento. Encontrar a medida do aluno referência utilizado objetos da caixa de ferramentas.

No segundo momento da atividade utilizamos novamente a “caixa de ferramentas” para os alunos, contendo os objetos que utilizaram na segunda atividade e mais os cubos de madeira de aresta de 1 cm, mas sem esta especificação. Salientamos que, embora tanto a barrinha de madeira como cubo terem forma de sólidos geométricos, não utilizamos com este fim, usamos apenas a medida do comprimento da aresta cubo (todas as arestas possuem a mesma medida, por isso não causou obstáculo didático ao aluno, ou seja qual maneira do sobrepor o cubo ao barbante, medida de comprimento da aresta seria a mesma, assim o utilizamos como unidade) e comprimento da aresta maior da barra de 3cm. Consideramos esta barra na posição horizontal, pois o nosso foco se remetia a medida de comprimento dessas respectivas barras para sobrepor o pedaço do barbante, no tocante à altura do aluno referência.

Em seguida solicitamos que dois integrantes de cada grupo escolhessem objetos da caixa de ferramentas para utilizarem como estratégia (unidade de medida) para encontrar a altura do aluno referência.

Nesse momento da atividade, os grupos preocuparam-se em deixar o barbante bem esticado durante a sobreposição dos objetos (figura 21), fixando o barbante com fita durex, cautela que alguns grupos não tiveram no momento anterior.

Figura 21- Momento da escolha dos objetos da caixa de ferramentas Atividade 3



Fonte: Autora (2016)

A figura 21 mostra que os grupos utilizaram diferentes objetos, para servir de unidade de medida, com propósito de chegarem ao resultado, a medida da altura do aluno referência. Entre os objetos mais utilizados destacam-se o canudo de plástico adotado pela maioria dos grupos. Em relação à estratégia adotada, apontamos novamente o grupo L a medida da altura do aluno referência encontrada ser aproximadamente 5 canudos, 5 barras de madeira e 1 cubo, visto que, este grupo se preocupou em sobrepor todo o comprimento ocupado pelo barbante, preenchendo com objetos de comprimentos menores.

Após a estratégia utilizada pelos alunos com o uso dos objetos, aproveitamos os dados do quadro anterior (quadro com os dados das partes do corpo utilizados para medir) e

acrescentamos de modo organizado os registros do grupo utilizando os objetos da caixa de ferramentas para encontrar a medida de comprimento do barbante (altura do aluno referência).

A partir do registro no quadro, iniciamos a análise e discussão em relação aos objetos utilizados pelos grupos. Questionando os grupos o porquê de usarem mais de um objeto para medir o comprimento do barbante. Uma das repostas apresentamos no discurso a seguir:

Andrey (grupo L): professora usamos mais de uma peça da caixa (objeto), porque a gente precisava cobrir todo o barbante esticado, como o canudo de não foi suficiente procuramos na caixa outra peça menor, a barra de madeira, mas ainda sobrou um pedacinho, então pegamos a menor peça que tinha na caixa, e deu certinho.

Com base nesse discurso e outros que houve durante a análise dos registros, mais compreensões e ações dos alunos observadas durante o experimento, procuramos institucionalizar algumas noções sobre medir, unidade de medida, medida de comprimento e refundamos a necessidade de se estabelecer uma medida padrão.

Formalizamos, assim, com a turma, que medir era o ato de comparação entre duas grandezas de mesma espécie, elegendo uma como referência (unidade de medida) para verificar o número de vezes que esta cabe na outra (grandeza a ser medida). A medida remete-se ao resultado encontrado pela ação de medir, ou seja, o resultado da comparação entre duas grandezas de mesma espécie, sendo comprimento a grandeza em jogo, portanto, medida de comprimento. A unidade, por sua vez, é a grandeza adotada para quantificar outra grandeza de mesma espécie. Em relação à unidade, Silva assevera que “Unidade de medida é um conceito abstrato usado para expressar o valor unitário da medida de determinada grandeza, com a qual outras grandezas são comparadas para expressar suas magnitudes em relação àquela específica” (SILVA, 2004, p.17).

Em virtude de não relacionarem as subdivisões das medidas antropométricas ao considerar que um palmo poderia corresponder a um número de vezes de dedos aproximadamente, ou que um canudo poderia corresponde a dois palitos de picolés, observamos a necessidade de acrescentarmos nesta sequência, uma atividade que denominamos atividade complementar da atividade 3 para evidenciar esta subdivisão e explorar a mensuração dos comprimentos dos objetos de sala de aula.

4.2.4 Quarto encontro

Este encontro aconteceu no dia 21/10/16 com duração de duas aulas, com a presença de 23 alunos. No entanto, dois grupos (D e P) tiveram pouca participação neste encontro, pela ausência de alguns componentes tanto na atividade anterior, fundamental para o bom desempenho dos alunos nesta atividade (complementar).

Neste encontro trabalhamos uma atividade que denominamos de *complementar*, por se tratar de uma atividade que foi acrescentada durante o experimento por dois motivos, primeiro por presenciarmos durante a atividade 1 os alunos utilizando os passos para medirem o comprimento da sala, o palmo para medirem o comprimento da mesa, então pensamos em desenvolver com eles uma atividade envolvendo os objetos da sala de aula.

Segundo, explorar mais um pouco as situações de medida que levem os alunos a criarem relação entre as medidas antropométricas, no sentido da turma perceber que uma jarda corresponde aproximadamente a 4 palmos de uma mesma pessoa, ou que 1 palma corresponde aproximadamente a 4 dedos de uma mesma pessoa. Assim, associar que medidas menores podem caber um número de vezes em medida de comprimento maiores, ou caso isso não aconteça, precisa-se procurar uma medida menor (unidade de medida) para determinar a medida de comprimento maior. Situação não alcançada na atividade 3.

Esta atividade intitulada *objetos de sala de aula e partes do corpo como meio para medir*, objetivou oportunizar práticas de medidas envolvendo objetos de sala de aula, bem como compreensão das diferentes unidades de medida de comprimento (medidas antropométricas e objetos da caixa de ferramentas) e a relação entre elas. Para essa atividade inserimos mais um objeto na “caixa de ferramentas”, para que servisse como um instrumento para realizar as medições, uma tira de papel 40 quilos, que denominamos de tira branca a priori, com a medida de comprimento correspondente a 1 metro sem ser graduada e nem anunciada aos alunos. Pois, esta tira seria utilizada para a próxima atividade, e nos auxiliaria na construção do metro.

Este encontro iniciou com um breve comentário do encontro anterior (3º), em seguida apresentamos e orientamos a turma sobre a atividade, esta constituída de três questões. Apresentamos a seguir a primeira, conforme mostra a figura 22:

Figura 22- Primeira questão da atividade complementar

- 1) Determinar a medida de comprimento dos objetos no quadro abaixo, elegendo como unidade de medida, para cada situação quando possível um único objeto da caixa de ferramenta.

Objetos a serem medidos	Objetos da caixa de ferramenta	Resultado
Mesa		
Lousa		
Caneta		
Borracha		

Descreva o processo para chegar a solução:

Fonte: autora (2016)

Para realizar esta atividade, observamos que a maioria dos grupos utilizou o barbante para representar o comprimento do objeto da sala de aula a ser medido, uma vez que medir diretamente nesses objetos ficava um pouco complicado. A exemplo: como medir o comprimento da lousa (quadro) sobrepondo o palito de picolé, ou outro objeto, para ver quantas vezes esses caberiam no comprimento da lousa. Para resolver essa situação os alunos utilizaram o barbante para mediar esse processo de medição.

Nesse caso, consideramos o barbante com a função de facilitador no processo de medição, ao representar o tamanho do objeto a ser medido, que por sua vez, precisa ser medido por outro objeto da caixa de ferramenta, como o palito de picolé, entre outros, objetos que possam caber um número de vezes aproximadamente no comprimento deste barbante. Essa função do barbante é diferente quando tratamos o contexto da comparação estabelecendo a comparação de maior, menor ou igual (sem uso de números), situação ocorrida na atividade 2 desta sequência.

Entre os objetos mais adotados pelos grupos destaca-se o canudo de plástico e barra de madeira para medirem o comprimento da mesa. Em relação à lousa, o mais utilizado como unidade de medida, foi o palito de picolé em conjunto com o cubo de madeira. Quanto ao objeto a ser medido de menor comprimento (caneta e borracha), o objeto que foi mais utilizado pelos grupos como unidade de medida foi o cubo de madeira, seguido da barra de madeira (3 cm). Ressaltamos que nenhum desses objetos estava graduado. A estratégia adotada pela maioria dos grupos ocorreu por meio da sobreposição, primeiramente do barbante e em seguida por outros objetos da caixa de ferramentas. Estes empregados como unidade de medida, para medir os objetos. Partiram da noção de medir, realizando comparação de grandeza de mesma espécie, tomando o objeto (caixa de ferramentas) menor como unidade de medida, e verificar quantas vezes este caberia no objeto de maior

comprimento (a ser medido), assim para chegar ao resultado, no caso a medida de comprimento do objeto maior

Durante o desenvolvimento da atividade, passávamos pelas mesas de cada grupo para observar o processo desenvolvido por eles. Em uma dessas passagens percebemos que o grupo F estava utilizando para medir os objetos da sala de aula, apenas o barbante. Isso causou-nos preocupação, uma vez que o barbante não era uma boa estratégia como referência para medir algo, por não possibilitar os três fatores essenciais para a conceitualização de medir, no caso eleger uma unidade de medida (adotar um objeto suscetível de comparação com uso de números), fazer a comparação entre ambas as grandezas de mesma natureza (o comprimento) e expressar o resultado dessa comparação por meio de um número, seguido da unidade de medida adotado. Mas como referência para comparar sem a ação de medir, conforme prevíamos na análise a priori. Entretanto, não intervimos nas ações desse grupo, esperamos para comentar algo somente no momento dos registros na lousa.

Durante a discussão e análise dos registros dos grupos, dois integrantes de um dos grupos questionaram a estratégia adotada pelo grupo F, ao usarem o barbante como referência para medir os objetos da sala de aula. Trouxemos momentos da discussão entre os grupos:

Manu (grupo F) - usamos o barbante.

Andrey (grupo L) - Barbante!! Mas como você vai medir a mesa com barbante? Como vai saber o comprimento dela?

Ana (grupo F) - respondeu: nós medimos e deu esse pedaço de barbante.

Isis (grupo M) - Mas quanto deu esse barbante? Você sabe me dizer?

Manu (grupo F) - Deu esse tamanho!

Andrey (grupo L) - Pois é, não tem como saber esse tamanho, só usando o barbante. Dá pra saber que é o comprimento da caneta por exemplo, mas não dá para saber quanto ela mede. Você tem que usar outro objeto da caixa, pra saber o comprimento do pedaço do barbante, assim encontra o da mesa e dos outros.

Isis (grupo M) - Vocês têm que pensar num jeito de medir esse pedaço de barbante utilizando outro objeto da caixa.

Diante desse conflito, perguntamos a turma se o barbante era viável para encontrar a medida desses objetos, e a maioria dos alunos respondeu que não. Em seguida, perguntamos por que? Elencamos algumas respostas:

Os grupos L e M responderam: Porque não tem como saber o tamanho dele (pedaço do barbante).

Grupo M: apenas sabemos que pode ser maior ou menor comparando com outros objetos a serem medidos. No caso, com certeza o pedaço do barbante que as meninas usaram para medir a lousa será maior que o pedaço do barbante que mediram a mesa, mas não dá pra saber sua medida, é preciso

usar outro objeto menor para verificar quantas vezes esse objeto cobre o tamanho do barbante. Podem usar o canudo ou o palito de picolé.

Nesse momento de discussão percebemos a compreensão adquirida pela maioria dos alunos, sobre o uso do barbante nessa atividade, por conta das atividades anteriores, pois conseguiram distinguir a função do barbante em duas situações diferentes, no contexto da grandeza e no contexto da medida. Isso nos leva a inferir a noção desses alunos a respeito da passagem da grandeza para medida dessa grandeza.

Em relação à segunda e terceira questões, propomos situações que levassem os alunos a criarem relação entre as medidas antropométrica e também relação entre as medidas de comprimento dos objetos da caixa de ferramentas, vista na figura 23.

Figura 23 Segunda e terceira questões da atividade 3

- 2) Utilizando como referência seu próprio corpo, responda as questões a seguir:
- Uma jarda corresponde aproximadamente _____
 - Um palmo corresponde aproximadamente _____
 - Uma polegada corresponde aproximadamente _____
- 3) Utilizando como referência objetos da caixa de ferramenta, responda as questões a seguir:
- Um canudo corresponde a: _____
 - Um palito de picolé corresponde a: _____
 - Uma barrinha de madeira (sem cor) corresponde a: _____
- Fonte: Autora (2016)

A respeito dessas duas questões (figura 23), orientamos os alunos que as resolvessem primeiramente, e depois registrarem ambas na lousa, para discutirmos uma seguida da outra, por tratarem do mesmo processo de medida. Na segunda questão, os grupos teriam que comparar as medidas antropométricas, elegendo a medida de menor comprimento como referência para medir a de maior comprimento, utilizando o seu próprio corpo. Ao adotar seu próprio corpo, o aluno para chegar ao valor aproximado da medida antropométrica a ser medida, deveria utilizar o barbante para facilitar esse processo, pois mensurar por exemplo o palmo usando como unidade de medida, poderia provocar uma pequena diferença de comprimento, se caso escolhesse usar o barbante para representar o palmo a ser medido pela palma do aluno, mais próximo da medida de comprimento do palmo chegaria.

Os registros a respeito das medidas antropométricas apontam que a maioria dos grupos responderam que uma jarda corresponde aproximadamente a 4 palmos, exceto o grupo F que obteve a solução de 4 palmos e meio. Quanto ao palmo, a maior parte dos grupos informou que 1 palmo corresponde aproximadamente a 3 palmas, e que 1 palma corresponde a 4 dedos.

No caso do grupo F, perguntamos como realizaram o processo de mensuração da jarda (é a distância do meio do peito ou ponta do nariz até a ponta do dedo médio do braço estendido), embora, já tivéssemos observado. O grupo informou que relacionaram a jarda de um aluno com o palmo de outro aluno, por ficar difícil, e justificou: *Fizemos deste jeito, porque ficava difícil a gente medir uma parte do nosso corpo com outra parte do nosso corpo.*

Após a explicação um dos integrantes (André) do grupo L se manifestou dizendo:

Por isso que é importante o barbante ou fita crepe professora, pois com esses materiais podemos ver o tamanho da jarda e depois podemos medir com o palmo da mesma pessoa. Mas a fita crepe às vezes não é muito boa, porque pode colar no nosso corpo, mas é uma forma de ajudar na hora de medir.

No decorrer dessa discussão, solicitamos que os alunos observassem bem seus registros e verificassem se haviam encontrado alguma relação entre as medidas antropométricas. (regularidade entre elas). Nesse momento a turma ficou pensativa com olhar voltado para quadro de registro. Depois de mais ou menos cinco minutos, dois alunos de grupos distintos falaram que ao medirem a sua palma, perceberam que esta correspondia a aproximadamente 4 dedos, esse processo eles fizeram diretamente, sem precisar de barbante. Em seguida outros alunos também se manifestaram informando que 1 palmo correspondia a 3 palmas.

A partir dessas repostas parabenizamos a turma por terem encontrado as relações entre palmo e palma, e também entre palma e dedo, mas continuamos instigando se teríamos como relacionar palmo e dedo. Respostas de um dos integrantes de alguns grupos:

Daniel (grupo B): sim professora, podemos dizer que 1 Palmo pode ser igual 12 dedos.

Pesquisadora: Por que?

Daniel (grupo B): professora, se 1 palmo vale 3 palmas e 1 palma vale 4 dedos.

Cada 1 palma é igual 4 dedos, mas 1 palma tem 3 palmas, a gente agora só multiplica $3 \times 4 = 12$. 1 palmo = $4 + 4 + 4 = 12$.

Isis (grupo L): Verdade professora, assim dá certo, mas tem que ser o palmo, a palma e o dedo da mesma pessoa. Por que se for de pessoa diferente não vai dá certo, porque somos diferentes.

Arthur (grupo D): Como assim, 12? Não entendi professora.

Daniel (grupo B): 1 palmo = $4 + 4 + 4 = 12$

Com o final da discussão da questão passamos para a terceira. Esta teve grande relevância para que os alunos pudessem perceber a relação entre diferentes objetos da “caixa de ferramentas”, além de compreenderem que o objeto que utilizamos como unidade de medida, depende do que se queira medir. Apresentamos os registros dos grupos no quadro 4.

Quadro 4- Registro da terceira questão / Atividade complementar

Objetos da caixa de ferramentas	Resultado de cada Grupo			
	B	F	L	M
Um canudo	2 palitos de picolé	8 barras de madeira	2 palitos de picolé	24 cubos de madeira
Um palito de picolé	4 barras de madeira	4 barras de madeira	Uma tira de papel cartão e 1 cubo	4 barras de madeira
Uma barra de madeira	3 cubos	3 cubos de madeira	3 cubos	3 cubos

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

O quadro 4 mostra que dois grupos não participaram dos registros, o grupo D, por ter faltado ao encontro anterior, em que foi realizado a atividade 3, pois a partir do desenvolvimento desta, que surgiu a atividade complementar, com isso os componentes do grupo D, precisaram unir-se com outro grupo para poder acompanhar o andamento da situação de medida. O grupo P também não registou suas soluções, das três integrantes, uma faltou e as demais não apresentaram interesse em resolver a questão. Dentre os objetos mais utilizados como referência para medir os objetos da caixa de ferramentas a serem medidos foi a barra de madeira (3cm).

Nesta questão, observamos que a maioria dos grupos percebeu a relação, quando informam que 1 canudo corresponde aproximadamente a 2 palitos de picolé, e que cada palito equivale ao comprimento de 4 barras de madeira. Além de denotarem que 1 canudo também corresponde a 8 barras de madeira, como proferido pelo grupo F. Inferimos que esta percepção se deu em virtude da segunda questão, quando trabalhamos esse mesmo processo de medição com medida antropométrica. Elencamos alguns momentos que explicita o processo realizado pelos grupos para chegarem à relação de equivalência entre os comprimentos dos objetos:

Daniel (grupo B): Medimos primeiro o canudo, assim procuramos objetos que tivessem tamanho menor que canudo e que desse bem próximo de todo o comprimento do canudo. Vimos que poderíamos usar palito de picolé, barra de madeira e até cubos, mas achamos melhor o palito, porque assim chegaríamos mais rápido ao resultado. Tivemos o resultado que 1 canudo é

igual 2 palitos de picolé, colocamos os palitos em cima do canudo. Já o palito de picolé é tem a medida de 4 barras de madeira.

Professora pesquisadora: muito bem! Então, quantas barras de madeira caberá no comprimento de um canudo?

Daniel (grupo B): 8 barras!

Professora pesquisadora: Por que?

Daniel (grupo B): porque 1 palito é a metade de um canudo e como 1 palito também é igual a 4 barras. Cada metade do canudo dá 4 barras. O canudo inteiro dará $4 + 4$ barras que é igual a 8 barras.

Renata (grupo F): Professora, não fizemos assim, só colocamos as barras em baixo do canudo, e deu certinho. Não fizemos essa conta.

Caio (grupo B): então, nesse caso também podemos encontrar a medida do canudo, usando os cubinhos.

Professora pesquisadora: Como assim?

Daniel (grupo B): Cada barra de madeira corresponde a 3 cubos, deu certinho quando colocamos os cubos em cima das barras. Se 1 canudo vale 8 barras e cada barra vale 3 cubos é só multiplicar $8 \times 3 = 24$ cubos

Bianca (grupo M): professora, usamos os cubinhos, colocamos um juntinho do outro bem abaixo do canudo, e vimos que 1 canudo corresponde aproximadamente 24 cubinhos. Deu trabalho, mas toda vez que usamos nas outras atividades objetos maiores sempre tinha que completar com objetos menores, por isso que utilizamos os cubinhos, pois eram os menores que tínhamos.

Professora pesquisadora: muito bem meninas. Caso, não fosse possível utilizá-los inteiramente, necessitaríamos de encontrar um objeto de comprimento menor.

Isis (grupo M): Então, professora quanto menor o comprimento do objeto que usamos como unidade para medir, melhor chegaremos do tamanho do objeto que estamos medindo. Porque, quando não dá certo, temos que procurar um objeto cada vez menor.

Diante dos discursos e do processo realizado, concluímos com a turma que quanto menor for o comprimento da unidade adotada, mais próximo chegaremos da medida de comprimento do objeto a ser medido, e também que as unidades de medidas adotadas sejam elas não padronizadas (medidas antropométricas) ou padronizadas não oficial (objetos da caixa de ferramentas que a turma elegeu como padrão) podem ter relações entre si, em que a medida de comprimento de um objeto pode corresponder ao número de vezes da medida de um outro de medida menor.

Com isso, inferimos que esta atividade sinalizou o processo de transformação de unidades, principalmente ao perceberem que quanto menor o comprimento do objeto utilizado como unidade de medida, mais próximo se chega da medida do comprimento do objeto a ser medido. Essas noções trabalhadas foram fundamentais para a constituição da medida padrão oficial, o metro tratado na atividade seguinte.

4.2.5 Quinto encontro

Este encontro aconteceu no dia 25/10/16 com duração de duas aulas, com a presença de 24 alunos. Nele aplicamos a atividade 4 intitulada *A medida padrão - o metro e seus submúltiplos*. Esta atividade teve como base o problema da atividade 3, encontrar a medida da altura do aluno referência. Com isso, tivemos que fazer uma breve retomada sobre tal atividade. Além de uma retrospectiva da atividade complementar, principalmente em relação às medidas antropométricas e os objetos da caixa de ferramentas, para que os alunos pudessem vivenciar uma situação um pouco similar ao que foi abordado no texto sobre história de pesos e medidas, em que os povos utilizaram a medida antropométrica para medir coisas e objetos, depois procuram substituir por uma barra de pedra (cúbito padrão).

Para auxiliar a turma na solução desta atividade, acrescentamos mais um objeto na caixa de ferramentas, uma tira de papel 40 quilos, de comprimento aproximadamente 1 metro (sem graduação). Com intuito de oportunizar aos alunos a compreensão do metro e dos seus submúltiplos a partir da construção de uma medida padrão da turma.

Sendo assim, apresentamos e entregamos para cada grupo uma tira de papel como um instrumento de medida padrão da turma para encontrar a altura do aluno referência. Ao realizarem o processo de medição, sobrepondo a tira padrão ao comprimento do barbante (altura do aluno referência), os grupos perceberam que o resultado encontrado correspondia ao comprimento da tira inteira mais um pedaço desta. Ainda com essa experiência, os alunos sentiram a necessidade de medir também a tira de papel, fato que já esperávamos, em virtude da tira a priori não ser graduada. Foi então, que apresentamos um novo material para auxiliar a turma no desenvolvimento da atividade, a escala de cuisenaire, constituída por barras de madeiras de diversas cores e tamanhos¹⁷ variando de 1 a 10 cm de comprimento sem graduação, como mostra a figura 24.

¹⁷ Relação de tamanho e cores das barras, branca ou cor madeira (1cm); vermelha (2 cm); verde-claro (3 cm); lilás (4 cm); amarelo (5 cm); verde-escuro (6 cm); preto (7 cm); marrom (8 cm); azul (9 cm) e laranja (10 cm).

Figura 24 - Escala de cuisenaire



Fonte: pesquisa de campo (2016)

Após as devidas orientações solicitamos aos grupos que escolhessem uma quantidade de barras de mesma cor para sobreporem a tira de papel 40 quilos e verificassem quantas barras cabiam e depois registrassem.

Cada grupo elegeu uma cor de barrinha e iniciou o processo de medida, sobrepondo as barras na tira padrão. A princípio, os grupos B, M e F ficaram com barras de cor laranja, o grupo L com verde-claro, grupo D com as barras amarelas e por fim o grupo P ficando com as barras marrons. Contudo, durante o desenvolvimento alguns grupos utilizaram outras cores, como mostra a figura 25.

Figura 25- Momento de ação da atividade 4



Fonte Autor (2016)

Após o processo de resolução do problema proposto, os alunos registraram no quadro (lousa) e explicitaram suas estratégias de solução. O grupo L informou que a tira padrão correspondia aproximadamente a 33 medidas de comprimento da barra de cor verde-claro, pois ainda ficou faltando sobrepor um pedaço da tira, bem menor que o comprimento de uma barra verde-claro. O grupo P, utilizou as barras lilás, obtendo resultado de 25 barras, enquanto que o grupo D adotou duas barras, tendo como resultado a medida da tira, em 19 barras amarelas e 1 barra verde-claro. Este grupo deveria chegar ao resultado de 20 barras amarelas, haja vista que o comprimento da tira mencionado acima, corresponde a 100 cm, e a barra amarela ter comprimento de 5 cm, portanto, 5 é divisor de 100, teoricamente deveria ter 20 barras. Observamos que esse grupo não sobrepôs corretamente as barras.

Já grupo B utilizou a barra laranja como unidade de medida e registrou que a tira padrão correspondia a 10 unidades de medida da barra laranja. Enquanto o grupo M, embora tenha utilizada a mesma barra que o grupo B, chegou a um resultado diferente, correspondente a 8 barras laranja e 2 azuis. Algo que estranhamos, pois, as tiras de papel eram de mesmo tamanho, e por adotarem a mesma barra como unidade, o resultado teoricamente seria o mesmo.

Essa situação gerou um conflito entre os grupos que adotaram a barra de mesma cor, mas esse fato foi esclarecido quando comparamos os tamanhos das tiras. Inferimos que este resultado seu deu, por conta da tira não estar bem esticada durante sobreposição das barras, fato que observamos durante o desenvolvimento da atividade.

O grupo F também utilizou as barras laranja, porém como uma estratégia para agilizar o processo de medida, devido terem adotado primeiramente a barra branca (cubo) como unidade de medida. Durante a mensuração perceberam uma dificuldade à medida que uniam as barras brancas pela extremidade para medir quantas vezes essas cabiam na tira padrão, antes de chegarem à metade do caminho da sobreposição se perdiam e começavam tudo novamente, isto ocorreu três vezes. Foi então, que uma das componentes do grupo M pegou a barra laranja para ver quantas unidades de barras branca cabiam em uma barra laranja, já que tinha escolhido a branca, queriam mantê-la como unidade de medida, e não trocar pela barra laranja.

Assim, o grupo verificou que a tira padrão correspondia a 10 unidades de barras laranja, e 1 barra laranja correspondia a 10 barras brancas, então fizeram 10×10 , chegando a conclusão que a tira padrão correspondia 100 unidades de barras brancas (cubos). Essa forma encurtou o trabalho do grupo. A partir da solução do grupo F os demais grupos procuraram verificar quantas barras brancas cabiam, nas barras que eles haviam adotado anteriormente. Ao realizarem esse novo processo os grupos chegaram à conclusão que o comprimento da tira aproximava-se de 100.

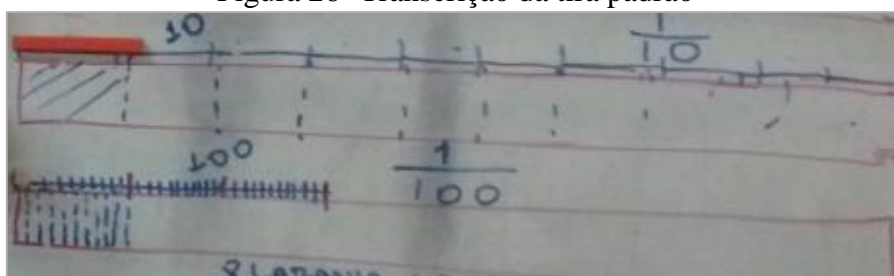
Então, retornamos ao quadro (lousa) para reforçar que em uma tira de papel cabiam 10 barras laranja e que 1 barra laranja cabiam 10 barras brancas, com isso 1 tira de papel correspondia a 100 barras cor de madeira. Concluímos a medida de comprimento da tira padrão e solicitamos que os grupos graduassem as tiras padrão de acordo com as barras utilizadas, fazendo as marcações na tira se apoiando nas extremidades da barra. Nesse momento oficializamos a tira padrão graduada, pelo comprimento da barra branca, considerando essa tira como instrumento padrão construído pelos alunos para nos auxiliar na compreensão da medida padrão oficial, o metro e seus submúltiplos. Elegemos a barra branca

por ser a de menor comprimento, partindo da ideia que quanto menor o comprimento da unidade de medida, mais próximo se chega ao real valor do objeto a ser medido.

Para iniciar a institucionalização do metro e seus submúltiplos, apresentamos para a turma um instrumento oficial conhecido pela maioria dos alunos, a fita métrica. Além da fita, aproveitamos para mostrar uma trena de 5 m, informando que este era interessante para medir comprimentos longos, e também mostramos um instrumento muito utilizado pela turma em sala de aula, a régua. Em seguida sobreposamos a fita métrica na tira padrão para compararmos e oficializar a tira com o valor correspondente de 1 metro. Destacamos a diferença entre as duas, pois a tira tinha 1 metro, enquanto que a fita tinha mais de um metro. Com a tira graduada, e quantificada em 1 metro, denominamos a tira padrão, como tira métrica.

Em seguida retornamos a lousa e transcrevemos a tira graduada em 10 espaços de mesmo comprimento (barras laranja) e a tira graduada em 100 espaços (barras brancas), conforme a figura 26.

Figura 26- Transcrição da tira padrão



Fonte: Autora (2016)

Para compreensão dos submúltiplos contamos com apoio do conhecimento prévio dos alunos acerca de fração, divisão, multiplicação, conhecimento destacado pela professora regente, que a maioria dos alunos já possuía.

Nesse momento pegamos a tira graduada e retomamos com os alunos que esta era constituída de 100 barras brancas (cubos), e levamos a discussão para o conhecimento que eles tinham sobre fração, perguntando à turma se uma dessas barras brancas fosse retirada, corresponderia a quantas partes da tira? Uma pequena parte da turma respondeu que seria 1 parte do total de 100. Em seguida, continuamos instigando a turma, sobre a representação em fração do que eles falaram. Em seguida, dois alunos responderam um centésimo e outros responderam um, o tracinho e o cem. Como alguns alunos não souberam expressar matematicamente sua representação, embora tivéssemos compreendido o quiseram dizer,

aproveitamos alguns minutos para uma breve retomada sobre representação e leitura de fração.

Após essa revisão, associamos o centésimo ao centímetro, informando para a turma que uma barra correspondia a 1 cm, e, portanto, a tira que correspondia a 100 barras de 1 cm valeria 100 cm. Essa unidade já era conhecida pela turma, mas não tinha a compreensão desta e de sua dimensão. Para corroborar o comprimento da barra medimos esta com a fita métrica, confirmando que o valor correspondia a 1 cm, mas que poderia ser que outras barras brancas poderiam ter pequenas diferenças, pois estávamos trabalhando com material concreto, e as vezes teoricamente são construídos para ser do mesmo tamanho. Entretanto, às vezes ocorre uma pequena falha na produção, como foi o caso dos canudos de plásticos.

Para institucionalizar o decímetro, utilizamos a barra laranja, da mesma forma realizando com a barra branca, para se chegar ao centímetro. Em relação ao milímetro, instigamos a turma a refletir sobre a existência de uma unidade menor que 1 cm. Exploramos, assim, a subdivisão da barra branca em 10 partes iguais, e retomamos o mesmo processo utilizado para chegar ao centímetro e decímetro. Em seguida fizemos a relação entre essas unidades com o metro, usando o processo de divisão e multiplicação, levando o aluno a conjecturar essas transformações, a partir da tira métrica e das barras laranja e brancas. Da seguinte maneira:

Se uma tira métrica corresponde aproximadamente a 10 barras de laranja, cada barra laranja corresponde a $1/10$ da tira, ou seja, uma barra corresponde a um décimo da tira, como esta corresponde a 1 m, então, um décimo da tira equivale a um decímetro.

Se uma tira também corresponde aproximadamente a 100 barras brancas, então cada barra branca corresponde a uma parte do total de 100 partes que constitui a tira, ou seja, um centésimo desta. Considerando que a tira equivale a 1m, portanto, esse um centésimo corresponde a um centímetro. De modo análogo, chegamos até o milímetro. A partir dessa compreensão, construímos junto com a turma um quadro relacionando os objetos trabalhados com os submúltiplos do metro (unidades de medida de comprimento). Conforme o quadro 5.

Quadro 5- Relacionando o objeto e unidade de medida

Objetos	Unidades de medida de comprimento			
	Metro (m)	Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
Tira métrica	1	10	100	1000
Barra laranja	$1/10$	1	10	100
Barra branca	$1/100$	$1/10$	1	10
Barra menor que branca	$1/1000$	$1/100$	$1/10$	1

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

O quadro anterior informa que uma tira métrica corresponde a 1m, mas que equivale também a 10 dm, assim como 100cm ou 1000 milímetros. Construímos esse quadro com os alunos para que eles percebessem que independente da unidade de medida, o comprimento do objeto permanece o mesmo, o que muda é o valor atribuído a esse comprimento, devido à unidade adotada. Buscamos também explorar as transformações das unidades de medida, para que os alunos percebessem que utilizamos diferentes unidades, dependendo de cada caso a ser medido.

A partir dessas conjecturas apresentamos uma parte do sistema métrico decimal, constituído pelo metro, como unidade padrão e seus submúltiplos decímetro, centímetro e milímetro. Ressaltamos que neste último utilizamos um pouco de abstração, por parte dos alunos, uma vez que, não tínhamos objeto concreto para representar os dez espaços imaginados no comprimento da barra de cor branca. Deste modo, institucionalizamos o metro e seus submúltiplos.

4.2.6 Sexto encontro

Este encontro aconteceu no dia 26/10/16 com duração de três aulas, com a presença de 24 alunos. Neste dia, conseguimos estender um pouco mais a aula, em virtude dos alunos terem um horário livre. Aplicamos a atividade 5 intitulada *A distância entre os espaços da escola*. Antes que iniciássemos a atividade, fizemos um breve comentário do encontro anterior (5º), do que havia sido abordado e solicitamos que os grupos verificassem a altura do aluno referência, medindo o comprimento do barbante (altura do aluno referência) com a fita métrica. Neste momento, os grupos verificaram não somente, essa altura, mas também suas respectivas alturas, o comprimento do pé, a circunferência da cintura e outras partes do corpo.

Esse momento foi muito interessante, pois descobriram medidas que desconheciam, como a circunferência da cabeça. Aproveitamos para explicitar que o comprimento em torno da cintura e da cabeça denominava-se perímetro, correspondente ao comprimento do contorno realizado pela fita, a partir de uma das extremidades da fita até ponto de coincidência obtido pelo contorno da parte do corpo.

Em seguida apresentamos e explicamos a atividade 5, cuja tarefa dos alunos era encontrar a distância entre duas localizações do espaço escolar, a sala e a quadra de esporte, com o objetivo de compreender a necessidade de unidades medida maiores que o metro, bem como as transformações dessas unidades.

Antes dos alunos iniciarem o desenvolvimento da atividade retomamos um pouco da história sobre pesos e medidas, fazendo uma sucinta comparação entre a trena e o instrumento adotado pelos esticadores de corda durante as antigas civilizações, para medirem o comprimento do terreno nas proximidades do rio Nilo.

Nesse momento instigamos os alunos sobre a noção que eles tinham de longas distâncias e se conheciam a unidade para mensurá-las. Alguns alunos responderam quilômetro. Para se referirem a esta unidade apresentaram como exemplo: a distância entre a escola e as casas de alguns deles, distância entre a escola e ginásio de esporte do bairro e outros. Ressaltamos que fizemos tais questionamentos, devido às informações obtidas pela professora regente, em que a maior parte da turma tinha conhecimento quilômetro, que este equivalia a mil metros, por terem visto no 5º ano. Entretanto, não tinham percepção da extensão dessas unidades, ou seja, não conseguiam estimar o que seria um quilômetro ou mil metros.

Durante essa discussão, apontamos que aproximadamente 40% da turma realmente não tinha a noção do que seria uma distância de 1 quilômetro ou 1000 metros, mas tinham o entendimento de ser algo muito distante, comprido ou longo. A partir dessa situação apresentamos o seguinte problema: Qual a distância aproximada entre a sala de aula da turma 601 até a quadra de esporte passando pelo corredor em frente à sala?

Para o desenvolvimento da atividade, os alunos utilizaram o barbante para representar essa distância, e depois mensuraram com a trena. Essa atividade foi solucionada com uma ação reunindo todos os grupos, com decisões tomadas em comum acordo por esses grupos.

No entanto, um dos grupos optou em mensurar diretamente a distância entre as duas localizações utilizando a trena e tomando como ponto de referência as colunas do corredor para apoiar a trena, mas perceberam que não era viável, pois as colunas terminavam no final do corredor e, o caminho até a quadra continuava. Então, se juntaram aos demais grupos que utilizaram o barbante para representar o percurso entre sala e quadra, tendo como apoio alguns alunos para manterem o barbante bem esticado.

Após verificarem o comprimento total da distância entre sala e quadra de esporte, os alunos cortaram o barbante e enrolaram no pedaço de galho de árvore, mas logo em seguida enfrentaram um conflito, pois o instrumento a turma tinha, a trena de 5m, mas o problema era: como mensurar o barbante de grande extensão? Entre as estratégias sugeridas pelos alunos, adotamos a mais conveniente para aquela situação, neste caso, por dois alunos nas extremidades do comprimento da sala, ir e voltar com o barbante, apoiando nas extremidades por duas régua para que não pudesse machucar os alunos que seguravam o barbante, em

seguida medir com a trena, o comprimento entre os dois alunos, e multiplicamos pelo número de vezes de ida e volta do barbante. Conforme mostra a figura 27.

Figura 27- Turma em ação na atividade 5



Fonte: Autora (2016)

De acordo com a conferência de um dos alunos havia 18 comprimentos de 5 m e mais 4m e meio (50 cm). Diante dessa informação efetuamos junto com os alunos a operação envolvendo dados obtidos com intuito de chegarmos ao resultado final, no caso a medida da distância entre a sala de aula e quadra de esporte.

$18 \times 5 = 90 \text{ m}$ $90 \text{ m} + 4 \text{ m} + 50 \text{ cm}$

No entanto, nos deparamos com a situação que envolvia unidades de medidas diferentes, solicitamos que cada grupo encontrasse uma solução para o problema em jogo. Primeiramente operaram com os valores que continham a mesma unidade, em seguida pensaram o que fazer com a unidade diferente.

Os grupos apresentaram três respostas diferentes: 94 m e 50 cm; 94,5 m e 9450 cm. Com esses resultados refundamos a ideia que, embora os resultados fossem diferentes o comprimento permanece o mesmo. Destacamos que esses resultados fazem parte de uma classe de equivalência referente à medida da distância entre a sala de aula e a quadra de esporte.

No entanto, a questão em jogo refere-se à percepção dos alunos em relação à distância encontrada, se esta se aproxima a 1 quilometro ou não. De acordo com o resultado exposto, os alunos verificaram que essa distância está longe de se aproximar de 1 quilômetro. A partir do desenvolvimento desta atividade, os alunos apresentaram uma percepção do que representa realmente 1quilômetro, pois antes eles sabiam que correspondia a 1000 metros, mas não tinham a noção de sua extensão. Isso ficou evidente em seus discursos.

André (grupo L) – é professora não dá para essa distância chegar a 1 quilômetro. Porque a medida deu 94 metros e meio...e 1quilômetro é igual a 1000 metros. A distância não chegou nem a 100 metros.

Daniel (grupo B) – Então, professora! 1 quilômetro é um pouco mais 10 vezes maior que a distância entre sala de aula e quadra de esporte da escola.

Yana (grupo B) – já pensou professora, vamos imaginar 10 vezes o comprimento deste barbante, que deu tanto trabalho para medir.

Após os discursos dos alunos direcionamos para a institucionalização dos múltiplos do metro. Informamos à turma que além do quilômetro (km) havia outras unidades superiores ao metro. Aproveitamos o resultado da medida da distância de 94,5m para anunciar o decâmetro. Apresentamos na forma parcial 90 m + 4 m + 50 cm. Deste utilizamos apenas o 90 para expressar que cada 10 metros dos 90m corresponde a uma unidade medida superior a 1 m, que denominamos decâmetro (dam). Portanto, 1 dam equivale a 10 m. Logo podemos afirmar que 90 m equivale a 9 dam. Assim, como cada 10 m equivale 1 dam e cada 1000 m equivale 1 km, temos também cada 100 m equivale a 1 hectômetro (hm).

$$1\text{km} = 1000 \text{ m}; 1\text{hm} = 100 \text{ m}; 1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$$

Para explorarmos as convenções entre o metro e seus múltiplos partimos para a abstração, no sentido da turma imaginar um percurso de 1 km e realizar os cálculos e registros matemáticos. Para cada percurso de 1 km que corresponde a 1000 metros, cada 1 m deste percurso representaria 1 m de total de 1000 m, para essa compreensão nos remetemos à representação desta informação em fração.

$$1 \text{ m} = (1 / 1000) \text{ km, de modo análogo para hectômetro e decâmetro.}$$

$$1\text{m} = (1 / 100) \text{ hm}$$

$$1 \text{ m} = (1/ 10) \text{ dam}$$

4.2.7 Sétimo encontro

Este encontro aconteceu no dia 08/11/16 com duração de duas aulas e presença de 24 alunos. Aplicamos as duas últimas atividades (7 e 8) da sequência. Elas foram elaboradas para observarmos a compreensão da turma sobre o que foi explorado nas atividades anteriores acerca da unidade mais adequada para cada situação e transformação de unidades de medida. Enquanto que as atividades anteriores tiveram o propósito de possibilitar aos alunos a construção das noções dos conceitos em jogo.

Primeiramente fizemos uma retrospectiva do encontro anterior, principalmente sobre a constituição do sistema métrico decimal e as conversões das unidades de medida, pois as

noções desses conhecimentos eram relevantes para que os alunos pudessem realizar as duas atividades desse encontro.

Com isso, apresentamos e orientamos a atividade 7 intitulada *Relacionando as unidades de medidas convenientes a cada situação*, com o objetivo de associar uma unidade de medida em cada situação proposta. Esta atividade foi constituída de uma questão, cuja tarefa era responder qual a unidade adequada para situação e justificá-la.

Cada grupo recebeu uma folha com a atividade. A princípio ninguém apresentou nenhuma dúvida. No entanto, observamos durante a realização do processo que o grupo F relacionou as unidades para cada situação e justificou suas respostas, fazendo a conversão da unidade que associou como adequada, para metro. Enquanto que outros grupos identificaram a unidade mais adequada e também mediram alguns dos casos propostos, como comprimento do caderno, a espessura da borracha, a altura da porta.

Em relação à identificação da unidade mais adequada para cada situação, os grupos conseguiram chegar à resolução correta. Conforme o quadro 6.

Quadro 6- Identificando as unidades adequada em cada caso

Grupos	Distância da casa até escola	Comprimento da casa	Comprimento do caderno	Espessura da borracha	Altura da porta
B	km	m	cm ou mm	cm ou mm	m ou cm
D	km ou m	m	cm	dm	m ou cm
F	hm	dm	cm	mm	m
L	km ou m	m	cm	dm	m
M	km	m	cm	mm	m
P	km	m	cm	cm	cm

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

Como mostra o quadro, podemos observar que os grupos conseguiram compreender que dependendo do que se pretende medir, podemos eleger a unidade mais adequada, principalmente em casos que se pode associar mais de uma unidade, como a altura da porta, o comprimento do caderno. Em relação à distância da casa até a escola, percebemos que a resposta seria subjetiva, pois dependia da distância da casa de cada aluno ou do grupo, pois durante a discussão alguns alunos informaram que moravam na esquina da rua da escola, na rua por trás da escola e outros um pouco mais distante. Entre as informações destacamos a justificativa de um dos grupos: *Manu (grupo F) - Professora, colocamos hectômetro, por ele ser a mesma medida que 100 m, e eu e Bianca moramos perto da feira, e daqui até lá, é quase a mesma distância da nossa sala até a quadra de educação física.*

A justificativa da Manu foi muito interessante, pois visualizamos o resultado que a desenvolvimento da atividade 5 pode provocar na solução do grupo, percebemos que os componentes se valeram da estimativa, ao refletirem sobre a distância por eles encontrada da sala de aula até a quadra, ao compararem com a distância da escola até suas casas.

Quanto às respostas dos grupos L e D ao relacionarem a espessura da borracha, como sendo o decímetro a unidade mais adequada. O grupo D não soube explicar, eles informaram que não prestaram atenção, enquanto que o L disse que escreveram errado, mas que sabiam que o decímetro é unidade muito maior que uma borracha, para este caso teria que ser o milímetro ou centímetro.

Ao finalizarmos essa discussão passamos para a atividade 8 intitulada *Praticando conversão de unidades de medida*. Essa atividade tinha a tarefa de praticar a transformação entre as unidades de medida de comprimento, para que pudéssemos visualizar a compreensão dos alunos a respeito desse conhecimento, explorado e institucionalizado nas atividades 4 e 5.

Essa atividade é constituída de duas perguntas a partir de um contexto da turma, conforme mostra a figura 28.

Figura 28- Atividade 8 da sequência
Percorso da escola ao Centro de Convenções da Amazônia

1) A distância entre a localização do Centro de convenções da Amazônia – Hangar e as proximidades da escola Lucy C. de Araújo corresponde aproximadamente a um percurso de 11 quilômetros (km). Determine:

a) Quantos metros, aproximadamente corresponde esse percurso?
 Descreva o processo para chegar a solução:

b) Essa distância equivale a quantos centímetros?
 Descreva o processo para chegar a solução:

Fonte: Autora (2016)

Nesta atividade não foi disponibilizado nenhum objeto para auxiliar os grupos na resolução, os únicos recursos foram lápis, borracha e o conhecimento do aluno em relação a tudo que foi trabalhado nas atividades anteriores e outros conhecimentos já adquiridos.

Cada grupo procurou resolver a atividade do modo que havia compreendido. Observamos durante o desenvolvimento da atividade, uma competição entre os grupos em tentar resolver primeiro, para explicitar à turma o seu resultado. Entre os grupos, apenas o grupo P não conseguiu resolver a atividade. Após conversar com esse grupo percebemos que um pouco de falta de interesse das integrantes em fazer a atividade, e um pouco de dificuldade em resolver o problema. Supomos que esses fatores justificam a não realização da atividade,

principalmente quando elas afirmaram que não prestaram atenção direito na atividade anterior.

Os demais grupos chegaram à solução, apresentando que 11 quilômetros correspondiam a 11000 metros, argumentando que se 1 km equivale a 1000 m, então $11 \times 1000 = 11000$. Enquanto que na segunda pergunta, conseguiram chegar ao resultado de 1.100.000 cm, informando que 1m equivale a 100 cm, aproveitaram a solução da pergunta anterior e responderam que 11000 m em centímetro seria $11000 \times 100 = 1100000$. Observamos durante o desenvolvimento da atividade que tal solução se deu por um conjunto de fatores: revisão em seus cadernos para lembrar de algum registro da atividade anterior, mobilização de conhecimentos já adquiridos como multiplicação e também o diálogo entre componentes.

Os problemas propostos nas duas atividades não tiveram um grau de complexidade, em razão que nosso propósito era identificar a compreensão adquirida pelos alunos a partir do que foi trabalhado e institucionalizado nas atividades anteriores no que se refere às transformações de unidades de medida e o uso das unidades mais convenientes para cada situação.

5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Nesta seção, apresentamos a última fase da engenharia didática, a análise posteriori e validação. Esta fase remete-se ao tratamento das informações obtidas durante experimento, por meio de registro escrito e oral dos grupos, estes coletados com auxílio dos recursos de gravação de áudio e fotografia. Tais recursos possibilitaram as transcrições dessas informações, que junto a nossa observação no decorrer da realização das atividades, nos permitiu destacar o que de fato aconteceu.

5.1 ASPECTOS SOBRE AS ANÁLISES DAS ATIVIDADES

A análise da sequência baseia-se na engenharia didática, perante o confronto das análises a priori e a posteriori, pois esta metodologia de pesquisa tem por finalidade analisar a sequência de ensino. Tal análise versa em três categorias organizadas a priori: situação histórica, situação de comparação e situação de medida, em virtude das atividades estarem estabelecidas na sequência didática em situações: histórica, de comparação e de medida.

Por outro lado, a análise do desenvolvimento das atividades nas duas últimas categorias, se deu por meio do modelo de ensino da TSD, em particular os momentos das situações: ação, formulação, validação e institucionalização. De modo, a identificar esses momentos na resolução das situações-problema propostos.

Quanto aos referenciais para análise, nos apoiamos no levantamento bibliográfico, no sentido de apontar as estratégias adotadas pelos alunos, com uso das medidas antropométricas e uso da “caixa de ferramentas”, no que se refere à noção de medida de comprimento permeando os três domínios, geométrico, grandeza e numérico. Além dos autores Douady e Perrin-Glorian (1989), Brito (2003), Caraça (1951), Lebesgue citado por Palaro (2006), Brousseau e Brousseau (1991-1992) entre outros. .

As informações resultantes da análise a posteriori confrontaram com a análise a priori, permitindo-nos verificar o que foi previsto conforme as escolhas feitas pelo pesquisador e o que realmente foi atingido, a validar ou não a sequência didática. Informações que foram relevantes para tentarmos responder a nossa questão de pesquisa: **Em que termos uma sequência didática constituída de situações que explore o ensino de medida de comprimento a partir de sua grandeza, pode favorecer a noção de medir, medida, unidade e suas conversões para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?**

Para responder tal questão, a análise da sequência está organizada como mencionado anteriormente em três categorias, em que cada uma apresenta uma breve retomada na análise a priori de cada atividade, seguida de registro e fragmentos do experimento, a análise a posteriori, com base nos referenciais apontados anteriormente, e por fim a validação, com pequenas considerações apontando se os objetivos dessas atividades foram atingidos.

Nesta direção não elegemos grupos específicos para serem analisados, destacamos os grupos que durante o experimento e transcrição deste nos permitiram apontar elementos que nos levaram a alcançar o objetivo da pesquisa, que consistiu em legitimar uma sequência didática que favorecesse o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida.

5.1.1 Situação histórica

Nesta categoria nos remetemos à parte da história da matemática inerente ao surgimento de grandezas e medidas, em particular medida de comprimento, em que trabalhamos a atividade 1. Construída para dar suporte às atividades subsequentes.

Nesta atividade os alunos fizeram a leitura, interpretação e discutiram sobre os aspectos históricos dispostos no texto, destacaram excertos e palavras relevantes para o desdobramento das outras atividades subsequentes, conforme havíamos previsto na análise a priori. Contudo, para potencializar essa discussão entre os integrantes do grupo, e grupo e pesquisadora, contamos com o auxílio de perguntas (descrita na subseção anterior) que levou os alunos a participarem ativamente durante o desenvolvimento da atividade, participação que inicialmente, ocorreu de maneira tímida.

As primeiras atitudes dos alunos de pouca participação nos levam a associar essa postura à relação de contrato didático entre professor e aluno, postulado por Brousseau (1986), como um conjunto de regras estabelecidas de forma explícita ou implícita, entre o professor e um aluno ou grupo de alunos. O papel do professor e o papel dos alunos, no sentido de que um espera do outro.

Neste caso, percebemos que os alunos não estavam acostumados a realizarem atividades de matemática, em que a tarefa se referisse à leitura e interpretação de um texto e muito menos discutir sobre este. Esse papel do professor não era o esperado pelo aluno, ou seja, não corresponde ao contrato implícito, conhecido pelo aluno. Diante disso, foi necessário a quebra do contrato, quando agregamos durante a atividade as perguntas para incitar os alunos à discussão. Segundo Brousseau (1986) não se pode prever antecipadamente as

rupturas do contrato, pois a natureza do contrato constitui-se, não somente de regras explícitas, mas também implícitas, com interpretações subjetivas dos sujeitos envolvidos que não são totalmente previsíveis.

Conforme Pais (2008) há três exemplos de ruptura de contrato, a primeira quando o aluno não mostra interesse aos problemas propostos pelo professor, ou não se envolve suficientemente nas atividades propostas. A segunda refere-se ao professor, quando este propõe o problema, para qual a estratégia de solução não é compatível com nível intelectual e cognitivo do aluno. Terceiro é quando professor não assume a sua função de orientador das situações de aprendizagem, exemplificado por Pais:

A situação onde o professor “perde a paciência” e passa a aplicar retaliações ao aluno que se comportou de forma inadequada [...] essa situação torna-se mais grave quando o próprio saber é utilizado pelo professor para aplicar uma punição aos alunos, enfatizando dificuldade epistemológicas fora do nível de comparação dos mesmos. (PAIS, 2008, p. 82).

Nesse contexto, analisamos que a quebra de contrato ocorrida nessa atividade não se remete a nenhuma dessas situações mencionadas pelo autor. Uma vez que os alunos apresentaram interesse em desenvolver a atividade, a professora pesquisadora propôs uma atividade possível de ser solucionada pelos alunos e não houve nenhuma postura dela em prejudicar o aluno. Neste sentido, vislumbramos este caso como uma nova ruptura de contrato implícito, aquela em que aluno não esperava do professor propor situação não prevista em suas práticas docentes.

Em relação aos questionamentos, foi possível obter informações de alguns grupos que nos permitiram observar suas compreensões acerca de grandezas e medidas, quanto à necessidade de medir e como medir. Elencamos alguns discursos, apresentados a seguir:

Daniel (grupo B) - Não, bastava, saber o tamanho do animal, que iria caçar para comer, isso era importante, porque pelo tamanho do animal que eles faziam suas armas para caçar.

Caio (grupo B) – é professora, isso mesmo! Tá escrito logo no início do texto. Eles só tinham, uma ideia grosseira, e assim mediam, pra vê se a arma dava para pegar os animais. Mas, isso não era medir?

Nos discursos acima, observamos que o grupo B após a leitura do texto, expressou uma noção das primeiras ações realizadas pelos povos antigos relacionado à medida, ao responder que os povos só precisavam comparar o tamanho do animal com o tamanho das armas que produziriam para caçar. Mas, em contrapartida Caio do grupo B confirma a

resposta do grupo B, porém, questiona se esse fato se referia ao ato de medir. Vislumbramos a potencialidade da discussão, na fala de Caio, pois até o momento, os alunos não questionaram sobre o que seria medir. Percebemos durante as conversas que esse termo já fazia parte do conhecimento dos alunos. Com isso, questionamos a turma sobre o que eles entendiam pela palavra medir. Apresentamos algumas falas a seguir:

- *Medir é isso que os povos faziam, usavam o palmo, os pés para ver o tamanho das coisas.*
- *Por exemplo, eu posso medir o pé da mesa, basta pegar usar o meu palmo da minha mão para ver quanto dá.*
- *É professora posso também usar a régua para ver quantos centímetros.*
- *Medir é fazer essas coisas professora!*

Para incitá-los sobre seus discursos, perguntamos à turma, já que para medir precisa de algo para realizar essa ação como palmo e régua. Então, o que os povos antigos utilizavam para saber o tamanho de sua presa é assim produzir instrumentos de caça para pega os animais para se alimentarem. Em resposta, afirmaram o olhar (visualização).

De acordo com exposto acima, percebemos que os alunos tinham noção sobre medir, pois associavam ao ato de medir, um instrumento de medida e tamanho das coisas. Essas concepções dos alunos convergem com os estudos de Rodrigues (2007), apontado na primeira seção da nossa pesquisa, em que 60% de seus alunos do 9º ano, apresentaram a noção de medir ao tamanho exato de certas coisas.

Ainda, conforme os discursos anteriores, visualizamos que os alunos expressaram a noção de medir, como uma ação que necessita de algo para efetivá-la, no caso eleger uma unidade, compará-la com o objeto a ser medido para poder expressar um resultado, a medida dos objetos. No entanto, percebemos a necessidade de refundar conceitos acerca de comparação, medir, medida, unidade de medida nas atividades subsequentes. No sentido, de propor situações que possamos explorar a ideia desses conceitos.

Outros discursos em resposta às demais perguntas, que infere a relevância desta atividade.

Isis (grupo M) – interessante, a gente pode medir o comprimento com parte do nosso próprio corpo.

Isis (grupo M) - Engraçado que no nosso antepassado, já usavam matemática, sem saberem. Eles deixaram para nós uma riqueza muito importante, a matemática. Sem ela, não teríamos vários métodos como expressões, números e as operações importante para o ser humano.

Daniel (grupo B) - Engraçado a gente não mede só com régua, fita, etc., com palmo, passos e outros. Mas, temos que ter cuidado com a forma que vou usar para medir. Eu não posso medir o caminho da nossa sala de aula até a diretoria com o palmo, vai ficar muito difícil e melhor usar o passo, é um tamanho mais longo.

André (grupo L) – Mas, não podemos esquecer que esse tipo de medida era complicado, porque as pessoas eram diferentes. Acho dava até briga, não é professora ?! Por isso tiveram de encontrar um padrão, o cúbito.

Bianca (grupo M) - A matemática de ontem ajudou a matemática de hoje.

Conforme os comentários dos grupos, destacando o de Isis (Grupo M) e o de André (grupo L), observamos a compreensão a respeito da parte do corpo como estratégia adotada para medir o comprimento pelos povos antigos, apontada por Isis, de interessante. No entanto, André chama a atenção para essa prática, por sua complexidade, devido as pessoas possuírem tamanhos diferentes. Visualizamos claramente que eles compreenderam a relevância dessa estratégia, mas também perceberam que não era suficiente, por isso a busca por uma medida padrão.

Quanto à afirmação de André, aproveitamos para comentar sobre a palavra tamanho, que precisa ter cuidado a se referir, pois a ela podemos referir diferentes grandezas, como comprimento, área e outras. Para corroborar com a discussão solicitamos que consultassem o dicionário, a respeito do significado da palavra tamanho.

Nós havíamos compreendido a que os alunos se referiam, ao falar “tamanho”, no entanto abrimos essa discussão para esclarecer que dependendo do objeto ou coisa, neste caso o comprimento do palmo, podemos atribuir uma característica. Exemplificamos a mesa da sala de aula, que o tamanho, poderia ser considerado o comprimento lateral da parte superior, a altura (outro tipo de comprimento). A área no que tange à superfície da mesa, ou até mesmo o “peso” da mesa. Assim, preferimos que cada objeto pode lhe ser atribuído diferentes característica, a isto denominamos de grandeza. Neste sentido, cada objeto pode possuir diferentes grandezas. A respeito disso Bellemain e Lima (2010) chamam a atenção para o uso do termo “tamanho”, em atividades de comparação de grandezas. Em suas concepções, nós professores devemos informar sobre qual grandeza estamos nos referindo, para não gerar obstáculos didáticos.

Outro ponto importante que observamos foi no discurso do Daniel (grupo B), os conhecimentos anteriores sobre medir, medida, ao se referir aos instrumentos como régua, fita, além de perceber junto a seu grupo, para cada situação a ser medida, tem uma unidade de medida conveniente para medi-la. Fatos relevantes para observarmos mais à frente com as

atividades subsequentes, no sentido da compreensão dos alunos em relação às unidades de medida de comprimento.

Por outro lado, não podemos deixar de mencionar a consciência que as alunas do grupo M têm sobre a importância da matemática na vida das pessoas. Referimo-nos a estes excertos a práticas com matemática, relevância social que possui. Compreendemos na fala de Bianca (grupo M) que a matemática esteve presente em nossas vidas, desde as ações dos povos primitivos (matemática de ontem) até os dias atuais (hoje). O texto reporta esse discurso, apresentando a evolução das primeiras estratégias engendradas para medir até a oficialização do sistema métrico decimal.

Nossa expectativa com esta atividade refere-se também à percepção dos alunos em relação quanto à gênese das grandezas e medidas, em particular a de comprimento. Além de conhecerem por meio da história, pesos e medidas, as primeiras ações de medir, a necessidade de medir, práticas que fazem parte da vida da humanidade. Expectativas que foram apontadas durante o experimento com as respostas dos grupos às perguntas potencializadoras, realizadas pela professora pesquisadora. Prova disto está nos comentários apontados anteriormente.

Diante do exposto, acreditamos que os objetivos desta atividade foram atingidos, pois denotamos nos discursos dos grupos, excertos e palavras do texto que suscitaram desdobramentos nas atividades subsequentes, como a ideia que a turma possui em torno do conceito de medir. Também, principalmente em relação a práticas dos povos antigos de comparar inicialmente, estabelecendo a relação de *maior que* e *menor que*, para depois ter primeira ação de medir, como medir, a necessidade de se estabelecer medidas padronizadas entre outros. Além de permanecerem alguns questionamentos para serem explorados nas atividades posteriores, como ato de medir, explorar situações de comparação sem ação de medir, algo que os nômades faziam para produzirem suas armas, comparando com o tamanho de suas presas.

5.1.2 Situação de comparação

Nesta categoria reportamo-nos à atividade que explora a noção de comprimento no domínio da grandeza, evidenciando a passagem do quadro geométrico para o quadro da grandeza, apoiado no modelo para comprimento de Brito (2003) e inspirado no modelo didático de Douady e Perrin-Glorian (1989). Nesta direção, trabalhamos a atividade 2 da sequência propondo situações comparação de comprimento, estabelecendo a relação de maior, menor ou igual.

Nossas expectativas com esta atividade tangeram a percepção por parte dos alunos, que se pode comparar comprimentos de objetos sem o uso de números, além de compreenderem que independente da forma das linhas, seus comprimentos podem ser os mesmos, assim levando os alunos a perceberem a ideia da grandeza comprimento como uma propriedade do objeto. Por outro lado, em relação às atitudes dos alunos, foi esperada uma participação ativa no desenvolvimento da atividade, de modo que pudessem agir e tomar decisões em grupos, apontarem estratégias para a solução dos problemas propostos sem a intervenção do pesquisador.

Para a análise desta atividade apresentamos no quadro 7 com uma síntese constituída pelas três questões da atividade, as estratégias mais adotadas e por fim o quantitativo de grupos que chegaram à solução correta em cada questão.

Quadro 7– Síntese dos registros da atividade 2

Atividade 2	Estratégia mais adotada	Quantitativo de grupos que acertaram as questões
1. Comparar os comprimentos de dois caminhos com linhas retas	Sobreposição de palito de picolé	4
2. Comparar os comprimentos de dois caminhos, um com linha reta e curva e outro somente com linha reta	Sobreposição de canudo de plástico e palito de picolé	1
3. Comparar os comprimentos de dois caminhos com linhas distintas (reta e curva)	Sobreposição de barbante	3

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

Na primeira questão, conforme o quadro 8, podemos observar que os alunos não se apoiaram na visualização para resolver o problema proposto, como era esperado. Atitude justificada, por se tratar de caminhos com medidas de comprimento próximas, 6,0 e 6,5 cm. Os grupos procuraram fazer a sobreposição com uso de objetos da caixa de ferramentas. Entre os objetos, os mais utilizados para mediar a comparação entre os caminhos foi o palito de picolé. Objetos que prevíamos que seriam utilizados pelos alunos, uma vez que o percurso a ser sobreposto era constituído de linhas retas.

Quanto ao resultado, dos seis grupos, quatro chegaram à resposta correta. No entanto, esta questão poderia levar os alunos ao erro, caso a sobreposição não fosse realizada com cautela, devido à diferença entre os comprimentos dos dois caminhos ser de 0,5 cm. Uma diferença bem pequena, que poderia fazer com os alunos respondessem a alternativa *c*.

Afirmando que ambos os caminhos têm o mesmo comprimento. Situação que justifica a resposta do grupo L ao assinalar a alternativa *c*.

O grupo D também não chegou à resposta correta. Utilizou a caneta hidrocor para refazer os caminhos e o palito de picolé para a sobreposição. Observamos que ao refazerem os caminhos não partiram exatamente do local que representava a escola, levando assim ao erro.

Neste caso, observamos que os grupos adotaram a mesma estratégia, no caso sobreposição e, utilizaram o mesmo objeto como medianeiro, no entanto algumas manipulações foram diferentes. Essas ações dos grupos, nos leva a inferir que as interações que cada um dos grupos estabelece com o *milieu*, ou até mesmo entre cada integrante do grupo, podem obter reações diferentes. Numa situação de ação as interações entre os alunos e destes com o *milieu* estão centralizadas na tomada de decisões, ainda que os alunos dialoguem entre si, os conhecimentos dos componentes desse grupo fazem parte do *milieu* de cada um, assegurando, assim, retroações do aluno sobre o *milieu*. (ALMOULOU 2007).

Já na segunda questão, esperávamos que os grupos encontrassem estratégia para realizar a comparação entre dois caminhos que representavam linhas retas e curvas, com intenção de que os alunos percebessem que não apenas segmento de reta possui comprimento. Confrontando com umas das dificuldades conceituais apontadas no levantamento bibliográfico em que “alunos acham que somente segmentos de reta têm comprimento” (PERROT et al. 1998, apud BRITO, 2003, p. 18).

Nessa questão, prevíamos que os grupos adotassem o barbante ou linha de crochê como medianeiro para realizarem a comparação entre os caminhos evidenciados, pois de acordo com Brito (2003), Barbosa (2007) e Teixeira (2010) esses objetos são mais adequados para sobrepor caminhos com linhas curvas. Entretanto, de acordo com o quadro 17, dos seis apenas um fez uso do barbante, no caso o grupo D.

Contudo, vale salientar que para o grupo D chegar à solução teve alguns conflitos quanto à estratégia. Sua primeira estratégia não foi a sobreposição de barbante, e sim a visualização seguida da sobreposição de objetos com objetos da caixa de ferramentas, de forma retilínea. Este conflito estava também previsto, em razão dos comprimentos dos caminhos serem de tamanhos bem próximos, sendo o caminho com linha curva medindo 11,5 cm e linha reta com 12cm.

A respeito da terceira questão, esperávamos, a priori, que a os grupos tivessem um pouco de dificuldade, por se tratar de figuras distintas, porém de mesmo comprimento. Em relação ao objeto a ser utilizado como medianeiro, esperávamos que os grupos adotassem o barbante com base no que discutido na questão, ficando claro para a turma, segundo o

discurso de alguns colegas, que estes objetos seriam mais adequados para a situação envolvendo caminhos representados por linhas curvas e retas.

De acordo com o quadro 17, percebemos que grande parte da turma adotou a estratégia da sobreposição com barbante e compreendeu a sua função nas situações de comparação, haja vista que apenas um grupo utilizou um objeto representativo de segmento de reta como mediano. No entanto, dos seis grupos apenas três chegaram à solução correta. Assinalaram a alternativa *c*, considerando que ambos os caminhos tinham o mesmo comprimento. Os três utilizaram o barbante para fazer sobreposição dos caminhos e em seguida esticaram os barbantes para realizar a comparação, porém os integrantes do grupo M fizeram uma segunda sobreposição: esticaram bem o barbante e marcaram o seu comprimento sobre o palito de picolé, em seguida compararam os comprimentos, percebendo que ambos possuíam o mesmo tamanho.

Em relação aos três que não chegaram à alternativa correta, destacamos o grupo D ao sobrepor o barbante em ambos os caminhos, em seguida realizou a comparação destes. Acreditamos que o motivo que os levaram ao erro, foi não ter esticado direito o barbante, ou não terem emparelhado os dois comprimentos do barbante partindo das extremidades.

Conforme exposto no quadro 17, percebemos como se fez latente o uso de objetos que se referem à representação de segmento de reta, tanto na primeira questão, por conta de serem caminhos que representam linhas retas, como na segunda, embora uma das figuras apresentar linha curva. Esse tipo de situação, segundo apontado por Teixeira (2004) citando Câmara dos Santos (1999) nas análises prévias, é rotineiro para verificar o comprimento de determinado objeto, geralmente alunos usam régua para verificar o comprimento, ou objetos que se remetem a esse instrumento.

Fato corroborado nos discursos de alguns grupos, após ouvirem a explicitação do grupo D, em relação ao processo que realizaram para chegar à solução correta. Elencamos algumas falas a seguir:

Daniel (grupo B) – Nossa professora! Nem pensamos em usar o barbante, porque já estamos acostumados medir com régua, usar caneta, lápis para saber o tamanho das coisas.

Manu (Grupo F) – é o Arthur (grupo D) tem razão, na parte das curvas usar palito de picolé, canudo ou barra de madeira, ficava difícil de calcular certinho o tamanho do caminho. Agora já sabemos que em caminhos que contém curvas podemos usar o barbante para facilitar e depois é só esticar bem ele para ver qual o caminho mais curto.

Andrey (grupo L) - Então, professora podemos usar o barbante ou qualquer objeto parecido, como um cordão, até essa linha de crochê para facilitar a nossa vida quando temos desenhos com curvas.

Algo que também estava previsto, em virtude de ser apontado nas análises prévias em relação aos objetos da caixa de ferramentas mais utilizados pelos alunos em outro experimento como de Brito (2003).

Por outro lado, visualizamos que esta situação assenta-se no contrato didático implícito que subjaz o pensamento dos alunos, ou seja, já está internalizado por eles, devido a suas práticas somente com situações de medida de comprimento voltadas para objetos que representam segmentos. Para tanto, acreditamos que ao promover esses tipos de situações envolvendo linhas curvas, poderemos dar início a uma quebra de contrato. Segundo Brousseau (2008), a quebra de contrato é importante para que possamos possibilitar ao aluno uma aprendizagem do conhecimento em jogo.

Outro fato que observamos refere-se às ações de cada grupo, os integrantes trabalhando em conjunto, discutindo sobre a escolha dos objetos a serem usados. Principalmente no momento inicial da atividade, quando o pesquisador sugeriu que caso fosse necessário poderiam utilizar a caixa de ferramentas. Sem ao menos se deterem atenciosamente nas questões, alguns integrantes direcionaram-se à caixa, e perceberam que alguns dos objetos escolhidos não seriam interessantes para auxiliá-los na resolução. Mas essa percepção se deu dialogando com os demais integrantes que já haviam lido a questão. De acordo com Brousseau (2008), esse comportamento dos alunos alude a um dos momentos importantes do processo de aprendizagem, que corresponde à situação de ação. Nessa direção, Almouloud discorre:

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. (AMOULOUD, 2007, p. 37).

Conforme mencionado anteriormente por Almouloud (2007), percebemos que os integrantes agiram quando foram em busca dos objetos, mas também refletiram dialogando com os demais integrantes do grupo e ao lerem atenciosamente a questão (retroação do *milieu*). Isso ocorreu sem que interviéssemos.

Outro ponto importante subentendido nos discursos dos alunos refere-se à dialética da formulação e validação, justamente quando os grupos trocam informação sobre o que fizeram para chegar à solução, e a mudança de postura e pensamento que o grupo D provoca aos demais grupos ao justificar o motivo de sua escolha, a qual levou para a solução correta. Esse movimento, de acordo com Brousseau (2008) ocorre porque o conhecimento apresenta-se em

diferentes níveis de funcionalidade, quando se tem em jogo a interação do sujeito com *milieu*. Diante disso espera-se que esse conhecimento elaborado pelo aluno seja diferente em cada momento durante o processo de aprendizagem. Momentos que o autor postula em situações de ação (ações e decisões), formulação, validação e institucionalização, já mencionada neste estudo. Cada situação pode fazer com que o sujeito progrida em seu processo de aprendizagem do conhecimento em jogo.

Quanto à institucionalização, realizamos primeiramente junto à turma uma revisão geral sobre as estratégias adotadas e soluções encontradas abarcando as três questões trabalhadas. Em seguida, com base nos discursos que eclodiram da turma sobre a comparação entre comprimento dos caminhos e a noção do conceito de comprimento enquanto grandeza, procuramos aproximar as concepções que partiram de alguns grupos para prosseguirmos com institucionalização de tal conceito. Elencamos algumas falas, mostradas a seguir:

Isis (grupo M): Professora, nós achávamos (Ela e o restante do grupo) que os comprimentos desses caminhos não poderiam ser iguais (mesmo tamanho), porque são diferentes (estava se referindo a forma das linhas). Por isso tivemos que fazer a comparação umas três vezes, usamos o barbante para ver o comprimento e depois marcamos no palito de picolé para podermos comparar e ter certeza que eram do mesmo tamanho.

Andrey (grupo L): Professora, então, quer dizer que posso ter desenhos de várias formas e ainda podem ter o mesmo comprimento. Foi por isso que erramos, porque como outro caminho tinha uma curva na esquina da passagem jardim e nós usamos o canudo, não conseguimos ver o comprimento direito.

Daniel (grupo B): é professora, só conseguimos acertar a questão (referindo a 3ª) por que usamos o barbante. Se fosse usar régua ia ficar complicado.

Mila (grupo P): Pior foi agente, que nem usamos o material da caixa ferramenta para medir o tamanho dos caminhos. Pensamos que por ser um caminho reto que ainda tava um pouco torta (quis dizer inclinado) e outro uma linha curva que aparentava ser menor, acabamos marcando a resposta errada.

Isis (grupo M): Então, podemos chamar de comprimento ou calcular o comprimento de todas as coisas em que posso medir usando palito de picolé, régua até o barbante para ver seu tamanho.

Andrey (grupo L): no caso, o comprimento do meu pé. Posso dizer professora que altura da porta é comprimento, pois posso pegar a régua, ou barbante pra ver sua medida.

De acordo com exposto, tanto nos discursos a cima, como nos anteriores e ações desenvolvidas durante esta atividade, inferimos que conseguimos atingir o objetivo desta atividade, principalmente ao refletir como foi o caso, dos grupos M e L, ao referirem que linhas diferentes, ou formas diferentes relativas à grandeza comprimento, podem possuir o mesmo comprimento. Outro ponto, destacado no levantamento bibliográfico, se refere às situações

exploradas comumente em sala de aula, ao se tratar de comprimento, com uso de objetos como régua ou outros de mesmo direcionamento. Com esta atividade, possibilitamos aos alunos, a ampliação de usos de outros objetos, principalmente para realizarem comparação envolvendo linhas curvas. Algo apontado por Silva, J. (2011), pouco explorado nos livros didáticos.

No entanto, percebemos que no discurso de Isis e de Andrey, ainda persistia um conflito em relação à grandeza e medida de grandeza, ao preferirem medir usando régua, palito de picolé, ou barbante. Conflito que foi explorado nas atividades subsequentes, ao trabalharmos a articulação do domínio da grandeza comprimento para domínio de medida. Pois a função do barbante como medianeiro consiste em realizar comparação entre comprimentos, em que não podem ser feitos de forma direta, se manterá nas próximas atividades com uma adaptação, este só servirá para mediar o processo de medição em objetos em que não podem ser realizadas esse processo de forma direta. Enquanto que o palito de picolé por exemplo, terá uma função mais efetiva, no caso de unidade de medida, pois estaremos em outro domínio do comprimento, no caso de medida. Este domínio fará parte das atividades posteriores, envolvendo situações de medida, na subseção seguinte.

Em contrapartida, visualizamos nos discursos desses grupos, especialmente de Isis (grupo M) e Andrey (L) aproximações quanto à noção de conceito de comprimento enquanto grandeza, este como propriedade do objeto geométrico em jogo, no caso linhas retas e curvas. Esses discursos foram relevantes para institucionalização do comprimento enquanto grandeza (detalhes na subseção 4.2.2), principalmente, quando Andrey refere-se ao comprimento do pé e a altura da porta.

5.1.3 Situação de medida

Nesta categoria nos referimos às atividades que explora a noção de comprimento no domínio da medida, evidenciando a passagem do quadro da grandeza para o quadro numérico, inspirado no modelo didático de Douady e Perrin-Glorian (1989) e adaptado para comprimento. Apoiamo-nos nos estudos de Caraça (1951) para tratar da quantificação da grandeza, ou seja, trabalhar a medida da grandeza, em particular a medida de comprimento e suas unidades de medidas. Esta última, contamos com noção de comprimento defendido por Lebesgue citado por Palaro (2006).

Para o nosso estudo estendemos esta categoria até a constituição do sistema métrico decimal. Nesta direção, trabalhamos as atividades de 3 até 7, mais a atividade complementar da atividade 3 da sequência didática.

Nas atividades 3 e complementar procuramos abordar a noção de comprimento enquanto medida, propondo uma situação de medida que explorasse a passagem do quadro da grandeza para o quadro numérico. Oportunizando aos alunos a construção da noção de medida empregando unidades não padronizadas e padronizadas não oficiais para alcançarem o padrão oficial (Sistema métrico decimal).

Nossas expectativas com essas atividades, que os alunos pudessem perceber que comparar grandezas (comprimentos) estabelecendo a relação de maior, menor ou igual é importante, no entanto para situações no contexto social é necessário medir, escolhendo uma unidade para expressar um valor, ou seja, a quantificação da grandeza comprimento. Além de perceber por meio da escolha de unidade de medida não padronizada, a necessidade de padronização. Esperamos também, que os alunos construam a ideia de unidade, ao utilizar diversos objetos, em que cada objeto escolhido por eles possa suscitar a existência de uma ou mais unidades. Além de perceber que a unidade a ser adotada depende do que será medido e quanto menor o objeto para representar a unidade, mais próximo estarão da medida do comprimento do objeto e da noção de medida e medir.

Para análise dessas atividades trouxemos quadros com as estratégias adotadas e os resultados encontrados pelos grupos sobre a altura do aluno referência, tanto com uso das medidas antropométricas, quanto os objetos da caixa de ferramentas e fragmentos de relatos do experimento relevante para inferirmos o alcance dos objetivos dessas atividades.

No início do desenvolvimento da atividade 3 observamos a percepção por parte dos grupos da necessidade medir, ao perceberem que só realizar a comparação entre as alturas do aluno não era interessante, pois aguçou a curiosidade dos grupos em saber a medida da altura dos alunos, ou seja, procuram ir além, de uma comparação sem ação de medir. Para Caraça (1951), é importante fazermos a comparação, no entanto não é suficiente, precisamos saber quanto é maior, quanto é menor, neste caso precisamos medir.

Essa percepção denotada pela turma nos leva a configurar que eles saem de um domínio da noção de comprimento (grandeza) e entra em outro, a medida deste comprimento, ou seja, passam a quantificar essa grandeza (quantificação da altura). Trajetória retratada por Douady e Perrin- Glorian (1989), como sendo, a passagem do quadro da grandeza para o quadro numérico. Este último caracterizado pelas autoras, pela medida da grandeza, elegendo

unidades de medida para chegar a um resultado, este expresso por um valor numérico seguido da unidade.

Não se limitando à comparação sem o uso de número, os alunos procuram meios para medir, adotando assim, no primeiro momento partes do corpo como estratégias para quantificar o comprimento do barbante (altura do aluno referência), trabalhando inicialmente medidas informais ou não padrão. Para depois trabalhar, no segundo momento, medidas de objetos da caixa de ferramentas, estas considerados formais ou padrões não oficiais. Conforme mostra o quadro 8.

Quadro 8- Registros da solução de cada grupo – 1º e 2º momentos/ Atividade 3

Grupo	1º momento		2º momento	
	Estratégia (parte do corpo)	Resultado	Estratégia (objetos da caixa de ferramentas)	Resultado
B	Pé, palma e cúbito	5 pés, 2 palmas; 3 cúbitos e 2 palmas	Tira de papel cartão, barras de madeira e cubos ¹⁸	14 tiras de papel, 2 barras e 2 cubos
F	Palmo e dedo	8 palmos e 4 dedos	Canudo de plástico e palito de picolé	6 canudos; 12 palitos
L	Pé, palmo e dedo	5 pés, 1 palmo e 2 dedos	Canudo de plástico, barra e cubo de madeira	5 canudos, 5 barras e 1 cubo
M	Palmo e dedo	8 palmos (Isis); 7 palmos e 4 dedos (Bianca)	Canudo de plástico, palito de picolé e tira de papel cartão	5 canudos, 1 palito e 1 tira de papel cartão
P	Jarda	2 jardas	Canudo de plástico	5 canudos e meio

Fonte: Elaborado pela Autora (2016)

Neste quadro observamos que o palmo foi a medida antropométrica mais utilizada entre os grupos para mensurar a altura do aluno referência, enquanto que no segundo momento o objeto que mais se destacou foi o canudo de plástico. Essas duas estratégias utilizadas pela turma aproxima-se um pouco da história dos pesos e medidas, discutidos na primeira atividade desta sequência, situação que havia previsto para essa atividade.

Outro ponto que constatamos refere-se como os grupos reforçaram seus pensamentos em relação à necessidade de se eleger uma medida padrão, e que usar partes do corpo não é ideal para o processo de medição, pois as pessoas possuem partes do corpos diferentes e, conseqüentemente terão como resultado medidas diferentes. Visualizamos essa compreensão dos alunos em seus registros, em virtude da maioria do grupo apresentar mais de um resultado para expressar a medida da altura do aluno referência. Por exemplo, o grupo M. que realizou

¹⁸Cubo – Vale salientar que esse objeto corresponde a uma barra de madeira de 1cm de aresta, e seu papel para as atividades refere-se somente ao uso do comprimento de sua aresta, por ter todas as arestas com aproximadamente de mesmo comprimento, não influenciará no modo que os alunos possam manipular.

duas medições adotando a mesma medida antropométrica, no caso o palmo, mas de integrantes diferentes, obtendo como resultado medidas diferentes, 8 palmos (Isis); 7 palmos e 4 dedos juntos (Bianca).

Quanto ao uso de objetos da caixa de ferramentas como unidade de medida, destacamos o processo desenvolvido pelo grupo F. Este encontrou dois resultados diferentes adotando objetos diferentes, sendo o único grupo que a medida do comprimento da altura do aluno referência encontrado correspondeu ao número de vezes a quantidade de um único objeto. Ou seja, em que os objetos eleitos como unidade de medida não faltaram ou não excederam ao comprimento do barbante no decorrer da sobreposição. Mas, como apontado no quadro 8, a maioria dos grupos precisou usar mais de um objeto para determinar a altura do aluno referência, assim como ocorreu no primeiro momento. Contudo, para turma usar os objetos da caixa de ferramentas, foi melhor do que usar as partes do corpo, pois segundo eles, os objetos pelo menos tinham um tamanho “regular”, no sentido de possuírem o mesmo tamanho. Conforme o discurso de um dos integrantes do grupo F.

Manu (grupo F): Professora, achamos melhor usar o palito de picolé ou canudo de plástico, por serem do mesmo tamanho, não é como o palmo meu é diferente do palmo da minha colega, os canudos são do mesmo tamanho, a não ser que a gente corte. Com esses objetos conseguimos chegar a um resultado próximo entre os grupos.

No entanto, observamos ao compararmos os canudos entre si, que os tamanhos (comprimento) de alguns deles apresentavam uma pequena diferença, que variava de 1 a 4 cm. Diferença que pode ter influenciado no resultado de alguns grupos, que utilizaram esse mesmo objeto. Esta variável não estava prevista, pois ao comprarmos o pacote de canudos de plásticos, acreditávamos que pelo menos deveriam possuir o mesmo tamanho. Essa variável pode ocorrer, em se tratando do uso de objetos concretos, principalmente ao usá-los justapostos pelas extremidades.

A respeito da medida de objetos físicos, Brousseau e Brousseau (1991-92) em seus estudos sobre a complexidade do conceito de medida, postula que medição de objetos concretos permite determinar um número ou intervalo que se tenha certa confiança. Ele chama a atenção para esse tipo de tarefa, pois pode parecer um erro entre as medidas de objetos concretos, ainda que seja mínimo, como foi o caso desses canudos ou de qualquer outro objeto da caixa de ferramentas.

No primeiro momento verificamos que todos os grupos ao expressarem o valor da altura do aluno referência, não conseguiram utilizar apenas uma parte do corpo, como unidade

de medida, mas sim duas ou mais, devido a que uma medida adotada não cabia o número de vezes no comprimento do barbante. Levando assim os alunos a utilizarem medidas antropométricas menores, como o caso do grupo L (5 pés, 1 palmo e 2 dedos). Configurando, outro problema enfrentado pelos povos antigos, que se remetia à subdivisão das medidas antropométricas adotadas por eles, como o caso dos egípcios, ao designarem que uma palma correspondia a quatro dígitos (dedos) e 1 cúbito correspondia a 7 palmas. (DILKE, 1988).

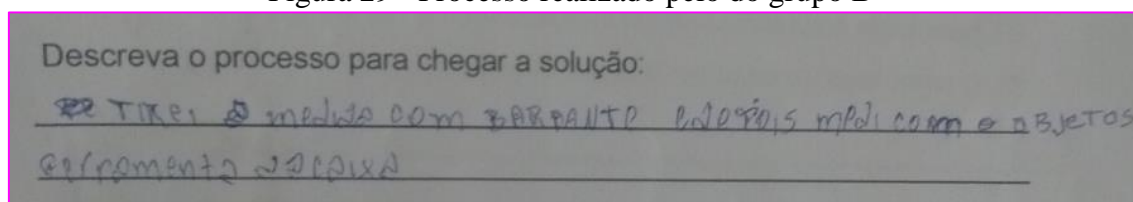
No entanto, os grupos não perceberam essa subdivisão, algo que era esperado com o desenvolvimento dessa atividade, apenas procuraram resolver seus problemas. Nesse caso encontrar alguma forma de preencher os espaços que estavam sobrando, tendo como solução as medidas de menor comprimento.

A mesma situação ocorreu no segundo momento com os objetos da caixa de ferramentas, embora os grupos utilizassem uma variedade de objetos para encontrar a medida da altura, não associaram a subdivisão de unidades de medida, ou seja, não procuraram verificar, por exemplo, em um canudo de plástico cabia quantos palitos de picolés.

Já na atividade complementar procuramos explorar a medição dos objetos de sala de aula, utilizando os objetos da caixa de ferramentas, a relação de subdivisão entre as unidades medidas não padronizadas e padronizadas não oficial. Fato não ocorrido na atividade 3.

Nessa atividade a maioria dos grupos utilizou o barbante para representar o comprimento da lousa (um dos objetos da sala de aula a ser medido), uma vez que, medir diretamente nesse objeto ficava um pouco complicado, pois como sobrepôr um dos objetos da caixa de ferramentas para verificar o número de vezes este objeto caberia no comprimento da lousa. Neste caso, os grupos adotaram o barbante como medianeiro assim como na atividade 2, porém em contexto diferente, mediador em situação de comparação com ação de medir (usando número), ou seja, no contexto de medida, enquanto que na atividade 2 o contexto se remetia à grandeza. Essa situação é perceptível quando analisamos as produções dos alunos em relação ao processo por eles realizado, conforme a figura 29.

Figura 29 - Processo realizado pelo do grupo B



Fonte: Autora (2016)

De acordo com a figura 29, inferimos que esse grupo adotou o barbante somente para representar o comprimento da lousa. Este instrumento não foi suficiente para determinar a

quantificação desta grandeza, com isso utilizaram outro objeto da caixa de ferramentas para sobrepor-lo, expressando assim, a medida de comprimento do barbante (comprimento da lousa) em 15 palitos de picolé, estes justapostos pelas extremidades e rigorosamente alinhados pelo grupo. Em relação a outros objetos da sala, os grupos puderam sobrepor diretamente outros objetos da caixa de ferramentas, sem necessariamente utilizar o barbante para facilitar o processo de medição.

Outro fato que observamos referente à relação do uso do barbante refere-se à discussão entre os grupos no momento de seus registros suas explicações para cada estratégia adotada. O grupo F adotou o barbante como unidade medida para o processo de medição, e não como mediano para facilitar esse processo. Essa estratégia gerou um conflito (detalhes no relato do experimento), principalmente quando os outros grupos questionam sobre o resultado encontrado, ou seja, o valor da medida de comprimento dos objetos a serem medidos.

A mesma situação ocorreu na segunda questão em relação à medida da jarda utilizando outra parte do corpo da mesma para medi-la. Neste caso, o mais adequado seria verificar o comprimento da jarda de um dos alunos, utilizando o barbante para representá-lo (mediano), em seguida utilizar o palmo ou outra medida antropométrica de comprimento menor que a jarda, para verificar o número de vezes da medida antropométrica de menor comprimento cabe na de maior comprimento.

Nessas três situações ocorridas percebemos a compreensão dos grupos em relação à grandeza comprimento e sua medida. Visualizamos essa compreensão nos discursos de alguns grupos no decorrer desta atividade. Trouxemos dois trechos destacados no relato do experimento (subseção 4.2.4), referente à noção dos alunos em relação a esses conceitos, quando se referem à função do barbante nesta atividade:

Grupo M: Apenas sabemos que pode ser maior ou menor comparando com outros objetos a serem medidos. No caso, com certeza o pedaço do barbante que as meninas usaram para medir a lousa será maior que o pedaço do barbante que mediram a mesa, mas não dá pra saber sua medida, é preciso usar outro objeto menor para verificar quantas vezes esse objeto cobre o tamanho do barbante. Podem usar o canudo ou o palito de picolé.

Andrey (grupo L): Por isso que é importante o barbante ou fita crepe professora, pois com esses materiais podemos ver o tamanho da jarda e depois podemos medir com o palmo da mesma pessoa.

Para os grupos ficou claro, que o uso do barbante como objeto para medir outro objeto não é adequado, ele serve apenas para facilitar o processo de medida. Segundo Caraça (1951)

para medir é necessário seguir três passos: eleger uma unidade de medida, comparar esta com a grandeza a ser medida, desde que ambas sejam grandezas de mesma natureza e por fim expressar um resultado por um número racional, positivo, seguido da unidade medida adotada. Neste caso, a unidade foi representada pelas medidas antropométricas e pelos objetos da caixa de ferramentas utilizada pelos grupos.

Quanto à percepção por parte da turma no processo de comparação com ação de medir, tanto em relação às medidas antropométricas como em relação aos objetos da caixa de ferramentas, destacamos fragmentos do experimento que nos levou à ideia do processo de subdivisão de unidades de medida.

Entre as medidas antropométricas alguns grupos conseguiram relacionar a medida do palmo à medida do dedo, informando que 1 palmo correspondia aproximadamente a 12 dedos juntos, conforme o trecho do discurso de Daniel do grupo B: *Professora, se 1 palmo vale 3 palmas e 1 palma vale 4 dedos. Cada 1 palma é igual 4 dedos, mas 1 palmo tem 3 palmas, a gente agora só multiplica $3 \times 4 = 12$. $1 \text{ palmo} = 4 + 4 + 4 = 12$.*

Entre os objetos da caixa de ferramentas, os alunos também conseguiram comparar esses objetos com a ação de medir, enxergando assim, uma regularidade entre as medidas de comprimento desses objetos. Algo que era esperado com esta atividade complementar. Conforme observado nos discursos dos grupos B e M.

Daniel (grupo B): Cada barra de madeira corresponde a 3 cubos, deu certinho quando colocamos os cubos em cima das barras. Se 1 canudo vale 8 barras e cada barra vale 3 cubos é só multiplicar $8 \times 3 = 24$ cubos
Bianca (grupo M): Professora, usamos os cubinhos, colocamos um juntinho do outro bem abaixo do canudo, e vimos que 1 canudo corresponde aproximadamente 24 cubinhos.

Transcrição da validação do grupo B referente aos objetos da caixa de ferramentas mencionado no discurso de Daniel:

Considerando C- canudo; bm – barra de madeira e c – cubo de madeira, temos:

$1C = 8 \text{ bm}$ e $1 \text{ bm} = 3 \text{ c}$, então, $1C = 8 (3c)$. Portanto, $1C = (8.3) \text{ c} \Rightarrow 1C = 24 \text{ c}$

Além do processo de subdivisão apontado pelos grupos, visualizamos também a conceitualização de medida, como resultado expresso de um processo de medição, constituído por um valor numérico seguido da unidade adotada. Outro fato apontado principalmente nos trechos referente aos objetos da caixa de ferramentas refere-se à escolha dos objetos como unidade de medida, pois dependendo da unidade adotada, o resultado será diferente, mas o

comprimento do objeto continua sendo o mesmo. A respeito da escolha de unidade, Caraça afirma que:

Uma mesma grandeza tem, portanto, tantas medidas quantas as unidades com que a medição se faça. Se, com a unidade u , uma grandeza tem medida m , com outra unidade $u' = u : k$ a mesma grandeza tem medida $m' = m \cdot k$. (CARAÇA, 1951, p. 31).

Esse processo de validação realizado por esses grupos faz referência à existência da relação de três características da complexidade conceitual de medida defendida por Brousseau e Brousseau (1991-92), a função da medida (4), o valor da medida (5) e dupla número e unidade que expressa a medida (6), pois, no momento que os grupos realizam esse processo de medição, ao adotarem como unidade de medida esses diferentes objetos da caixa de ferramentas para medir o outro objeto (canudo), teremos diferentes resultados. Esse fato nos leva inferir indícios de função medida (aplicação do conjunto mensurável). Esses diferentes resultados remetem ao valor da medida, que simultaneamente é expresso por um número (imagem) seguido de unidade.

Com essa atividade apontamos que essas medidas encontradas para o comprimento do canudo, diz respeito à classe de equivalência de todos os objetos utilizados para medir o comprimento do canudo, pois, ainda que as unidades adotadas sejam diferentes o comprimento do objeto permanece o mesmo.

Nessas duas atividades, a situação de ação se deu tanto no momento da comparação entre alturas dos três alunos, passando pelas escolhas das unidades adotadas por cada grupo, quanto no momento em que os grupos realizaram o processo de medição dos objetos de sala de aula, das medidas antropométricas e os objetos da caixa de ferramentas. Enquanto que a formulação consolidou-se por meio dos registros de cada grupo organizado no quadro e apresentado na lousa. Em relação à validação, esta ficou clara no momento que os grupos defenderam seus respectivos resultados, pois todos expressavam um valor numérico seguido de uma unidade, não padrão ou padrão não oficial. Isto, além do momento em que os grupos expuseram as comparações com ação de medir entre as medidas e objetos da caixa de ferramentas. Já a institucionalização ocorreu no final de cada atividade (descrita na subseção 4.2.2).

Nas atividades 4 e 5 procuramos oportunizar a compreensão da medida padrão oficial o metro, seus submúltiplos e múltiplos por meio da construção de instrumento de medida padrão da turma com auxílio de barras de madeira da escala de cuisenaire. Para essas

atividades nos apoiamos na noção de medida de comprimento defendida por Lebesgue, por meio da subdivisão de segmentos.

Para análise das atividades 4 e 5 trouxemos fragmentos do experimento dos grupos que mais se destacaram durante o desenvolvimento destas, que nos levou a alcançar os objetivos¹⁹ das respectivas atividades. Apresentamos o quadro 9 com registro dos grupos referentes à construção da medida padrão da turma.

Quadro 9 - Registro sobre as barras utilizadas por cada grupo

Grupo	Cor das barras	Resultado
L	Verde-claro	33 barras verdes aproximadamente
B	Laranja	10 barras laranja
F	Barra branca (cubo) / laranja	10 barras laranja ou 100 barras brancas (cubos)
M	Laranja e azul	8 barras laranja e 2 azuis
D	Amarela e verde-claro	19 barras amarelas e 1 verde-claro
P	Lilás	25 barras lilás

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

Com base no quadro anterior, observamos que alguns grupos conseguiram adotar uma cor de barra, enquanto que outros utilizaram mais de uma barra, e apenas o grupo L adotou um tipo de barra que o levou ao resultado aproximado, pois a atividade informava que deveriam escolher apenas barras de mesma cor (mesmo tamanho).

Conforme explicitamos na subseção 4.2.5, a tira correspondia ao comprimento de 1m (100cm), com isso as únicas barras que caberiam o número de vezes inteiramente seriam as barras cujo o comprimento fosse divisor de 100, neste caso, as barras com comprimento de 1, 2, 4, 5 e 10 centímetros. As demais barrinhas chegariam ao um resultado aproximado, maior que 100 ou menor que 100.

Alguns grupos acharam melhor usar uma unidade menor para complementar o tamanho da tira, que estava faltando, como o caso dos grupos D e M. No entanto, entre os grupos, o que mais se aproximou do que esperávamos nesta atividade foi o grupo F, ao dizer durante o seu registro que a tira correspondia a 10 barras laranja ou 100 brancas.

De acordo com a explicitação desse grupo (detalhe na seção 4.2.5) observamos que os componentes tomaram como base a atividade anterior (complementar) para criarem a relação

¹⁹ Objetivo da atividade 4 – construir um instrumento de medida padrão da turma; reconhecer alguns instrumentos de medida padrão oficial (fita métrica, régua e trena); compreender a constituição dos seus submúltiplos.

Objetivo da atividade 5 – compreender a necessidade de unidades de medidas maiores que o metro e (re) conhecer os múltiplos do metro.

de subdivisão entre a barra laranja (10 cm) e a barra branca ou cubo (1cm). Transcrição da visão matemática realizada pelo grupo F:

Considerando Tm: tira métrica; bl: barra laranja e c: barra branca ou cubo, temos:

$1bl = 10 c$ e $1Tm = 10 bl$, então, $1Tm = 10(10 c)$. Logo, $1Tm = (10.10) c \Rightarrow 1Tm = 100 c$

A partir da estratégia adotada pelo grupo F conseguimos visualizar um conhecimento por parte deste grupo em relação à transformação de unidades de medida, e o melhor, despertou-se nos outros grupos a relação que poderiam fazer com a barra de menor comprimento. Tendo assim, a turma a percepção de quanto menor a unidade de medida mais próximo se chega à medida de comprimento do objeto a ser medido. Outro ponto refletido pela turma, em um processo de medição, utilizar-se uma unidade de medida para verificar quantas vezes essa cabe no objeto a ser medido, mas não ocorrendo o número de vezes inteiramente, ou seja, se sobrar ou faltar um pedaço se chegar a medida é necessário procurar subdividir a unidade atual em um número de vezes, até que a nova unidade caiba um número de vezes inteiramente no objeto a ser medido. Isso foi o que aconteceu com os outros grupos quando tomaram a decisão de verificar quantas vezes a barra branca, utilizada pelo grupo F, caberia nas barras por eles adotada.

Esse processo refere-se à subdivisão de segmentos anunciada por Lebesgue citado por Palaro (2006). O autor faz alusão que ocorre quando a noção de comprimento e número por meio do processo de subdivisão de segmento, mencionado na subseção 2.3, ao comparar dois segmentos, considerando AB como segmento a ser medido e U o segmento para medir, denominado unitário, ou seja, a unidade de medida. O autor verificou que U não cabe o número de vezes inteiramente no segmento AB, ou seja, o comprimento deste segmento não se comporta múltiplo inteiro de U, tendo como resultado dessa comparação que a medida de comprimento do segmento AB correspondente a um valor maior que $3U$ e menor que $4U$. Nesse caso, precisando subdividir o segmento U em dez partes iguais a U_1 , resultando $U_1 = \frac{1}{10} U$ e assim por diante.

Nesse contexto, visualizamos também as mesmas características da complexidade de medida postulado por Brousseau e Brousseau (1991-92), apontadas na atividade complementar, mais complexidade (7) referente à medida como valor não exato, remete-se ao valor representado por um intervalo que possui certa confiança, como destacado por Palaro em relação ao comprimento do segmento AB: $3U < AB < 4U$. Esse fato reforça as grandezas contínuas, com a continuidade da quantificação de uma grandeza, neste caso, o comprimento,

procurando determinar uma unidade de medida menor para que caiba um número de vezes em unidade maior.

Na atividade 5 esperávamos que os grupos encontrassem uma boa estratégia para determinar a distância entre a sala de aula e a quadra de esporte da escola, e percebessem a importância de se ter unidades de medidas maiores que o metro, além de terem a ideia de suas extensões.

Para análise desta atividade trouxemos fragmentos do experimento referente ao momento em que os alunos chegaram ao resultado da medida da distância entre as duas localizações, e também no momento em que visualizamos nos discursos de alguns alunos a relevância desta atividade, no que concerne à percepção da dimensão de unidades superiores ao metro. Destacamos o resultado da medida da distância no quadro 10, a seguir:

Quadro 8 - Medida da distância entre sala de aula e quadra de esporte da escola

Grupo	Unidade de medida	Resultado
F	Metro e centímetro	94 m e 50 cm
B e M	Metro	94,5 m
L	Centímetro	9450 cm

Fonte: Elaborado pela autora (2016)

Conforme este quadro, observamos que apenas o grupo F não realizou a transformação de unidades de medida, expressando o resultado da medida da distância em uma única unidade de medida. Não estamos aqui para verificar quem errou ou acertou, pois, neste caso não houve erro, os componentes desse grupo apenas apresentaram o resultado do modo que compreenderam durante as atividades.

Isso mostra que o grupo ainda apresenta dificuldade em realizar as conversões de unidades. Por outro lado, denotamos que os três grupos conseguiram realizar as transformações de unidades de medida, cada grupo adotou melhor estratégia para se chegar ao resultado. O grupo L procurou transformar as unidades da maior (m) para inferior (cm), fazendo uso da multiplicação. Enquanto os grupos F e M partiram da unidade menor (cm) para se chegar a maior (m) efetuando o processo da divisão. Situação que havíamos previsto, pois para chegar a esses resultados os alunos precisariam mobilizar conhecimento matemático como multiplicação, divisão e fração.

Em ambas as atividades identificamos as situações defendidas por Brousseau (2008), visualizamos a situação de ação no momento em grupos que elegeram as barras de madeiras para auxiliá-los na construção da tira métrica, principalmente quando um dos grupos toma a decisão de substituir uma barra de um determinado tamanho por outra, porém não abandonando totalmente a barra anterior, e sim para dar agilidade na sua resolução. Situação

de ação permite que o aluno reflita sobre o seu resultado e possa ajustá-lo, caso seja necessário, sem que o professor interfira, graças à retroação do *milieu*. (Almouloud, 2007).

Essa situação também foi identificada na atividade 5, quando os alunos tomam a decisão de adotar o barbante como medianeiro para facilitar a medição da distância entre a escola e quadra de esporte, além do momento da segunda estratégia, referente de que maneira medir o comprimento do barbante, ao adotarem as réguas como extremidades para esticarem o barbante até o momento que conseguem chegar à medida da distância entre essas duas localizações.

Quanto à formulação foi o momento em que os grupos expuseram suas soluções, oralmente ou escrita em ambas as atividades. Na atividade 4 se deu durante os registros no quadro de cada grupo explicitando como chegou a tal resultado. Já na atividade 5 ocorreu no momento em que a turma realizou a formulação todos juntos, ao apresentarem a medida da distância e explicarem como chegaram a tal resultado. A respeito dessa situação, Almouloud, afirma que:

Nesta fase de uma situação adidática, o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. [...] É o momento em o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada (ALMOULOU, 2007, p. 38).

Após essa situação de formulação seguimos para validação, identificada na atividade 4, quando o grupo F expõe sua estratégia e convence os outros grupos, de ser a melhor estratégia para construção da tira métrica. E o melhor, além dos grupos serem convencidos, não abandonaram suas estratégias, apenas fizeram uma adaptação para se certificarem o quanto corresponderiam aos seus respectivos resultados adotando a barra branca, a mesma usada pelo grupo F, para verificar quantas dessa barra caberia na barra por eles adotada inicialmente, para poder chegar ao resultado final. Por exemplo: o grupo L utilizou a barra verde, resultando inicialmente a medida de 33 barras verdes-claros. Como uma 1 barra verde-claro equivale 3 barras brancas, logo chegou a operação de $33 \times 3 = 99$ barras brancas, se aproximou de 100, a medida da tira métrica. Para Almouloud, a validação:

É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento do interlocutor. De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações

ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição (ALMOULOU, 2007 p.39).

Em relação à atividade 5 a validação se deu no momento que os grupos apresentaram a o valor da distância adotando uma única unidade de medida. Nesse momento, também identificamos que a turma havia percebido a extensão de um quilômetro, pois alguns alunos tinham o conhecimento que 1km correspondia a mil metros, mas não compreendiam a dimensão desse espaço. A partir do desenvolvimento da atividade 5 os alunos puderam visualizar a necessidade de unidade de medidas maiores. Fatores determinantes que nos levaram a falar da existência de outras unidades de medida de comprimento, e assim seguir com a institucionalização dessas unidades e, conseqüentemente o sistema métrico decimal.

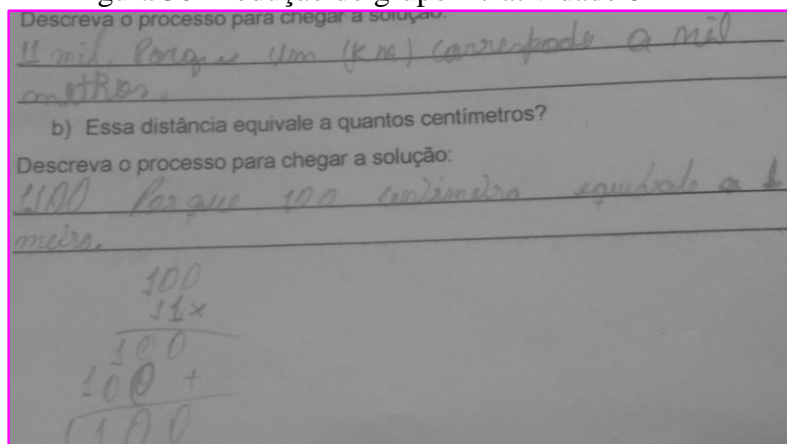
Nas atividades 7 e 8 procuramos observar a compreensão adquirida durante o desenvolvimento das atividades anteriores, sobre identificar as unidades mais adequadas para cada situação e transformação dessas unidades de medida.

Na atividade observamos que grupos associaram uma ou até duas unidades adequadas para cada situação, mostrando sua compreensão em relação às unidades e extensões de comprimento de objetos e distância, e que se pode atribuir uma determinada medida, conforme sua dimensão da situação em jogo. Entretanto, nas justificativas escreveram algo que não era esperado, ou seja, que não condizia com o solicitado. Durante os registros na lousa percebemos que alguns alunos não haviam entendido o sentido da palavra *justificativa*, embora, tivéssemos explicado. Mas também, percebemos durante as explicações dos grupos, que houve uma justificativa plausível para uma das situações colocadas. Como mostramos no discurso de Manu: *Professora colocamos hectômetro, por ele ser a mesma medida que 100 m, e eu e Bianca moramos perto da feira, e daqui até lá, é quase a mesma distância da nossa sala até a quadra de educação física.*

A justificativa da Manu foi muito interessante, pois visualizamos o resultado positivo que o desenvolvimento da atividade 5 pode provocar na solução do grupo. Percebemos que os componentes valeram-se da estimativa, ao refletirem sobre a distância por eles encontrada da sala de aula até a quadra, ao compararem com a distância da escola até suas casas. Vale salientar que, esta situação é meio subjetiva, pois poderíamos ter alunos que morassem próximo da escola, mas também muito distante.

Já na atividade 8 esperávamos esperamos que os alunos pudessem praticar as convenções de unidades de medida, quilômetro, metro e centímetro, fazendo a relação entre elas, com base no desenvolvimento da atividade 5. Para análise desta atividade trouxemos a produção de um dos grupos conforme mostra a figura 30:

Figura 30-Produção do grupo L / atividade 8



Fonte: Autora (2016)

Essa figura mostra os conhecimentos que os alunos mobilizaram para chegarem à solução, como multiplicação e clareza que 1km corresponde a 1000 m, que os levam à resposta de 11000 cm. Isso nos leva a inferir a compreensão que este grupo, assim como outros, tiveram durante o desenvolvimento da atividade, ao discursarem suas soluções com segurança, principalmente ao se referirem a centímetro, metro e quilômetro.

Outro fator que indica essa compreensão é a resposta do item b, os integrantes não partem do quilômetro para chegar ao centímetro, eles aproveitam a resposta anterior que estava em metro e transformam para centímetro. Esse processo também foi realizado por outros grupos. Vale ressaltar que dos 6 grupos, cinco conseguiram realizar as atividades. Inferimos que isso se deva um pouco pela ausência e falta de participação em algumas atividades, principalmente na complementar, e na atividade 5, ou até mesmo pela dificuldade de algum conhecimento matemático que não identificamos durante o experimento, como fração, multiplicação ou divisão.

Nessas duas atividades observamos durante as ações dos grupos, que além de reforçarem a noção que eles tinham em relação a essas unidades, puderam vivenciar situações que os levaram à percepção dessas unidades quanto às suas extensões ou dimensões, algo que a turma não tinha noção ao iniciarmos a aplicação desta sequência.

Diante do exposto, acreditamos que os objetivos das atividades desta categoria foram atingidos, pois notamos nos discursos, registros e produções dos grupos, indicativos que nos levam a inferir, a partir do confrontar entre as análises a priori e a posteriori, a compreensão da turma da noção de medir, necessidade de eleger uma unidade, como exposto na análise da atividade 3. Pois, ambos os momentos os grupos elegeram uma forma para chegar à medida

da altura do aluno referência, e esta por sua vez, constituída de um valor numérico seguida da unidade adotada.

Esta noção de medida foi evidenciada na atividade complementar, com as unidades não padronizadas e padronizadas não oficial, que fez os alunos refletirem e discutirem da necessidade de padronização. Tal padronização, que emergiu com a atividade 4, levando os alunos à compreensão da construção do metro e de seus múltiplos. Além da descoberta da medida do aluno referência com instrumento oficial, a fita métrica.

Com o desenvolvimento da atividade 5, os alunos conseguiram associar os resultados encontrados com a ideia da dimensão de quilômetro, ainda que de forma indireta, pois ficaria um pouco complexo propor uma atividade que levassem os alunos a medirem diretamente 1km, a partir da relação que conheciam que 1km vale 1000m. Pois verificaram se 1000 m corresponde a 1 km, então, 94,5m está longe de se atingir 1000 m. Os alunos conjecturaram que para chegar a 1 km era necessário ter dez vezes a distância da sala de aula até quadra. Essa atividade foi relevante para que os percebessem unidades maiores que o metro e refletissem sobre a extensão que corresponde a um quilômetro.

Nessas atividades, o resultado aproximado da medida da altura do aluno referência era secundário, o primordial era o processo para chegar a tal medida e proporcionar uma situação de conflito, para que os alunos percebessem a necessidade de eleger unidades de medida para poder determinar a medida do que se pretende medir. Dessa maneira, utilizando objetos de comprimento maiores ou menores, desde que criassem uma relação do número de vezes que um objeto menor poderia caber no maior.

Outro ponto relevante faz referência à percepção de quanto menor o objeto utilizado como unidade de medida, mais próximo da medida de comprimento do que se pretende medir chegará e relação de subdivisão entre os comprimentos dos objetos da caixa de ferramentas e os comprimentos correspondentes às medidas antropométricas vistos na atividade complementar. Levando à turma a ideia de equivalência entre as unidades de medidas, percebendo ainda que de forma modesta, algumas características da complexidade do conceito em torno da medida. Pois com essas atividades a turma foi observando que independente da unidade de medida que se eleja, o resultado da medida do objeto a ser medido será diferente.

Desse modo, supomos que as atividades dessa categoria, junto com as outras duas, nos levaram a alcançar o objetivo de nossa pesquisa, permitindo-nos a validação desta sequência didática para o ensino de grandezas e medidas, em particular medida de comprimento para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho acerca de grandeza e medida, em particular medida de comprimento, principiou no decorrer de minha prática docente, ao perceber as dificuldades dos discentes a respeito deste tema, apontadas do 6º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio. Principalmente em relação à medida de comprimento e às conversões de suas unidades. As dificuldades observadas também nas conversas em pares, durante eventos acadêmicos, como seminários, congressos entre outros. Assim, buscamos realizar uma investigação em estudos no campo da Educação Matemática, que nos indicasse caminhos para tratar esses fenômenos didáticos, de modo a aprofundá-los e apontar sugestões para nossas práticas docentes.

Realizamos, assim, um levantamento bibliográfico em dissertações e teses acerca de pesquisas correlatas grandezas e medidas, em particular medida comprimento, em que encontramos estudos que abordavam o comprimento, em duas perspectivas diferentes: uma com estudos que evidenciam comprimento como grandeza geométrica, por meio das classes de equivalências realizando a articulação entre os quadros geométrico e o da grandeza e realizando a comparação de comprimento sem ação de medir; outra com estudos que evidenciam o comprimento como medida, explorando situação com ação de medir, medida, e transformações de unidade de comprimento. Este último vai ao encontro de nossas inquietações, sendo apontado pela maioria dos autores desta perspectiva, como uma dificuldade apresentada pelos alunos, tanto no ensino fundamental como no médio.

A partir dessa revisão de estudo, identificamos fenômenos didáticos atrelados à noção de comprimento, referente ao domínio da grandeza, em que se associam o comprimento somente para segmento de reta, e não para linhas curvas, em que só pode realizar comparações entre comprimentos de objetos com ações de medir. Essas discussões nos levaram a investigar em que termos uma sequência didática constituída de situações que explore o ensino de medida de comprimento a partir de sua grandeza, pode favorecer a noção de medir, medida, unidades e suas conversões para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?

Para tentar responder a essa questão, vislumbramos no modelo didático que aborda a distinção e articulação entre os quadros geométrico, da grandeza e o numérico, uma oportunidade de tratar a medida de comprimento a partir de sua grandeza. Assim, explorando essas discussões, não de modo separado, e sim mostrando que uma depende da outra e que para o aluno compreender a medida de comprimento e as transformações de suas unidades é relevante conhecer o comprimento como grandeza.

Diante disso, construímos uma sequência didática com base nos pressupostos da engenharia didática, que nos permitiu em suas duas primeiras fases realizarmos um estudo aprofundado acerca dos fenômenos mencionados anteriormente, para justamente eleger as variáveis didáticas a ser exploradas nessa sequência. Isto, de modo que pudéssemos descrever e prever comportamento dos alunos perante o desenvolvimento das atividades. E assim, alcançar o objetivo da pesquisa, que versa em legitimar uma sequência didática que favoreça o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida.

Esta sequência foi composta de oito atividades organizadas de acordo com modelo de ensino da Teoria das Situações Didáticas - TSD, com intenção de favorecer a aprendizagem do conhecimento em jogo, de modo que os alunos pudessem ter o papel ativo nesse processo, como protagonista da construção de sua aprendizagem. Essas atividades apresentaram-se em situações histórica, de comparação e de medida e foram trabalhadas com 25 alunos de uma turma do 6º ano do ensino fundamental durante sete encontros.

Conforme as produções, registros e discursos observados durante o experimento, constatamos na primeira atividade uma dificuldade enfrentada por parte dos alunos em relação à leitura e interpretação do texto sobre pesos e medidas. Porém, depois, conversando com eles percebemos que não haviam vivenciado esse tipo de abordagem. Outro ponto relevante foi o conflito a respeito da noção de medir entre os grupos, destacada pela maioria da turma a ideia de associada a instrumentos de medida para encontrar o tamanho de objetos ou coisa. Salientamos que o uso do contexto histórico não se limitou em apenas relatar fatos sobre pesos e medidas, mas sim promover discussões e aprimorar a relação do aluno com conteúdos matemáticos, para responder alguns porquês. Pois desta forma o aluno poderá visualizar as contribuições e a importância do papel da Matemática em sua vida como um processo de produção humana presente para servi-lo.

Na segunda atividade, referente à passagem do quadro geométrico para o da grandeza, constatamos que os alunos realmente estão acostumados a relacionar instrumentos que fazem referência à régua para comparar comprimentos, pois dos seis grupos, apenas um utilizou o barbante como medianeiro, ao realizarem a comparação entre os caminhos de linhas distintas. No entanto, identificamos uma luz no pensamento desses alunos, da noção de grandeza, em particular comprimento, quando um dos grupos adotou o uso do barbante como medianeiro e socializou com os demais a estratégia adotada para chegar à solução correta. Fato que resultou na mudança de comportamento dos outros grupos, ao compreenderem que linhas distintas podem ter o mesmo comprimento, e que este não se remete apenas a segmento de reta, mas também a curvas.

Quanto às atividades referentes à situação de medida articulando passagem do quadro da grandeza para o quadro numérico, observamos que a maior parte da turma conseguiu perceber a diferença entre a grandeza e a medida dessa grandeza. Principalmente ao vivenciarem o problema referente à altura do aluno referência, pois por meio desta atividade compreenderam a noção de comprimento como grandeza e a necessidade de quantificá-la.

Um dos fatos a destacar refere-se à função atribuída ao barbante pelo grupo F, e este questionado pelos demais grupos em relação à sua estratégia adotada, e convencido pelos outros grupos, reflete que o barbante serve para comparar comprimentos sem ação de medir, serve como facilitador para ação de medir. Constatamos a compreensão nesse momento pela maioria dos alunos da distinção entre a grandeza comprimento e sua medida, ou seja, a quantificação dessa grandeza, elegendo um objeto como unidade de medida.

Outro ponto relevante refere-se à percepção por parte dos alunos, de quanto menor o objeto utilizado como unidade de medida, mais próximo da medida de comprimento do que se pretende medir chegará. Assim como também em relação à subdivisão entre os comprimentos, ocorrida na atividade complementar com o auxílio das medidas não padronizadas e padronizadas não oficiais. Isto levou para a turma a ideia de equivalência entre as unidades de medidas, percebendo ainda que de forma modesta algumas características da complexidade do conceito em torno da medida defendida por Brousseau e Brousseau (1991-92). Com esta atividade a turma foi observando que independente da unidade que se eleja, o resultado da medida do objeto a ser medido será diferente. Esse fato confirma-se na atividade 5, quando os alunos apresentam três resultados diferentes para a medida da distância, mas no final a turma compreende, que embora sejam distintos, o comprimento é o mesmo.

Esta situação foi essencial para a constituição do sistema métrico decimal e a relevância da conversão das unidades de medida. Por exemplo, 4m, 400cm ou 0,004 km refere-se ao um mesmo comprimento, e quanto maior a unidade a ser adotada menor será o valor numérico desta medida.

Diante do exposto, acreditamos que os objetivos pontuais foram alcançados. Em consequência o objetivo desta pesquisa, mencionado no início dessas considerações, também foi atingido, validando assim uma sequência didática que explora o comprimento no domínio da grandeza e da medida. Com isso, propomos esta sequência como um produto educacional para ser trabalhado com alunos, não somente do 6º ano do Ensino Fundamental, como também para qualquer ano do Ensino Fundamental, com as devidas adequações em relação ao nível escolar da turma.

Vale ressaltar, entretanto, que deveríamos ter explorado mais o texto, se tivéssemos solicitado aos alunos que pesquisassem as palavras e excertos por eles destacados, não somente no dicionário, mas também levassem para suas casas para pesquisarem na internet, algo que poderia ter sido realizado na própria escola, caso o laboratório de informática desta instituição de ensino estivesse disponível. Outro fato que constatamos alude aos objetos da caixa de ferramentas, pois não nos atentamos para o comprimento do canudo, que apresentaram pequenas diferenças entre seus tamanhos, mas isso foi um fator que influenciou em alguns resultados encontrados pelos grupos.

De modo geral, acreditamos que esta sequência didática proporcionou aos alunos uma experiência diferente da vivida geralmente por eles em sala de aula. Com esses encontros eles puderam discutir, refletir sobre suas ações e seus resultados encontrados, sobretudo dos colegas de outros grupos. Vivenciando situações que permitiram dar sentido aos conceitos referentes a grandezas e medidas, como noção de grandeza, de medir, medida, comprimento, transformação de unidades medidas. Além de permitir ao aluno sentir-se valorizado, como o ator principal na construção do seu conhecimento, e melhor, ser participante na construção do conhecimento de seu colega, fazendo-o refletir, sobre suas tomadas de decisões, ações, sem que necessariamente o professor intervisse.

A partir desta pesquisa, refletimos sobre o modo como abordamos os conteúdos para os nossos alunos, e que somos eternos aprendizes, principalmente quando buscamos meios tanto no âmbito histórico-epistemológico, como no didático, para planejar e organizar situações de ensino, que favoreçam ao aluno o desejo de resolver um problema proposto, despertando seu interesse em agir, refletir, conjecturar, indo em busca do conhecimento em jogo.

Não é algo fácil, no entanto, pois o professor precisa dispor de elementos que permita a tal proposta, como tempo, investigação sobre o assunto a ser abordado e os sujeitos envolvidos no processo e apoio da instituição a qual realiza seu trabalho docente, entre outros.

Para tanto, inferimos que a sequência didática proposta nesse trabalho pode contribuir para a prática docente acerca do ensino de grandezas e medidas, com foco em medida de comprimento. Esperamos que essa possa contribuir para novos estudos no âmbito da Educação Matemática, uma vez que trata da complexidade em torno do conceito de medida, assunto dificilmente abordado em sala de aulas pelos professores, apontando uma possível investigação sobre as concepções de professores que ensinam Matemática acerca desse tema. Outro indicativo, trabalhar a medida de comprimento com auxílio da escala de cuisenaire para

evidenciar a constituição dos números racionais, mostrando assim a distinção entre as grandezas discretas e contínuas.

Para estudos futuros pensamos em discussões com formação de professores no percurso de estudo e pesquisa sobre como as ideias aqui apresentadas poderiam compor momentos de estudos em classes ordinárias.

REFERÊNCIAS

- ABBONDATI, M. **Um ambiente virtual de aprendizagem para o ensino de tópicos de Matemática do Ensino Fundamental**. 2013. 183 f. Dissertação. (Mestrado profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.
- ALARCÃO, I. **Professor reflexivo em uma escola reflexiva**. 8ª ed. São Paulo, Cortez, 2011.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. 2ª edição. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- _____; COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd**. Revista Eletrônica de Educação Matemática. V 3.6, p. 62-77, UFSC. Florianópolis, 2008.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean (org.); FIGUEIREDO, Maria José (tradução). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: instituto Piaget, 1996. P.193 – 217.
- BACKENDORF, V. R. **Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5º ano do Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2010. 188 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.
- BARBOSA, R. P. **Efeitos de visualização em atividades de comparação de comprimento de linhas abertas**. 2007. 318 f. Tese (Doutorado em Educação) - UFPE. Recife, 2007.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Fortaleza: SBM, 1997.
- BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um Estudo da Noção de Grandeza e Implicações no Ensino Fundamental e Médio**. Natal: SBHMat, 2002.
- _____. **Grandezas e medidas**. In: CARVALHO, J. B. P. (coord.); Coleção explorando o ensino volume17. Matemática- Ensino Fundamental . Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2010.
- BIANCHINI, E. **Matemática 6º ano**. São Paulo: Moderna, 2006.
- BICUDO, M. A. V.; GARNICA. A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- BOLDRIN, M. I. **Barrinhas de Cuisenaire: introdução à construção dos fatos fundamentais da adição**. São Paulo, 2009. <https://pedagogiafmu.files.wordpress.com/2010/09/barrinhas-de-cuisenaire>. Acesso em 25 de agosto de 2016.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo, Edgar Bucher, 1981.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A. F. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental.** 2003. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - UFPE. Recife, 2003.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática.** 1996. 84 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1996.

BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N. Le poindsd'un recipient: Etude des problemes du mesurage em CM. **Grand N**, nº 50. pp. 65 -87, 1991-1992.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, Jean (org.); FIGUEIREDO, Maria José (tradução). **Didáctica das matemáticas.** Lisboa: instituto Piaget, 1996. P.35 – 113.

_____. **Fondements et méthodes em didactique des mathematiques.** Recherchehs em didactique des mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2 , p. 33 - 115, 1986.

_____. **Introdução ao estudo da teoria das situações:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática.** Lisboa: Gradiva, 1951.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez na escola zero.** São Paulo: Cortez, 2010.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Les grandeurs em mathématiques au collèg parte II Mathématisations. **Petit x**. Nº 59. p. 43 -76, 2002.

CHAMORRO, M. C. Aproximacion a la medida de magnitudes em la Enseñanza de Primaria. Uno: **Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 3, p. 31 – 53, 1995.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un Processus D'Apprentissage du Concept D'Aire de Surface Plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

DILKE, A. W. O. **Mathematics and measurement:** Reading the past. (1988).

ESTEBAN, M. T.; ZACCUR, E. A pesquisa como eixo de formação docente. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas - SP, Editora Unicamp, 2004.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010.

MACHADO, N. J. **Medindo comprimentos**. São Paulo, Scipione, 1987.

Mapa Google. Disponível em: www.google.com.br/maps. Acesso em 06 de julho de 2016.

MENDES, I. A.; BRITO, A. J.; MIGUEL, A.; CARVALHO, D. L. **História da Matemática em atividades didáticas**. Natal/RN: Edufrn. 2007.

MOURA, A. R. L. **A medida e a criança pré-escolar**. 1995. 221 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1995.

NUNES, J. M. V. **História da Matemática e aprendizagem significativa da área do círculo: uma experiência de ensino-aprendizagem**. 2007. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará. Belém, 2007.

PALARO, L. A. **A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue**. 2006. 340 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PASSOS, C. C. M.; TEIXEIRA, P. J. M. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **ZETETIKÉ** – FE/ Unicamp, V.21, n. 39. Campinas –São Paulo, 2013.

PEREZ, M. **Grandezas e Medidas: representação sociais de professores do ensino fundamental**. 2008. 202 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008.

POMMER, W. M. **Brousseau e a ideia de Situação Didática**. Seminário de Ensino de Matemática/ FEUSP, 2008.

RODRIGUES, M. S. **O ensino de medidas e grandezas através de uma abordagem investigatória**. 2007. 203 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – UFRN. Natal, 2007.

RUSSELL, B. The Meaning of Magnitude. In: **The Principles of Mathematics**. New York: W.W. Norton & Company, 1967, cap. XIX, p. 157 – 169. Seduc-Pa. Disponível em: www.seduc.pa.gov.br. Acesso em 16 de agosto de 2016.

SILVA, C. C. R. **Construção de conceitos de grandezas e medidas nos anos iniciais: Comprimento, massa e capacidade**. 2011. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de Brasília - UnB, Brasília, 2011.

SILVA, I. **História dos Pesos e Medidas**. São Carlos, EdUFSCar, 2004.

SILVA, J. V. G. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2011. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – UFPE. Recife, 2011.

TEIXEIRA, S. G. **Concepções de alunos de Pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro**. 2004. f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2004.

TORRES, C. M.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. T. **Física: Ciências e Tecnologia**. Volume 1. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

ZUIN, E. S. L. **Por uma Nova Arithmetica: O sistema métrico decimal como um saber escolar em Portugal e no Brasil Oitocentista**. 2007. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

_____. **Dos antigos pesos e medidas ao sistema métrico decimal**. Belém SBHMT, 2009. (Coleção histórica da matemática para professores, 16).

APÊNDICES

Apêndice A – Recorte do texto histórico

Os primeiros caminhos para medir

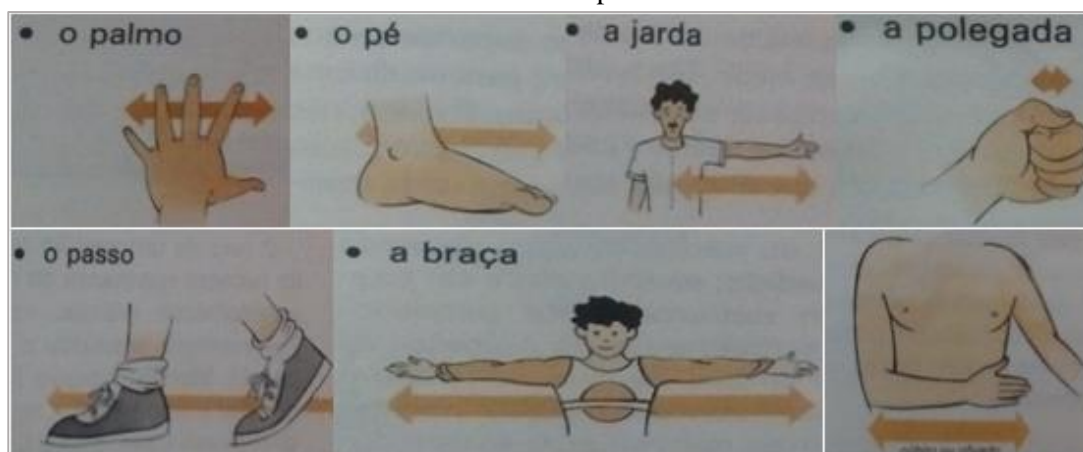
Desde a Idade da Pedra há muito tempo atrás, não sabemos ao certo quando se iniciou este período. O homem vivia de caça de animais selvagens, de frutas e de raízes que colhia. Era nômade e quando o lugar não oferecia mais o seu sustento, partia em busca de outra morada, deslocava-se de um lugar para outro em busca de alimentos e de um clima que favorecesse a sua sobrevivência. Deste modo, não necessitava de um sistema de medida elaborado, só precisava de noções rústicas como “maior que”, “menor que”, desenvolvendo instintivamente o processo de comparação para escolha de seus alimentos e para produzir seus instrumentos de caça de acordo com o tamanho de sua presa.



A partir do momento que o homem percebeu que poderia prover seu próprio sustento por meio da agricultura e criação de animais, procurou um local fixo para cultivar a terra e construir suas casas. Deixou de ser nômade, necessitando criar meios de realizar medições.

Foi então, que o homem começou a utilizar parte do corpo para medir comprimento, como: mãos, pés, dedos, polegadas, medida dos braços abertos (braças), o passo, a jarda, palmo e antebraço.

Medidas Antropométricas



Fonte: Medindo comprimento (Machado, 1987, p. 12 e 13)

Surgindo assim, as primeiras unidades de medidas denominadas medidas antropométricas (padrão de referência a dimensão do próprio corpo). Porém, com o passar do tempo e com o crescimento do comércio e das civilizações, essas medidas foram provocando algumas confusões, pois como as partes do corpo das pessoas variavam de uma para outra, logo apresentavam medidas diferentes. Assim, as civilizações procuraram resolver esse problema. Os egípcios foram os primeiros que tentaram solucionar tal problema, fixando um padrão único. Utilizaram barra de pedra com o mesmo comprimento para representar o cúbito padrão (côvado) que consistia na distância do cotovelo até a ponta do dedo médio do faraó, correspondendo aproximadamente 52,3 centímetros.

Cúbito-padrão



Fonte: Dilke (1988, p. 23)

As medidas menores que o cúbito, foram representados por palmas (a largura da palma da mão excluindo o polegar) e por dígito (largura do dedo). As medidas maiores que o cúbito eram representadas por cordas que continham nós igualmente espaçados. Essas cordas esticadas eram utilizadas para medir grandes distâncias, pois não era conveniente medir grandes extensões usando a barra de pedra (cúbito padrão). Havia relações entre essas medidas como: o espaço entre dois nós corresponde a 5 cúbitos, 1 cúbito equivale a 7 palmas, 1 palma corresponde a 4 dígitos (dedos). Da mesma forma que ocorreu com os egípcios, outras civilizações criaram suas próprias unidades de medidas.

No entanto, mesmo com padronização do cúbito adotado pelas civilizações, ainda havia necessidade de se uniformizar uma medida que atendesse a todos os povos. Durante muito tempo ocorreram algumas tentativas de padronização universal de medida.

Na França por volta de 1790, um grupo de cientistas constituído por astrônomo, matemáticos, diplomatas entre outros se reuniram para criar uma medida padrão com base na natureza de forma fixa que fosse facilmente determinado e que tivesse acesso ao mundo todo. Foi então, que os cientistas fixaram que a *décima milionésima parte de um quarto meridiano terrestre* seria adotada como unidade de medida linear denominada *metro*, localizado entre o Equador e Polo Norte. Com isso, foi construído os padrões de comprimento - o *metro*, representado por uma barra de platina pura, e a massa - o quilograma, representado por um cilindro de platina. Para os submúltiplos do metro foram determinados os prefixos latinos: déci, centi, milli e para os múltiplos, prefixos gregos: deca, hecto, kilo. Assim, foi criado o Sistema métrico decimal. No Brasil, esse sistema passou a ser usado oficialmente a partir de 1938.

Apêndice B – Documento de autorização

Ilma. Sra. Diretora da E. E. E. Fundamental e Médio Lucy Corrêa de Araújo
Cristina Brandão

Pedido de Autorização para Pesquisa

Prezada senhora,

Eu, Nazaré do Socorro Moraes da Silva, professora de matemática e servidora pública da Secretária do Estado de Educação do Pará, venho por meio desta, solicitar a V.S.^a autorização para desenvolver minha pesquisa na presente instituição. Informo que a proposta de pesquisa se configura com o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino de medida de comprimento com alunos do 6º ano do ensino fundamental.

A referida pesquisa faz parte de uma das exigências do Programa de Mestrado Profissional em Docência em Educação Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará para conclusão do referido curso. A pesquisa tem como objetivo possibilitar o ensino de medida de comprimento por meio de um conjunto de atividades, partindo da situação fundamental de grandeza. A participação dos alunos será de extrema importância para que possamos verificar a potencialidade desta sequência, a qual poderá contribuir para prática docente de professores de Matemática da Educação Básica, no sentido de favorecer aos discentes a construção de conhecimento acerca de grandeza e medida de comprimento.

Salientamos que os dados a serem coletados seguirão os protocolos de pesquisa e, no relatório final, serão utilizados pseudônimos dos sujeitos envolvidos.

Atenciosamente,

Nazaré do Socorro Moraes da Silva

R.G. 2510602

Belém, 13 de outubro de 2016.