



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

SORAIA DAS NEVES BARROS

**Ensino de Função: sua compreensão e possibilidades de ação a partir de
múltiplos olhares**

Belém-PA

2017

SORAIA DAS NEVES BARROS

Ensino de Função: sua compreensão e possibilidades de ação a partir de múltiplos olhares

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada à Banca Examinadora, como exigência para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientador: **Prof. Dr. Neivaldo Oliveira Silva**

Belém-PA

2017

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA**

Barros, Soraia das Neves. 1972 –

Ensino de função: sua compreensão e possibilidades de ação a partir de múltiplos olhares / Soraia das Neves Barros, orientador Prof. Dr. Neivaldo Oliveira Silva – 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Prático de ensino. I. Silva, Neivaldo Oliveira, orient. II. Título.

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus que escreveu e cumpriu, realizando sonhos muito maiores que os meus;

A vida por me proporcionar por meio de minhas experiências desde a infância a chegar ao lugar que cheguei e querer melhorar cada vez mais, além de ter me permitido conhecer pessoas que jamais teria oportunidade de conhecer, meus colegas e amigos que cativei no mestrado;

A minha mãe Dona Maria do Carmo e meu pai Domingos Barros, pelas lições de fé e perseverança ao longo da minha vida e formação. Que Deus lhes iluminem todos os dias de suas vidas;

Ao meu esposo, companheiro, meu ombro, meu amor Manoel Barros, pelo incentivo a ingressar no curso e pela paciência e compreensão, sempre me dando força para ir em frente e chegar até aqui;

As minhas filhas Karen Mayara, Manuelle e Mayra, pelo incentivo e compreensão nos momentos em que estive ausente;

Ao professor Doutor Neivaldo Oliveira Silva, meu orientador e colaborador, que com dedicação e paciência sempre compreendeu minhas limitações, contribuindo significativamente para o meu crescimento acadêmico;

A professora Doutora Terezinha Gonçalves Valim, pela idealização deste programa de pós-graduação na Universidade Federal do Pará, pela dedicação dada a este programa em promover qualificação e formação aos professores atuantes da Educação básica;

Aos professores, Dr. Osvaldo dos Santos Barros, Dr. Osvando dos Santos Alves e Dr. Iran Abreu por todas as contribuições prestadas no exame de qualificação e defesa.

As colegas Maria Dulce Gonçalves, Mônica Gonçalves e Roseli Costa que sempre me deram atenção e me acolheram nos momentos difíceis que passei, lendo as minhas produções e me incentivando quando pensei em desistir.

Ao corpo docente do Programa de Pós Graduação – PPGDOC-IEMCI-UFPA, pelo carinho e dedicação profissional;

Ao Secretário Naldo Sanches, por sua organização e atenção dada às minhas solicitações;

Aos professores, alunos e equipe gestora das Escolas Estaduais Celso Rodrigues e Inácio Moura que carinhosamente permitiram vivenciar e desenvolver com eles minha pesquisa;

A todos que de uma forma ou de outra colaboraram com minha dissertação e que desde já, peço desculpas por não citar.

Meu muito obrigada!

Dizem ser mecânico aquele conhecimento que sai da Experiência, e científico o que nasce e acaba na razão, e semimecânico o que nasce da ciência e acaba nas operações manuais. Mas a mim me parece que são vãs e cheias de erro aquelas ciências que não nascem nas Experiências, isto é, tais que sua origem, meio ou fim não passa por nenhum dos cinco sentidos. E se nós duvidamos da certeza de cada coisa que passa pelos sentidos, quão mormente devemos duvidar daquelas coisas que são rebeldes aos sentidos, como a essência de Deus, da alma e semelhantes, acerca das quais sempre se disputa e contende.

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

O presente estudo tem como tema o Ensino de Função e como objeto de investigação as dificuldades de ensino e de aprendizagem da temática, tendo como perspectiva a indicação de possibilidades de ação a partir de olhares de estudiosos do tema, autores de livros, professores e alunos, a partir da ótica da pesquisadora e de sua experiência ensinando matemática. Minha intenção é analisar o tema, buscando a compreensão do seu processo histórico de construção, analisar livros produzidos e adotados em escolas, ouvir professores que atuam com ensino de função e alunos desses professores, para que suas experiências, anseios, dúvidas, dificuldades e expectativas também possam ser consideradas, tudo isso objetivando identificar dificuldades, possibilidades e tendências, em termos de ensino de função para, a partir daí, definir princípios e diretrizes para o Ensino de Função e isso ser traduzido sob a forma de um produto de ensino a ser apresentado como proposta de ensino do tema Função, mais especificamente, Função Afim. Para isso, após breve descrição de minha trajetória de formação, proponho um estudo reflexivo sobre a construção histórica do tema Função, sobre propostas de ensino de Função presentes em livros didáticos, resultados de estudos sobre o tema e sobre práticas de professores a partir de suas falas, considerando a problemática da pesquisa que se detém sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem no nível médio relativo ao tema Função e finalizo estabelecendo princípios para o Ensino de Função e materializando esses princípios em Cadernos para o Ensino de Função, destinado a professores que atuam com o tema. A pesquisa, de caráter qualitativo, é fundamentada em Garnica (2004) e foi definida em duas etapas, com a primeira, de cunho bibliográfico, se configurando como diagnóstica, de caráter descritivo e realizada em três momentos, sendo finalizada através de um estudo do tipo *estado da arte*, fundamentado em Fiorentini e Lorenzato (2006). Na segunda etapa, a pesquisa se configura na modalidade narrativa, com a utilização da entrevista compreensiva, na perspectiva de Kaufmann (1996), na descrição delas, de acordo com Moraes & Galiuzzi (2007) e na sua análise, a partir de categorias emergentes denominadas por Moraes (2003). As duas etapas possibilitaram a identificação de princípios para o ensino de Função, quais sejam: *O processo de ensino e aprendizagem do tema Função deve ter como referência primeira os conhecimentos prévios dos alunos em relação à temática; A compreensão deve preceder a formalização; A proposição de atividades introdutórias ao Ensino de Função deve ter como referência a realidade dos alunos; A participação dos alunos na sua aprendizagem é condição necessária, de modo a torná-la um processo pessoal em que o aprender se transforme em fazer matemática; A abordagem das atividades precisa se dar de forma ampla e permitir a conexão com outras áreas de conhecimento e A diversidade na adoção de Tendências Metodológicas deve ser uma característica da Prática Pedagógica.* Os princípios foram, então, tomados como as referências principais para a elaboração de uma proposta de ensino de Função denominada de Cadernos para o Ensino de Função, destinada a professores que atuam com o ensino do tema, no qual se destaca a compreensão conceitual de Função, a partir de atividades relativas ao cotidiano, na formalização gradual da temática e na consolidação da aprendizagem.

Palavras-chave: Prática, Ensino, Aprendizagem, Função, professores, alunos, princípios, proposta.

ABSTRACT

The present study has the theme of Functional Teaching and as an object of investigation the teaching and learning difficulties of the subject, having as a perspective the indication of possibilities of action from the looks of scholars, authors of books, teachers and students, From the perspective of the researcher and her experience teaching mathematics. My intention is to analyze the theme, seeking to understand its historical process of construction, analyze books produced and adopted in schools, listen to teachers who work with role teaching and students of these teachers, so that their experiences, wishes, doubts, difficulties and expectations Can also be considered, all aiming to identify difficulties, possibilities and trends, in terms of teaching function to, from there, define principles and guidelines for Teaching Role and this be translated in the form of a teaching product to be presented As a teaching proposal of the theme Function, more specifically, Function Afim. To this end, after a brief description of my training trajectory, I propose a reflexive study on the historical construction of the theme Function, on teaching proposals of Function present in textbooks, results of studies on the subject and on practices of teachers from their Considering the problem of research that concerns the teaching and learning difficulties in the middle level related to the topic Function and I finish by establishing principles for the Teaching of Function and materializing these principles in Cadernos for the Teaching of Function, destined to teachers who work with the theme. The qualitative research is based on Garnica (2004) and was defined in two stages, with the first one, with a bibliographical character, being configured as a diagnostic, descriptive character and performed in three moments, being finalized through a study of the Type of state, based on Fiorentini and Lorenzato (2006). In the second stage, the research is configured in the narrative mode, using the comprehensive interview, from Kaufmann's (1996) perspective, in describing them, according to Moraes & Galiuzzi (2007) and in their analysis, from emerging categories Denominated by Moraes (2003). The two stages allowed the identification of principles for the teaching of Function, which are: The teaching and learning process of the topic Function should have as a first reference the previous knowledge of the students in relation to the subject; Understanding must precede formalization; The proposition of introductory activities to the Teaching of Function should have as reference the reality of the students; Students' participation in their learning is a necessary condition in order to make it a personal process in which learning becomes mathematical; The approach to activities must take place in a broad way and allow the connection with other areas of knowledge and diversity in the adoption of Methodological Trends should be a characteristic of the Pedagogical Practice. The principles were then taken as the main references for the elaboration of a proposal of teaching of Function called Cadernos for the Teaching of Function, destined to teachers that act with the teaching of the subject, in which the conceptual understanding of Function, Based on daily activities, on the gradual formalization of the theme and on the consolidation of learning.

Keywords: Practice, Teaching, Learning, Function, teachers, students, principles, proposal.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01: Gráfico – Velocidade Constante, segundo Oresme.....	35
Figura 02: Corda elástica vibrante.....	39
Figura 03: Registro de resolução da 1ª questão- Aluno do Professor Regue.....	61
Figura 04: Registro de resolução da 1ª questão- Aluno do Professor Gil.....	62
Figura 05: Registro de resolução da 1ª questão- Aluno da Professora Nilda.....	62
Figura 06: Resolução da 4ª questão - aluno da professora Nilda.....	64
Figura 07: Resolução da 4ª questão - aluno do professor Gil.....	65
Figura 08: Resolução da 4ª questão de aluno do professor Regue.....	66
Figura 09: Resolução da 5ª questão de aluno da professora Nilda.....	67
Figura 10: Resolução da 5ª questão de aluno do professor Gil.....	68
Figura 11: Resolução da 5ª questão de aluno do professor Regue.....	68
Figura 12: Diagrama: dificuldades de aprendizagem sobre função.....	69
Figura 13: Distância entre dois pontos – situação 1.....	82
Figura 14: Forma quadrada – situação 2.....	83
Figura 15: Cesta de basquetebol – situação 3.....	84
Figura 16: Corpo em movimento – situação 4	86
Figura 17: Tales de Mileto, filósofo e matemático grego.....	93
Figura 18: Pirâmides de Quéfren e Quéops, Egito.....	94
Figura 19: Baralho Tradicional.....	100

LISTA DE SIGLAS

UFPA - Universidade Federal do Pará.

NPADC - Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico.

UEPA - Universidade do Estado do Pará.

EDUCIMAT – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

UNAMA – Universidade da Amazônia.

CESUPA – Centro Universitário do Estado do Pará.

SEDUC/PA – Secretaria de Estado de Educação do Pará.

IEMCI – Instituto de Educação Matemática e Científica.

PPGDOC – Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas.

EM – Ensino Médio.

FA – Função Afim.

LD – Livro Didático.

ENEM – Exame Nacional de Ensino Médio.

DCNEM – Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

MEC – Ministério da Educação.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Ensino Superior.

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática.

SAT – Santo Antônio do Tauá

CEASA – Centrais de Abastecimento do Pará

SUMÁRIO

1. CENAS E CENÁRIOS DE UMA HISTÓRIA COM A MATEMÁTICA: a reflexão que se fez e se faz na experiência	12
1.1. Inquietações que mobilizam para a ação	12
1.2. Trilhas e marcas de uma formação	15
1.3. Aproximação da temática e definição da direção a seguir	20
2. MATERIALIZANDO A PESQUISA: a reflexão traduzida em Estudo	25
2.1. Problema de pesquisa	25
2.2. Objetivos	25
2.3. A Pesquisa	26
2.3.1. Procedimentos metodológicos	27
2.4. Cenários e Protagonistas do processo	30
3. FUNÇÃO E ENSINO DE FUNÇÃO: sentidos e referências, na busca de indícios que definam caminhos.	32
3.1. O percurso histórico do conceito de Função	32
3.2. O ensino de Função: o livro didático como referência primeira	41
3.3. Ensino e aprendizagem de função: dificuldades identificadas e proposições já lançadas	47
3.4. Destaques que ficam ao fim de uma etapa	54
4. ENSINO DE FUNÇÃO SOB A ÓTICA DE PROFESSORES E ALUNOS	56
4.1. Personalizando o olhar: quem são os sujeitos	56
4.2. Primeiro diálogo: Antecipando as entrevistas	57
4.3 Ouvindo os Professores e coletivizando a pesquisa	58
4.4. Pensando o ensino a partir dos resultados obtidos: categorias de análise	58
Categoria 01: Aprendizado da matemática tendo em vista as dificuldades prévias e dificuldades relativas ao aprendizado de função	59
Categoria 02: Compreensão do ato de ensinar Função, considerando o modo como ensina e a compreensão de como deveria ser ensinado.	70
Categoria 03: Perspectivas e/ou proposições de estratégias para o ensino de Função	73
4.5. Princípios para o Ensino de Função sob a ótica de múltiplos olhares	73
	74

4.6. Considerações que ficam ao fim de uma Pesquisa	
5. Cadernos para o Ensino de Função	77
5.1. Apresentação	77
5.2. Princípios para o Ensino de Função	78
5.3. Em busca de Sentido e de Relações	82
5.4. Ampliando a visão e estabelecendo pontes entre a Compreensão e a Formalização	89
5.5. Consolidando a Aprendizagem de Função	99
REFERÊNCIAS	106
ANEXOS	109

1. CENAS E CENÁRIOS DE UMA HISTÓRIA COM A MATEMÁTICA: A reflexão que se fez e se faz na experiência

Neste item sou desafiada a escrever um pouco de minha história de vida que tem relação com a minha formação escolar e acadêmica e meus anseios advindos de minhas experiências docentes que me impulsionaram a realizar este estudo. Inicio enfatizando as inquietações que me mobilizaram para a ação, em seguida, descrevo o percurso de formação com marcas que se tornaram cicatrizes que jamais se apagam, mas que definiram a profissional que sou. Finalizo minhas escritas aproximando a temática que defino nesta pesquisa, apontando a direção a ser seguida, com a proposição de um estudo reflexivo sobre minha própria atuação em sala de aula, sobre a construção histórica do tema Função, sobre propostas de ensino de Função presentes em livros didáticos, assim como sobre práticas de outros professores a partir de suas falas, tudo isso com a intenção de identificar princípios norteadores para o ensino de Função e serem materializados sob a forma de um produto a ser utilizado em sala de aula, denominado de Caderno para o Ensino de Função.

1.1. Inquietações que mobilizam para a ação

Inicio destacando as implicações dos paradigmas educacionais, na constituição da minha identidade profissional, principalmente na fase escolar. Não posso deixar de enfatizar a forma de ensinar Matemática utilizada pelos meus professores durante o ensino fundamental, uma prática fortemente tradicional, centrada unicamente na memorização. Estudava para tirar dez na prova e considero esse desafio meus primeiros passos para querer entendê-la, pois acreditava que aprender matemática necessitava apenas memorizar e aplicar fórmulas. A inquietude de ensinar matemática da forma que aprendi na fase da escolarização se faz presente na minha trajetória profissional, pois não tenho a intenção de ensinar sem que os alunos compreendam a matemática e eles queiram apenas passar de ano.

Essa inquietude, transportada para o momento atual de professora que atua em turmas do 1º ano do ensino médio e evidencia as dificuldades dos alunos em aprender os conteúdos matemáticos, especialmente a temática Função, se amplia ainda mais, pois eles, em boa parte, não compreendem e, diferente dos resultados que eu obtinha, não conseguem resolver exercícios propostos nos livros didáticos, por não fazerem sentido ou por não saberem aplicar fórmulas e processos e não obtêm resultados minimamente satisfatórios.

Refletindo sobre isso, agora que sou professora, passei a vislumbrar outra perspectiva, no sentido de que o conhecimento matemático pode ser compreendido num processo de construção e reconstrução, envolvendo situações reais do dia-a-dia. Essa outra perspectiva também é defendida por D'Ambrosio (2001, p.22) quando afirma que:

O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura.

Entretanto, contextualizar o ensino da matemática perpassa pela adequação dos objetos a essas situações cotidianas e isso exige habilidades docentes no sentido de desenvolver novo repertório no seu fazer pedagógico, pois é preciso clareza sobre o que se quer alcançar e essa preocupação veio se somar à inquietação surgida desde minha vida escolar. Neste sentido, Spinillo (2006, p.51) diz que:

A ideia de que o conhecimento matemático extra-escolar necessariamente favorece o conhecimento escolar é, no mínimo, simplista. O conhecimento extra-escolar inevitavelmente intervém no aprendizado da matemática escolar, porém, essa interferência tanto pode auxiliar como ser um obstáculo para novas aprendizagens.

Nesta direção, Carraher & Schliemann (1992, p.37) também afirmam que “o trabalho de relacionar o conhecimento adquirido fora da escola com o conhecimento que a escola tem obrigação de tentar desenvolver, deve constituir o objetivo sempre presente das atividades do educador”. Essas afirmações é que se apresentaram como respostas que necessitam ser traduzidas em ações, à inquietude de ensinar como aprendi na fase da escolarização, não induzindo os alunos a somente repetirem processos sem compreendê-los, mas que hoje embasam a crença na necessidade de ensinar matemática de maneira diferenciada, com base na simples aplicação de fórmulas e memorização de procedimentos, que posteriormente se consolidaram na formação e hoje se faz presente na minha trajetória profissional.

Sempre acreditei, desde que iniciei minha atuação como professora, na possibilidade de fazer o aluno sentir o gosto de aprender matemática, num processo de reconhecimento de sua utilidade prática na vida, na sua forma palpável e não como simples conteúdo abstrato, forma usual de apresentação no chão das escolas brasileiras, que na maioria das vezes, não estimula o aluno a uma aprendizagem mais efetiva. Não se trata, aqui, de não reconhecer a natureza do conhecimento matemático, que é eminentemente abstrato, mas de possibilitar sua compreensão a partir de relações estabelecidas com o que é conhecido pelos alunos, até chegar às formulações abstratas.

Os resultados dessa forma de ensino e da aprendizagem daí resultante, mesmo considerando que esses índices não são suficientes para avaliar a qualidade do processo de ensino e aprendizagem da matemática que vem sendo prestada nas escolas, podem ser atestados quando observamos os resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB do ano de 2014, que por sinal não são animadores no Ensino Médio, pois esses resultados oficiais indicam a nota média de apenas 3,7. Esses resultados, no meu modo de ver, reforçam a tese do não estabelecimento de pontes para a compreensão do conhecimento matemático e da dificuldade de lidar com esse conhecimento.

Sinto-me parte deste processo e as crenças que me acompanham em termos das expectativas relativas ao ensino de matemática, no contraste com esses resultados negativos indicados, que me parecem denotar dificuldades de aplicabilidade de conceitos matemáticos em situações que se apresentam, me trazem inquietações, no sentido de compreender como fazer para estabelecer as pontes para a compreensão do conhecimento matemático e, desse modo, ajudar os alunos a lidarem com esse conhecimento e sinto que é necessário desenvolver estudos consistentes na área, discutir os problemas que emergem na realidade da sala de aula, trazendo à tona perplexidades vividas neste contexto, num processo de compreensão mais profunda dessas situações e na busca de respostas às minhas inquietações, que possivelmente também são de outros professores.

É esse envolvimento que me mobiliza hoje a realizar um estudo que aponte, em termos de resultados, para indícios de problemas que resultam em deficiências de aprendizagem e para alternativas possíveis, em termos de práticas, pois antes de assumir o papel de pesquisadora, sou professora no fundamental e médio no sistema público de ensino e, nesse sentido, realizar um estudo que possui relação com minhas experiências profissionais é um exercício de reflexão sobre as próprias experiências docentes, assim como sobre outras práticas e experiências de outros professores e, como resultado dessa reflexão, a possibilidade de que eu possa, em um primeiro momento, vislumbrar caminhos que me indiquem a Educação Matemática como uma saída para o aprimoramento do processo de ensino e da aprendizagem nessa área e, a partir daí, traduzir esses caminhos em orientações metodológicas que possibilitem outros professores a também terem essa compreensão que podem vir a se transformar em ação.

O estudo envolve experiências de ensino, que “são as experiências que podemos utilizar como ilustração numa história para descrever uma transformação, um estado de coisas, um complexo afetivo, uma ideia, como também uma situação, um acontecimento, uma atividade ou um encontro” (JOSSO, 2004, p.40).

Entendo que, para dar um tom mais coletivo ao estudo, é importante considerar outros olhares. É com essa intenção que pretendo ouvir as vozes de um grupo de professores de matemática e de um grupo de alunos do Ensino Médio, a fim de compreendê-los, por meio de um processo de escuta atenta, o que certamente possibilitará perceber o que pensam e quais as suas dificuldades sobre o processo ensino-aprendizagem da matemática, com direcionamento ao tema função.

A opção pelo envolvimento dos alunos deve-se ao fato de serem eles o objetivo do ensino que prestamos e que pode resultar em efetiva aprendizagem ou acarretar dificuldades geradoras de deficiência dessa aprendizagem e a opção pelo envolvimento de meus pares nesta pesquisa, também se deve à necessidade da integração destes e do natural compartilhamento espontâneo dos problemas que considero de interesse comum, pois mesmo estando na posição de pesquisadora, também me encontrarei refletindo sobre minha própria prática docente.

Acredito que quando se sentirem parte deste estudo como colaboradores, mobilizados a enfrentarem os problemas complexos de sua prática docente, este momento de investigação poderá representar o início de uma caminhada em busca do reconhecimento de papéis exercidos na docência e do próprio desenvolvimento profissional. (BORBA, 2010).

De todo modo, mesmo com a intenção de tornar o estudo mais coletivo, dando voz a professores e alunos, a subjetividade certamente se fará presente, pois as evidências resultantes deste estudo sobre o ensino de função afim, mesmo tomando como referência as contribuições de alunos e colegas professores, sob a forma de discussões e ações, serão analisadas principalmente por mim, além de também perpassarem pela minha atuação no contexto da sala de aula.

Acredito que todos os nossos pensamentos, sentimentos, ações e reações brotam dentro de nós, a partir do que já existe. Tudo provém de algo gravado no passado, não se parte do nada, para muitos, esse nada não existe, porque dentro da história estamos plantados em algum lugar (COUTINHO, 1998, p.39). Sendo assim, vou mencionar cenas de minha história profissional para, a partir daí, dar indícios do estudo a ser desenvolvido.

1.2. Trilhas e marcas de uma formação

Hoje sou professora da Educação Básica, com uma trajetória de vida marcada por recordações importantes que delinearão o rumo da minha vida como educadora. Tenho

formação inicial em Licenciatura em Pedagogia¹ e Matemática, ambas pela Universidade do Estado do Pará. Sou do quadro efetivo da rede estadual de ensino- SEDUC-PA e hoje trabalho com turmas do Ensino Fundamental e Médio, no município de Santo Antônio do Tauá-PA.

A reflexão sobre essa trajetória traz situações vividas na educação básica e superior, e nelas enfatizo o ato de ensinar e de aprender, tanto na vida escolar e acadêmica quanto na profissão que tenho hoje. Essa reflexão emerge de uma visão crítica, com inspirações acerca do que defende Paulo Freire em suas postulações, quando diz que é possível educar em uma dimensão transformadora, contribuindo para uma formação plena e cidadã.

Diante da afirmativa do autor citado e com o olhar recheado de criticidade sobre o ensino que desconsidera o contexto sociocultural do educando, numa dimensão conservadora e reducionista em que se apresenta a atuação docente de muitos professores de matemática é que busco alternativas para promover práticas que possibilitem aprendizagens significativas para meus alunos do ensino fundamental e médio. Acredito que as ideias defendidas pelo autor fundamentam minha prática docente, pois, entendo que valorizar a vivência e a realidade dos alunos pode favorecer o processo de construção e reconstrução do conhecimento, fazendo da matemática uma ferramenta a contribuir na formação integral do educando.

Na licenciatura em Matemática, o curso foi centrado nas aplicações matemáticas, recheadas de demonstrações de fórmulas, axiomas e resolução de exercícios, a relação com a prática em sala de aula se dava de maneira superficial. No decorrer desse curso, percebi que nossa turma era muito unida, existia coletividade, respeito, pois os colegas sempre me ajudaram a compreender os conteúdos, quando tinha dificuldade de entender. Um dos pontos que me chamou atenção foi a prática de docentes da universidade, pois, em sua maioria desenvolviam suas aulas a partir de um modelo tradicional de ensino, através de aulas expositivas, com ênfase na informação e transmissão de conhecimentos e, no caso da matemática, com resolução de exercícios padronizados. Isto se tornava bem visível no momento da avaliação, durante a aplicação de provas a turma era dividida em dois grupos para fazer a prova em momentos diferentes e obrigada a posicionar-se de frente para a parede da sala. Certa vez um professor trouxe seu filho para ajudá-lo na fiscalização durante a prova, sem falar das listas intermináveis que chegavam até 400 questões para serem resolvidas em curto prazo. Essas experiências marcaram minha trajetória acadêmica.

¹ Originalmente o Curso era denominado de Curso de Formação de Professores para o pré-escolar e Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Posteriormente, os concluintes passaram a receber o título de Pedagogos com Habilitação para o Magistério na Educação Infantil e nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental.

Muitas vezes reflito sobre qual o real papel da universidade na formação inicial e, nesse sentido, o autor Alves (2000, p.123) chama atenção para a atuação docente nas universidades quando comenta que:

Não existe solução adequada ao nível de simples iniciativas individuais. Seria necessário que a Universidade, deixando de lado por um momento a obsessão analítica e fragmentária, patrocinasse um amplo debate interdisciplinar sobre então duas questões: Para onde vai o barco? Para onde queremos que o barco vá? Somente depois de respondidas essas perguntas teremos condições de tomar decisões lúcidas acerca do que deve ser pesquisado. Uma vez tomada a decisão, e somente então, faz sentido suar no remo. Antes disso seremos sonâmbulos que não sabem o que fazem.

Apesar desses percalços, não posso negar a contribuição da universidade na minha formação, o Curso de Formação de Professores das Séries Iniciais ofertado pela UEPA foi o pontapé inicial, em que aflorou a sensibilidade de perceber a necessidade de desenvolver novas práticas metodológicas para serem trabalhadas em sala de aula não só nas séries iniciais, mas também no Ensino Médio.

Durante o curso a maneira como o formador apresentou e desenvolveu a disciplina Ensino da Matemática, com diversas atividades lúdicas como jogos manipuláveis, material dourado, ábacos e outros que pudemos construir, me envolveu e, envolvida nessas atividades, passei a acreditar que era possível traçar novos caminhos para que eu pudesse desenvolver aulas de matemática com um novo olhar, com práticas interativas, com aulas interessantes, para estimular os alunos a aprender e apreender os conhecimentos matemáticos.

Nessa perspectiva a paixão pela Matemática, e a disposição de estar sempre em busca de novos conhecimentos, o que é uma das exigências pedagógicas feitas ao professor, emergiu fortemente em mim. Então, parti em busca de espaços colaborativos, na intenção de partilhar novas experiências docentes.

Neste sentido, Alarcão (2011, p. 47) considera que:

O conhecimento está lá, na escola, lugar privilegiado para as iniciações, as sistematizações, o estabelecimento de relações estruturantes, as discussões críticas e as avaliações informadas. Os professores são estruturadores e animadores das aprendizagens e não apenas do ensino.

A especialização em Educação Matemática², em 2009, pelo NPADC-UFPA, foi um curso que promoveu esse espaço colaborativo, pois abriu um leque de sugestões metodológicas, e me proporcionou o conhecimento acerca das tendências em Educação Matemática: Modelagem, etnomatemática, jogos, história da matemática e novas tecnologias.

² Esse Curso fez parte de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática desenvolvido pelo NPADC/IEMCI que mantém desde o ano de 2001, a oferta de Cursos de Especialização destinados a professores do ensino fundamental e médio, no Pará.

Este curso além de proporcionar uma nova visão de ensino, oportunizou também o desenvolvimento de formação continuada pelo EDUCIMAT³ aos professores das séries iniciais, confesso que foi um momento proveitoso em que os professores tiveram oportunidade de repensar suas práticas, principalmente o modo de vê a matemática, pois muito deles relataram durante o curso que essa matemática eles ainda não conheciam, uma matemática desenvolvida dentro dos parâmetros da educação matemática num processo de desconstrução e construção do conhecimento matemático que marcou minha trajetória de formação.

Compartilhar essa nova visão de ensino foi uma experiência gratificante, pois, participei de planejamento pedagógico, na orientação de professores de Matemática do Ensino Fundamental maior, sempre focando o fazer pedagógico, para que meus colegas compreendessem a necessidade de estarmos sempre construindo e reconstruindo conhecimentos matemáticos.

Este conhecimento construído coletivamente a partir da reflexão permitiu a construção de minha identidade que vai se moldando na trajetória de minha vida pessoal e profissional; constituindo-me como sujeito do processo de formação, de um indivíduo capaz de atuar de forma crítica e participativa no seu meio social.

Outro momento marcante se trata da minha participação no programa Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa⁴ como Orientadora em 2013 e formadora em 2014 e 2016. Foi um universo bem maior de formação e informação. O programa traz uma proposta de trabalhar a Matemática juntamente com a linguagem de forma lúdica, com a alfabetização e letramento *acontecendo* no momento que estamos construindo conhecimentos matemáticos. Esses momentos de formação também se propõe reflexão sobre o ato de ensinar matemática. A formação, no âmbito desse programa traz possibilidades de propiciar aos professores diversidades de práticas pedagógicas, envolvendo conhecimentos não só do conteúdo, mas também de atividades metodológicas para tratar conteúdos matemáticos a serem ensinados às crianças do I ciclo de alfabetização. São atividades sempre interessantes, com ênfase na ação e manipulação, que envolvem tanto os alunos como professores em sua construção e exploração.

³ Programa Interinstitucional denominado Educação em Ciências e Matemática, executado no período de 2004 a 2009, pelas Instituições UFPA, UEPA, UNAMA, CESUPA e SEDUC, sob a coordenação do IEMCI (ainda NPADC), que dentre seus objetivos destacava-se a realização de Cursos de Especialização destinados a professores da Rede de Ensino do Pará.

⁴ Programa do Governo Federal, com adesão do Distrito Federal, estados e municípios, que envolve Formação Continuada de Professores Alfabetizadores e busca assegurar que todas as crianças sejam alfabetizadas até os oito anos de idade, ao final do 3º ano do Ensino Fundamental.

Percebi, na minha atuação no Programa, que muitos professores das séries iniciais com os quais trabalhei demonstravam não estar preparados academicamente para lidar com este ensino, normalmente eram formados em Pedagogia ou outro curso afim, menos matemática. Pude constatar, neste ambiente de formação, a angústia desses professores, pois suas formações eram refletidas nas suas práticas e, é claro, que de alguma forma isso certamente se refletia, de forma negativa, em termos da não aprendizagem pela criança. No início da escolarização, os alunos se deparam com os professores que muitas vezes não simpatizam com a Matemática, muito menos se sentem preparados para ministrarem aulas desta área de conhecimento. Daí pode se construir uma visão errônea sobre a disciplina. Neste ponto, observo que talvez a aversão à disciplina, por muitos estudantes, advinha deste ensino.

Todos esses momentos contribuíram para a reflexão acerca da necessidade de buscar mais formação. Então em 2015 fui aprovada para o mestrado profissional em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará. Neste curso tenho a sensação de estar a caminho da realização, pois os estudos apontam justamente para aquilo que acredito, estou me constituindo professora pesquisadora da própria prática, por acreditar que o professor é capaz de repensar sua prática, se apropriar dos saberes sistemáticos, articular esses saberes, tornando-os acessíveis aos alunos, oportunizando que sejam produtores e protagonistas de seus próprios conhecimentos.

Nesse sentido, o que me mobiliza é a vontade de querer ressignificar os conteúdos matemáticos e considero que o grande desafio na minha prática ainda seja pensar numa estratégia de ensino que estimule o aprendizado da matemática, mesmo me sentindo segura de desenvolver aulas expositivas, priorizando as formalidades de conceitos, regras e utilizando exemplos bem estruturados extraídos dos livros didáticos, pois entendo que essa segurança, em termos dos conteúdos matemáticos não se traduz necessariamente em aprendizagem para os alunos com os quais desenvolvo meu trabalho de ensino. Há em mim uma inquietude de buscar algo que faça dos objetos matemáticos instrumentos para resolver situações problemas evidenciados no cotidiano e assim, ter a matemática como aliada no processo educativo, em que o aluno se sinta parte deste processo não de maneira passiva, mas como sujeito de sua própria aprendizagem.

Considero, também, que apesar dos avanços em várias áreas de conhecimento, como profissional que ensina Matemática, percebo que o desenvolvimento de práticas inovadoras que estimulem os alunos a aprender ainda não se efetivou no chão da escola. As aulas ainda se mostram limitadas, com exposição de conteúdos, com o uso do quadro e giz obedecendo

exatamente o que os livros didáticos propõem, modelos de racionalidade técnica, que mantêm certo distanciamento do cotidiano dos alunos e isto se evidencia ainda mais no Ensino Médio.

Schön (1992) expressa em sua teoria que quando se adota a concepção positivista do conhecimento científico, a qual sustenta o modelo da racionalidade técnica, se assumido dentro de um olhar acrítico pode se alcançar bons resultados, porém poderá deixar de lado a formação de um ser político e social. Tendo como referência essa visão, o que observo no chão da escola, quando o ensino se limita a concepção positivista, fazendo uso apenas do que se apresenta nos livros didáticos, e que, muitas vezes, é o único método usado por professores de matemática ou outras áreas de conhecimento é que isso já não atende de fato as expectativas dos estudantes e isso é visível nos espaços escolares, pois o desinteresse em aprender matemática, cada vez mais se intensifica e isto ocasiona, de alguma forma, a desistência de estudos como consequência dos baixos rendimentos.

1.3. Aproximação da temática e definição da direção a seguir

Desde 2006, quando assumi turmas do 1º ano do ensino médio, venho refletindo sobre minha prática, pois evidencio as dificuldades dos alunos em aprender os conteúdos matemáticos, especialmente a temática Função que eles, em boa parte, não compreendem, pois além de exigir um conjunto de informações e pré-requisitos para poder desenvolvê-la, ainda é exclusivamente um conhecimento algébrico, que se inicia no Ensino Fundamental e é explorado, de forma mais profunda, no Ensino Médio, atribuindo valores para x com exemplos seguidos de exercícios propostos no livro didático, que muitas vezes não fazem sentido para os alunos.

Essa experiência docente me mobilizou a perceber que quando os alunos chegam ao Ensino Médio, muitos deles apresentam dificuldades em lidar com a Álgebra, com a mudança de representação numérica para a representação literal e a falta de compreensão de símbolos literais, não compreendendo o que as letras fazem nos estudos da matemática. São os símbolos literais que dificultam a aprendizagem e essa transição dos cálculos aritméticos para o conhecimento algébrico é onde os alunos se mostram impotentes, por não entender que, neste caso, é fazer uso de letras em vez de números. Eles vivem momentos de tensão e, muitas vezes, sentem-se desmotivados ocasionando o fracasso escolar. Resultante das reflexões sobre minhas observações e das experiências como professora, acredito que, ao discutir o ensino, eu identifique as razões geradoras do problema e possa apontar alternativas de superação.

Essa reflexão me faz atentar para a história da matemática, onde observo que sua existência foi se constituindo a partir de problemas evidenciados no dia-a-dia, nos quais foi se

estruturando e se construindo ao longo do tempo e como toda ciência se faz por meio de experimentos e constatações, a matemática também se desenvolveu para trazer soluções a determinado problema, e quando se submete aos experimentos para ser validados, constitui a sistematização de um estudo, dito como verdade absoluta.

A temática Função também foi sistematizada dessa forma, possui grande amplitude, costuma ser trabalhada por todo o Ensino Médio e sua introdução exige o conhecimento de vários pré-requisitos. A ideia de Função surge, naturalmente, em muitos temas que são estudados ao longo do Ensino Fundamental, sem o seu tratamento formal através do qual o tema é estudado. Existe aproximação com o tema Proporção, por tratar de grandezas variáveis e interdependentes, assim como com o tema Equação, que é onde começam a surgir os símbolos literais. As Equações do 1º grau nos remetem às funções lineares e as equações do 2º grau nos remetem às Funções Quadráticas. A temática, por si só, já traz uma série de obstáculos para a aprendizagem.

Mas as Funções Lineares se colocam como ponto de partida para o trabalho com Funções e, mais especificamente, a Função Afim e, essa foi a principal motivação que me levou a pensar na investigação da temática Função, pois o trabalho que aí é desenvolvido é uma das principais referências representativas da forma de como o conteúdo Função vem sendo trabalhado em sala de aula. O ensino de Função tem sido desenvolvido, nas escolas, dando ênfase à sua definição, se contrapondo a um ensino conceitual, ou seja, um ensino que parte de uma definição formal, que estabelece relação entre conjuntos e uma lei de formação, mas sem que se busque a compreensão a partir do seu sentido, que pode se dar a partir de fenômenos que se relacionam, para que se possa, então, perceber a lógica dessa relação e assim, conceituar a temática.

O ensino com ênfase na definição ocorre de forma abstrata, característica de uma organização formal e sem relação com o real. Essa forma de tratamento, no ambiente da sala de aula, não permite a significação do tema, pelos alunos e pode acarretar num nível relevante de dificuldades de aprendizagem. Em contraposição a isso, o ensino conceitual é aquele que possibilita que os alunos construam o conhecimento, com pessoalidade, dando sentido ao que aprendem e o formal se apresentando como simples organização desse conhecimento construído processualmente.

Além da prioridade de um ensino com ênfase na definição, a apresentação de Função é feita por meio da relação entre dois conjuntos, sem que a essência da relação seja compreendida pelos alunos. A apresentação envolve ainda o trabalho com gráficos e sua representação geométrica, mas isso tudo trabalhado separadamente numa sequência de

informações que, na maioria das vezes, não são compreendidas e não são relacionadas a situações conhecidas, com o resultado quase sempre bastante negativo, os alunos não compreendem e deixam claro suas dificuldades.

Enfim, foi o insucesso resultante das inúmeras tentativas de ensinar função, a motivação e o direcionamento para a intenção de desenvolver uma pesquisa no sentido de compreender de forma mais profunda a problemática relativa ao ensino e aprendizagem de Função, vislumbrando a possibilidade de que os resultados daí advindos possam trazer bons resultados ao ensino da matemática, e quem sabe dar respostas às minhas inquietações de sala de aula, assim como às inquietações de outros professores que atuam ensinando matemática.

A proposta aqui, portanto, está dirigida ao desenvolvimento de um estudo reflexivo, que busca fundamentos em teóricos sobre o tema, a partir da análise de propostas presentes em livros didáticos, em pesquisas realizadas por outros estudiosos e tendo práticas de outros professores como referência, identificar princípios norteadores para o ensino de Função, que serão traduzidos sob a forma de um produto, denominado Cadernos para o Ensino de Função a ser utilizado em sala de aula. Esse estudo reflexivo também terá minha própria atuação em sala de aula como referência, haja vista que estou trabalhando na série na qual se faz a introdução do tema Função, no Ensino de Matemática.

Ao seguir essa direção que valoriza tanto as produções de teóricos, quanto as práticas de outros professores, em termos de ações de ensino, perspectivas de práticas desses professores e a aprendizagem de estudantes, a intenção principal é identificar um norte, sob a forma de princípios a serem seguidos, que venham a se configurar em produto, com diretrizes para o trabalho de ensino de Função, no 1º Ano do Ensino Médio, visando a ampla divulgação de uma prática criativa no processo de ensino e aprendizagem que possa ser utilizada por professores, para intervenções no ensino da temática no Ensino Médio.

A intenção é, acima de tudo, e tendo como referência principalmente os principais atores que atuam no cenário de sala de aula, discutir compreensões sobre ensino, sobre aprendizagem, sobre papéis dos participantes desse processo, sobre suas dificuldades e perspectivas, tudo isso na busca de um caminho que permita que o ensino se efetive sob a forma de aprendizagem, mas uma aprendizagem que não tenha como principal referência a memorização e o uso de regras e processos mecanicamente e isso possa ser traduzido no cumprimento do desafio de identificar uma abordagem pedagógica diferenciada, que possa possibilitar aos alunos a vivência de uma aprendizagem de matemática com autonomia e que possam galgar degraus por si mesmos, testando seu potencial e produzindo seu próprio conhecimento.

Considero, entretanto, que esta pesquisa, além da produção de diretrizes para o ensino deverá, no processo e resultante das reflexões sobre a temática em questão e de seu ensino, possibilitar a mim, uma compreensão mais profunda dos aspectos conceituais relativos ao tema e do processo de ensino e aprendizagem do tema, que fatalmente deverá se materializar em mudança da minha própria prática, numa perspectiva de melhoria dos resultados do ensino que desenvolvo.

A perspectiva que vislumbro é de uma prática vinculada à realidade dos alunos, com a matemática sendo trabalhada dentro do contexto sócio cultural dos educandos, do abandono do uso de uma única alternativa metodológica e mergulho na busca de novas propostas e estratégias de ensino que possibilitem a construção de um novo paradigma em termos de prática docente, abandonando o papel de professores como meros apresentadores do conhecimento, deixando de levar em conta apenas os resultados, ou seja, as notas que supostamente podem demonstrar e ocasionar o sucesso ou insucesso escolar.

Acredito firmemente que ainda haja tempo de reverter este quadro, tanto na minha atuação docente em sala de aula, quanto na de outros professores, encorajando os alunos a fazerem parte de uma nova realidade do ensino e lhes oportunizando iniciar um processo de produção do conhecimento numa atmosfera dinâmica, onde terão voz para articular suas ideias, num espaço criado para desenvolver ação-reflexão e principalmente, a criação.

Ao pensar na mudança, reflito sobre a dimensão que trata do saber docente, fundamentada em Tardif (2012, p. 210) que menciona que:

O professor dever ser capaz de assimilar uma tradição pedagógica transformada em hábitos, rotinas e truques de ofício, deve possuir uma competência cultural proveniente da cultura comum e dos saberes cotidianos que partilha com seus alunos; deve ser capaz de discutir com eles e de fazer valer seu ponto de vista; deve ser capaz de se expressar com uma certa autenticidade diante de seus alunos; deve ser capaz de gerir uma classe de maneira estratégica afim de atingir os objetivos de aprendizagem (...). em suma “saber ensinar”, do ponto de vista na ação, remete a uma pluralidade de saberes.

Diante das postulações do autor, não é simplesmente querer uma mudança na prática em sala de aula, mas é olhar uma trajetória docente como base de experiências que podem ajudar a transformar o fazer pedagógico no sentido de perceber que esta ação poderá contribuir para facilitar as aprendizagens.

Reflito, também, que a formalidade da construção matemática precisa estar lado a lado com as informalidades do mundo real, e o professor para atingir esse parâmetro precisa buscar novas metodologias de ensino, desenvolver práticas mais eficientes. Nesse sentido, concordo

com Alarcão (2001) quando afirma que é da espessura concreta do cotidiano que podemos ultrapassar as molduras imóveis de qualquer sistematização que se diz acabado e definitivo. Então, pensar em continuar a se manter recolhido num padrão de ensino conservador e reprodutor, o professor pode impedir o desenvolvimento natural dos alunos num processo alienador, gerando situações de ameaças ao tão sonhado processo de libertação.

2. MATERIALIZANDO A PESQUISA: A reflexão traduzida em Estudo

Neste item defino o objeto de pesquisa e as questões que daí emergem, sistematizo os objetivos estabelecidos e descrevo a metodologia a ser desenvolvida, definindo tipo de pesquisa eleito como trilha a ser seguida e explicitando os fundamentos teórico-metodológicos que situam a pesquisa no contexto qualitativo. Seguindo-se a isso, descrevo os critérios de seleção de informantes, forma de realização das entrevistas, transcrição das entrevistas e finalizo definindo a forma de análise dos dados obtidos.

2.1. Problema de pesquisa

Na posição de reflexão em relação ao cenário delineado, assumo o tema Ensino e a Aprendizagem de Função como objeto de pesquisa. A partir daí, apresento o problema de pesquisa nos seguintes termos: **Quais as principais dificuldades identificadas no processo de ensino e aprendizagem de Função?** O problema desta pesquisa está ancorado às evidências que identifiquei no âmbito escolar, no primeiro ano do ensino médio. Esse problema pode ser desdobrado nas seguintes questões: **Quais as dificuldades de ensino de Função de professores que atuam no primeiro ano do ensino médio? Que alternativas de superação dessas dificuldades eles identificam? Quais as dificuldades de estudantes na aprendizagem dessa temática? Suas origens são relativas ao desenvolvimento conceitual da temática ou às práticas de professores? Que princípios podem ser definidos a partir das possibilidades de melhoria indicadas por professores ou em pesquisas já realizadas?**

A última questão é o ponto culminante da pesquisa, pois a resposta a ela possibilitará apontar princípios para o desenvolvimento de um ensino dentro de uma dimensão significativa e trazer indicativos que subsidiarão a construção do produto que se caracteriza como caderno de atividades, com a apresentação e discussão de possibilidades de ensino de função, destinado a professores que ensinam matemática e uso em sala de aula.

2.2. Objetivos

O objetivo geral da pesquisa é estudar, para compreender de forma mais profunda, a problemática relativa ao ensino e aprendizagem de Função, vislumbrando a possibilidade de que os resultados daí advindos possam trazer melhorias, tanto em relação à prática que desenvolvo, quanto às práticas de outros professores que ensinam matemática e que isso se efetive na melhoria do ensino, por parte de professores e da aprendizagem de matemática, pelos estudantes, especificamente em relação ao conteúdo Função Afim.

Com intuito de alcançar esse objetivo geral proposto, seguem-se os objetivos específicos:

- ✓ Compreender a temática Função, em termos de seu desenvolvimento conceitual, buscando estabelecer relações com o seu ensino, no 1º Ano do Ensino Médio;
- ✓ Identificar problemas e soluções propostas em estudos já realizados na área, a serem tomados como referência para o desenvolvimento deste estudo;
- ✓ Identificar dificuldades que os professores de Matemática apresentam ao ensinar ou planejar o ensino de Função no 1º Ano do Ensino Médio;
- ✓ Identificar dificuldades que os estudantes do 1º Ano do Ensino Médio apresentam na aprendizagem de Função;
- ✓ Identificar, nas manifestações de professores, relativas ao processo de ensino e aprendizagem de Função, aspectos que possam ser traduzidos sob a forma de princípios de ensino da temática;
- ✓ Traduzir, sob a forma de princípios para o ensino de Função as manifestações expressas por professores e estudantes, em relação ao processo de ensino e aprendizagem do tema;
- ✓ Elaborar, tomando como referência os princípios estabelecidos a partir da investigação, um Caderno de Atividades na forma de um produto, envolvendo a temática Função e destinada a professores que atuam com o ensino do tema.

2.3. A Pesquisa

Os objetivos estabelecidos e a forma como pretendo chegar a eles, sob a forma de resultados, determinam uma pesquisa de cunho qualitativo, haja vista que pretendo analisar compreensões de alunos e professores sobre o processo de ensinar e aprender o tema função, de modo a, no contraste com minhas próprias práticas, transformá-las em compreensões coletivas e daí buscar traduzir essas compreensões em proposta de ensino, num movimento de reflexão e ação em que o subjetivo se fará sempre presente no desenrolar da investigação, pois os dados coletados terão uma dimensão real do ambiente, dos sujeitos envolvidos e as propostas daí advindas terão esse ambiente e os sujeitos como principais referências.

Na pesquisa qualitativa, pesquisador e objeto de pesquisa não se separam, posto que não se assume “neutralidade do pesquisador”, ou isenção na relação sujeito-objeto de pesquisa, sendo essa outra característica da pesquisa a ser realizada, pois ao me assumir como professora e pesquisadora, faço também da minha própria prática meu objeto de estudo, me

fundamentando em Garnica (2004) que caracteriza pesquisa qualitativa com essa característica: “a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar” (p. 86).

Admito, portanto, explicitamente a interferência subjetiva, assim como admito que as conclusões daí resultantes não serão verdades absolutas, pois são passivas de modificações e/ou refutações, pois a pesquisa qualitativa não se fecha exclusivamente como regra, ela carrega em si uma movimentação onde o pesquisador poderá chegar a ênfases diferentes. É por essa razão que Araújo e Borba (2004) fazem considerações sobre o uso da pesquisa qualitativa quando dizem que ela exige do pesquisador um pré-conhecimento acerca dos seus procedimentos, o que lhe possibilita fazer a análise e interpretação do material empírico.

2.3.1. Procedimentos metodológicos

Ainda tendo como referência os objetivos estabelecidos e a forma como pretendo chegar a eles, sob a forma de resultados, o estudo foi sendo definido a partir do entendimento de que ele teria que ser efetivado a partir de duas etapas, sendo a primeira, uma etapa de cunho bibliográfica, desenvolvida a partir de três momentos: 1) - Histórico conceitual do tema; 2) – Análise de Livro didático e 3) – Levantamento de estudos sobre o tema Função e a segunda, realizada a partir de dois momentos, a etapa que envolve a pesquisa de campo, a partir da realização de entrevistas com professores e de um teste diagnóstico, aplicado aos alunos desses professores, com resolução acompanhada de comentários destes, a respeito de procedimentos e dificuldades durante o processo.

Assim, na primeira etapa, a pesquisa se configura como diagnóstica de caráter descritivo, no sentido de compreender a temática, seu ensino, estabelecer relação entre o desenvolvimento conceitual da temática e seu ensino e identificar pesquisas que têm sido realizadas na área, os problemas identificados nessas pesquisas e as soluções propostas pelos autores. Os resultados dessa primeira etapa deverão ser tomados como referência para o desenvolvimento da segunda etapa do estudo.

Na materialização do estudo, a sua primeira etapa foi se constituindo envolvendo três diferentes momentos. No primeiro momento o estudo foi do tipo bibliográfico, com a intenção de buscar no histórico conceitual do tema o seu sentido e, a partir daí, se ter indicativos para a formulação de estratégias de ensino. No segundo momento, ainda de caráter bibliográfico, o estudo envolve a discussão relativa ao uso do livro didático e a análise de dois livros utilizados atualmente nas escolas envolvidas na pesquisa e, no terceiro momento, de

modo a complementar a primeira etapa, a realização de um estudo do tipo *estado da arte*, fundamentado em Fiorentini e Lorenzato (2006), para que se chegue à compreensão do estágio atual de desenvolvimento da produção científica em termos do ensino do tema Função.

Na segunda etapa, cujo desenvolvimento envolve professores e alunos, com a intenção de dar voz a eles e ter essas vozes como referência para a produção que espero elaborar, a pesquisa se configura na modalidade narrativa, com a escuta de professores e diagnóstica, no momento da realização de um teste aos estudantes.

Para ouvir os professores, foi eleito como instrumento metodológico a entrevista compreensiva, na perspectiva de Mills (1982), que permite ao pesquisador instaurar-se como um “artesão intelectual” no movimento de construção/(des)construção/(re)construção do seu objeto de estudo que se configura, na constituição da análise dos discursos. Este método de entrevista também é defendido pelo sociólogo Kaufmann (1996), quando afirma que a entrevista compreensiva acontece dentro de um processo circular entre a compreensão, a escuta atenta, o recuo do pesquisador e a análise crítica como uma sociologia de processo. A entrevista utilizada, do tipo semiestruturada, com um roteiro previamente estabelecido, mas com a possibilidade de serem incluídas outras perguntas quando necessárias, para esclarecimento total das questões levantadas.

Fazendo uso da entrevista compreensiva como abordagem metodológica, o fio condutor são falas de cada sujeito, traduzidas em um momento de compartilhar experiências docentes, suas histórias vividas, seus anseios, suas dúvidas e suas fragilidades no processo de ensino da matemática, inclusive a maneira como vem sendo desenvolvido o ensino de matemática e, mais especificamente, do tema função afim. Será, certamente, no contato com os professores a partir das falas, durante a entrevista, que poderei observar seus sentimentos, suas experiências, de onde emergirá o possível desvelamento das suas subjetividades, para compreender melhor como se desenvolvem as representações de ensino de matemática no que diz respeito ao fenômeno a ser investigado (ensino de função), considerando neste enfoque o seu ser professor. O autor Borges (2004, p. 27) faz inferências sobre:

As pesquisas compreensivas ou fenomenológicas focalizam o docente como uma pessoa, sujeito, que age e reage, às situações cotidianas, e intervém no seu dia-a-dia, a partir de crenças, valores, perspectivas, emoções, representações enraizadas em sua própria história de vida, em suas experiências pessoais e profissionais.

Além da realização de entrevistas destinadas aos professores, também haverá aplicação de um teste diagnóstico sobre o tema função, a ser resolvido pelos alunos. No

momento da resolução do teste os alunos também serão ouvidos, tanto para esclarecer procedimentos, quanto para falar sobre suas dificuldades, de modo que seja possível estabelecer relações entre os resultados daí obtidos com as falas e práticas dos professores e dar maior fidelidade e perspectiva à análise.

O processo de escuta durante a entrevista aos professores e da escuta no momento da aplicação de teste aos alunos será o momento de investigação em que irei cuidadosamente colher as informações para análise e contrastar essas informações. De posse desse material empírico, será feita a descrição delas, segundo (MORAES & GALIAZZI, 2007, p.37) que orienta “a desconstrução para serem submetidos à construção do metatexto, com a intenção de ampliar a compreensão do fenômeno, num movimento espiralado, retomando periodicamente os entendimentos já atingidos, sempre na perspectiva de procura de mais sentido”.

O processo de desconstrução que caracteriza a fragmentação com intuito de reorganizar em categorias e subcategorias, que se manifestam no agrupamento de ideias onde há convergência, elas são abertas, permitindo expor os invariantes que indicarão as características do fenômeno investigado. A partir se dá a construção teórica, em meio a interpretações e compreensões tendo como foco principal o fenômeno da pesquisa, seguindo uma organização em que essas compreensões serão comunicadas e validadas com maior clareza em forma de produção escrita.

É importante ressaltar, que no processo de construção, irei estar sempre atenta às vozes dos sujeitos da pesquisa e os resultados obtidos no teste aplicado e, sempre que for possível, trazer seus enxertos para possibilitar os avanços que suscitarão nossas compreensões dos fenômenos investigados, pois a análise não deve se restringir ao que penso e no que acredito. Nesse movimento de construção, as compreensões atingidas irão ocorrer com interlocuções teóricas, com a pretensão de buscar que minhas impressões ganhem maior fundamento e cunho de pesquisa. Após ouvir professores e já feitas as descrições categorizadas podemos então fazer “a transição dos textos de campo para os textos de pesquisa, tentando ligar nossa experiência de pesquisadores sobre a experiência em estudo com formas narrativas de pesquisa” (CLANDININ E CONNELLY, 2011,p.174).

Neste sentido, quando me propus escrever tratando de aspectos relativos às experiências dos sujeitos, acredito que a narrativa pode ocupar um lugar importante neste estudo, pois irá colocar as evidências da problemática em foco, nas falas desses professores, expressando o que é inerente ao ser humano, que é sua estrutura fundamental da experiência humana vivida. Aragão (1993, p. 5) “Talvez, por isso, apresente uma qualidade holística, uma vez que possibilita a todos nós a expressão da nossa memória, isto é, a expressão da ‘história’

do nosso ponto de vista, do lugar de onde podemos olhar e ver... não só com os olhos, mas principalmente com a mente”. A autora ainda ressalta que quando o professor assume o papel de pesquisador que investiga o processo de ensino e de aprendizagem escolar, o melhor seria se assumir como pesquisador narrativo.

Com base nessas considerações em que se desenvolverá a pesquisa, terei possibilidades de elaborar, tomando como referência os princípios estabelecidos, um caderno de atividades com base nos princípios que emergirão no processo investigativo, envolvendo a temática Função, com ênfase no trabalho inicial e introdutório, envolvendo Função Afim e como tal será destinado a professores e ao ensino do tema.

2.4. Cenários e Protagonistas do processo

O cenário de realização desta pesquisa será a sala de aula, espaço de atuação de professores que ensinam matemática, em turmas de duas escolas da rede pública de ensino, localizadas no município de Santo Antônio do Tauá-PA que possuem turmas do Ensino Médio. A opção por envolver as duas escolas foi a intenção de dar representatividade à amostra e a opção por esse município foi feita por ser este meu espaço de atuação.

Na seleção dos sujeitos, optei por contar com cinco professores de matemática que atuam nessas duas escolas, em turmas do primeiro ano do Ensino Médio, sendo que um deles atua Escola Estadual E.M. Celso Rodrigues e os demais na Escola Estadual E.M. Inácio Moura, Todos eles do quadro efetivo da Secretaria de Estado de Educação - SEDUC-PA, representando a totalidade dos professores que atuam no município.

A expectativa é que esses sujeitos pesquisados irão participar ativamente do processo de investigação, sendo ouvidos e considerados, nas suas impressões e opiniões, para também contribuírem com os resultados a serem atingidos, dando a eles e às propostas de ensino que daí irão emergir um tom realmente coletivo e possam expressar anseios e expectativas que também são minhas, mas não apenas minhas.

Dando continuidade, decidi selecionar cinco alunos de cada um desses professores, para a aplicação de um teste diagnóstico, a ser resolvido por eles, com o objetivo de detectar suas dificuldades em relação a aprendizagem de função e possibilite estabelecer relações, como dito anteriormente, entre os resultados daí obtidos com as falas e práticas dos professores, de modo a propiciar maior fidelidade e perspectiva à análise. Destaco que, no momento da resolução das questões, pelos alunos, pretendo ouvi-los, de modo a também dar voz a eles e de modo que a relação que vem sendo estabelecida com as falas dos professores seja mais completa.

No capítulo seguinte inicio a primeira etapa do estudo, a etapa de cunho bibliográfica, uma etapa que considero fundamental, tanto para me proporcionar segurança em relação à compreensão da temática em estudo, em termos conceituais, quanto para a sedimentação de crenças relativas ao ensino do tema, em termos de orientações didáticas, de alternativas para o seu ensino e dos resultados de estudos que já vem sendo realizados em torno da temática. Sua organização segue a definição dos três momentos estabelecidos, na ordem indicada anteriormente, sendo iniciado com um histórico conceitual do tema, seguido da análise de Livros Didáticos e a discussão sendo finalizada com a apresentação de resultados do levantamento de estudos já realizados sobre o tema Função, tudo isso a partir do estabelecimento de relações que possibilitem a compreensão da temática Função e de seu ensino, de modo a permitir, como está explícito no subtítulo, a definição de caminhos a trilhar no estabelecimento de princípios para o ensino de Função e na tradução desses princípios em diretrizes de ensino, sob a forma de atividades que deverão compor o produto denominado de Cadernos para o Ensino de Função.

3. FUNÇÃO E ENSINO DE FUNÇÃO: Sentidos e referências, na busca de indícios que definam caminhos.

Neste capítulo faço destaque à origem do conceito de função a partir da história da evolução da ciência, evidenciando como iniciou e se desenvolveu este conceito, com o duplo intento que envolve a fundamentação para o desenvolvimento da pesquisa, assim como a possibilidade de estabelecimento de relações entre o desenvolvimento conceitual da temática e seu ensino, na perspectiva de apontar indícios para a elaboração de uma proposta de ensino. Fundamento o percurso citando alguns filósofos e cientistas que se preocupavam em explicar o seu mundo, tendo como base sua própria realidade, pois a busca por métodos de investigação eram constantes para que fosse possível explicar os fenômenos da natureza.

Trago, no texto, pontos relevantes na trajetória da evolução científica que possibilitam a compreensão da epistemologia do tema função, de modo a construir uma visão que envolva aspectos conceituais, sua amplitude, possibilidades de aplicação e relevância na matemática e na sociedade. Em seguida, faço rápida discussão sobre ensino, tendo como referência o livro didático, por entender que essa é uma das principais referências da prática de sala de aula e apresento a análise de dois livros editados recentemente, dos autores Smole e Dante, de modo a dar atualidade à discussão sobre ensino e daí extrair mais subsídios para a proposição que pretendo fazer. Após isso, faço um mapeamento sobre pesquisas realizadas no Brasil envolvendo o tema função, no sentido de identificar dificuldades de aprendizagem dos alunos do ensino médio e propostas de solução para superar ou minimizar tais dificuldades. A análise dos livros e das pesquisas deverão ser as principais referências para o passo seguinte, que será a realização da pesquisa de campo envolvendo alunos e professores.

3.1 – Um percurso histórico do conceito de Função:

Podemos dizer de uma maneira bem informal que o conceito de função traz relação entre coisas, objetos, variantes que se relacionam, na qual fazemos uso e/ou consumimos no cotidiano. Mas essa leitura nem sempre foi assim...

De acordo com Caraça (1989), essas relações apresentam duas características fundamentais: a interdependência, que faz com que todas as coisas estejam relacionadas umas com as outras e a fluência, que faz com que tudo no mundo esteja em permanente mudança, isto significa, estudar variações de quantidade num mundo constituído de partes que dependem umas das outras.

O autor nos chama atenção quando diz que o conceito de função, mesmo que seja utilizado para explicar o estudo das leis de formação, sugere que este assunto deve ser

introduzido a partir de ideias de correspondência entre as grandezas, observando suas regularidades e deixando evidente a relação de dependência entre elas para, assim, entender que as variáveis representam essas grandezas e a taxa de variação entre as variáveis.

Reportamo-nos aos tempos mais remotos a fim de compreender o percurso histórico em que se constituiu o conceito de função. Este processo de construção levou muito tempo para ser aperfeiçoado e apesar de ter sido instituído somente a partir do século XVIII, em alguns estudos realizados anteriormente já aparece de forma implícita. Buscaremos identificar as diversas interpretações e representações que estiveram presentes na criação e no desenvolvimento deste conceito, o que servirá como embasamento para as nossas reflexões sobre o modo como estas representações têm sido desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem das funções.

É importante frisar que a introdução ao conceito de função se deu a partir do momento em que os cientistas passaram a fazer registro da forma quantitativa e ao surgimento do cálculo. Neste sentido, convém ressaltar o comentário de Caraça (1989, pp.197 e 203-4), que afirma:

(...) quando surgiu o conceito de Lei quantitativa, que levaria ao conceito de função e ao surgimento do cálculo infinitesimal, as bases da matemática moderna. Inverteram-se dessa maneira, as características que estiveram presentes na matemática durante séculos. De uma matemática preocupada com o estudo qualitativo dos fenômenos, privilegiava as figuras sobre o número, que desprezava tudo que lembrasse o movimento, o mecânico, o manual, para uma matemática preocupada fundamentalmente com as artes práticas e mecânicas, com as relações quantitativas eles poderiam ser estabelecidas para a explicação dos fenômenos, que utilizava o número para melhor compreender as figuras que tinha no movimento a sua base de sustentação.

O conceito de função aparece implicitamente na história dos números, no momento em que o homem utilizava o processo de contagem, por meio da correspondência biunívoca⁵ para ter controle de seus animais. O homem associava uma pedra a cada animal, e não sabia que estava construindo uma relação de dependência entre pedras e seus rebanhos, esse procedimento ganhou reconhecimento na história na qual se originava a ideia de contagem. (EVES, 2004, p.23-24).

⁵ Para exemplificar a correspondência biunívoca, se cada cadeira está ocupada e ninguém está de pé, sabemos sem contar que os dois conjuntos têm igual número. Se todas as cadeiras estão ocupadas e há gente de pé na sala, sabemos sem contar que há mais estudantes que cadeiras. Esse conhecimento é possível graças a um procedimento que está muito presente em vários conceitos da Matemática, e que recebeu o nome de **correspondência biunívoca**. A mesma consiste em atribuir a cada objeto de um conjunto um objeto do outro conjunto, e continuar assim até que um ou ambos os conjuntos se esgotem.

Essas experiências utilizadas pela humanidade, mesmo de forma rústica, começaram a partir da identificação da existência de analogias e das semelhanças, pois os agrupamentos de objetos, animais, árvores, significou algo em comum. Boyer (1996) define o processo de contagem como uma correspondência entre os objetos, que logo se desenvolveu fazendo uso das mãos e dos pés, chegando a contar até vinte.

E quando se referiam a quantidades maiores faziam uso de gravetos, pedaços de ossos, para facilitar a contagem. Observa-se que este processo de construção da ideia de contagem se desenvolvia o senso numérico⁶, e esta prática trazia respostas as necessidades básicas das relações sociais na época. A ênfase neste contexto nos faz entender que a relação biunívoca infere o conceito de função junto a origem do conceito numérico. (VASQUÉ, REY & BOUBÉE, 2008).

Cabe aqui ressaltar, que por volta de 1100, quando os europeus entraram em contato com os povos do oriente através de viagens comerciais e das Cruzadas, os principais pensadores da Grécia foram traduzidos e suas ideias foram disseminadas. Várias Universidades foram criadas, como a de Bolonha, em 1088, e as de Paris, Oxford, Cambridge, Salerno, por volta de 1200. O pensamento aristotélico foi adotado como modelo para a filosofia/ciência na Idade Média, também conhecida como filosofia escolástica.

Boyer (1996) afirma que durante um século antes do tempo de Oresme, os filósofos escolásticos já discutiam a quantificação das chamadas formas variáveis, e essas discussões eram extensas, pois não havia instrumentos adequados para fazer análise de tais formas, como exemplo, a variação da temperatura, um objeto móvel, entre outros. O teórico comenta que Oresme começou a se questionar sobre a possibilidade de traçar uma figura que demonstrasse como as coisas variam, a partir daí se nota que Oresme estava por esboçar o que atualmente é considerado um gráfico de uma função.

Na Universidade de Paris, o Bispo Nicolau de Oresme (1323–1382), ao estudar o movimento uniformemente disforme (movimento com aceleração constante), representou num gráfico (ver abaixo) a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal que ele chamou de *longitudes* e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes, que ele denominou *latitudes*.

⁶ O senso numérico é a capacidade que permite diferenciar, sem contar, pequenas quantidades de grandes quantidades, perceber onde há mais e onde há menos, assim como permite perceber quanto há “tantos quantos”, em uma situação de igualdade entre grupos. O senso numérico é a capacidade natural que os seres humanos e alguns animais possuem para apropriar-se de quantidades. (BRASIL, 2014, PNAIC, Caderno II).

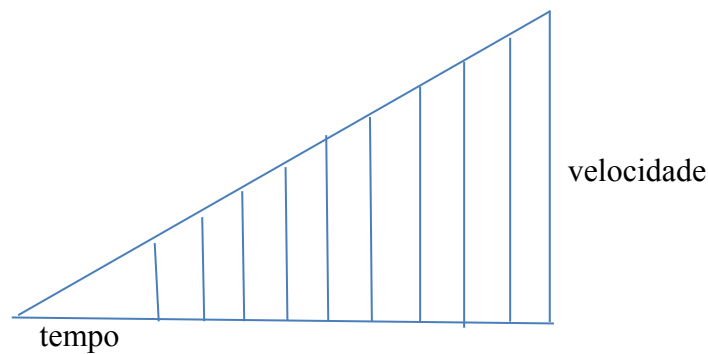


Figura 01: gráfico velocidade constante, segundo Oresme

Sobre isso, Boyer diz que:

Oresme traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos ele percebeu, jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade do segmento velocidade (...) preencherá um triângulo retângulo. Como a área desse triângulo representa a distancia percorrida, Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade do ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final (BOYER, 1996, p. 180)

Com base nas retas utilizadas por Oresme, podemos dizer que são equivalentes ao eixo x , das abscissas, e ao eixo $f(x)$, das ordenadas, sendo a primeira na horizontal e a segunda na vertical. Contudo, a representação de uma quantidade variável não era o foco do estudo de Oresme, apesar de conseguir perceber o princípio fundamental de representar uma função variável com uma curva, nota-se que seu objetivo era somente determinar a área sob a curva.

Entretanto, Os escolásticos deixaram para o século XV explicações acerca dos fenômenos naturais baseadas na doutrina cristã e na física qualitativa de Aristóteles. Neste início do período Renascentista, começaram a surgir na Europa novas traduções em latim das obras gregas, e foi nesta época que os europeus entraram em contato com o pensamento de Platão.

De acordo com Kline (1990), os cientistas da época absorveram a filosofia platônica e combinaram estes pensamentos com os da Igreja: Deus criou e governa todas as coisas através da matemática. Esta nova filosofia influenciou grandes cientistas, como o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), que adotou a teoria heliocêntrica de Nicolau Copérnico (1473-1543) e enunciou leis matemáticas que descreviam o movimento dos planetas. A terceira Lei de Kepler afirma que *os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas*. Esta lei descreve de forma quantitativa um

fenômeno físico e expressa matematicamente a relação entre as duas grandezas envolvidas, trazendo em seu enunciado implicitamente o conceito de função.

Apesar de Kepler ter dado os primeiros passos na direção de uma física quantitativa, o rompimento definitivo com a maneira aristotélica de explicar os fenômenos naturais veio através de Galileu Galilei (1564-1642), considerado o fundador da ciência moderna.

Em seus estudos Galileu Galilei (1564-12642) fez uso da matemática para explicar os fenômenos da natureza, por meio de modelos que demonstravam a relações de variáveis que dependiam uma da outra. Mas seu foco era entender como os fenômenos ocorriam e seu objetivo era descrever as mudanças desses fenômenos na natureza. Esse estudo do movimento acabou gerando os conceitos de relação entre variáveis e conseqüentemente o de função, todavia Galileu não formalizou este último. (SÁ, SOUZA & SILVA, 2003, p. 5).

Os experimentos de Galileu mostraram que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre, se contrapondo aos estudos de Aristóteles, que afirmava que corpos mais pesados caem com velocidade maior. Galileu, em meio a tentativa de modelar os fenômenos que podiam ser observáveis, aplicou medidas introduzindo-as nas representações gráficas, e acabou criando a noção de variável dependente.

Na obra *As duas novas ciências*, sobre dinâmica e resistência dos materiais, entre outros resultados, Galileu enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: *o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço*. Esta lei, assim como a 3ª Lei de Kepler, traz em seu enunciado claramente o conceito de função. Ambos os cientistas iniciaram uma nova era para a ciência, que, a partir deles, passou a ser fundamentada na experimentação e no uso da matemática.

No século XVII, Sir Isaac Newton (1642-1727) apesar de fazer pesquisa focada na área de Física, deu sua contribuição ao conceito de função, quando se trata da descrição como uma série de potência e foi ele quem introduziu o termo de “variável independente”. Isaac Newton também criou o chamado método dos fluxos, onde se explica que uma curva é gerada pelo movimento contínuo de ponto, feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser quantidades variáveis, que recebiam o nome de fluente e a taxa de variação de fluxo (EVES, 2004, p.439)

Podemos considerar que as primeiras idealizações sobre o conceito de função, ocorreram na Idade Moderna, por Leibniz que foi o primeiro a usar o termo função para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto de uma curva, também introduziu os termos constantes, variável e parâmetro. Entretanto, Leibniz já tinha uma ideia geral a respeito de função, que ele mesmo designava pela palavra “relatio”, e logo adiante se

denomina como termo geral de diferentes segmentos ligados a uma curva dada. (Sá, Souza & Silva, 2003, p. 6). Para estabelecer o conceito de função - como relação entre grandezas que variam – foi necessária a definição do conceito de variável, o que se deu, inicialmente, a partir da simbolização da álgebra.

Segundo Boyer (1991), Newton descobriu algo muito mais importante do que o Teorema Binomial, ao verificar que a análise através de séries infinitas possuía tanta consistência quanto a álgebra aplicada a quantidades finitas. As séries infinitas não seriam mais consideradas instrumentos de aproximação, mas outra maneira de escrever as funções que representavam.

Ainda no século XVII, em 1667, James Gregory, na sua obra *Vera Circuli et Hyperbola e Quadratura*, conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita, da seguinte forma: “nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b, \dots , se x resulta de a, b, \dots pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável”. (MENDES apud SÁ, SOUZA & SILVA, 2003, p.6).

Dentro desse contexto, Pierre de Fermat (1601-1665), segundo Kline (1990), utilizou um sistema de coordenadas e relacionou as duas variáveis que apareciam no final de uma equação a partir do seguinte princípio: “*Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva*” (BOYER, 1991).

O que podemos extrair para o conceito de função é a relação entre as incógnitas, estabelecida através de um lugar geométrico, isto é, o que conhecemos hoje como expressão algébrica de uma função, tanto para Fermat como para Descartes, isso representava uma curva.

Reconhecemos que o conceito de função traz em si interesses de resolver problemas de ordem prática, pois mediante aos relatos históricos tudo indica que os estudos se baseiam em uma matemática essencialmente prática, em métodos empíricos em busca de construir generalidade e universalidade que caracteriza a cientificidade das nossas práticas, mesmo de modo distinto, é o que encontramos na matemática dos egípcios.

Por isso concordamos com Zuffi (2001, p.11) quando menciona que:

(...) não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo]. Alguns deles consideram que os Babilônios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade [grifos do autor] (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a

Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

Contudo, não podemos deixar de reconhecer que por meio dos estudos e experimentos desses estudiosos, são conhecimentos importantes que temos na história da matemática, onde se desenvolveu epistemologicamente, o que conhecemos hoje sobre função. Portanto, ressaltamos Johann Bernoulli (1667-1748) que experimentou várias notações como X , ζ e finalmente ϕx para uma função de x . Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte maneira: *Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes* (RÜTHING, 1984).

Para Bernoulli, cada função poderia ser representada por uma única expressão analítica, podendo-se observar na definição acima o conceito de função como combinação de símbolos algébricos. Esta “expressão analítica” aparece na definição de função dada por Leonhard Euler (1707-1783) em seu clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748, primeira obra em que o conceito de função desempenha um papel central. Após definir o significado de *quantidade constante* e *quantidade variável*, Euler enunciou, em 1748: “*uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes*” (ibid.). Euler não definiu “expressão analítica”, mas, segundo Boyer (1991), tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentais elementares (exponenciais logarítmicas e trigonométricas).

Sobre este ponto houve um longo debate sobre um problema da corda vibrante envolvendo Euler, d’Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange acerca do significado de “função” e isto provocou um novo entendimento sobre o conceito. O problema é o seguinte: *Uma corda elástica com os extremos fixos, por exemplo em 0 e l é deformada numa posição inicial F e solta, provocando vibrações. O problema determina a função que descreve o formato da corda em um instante t .*

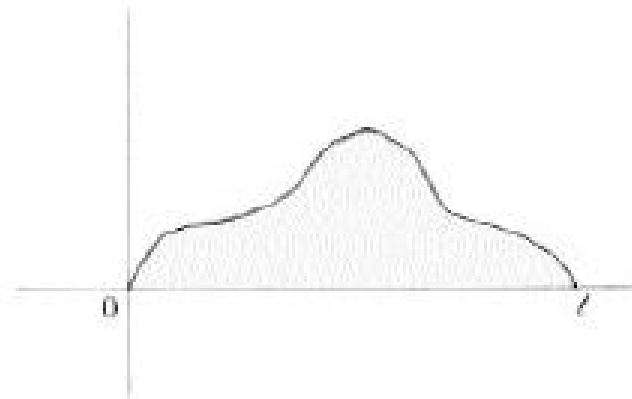


Figura 02: Corda elástica vibrante

O debate durou vários anos e, segundo Kline (1990), teve importantes consequências na evolução do conceito de função. O conceito foi estendido, de modo a abranger:

- a) Funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos.
- b) Funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos.

Quanto ao termo “expressão analítica”, este não aparece na definição de função que Euler determinou em 1755: “*se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele são chamadas suas funções*” (RÜTHING, 1984). Euler é responsável pela introdução, em 1734, da notação $f(x)$ para designar uma função que depende da variável x .

Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) assim definiu função: *Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. ... Designaremos em geral pela letra f ou F , colocada antes da variável, toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada.* (Rüthing, 1984). Podemos observar tanto na definição de Lagrange como na de Euler (1755) a presença da ideia de função como relação entre quantidades variáveis.

Os matemáticos do século XVIII exploraram o uso de séries trigonométricas relacionadas aos fenômenos astronômicos devido à sua periodicidade. Estas séries foram estudadas por Joseph Fourier (1768-1830) em sua *Teoria Analítica do Calor*, publicada pela primeira vez em 1822, o que provocou uma revisão no conceito de função.

Este resultado não era totalmente correto, e o matemático Gustav Lejeune Dirichlet (1804-1859), nos anos seguintes, iria fornecer condições para que uma função pudesse ser representada como uma série de Fourier num dado intervalo. Mas o resultado de Fourier mostrou que uma grande quantidade de funções $f(x)$ (não necessariamente periódicas) poderiam ser representadas por outra expressão analítica (a sua série de Fourier) num dado intervalo.

Segundo Luzin (1998), a descoberta de Fourier mostrou que muito da controvérsia surgida no debate sobre o problema da corda vibrante - cuja solução era dada por uma série trigonométrica - foi resultado da confusão entre dois conceitos aparentemente idênticos, mas bem diferentes: os conceitos de “função” e de “sua representação analítica”.

Dirichlet foi o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas. Para mostrar a natureza arbitrária desta relação, definiu a função da seguinte forma: *Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b . Se para cada x corresponde um único y , de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b , $y = f(x)$ varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas* (Rüthing, 1984). Foi o primeiro exemplo de uma função que não era representada por uma fórmula – combinação de símbolos matemáticos. O matemático inglês George Stokes (1819-1903), acompanhando o entendimento de Dirichlet, percebeu a importância de “pensar em funções independentes de todas as ideias de expressão algébrica” (SILVA, 1999).

A interpretação do conceito de função como *transformação*, onde cada elemento x é transformado no elemento $f(x)$, foi dada por George Boole (1815-1864): *Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$ Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1 , o resultado será expresso pela forma $f(1)$; se na mesma função transformarmos x em 0 , o resultado será expresso pela forma $f(0)$* (RÜTHING, 1984).

Richard Dedekind (1831-1916) utilizou a ideia de *aplicação* para definir o conceito de função: *Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por $f(s)$; dizemos também que $f(s)$ corresponde ao elemento s , que $f(s)$ é originada ou gerada pela aplicação f , que s é transformado em $f(s)$ pela aplicação f* (ibid.).

Na definição de função dada por G.H. Hardy (1877-1947) foram enumeradas três características que devem ser satisfeitas por uma função determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y :

- (1) y é sempre determinado por um valor de x ;
- (2) para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y ;
- (3) a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x . (SILVA, 1999)

Conforme Braga (2006), em 1837, Dirichlet definiu as funções desta maneira: “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico

a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então se diz que y é função da variável x ”.

Essa abordagem histórica sobre função proporcionou a percepção de que o conceito de função passou por diversas mudanças e que sua construção foi bastante lenta. Também proporcionou identificar algumas representações na evolução do conceito de função, sendo estas, função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação. No entanto, se faz necessário entender como isso chega aos alunos na atualidade e, para complementar a discussão conceitual e iniciar a discussão relativa ao ensino de função farei no item seguinte, breves considerações sobre o tratamento do tema nos livros didáticos.

3.2 - O ensino de Função: O livro didático como referência primeira

Nessa etapa da discussão, o livro didático assume um papel importante, pois nos dá a possibilidade de compreender como o conteúdo Função, mais especificamente Função Afim vem sendo tratado atualmente. A principal intenção com a discussão relativa ao livro didático é identificar lacunas no trabalho de ensino que possam ser preenchidas, de modo a complementar o trabalho didático, assim como possibilitar o estabelecimento de elos entre um ensino de natureza menos assistemático, com a sistematização que é própria desse tipo de instrumento didático. Ao realizar esta análise, observo que este instrumento, na maioria das vezes, dependendo de sua organização, visualização, tratamento conceitual, linguagem e conforme seu uso, certamente poderá contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Neste sentido, Gaudêncio (2000) em suas pesquisas sobre o livro didático, afirma que a linguagem presente nos principais livros textos de Matemática do Ensino Médio sofre influências do “Movimento Matemática Moderna”, fundamentada na “Teoria dos conjuntos”. E diz que muitos autores destes livros, até à época da realização de seus estudos, apresentavam variações da definição de Bourbaki⁷ sobre funções. Para o aluno, esta definição é extremamente abstrata, pois estão subjacentes vários outros conceitos tais como relação, par-ordenado, e exige uma intensa compreensão sobre a álgebra. Além disso, como afirmam:

Fossa & Fossa (2001):

⁷ Nicolas Bourbaki¹, pseudônimo de um grupo de matemáticos, quase todos franceses, que se reuniu para escrever um tratado de Análise e acabou por reorganizar boa parte da Matemática desenvolvida até então, tomando como princípios a unidade da Matemática, as estruturas - mães (algébricas, topológicas e de ordem) e o método axiomático.

“(...) o aluno raramente desenvolve uma concepção desta noção que chega a aproximar sua plena generalidade. De fato, a definição do conceito de função parece ter um papel bastante reduzido na determinação de como este conceito é entendido pelo aluno. Muito mais importante é a sua experiência com dois conceitos associados ao de função, a saber, equações e gráficos, pois quando o aluno encontra funções no seu livro texto ou na sala de aula, geralmente se pede que ele manipule de alguma forma uma equação que representa a função ou esboce o seu gráfico. Assim, o aluno é exposto a uma classe restrita de funções e, forçosamente, ele abstrai o seu conceito de função apenas desta classe. (FOSSA & FOSSA, 2001:155).

As investigações dos pesquisadores citados e as discussões conceituais realizadas neste estudo apontam que as ideias de variável, domínio, contradomínio, imagem, zeros ou raízes de uma função e o estudo do sinal que permeiam a compreensão do conceito, já trazem grande complexidade para a aprendizagem dos estudantes. Pensando nisso e buscando compreender de forma mais profunda como os livros didáticos atuais tratam este assunto e como eles sugerem a apresentação aos alunos, do tema função afim selecionei dois livros didáticos para realizar uma breve análise. O critério adotado foi a seleção de livros aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático, de edições atuais que tratam do tema e foram utilizados pelos alunos nas escolas lócus da pesquisa. Foram analisados os livros **Matemática: Ensino Médio**, de Kátia Cristina Stocco Smole, 2010 e o livro **Matemática: contexto e aplicações**, de Luiz Roberto Dante, 2010.

O livro de Kátia Smole apresenta o tema Função na primeira parte, juntamente com Números e Estatística que ela denomina relações entre grandezas. Inicia fazendo considerações sobre como se localizar, com a intenção de demonstrar os pares ordenados no plano cartesiano e, em seguida, apresenta o sistema cartesiano ortogonal, exemplificando a localização de ponto no plano. Os exemplos são resolvidos, em seguida apresenta problemas e exercícios. Dentre os problemas utilizados pela autora, destaco a seguinte situação problema:

Maira mudou-se para outra cidade e convidou-me para visitá-la. Para que eu pudesse chegar facilmente a sua casa, ela me enviou um mapa com algumas indicações. A) Maira me disse: “você sai da rodovia à direita, vira à direita na esquina, anda quatro quarteirões e está na rua da minha casa. Então, vira à esquerda, anda dois quarteirões e chega na minha casa. Não há como errar”. Realmente não errei e cheguei à casa de Maira. Mas você já imaginou se, no início, eu tivesse andado três quarteirões à esquerda, onde eu teria ido parar? B) tomando a rodoviária como referência, indique alguns caminhos que posso fazer para ir; ao cinema; ao zoológico; ao supermercado. C) desenhe o plano cartesiano ortogonal e localize nele os pontos do item anterior. Use a rodoviária como (0,0) e um quarteirão como unidade. Eis o mapa que Maira me enviou. (p.70)

Esta atividade pode proporcionar a ação do aluno, mobilizar a capacidade de pensar o problema, e desenvolver a lateralidade construindo a ideia de ponto e pares ordenados no plano cartesiano.

A autora sugere a exploração de mapas, guias de ruas. A partir daí, traz figuras artísticas e objetos simétricos para explorar o eixo de simetria e coordenadas. O objeto função é apresentado inicialmente de modo informal, antes de ser usada a terminologia relacionada a esse conteúdo. Diz que função é um modo de relacionar grandezas, utiliza nos exemplos a leitura e interpretação dos gráficos, assim os alunos devem se familiarizar com os conceitos de crescimento e decréscimo de uma função, valor de uma função em um ponto, sinal de uma função e raízes, antes do trabalho com funções afim, quadrática e todas as outras. No exemplo 1, a autora especifica o seguinte:

Esse gráfico corresponde a uma função que relaciona o valor do piso salarial a cada ano no período de 2002 a 2008.

1. x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado, no gráfico acima, x é o ano que varia no conjunto $A = \{2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008\}$
2. a cada valor de x corresponde a um único valor de y em um dado conjunto B
No gráfico, y é o valor do piso salarial que varia no intervalo $B = \{431, 733\}$.
3. Os valores que y assume dependem dos valores assumidos por x

Para $x = 2005$, por exemplo, y é 587, enquanto para $x = 2008$, temos $y = 733$.

Depois desse exemplo, a autora ainda apresenta mais cinco exemplos que trazem situações problemas cotidianas e exploratórias, para introduzir a definição de domínio, contradomínio e imagem de uma função.

É importante notar que as tabelas se apresentam como uma forma de representar relações funcionais e o seu uso é indispensável quando se quer generalizar uma situação. No que diz respeito ao ensino de função, os gráficos assumem um papel importante, por meio de sua representação visual, favorece a observação de comportamentos, que muitas vezes, representadas de forma de tabela e algébrica, são difíceis de perceber, principalmente quando se trata de funções. Assim, o domínio, o contradomínio e a regra de correspondência, são percebidos simultaneamente, permitindo um foco geral de toda a função.

Nos exercícios resolvidos propõe que o professor oriente os alunos para que, ao ler cada questão, analisem o que compreenderam, em caso de dúvidas, a autora sugere que leia novamente. Percebi que neste ponto, ela propõe que os alunos não apenas memorizem os exercícios, mas venham a compreender e apreender o conhecimento, trazendo nos exercícios

situações problemas ao invés de questões convencionais que não estimulam o aluno refletir sobre o que está sendo ensinado.

A autora do LD 1, apresenta problemas que envolvem o uso de gráficos, como um que trata do consumo de suco de laranja de um país fictício, acompanhado dos seguintes questionamentos que, segundo ela, favorecem a análise de informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação e para avaliação de situações da realidade usando conhecimento matemático.

1. Do que trata o gráfico?
2. Em que ano o consumo foi de 950 milhões de litros?
3. Em quanto aumentou o consumo entre 2008 e 2011?
4. O que significa o número 1,6 bilhão?
5. Segundo o gráfico, a evolução do consumo de suco de laranja é função de que grandeza?
6. Além dessa grandeza, do que mais pode depender a evolução do consumo de suco?

Quando introduz função, a autora faz relação entre a expressão algébrica da função e seu gráfico, utiliza função na resolução de situações-problemas e traz a relação que a função tem com outras ciências, usando um exemplo da física para expressar velocidade e tempo. Em seguida define:

Uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que a todo número x associa número $ax + b$, com a e b reais, $a \neq 0$, é denominada **função afim** ou **função polinomial do 1º grau**.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = ax + b, a \neq 0$$

Após a definição, a autora então trabalha gráficos cartesianos; termos relacionado a função afim como: zeros ou raiz da função afim. Em seguida, abre uma sessão para ensinar como podemos desenvolver função no computador, assim fazendo uso da tecnologia. Faz uma sequência de exercícios resolvidos e em seguida, propõe problemas e exercícios a serem resolvidos pelos alunos, inclusive questões propostas no Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM.

Observo que a definição de Kátia Smole é intensamente abstrata, entretanto é uma das mais corretas. Sua abordagem é diferente dos outros livros no ponto de vista didático, pois simultaneamente, ela mostra textos, tabelas e gráficos. Por vezes, isto poderá causar certo desconforto durante o aprendizado, pois pode ser interpretado como obstáculo devido ao enfoque diversificado. Porém, esta abordagem se torna significativa no sentido de trazer

possibilidades diferentes por meio dos exemplos mostrados, ou seja, essas representações diferentes oportunizam o aluno buscar o melhor jeito para aprender o conteúdo.

Ao optar pela adoção de atividades significativas abordadas dentro de um contexto, a autora apresenta uma proposta didática que se contrapõe aos moldes tradicionais presentes em muitos livros didáticos. Essa forma de ensino, entretanto, exige do professor uma mudança de atitude, pois significa quebrar paradigmas, sair da zona de conforto e agir com disposição para dar significado ao seu ensino, coisa que muitas vezes não ocorre. Exige, inclusive, deixar de ter o livro didático como única alternativa e fazer uso de outros meios de ensino, favorecendo um trabalho com mais conexões com situações reais.

Observa-se que esta obra atende recentes orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio-PCNEM, do MEC na maior ênfase dada aos conceitos centrais de cada tema e pela indicação de que alguns dos tópicos tradicionalmente ensinados podem ser omitidos sem prejuízo da sequência lógica dos conteúdos nem da aprendizagem das habilidades e competências indicadas pelos PCNEM.

No entanto, os conteúdos indicados como opcionais fazem parte do corpo do texto, em respeito à diversidade de propostas das escolas e de seus alunos. Metodologicamente, houve a inclusão da proposta de projetos e jogos e um maior cuidado com as questões de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. A organização do ensino dos conceitos matemáticos foi feita de forma que valorizasse as perspectivas mencionadas, desenvolvendo os temas de forma que permita ao aluno explorar tanto do valor científico da Matemática quanto de seu caráter formativo e instrumental. A proposta de ensino apresentada no LD1 prima pela apropriação de conhecimentos a partir de situações informais, assim introduzindo a formalização do objeto em estudo.

O Livro texto de Dante introduz função afirmando que o seu conceito é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários eixos temáticos desta área de conhecimento e sua relação com outras áreas, daí a importância de seu estudo. Trata de função no 3º capítulo, e no 4º capítulo, trata exclusivamente de Função Afim.

Inicia com o conceito básico bem elementar da matemática para introduzir função, quando se propõe relacionar, por exemplo, litros de gasolina e valores a pagar. Segundo o autor foram explorados de maneira intuitiva e compreensível, sem falar que neste momento se constrói somente a ideia de função por meio de situações problemas bem simples com a intenção de proporcionar o despertar do interesse pelo tema a ser estudado. Uma das atividades interessantes sugerida pelo autor para introduzir a ideia de função, é **a máquina de dobrar**.

O autor apresenta o desenho da máquina imaginária, na qual os números que saem são dados em função dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem dependem dos números que entram. Assim a variável dependente é o número de saída e a variável independente é o número de entrada. Então, neste caso temos: números de saída (N) é igual a duas vezes o número de entrada (x), então $N = 2x$, o autor já indica a regra ou lei da função. Nesta atividade nota-se que as receitas prontas e formalismo excessivo foram evitados, porém mantém o rigor coerente com o nível para o qual a coleção está sendo proposta, sendo que de maneira exploratória e intuitiva sobre a noção de função, assim o aluno é levado a pensar e construir a ideia.

Nos exercícios resolvidos o autor utiliza a seguinte situação:

Numa indústria, o custo operacional de uma mercadoria é composto por um custo fixo R\$300,00 mais um custo variável de R\$ 0,50 por unidade fabricada. Portanto, o custo operacional, que representamos por y , é dado em função do número de unidades fabricadas, que representam por x . Expresse, por meio de uma fórmula matemática, a lei dessa função.

Resolvendo essa situação problema, o autor diz que o custo operacional é composto de custo fixo mais custo variável, ou seja, $y = 300,00 + 0,50x$. Então, a fórmula matemática que melhor representa é $f(x) = 300,00 + 0,50x$ ou $y = 300,00 + 0,50x$.

Nota-se que nesses dois exemplos que em nenhum momento Dante fala da definição da função. No entanto, nos problemas citados se tem sua construção, deixando o próprio aluno livre para interpretar e chegar a essa conclusão. Como existe a intencionalidade da elaboração das questões propostas para ser trabalhadas em sala de aula. Com esses problemas o autor pretende introduzir a ideia de função, ou melhor, a definição de função.

De acordo com as considerações do autor, o livro didático deve estimular o aluno para que pense, raciocine, crie, relacione ideias, descubra e tenha autonomia de pensamento, ao invés de simplesmente imitar, repetir e seguir o que o professor fez e ensinou, o próprio aluno pode e deve fazer matemática, descobrindo ou redescobrando por si só uma ideia, uma propriedade, uma maneira diferente de resolver uma questão proposta, e orienta que o professor crie oportunidades e condições para que o aluno crie e expresse suas descobertas.

Em seguida demonstra a noção de função via conjunto, aproveitando o que os alunos já trazem de conhecimento sobre conjuntos, mostra que a relação entre dois conjuntos pode ser caracterizada como uma função e assim define:

Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função de A em B (cuja notação é $f: A \longrightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$)

A partir desta apresentação, o autor define: Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função assim:

O conjunto A chama-se domínio da função ($D(f)$) e o conjunto B, contradomínio da função ($CD(f)$). Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se imagem de x pela função f ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in A$ e o representamos por $f(x)$ (lê-se f de x). Assim, $y = f(x)$

No exemplo utilizado pelo autor para explicar a funcionalidade desses três conjuntos, observa-se que a linguagem matemática se intensifica com seus símbolos, o professor precisa ter o domínio desse conhecimento para fazer a intervenção necessária para facilitar a compreensão pelo aluno.

Ao finalizar a análise dos dois livros didáticos, é possível concluir que as propostas de ensino de função implícitas neles trazem como sugestão a abordagem diversificada no ensino, com o uso de projetos, jogos, situações problemas e uma intenção clara de possibilitar a construção de conceitos pelos alunos, seguida da sistematização destes. Esta é uma direção que, no meu entendimento, deverá ser colocada como referência para a etapa seguinte da pesquisa, assim como para a etapa que se sucederá a ela, a ser traduzida no estabelecimento de princípios para o ensino de Função Afim e sua materialização em produto destinado ao ensino.

3.3 – Ensino e aprendizagem de função: Dificuldades identificadas e proposições já lançadas

Ao tratar do tema ensino de função, sinto-me parte desse universo. No cotidiano do meu trabalho, muitas vezes, faço reflexões sobre qual o papel do Ensino Médio diante de uma realidade na qual os alunos, em boa parte, perderam o interesse pelos seus estudos. Basta apenas ter o convívio no ambiente escolar das escolas públicas do Ensino Médio e perceber a desatenção presente nos olhares, nos gestos e nas falas dos estudantes, eles esperam por ações que os envolvam, onde eles possam também contribuir no processo de sua própria aprendizagem. São alunos jovens que se sentem parte de um mundo cada vez mais globalizado. Neste sentido, quando a escola se mantém imersa no passado diante da aceleração da informação e do desenvolvimento tecnológico, percebemos o distanciamento e a dificuldade enfrentada no chão da escola, como indicativo do fracasso e do declínio do processo ensino e aprendizagem.

É por me sentir parte do processo que entendo a necessidade de agir de forma propositiva e entendo que:

Não se pode mais postergar a intervenção no Ensino Médio, de modo a garantir a superação de uma escola que, ao invés de se colocar como elemento central de desenvolvimento dos cidadãos, contribui para a sua exclusão. Uma escola que pretende formar por meio da imposição de modelos, de exercícios de memorização, da fragmentação do conhecimento, da ignorância dos instrumentos mais avançados de acesso ao conhecimento e da comunicação. Ao manter uma postura tradicional e distanciada das mudanças sociais, a escola como instituição pública acabará também por se marginalizar. PCNEM (2000, p.12).

Concordo com a afirmação de que não podemos mais postergar a intervenção do ensino nas escolas do Ensino Médio, pois o processo de democratização no ato de ensinar e de aprender deve estar ancorado em práticas educativas que valorizem o contexto social do educando, suas experiências, para que se construa conhecimento dentro de uma dimensão crítica e o aluno também seja considerado sujeito nesse processo, como alguém que poderá sentir confiança em suas capacidades para enfrentar os desafios da vida. Assim, o ensino pode garantir aos estudantes aprendizagens significativas e essenciais para a formação cidadã, não obstante a isso, teremos uma escola decadente e quem sabe marginalizada.

As afirmações escritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais a respeito do ensino de função nos dizem que:

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a física, a geografia ou economia. Cabe, portanto, ao ensino da Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL,1999, p. 255).

Ao considerar a relevância de desenvolver um ensino significativo sobre o ensino de função, a partir de sua importância no aprendizado dos estudantes do ensino médio, para que os mesmos possam usufruir desse conhecimento na prática, mas considerando a importância de não trilhar caminhos já trilhados por outros estudiosos e utilizar os resultados obtidos por eles como referência para o estudo e as proposições que daqui resultarão é que vejo a necessidade de realizar um estudo sobre como a temática está sendo tratada nas pesquisas mais atuais. Para tanto, será feito o mapeamento das pesquisas já realizadas inerentes a este assunto e que possuam problema de pesquisa compatível ao problema levantado no início desta pesquisa.

A intenção é identificar o que as pesquisas nos revelam sobre dificuldades de aprendizagem dos alunos do ensino médio e o que elas propõem ou apontam como solução para superar ou minimizar tais dificuldades. Com base nesse estudo e somando-se aos resultados dele todos os demais subsídios resultantes dos dois outros momentos da primeira etapa da pesquisa é que certamente poderei elaborar e lançar uma proposta de intervenção pedagógica que possa contribuir para a melhoria do ensino de Função e assim poder apresentar uma possibilidade de resposta aos anseios de professores, em termos de ensino e de alunos do 1º ano do ensino médio, em termos de aprendizagem.

Iniciei este terceiro momento da pesquisa utilizando o banco de teses e dissertações da coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Revista Zetetiké. Essas fontes de pesquisa me possibilitaram a investigação, no período de 1970 a 2012. Dessas, selecionei inicialmente 96 produções de dissertações e teses que tratam do assunto. Porém, na busca de informações mais refinadas e recentes até o ano de 2016, decidi também selecionar produções de dissertações de programas de mestrado profissional em educação matemática e/ou ensino de ciências e matemática no Brasil e a fonte utilizada foi o site do PROFMAT e sites das universidades de origem das pesquisas. Na tabela apresentada no anexo 01 constam as dissertações disponíveis no período 2010 a 2016, produzidas em instituições de ensino que ofertam mestrado profissional no Brasil, totalizando 27 dissertações que tratam do conteúdo função.

Para tornar a amostra mais específica, a fim de refinar mais ainda a investigação, optei por selecionar 10 dessas dissertações que tratam do ensino e aprendizagem de função afim no Ensino Médio, considerando a possibilidade das produções me fornecerem dados específicos sobre o meu objeto de pesquisa. Apresento os resumos das dissertações no anexo 02.

A amostra foi organizada e tratada tendo como parâmetro Fiorentini e Lorenzato (2006), que afirmam que este tipo de pesquisa possibilita uma visão mais global sobre como o objeto de pesquisa está sendo tratado na visão dos estudiosos da área. Na relação apresentada a seguir constam essas 10 dissertações selecionadas, que foram lidas integralmente, mas faço destaque de seus resumos, os quais também foram lidos integralmente, dando possibilidade de enfatizar pontos relevantes como: 1- Problemas levantados (CONTEXTO); 2 – Objetivos e 3 - Solução apresentada.

A seguir, com auxílio de uma tabela e de forma sucinta, descrevo sobre o que tratam as produções destacando os problemas levantados pelos autores e as possíveis soluções, que são os principais aspectos a serem considerados no capítulo seguinte e no traçado de paralelos entre os aspectos teóricos relativos ao ensino e aprendizagem do tema função afim e a posição

de alunos e professores sobre esse mesmo tema. Após a descrição, faço considerações sobre elas no sentido de possibilitar um olhar geral sobre o que trazem como problematização e solução sobre o objeto ensino e aprendizagem de função.

Tabela com problemas e possíveis soluções apontados pelos autores:

Autor (a)	Problemas levantados	Possíveis Soluções
Dias, 2015	“Nas escolas, a abordagem desse conteúdo não favorece a compreensão, sendo enfatizados símbolos e procedimentos técnicos que não privilegiam a sua essência.”	“existem estudos que mostram a vantagem da utilização da resolução de problemas no ensino de Matemática. Aliamos nesta pesquisa um estudo sobre o conceito de função e a resolução de problemas.”
Ladeira, 2015	“A utilização de recursos tecnológicos como os <i>smartphones</i> pode trazer progressos para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, como por exemplo, os conceitos de funções de primeiro grau. Nesse sentido, no final da década de 1990, Gravina e Santarosa (1998) argumentavam que os ambientes informatizados possuem potencial pedagógico para auxiliar os alunos na busca de soluções para os obstáculos existentes no processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos.”	“Os resultados mostram que os participantes deste estudo trabalharam de maneira colaborativa e interativa para a realização das atividades propostas por meio da utilização dos dispositivos móveis como parceiros intelectuais no processo de aquisição do conhecimento matemático. Esses dispositivos auxiliaram os participantes a relacionarem as atividades realizadas no cotidiano com os conteúdos matemáticos estudados em sala de aula. Esses resultados também possibilitaram a elaboração de um produto educacional denominado Caderno de Sugestões que foi baseado nas atividades desenvolvidas durante a condução do trabalho de campo desta pesquisa.”
Leite, 2016	“Em um primeiro momento, colocou-se as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem das funções.”	“Atividades envolvendo função afim e função quadrática com o uso do <i>software</i> GeoGebra, função inversa e função composta. Foram propostas algumas atividades como a máquina de calcular, identificação de regularidades e gráficos das funções com auxílio do Google, as quais poderão ser utilizadas na sala de aula. Discutiu-se ainda a responsabilidade do professor no ensino

		das funções, e o uso da informática na escola.”
Oliveira, 2015	“Minha experiência no magistério lecionando em turmas do ensino médio me fez perceber a dificuldade dos alunos em aprender função. Para eles, é algo muito abstrato, longe da realidade, sem aplicação na vida, no cotidiano, ou seja, sem importância. É mais um assunto da matemática a ser “decorado”, “repetido” de acordo com o que o professor ensina.”	“São apresentadas sequências de atividades compostas por situações problema em que são explorados os principais conceitos presentes no estudo de funções afim e quadrática. Para auxiliar na elaboração das atividades foi utilizado como fonte de pesquisa o livro A Arte de Resolver Problemas de autoria de George Polya (1887-1985).”
Santos, 2013	“Dificuldades enfrentadas pelos alunos, principalmente no que se refere à leitura e a interpretação de gráficos.”	“Um dos resultados mais significativo desse trabalho diz respeito ao envolvimento dos alunos com os recursos tecnológicos e a motivação demonstrada nas aulas mais diversificadas, nas quais tiveram a oportunidade de socializar informações e aprendizados. O ambiente informatizado e a metodologia adotada exigiram participação e discussões mudando o cenário tradicional de sala de aula.”
Simon, 2014	“os alunos apresentam certa dificuldade em fazer registros escritos das atividades desenvolvidas bem como dos procedimentos utilizados na resolução dos problemas propostos, constatou-se que os alunos tinham dificuldades principalmente quanto à interpretação dos enunciados dos problemas propostos.”	“Com base nos resultados alcançados e nos depoimento dos alunos quanto às atividades, conclui-se que essa metodologia aproxima a matemática ao cotidiano do aluno, o que desperta maior interesse na realização das tarefas e conseqüentemente mais êxito na resolução das atividades.”
Siqueira, 2013	“os alunos apresentem dificuldades no conceito de função e suas peculiaridades.”	“o uso do <i>software</i> proporciona uma melhor compreensão na análise e interpretação dos gráficos. O trabalho em grupo colaborou nas relações interpessoais dos alunos e o uso de

		recursos computacionais trouxe novo estímulo ao processo ensino-aprendizagem. A pesquisa indicou que o professor, ao propor novas mediações e atividades de ensino, tem necessidade de refletir e reorganizar sua prática.”
Sousa, 2011	“Ao longo de minha vida profissional lecionando matemática em escolas públicas e privadas, sempre encontrei uma grande dificuldade em iniciar, de uma forma mais atrativa aos alunos, o conceito das funções matemáticas.”	“levar a aceitação ou não da modelagem matemática para a prática docente. No entanto, mesmo com uma aparente aceitação dessa metodologia pelos sujeitos de nossa pesquisa, não podemos assegurar que os mesmos realmente a utilizarão em suas práticas docentes; pois para isso, seria necessário após algum tempo verificar sua apropriação por observação dos professores em situação de aula.”
Vitolo, 2010	“O reconhecimento da necessidade de desenvolver propostas de apoio à inovação curricular na área de Matemática para o Ensino Médio”	“Tarefas que envolvam resolução de problemas em outras áreas do conhecimento, uso de tecnologia, abordagens interdisciplinares, aplicações em situações do cotidiano e sejam potencialmente ricas, no sentido de produzir situações de aprendizagem, sem a participação constante do professor na (re)organização do planejamento, a THA por si só não garante uma aprendizagem sob perspectivas construtivistas. Ainda em relação ao professor, cabe ressaltar que o principal desafio é aproximá-lo das pesquisas acadêmicas e que continuem sempre em processo de formação.”
Zatti, 2010	Dificuldade que os alunos apresentam com relação ao entendimento do conceito de função, pois grande parte dos professores trabalha esse conceito utilizando somente o livro texto, com linguagem aprimorada, tornando difícil a compreensão de conceitos,	“A análise dos dados obtidos durante o trabalho de campo aponta para a importância de se trabalhar a matemática de uma forma mais interligada ao cotidiano dos alunos. Pode-se inferir, também, que a Resolução de Problemas é uma estratégia eficaz no ensino-aprendizagem da matemática, tanto como método de ensino a ser utilizado

	pelos alunos, sem a interferência do professor.	pelo professor em sala de aula quanto para criar nos alunos uma nova postura: motivação na resolução de outros problemas e gosto pela Matemática que se aprende na escola.”
--	---	---

Nos problemas levantados pelos autores, eles identificam a falta de metodologias diversificadas que envolvam os alunos nas atividades propostas a fim de levá-los a compreenderem o conceito de função. Os resultados das pesquisas apontam que as aulas se apresentam ainda com ênfase à formalidade do conteúdo com pouca relevância para a relação existente com práticas sociais, ou seja, pouco envolvimento com o cotidiano. Os autores trazem como produto em suas dissertações propostas de atividades envolvendo princípios da Educação Matemática, principalmente a utilização da Resolução de Problemas e o uso de novas tecnologias.

Os autores Dias (2015), Oliveira (2015), Simon (2014), Vitolo (2010) e Zatti (2010) propõem atividades envolvendo **resolução de problemas** e tarefas com **situações problemas** com propósito de criar no aluno a motivação em querer resolver problemas propostos na matemática aprendida na escola com ênfase no contexto do aluno. Os autores Sousa (2011) e Leite (2016) desenvolveram atividade de **Modelagem Matemática** fazendo uso do aplicativo GeoGebra para representação gráfica das atividades propostas. Ladeira (2015), Santos (2013), Siqueira (2013), demonstraram uso de novos **recursos computacionais**, espaço tecnológico e uso de aparelho móvel como smartphone com aplicativos educativos para o ensino e acreditam que os dispositivos auxiliaram os participantes a relacionarem as atividades realizadas no cotidiano com os conteúdos matemáticos estudados.

Portanto, os resultados das pesquisas apontam para a necessidade da melhoria da prática pedagógica, com o uso de atividades interativas e diversificadas e a adoção das novas tendências da educação matemática, na perspectiva da aproximação da matemática escolar à realidade dos alunos, de uma aprendizagem coletiva, do envolvimento deles com essa aprendizagem e de que, assim, essa prática possa fazer dos espaços escolares ambientes propícios para aprendizagens significativas. A leitura que faço dos resultados da análise, me permite dizer que eles apresentam bastante clareza sobre a importância do uso de novas estratégias de ensino para ensinar matemática, inclusive do conteúdo de função, entendendo, é claro que isso deve se dar conforme a habilidade do professor de matemática, pois percebo que diante das propostas de ensino dos livros analisados, faz-se necessário que o professor

esteja preparado para fazer uso permanente deste recurso, pois assim poderá ou não impactar positivamente no processo de ensino e aprendizagem e também garantindo aos estudantes sua inclusão na construção de sua própria aprendizagem, aqui especificamente, a oportunidade de construir e se apropriarem do conceito de função.

3.4. Destaques que ficam ao fim de uma etapa

As reflexões trazidas até este ponto do texto são oriundas de minha imersão em uma discussão histórico-conceitual que serviram, principalmente, de aprendizado, tendo em vista que o filtro de meu olhar sempre levava em consideração a minha prática de sala de aula que foi intensamente revivida, trazendo para o presente, dúvidas, crenças, inquietações, ansiedades, perplexidades, erros, acertos, assim como os momentos de formação, nos quais também já havia tido a oportunidade de fazer essas reflexões. Tudo isso veio à tona... Creio, sobretudo, que essa etapa foi, para mim, um real momento de auto formação que adveio dessas reflexões.

Nesse sentido, o diálogo com os fundamentos teóricos certamente trazem como resultado o fortalecimento de minhas argumentações relativas aos aspectos conceituais e sua relação com o ensino do tema Função. Essas argumentações me aproximam de uma concepção de ensino sob a perspectiva da produção coletiva, sob a égide do diálogo e distinta da lógica de construção assumida pela ciência moderna e, no caso específico aqui, da Teoria de Conjuntos que implicou na utilização de uma linguagem extremamente rebuscada e técnica, presente nos principais livros textos de Matemática do Ensino Médio no período pós “Matemática Moderna”.

Mas os indícios de princípios para o ensino já começam a se apresentar e eles se materializaram, tanto na análise dos livros didáticos mais atuais, quanto na análise das pesquisas realizadas relativas ao tema Função, indícios que apontam para a proposição de atividades interativas e diversificadas, aproximação da matemática escolar à realidade dos alunos, aprendizagem coletiva e envolvimento dos alunos na construção de suas aprendizagens. O diálogo, nos diferentes momentos da etapa certamente foi preparatório para a continuidade da trajetória, pois a sensação, nesse instante, é que o início ainda está à frente.

E por entender que o início ainda está adiante, o capítulo seguinte será a continuidade da incursão no universo do tema Ensino de Função, quando passo para a segunda etapa do estudo, que se caracteriza como pesquisa de campo e envolve professores em um primeiro momento, num diálogo estabelecido a partir da realização de entrevistas, seguida do envolvimento de estudantes, num segundo momento, com quem também travo um diálogo, a

partir da resolução, por eles, de um teste diagnóstico e da análise das impressões deles no momento do processo de resolução.

Essa segunda etapa, que visa mais especificamente à compreensão de aspectos relativos ao processo de ensino e de aprendizagem deverá complementar a análise, mas será ela que me possibilitará a contextualização da análise, na medida em que os professores e estudantes estão localizados em um determinado tempo e espaço e, mesmo com a pretensão de que a proposta possa ser utilizada em outros tempos e espaços, a minha localização me faz naturalmente pretender atingir inicialmente as pessoas envolvidas no processo.

O estabelecimento de princípios para o ensino de Função deverá ser o resultado da próxima etapa, quando o que entendo como início de um processo de melhoria do ensino e aprendizagem deverá começar a ser materializado, com a tradução deles, sob a forma de diretrizes de ensino e a sua transformação em atividades destinadas ao ensino, na composição do produto denominado de Cadernos para o Ensino de Função. Faz todo sentido, portanto, o entendimento de que o início ainda está à frente.

4. ENSINO DE FUNÇÃO SOB A ÓTICA DE PROFESSORES E ALUNOS

Neste capítulo, que dá início à segunda etapa do estudo, na condição de pesquisadora, como aluna do Mestrado Profissional em Educação Em Ciências e Matemática, proponho-me a compreender o ensino e aprendizagem de função, mais especificamente função afim, tendo como base a coleta de dados da investigação diagnóstica realizada com professores e alunos. Ressalto que esta segunda etapa do estudo, envolvendo 05 professores que atuam em escolas da rede pública de ensino, localizadas no município de Santo Antônio do Tauá-PA e 25 alunos dessas escolas, com a intenção de dar voz a eles e ter também essas vozes como referência para o produto a ser elaborado, envolve entrevista e observação de práticas dos professores e a realização de teste pelos alunos, assim como o cruzamento dos resultados, de modo a ampliar a perspectiva de análise.

Início apresentando os professores sujeitos desta pesquisa, em seguida, abro uma sessão para descrever nosso primeiro diálogo. Logo após, ao observar suas falas, suas impressões, indico alguns princípios que emergiram da análise e foram organizados sob a forma de categorias para, a partir daí, buscar detectar outros indícios que nortearão a construção do produto a ser apresentado no próximo capítulo.

4.1 Personalizando o olhar: quem são os sujeitos

Para dar um teor mais significativo a esse primeiro momento da segunda etapa do estudo que faço, inicialmente, a apresentação dos sujeitos, considerando formação, tempo de regência na docência e suas perspectivas em relação ao seu desenvolvimento profissional. Utilizo nomes fictícios dos sujeitos a fim de não revelar suas identidades.

- ✓ Professor Gil: Tem licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Pará – UEPA, com especialização em Didática da Matemática pela Universidade Federal do Pará, tem 11 anos de regência em sala de aula, com as disciplinas Matemática e Física, na Escola Estadual de Ensino Médio Inácio Moura. Sua pretensão também é ingressar no mestrado profissional por reconhecer que necessita rever suas metodologias para tornar suas aulas mais atrativas.
- ✓ Professor Regue: Licenciado em Matemática pela Universidade do Estado do Pará, com especialização em Metodologia do Ensino da Matemática e Física pela Faculdade de Educação Regional- SERRANA. Tem 15 anos de regência em sala de aula com a disciplina Matemática, sendo oito anos na Escola Estadual de Ensino Médio Celso

Rodrigues. O professor faz mestrado em matemática pela Flórida Christian University-FCU.

- ✓ Professora Nilda: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Pará, com especialização em didática da Matemática, tem 15 anos de regência de sala de aula com a disciplina Matemática, sendo 08 anos na Escola Estadual de Ensino Médio Inácio Moura. Não tem pretensão de fazer outro curso, seja especialização ou mestrado e diz que sempre que é possível utiliza material manipulativo para ensinar matemática.
- ✓ Professora Lucy: Tem Formação Inicial em Pedagogia e Matemática, ambas pela Universidade do Estado do Pará - UEPA, não possui especialização, tem seis anos de regência em sala de aula no Ensino Médio, na Escola Estadual Inácio Moura. No momento não tem pretensão de fazer outros cursos.
- ✓ Professora Ana: Tem formação inicial pela Universidade Federal do Pará, possui especialização em Metodologia do Ensino da Matemática pela UFPA, tem 08 anos de regência no Ensino Médio, sendo que nos últimos 06 anos desenvolve seu trabalho na Escola Estadual Inácio Moura. Pensa em fazer o Curso de Direito, ou seja, ter outra carreira.

4.2 Primeiro diálogo: Antecipando as entrevistas

Antes de iniciar as entrevistas, estabeleci um diálogo com os professores, com a intenção de fazer com que os entrevistados sentissem que iriam fazer parte de um estudo e como tal, conhecessem e expressassem suas impressões sobre o que iria ocorrer. No diálogo, apresentei aos professores minha intenção de pesquisa, indiquei qual era o problema da pesquisa, esclareci a relevância do fenômeno a ser estudado e expliquei como se daria a entrevista, deixando-os livres para fazerem comentários que achassem pertinentes. Todos os professores que seriam entrevistados, ao se manifestarem, concordaram com o problema levantado e disseram que a pesquisa terá relevância no ensino. Após as devidas explicações sobre como seria o desenvolvimento da pesquisa, os professores concordaram em fazer parte do estudo e serem entrevistados, assinando termo de consentimento, se comprometendo e se disponibilizando a colaborar ativamente no processo de investigação, preenchendo uma ficha individual, com seus dados pessoais e de formação.

4.3 Ouvindo os Professores e coletivizando a pesquisa

O processo de escuta dos professores foi iniciado no mesmo dia em que foi feito o primeiro contato com eles. Nesse dia foram entrevistadas duas professoras, em um mesmo momento e, com os demais professores, a entrevista foi realizada individualmente, num período que durou aproximadamente 25 dias, em função da indisponibilidade dos professores, que trabalham em dias e horários diferentes na escola e ainda, pelo fato de que no mês de junho foram realizadas a 2ª avaliação, a recuperação e festejos juninos.

As entrevistas foram registradas por meio de recurso de áudio e vídeo, sendo que a professora Lucy não quis ser filmada no momento da entrevista. Depois de coletadas as informações elas foram devidamente organizadas e analisadas.

4.4 Pensando o Ensino a partir dos Resultados Obtidos: Categorias de Análise

Neste momento, o texto versa inicialmente sobre a análise das entrevistas com os professores e, após isso, sobre os resultados do teste aplicado aos alunos.

Da análise das falas dos professores, produzi categorias que Moraes (2003) denomina de emergentes, de forma indutiva que “implica construir as categorias com base nas informações contidas no *corpus* de pesquisa, por um processo de comparação e contrastação constantes entre as unidades de análise” (MORAES, 2003, p. 197). Organizei conjuntos de elementos semelhantes, com base nas respostas dos professores, caminhando do particular para o geral, resultando daí as categorias emergentes (MORAES, 2003).

Com base nas informações coletadas, a análise se deu a partir de três categorias de análise produzidas, sendo que a primeira está relacionada ao **aprendizado da matemática** que possibilita a compreensão sobre ato de aprender, considerando dois fatores, as *dificuldades prévias e as dificuldades relativas ao aprendizado de função*. A segunda categoria está diretamente relacionada à primeira, pois a compreensão do aprender nos remete à **compreensão do ato de ensinar matemática**, no caso específico, aqui, a temática Função. Nessa segunda categoria também foram considerados dois fatores, *o modo como ensina e a compreensão de como deveria ser ensinado*. Assim como na relação entre a primeira e a segunda categoria, a terceira também está relacionada à segunda, pois a perspectiva da superação das dificuldades de aprendizagem, quando são remetidas à análise do ensino, geram expectativas de modos de ensinar, ou de **perspectivas e/ou proposições de estratégias para o ensino de Função**.

Essa análise do diálogo com os professores, a ser feita a seguir, no meu modo de entender define a possibilidade de se colocar frente aos anseios e desafios enfrentados na sala de aula no que diz respeito ao fenômeno em estudo e a partir dos resultados, pensar em princípios que irão nortear a elaboração de possibilidades metodológicas para o ensino de função afim e transformar esses princípios em produto destinado ao ensino.

- Categoria 01: Aprendizado da matemática tendo em vista as dificuldades prévias e as dificuldades relativas ao aprendizado de função.

As dificuldades prévias aparecem em diversas falas:

Os alunos têm dificuldades em operar usando as quatro operações, eles estão chegando sem base do fundamental, está havendo uma má preparação do aluno no Ensino Fundamental. É preciso criar estratégia para suprir essas dificuldades de aprendizagem, assim fica mais difícil o alunado compreender os conteúdos do Ensino Médio. (...) Os alunos sabem ler, mas não sabem interpretar o problema usando a linguagem matemática para resolver problemas. No momento de algebrizar a “coisa” eles apresentam dificuldades. (professor Gil)

Além da falta de concentração para entender as perguntas, meus alunos apresentam dificuldades para aprender conteúdos do Ensino Médio, pois ainda não sabem aplicar as operações fundamentais, principalmente as quatro operações, que é conhecimento básico para aprender cálculos aritméticos e algébricos, e isso dificulta a aprendizagem dos conteúdos do ensino médio. (...) a dificuldade existe pelo fato do alunado, não saber interpretar determinada questão, e desenvolver de forma insegura. (professor Regue)

Fica difícil eles aprenderem o conceito se não tem base do fundamental, às vezes deixo de lado o conteúdo para ensinar as operações fundamentais e resolução de problemas. (professora Nilda)

Falta de concentração para entender as perguntas, eles não sabem aplicar as operações fundamentais, as quatro operações e isso dificulta a aprendizagem dos conteúdos do ensino médio. (professora Ana)

A diferença entre os professores está no modo de agir em relação ao problema detectado. O professor Regue foi bem claro, dizendo que ele não iria deixar de abordar o conteúdo do Ensino Médio para tratar de assunto do Ensino Fundamental, pois se preocupa em cumprir o programa curricular proposto pelo ENEM. O professor Gil, no entanto disse que não se importa em fazer revisão sobre problemas e operações fundamentais, que são pré-requisitos para compreender função, o mesmo acontecendo com a professora Nilda.

Aqui faço destaque sobre o que Sanchez (2004) menciona em relação às dificuldades de aprendizagem em Matemática, na linha do que observei nas falas dos professores, pois, dentre outros fatores, o autor indica como fator que interfere no processo de aquisição do conhecimento:

Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações e dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente. (p.174).

As dificuldades relativas ao aprendizado de Função também aparecem em diferentes falas de professores

Por ser um conceito muito abrangente, acaba por sua vez, envolvendo inúmeras dificuldades de compreensão ao alunado, pois envolvem concepções diversas e múltiplas representações, fazendo-se então, necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos, quais significados o aluno pode produzir. (professor Regue)

Os alunos têm dificuldades de tudo da matemática, quanto a função estou de acordo com todos os itens: sentido da função, problematização, cálculos aritméticos e construção de gráficos. (professora Nilda)

Dificuldades na representação dos gráficos no plano cartesiano, dificuldades de compreender os diferentes cálculos. (professora Lucy)

No tocante a essa dificuldade, existe quase unanimidade em relação à sua responsabilidade na busca de superação do problema detectado. Todos os professores assumem a responsabilidade pelo ensino, dizendo que buscam alternativas de superação das dificuldades apresentadas pelos alunos, com exceção da professora Ana, que parece não refletir sobre sua própria prática, que deixou claro o desinteresse dos alunos em seus estudos, inclusive em aprender matemática, e “se eles não entendem o assunto é devido não quererem estudar”.

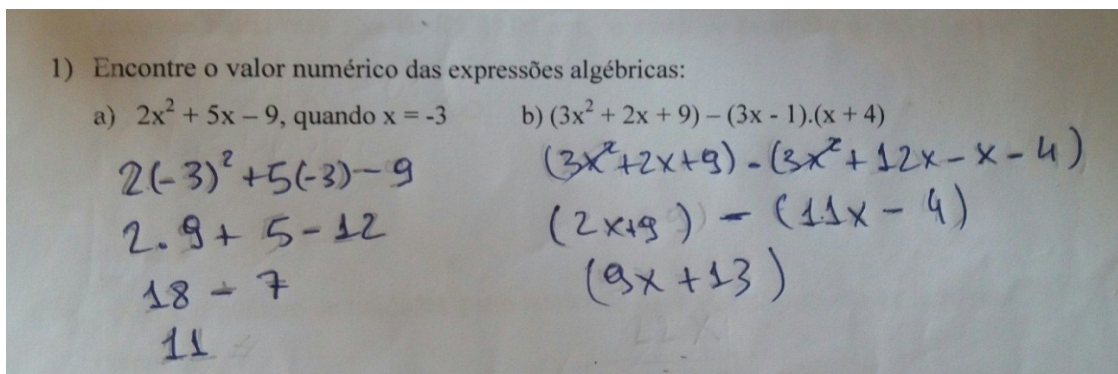
A complexidade reconhecida pelo professor Regue me faz refletir sobre essas múltiplas representações, que podem ser estabelecidas a partir da relação entre quantidades variáveis e, por sua vez a fenômenos que se transformam, mas que podem ser estabelecidas como relação entre conjuntos, com os conjuntos sendo apresentados apenas numericamente e esses números não apresentarem relação explícita com fenômenos, situações ou contextos, ou como expressão analítica, relativa a uma lei de formação, que também pode não estar relacionada de forma clara a alguma situação. Essa complexidade também se apresenta como geradora de dificuldades na minha prática em sala de aula que, por sua vez faz com que meus alunos também apresentem dificuldades de compreender o conceito de função.

Para reforçar a discussão relativa às dificuldades apresentadas pelos alunos foi aplicado um teste aos alunos desses professores. Foi possível realizar o teste com cinco alunos do professor Regue, cinco do professor Gil e dois da professora Nilda. Os alunos da professora Lucy e da professora Ana não realizaram o teste, somando 12 no total. Acredito

que faltou articulação por parte das professoras no sentido de informar aos alunos. É importante destacar que as questões foram retiradas do livro didático de Dante (2002), já utilizado pelos alunos do Ensino Médio.

Em termos de resultados, observei que os alunos do professor Regue e do professor Gil demonstraram interesse em participar, resolvendo o teste mesmo com dificuldades, deixando em branco algumas questões. Os da professora Nilda não mostraram interesse em participar e apenas dois aceitaram fazer o teste.

Na primeira questão, envolvendo valor numérico de uma expressão, dos 12 alunos participantes, apenas dois chegaram ao resultado, correspondendo a um percentual de cerca de 16,6%, o que me permitiu constatar que a maioria dos alunos não sabe resolver operações com expressões algébricas, inclusive as que envolvem números inteiros negativos. Nas respostas erradas foi observada dificuldade na realização de cálculos envolvendo álgebra e do trabalho com números negativos, o que pode ser identificado nos dois itens das resoluções apresentadas a seguir.



1) Encontre o valor numérico das expressões algébricas:

a) $2x^2 + 5x - 9$, quando $x = -3$

$$2(-3)^2 + 5(-3) - 9$$

$$2 \cdot 9 + 5 - 12$$

$$18 - 7$$

$$11$$

b) $(3x^2 + 2x + 9) - (3x - 1)(x + 4)$

$$(3x^2 + 2x + 9) - (3x^2 + 12x - x - 4)$$

$$(2x + 9) - (11x - 4)$$

$$(9x + 13)$$

Figura 03- Registro de resolução da 1ª questão- Aluno do Professor Regue

Em uma das resoluções de aluno para essa mesma questão, no item a, é possível identificar a incorreção no processo, pois o x teria que ser substituído por -3 . O aluno fez a substituição de forma correta, porém operou de forma errada. É possível observar, na resolução, incorreção na ordem das operações, por duas vezes ou talvez, na primeira etapa, não tenha conseguido visualizar a multiplicação existente no termo $5x$ o que o impediu de chegar ao resultado correto. Na letra b, o aluno demonstrou habilidade aplicando corretamente as operações, no momento de multiplicar polinômios, depois reduziu os termos semelhantes também de forma correta, chegando ao resultado. Notou-se apenas a falta no sinal negativo no termo $9x$. Nesta questão fica evidente que o aluno apresenta ainda dificuldades de operar com números negativos. Neste momento, percebi que muitas vezes em minhas aulas não fiz essas

observações, por acreditar que eles já sabiam, sem fazer essa relação entre número real e a variável.

1) Encontre o valor numérico das expressões algébricas:

a) $2x^2 + 5x - 9$, quando $x = -3$

$$2 - 3^2 + 5 - 3 - 9:$$

$$(1+3).4.1 - 8:$$

$$(-32.1)$$

b) $(3x^2 + 2x + 9) - (3x - 1)(x + 4)$

$$(3x^2 + 2x + 9) - (3x - 1)(x + 4)$$

$$(3x^2 + 2x + 9) : 16^2$$

$$(3x - 1) : 3$$

$$(x + 4) : 5$$

$$16^2 : 3 \cdot 5 = 24^2$$

Figura 04- Registro de resolução da 1ª questão- Aluno do Professor Gil

E nessa outra, o aluno apresentou mais dificuldades ao realizar a tarefa. No item a ele não resolveu a expressão seguindo a ordem das operações. No caso, teria que resolver a potência, depois a multiplicação e em seguida as adições e subtrações na ordem em que aparecem. Na letra b não consegui entender o porquê do 16^2 , mas é possível concluir que o aluno ainda não sabe resolver expressão algébrica e reduzir termos semelhantes.

1) Encontre o valor numérico das expressões algébricas:

a) $2x^2 + 5x - 9$, quando $x = -3$

$$2 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 9 = 0$$

$$2 \cdot 9 + (-15) - 9 = 0$$

$$18 + (-15) - 9 = 0$$

$$3 - 9 = -6 \neq$$

b) $(3x^2 + 2x + 9) - (3x - 1)(x + 4)$

$$3x^2 + 2x + 9 = 3x^2 + 12x - x - 4$$

$$3x^2 + 2x + 9 = -3x^2 - 12x + x + 4$$

$$2x + 12x - x = 4 + 9$$

$$14x - x = 13$$

$$13x = 13$$

$$x = \frac{13}{13} \quad x = 1 \neq$$

Figura 05- Registro de resolução da 1ª questão- Aluno da Professora Nilda

Nesse terceiro exemplo de resolução, o aluno demonstrou habilidade para resolver a questão a, e aplicou corretamente as operações, chegando ao resultado correto. No entanto, ele iguala a expressão a zero, possivelmente por compreender a expressão como uma função. Na letra b, o aluno transformou novamente a expressão em uma equação, colocando um sinal de igualdade no momento da resolução. A diferença em relação às resoluções é que o sinal de igualdade nesse item foi acrescentado entre os termos que compunham a expressão e isso lhe levou a errar o resultado final.

Com base nas respostas obtidas nessa questão do teste e lembrando a quantidade de respostas erradas correspondeu a um percentual de cerca de 16,6%, pode-se afirmar que a maior parte dos alunos apresentou dificuldades em operar corretamente o cálculo envolvendo expressão algébrica. As dificuldades observadas se alinham às falas dos professores relativas às dificuldades indicadas por eles, quando mencionam a falta de pré-requisitos para aprender o que vem pela frente, no caso o trabalho com função. Nas questões 2 e 3 também foram identificadas as mesmas dificuldades, pois se tratavam de expressões numéricas e equações do 1º grau, de onde se pode identificar uma primeira dimensão relativa às dificuldades de aprendizagem do tema função, que diz respeito à dificuldades com **cálculos aritméticos e algébricos**.

Na questão 4, que trata da formalização do conceito de função a partir de uma situação problema, acredito que foi a tarefa mais difícil para os estudantes, pois exige atenção e compreensão sobre a leitura do problema, exige também atitude para iniciar a organização dos dados com clareza para que seja possível chegar ao resultado esperado. Ao apresentar a questão, tendo como parâmetro relatos de professores sobre as suas dificuldades de aprendizagem, já antevia que essa tarefa não iria ser fácil para eles e os resultados atestaram essa previsão, pois não foram positivos. Os alunos apresentaram dificuldades em interpretar os dados do problema e fazer a transformação para a linguagem matemática, para então determinar a lei de formação da função. A questão era a seguinte:

4) Um fabricante vende um produto por R\$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa de R\$ 0,30 por unidade.

a) Qual é o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?

b) Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá lucro ou prejuízo?

Ao analisar as respostas dos alunos, observei que a maior parte deles deixou a questão em branco, nem tentando resolvê-la, me fazendo crer que eles apresentaram dificuldades de interpretação e ainda não sabem traduzir a situação problema apresentada para a linguagem matemática. Faço aqui a inferência de que é justamente neste ponto que se intensificam as dificuldades de aprendizagem, principalmente quando se trata do sentido da função e problematização.

Apresento a seguir um recorte do teste resolvido por um aluno, no qual é apresentada uma das questões presentes no teste e nele não há registro algum do processo de resolução e, como as respostas apresentadas para os itens *a* e *b* não tem referência a nenhum cálculo ou processo de resolução relacionado à temática Função, a hipótese que levanto é de que foram

tentativas feitas pelo estudante de forma aleatória. Para responder o item *a*, a referência tomada foi o valor da taxa fixa e com relação ao item *b* a resposta foi simplesmente uma das alternativas apresentadas.

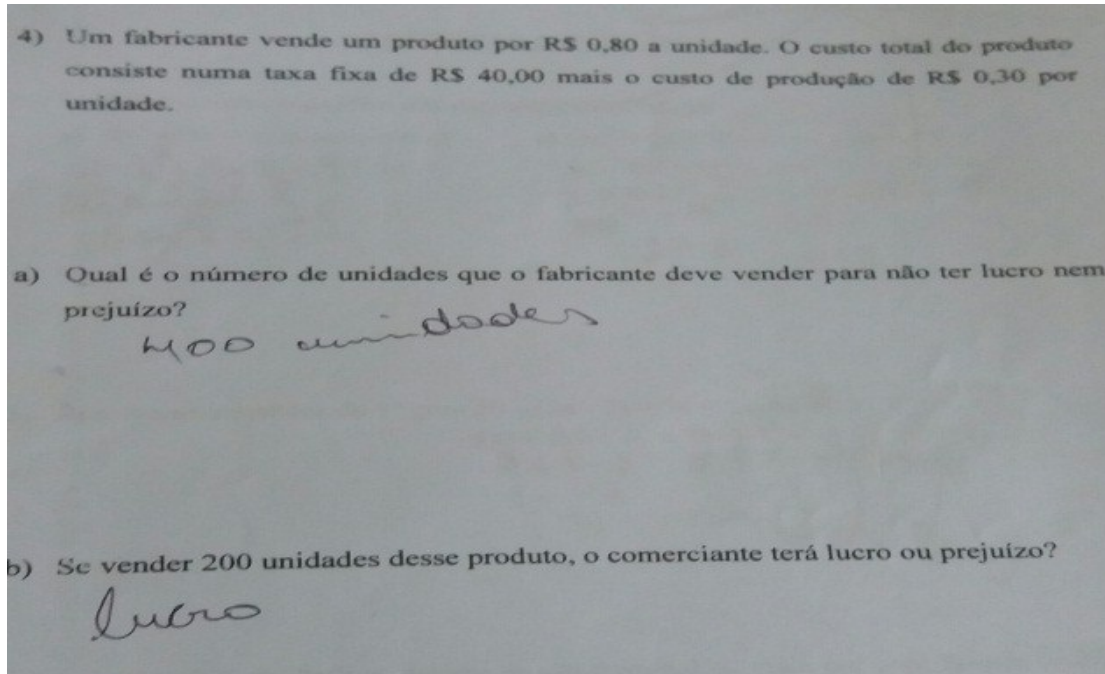


Figura 06: Resolução da 4ª questão: aluno da professora Nilda

Neste outro recorte que apresento a seguir, de teste resolvido por aluno, no qual é apresentada a mesma questão do recorte anterior, o estudante apresenta alguns registros da resolução, mas esses registros não permitem, na minha análise, compreender o raciocínio implícito para justificar as respostas apresentadas, pois não existe um processo de resolução relacionado à temática Função. São tentativas que parecem ter sido feitas de forma aleatória, com a simples adição e multiplicação de valores apresentados na questão. O que é possível observar é que as operações foram realizadas de forma incorreta, talvez pelo fato de se tratarem de números decimais, o que permite concluir que o aluno apresenta dificuldades nas operações envolvendo decimais e ainda não sabe resolver este tipo de problema relacionado à Função, mas para não deixar em branco, escreveu essa resposta. No diálogo que acontecia no momento de resolução, pelos alunos, indaguei sobre o processo de resolução utilizado pelo aluno, mas nem mesmo ele, quando perguntado, soube explicar o que tinha feito. Além das dificuldades mencionadas, isto indica, também, sua dificuldade de aprendizagem ao se tratar de questões que envolvem Resolução de Problemas.

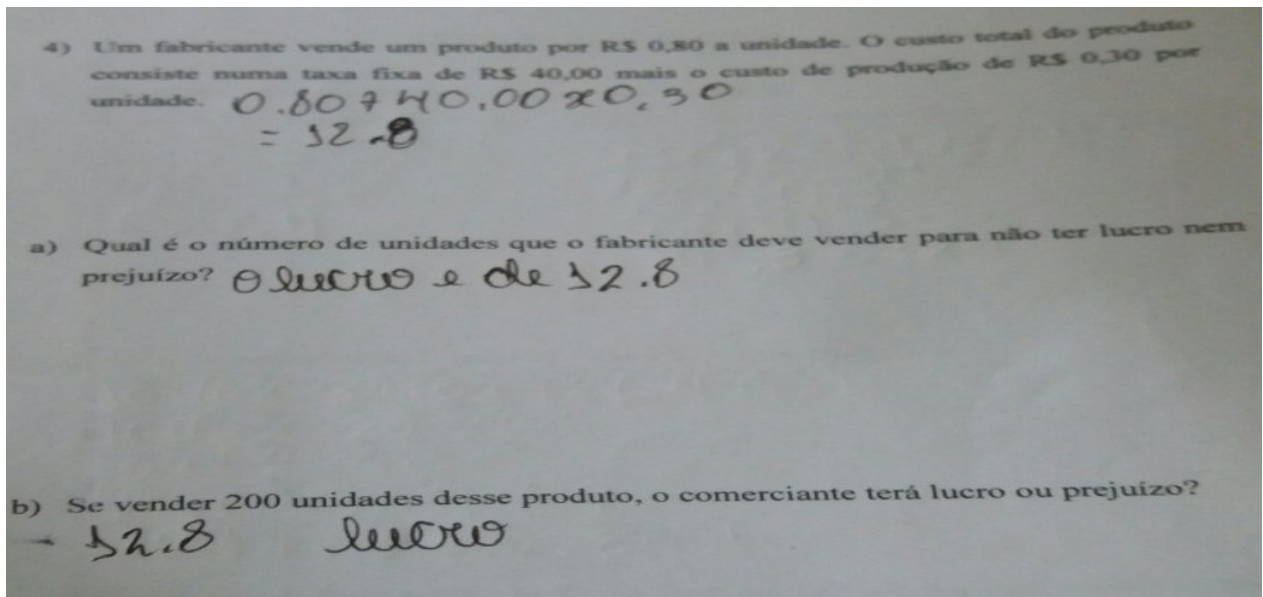


Figura 07: Resolução da 4ª questão - aluno do professor Gil

Na análise dessa questão também identifiquei alinhamento em relação às falas dos professores, quando tratam das múltiplas representações, dos sentidos de Função e das dificuldades de problematização das situações. Dessa análise, identificamos outras duas dimensões relativas às dificuldades de aprendizagem do tema função, que diz respeito à dificuldades com a **Problematização, que envolve o uso da Linguagem Matemática** e dificuldades da compreensão do **Sentido de Função**, que precisa ser compreendido para que a problematização se dê ou seja entendida.

Acrescento, na análise, que no momento da realização do teste, num processo de escuta das vozes dos alunos, observei as suas angústias de não saberem resolver uma questão matemática como as apresentadas. Falas com “essa não sei nem como começar”, “eu nunca resolvi uma questão desse tipo”, “tem problema deixar em branco?”, “não sei resolver”,... São relatos que também me mobilizam a repensar minha prática docente, pois percebo a necessidade de buscar caminhos diferenciados para propiciar uma aprendizagem mais efetiva aos alunos no Ensino Médio. Não podemos permanecer inertes diante de um problema tão visível na sala de aula.

Finalizo a discussão sobre os resultados dessa questão presente no teste aplicado aos alunos, com a apresentação, a seguir, de uma resolução feita corretamente por um aluno (fig. 08). A apresentação da questão não se justifica apenas pelo fato do aluno ter resolvido corretamente, mas também em razão das reflexões geradas pelo resultado do diálogo estabelecido com o aluno no momento da resolução.

4) Um fabricante vende um produto por R\$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R\$ 40,00 mais o custo de produção de R\$ 0,30 por unidade.

$$L = 0,80 - 0,30$$

$$L = 0,50$$

a) Qual é o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?

$$0 = 0,50x - 40$$

$$0,50x = 40$$

$$x = \frac{40}{0,50}$$

$$x = 80$$

b) Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá lucro ou prejuízo?

$$F(200) = 0,50 \cdot 200 - 40$$

$$F(200) = 100 - 40$$

$$F(200) = 60$$

Figura 08: resolução da 4ª questão de aluno do professor Regue

Este aluno resolveu a questão corretamente e quando eu perguntei a ele sobre o processo de resolução ele explicou como foi que interpretou o problema, para poder resolvê-lo. Foi possível perceber, na sua fala, seu esforço pessoal no processo de aprender, quando ressalta que, para ele, as aulas precisam ser mais dinâmicas e os professores precisam dar mais oportunidades na sala de aula aos alunos, mais tempo para tirarem suas dúvidas, para que, dessa forma, haja melhor aprendizagem. O aluno menciona o uso de jogos manipulativos e tecnologias como alternativa para as aulas se tornarem mais interessantes e atenderem as suas expectativas.

Este foi um momento interessante da realização da pesquisa, pois o diálogo que estabeleci com o aluno e a atenção dada a ele me fez refletir que esse pode ser um processo a ser tornado comum no meu modo de me relacionar com os alunos, escutando, tentando compreender como pensam, identificando dificuldades, dúvidas, acertos. Foi nesse momento que percebi a necessidade de promover este espaço de diálogo na sala de aula, para que eles possam ser ouvidos e nós professores possamos ajuda-los no processo de aprender. Considero este relato importante, quando o aluno sugere possibilidade metodológica para o ensino de função com a utilização de jogos e tecnologias, pois essa é uma ótica importante a ser

considerada e contemplada como uma possibilidade de aprendizagem na construção do produto.

A última 5ª questão pedia o seguinte: - Construa o gráfico, no plano cartesiano, da função indicada: $f(x) = 2x - 1$, sendo $D = \{1,2,3,4\}$

A maior parte dos alunos não concluiu a questão e cinco deles deixaram em branco. Um dos alunos, cuja resolução está apresentada a seguir, não conseguiu fazer o gráfico e disse que não iria fazer porque não sabia, entregando o teste apenas com a resolução da função, ou seja, substituiu o x na função para encontrar o y , conseguindo encontrar os valores corretos de y , mas ele não consegue dar sequência e utilizar os pares ordenados (x,y) para identificar pontos no gráfico cartesiano.

5) Construa o gráfico, no plano cartesiano, da função indicada:
 a) $f(x) = 2x - 1$, sendo $D = \{1,2,3,4\}$

x	y	$f(x) = 2x - 1$
1	1	$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	3	$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
3	5	$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
4	7	$f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$

Figura 09: resolução da 5ª questão de aluno da professora Nilda

A resolução apresentada a seguir demonstra que o aluno compreendeu a questão, na medida em que o processo de resolução está de acordo com o que foi solicitado e que domina o processo de construção de gráficos, a partir da substituição de valores, tendo feito isso de modo organizado e sequenciado. Também demonstra o domínio da técnica de resolução, pois ele resolveu corretamente as expressões para encontrar o valor de $f(x)$, a cada substituição feita, traçou o gráfico com os eixos x e y também posicionados de forma correta, assim como os pontos que foram marcados em cada um dos eixos e, mesmo que não tenha traçado a reta da função, talvez por esquecimento, representou os pontos que foram determinados pelos pares ordenados encontrados e que permitiriam o seu traçado.

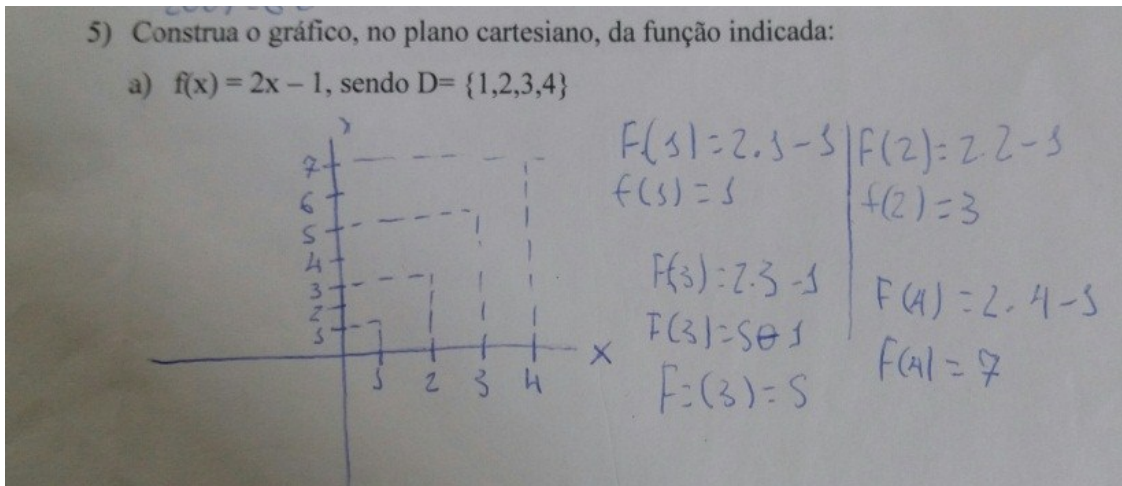


Figura 10: resolução da 5ª questão de aluno do professor Gil

A resolução apresentada a seguir é de um dos poucos alunos que acertou a maior parte da questão. Podemos visualizar no gráfico que ele encontrou os valores corretos de y , porém as coordenadas no plano cartesiano foram dispostas de maneira incorreta, assim como a sequência dos números. Os erros trazem o entendimento de que o aluno não tem a exata compreensão do Plano Cartesiano e de que as retas x e y se cruzam perpendicularmente no ponto zero, origem dos Números Naturais a serem dispostos em sequência. A dificuldade de construção de gráficos pode ser perfeitamente observada na figura.

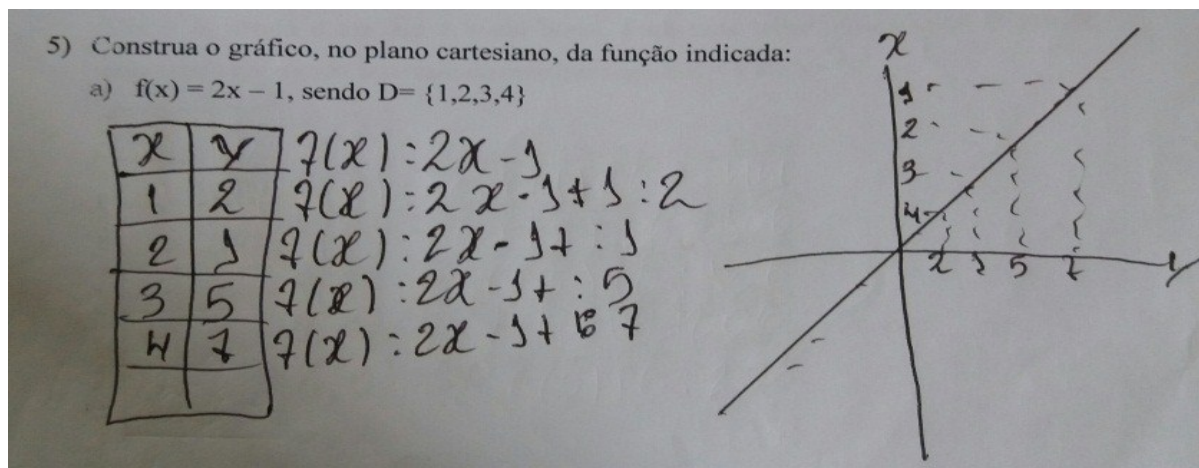


Figura 11: resolução da 5ª questão de aluno do professor Regue

Nesta questão, foi observado que os alunos entenderam a substituição do x pelo valor dado no conjunto D , mas demonstraram dificuldades de representar os dados no gráfico. No momento da resolução considerei importante orientá-los nessa questão para que eles não deixassem em branco e pudessem resolver. Mesmo assim, alguns alunos ainda apresentaram dificuldades de representar no gráfico a função, conseguiram fazer apenas o cálculo dos

valores do conjunto imagem da função dada. Esses resultados indicam a dificuldades desses estudantes no momento de construir o gráfico, que também são as mesmas dificuldades observadas nos meus alunos. Essa dificuldade acaba por dificultar a compreensão da função em estudo, o que nos leva à reflexão sobre como se pode intervir no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, em se tratando do conteúdo função afim. Nesse sentido, acredito que os gráficos devem ser explorados desde o nível fundamental. E a ideia de construção de gráfico se constitui desde o I Ciclo de alfabetização, com diferentes tipos, mesmo de forma pictórica.

Na análise da 5ª questão o mesmo alinhamento identificado nas questões analisadas anteriormente também foi verificado, no que diz respeito à construção de gráficos e dessa análise, identificamos a quarta dimensão que complementa o quadro de dificuldades observadas, que tem relação com a **Construção e Análise de Gráficos**.

A análise do teste aplicado aos alunos teve como parâmetro quatro dimensões que perpassam as dificuldades de aprendizagem relativas à compreensão de dados sobre função. Essas dimensões aparecem, sob a forma de resumo esquemático, no diagrama a seguir, no qual se pode ter uma visão mais precisa sobre tais dificuldades. É a partir desse resultado que se poderá propor uma intervenção que possa contribuir para a melhoria da aprendizagem.

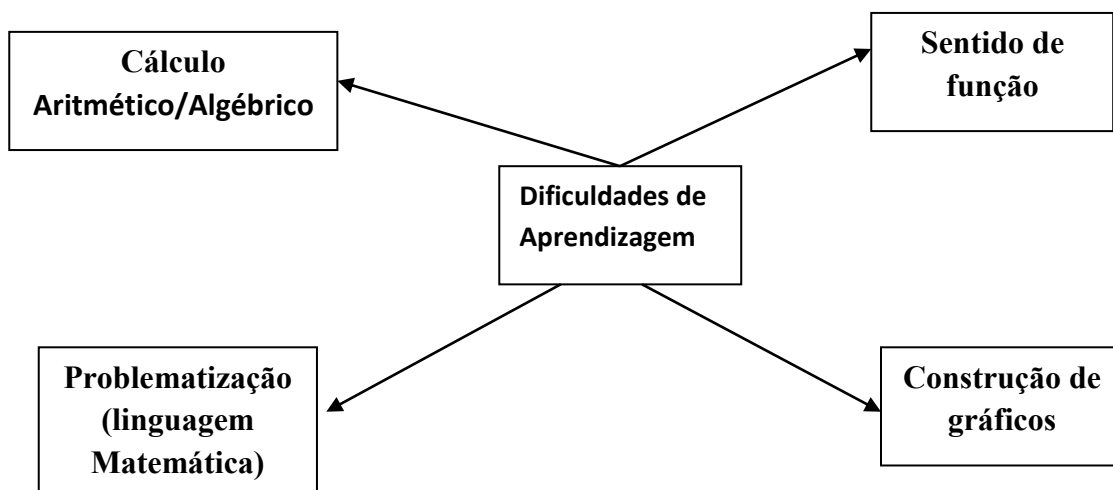


Figura 12: Dificuldades de Aprendizagem

Os resultados que observei no processo de resolução do teste diagnóstico, pelos alunos e a análise desses resultados me fazem acreditar que ao ensinar precisamos ter o cuidado de garantir a aprendizagem e trago a visão de Caldeira (1998) para dialogar, quando afirma que a visão da matemática absolutista, onde se prima pela reprodução de uma matemática pronta,

fria e sem espaço para criatividade, calcado principalmente nas operações aritméticas, procedimentos, definições e teoremas geométricos. Conceitos imutáveis, transmitidos, não proporciona ao aluno compreender e organizar os dados e muito menos dar a eles a oportunidade de aplicar em sua realidade social.

O autor diz que agindo assim, se produz um clima desfavorável e estéril em sala de aula, e de certa forma se produz apatia por parte dos alunos, sem possibilitar que a matemática seja vista como uma disciplina de investigação necessária e, portanto, útil para o aluno. (CALDEIRA, 1998, p.23)

- Categoria 02: Compreensão do ato de ensinar Função, considerando o modo como ensina e a compreensão de como deveria ser ensinado.

Os professores relatam o modo como ensinam e refletem sobre sua prática, apontando expectativas. Há diferença entre eles e por conta disso apresento e comento as falas dos professores Gil e Regue, para depois apresentar e comentar as falas das professoras Nilda, Lucy e Ana.

Introduzo dizendo que função é mais uma operação, partindo de uma situação problema. Em seguida, escrevo no quadro sua definição, classificação e por construção de gráficos. (...) Minha maneira de dar aula talvez não esteja ajudando os alunos compreenderem melhor o assunto; é necessário buscar novas estratégias de ensino, mudar minha prática talvez seria uma saída para ajuda-los, preciso buscar novas possibilidades de ensino para melhorar e facilitar a aprendizagem.(professor Gil)

Através de definições e leis de formação matemáticas, pares ordenados, relação de grandezas, relação de elemento, enfim, tópicos relacionados com situações-problemas que estão presentes no cotidiano. Primeiramente procuro utilizar a história da matemática como estratégia de ensino e o vídeo como recurso didático, especificamente tópicos relacionados ao conceito de função, posteriormente, explano o conteúdo utilizando a aprendizagem significativa. (professor Regue)

O professor Gil, apesar de apresentar uma situação problema, desenvolve o ensino priorizando a definição de Função. No entanto ele reflete sobre sua prática e identifica necessidade de mudança. Essa reflexão demonstra capacidade de olhar para si e o reconhecimento de que sua ação é um fator determinante no processo de construção do conhecimento, o que implica pensar no uso de uma metodologia que estimule e facilite a compreensão dos alunos. O professor Regue desenvolve o ensino dentro de uma concepção sistemática, valorizando a assimilação de conhecimentos transmitidos, mas fala que insere em suas aulas a história da matemática, certamente com a intenção de dar significado aos objetos

matemáticos a serem estudados e essa pode ser considerada uma alternativa sugerida por esse professor, para melhoria do processo ensino-aprendizagem.

O modo de ensinar dos professores nos remete a Carvalho (2005) que divide o ensino da Matemática em três componentes. O primeiro refere-se a Conceituação, onde a prioridade se dá por “aulas teóricas”, pois o professor apresenta definições, fórmulas (possivelmente deduzidas), e relaciona os novos conceitos com os já conhecidos pelos alunos. A seguir, tem-se o momento da Manipulação, onde o aluno será solicitado a resolver exercícios com questões convencionais tendo como base os exemplos já resolvidos, caracteriza-se como “exercícios de fixação”, onde é oportunizado aos alunos aplicarem os conceitos das “aulas teóricas”. Por fim, tem-se o terceiro componente, a Aplicação, na qual objetiva-se relacionar o conhecimento teórico com a solução de situações concretas, quase sempre as situações problemas não condizem com a realidade dos estudantes. Assim, como reflexo desse tipo de aulas dadas pelos professores, a maior parte dos livros-textos brasileiros adota essa mesma estrutura.

De acordo com Carvalho (2005), este modelo de ensino reduz a matemática ao cálculo, diz que existe máquina para calcular e seria importante que o trabalho matemático primasse pelo raciocínio, pela capacidade de resolver problemas e de usar as ideias matemáticas para explorar situações diversas. O autor enfatiza que o importante não são os cálculos, mas sim saber o que fazer com eles.

Isto me faz refletir sobre as exigências que temos nas mãos, de não permanecer com um ensino que prime pela transmissão de conhecimentos, onde os alunos assumem o papel de meros receptores de conhecimentos, sendo estes recebidos e não construídos. Com essa prática podemos estar contribuindo para um ensino sem significado para o aluno, e isto pode representar um resultado negativo no ensino e aprendizagem da matemática e conseqüentemente promover a decadência no próprio sistema educacional.

No caso do objeto matemático Função, por ser um conteúdo que possui relação com vários outros conteúdos e a eles servindo de base, tem maior implicação na continuidade da aprendizagem de matemática e as dificuldades que aí se apresentarem terão conseqüências muito grandes na continuidade da formação matemática dos alunos.

O que dizem as professoras Nilda, Lucy e Ana:

Aproveito situações vividas pelos alunos, como a venda de ovos, açaí, gasolina, e mostro a relação que existe entre quantidade e valor a ser pago. Depois introduzo a definição de função. Aproveito também para mostrar a relação que existe entre quantidade e valor a ser pago que logo vão perceber a relação de dependência de variáveis. Com situações do cotidiano, como

relacionando valor e quantidade para mostrar a relação de dependências de variáveis. (professora Nilda)

Enfatizo a importância desse conteúdo matemático, com relação a outros assuntos de outras disciplinas, principalmente quando utilizamos os gráficos. (...) acredito que a parte teórica deveria ser mais objetiva. Há muita informação com poucas situações ligadas a realidade do aluno, e isso é bem presente no que vemos nos livros didáticos, eles não contextualizam tratam do assunto dissociado da realidade dos alunos, e assim acabamos desenvolvendo nossas aulas da mesma forma, mas reconheço que preciso significar os conteúdos para que os alunos possam entender a disciplina. (professora Lucy)

Primeiramente com exemplos do cotidiano como exemplo, o preço da energia, a corrida de um táxi, etc. posteriormente apresento a teoria de função afim. (professora Ana)

As três professoras procuram explorar situações vividas pelos alunos, o seu contexto, exemplos do cotidiano. A professora Nilda inicia instigando a reflexão do aluno para pensar o que está sendo apresentado naquele momento da aula e observo na fala da professora Lucy que ela valoriza a relação com outras disciplinas. A reflexão feita por ela demonstra preocupação em dar significado aos conteúdos matemáticos abordados. A professora Ana dá ênfase a exemplos do cotidiano

Alinhado com o trabalho desenvolvido pelas professoras, percebe-se então, que a disciplina Matemática precisa ser ensinada com significações e que tenha sentido para a vida do aluno. Ensinar a resolver problemas matemáticos em sala de aula é uma tarefa árdua, na ação docente, pois é preciso que haja estímulos que leve o aluno a ler e interpretar a situação problema para criar estratégias, ou seja, caminhos que possam chegar à solução do problema. Contudo, observa-se que na realidade da sala de aula, um dos problemas enfrentados no dia-a-dia, ainda é a falta de leitura, pois os alunos apresentam certas deficiências no ato de ler e principalmente interpretar textos de qualquer área do conhecimento. (FREIRE, 1995)

Podemos acrescentar que o fazer pedagógico deve ser construído com base no cotidiano e sempre dinâmico, capaz de provocar a busca de soluções de problemas. Quando o professor conhece a realidade de seu educando, de sua turma, fica mais fácil fazer relação entre o conteúdo a ser ensinado e a prática a ser desenvolvida, proporcionando-lhe autonomia na construção do conhecimento e em suas decisões como agente transformador do mundo.

Finalizo as considerações sobre essa categoria de análise ressaltando que os professores que assumem a existência da dificuldade de aprendizagem matemática e mais especificamente do ensino de função, me fazem refletir que vivo constantemente o mesmo dilema em minha sala de aula e reconheço tais dificuldades que perpassam no cotidiano de meus colegas professores, assumindo junto com eles essas dificuldades.

- Categoria 03: perspectivas e/ou proposições de estratégias para o ensino de Função.

Nos relatos dos professores, com base nas expectativas, foi possível detectar anseios e perspectivas em relação ao ensino da temática em questão:

É indispensável partir de *resolução de problemas* envolvendo as operações fundamentais, para suprir essa primeira dificuldade que os alunos trazem do fundamental e também o *uso das tecnologias* para inovar o ensino. (professor Gil)

Ao meu ver, o que poderia melhorar o ensino-aprendizagem do conceito de função, seria a implantação de ambientes de ensino da matemática nas escolas públicas, pois estes espaços poderiam dar um suporte quanto ao desenvolvimento do raciocínio lógico e criatividade, estímulo do pensamento, habilidades na *resolução de problemas* que envolvem este conceito. (professor Regue)

Percebo a necessidade de termos na escola um espaço para se construir conhecimento matemático, propondo *atividades interativas com uso de materiais manipulativos e jogos*, tornando a aula motivadora para que o aluno sinta interesse em aprender, e que os assuntos não devem estar isolados do cotidiano dos alunos. (professora Nilda)

trabalhar as funções utilizando *recursos tecnológicos*, especificamente o computador, uma vez que os alunos têm afinidade com esses recursos. (professora Lucy)

Atividades que envolvam os alunos a querer aprender, com *situações do cotidiano*. (professora Ana)

No que se refere às sugestões para melhoria do ensino e aprendizagem de função, os professores fazem indicações da utilização da resolução de problemas, de atividades interativas, como o uso de materiais manipulativos e jogos, do uso de atividades que envolvam situações do cotidiano e do uso de recursos tecnológicos.

Nesse ponto da realização da pesquisa, chegando próximo ao ponto culminante dela, entendo que ao estabelecer paralelos entre os resultados obtidos no diálogo travado com professores e alunos, com os resultados obtidos nos momentos anteriores que envolveram a discussão conceitual e histórica do tema Função, a análise dos livros didáticos mais atuais e a análise das pesquisas realizadas relativas ao tema, já posso materializar os princípios para o ensino que irão nortear a elaboração do produto destinado ao ensino.

4.5. Princípios para o Ensino de Função sob a ótica de múltiplos olhares

Esta seção se configura como uma forma de apresentação conclusiva dos resultados da pesquisa, traduzidos sob a forma de princípios para o Ensino de Função, princípios esses que foram estabelecidos a partir de múltiplos olhares... Olhares de estudiosos tomados como referência teórica, olhares de autores de livros, olhares de professores e de alunos, tudo sendo analisado sob a ótica da pesquisadora e do filtro de suas experiências ensinando matemática e

tendo como destinação possibilidades de ensino e aprendizagem a serem utilizadas por professores que ensinam matemática. Os princípios deverão ser delineados de forma mais completa e referenciados na parte inicial do produto a ser elaborado, pois eles serão as referências principais para a elaboração de estratégias para o ensino de Função, traduzidas em uma proposta de ensino de Função, a ser denominada de Cadernos para o Ensino de Função.

Esses princípios têm como parâmetro a aprendizagem dos alunos, inclusive considerando seus conhecimentos prévios e a perspectiva de um ensino de Função a partir de estratégias que o torne significativo, cujos indícios identificados apontam para a proposição de atividades interativas e diversificadas, aproximação da matemática escolar à realidade dos alunos, aprendizagem coletiva e envolvimento dos alunos na construção de suas aprendizagens. Os princípios norteadores da proposta são os seguintes: O processo de ensino e aprendizagem do tema Função deve ter como referência primeira os conhecimentos prévios dos alunos em relação à temática; A compreensão deve preceder a formalização; A proposição de atividades introdutórias ao Ensino de Função deve ter como referência a realidade dos alunos; A abordagem das atividades precisa se dar de forma ampla e permitir a conexão com outras áreas de conhecimento e A diversidade na adoção de Tendências Metodológicas deve ser uma característica da Prática Pedagógica.

4.6. Considerações que ficam ao fim de uma Pesquisa

A pesquisa realizada me permitiu identificar princípios para o ensino, que serão materializados sob a forma de produto a ser aplicado ao ensino e na perspectiva de sua utilização por professores. Assim sendo, entendo não haver necessidade de tecer maiores comentários a esse respeito, a não ser a expectativa de que a teorização não permaneça apenas no papel, mas se transforme em prática, nas salas de aula e, como consequência, venha a significar melhoria no ensino e, mais importante ainda, em melhoria de aprendizagem.

Mas há uma consideração que precisa ser registrada, que é a identificação de uma relação muito nítida entre a dificuldade apresentada por alunos e a dificuldade de desenvolvimento de uma prática que possibilite a diminuição dessas dificuldades e, portanto, relacionada à formação de professores. Em vários momentos, durante a produção do texto, fiz menção às minhas dificuldades ensinando matemática, quase sempre relacionando ao meu processo de formação e como as dificuldades também transpareceram nas falas de professores, mesmo não sendo objeto de pesquisa, me fez criar algumas expectativas em termos de Formação de Professores e de que o produto a ser apresentado mais adiante possa

levar os professores a reflexões que entendo que deveriam estar presentes nesse processo de formação.

Uma primeira expectativa é de que o professor venha a associar o conhecimento estudado no seu processo de formação com uma visão prática desse conhecimento, de modo a permitir que os alunos tenham um aprendizado mais significativo. Essa será, certamente, uma preocupação que estará sempre presente na minha prática e, se minha produção auxiliar nessa direção, um dos objetivos com a proposição terá sido alcançado.

Outra expectativa que tenho é que a elaboração de uma proposta de ensino que se traduziu como resultado de minhas reflexões, ao chegar às salas de aula, possa incentivar professores a também refletirem sobre ensino e isso possa lhes possibilitar uma prática mais propositiva, trazendo situações e questões a serem analisadas pelos alunos, transformando o ensino em algo que vá muito além do uso sistemático do livro didático.

É também minha expectativa, principalmente após perceber que o modo como elaborei as questões destinadas aos alunos foram uma forma de reprodução do que tenho feito em sala de aula, que por sua vez foram resultantes do meu processo de formação e, certamente, é o que também ocorre com professores, o processo de avaliação deixe de ser uma reprodução do que foi vivido no processo de formação e passe a ser encarado como forma de avaliação da própria prática, num processo de contínua transformação.

Nesse momento, também entendo que uma nota digna de registro é o processo de mudança pelo qual passei ao realizar essa pesquisa, ouvindo professores, estudantes, refletindo sobre matemática, sobre ensino, aprendizagem e me envolvendo em um processo de criação que seria o resultado de tudo isso...

Certamente agora, depois de ouvir bastante e de muito refletir, tenho outras expectativas e certamente serei uma professora completamente diferente da que fui até agora, muito mais crítica e reflexiva e é muito provável que quando for levar essa proposta que aqui acaba de ser gestada para sala de aula, pois esse sempre foi um objetivo meu, eu venha a fazer algumas modificações, pois já começo a vê-la como provisória e inacabada.

E se há uma consideração que não pode deixar de ser feita nesse momento de finalização de uma pesquisa é que a minha expectativa não é de que a utilização dessa proposta de ensino se dê como um modelo a ser seguido, mas que seja olhada como uma referência, uma sugestão que só será efetiva na medida em que sofrer necessárias adaptações a cada contexto e a cada realidade e tenha a efetiva participação de professores, sugerindo, fazendo acréscimos e alterações que se mostrarem necessárias.

Essa última consideração, relativa à utilização em sala de aula, por professores, do produto de ensino denominado de Cadernos para o Ensino de Função possibilita a conexão com o capítulo seguinte, no qual será feita a apresentação desse produto, que representa a tradução dos princípios para o ensino, transformados em diretrizes e que, por sua vez, materializam os resultados de todo o estudo realizado envolvendo a temática “Ensino de Função”, desde a etapa de cunho bibliográfica, com a discussão conceitual, passando pela análise de orientações didáticas, por resultados de estudos que já vem sendo realizados em torno da temática e chegando ao diálogo estabelecido com professores e estudantes.

É aqui, portanto, que chegamos ao início anunciado sob a forma de sensação, desde o fechamento do terceiro capítulo. E, quando a proposta chegar aos professores, no início do processo, se configurando como resposta prática às questões levantadas no momento da proposição da pesquisa, quando ela se tornar efetiva realidade no ambiente de sala de aula, quando os resultados da aplicação e das ideias que forem inseridas à proposta chegarem até a mim, num processo de retroalimentação, aí sim eu vou considerar que o ciclo terá sido fechado.

5. CADERNOS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

Os Cadernos para o Ensino de Função são resultantes de Pesquisa realizada durante o desenvolvimento de Mestrado Profissional, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, que é desenvolvido pelo Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará. Esse produto faz parte da Dissertação intitulada Ensino de Função: Sua compreensão e possibilidades de ação a partir de múltiplos olhares, elaborada pela mestranda Soraia das Neves Barros, sob a orientação do prof. Dr. Neivaldo Oliveira Silva e se configura em um material didático destinado ao ensino de Função, para uso de professores que atuam no ensino de matemática.

É importante destacar que os múltiplos olhares que possibilitaram a elaboração do material, além de referenciais teóricos que se fazem necessários como fundamento de produções acadêmicas, foram olhares de professores que atuam com o ensino de função e de alunos desses professores. Todos eles tiveram suas vozes ouvidas para que suas experiências, anseios, dúvidas, dificuldades e expectativas também pudessem ser referências colocadas a serviço dessa produção.

5. 1. Apresentação

Os Cadernos para o Ensino de Função foram idealizados na perspectiva de sua utilização em sala de aula, por professores que atuam no nível médio. Para isso, a temática Função é tratada de forma introdutória e, portanto, o tipo de Função explorado é a Função Afim, mas as ideias discutidas devem ser entendidas como básicas e gerais, necessitando, é claro, de acréscimos para o trabalho de ensino com outros tipos de função. Essas ideias gerais são apresentadas a partir do estabelecimento de Princípios para o Ensino de Função, que serão explicitados na seção seguinte, detalhados e fundamentados, para depois serem apresentadas atividades, como propostas de encaminhamento metodológico para o ensino, mas que são apenas sugestões, dentre outras várias possíveis.

A composição do Caderno foi feita a partir da organização de atividades nas quais são explorados os três principais aspectos relacionados à aprendizagem do tema Função que julgo devam estar presentes no ensino, que são: (1) Em busca do Sentido de Função e de Relações. O sentido diz respeito ao Conceito de Função e as relações dizem respeito a outras temáticas já conhecidas e outras áreas de conhecimento; (2) Ampliando a Visão e estabelecendo pontes entre a compreensão e a formalização. Trata-se do aprofundamento do sentido, que parte do informal até chegar ao formal; (3) Consolidando a aprendizagem de função, onde são

desenvolvidas atividades de fixação. e as atividades são desenvolvidas tendo como referência diferentes tipos de situações e análise destas, conduzindo ao alcance dos objetivos que foram estabelecidos a partir dos aspectos em pauta.

Considerando a necessidade dos professores terem uma efetiva participação nos seus processos de formação, as atividades foram idealizadas e produzidas de modo a permitir a intervenção deles, adequando aos contextos de aplicação e dos alunos com os quais eles atuam.

5. 2. Princípios para o Ensino de Função

Os princípios para o Ensino de Função são a essência da proposta aqui apresentada e as referências que nortearam a definição das atividades presentes nessa produção, devendo ser entendidos como orientações para o trabalho de ensino, em sala de aula. São seis princípios que possuem articulação entre si e assim devem ser compreendidos, necessitando portanto, de leitura atenta, antes de sua aplicação.

- ✓ **O processo de ensino e aprendizagem do tema Função deve ter como referência primeira os conhecimentos prévios dos alunos em relação à temática:**

Esse princípio foi estabelecido com a intenção de superar dificuldades de aprendizagem de matemática que, segundo Sanchez (2004), se relacionam ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática, da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, da prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações e dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente. Nesse sentido é fundamental que os professores desenvolvam atividades exploratórias, buscando identificar possíveis dificuldades relacionadas aos pré-requisitos que dão base à temática e agir no sentido de buscar a superação delas. O trabalho com os pré-requisitos, no entanto, não precisa necessariamente anteceder o ensino de Função, como uma forma de apêndice ou etapa que antecede o ensino específico da temática, pois isso pode acobertar o objetivo principal que é o entendimento da própria temática. Esse trabalho deve fazer parte do processo, de forma natural, mas possibilitar o estabelecimento de relações com temáticas conhecidas pelos alunos; de modo que percebam que o “novo conteúdo” já é conhecido por eles;

✓ **A compreensão deve preceder a formalização:**

O trabalho com o tema Função envolve a realização de cálculos e o uso de modelos matemáticos produzidos por vários estudiosos. No entanto, esse trabalho só adquire sentido se os alunos construírem o significado e entenderem as diversas situações nas quais coisas presentes no mundo físico, que estão em permanente mudança, se relacionam umas com as outras e podem ser, de acordo com Caraça (1989) e considerando as características fundamentais de interdependência e fluência, descritas a partir de uma função. A formalização, através de processos de dedução até chegar a uma definição do que vem a ser uma função é uma etapa posterior e necessita desse estágio inicial, de modo que ele não se torne mecânico e de difícil entendimento, dificultando a aprendizagem. Outro autor que nos auxilia no estabelecimento deste princípio é Nóvoa (2001), que afirma que a proximidade entre o formalismo da construção matemática e a informalidade do mundo real é um princípio extremamente necessário. Essa aproximação ou estabelecimento de relação deve ser um desafio na profissão do educador matemático, uma preocupação que deve acompanhá-lo na sua prática de sala de aula ensinando matemática. É possível, como forma de conclusão relativa a esse princípio, parafrasear Freire (1996), que destacou em sua teoria que a “a leitura do mundo precede a leitura da palavra”.

✓ **A proposição de atividades introdutórias ao Ensino de Função deve ter como referência a realidade dos alunos:**

Conhecer a realidade dos alunos é um aspecto essencial para que esse princípio seja respeitado e adequar ou adaptar atividades a essa realidade é uma ação que pode se fazer necessária, mas o fundamental é que ao utilizar atividades com essa intenção seja possibilitado que os alunos se manifestem e, com isso, seja dado o indicativo da ambientação dos alunos, objetivo principal desse tipo de proposição; pode-se fazer uso de situações problemas como princípio da educação matemática. Aqui, novamente nos fundamentamos em Caraça (1989), pois se o autor diz que o conceito de função, mesmo que seja utilizado para explicar o estudo das leis de formação, sugere que este assunto seja introduzido a partir de ideias de correspondência entre grandezas, observando suas regularidades e deixando evidente a relação de dependência entre elas, para entender que as variáveis representam essas grandezas e a taxa de variação entre as variáveis, mas defende que a correspondência se dá entre coisas do mundo físico, entendemos então, que essas coisas do mundo físico podem ser

extraídas da realidade dos alunos, para a melhoria da aprendizagem dos alunos a quem se destina o ensino;

- ✓ **A participação dos alunos na sua aprendizagem é condição necessária, de modo a torná-la um processo pessoal em que o aprender se transforme em fazer matemática:**

Nesse sentido, há necessidade de que o ensino possibilite a ação do aluno, seja propondo, refletindo sobre suas produções ou outras já produzidas, levantando questões, estabelecendo planos, estratégias de ação, fazendo conjecturas, buscando caminhos, respostas, generalizando soluções, criando modelos,... e a aprendizagem não se torne um processo mecânico e sem significado. Esse princípio tem como referência Carvalho (2005), ao defender que seria importante que o trabalho matemático primasse pelo raciocínio, pela capacidade de resolver problemas e de usar as ideias matemáticas para explorar situações diversas, mas também tem referência em Freire (1996), quando diz que faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa, e isto, nos leva a entender que o educador deve ser o mediador nesse processo, incentivando seus alunos para essa reflexão e, nesse sentido, a participação ativa dos alunos se configura numa necessidade vital para a aprendizagem;

- ✓ **A abordagem das atividades precisa se dar de forma ampla e permitir a conexão com outras áreas de conhecimento:**

Uma abordagem integrada, na perspectiva da correlação entre os saberes de diversas áreas de conhecimento possibilita uma visão não fragmentada da realidade e também pode contribuir para dar sentido à matemática, na medida em que as questões quantitativas, de dimensionamento, localização, posicionamento, dentre outras que envolvem o pensamento matemático, vão estar inseridas em um dado contexto da realidade. Uma possibilidade de trazer esse princípio para o trabalho de sala de aula tem apoio nos estudos de Carraher e Schliemann (2011), quando confirmam em suas análises de pesquisa com alunos da classe baixa que o processo de ensino e aprendizagem precisa ser vinculado a situações reais, dando sentido aos conhecimentos matemáticos formais a partir das experiências construídas pelos alunos no seu dia-a-dia;

✓ **A diversidade na adoção de Tendências Metodológicas deve ser uma característica da Prática Pedagógica:**

É a diversidade que possibilita lidar com as diferentes individualidades e os mais variados grupos. O uso da história, facilitando a compreensão das produções e utilizações práticas de entes matemáticos é uma possibilidade, dando sentido a eles e despertando o interesse, não simplesmente contando a história, mas reconstruindo-a, como uma forma de reviver ou revisitar a história; a utilização de jogos exploratórios, alternativa considerada como meio de ensino dinâmico, altamente reflexivo, que oportuniza ao aluno interagir e aprender coletivamente na sala de aula e podem, de acordo com Borin (2007) e Macedo (2000), modelar conceitos matemáticos que na opinião dos alunos são abstratos e sem importância; o trabalho com a Resolução de Problemas, que possibilita a organização do pensamento, permite estabelecer conexão com a realidade e pode trazer a dimensão da pesquisa para o ensino de matemática e, segundo Brosseau (1996), em termos do ensino de função, voltado a um caráter dinâmico deste conceito para propiciar ao aluno sua apropriação, demonstrando o seu uso diante de situações problemas que sustente a funcionalidade deste saber; o desenvolvimento de trabalho de forma interativa, com o uso de aplicativos, de novas tecnologias e a possibilidade da proposição de atividades como construção de gráficos, que além de se apresentar como ferramenta atual, dá ênfase no visual e na ação dos alunos. Essas são algumas, dentre outras tendências da Educação Matemática, que podem ser utilizadas para dar esse tom diverso que, para Baccarin (2008) precisa ocorrer, para assegurar às crianças, aos jovens e adultos, aprendizagens e estratégias de ensino diversificadas, pois é na sala de aula, que a escola poderá garantir-lhes a possibilidade de construir conceitos, princípios e fenômenos cada vez mais complexos, e de transitar por diferentes campos do saber, aprendendo procedimentos, valores e atitudes imprescindíveis para o desenvolvimento de suas diferentes capacidades.

Na seção seguinte será explorado o primeiro aspecto relacionado à aprendizagem do tema Função, sob o título “Em busca do Sentido de Função e de Relações”. O sentido diz respeito ao Conceito de Função e as relações dizem respeito a outras temáticas já conhecidas e outras áreas de conhecimento. Nessa seção as atividades serão desenvolvidas tendo como referência diferentes tipos de situações e análise destas, conduzindo ao alcance de objetivos relativos a esse aspecto.

5.3. Em busca de Sentido e de Relações

Para a compreensão do tema Função há necessidade de se buscar o sentido do termo, quando relacionado à matemática, que pode ser entendido sob o prisma da relação entre fenômenos que sofrem transformações e são dependentes entre si. Mas essa dependência pode ser identificada em frases que, a princípio, não possuem relação com a matemática, como *a vida depende da existência de água* ou, dito de outra forma, *a vida existe em função da existência de água*. Dar sentido ao tema é uma preocupação que estará presente na proposta de ensino aqui delineada, mas existe outra preocupação, que é a busca do estabelecimento de conexões com outros temas da matemática, na perspectiva de se ter a percepção de que o tema não é completamente novo e de que existem outros conhecimentos matemáticos que poderão facilitar a compreensão e o trabalho com as funções.

- Ideias já conhecidas relativas ao tema Função:

A ideia de Função surge, naturalmente, em muitos temas que são estudados ao longo das várias séries que antecedem o seu tratamento formal através do qual o tema é estudado. No 7º ano, temos a Proporção, que nos remete ao tema Equação e, depois, ao tema **Função**, pois trata da relação entre duas ou mais grandezas variáveis e interdependentes. Veja, como exemplo, a situação a seguir, na qual existem duas grandezas, velocidade e tempo, as quais estão relacionadas de modo que, quando uma varia, a outra também varia, de forma proporcional:

- **Situação 01:** Se você faz um percurso entre dois pontos de sua cidade, distantes 1200 metros, o tempo de deslocamento dependerá de sua velocidade (média).

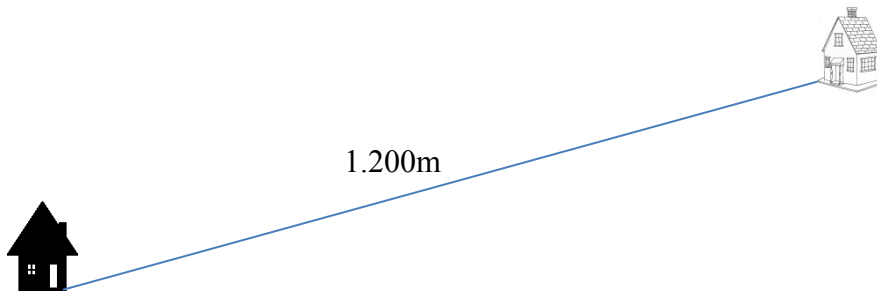


Figura 13: Distância entre dois pontos

Preencha a tabela a seguir, com o tempo de deslocamento para as diferentes velocidades.

VELOCIDADE (v)	1 m/s	2 m/s	4 m/s
TEMPO s (20) s (10) s (5)

Se relacionarmos os pares de grandezas, temos razões e a comparação entre as razões, que é uma proporção. Mas essa situação é um exemplo de Função. Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

$$F(v) = \frac{1200}{60v} \text{ ou, simplesmente,}$$

$$F(v) = \frac{20}{V}$$

A partir daqui cabe a você, professor(a), continuar explorando a situação. Observe as orientações a seguir, de modo que possa participar de forma propositiva do trabalho de ensino.

Orientações Metodológicas:

- A situação pode ser modificada e envolver outros pontos de referência que sejam conhecidos por eles, de modo que isso possa ser vivenciado e experimentado pelos alunos. A utilização de mapas de cidades ou de bairros pode ser uma alternativa interessante;
- Explore a situação detalhadamente, até que os alunos consigam visualizar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função. O ideal é que os alunos cheguem a essa lei;
- Explore a situação, propondo problemas que, ao serem resolvidos pelos alunos, possibilitem identificar dificuldades relativas ao trabalho com equações e agir no sentido de superá-las.
- A utilização de pequenos mapas de bairros, de cidades pode ser uma alternativa interessante, pois as questões de localização podem possibilitar, posteriormente, o trabalho com gráficos.
- O objetivo aqui era estabelecer relação entre Função, Razão, Proporção e Equação, mas a situação pode continuar sendo explorada até chegar ao trabalho com gráfico. Na atividade relativa à situação 02 o desenvolvimento é mais completo e a primeira pode ser usada como referência.

- **Outra relação:** Outro tema da matemática que tem relação com Função e que costuma ser estudado no nível fundamental faz parte da Geometria, que é o trabalho com Perímetros, pois o perímetro de uma figura é função de seus lados, ou seja, perímetro de uma figura depende das medidas de seus lados, o que nos remete à situação apresentada a seguir.

- **Situação 02:** Imagine que será feita uma reforma na sua casa e você irá definir a dimensão de seu quarto, que terá que ter a forma de quadrado, mas precisa saber o comprimento de madeira que será utilizado no rodapé das paredes.

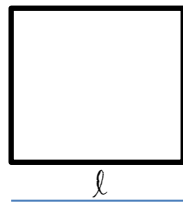


Figura 14: forma quadrada

O perímetro do quadrado que é a figura geométrica que corresponde à forma de seu quarto é a soma das dimensões de seus lados e, portanto, igual a $4l$ e irá corresponder ao total do comprimento da madeira a ser utilizada no rodapé.

LADO (l)	2,5 m	3 m	3,5 m
PERÍMETRO m (10) m (12) m (14)

Essa situação também é um exemplo de Função. Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

$$F(l) = 4l$$

A continuidade da exploração da situação novamente é tarefa do(a) professor(a). Existem orientações nesse sentido a seguir. Proponha outro formato, além do quadrado.

Orientações Metodológicas:

- Explore a situação nos moldes da primeira situação, até que os alunos consigam visualizar o padrão de comportamento da relação e chegar à Lei de Formação da Função. O ideal é que os alunos cheguem a essa lei;
- O objetivo aqui era estabelecer relação entre Função e Geometria, mas a situação também pode continuar sendo explorada até chegar ao trabalho com gráfico e ter como referência, novamente, a atividade relativa à situação 01.

- **Situação 03:** Se você joga basquete e estabelece, como regra, que só é válido lançar a bola de fora do garrafão, fazendo cestas de três pontos, a quantidade de pontos dependerá do número de cestas feita pelo seu time.



Figura 15: cesta de basquetebol

Nº de Cestas (c)	2	5	10
Total de Pontos (6) (15) (30)

Essa é mais uma situação que também pode ser traduzida matematicamente através conceito de Função. Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

$$F(c) = 3c$$

Professor(a), siga adiante explorando a situação! Para isso, observe as orientações a seguir.

Orientações Metodológicas:

- O jogo pode ocorrer na quadra da escola, pode ocorrer na sala de aula ou pode simplesmente ser idealizado, mas é importante que os alunos façam os registros dos passos;
- Existem outros jogos que podem ser utilizados, simplesmente alterando suas regras. Isso pode ser feito pelo(a) professor(a) ou pelos alunos.
- O objetivo aqui era explorar outra estratégia metodológica, até chegar à compreensão do sentido de Função, mas a situação também pode continuar sendo explorada até chegar ao trabalho com gráfico e ter como referência, assim como as anteriores, a atividade relativa à Situação 01.

- Relações com outras áreas de conhecimento:

Após o estabelecimento de conexões com outros temas da matemática, outras relações podem ser estabelecidas, agora com outras áreas de conhecimento e isso pode se dar como continuidade da situação 01, criada inicialmente, bastando para isso explorar outros aspectos relativos a ela, pois se a discussão envolvia deslocamento e velocidade, podem ser propostas atividades como corridas tendo os alunos como participantes, em um espaço como quadra de esportes. Nesse momento a ideia de massa poderia ser parte do contexto, pois o deslocamento tem relação com a massa dos alunos. Também seria possível medir os batimentos cardíacos dos alunos após os deslocamentos e várias outras possibilidades.

O número de batimentos cardíacos, por minuto, de uma pessoa depende da temperatura ambiente. Para uma pessoa adulta que não esteja exercendo atividade física, quando a temperatura mede, em graus Celsius, 30° , obtemos como resultado 60 batimentos por minuto, ou 1 batimento por segundo. Se a pessoa exerce atividade física, o aumento dos batimentos cardíacos aumenta de forma proporcional ao ritmo do movimento e ao tempo de realização das atividades físicas. A seguir, apresentamos uma sugestão:

- **Situação 04:** Se você medir a quantidade de batimentos cardíacos de um colega, após a realização de exercícios físicos (corrida, por exemplo), a quantidade de batimentos dependerá do tempo em que ele se exercitou.



Figura 16: corpo em movimento

Defina tempos de medição e depois preencha a tabela a seguir, com o Número de batimentos cardíacos e o tempo de realização de exercícios físicos.

TEMPO (minutos)	1 min	5 min	10 min	20 min
BATIMENTOS	60			

Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função, ou deixe para fazer isso mais adiante.

Orientações Metodológicas:

O trabalho com funções é oportuno para desenvolver um diálogo com outras áreas de conhecimento, pois em algum momento, na sala de aula, o professor terá que fazer uso da interdisciplinaridade, e quando o ensino se refere a resolução de problemas, a solução nunca vem de forma isolada, sempre tem relações com demais áreas de conhecimento. (FAZENDA, 1993).

A discussão sugerida contempla a nova tendência no ensino, pois a prática escolar evidenciada estabelece interconexões entre os conhecimentos e permite o diálogo com outras áreas do conhecimento. No entanto, ela exige do professor a mobilidade de mudança de prática para romper com o formalismo da racionalidade técnica para transformar o ato pedagógico num ato de conhecimento de vida, assim o aluno tem oportunidade de se formar preparado para enfrentar situações reais num processo dialógico entre teoria e prática. (FAZENDA, 1993).

- Existem possibilidades de exploração de vários outros conhecimentos relacionados à Física e à Biologia e à Educação Física, além dos já mencionados e o aprofundamento da discussão em relação a esses aspectos fica a critério e na dependência do envolvimento com professores dessas outras áreas, que atuam na escola. Leia sobre:

- a) O número N de batimentos cardíacos, por minuto, de uma pessoa depende da temperatura ambiente. Para uma pessoa adulta que não esteja exercendo atividade física, esse número pode ser calculado através da função $N(T) = 0,1T^2 - 4T + 90$;
- b) A temperatura do corpo também varia em função da atividade física realizada por uma pessoa;
- c) A noção de velocidade, de tempo são noções que se fazem presentes na realização da atividade;
- d) O conceito de Velocidade Média, próprio da física, também se faz presente na realização da atividade e pode ser explorado.

Orientações prévias sobre como detectar a pulsação por minuto e fazer anotações (neste momento podemos pedir auxílio do professor de Biologia da escola).

O coração de um jovem saudável, entre 15 e 20 anos, costuma bater no mínimo 60 e no máximo 90 vezes por minuto. Mas se esporadicamente sua frequência cardíaca ultrapassa ou cai abaixo de tal faixa, isso não quer dizer que você tem algum tipo de doença. “O coração

está ligado ao cérebro e ao corpo por estímulos nervosos e são eles que dizem o quanto ele precisa trabalhar”, afirma o cardiologista Antônio Carlos Carvalho, da Unifesp.

Use os dedos para encontrar a pulsação. Não use o polegar ao medir a pulsação pois ele já tem pulsação própria, o que pode fazer com que você se confunda.

- **Verifique a pulsação radial.** Esta é a pulsação medida na parte de dentro do pulso. Ponha as pontas de três dedos abaixo do pulso, na base do polegar. Pressione até sentir a pulsação, ou mova os dedos para encontrá-la.
- **Confira a pulsação da artéria carótida.** Para sentir a pulsação do lado de dentro do pescoço, coloque dois dedos, de preferência o indicador e o médio no espaço entre a traqueia e o músculo do pescoço. Pressione levemente até sentir a pulsação.
- **Preste atenção no ritmo e intensidade da pulsação, além de anotar o número de batidas por minuto.** Use um relógio que tenha o ponteiro dos segundos. Repare se o seu batimento é constante ou irregular, e se a pulsação é forte ou fraca.
- Se não tiver um relógio por perto, recomenda-se contar as batidas por 15 segundos e multiplicar o resultado por 4 para obter o número de batimentos cardíacos por minuto:
- Sua pulsação é: (batimentos em 15 segundos) $\times 4 = F$ (sua frequência cardíaca). Você pode também contar os batimentos cardíacos por 30 segundos e multiplicar o resultado por 2.
- **Observe o ritmo da sua pulsação.** Essa é a medida das pulsações do seu coração e os intervalos entre elas. Se a sua pulsação for constante, ela pode ser considerada normal. Mas se você reparou que ela falha ou que há alguma irregularidade, talvez ela seja anormal.

Após a realização das quatro atividades nas quais o aspecto a ser explorado era principalmente o sentido de função, assim como o estabelecimento de relações, fica a critério do professor a criação de outras situações, de modo possibilitar a plena compreensão, por parte dos alunos.

Depois disso, as mesmas situações podem continuar sendo exploradas, mas agora com a intenção de trazer para a discussão o segundo aspecto a ser posto em pauta, que é o estabelecimento de relação entre a compreensão e a formalização, aspecto a ser focalizado na seção seguinte e que diz respeito ao aprofundamento do sentido, que parte do informal até chegar ao formal. As atividades agora serão desenvolvidas com a intenção de alcançar objetivos relativos a esse aspecto.

5.4. Ampliando a visão e estabelecendo pontes entre a Compreensão e a Formalização

Após o trabalho inicial de ensino, no qual o objetivo tinha relação com a compreensão do significado de Função, é chegado o momento de ampliar a visão dos alunos, de modo que eles possam estabelecer relações entre o que compreenderam e a representação formal de função que normalmente é apresentada nos livros didáticos. A intenção é que eles possam estabelecer pontes entre esses dois momentos e, para isso, a sugestão é retomar as situações apresentadas e exploradas inicialmente, dando continuidade à discussão de cada uma delas.

Aqui vamos exemplificar retomando e formalizando a Situação 04, que trata dos batimentos cardíacos, organizando o trabalho de ensino em momentos distintos que são descritos a seguir.

Retomando e formalizando a Situação 04

1º momento – realização da corrida

Essa atividade pode ser realizada na quadra da escola ou outro local, com auxílio do professor de educação física da escola, o qual terá maiores condições para dar instruções adequadas para a realização da corrida. Na turma serão escolhidos grupos de três alunos para fazer cada teste. O primeiro realizará a corrida no tempo de 5 minutos, o segundo correrá 10 minutos e o terceiro 15 minutos. Os demais alunos da turma farão anotações dos dados observados.

Será fácil observar a regularidade existente, pois os batimentos cardíacos aumentarão linearmente, de acordo com tempo. Após os registros feitos, a turma pode ser dividida em pequenos grupos, com cada grupo fazendo a análise e discussão sobre os resultados obtidos, quanto ao número de frequência cardíaca e o tempo determinado em minutos:

Neste momento, cada grupo irá preencher a tabela abaixo:

TEMPO (minutos)	1m	5 m	10 m	15 m	T
BATIMENTOS	60	300	600	900	60T

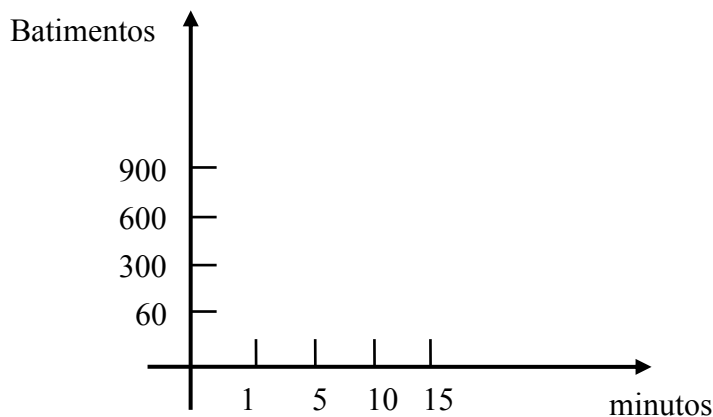
2º momento: Discussão dos resultados

O professor irá instigar reflexões, para que os alunos pensem e percebam a relação existente entre tais variáveis, bem como a existência de regularidades fazendo questionamentos aos grupos:

- O número de batimentos cardíacos tem relação com o tempo?
- Quais os valores que se modificam, ou seja, que variam?
- A mudança de um valor depende do outro? Quem depende de quem?
- A quem denominaríamos de *variável dependente* e a quem denominaríamos *variável independente*?

Após as respostas, chega o momento de fazer a sistematização dos resultados observados pelos alunos. Essa sistematização exige a discussão prévia do sentido dos termos “variável” e “dependente”, pois são conceitos primários relativos ao tema Função e, nesse sentido, provavelmente serão necessários exemplos e/ou atividades para que questões linguísticas e conceituais sejam esclarecidas.

3º momento: Organização dos dados e Representação no plano cartesiano:



Questionamentos norteadores:

- O que determinam o pares de pontos $(1 ; 60)$, $(5 , 300)$, $(10, 600)$, $(15, 900)$, ...
- Se ligarmos esses pontos, que figura obteremos? O que ela representa, em relação ao fenômeno observado?

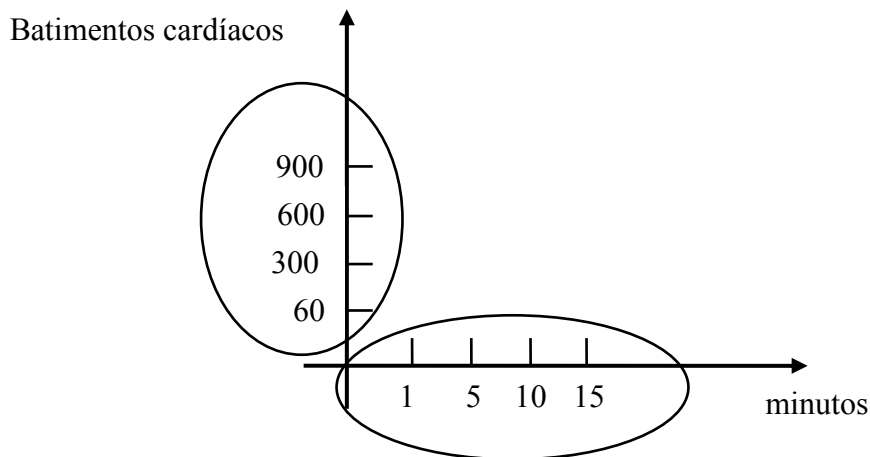
A partir daqui, a situação pode ser sistematizada, de uma maneira mais formal, pois a compreensão teria precedido a formalização. Podem ser utilizadas as medidas aproximadas

sugeridas anteriormente, para fazer a análise. No entanto, os alunos deverão ser orientados a utilizarem seus dados observados.

Os dados obtidos e organizados em uma tabela, anteriormente serão retomados:

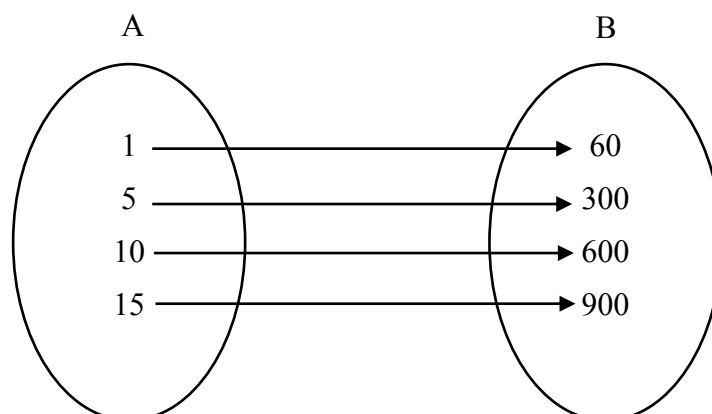
TEMPO (minutos)	1	5 m	10 m	15 m	T
BATIMENTOS	60	300	600	900	$60 \cdot T$

Após a organização da tabela, os valores serão registrados no Eixo Cartesiano e, depois, os valores de cada eixo serão agrupados com o uso de um Diagrama de Venn, sobre o Eixo, seguinte forma:



Os alunos deverão ser orientados a observarem que nesta representação já se direciona a compreensão da relação existente entre os dois conjuntos, deixando evidente que os eixos cartesianos representam os elementos correspondentes dos dois conjuntos.

Os dados poderiam ser apresentados de outra forma, que seria a seguinte:



A relação entre os valores (minutos e batimentos cardíacos) faz surgir pares de valores:

$$R = \{ (1; 60), (5; 300), (10; 600), (15; 900) \}$$

A Relação apresentada é uma Função, pois as duas condições abaixo são atendidas:

- **todo** elemento de **A** tem correspondente em **B**
- cada elemento de **A** tem **apenas um** correspondente em **B**.

.....

Nesse momento seria interessante a apresentação de exemplos para o perfeito entendimento das condições de existência de uma Função.

Em uma Função existem conjuntos de valores com características específicas e diferentes denominações....

Domínio da Função corresponde a todos elementos do conjunto A

Imagem da Função corresponde aos elementos de B, onde as setas chegam.

.....

Nesse momento seria interessante a apresentação de exemplos para o perfeito entendimento do significado de Domínio e Imagem de uma Função.

Para finalizar, Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

B = 60.T, considerando T = x e B = f(x), temos:

A seguinte Lei matemática: $f(x) = 60 \cdot x$, traduz a relação entre o número de batimentos cardíacos e o tempo estabelecido. Quando são atribuídos valores para x, podemos encontrar o valor de f(x) multiplicando x por 60. Vemos então que o número de batimento cardíaco depende do tempo estabelecido.

Trazendo a História da Matemática para o Cenário com a Função Sombra

Nesta atividade a ênfase é a História da Matemática, tendência da Educação Matemática importante a ser usada no ensino, pois possibilita a descoberta da origem dos conceitos e permite a reconstrução de processos e de conceitos, estabelecendo relações entre as ideias matemáticas vistas em sala de aula com suas origens. Essa atividade pode ser desenvolvida nesse momento, tendo em vista a exploração completa que aqui é feita ou ser proposta como atividade introdutória, como forma de contextualização histórica do tema Função, mas com desenvolvimento parcial.

O uso da História da Matemática, em sala de aula, permite a contextualização e a significação do saber, na medida em que conceitos e algoritmos aparecem numa época histórica, dentro de um contexto social, político e construídos pelo homem para auxiliá-lo em sua prática. A preocupação presente nesse momento é o estabelecimento de conexão entre o significado de função e a sua formalização, como relação entre conjuntos. A intenção é seguir a mesma direção que foi impressa na atividade inicial e na discussão a partir das situações criadas, agora com o aprofundamento da análise, mas de forma gradativa, de modo a permitir aos alunos, identificar o gráfico que representa uma situação descrita simbolicamente, reconhecer a expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela e reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau dado o seu gráfico, como caminho que lhes irá permitir chegar ao formalismo matemático.

Contando sobre uma Situação Histórica:

O uso da sombra foi uma descoberta incrível na história da matemática e proporcionou cálculos precisos e confiáveis utilizados desde os tempos mais remotos até os dias atuais. Para compreender melhor a atividade proposta recorreremos à história da matemática, no que diz respeito a grande descoberta de Tales de Mileto⁸.

Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Os estudos sobre sua história indicam que ele seria o primeiro filósofo e geômetra grego conhecido e o primeiro dos sábios gregos. Tales residiu temporariamente no Egito e lá, desenvolveu estudos relacionados à geometria com os sacerdotes egípcios e, também, aplicados à semelhança de triângulos. Acredita-se também que ele seja o criador da geometria demonstrativa, mas nada do que

⁸ Tales de Mileto foi um filósofo matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia. De ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 623 a.C. ou 624 a.C. e faleceu aproximadamente em 546 a.C. ou 548 a.C.

produziu chegou até nós e isso dificulta a determinação precisa de suas ideias ou a certeza das descobertas matemáticas que realizou e tudo que se sabe a seu respeito provém do chamado Sumário Eudemiano escrito pelo matemático filósofo e comentarista Proclus (411-485 d.C).



Figura 17: Tales de Mileto, Filósofo e Matemático grego
Fonte: Silva, 2015

Foi Tales de Mileto que, segundo Hierônimo, um dos discípulos de Aristóteles (384-322 a C), teria medido a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito. Para isso, utilizou a observação para comparar a própria sombra com a sombra da pirâmide. Dessa forma, quando sua sombra tivesse o mesmo comprimento da altura dele, a sombra da pirâmide teria mesmo comprimento que a altura dela.

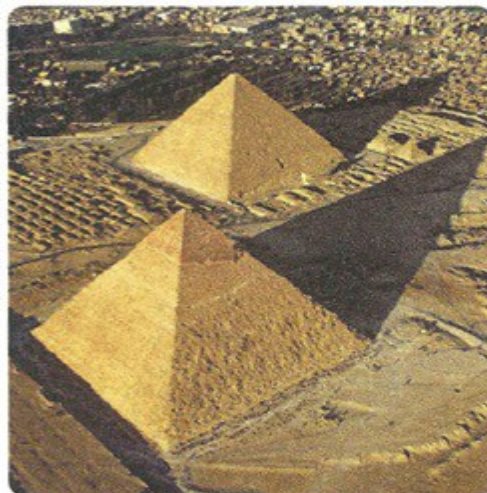


Figura 18: Pirâmides de Quéfren e Quéops, Egito
Fonte: Silva, 2015

Recriando a História: A proposta aqui é a recriação, pelos alunos, da história vivida por Tales de Mileto e foi referenciada em Silva (2014), tendo como objetivo a compreensão do conceito de função até sua formalização, como possibilidade metodológica de ensino. Esta proposta versa mais especificamente sobre o ensino de função afim.

Função Sombra

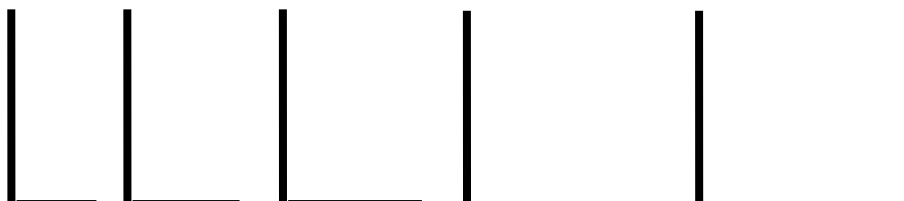
Material didático necessário: Cabo de vassoura com 01 metro de comprimento, régua, lápis e papel sulfite.

Ao iniciar a atividade, o professor introduz o trabalho de ensino utilizando a história que envolve Tales de Mileto e a utilização de sua própria sombra para medir a pirâmide de Quéops no Egito. Para isso existem várias alternativas possíveis, como o uso de um vídeo, de um texto apresentado através de projeção de slides ou de forma escrita, ou até a explanação da história, dentre outras. A parte inicial pode ser finalizada com o esclarecimento de que é possível também fazer uso da sombra para compreendermos o conceito de Função.

A Atividade: Encaminhamentos Metodológicos

É importante que o professor ao realizar esta atividade valorize a relação professor x aluno, de modo que o conhecimento seja construído a partir do diálogo, com ambos podendo se ver num processo de construção do conhecimento e, assim, os estudantes possam se sentir confiantes ao realizar a tarefa, relatarem os resultados e falarem, de forma espontânea, o que pensam sobre o fenômeno estudado. Serão, além do momento inicial de apresentação, cinco outros momentos, no desenvolvimento da atividade. Seria interessante, antes da proposição da atividade, uma discussão sobre a variação do tamanho e da posição da sombra de objetos em diferentes horários.

1º momento - Experimental: o professor lança a atividade, pedindo aos alunos que realizem observações sobre a sombra de um cabo de vassoura em sua residência, nos seguintes horários: 14h, 15h, 16h, 17h e 18h (podem ser outros horários). Os alunos devem ser orientados a fazer anotações sobre a medida da sombra em cada horário estabelecido e essas anotações, com a representação através do desenho do cabo da vassoura e de sua sombra, terão que ser trazidas na aula seguinte e depois registrarem os valores em uma tabela.



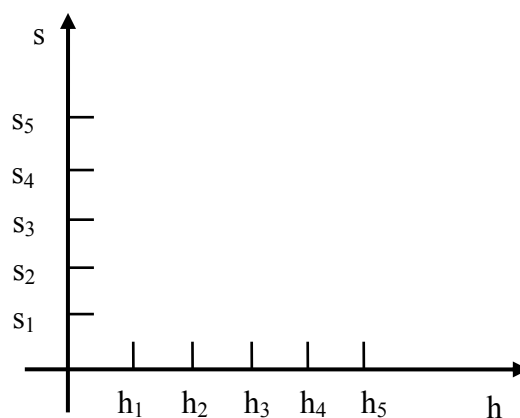
HORA	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
SOMBRA					

2º momento – Discussão de Resultados: Na sala de aula, após as observações feitas em casa, a turma pode ser dividida em pequenos grupos, com cada grupo fazendo a análise e discussão sobre os resultados obtidos, quanto às medidas da sombra e os diferentes horários, buscando responder às seguintes questões:

- Quais os valores que se modificam, ou seja, que variam?
- A mudança de um valor depende do outro? Quem depende de quem?
- A quem denominaríamos de *variável dependente* e a quem denominaríamos *variável independente*?

3º momento - Sistematização: Após as respostas, chega o momento de fazer a sistematização dos resultados observados pelos alunos e, como os valores certamente serão diferentes, o(a) professor(a) irá trabalhar com valores aproximados de tamanhos de sombras que, podemos supor, sejam os seguintes: 0,5m; 1m; 1,5m; 2m e 2,5m.

4º momento – Rumo à formalização: É a hora de enfatizar que a variável independente será representada com a letra *h* e a variável dependente com a letra *s* (note que poderiam ser outras letras, mas comumente utilizam-se *x* e *y*, sendo isto apenas uma convenção, para facilitar o reconhecimento do tipo de variável). Em seguida, é apresentado o eixo cartesiano e os alunos serão orientados a anotar as duplas de valores que caracterizam cada momento, nas figuras:

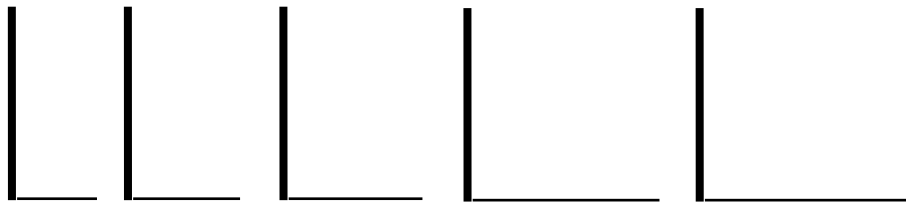


Questionamentos norteadores:

- O que determinam o pares de pontos $(h_1 ; s_1)$, (h_2 , s_2) , ...

- Se ligarmos esses pontos, que figura obteremos? O que ela representa, em relação ao fenômeno observado?

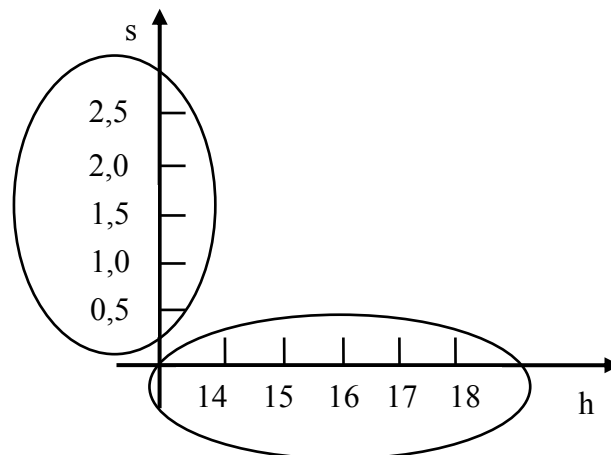
A partir daqui, a situação pode ser sistematizada, de uma maneira mais formal, pois a compreensão teria precedido a formalização. Podem ser utilizadas as medidas aproximadas sugeridas anteriormente, para fazer a análise. No entanto, os alunos deverão ser orientados a utilizarem seus dados observados. Retornando, então, ao cabo de vassoura e sua sombra, nos diferentes horários:



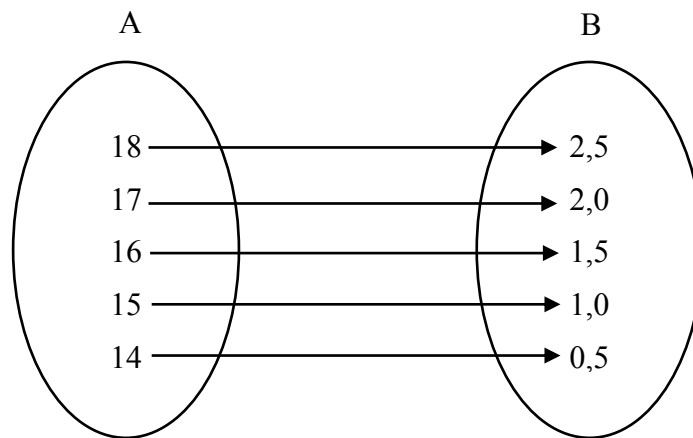
Os dados obtidos deverão ser organizados em uma tabela

HORA	14h	15h	16h	17h	18h
SOMBRA	0,5m	1m	1,5m	2m	2,5m

Após a organização da tabela, os valores serão registrados no Eixo Cartesiano e, depois, os valores de cada eixo serão agrupados com o uso de um Diagrama de Venn e sobre o Eixo. Após isso, os alunos deverão ser orientados a observar que nesta representação já se direciona a compreensão da relação existente entre os dois conjuntos, deixando evidente que os eixos cartesianos representam os elementos correspondentes dos dois conjuntos.



Os dados poderiam então ser apresentados de outra forma, que seria a seguinte:



A relação entre os valores (horário e comprimento da sombra) faz surgir pares de valores:

$$R = \{ (14 ; 0,5) , (15 ; 1) , (16 ; 1,5) , (17 ; 2) , (18 ; 2,5) \}$$

A Relação apresentada é uma Função, pois:

- **todo** elemento de **A** tem correspondente em **B**
- cada elemento de **A** tem **apenas um** correspondente em **B**.

Temos, ainda, que: Os valores do conjunto **A** presentes na relação compõem o **Domínio** da Função e os valores do Conjunto **B** presentes na relação compõem a **Imagem** da Função. Daqui para a frente, os livros apresentam ótimas alternativas para o aprofundamento do tema, sendo um bom auxiliar. Nossa intenção, com essa atividade, era apontar um caminho para iniciar a abordagem do tema.

Para finalizar, Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função, considerando que o início da marcação ocorre às 14:00 horas, ou seja, às 14:00 horas, $t = 0$ e o tamanho da sombra é exatamente igual à sua metade.

$$F(t) = 0,5 + \frac{1t}{2}$$

Na seção seguinte será explorado o terceiro e último aspecto relacionado à aprendizagem do tema Função, sob o título “Consolidando a Aprendizagem de Função”, quando serão desenvolvidas atividades de fixação da aprendizagem, com a intenção de alcançar objetivos relativos a esse aspecto.

5.5. Consolidando a Aprendizagem de Função

Este momento agora, após a compreensão do significado de Função e o estabelecimento de relações entre o que compreenderam e a representação formal de função, é o momento da Consolidação da Aprendizagem, com o desenvolvimento de jogos e a apresentação de situações, que devem ser extraídas do contexto mais próximo possível dos alunos, a serem modeladas. Esse é, também, o momento da avaliação da aprendizagem.

Aqui vamos apresentar apenas um jogo, o Jogo de Baralho de Função, seguido de uma situação. O jogo de baralho é conhecido pela maioria das pessoas e, certamente, dos alunos do 1º ano do ensino médio e esse é o principal motivo da proposta de sua adaptação e de sua inclusão neste material de ensino. A inclusão se dá na parte final do material, pois o objetivo aqui é consolidar o conhecimento já ensinado. O jogo é, portanto, uma estratégia para trabalhar e consolidar a aprendizagem.

O jogo é uma das atividades presentes em diferentes culturas e sociedades e, de acordo com Kishimoto (2001), era marcado por rituais de passagem da fase de criança para a fase adulta, estabelecendo um marco delimitador dessas fases e algumas habilidades se evidenciavam por meio de regras estabelecidas para os jogos, específicos para este fim. A atividade que envolve o jogo apresenta potencialidade de motivar os alunos e desenvolver habilidades lógicas e cognitivas essenciais para a compreensão dos conhecimentos matemáticos. Para Borin (2007) e Macedo (2000), neste contexto, o uso de jogos pode modelar conceitos matemáticos que na opinião dos alunos são abstratos e sem importância.

De acordo com orientações presentes nos PCN (1998), o papel da escola é formar cidadãos competentes e atuantes e, partindo desse pressuposto, os jogos podem ser uma ferramenta de grande relevância na formação do cidadão preparado para a vida, quando desenvolvidos em grupos, o que favoreceria o desencadeamento da noção de cooperação e de vida em sociedade. Além do mais, o trabalho em grupo pode apresentar uma forma mais divertida de desenvolvimento do raciocínio lógico e cognitivos do aluno, além de beneficiar a relação professor/aluno, aluno/aluno. É bom ressaltar que o aspecto mais importante do jogo, no ensino de matemática, não é sua ludicidade, que atrai e motiva o aluno a participar. O importante é a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva e, para isso, é necessária a intervenção do professor durante o jogo, com questionamentos para alcançar os objetivos de ensino. Uma alternativa didática deve ser desenvolvida com intencionalidade pedagógica e isso deve ser observado na realização da atividade, de modo que os participantes tenham clareza dessa intencionalidade.

Jogo de Baralho de função

Jogo que, segundo classificação de Mansutti (1993), pode ser identificado como Jogo de Fixação de Aprendizagem. A proposta do jogo tem a finalidade de propiciar ao estudante a apropriação e consolidação da aprendizagem sobre função, em um ambiente de interação na turma, assim se permite a compreensão do conceito de função e, ao mesmo tempo, possibilita ao professor avaliar o processo de ensino e aprendizagem, assim como facilita a auto avaliação, pelos alunos. O jogo obedece às mesmas regras do baralho tradicional, com acréscimo de várias cartas-desafio, com perguntas e respostas. Se o jogador acertar a resposta, o jogo é validado e se errar ele perde as três cartas e retira outras três do baralho.



Figura 19: Baralho tradicional

Descrição e Regras do Jogo Pif Paf

Nas regras do jogo Pif Paf do Baralho tradicional foi acrescentada um item à regra, de modo a permitir o envolvimento do conteúdo função. A seguir a regras:

O **jogo Pife** é jogado com dois a oito participantes, que jogam de forma individual.

- Jogadores - 2 a 8
- Baralhos - dois jogos com 52 cartas, sendo que as cartas dos curingas (Jokers) não são utilizadas.

- Ordem das cartas (da menor para maior): A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K.

Maço - é o bolo de cartas que sobra após a distribuição.

- Distribuição - 9 cartas para cada participante.
- Maço - é o bolo de cartas que sobra após a distribuição.
- Lixeira - é o bolo formado com as cartas descartadas, onde apenas a última carta é visível.
- Objetivo - Fazer trincas e/ou sequências para bater.

- Trinca - três cartas do mesmo valor e de naipes diferentes.
- Sequência - três ou mais cartas seguidas, do mesmo naipe. O Ás, nas sequências, pode ser posicionado acima do Rei ou abaixo do Dois.
- Para validar as trincas e sequências, o jogador terá que responder corretamente a pergunta presente na **carta desafio, estas farão parte do jogo.**
- A **carta desafio** apresenta questionamento sobre função para ser respondido pelos jogadores, a cada trinca formada. Se respondido corretamente, a trinca ou a sequência será validada, se não, as cartas da trinca ou da sequência formada serão devolvidas para o Baralho, assim como a carta desafio. O jogo continua até que algum jogador bata, com as três trincas formadas.
- Rodada - uma sequência de jogadas que ocorre até que algum jogador bata.
- Bater - combinar e baixar as nove cartas ou as 10 cartas (as nove que recebeu mais a da compra), formando trincas e/ou sequências. Além de responder a carta desafio que valida a batida do jogo.

• **CARTAS DESAFIOS**

As cartas abaixo são sugestões, o professor poderá utilizar ou acrescentar outras cartas; elaborando outras questões sobre o objeto em estudo. Essa atividade também pode utilizada para explorar outros assuntos estudados, a fim de consolidar a aprendizagem dos estudantes.

Pergunta:

O que uma Função Afim?

.....

Resposta: É uma Função que apresenta termos do primeiro grau

Pergunta:

Qual dessas funções você concorda que seja uma função afim

a) $f(x) = \log x^{10}$
 b) $f(x) = x^2 + 2$
 c) $f(x) = a^{x+2}$
 d) $(x) = ax + b$

.....

Resposta: $f(x) = ax + b$

Pergunta:

Uma função afim pode ter no máximo:

a) duas raízes
 b) dois coeficientes
 c) dois resultados
 d) duas incógnitas

.....

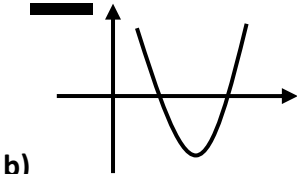
Resposta: Dois coeficientes

Pergunta: A função afim pode ser também chamada de:

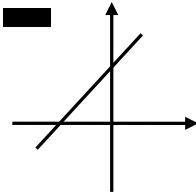
() função quadrática
 () função do 1º Grau
 () função logarítmica
 () função monomial

Resposta: função do 1º grau

Pergunta: Qual gráfico representa uma Função Afim? a)



b)



Resposta: b

Pergunta: Observe a tabela: (venda de Açai)

Quantidade em L	Valor a pagar
1	12,00
1,5	18,00
2	24,00
2,5	30,00

-Qual a variável dependente? E variável independente? **Resposta:** valor a pagar depende da quantidade, que é valor independente.

Pergunta: a: Observe a tabela: (venda de Açai)

Quantidade em L	Valor a pagar (R\$)
1	12
1,5
2	24
2,5

-Qual o valor que preenche exatamente a tabela?

Resposta: 18 e 30

Pergunta: Máya e Manuelle são irmãs estavam realizando um jogo, Mayra dizia um número e Manuelle dizia outro usando uma regra que só ela conhecia o desafio de Mayra era descobrir qual regra Manuelle estava usando. (dados organizados na tabela)

Nº falado por Mayra	Nº falado por Manuelle
3	9
6	18
9	27

Resposta: considerando x Mayra e y Manuelle, temos: $y = 3 \cdot x$

Pergunta: Qual a função decrescente?

a) $F(x) = -3x + 2$
 b) $F(x) = 2x - 1$
 c) $F(x) = \frac{x}{2} - 1$
 d) $F(x) = x + 1$

.....

Resposta: a

Professor(a), você pode elaborar outras questões e confeccionar novas cartas!

O Jogo

Após a distribuição das cartas o primeiro jogador compra uma carta do maço, tenta formar jogos e se possível bater. Descarta uma carta dando início à formação da lixeira. Quando o jogador descarta uma carta, a vez é passada ao jogador seguinte, seguindo o sentido horário. O jogador seguinte poderá comprar do maço ou comprar a última carta descartada na lixeira.

A partida termina quando alguém bate. Um jogador pode bater com 9 ou 10 cartas. Quando bate com 9 ele descarta uma carta, e quando bate com 10 não descarta nada.

A cada trinca e/ou sequência formada pelo jogador, ele mostrará o jogo e responderá o desafio lançado, se responder correto o jogo é validado, se errar, o jogo formado irá ser descartado na lixeira, pegará novamente três novas cartas e o jogo continua. Será vencedor o jogador que bater o jogo.

É necessário a intervenção do professor no momento do jogo, observando sempre as respostas dos alunos, questionando e/ou esclarecendo dúvidas que porventura possam surgir em relação a aprendizagem do fenômeno em estudo.

Modelando uma Situação Real usando Função

Apresento aqui uma situação real que retrata a prática de um morador da cidade de Santo Antônio do Tauá. A opção por esse contexto tem relação com a pesquisa realizada, mas considero importante deixar claro que quando professores forem utilizar este material didático em suas salas de aula, o ideal é que eles próprios procurem retratar e explorar, juntamente com seus alunos, situações de seus contextos. Entendo que esse talvez seja, no momento de aplicação em sala de aula do Produto de ensino, o principal espaço de criação de professores, momento em que precisarão ser propositivos para aproximar a temática Função do cotidiano dos alunos, possibilitando, inclusive, que os próprios alunos criem situações...

- O Senhor Raimundo da Comunidade de Santa Maria do Umbituba-SAT compra espeto de churrascos produzidos pelos moradores da comunidade para serem comercializados na CEASA, em Belém do Pará. A cada viagem ele transporta 20 milheiros. O custo a pagar pelo milheiro corresponde ao valor de R\$ 9,00, acrescentando a despesa de R\$60,00 de combustível para realizar a viagem.

- a) Se uma viagem transporta 20 milheiros de espeto. Qual será o valor gasto total de seu Raimundo?

$$\begin{aligned} & 20 \cdot 9 + 60 \\ & 180 + 60 = 240 \\ & \text{Resposta: R\$ 240,00} \end{aligned}$$

- b) Considerando que ele transporta 20 milheiros, se vender a R\$15 reais o milheiro. Qual seria seu lucro?

$$\begin{aligned} & [(20 \cdot 15) - (20 \cdot 9)] - 60 \\ & [300 - 180] - 60 \\ & 120 - 60 \\ & \text{Resposta: R\$ 60,00} \end{aligned}$$

- c) Qual a lei matemática que define melhor a situação que representa o gasto por semana pelo Sr. Raimundo?

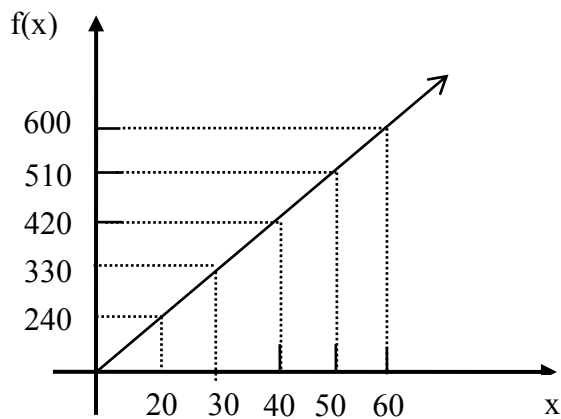
$$V = 9 \cdot E + 60, \text{ tendo } V = f(x) \text{ e } E = y; \text{ conclui-se}$$

$$F(x) = 9 \cdot x + 60$$

- d) Preencha a tabela, considerando a lei de formação da função indicada da situação problema.

QUANTIDADE DE ESPETO (MILHEIRO) X	VALOR A PAGAR (R\$) $f(X) = 9x + 60$	F(X)
20	$f(20) = 9 \cdot 20 + 60$	240
30	$f(30) = 9 \cdot 30 + 60$	330
40	$f(40) = 9 \cdot 40 + 60$	420
50	$f(50) = 9 \cdot 50 + 60$	510
60	$f(60) = 9 \cdot 60 + 60$	600

- e) Fazendo uso do plano cartesiano, represente graficamente a relação existente entre (x e y)



- f) Se por viagem transporta 20 milheiros, e se ele vender a R\$15,00 cada um. Qual o valor da venda na quarta semana?

$$V = [(20 \times 4) \times 15] - (4 \times 60)$$

$$V = [80 \times 15] - 240$$

$$V = 1.200 - 240$$

$$\text{Resposta : } V = 960$$

g) Qual a função que representa o lucro por viagem?

$$\text{Lucro} = \text{venda} - \text{custo}$$

$$L(x) = 15x - (9x + 60)$$

$$L(x) = 15x - 9x - 60$$

$$\text{Resposta: } L(x) = 6x - 60$$

h) Qual a quantidade mínima de espeto para que o Senhor Raimundo não tenha lucro e nem prejuízo?

$$L(x) = 6x - 60$$

$$\text{Se, } L(x) = 0$$

$$6x - 60 = 0$$

$$6x = 60$$

$$x = \frac{60}{6}$$

$$\text{Resposta: } x = 10 \text{ milheiros}$$

Ao final do trabalho com os Cadernos para o Ensino de Função, considero importante ressaltar que a intenção com essa sugestão de encaminhamento metodológico, dentre outras possíveis, não era esgotar o processo de ensino do tema, mas atender a necessidade de trabalhar os três aspectos colocados em pauta, lembrando que as ideias discutidas devem ser entendidas como básicas e gerais, necessitando é claro, de acréscimos para o trabalho de ensino com outros tipos de função. O livro didático, a partir daqui, se adequa perfeitamente a essa complementação, assim como vídeos e outros aplicativos/software, relacionados ao tema.

E, ao chegar na etapa final do que foi anunciado como início do processo, volto a registrar a expectativa de que a teorização seja transformada em ação, nas salas de aula, transformando práticas e concorrendo para a melhoria do ensino e da aprendizagem, de modo que, aí sim, se tornando efetiva realidade no ambiente de sala de aula, a pesquisa que teve como objetivo inicial identificar dificuldades, possibilidades e tendências, em termos de ensino de função para, a partir daí, definir princípios e diretrizes para o Ensino de Função e isso ser traduzido sob a forma de um produto de ensino a ser apresentado como proposta de ensino do tema Função possa ser considerada concluída e seus objetivos plenamente alcançados.

REFERÊNCIAS

- ALARCÃO, Isabel. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva**. São Paulo: 8ª Ed. Cortez, 2011.
- ALVES, Rubem. **Conversas com quem gosta de ensinar**. Campinas-SP: Papirus, 2000.
- ARAGÃO, R. M. R. de. **Reflexões sobre Ensino, Aprendizagem, Conhecimento...** In: Revista de Ciência & Tecnologia. Piracicaba-SP : Editora UNIMEP, Ano 2, Nº 3, Julho/1993.
- BARRETO, Marina Menna. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no ensino médio**. PPG-Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf>
- BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução de Elza. F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BOYER, C. **História da Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.
- BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BORBA, Marcelo de C. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 3ª Ed. Belo Horizonte: Autentica, 2010.
- BORGES, C. M. F. **O professor da Educação Básica e seus saberes profissionais**. Araraquara: JM Editora, 2004.
- BORIN, Júlia (2007): **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME – US.
- BICUDO. M. Aparecida V.(org.) **A Pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos**. 1ª Ed. São Paulo: Editora: Cortez, 2011.
- BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da matemática**. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006. 174 p.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1999.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2000.
- CARRAHER, David Willian; SCHLIEMANN, Ana Lúcia Dias. **Dividir para conquistar**. Guia do professor. Sunburst Communications, Pleasantville, USA, 1992.
- CALDEIRA, Ademir A. **Educação Matemática e ambiental: um contexto de mudança**. Tese doutoral em educação, Universidade de Campinas, 1998.
- CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Fazer Matemática e usar Matemática**. Salto para o futuro. Série Matemática não é problema. Disponível em: [http://www.tvbrasil.com.br/SALTO/boletins_2005.htm].

- CLANDININ, D. Jean, CONNELLY, F. Michael - **Pesquisa Narrativa: experiências e história em pesquisa qualitativa**. Uberlândia: 2011.
- COUTINHO, Laura. TV na Educação. In: Salto para o Futuro: TV e informática na Educação. Brasília. Secretaria de Educação a Distância. Ministério da Educação e do Desporto, 1998. P. 11-46.
- D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autentica, 2001.
- EVES, H. **Introdução a história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.
- FAZENDA, Ivani C. A. **Práticas Interdisciplinares na escola**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 1993.
- FIORENTINI, Dario e LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).
- FOSSA, John Andrew. FOSSA, Maria da Glória. **Funções, Equações e Regras: ensaios sobre a educação matemática**. Belém-PA: EDUEPA, 2000.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005, 42.^a edição.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- GARNICA, A. V. M. **História Oral e educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- GAUDÊNCIO, Rogéria. **Um estudo sobre a Construção do Conceito de Função**. Tese doutoral, Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, 2000.
- JOSSO, Marie-Christine - **Experiências de vida e formação**- Marie-Christine Josso; prefácio António Nóvoa; revisão científica, apresentação e notas a edição brasileira Cecilia Warschauer; tradução José Cláudio e Júlia Ferreira; adaptação a edição brasileira Maria Vianna. – São Paulo: Cortez, 2004.
- KAUFMANN, Jean-Claude. **L'entretien compréhensif**. Paris: Nathan, 1996
- KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, v.1, Oxford University Press, 1990.
- KISHIMOTO, M.T. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. Cortez editora. 5º ed São Paulo, 2001.
- LUZIN, N. **Function**. *The American Mathematical Monthly*. Jan e Mar, 1988.
- MACEDO, L. **Aprender com jogos e situações-problema**. 2.ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
- MANSUTTI, Maria Amabile. **Concepção e Produção de Materiais Instrucionais em Educação Matemática**. in Revista de Educação Matemática da SBEM/ São Paulo, ano 1, número 1, Campinas - São Paulo, setembro/1993, p. 17 - 29.
- MILLS, C. Wright. **A imaginação sociológica**. Tradução de Waltensir Dutra. 6. ed. São Paulo: Zahar, 1982.
- MIORIM, Maria Angela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

- MORAES, R.: **Uma Tempestade De Luz: A Compreensão Possibilitada pela Análise Textual Discursiva.** *Ciência & Educação*, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.
- MORAES, R. Galiazzi, M.C. **Análise Textual Discursiva.** Ijuí. UNIJUI, 2007.
- NÓVOA, A. **Professor se forma na escola.** Revista Nova Escola, São Paulo, n.142, maio 2001. Entrevista concedida a Paola Gentile.
- RÜTHING, D. *Some Definitions of The Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki.* The Mathematical Intelligencer, vol. 6, n° 4, 1984, p. 72-77.
- SÁ, P.F.; SOUZA, G.S.; SILVA, I.D.B. **A construção do conceito de função: alguns dados históricos...** Traços (UNAMA), Belém, v.6, n 11, p. 123-140, 2003.
- SANCHES, Jesus-Nicásio Garcia. **Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica.** . Ed. Artmed, Porto Alegre, 2004.
- SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos. **O ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.
- SCHÖN, D. A. **Formar professores como profissionais reflexivos.** In; NÓVOA, A (Coord.) Os professores e a sua formação. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992. (Nova Enciclopédia, 39).
- SILVA, M. H. M. e REZENDE, W. M. **Análise histórica do conceito de função.** *Caderno DaLicença.* Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.2. p. 28-33. Niterói, 1999.
- SILVA, Marcos Noé Pedro Da. **Introdução à Função;** *Brasil Escola.* Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/introducao-funcao.htm>>. Acesso em 22 de abril de 2016.
- SILVA, Neivaldo Oliveira. **Relações e conexões no ensino de Matemática: focalizando funções,** Belém, 2014.
- SILVA, Venício do Nascimento. **Teorema de Tales e suas Aplicações.** Dissertação de Mestrado Profissional – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015. Orientador Prof. Dr. Cláudio Carlos Dias.
- SPINILLO, Alina Galvão & MEIRA, Luciano L. **Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006. 260p.
- TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional.** 14 ed. Petrópolis, RJ:Vozes, 2012, 325p.
- VÁSQUEZ, S.; REY, G.; BOUBÉE.; **El concepto de función a través de la História,** Revista Iberoamericana de Educación Matemática; V. 4, n. 16, pp. 141-151, Dez. 2008.
- ZUFFI, E.M. **Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função,** Educação Matemática em Revista, SBEM, Ano 8, (2001), No. 9/10, p.10-16.

ANEXOS

ANEXO 01

TABELA DAS DISSERTAÇÕES PRODUZIDAS NOS PROGRAMAS DE MESTRADO PROFISSIONAL NO BRASIL NO PERÍODO DE 2010 À 2016 QUE TRATAM DO ENSINO DE FUNÇÃO

Nº	INSTITUIÇÃO	ANO	AUTOR	TÍTULO DA DISSERTAÇÃO
01	UNIFRA	2010	Sandra Beatris Zatti	Construção do conceito de função: uma experiência de ensino-aprendizagem através de resolução de problemas
02	UNIFRA	2010	Daiana Moraes Seckler	O ensino de função polinomial do 1º grau na oitava série do Ensino Fundamental: um trabalho com situações do cotidiano
03	PUC-SP	2011	Adinílson Marques Reis	Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio
04	PUC-SP	2010	José Manoel Vitolo	Noções introdutórias à ideia de função: trajetória hipotética de aprendizagem
05	UNIFRA	2015	Mariana Lopes Dal Ri	A resolução de problemas e o estudo de gráficos: uma proposta para a construção do conceito de função com auxílio das TICs
06	UNICSUL	2011	Reginaldo Botelho Ferreira	O Ensino de Funções através da Resolução de Problemas na Educação de Jovens e Adultos (EJA).
07	UNICSUL	2011	Clenilde Martins de Oliveira	O ensino e a aprendizagem das funções no 1º ano do ensino médio utilizando o Geogebra.
08	PUC-SP	2010	Ligia Maria da Silva	O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica
09	PUC-SP	2010	Ricardo Carvalho Costa	A formação de professores de matemática para uso das tecnologias de informação e comunicação: uma abordagem baseada no ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus

10	PUC-SP	2011	Ricardo Antonio de Souza	A modelagem matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função
11	UFOPA	2015	Melissa Santos de Oliveira	Introdução de funções polinomiais através da Resolução de Problemas no 1º Ano do Ensino Médio Modelagem Matemática e o ensino de funções do 1º grau
12	PUC-SP	2011	Luiz Gonçalves Filho	Modelagem Matemática e o ensino de funções do 1º grau Funções no Ensino Médio: história e modelagem
13	PUC-SP	2011	Valdirene Rosa de Souza	Funções no Ensino Médio: história e modelagem
14	PUC-SP	2012	Marcos José Traldi	Modelagem matemática para o estudo de funções afim
15	UEPG	2016	Luciano Roque Leite	Considerações sobre o processo de Ensino e Aprendizagem de funções
16	UFCG	2013	Soraya Martins Camelo	Estudo de Função Afim através de Modelagem Matemática
17	ICMC-USP	2013	Daniela de Moraes Siqueira	Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio
18	UFRRJ	2015	Rafael Correa Castilho	O Estudo da F. A. através de experimentos na cinemática: uma experiência interdisciplinar
19	UFRRJ	2015	Gabriel Leite Nogueira	Uma proposta metodológica para estudo, modelagem e aplicações de funções afins (Lineares) quadrática e geogebra no Ensino Médio.
20	UFRGN	2015	Márcio André Costa Barbosa	Funções e algumas de suas propriedades
21	UFRGN		Walfredo José de Souza	Função Afim: teoria e prática
22	UFV	2015	Evandro Milho	Geogebra e as funções elementares que são apresentadas no Ensino Médio

23	UFV	2015	Gilberto José da Silva	Reflexões sobre o trabalho docente no Ensino do conteúdo função trigonométrica
24	UFOP	2015	Vanessa Pinheiro Ladeira	O Ensino do conceito de função em um ambiente tecnológico: uma investigação qualitativa baseada na teoria fundamentada sobre a utilização de dispositivos móveis em sala de aula como instrumento mediáticos da aprendizagem
25	UFOP	2015	Alessandra Roberta Dias	O ensino e aprendizagem do conceito de Função através da resolução de problemas: um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito em classes do ensino fundamental
26	CUF	2014	Paulo Renato Simon	A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de problemas, como alternativa pedagógica para compreensão do conceito de função afim por alunos do Ensino Médio
27	CUF	2013	Noéli Ferreira dos Santos	A metodologia da resolução de problemas e o aplicativo winplot para a construção do conceito de função por alunos do ensino médio

ANEXO 02

Resumo das Dissertações lidas e analisada neste documento

1 - Dias, Alessandra Roberta. O Ensino e a Aprendizagem do conceito de função através de resolução de problemas: um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito em classes do Ensino Fundamental. 2015. Orientador: Prof. Dr. Dale Willian Bean. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológica. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática.

A autora afirma que embora o conceito de função seja considerado um dos conceitos matemáticos mais importantes, o seu ensino pode não estar recebendo a devida atenção. Nas escolas, a abordagem desse conteúdo não favorece a compreensão, sendo enfatizados símbolos e procedimentos técnicos que não privilegiam a sua essência. Por outro lado, existem estudos que mostram a vantagem da utilização da resolução de problemas no ensino de Matemática.

Aliamos nesta pesquisa um estudo sobre o conceito de função e a resolução de problemas, tendo como embasamento o pensamento reflexivo de John Dewey (1959). A fundamentação teórica desse estudo, ao considerarmos o conceito de função, foi embasada em: Caraça (1951), ao lidarmos com a definição e noções básicas inerentes a ele, e Sierpinska (1992), quando tratamos da sua aprendizagem, associada à significação das noções básicas do conceito de função.

O objetivo principal desta pesquisa era compreender como a resolução de problemas poderia contribuir para a significação do conceito de função, na busca de responder à seguinte questão de investigação: “Quais as contribuições que as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas podem trazer para o processo de ensino e de aprendizagem do conceito de função?”. Essa pesquisa foi realizada com 12 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular da cidade de Belo Horizonte do estado de Minas Gerais.

A coleta de dados aconteceu por meio de notas de campo (diário de campo), de gravações em áudio de todos os encontros e de registros produzidos pelos alunos. A interpretação dos dados, por meio da análise de conteúdo, evidenciou que o ambiente de resolução de problemas – problemas elaborados para evocar as noções básicas do conceito de função – favoreceu a discussão permeada pelo pensamento reflexivo.

Além disso, a análise revelou que a configuração das atividades e o interesse dos alunos favoreceram a ocorrência de fases do pensamento reflexivo, o que foi fundamental para os bons resultados dessa proposta. Tal estudo gerou um produto educacional com a descrição de algumas atividades realizadas e se destina a professores de Matemática.

2 - Ladeira, Vanessa Pinheiro. O Ensino do Conceito de Funções em um Ambiente Tecnológico: uma investigação qualitativa baseada na teoria fundamentada sobre a utilização de dispositivos móveis em sala de aula como instrumentos mediáticos da aprendizagem; Orientador: Prof. Dr. Milton Rosa. – Ouro Preto-MG, 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto).

O principal objetivo deste estudo foi verificar as contribuições que a utilização dos dispositivos móveis (telefones celulares e smartphones) como instrumentos mediáticos de aprendizagem podem oferecer para o processo de ensino do conceito de funções de primeiro

grau para alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola pública do estado de Minas Gerais. Outro objetivo importante foi a elaboração de atividades curriculares que visam promover o desenvolvimento da aprendizagem móvel no processo de ensino de conteúdos matemáticos em uma perspectiva pedagógica que torne as aulas dinâmicas, interativas e inovadoras.

Assim, para que esses objetivos fossem atingidos, a revisão de literatura buscou fundamentos no estudo da Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nas Escolas, nas Ferramentas Cognitivas de Aprendizagem, na Aprendizagem Móvel em Sala de Aula, na Cognição Corporificada, Situada e Distribuída, nas Bases Teóricas da Mediação e na Conceituação de Funções do Primeiro Grau. Durante a condução deste estudo, os dados coletados foram analisados e interpretados com a utilização dos pressupostos da Teoria Fundamentada, que é uma metodologia analítica que visou a elaboração de uma teoria que emergiu da categoria central que foi identificada por meio das codificações aberta, axial e seletiva.

Com base na análise e interpretação dos dados, a questão de investigação foi respondida por meio da identificação de cinco categorias relacionadas com a utilização dos dispositivos móveis em ambientes internos e externos à sala de aula. Os resultados mostram que os participantes deste estudo trabalharam de maneira colaborativa e interativa para a realização das atividades propostas por meio da utilização dos dispositivos móveis como parceiros intelectuais no processo de aquisição do conhecimento matemático. Esses dispositivos auxiliaram os participantes a relacionarem as atividades realizadas no cotidiano com os conteúdos matemáticos estudados em sala de aula. Esses resultados também possibilitaram a elaboração de um produto educacional denominado Caderno de Sugestões que foi baseado nas atividades desenvolvidas durante a condução do trabalho de campo desta pesquisa.

A autora espera que este estudo possa contribuir para o desenvolvimento de investigações que possibilitem a utilização de metodologias inovadoras que tenham por objetivo facilitar o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos por meio da utilização de ferramentas tecnológicas em sala de aula.

3 - Leite, Luciano Roque. Considerações sobre o processo ensino-aprendizagem de funções. Ponta Grossa, 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa. Orientadora: Prof.^a Dr.^a Fabiane de Oliveira.

O presente trabalho tem como principal finalidade apresentar uma proposta pedagógica para o ensino de funções no Ensino Médio. Para tanto foi realizado um levantamento bibliográfico buscando trabalhos que mostram que o ensino pode ser alcançado relacionando as diferentes representações de função em diversas metodologias de ensino e ressaltando a forma como é introduzido o conceito de função.

Em um primeiro momento foram discutidas as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem das funções e discutiu-se suas diferentes representações destacando a importância que a informática pode ter nesse processo. O conteúdo funções foi escolhido por ser um tema relevante do ensino básico e que os alunos demonstram ter grandes dificuldades. Foi realizada uma síntese da história das funções apresentando sua definição e atividades envolvendo função afim e função quadrática com o uso do *software* GeoGebra, função inversa e função composta. Foram propostas algumas atividades como a máquina de calcular, identificação de regularidades e gráficos das funções com auxílio do Google, as quais poderão ser utilizadas na sala de aula. Discutiu-se ainda a responsabilidade do professor no ensino das funções, e o uso da informática na escola.

4 - Oliveira, Melissa Santos de. Introdução de funções polinomiais através da resolução de problemas no 1º ano do ensino médio. Santarém, 2015. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programas de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Orientadora: Prof. Dra. Aldenize Ruela Xavier.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para a introdução de funções polinomiais utilizando a metodologia de resolução de problemas considerando as dificuldades em relação à compreensão e aprendizagem desse assunto. São apresentadas algumas definições de problema matemático e os tipos de aprendizagem matemática, segundo Huete e Bravo (2007). É feito um breve relato sobre a origem do conceito de função. São apresentadas sequências de atividades compostas por situações problema em que são explorados os principais conceitos presentes no estudo de funções afim e quadrática. Para auxiliar na elaboração das atividades foi utilizado como fonte de pesquisa o livro *A Arte de Resolver Problemas* de autoria de George Polya (1887-1985).

5 - Santos, Noéli Ferreira dos. A metodologia de Resolução de Problemas e o aplicativo Winplot para a construção do conceito de Função por alunos do Ensino Médio. Santa Maria/RS, 2013. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática. Área de Concentração: Ciências Tecnológica). Centro Universitário Franciscano. Orientadora. Profª Drª Silvia Maria de Aguiar Isaia.

No presente trabalho, teve-se como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Resoluções de Problemas aliada ao aplicativo Winplot para a construção do conceito de função por alunos do Ensino Médio. Os sujeitos participantes foram estudantes do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Padre Rômulo Zanchi na cidade de Santa Maria. A pesquisa foi de cunho qualitativo, fundamentada na teoria histórico-cultural de Vygotsky e na Metodologia de Resolução de Problemas.

Os instrumentos utilizados envolveram dois questionários, observações das atividades desenvolvidas, além de um diário de aula, bem como o registro documental dos alunos no uso do aplicativo Winplot. Com base nos questionários, verificou-se que os alunos utilizam o computador para o lazer e demonstraram interesse em utilizá-lo para a aprendizagem de matemática. Quanto aos seus conhecimentos prévios, os alunos apresentaram dificuldades sobre o conteúdo de função.

Após as atividades serem aplicadas, e os resultados analisados, constatou-se que os alunos tiveram a possibilidade de avaliar os dados numéricos, compreender as variações das grandezas envolvidas, estabelecer relações algébricas e gráficas com mais precisão, além de poder interpretar e observar as alterações realizadas em cada gráfico entre outras informações e propriedades, o que possibilitou a apropriação do conceito de função e pôde servir de base para a compreensão das demais funções matemáticas que serão estudadas ao longo do ensino médio.

Entretanto, observaram-se algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos, principalmente no que se refere à leitura e a interpretação de gráficos. Um dos resultados mais significativo desse trabalho diz respeito ao envolvimento dos alunos com os recursos tecnológicos e a motivação demonstrada nas aulas mais diversificadas, nas quais tiveram a oportunidade de socializar informações e aprendizados. O ambiente informatizado e a metodologia adotada exigiram participação e discussões mudando o cenário tradicional de sala de aula. Por isso, o professor precisou estar aberto às inovações tanto pedagógicas como tecnológicas, de modo a proporcionar assim um processo de ensino mais dinâmico e inovador.

6- Simon, Paulo Renato. A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, como alternativa pedagógica para a compreensão do conceito de Função Afim por alunos do ensino médio Santa Maria, RS, 2014. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática). Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. Orientadora: Prof^a. Dr^a Silvia Maria de Aguiar Isaia.

Tem-se nesta dissertação o resultado de uma pesquisa realizada com 32 alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio noturno que é concomitante com o ensino profissionalizante no Colégio Evangélico Panambi, de Panambi RS.

Para a realização desta pesquisa de caráter qualitativo foram utilizados na coleta de dados os seguintes instrumentos: questionários com os alunos, com o intuito de fazer um levantamento acerca dos conhecimentos prévios relacionados ao conceito de função, um teste diagnóstico composto de quatro atividades referentes a funções, observação participante e diário de aula no qual foram relatados todos os acontecimentos ocorridos em classe, bem como documentos produzidos pelos alunos nas resoluções dos problemas.

Nesta pesquisa pretendeu-se analisar a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para a construção do conceito de função afim pelos alunos do ensino médio; para a aplicação e desenvolvimento das atividades foram seguidos os passos sugeridos por Onuchic e Allevato a respeito da metodologia de Resolução de Problemas. Assim considera-se relevante analisar de modo mais fundamentado as experiências de ensino e, nesta pesquisa, especificamente a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, particularmente o conceito de função afim.

Após a aplicação das atividades, e os resultados analisados, constatou-se que os alunos tinham dificuldades principalmente quanto à interpretação dos enunciados dos problemas propostos. Porém o trabalho coletivo teve um papel definitivo para a realização das atividades propostas e, demonstrou-se de extrema importância, sem o qual os resultados não seriam os mesmos. Também foi possível verificar durante o desenvolvimento das atividades que os alunos apresentam certa dificuldade em fazer registros escritos das atividades desenvolvidas bem como dos procedimentos utilizados na resolução dos problemas propostos.

Com base nos resultados alcançados e nos depoimento dos alunos quanto às atividades, conclui-se que essa metodologia aproxima a matemática ao cotidiano do aluno, o que desperta maior interesse na realização das tarefas e conseqüentemente mais êxito na resolução das atividades.

7 - Siqueira, Daniela de Moraes. Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio; orientador Esther Pacheco de Almeida Prado. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

Este projeto de pesquisa tem como foco as atividades para o ensino de funções no Ensino Médio com a utilização dos recursos tecnológicos do *software* Geogebra. O objetivo é compreender as manifestações dos alunos ao realizarem atividades de funções com o uso de recursos computacionais. Foram elaboradas atividades de ensino sobre o conceito e características das funções constante, linear, afim, quadrática, exponencial e logarítmica, para os primeiros anos do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de São Paulo. A metodologia utilizada é a da pesquisa qualitativa; os dados coletados foram o registro escrito dos alunos e as observações do diário de bordo da pesquisadora.

Os resultados observados indicam que, embora os alunos apresentem dificuldades no conceito de função e suas peculiaridades, o uso do *software* proporciona uma melhor compreensão na análise e interpretação dos gráficos. O trabalho em grupo colaborou nas relações interpessoais dos alunos e o uso de recursos computacionais trouxe novo estímulo ao processo ensino-aprendizagem. A pesquisa indicou que o professor, ao propor novas mediações e atividades de ensino, tem necessidade de refletir e reorganizar sua prática.

Siqueira, Daniela de Moraes. *Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio*; orientador Esther Pacheco de Almeida Prado. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

Este projeto de pesquisa tem como foco as atividades para o ensino de funções no Ensino Médio com a utilização dos recursos tecnológicos do *software* Geogebra. O objetivo é compreender as manifestações dos alunos ao realizarem atividades de funções com o uso de recursos computacionais. Foram elaboradas atividades de ensino sobre o conceito e características das funções constante, linear, afim, quadrática, exponencial e logarítmica, para os primeiros anos do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de São Paulo. A metodologia utilizada é a da pesquisa qualitativa; os dados coletados foram o registro escrito dos alunos e as observações do diário de bordo da pesquisadora.

Os resultados observados indicam que, embora os alunos apresentem dificuldades no conceito de função e suas peculiaridades, o uso do *software* proporciona uma melhor compreensão na análise e interpretação dos gráficos. O trabalho em grupo colaborou nas relações interpessoais dos alunos e o uso de recursos computacionais trouxe novo estímulo ao processo ensino-aprendizagem. A pesquisa indicou que o professor, ao propor novas mediações e atividades de ensino, tem necessidade de refletir e reorganizar sua prática.

8 – Sousa, Ricardo Antonio de. A modelagem matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função, São Paulo, 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade Católica de São Paulo. Orientador: Benedito Antônio da Silva.

O objetivo deste trabalho foi verificar se os professores se apropriam da modelagem como processo de ensino e aprendizagem. Para isso, baseando-se no “segundo caso” de modelagem proposto por Barbosa, desenvolvemos uma atividade com professores da rede estadual de ensino, em hora de trabalho pedagógico coletivo (htpc), para buscar dados que possam dar pistas de como tais professores incorporam essa estratégia em suas práticas pedagógicas, para o ensino do conceito de função.

A pesquisa foi composta por três fases: na primeira desenvolveu-se uma atividade de modelagem para a introdução do conceito de função. Essa fase foi desenvolvida em dois encontros de duas horas cada, cuja proposta foi apresentar condições para que os professores percebessem que por meio de um problema real, é possível construir o conhecimento desejado. Na segunda fase foram realizadas entrevistas individuais para verificar de que forma os professores participantes poderiam ter se apropriado da modelagem matemática em suas práticas docentes. Foi utilizado o trabalho de Silveira, que analisa as dissertações e teses que tratam a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem tanto na formação inicial como na continuada de professores, para elaborar as questões apresentadas, bem como analisar as respostas dadas a ela. Na última fase, utilizando as mesmas questões da parte anterior, realizamos uma entrevista coletiva com os participantes, afim de identificar possíveis divergências entre as respostas dadas na primeira e nesta, bem como encontrar algumas

convergências e/ou divergências entre as análises realizada no trabalho de Silveira e as respostas dadas pelos nossos participantes.

Apesar de encontrarmos algumas semelhanças, identificamos outros fatores que podem levar a aceitação ou não da modelagem matemática para a prática docente. No entanto, mesmo com uma aparente aceitação dessa metodologia pelos sujeitos de nossa pesquisa, não podemos assegurar que os mesmos realmente a utilizarão em suas práticas docentes; pois para isso, seria necessário após algum tempo verificar sua apropriação por observação dos professores em situação de aula. A escolha do horário de HTPC revelou-se apropriada, para uma reflexão socializada por professores de uma mesma instituição, havendo mesmo manifestações sobre a conveniência da utilização desse espaço.

9 - Vitolo, José Manoel. Noções introdutórias à ideia de função: uma trajetória hipotética de aprendizagem, São Paulo, 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade Católica de São Paulo. Orientador: Prof. Dr. Armando Traldi Junior.

Este documento tem como objetivos: investigar a construção, discussão e avaliação de um planejamento de ensino para a aprendizagem de noções introdutórias à ideia de função, dentro de uma perspectiva construtivista de aprendizagem; investigar como as pesquisas, na área de Educação Matemática contribuem para a organização do ensino deste tema e analisar a atuação de professores de Matemática, diante de uma proposta de ensino com esta característica.

A fundamentação teórica está baseada nas formulações propostas por Simon (1995), sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). O estudo realizado é de natureza qualitativa envolvendo dois professores de Matemática de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo e suas atuações junto a 77 alunos distribuídos em duas turmas que frequentam o primeiro ano do ensino médio. Os dados foram coletados por entrevistas semiestruturadas, questionário e observações. Embora a THA, tendo sido elaborada com tarefas que envolvam resolução de problemas, uso de tecnologia, abordagens interdisciplinares, aplicações em situações do cotidiano e em outras áreas do conhecimento e sejam potencialmente ricas, no sentido de produzir situações de aprendizagem, sem a participação constante do professor na (re)organização do planejamento, a THA por si só não garante uma aprendizagem sob perspectivas construtivistas. Ainda em relação ao professor, cabe ressaltar que o principal desafio é aproximá-lo das pesquisas acadêmicas e que continuem sempre em processo de formação.

10 - Zatti, Sandra Beatris. Construção do conceito de função: uma experiência de Ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas. Santa Maria/RS, 2010. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática). Centro Universitário Franciscano. Orientador: Prof. Dr. Marcio Violante Ferreira.

Esta obra é resultado de uma pesquisa de cunho qualitativo, associada ao Ensino-Aprendizagem da Matemática. É fruto, portanto, de uma investigação sobre as contribuições que a Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, pode trazer para o ensino-aprendizagem do conceito de Função a alunos do Ensino Médio.

A pesquisa foi realizada com uma turma da 1ª série do Ensino Médio, composta por 19 alunos, da Escola Estadual Professora Maria Rocha, localizada na cidade de Santa Maria-RS. Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram: questionário para a turma - com a finalidade de verificar a expectativa dos alunos quanto ao uso de uma nova metodologia de

ensino –, a observação participante em sala de aula e o diário de campo da professora-pesquisadora.

O desenvolvimento das atividades, em sala de aula, deu-se com a aplicação de uma sequência de situações-problema e a professora-pesquisadora utilizou a resolução de problemas como estratégia de ensino pautando-se nos passos sugeridos por Onuchic (1999): 1) Formar grupos e entregar a atividade; 2) O papel do professor; 3) Resultados na lousa; 4) Plenária e análise dos resultados; 5) Consenso e formalização de conceitos.

Nesta obra, a problemática levantada pela autora é a seguinte: Quais as contribuições que a metodologia de resolução de problemas pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem e para a construção do conceito de função a alunos da 1ª série do Ensino Médio?

Zatti (2010) aponta como problema a dificuldade que os alunos apresentam com relação ao entendimento do conceito de função, pois grande parte dos professores, tanto das escolas públicas quanto das escolas particulares, trabalha esse conceito utilizando somente o livro texto, tendo em vista que muitos desses livros utilizam uma linguagem aprimorada, onde torna difícil a compreensão de alguns conceitos, pelos alunos, sem que haja a interferência do professor. Assim, quando são propostas atividades envolvendo funções, muitas vezes, eles resolvem praticamente todos os exercícios seguindo os mesmos passos de uma forma mecânica, mostrando que não houve compreensão do conceito.

A análise dos dados obtidos durante o trabalho de campo aponta para a importância de se trabalhar a matemática de uma forma mais interligada ao cotidiano dos alunos. Pode-se inferir, também, que a Resolução de Problemas é uma estratégia eficaz no ensino-aprendizagem da matemática, tanto como método de ensino a ser utilizado pelo professor em sala de aula quanto para criar nos alunos uma nova postura: motivação na resolução de outros problemas e gosto pela Matemática que se aprende na escola.

ANEXO 03 – Teste aplicado aos alunos

1. Encontre o valor numérico das expressões algébricas:
 $2x^2 + 5x - 9$, quando $x = -3$ b) $(3x^2 + 2x + 9) - (3x - 1) \cdot (x + 4)$

2. Resolva as equações do 1º grau $10 - (8x - 2) = 5x + 2(-4x + 1)$

3. Um motorista de ônibus, saindo de um terminal A, viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, a partir do ponto inicial, pode ser calculada por $d(x) = 50x + 6$, sendo d em km e x em horas. Faça uma tabela listando as distância percorrida após cada intervalo de uma hora desde $x = 1$ até $x = 5$:

4. Um fabricante vende um produto por R\$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R\$ 40,00 mais o custo de produção de R\$ 0,30 por unidade.
 - a) Qual é o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?
 - b) Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá lucro ou prejuízo?

5. Construa o gráfico, no plano cartesiano, da função indicada:
 $f(x) = 2x - 1$, sendo $D = \{1, 2, 3, 4\}$

ANEXO 04

Quadro com a transcrição das falas dos professores

QUESTÕES NORTEADORAS	Descrição das falas
Professor Gil	
<p>Que aspectos você considera importante no ensino de função?</p>	<p>Os alunos têm dificuldades em operar usando as quatro operações, eles estão chegando sem base do fundamental, está havendo uma má preparação do aluno no Ensino Fundamental. É preciso criar estratégia para suprir essas dificuldades de aprendizagem, assim fica mais difícil o alunado compreender os conteúdos do Ensino Médio.</p>
<p>Com você explica aos seus alunos o que é uma função?</p>	<p>Introduzo dizendo que função é mais uma operação, partindo de uma situação problema. Em seguida, escrevo no quadro sua definição, classificação e por</p>
<p>Como você introduz essa temática na sala de aula?</p>	
<p>Você encontra dificuldades em ensinar função? Se sim, tem a ver com:</p> <p>(X) informações teóricas sobre o assunto;</p> <p>(X) questões metodológicas sobre o ensino;</p> <p>() outros, especificar...</p>	<p>Minha maneira de dar aula talvez não esteja ajudando os alunos compreenderem melhor o assunto; é necessário buscar novas estratégias de ensino, mudar minha prática talvez seria uma saída para ajuda-los, preciso buscar novas possibilidades de ensino para melhorar e facilitar a aprendizagem.</p>
<p>Em relação a aprendizagem dos alunos em que ponto você observa que eles apresentam dificuldades na compreensão do conteúdo função?</p> <p>() sentido da função</p> <p>(X) problematização</p> <p>(X) cálculos aritméticos</p> <p>() construção de gráficos</p>	<p>Além da falta de concentração para entender as perguntas, meus alunos apresentam dificuldades aprender conteúdos do Ensino Médio pois ainda não sabem aplicar as operações fundamentais, principalmente as quatro operações, que é conhecimento básico para aprende cálculos aritmético e algébrico, e isso dificulta a aprendizagem dos conteúdos do ensino médio.</p> <p>Os alunos sabem ler, mas não sabem interpretar o problema usando a linguagem matemática para resolver problemas. No momento de algebrizar a “coisa” eles apresentam dificuldades.</p>
<p>Aponte sugestões para melhoria do ensino e aprendizagem de função</p>	<p>É indispensável partir de resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, para suprir</p>

	essa primeira dificuldade que os alunos trazem do fundamental e também o uso das tecnologias para inovar o ensino.
Professor Regue	
Que aspectos você considera importante no ensino de função	É importante relacionar o raciocínio do aluno a realidade que o cerca.
Como você explica aos seus alunos o que é uma função?	Através de definições e leis de formação matemáticas, pares ordenados, relação de grandezas, relação de elemento, enfim, tópicos relacionados com situações-problemas que estão presentes no cotidiano.
Como você introduz essa temática na sala de aula?	Primeiramente procuro utilizar a história da matemática como estratégia de ensino e o vídeo como recurso didático, especificamente tópicos relacionados ao conceito de função, posteriormente, explico o conteúdo utilizando a aprendizagem significativa.
Você encontra dificuldades em ensinar função? Se sim, tem a ver com: (X) informações teóricas sobre o assunto; () questões metodológicas sobre o ensino; () outros, especificar...	Sim, a dificuldade existe pelo fato do alunado, não saber interpretar determinada questão, e desenvolver de forma insegura.
Em relação a aprendizagem dos alunos em que ponto você observa que eles apresentam dificuldades na compreensão do conteúdo função? (X) sentido da função (X) problematização () cálculos aritméticos () construção de gráficos	Além da falta de concentração para entender as perguntas, meus alunos apresentam dificuldades aprender conteúdos do Ensino Médio, pois ainda não sabem aplicar as operações fundamentais, principalmente as quatro operações, que é conhecimento básico para aprender cálculos aritmético e algébrico, e isso dificulta a aprendizagem dos conteúdos do ensino médio. Por ser um conceito muito abrangente, acaba por sua vez, envolvendo inúmeras dificuldades de compreensão ao alunado, pois envolve concepções diversas e múltiplas representações, fazendo-se então, necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos,

	quais significados o aluno pode produzir.
Aponte sugestões para melhoria do ensino e aprendizagem de função:	Ao meu ver, o que poderia melhorar o ensino-aprendizagem do conceito de função, seria a implantação de ambientes de ensino da matemática nas escolas públicas, pois estes espaços poderiam dar um suporte quanto ao desenvolvimento do raciocínio lógico e criatividade, estímulo do pensamento, habilidades na resolução de problemas que envolvem este conceito.
Professora Nilda	
Que aspectos você considera importante no ensino de função	Aproveito uma situação vivida pelos alunos, com a venda de ovos, açaí, gasolina, e mostro a relação que existe entre quantidade e valor a ser pago. Depois introduzo a definição da função, assim me dou bem, rrsrs.
Com você explica aos seus alunos o que é uma função?	Com situações do cotidiano, como relacionando valor e quantidade para mostrar a relação de dependências de variáveis.
Como você introduz essa temática na sala de aula?	
Você encontra dificuldades em ensinar função? Se sim, tem a ver com: (X) informações teóricas sobre o assunto; () questões metodológicas sobre o ensino; () outros, especificar...	Algebrizar um determinado problema. Os alunos não conseguem aplicar o conceito de função. Fica difícil eles aprenderem o conceito se não tem base do fundamental, as vezes deixo de lado o conteúdo para ensinar as operações fundamentais e resolução de problemas.
Em relação a aprendizagem dos alunos em que ponto você observa que eles apresentam dificuldades na compreensão do conteúdo função? (X) sentido da função (X) problematização (X) cálculos aritméticos	Os alunos têm dificuldades de tudo da matemática, quanto a função estou de acordo com todos os itens: sentido da função, problematização, cálculos aritméticos e construção de gráficos.

(X)construção de gráficos	
Aponte sugestões para melhoria do ensino e aprendizagem de função	Percebo a necessidade de termos na escola um espaço para se construir conhecimento matemático, propondo atividades interativas com uso de materiais manipulativos e jogos, tornando a aula motivadora para que o aluno sinta interesse em aprender, e que os assuntos não devem estar isolados do cotidiano dos alunos.
Professora Lucy	
Que aspectos você considera importante no ensino de função	É um conteúdo da matemática muito próximo da realidade, com situações que nos deparamos. O trabalho com o gráfico, a relação entre duas grandezas.
Com você explica aos seus alunos o que é uma função?	Acredito que é importante um breve questionamento sobre a palavra função, sendo que é um valor que sempre está em função do outro. Que na matemática e na vida sempre usamos função.
Como você introduz essa temática na sala de aula?	Enfatizo a importância desse conteúdo matemático, com relação a outros assuntos de outras disciplinas, principalmente quando utilizamos os gráficos.
Você encontra dificuldades em ensinar função? Se sim, tem a ver com: (X)informações teóricas sobre o assunto; ()questões metodológicas sobre o ensino; ()outros, especificar...	Acredito que a parte teórica deveria ser mais objetiva. Há muita informação com poucas situações ligadas a realidade do aluno, e isso é bem presente no que vemos nos livros didáticos, eles não contextualizam tratam do assunto dissociado da realidade dos alunos, e assim acabamos desenvolvendo nossas aulas da mesma forma, mas reconheço que preciso significar os conteúdos para que os alunos possam entender a disciplina.
Em relação a aprendizagem dos alunos em que ponto você observa que eles apresentam dificuldades na compreensão do conteúdo função? ()sentido da função ()problematização ()cálculos aritméticos	Dificuldades na representação dos gráficos no plano cartesiano, dificuldades de compreender os diferentes cálculos.

(X)construção de gráficos	
Aponte sugestões para melhoria do ensino e aprendizagem de função	trabalhar as funções utilizando recursos tecnológicos, especificamente o computador, uma vez que os alunos têm afinidade com esses recursos.
Professora Ana	
Que aspectos você considera importante no ensino de função	A relação entre duas grandezas para mostrar que um termo depende do outro; exemplificando com situações reais.
Com você explica aos seus alunos o que é uma função?	Primeiramente com exemplos do cotidiano como exemplo, o preço da energia, a corrida de um táxi, etc. posteriormente apresento a teoria de função afim.
Como você introduz essa temática na sala de aula?	Da forma mais simples possível.
Você encontra dificuldades em ensinar função? Se sim, tem a ver com: () informações teóricas sobre o assunto; () questões metodológicas sobre o ensino; (x) outros, especificar...	Sim, devido à falta de interesse por parte principalmente dos alunos.
Em relação a aprendizagem dos alunos em que ponto você observa que eles apresentam dificuldades na compreensão do conteúdo função? () sentido da função (x) problematização () cálculos aritméticos () construção de gráficos	Falta de concentração para entender as perguntas, eles não sabem aplicar as operações fundamentais, as quatro operações, e isso dificulta a aprendizagem dos conteúdos do ensino médio.
Aponte sugestões para melhoria do ensino e aprendizagem de função	Atividades que envolvam os alunos a querer aprender, com situações do cotidiano.