

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS: UMA SOLUÇÃO  
VIA TRANSFORMADA DE HANKEL E O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS

Tese Apresentada por

LUIZ HEITOR DA PAZ GEMAQUE

como requisito parcial à obtenção do grau em

MESTRE EM CIÊNCIAS

Na área de

GEOFÍSICA

Conferido pelo Curso de Pós-Graduação em

Geociências da

Universidade Federal do Pará

Aprovado: 03.02.1988

Comitê de Tese

*Klaus Schiel*  
KLAUS SCHIEL (ORIENTADOR)

*Martin Tygel*  
MARTIN TYGEL

*Laurenildo W. Barbosa Leite*  
LOURENILDO W. BARBOSA LEITE

*João dos Santos Protázio*  
JOÃO DOS SANTOS PROTAZIO

Arquivo de Referência  
BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

Registro de Referência

1. Propagação de ondas em meios elásticos

1988

1. Propagação de ondas em meios elásticos

T.293. GEMAQUE, Luiz Heitor da Paz

Propagação de ondas em meios elásticos: Uma solução via transformada de Hankel e o método dos elementos finitos. Belém, UFPA/CG, 1988.

76 p.

Tese apresentada ao Centro de Geociências da UFPA para obter o grau de mestre em Ciências na área de geofísica.

1. Geofísica. 2. Métodos Geofísicos. I. Universidade Federal do Pará-Centro de Geociências. II. Título.

Para Nena  
com carinho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos co-autores deste trabalho , Dr. Klaus Schiel e Ms. J.S. Protázio, pela ajuda ativa, respectivamente nas áreas de sismica e matemática.

Agradeço a Conceição F. de Melo, a quem devo cinco anos de instrução e estímulo no campo da matemática e das técnicas computacionais.

Agradeço ao Ms. Maurício M. Martinez pelos mais variados tipos de auxílio, em especial pelas explicações referentes ao programa Word 3.1 , que possibilitaram a digitação da tese em computador e sua saída na impressora "laser" NEC LC-08.

## SUMÁRIO

DEDICATÓRIA .....	I
AGRADECIMENTO .....	II
SUMÁRIO .....	III
LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	IV
RELAÇÃO DE SIMBOLOS .....	VI
RESUMO .....	01
ABSTRACT .....	02
1. INTRODUÇÃO .....	03
1.1 Objetivo .....	03
1.2 Métodos para a Avaliação do Campo de Onda Elástico ..	03
1.3 Integrais de Número de Onda .....	07
2. APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS MATEMÁTICAS AO MODELAMENTO DI- GITAL .....	09
2.1 Introdução .....	09
2.2 Separação Parcial de Variáveis via Transformada de Hankel .....	13
2.3 Formulação de Galerkin do Método dos Elementos Finiti- tos .....	19
2.4 Aplicação do Método das Diferenças Finitas com Rela- ção ao Tempo (Variável t) .....	33
2.5 A Escolha das Funções de Base e sua Influência sobre os Elementos Matriciais .....	36
2.6 Solução Implícita dos Sistemas Lineares Tri-diagonais	44
2.7 Avaliação Numérica da Transformada de Hankel .....	47
2.8 Linearização Explícita da Integral Aproximada .....	56
3. SISMOGRAMAS SINTÉTICOS .....	62
4. CONCLUSÕES .....	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	74

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## FIGURAS

Fig.1	- CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA DO MEIO A SER MODELADO ..	09
Fig.2	- APLICAÇÃO CONCENTRADA DA FUNÇÃO $\vec{F}$ COMO DEFINIDA PELA EQUAÇÃO (2.6) .....	12
Fig.3	- MEIO A SER MODELADO E VARIÁVEIS NUMÉRICAS ASSOCIADAS .....	25
Fig.4	- CONFIGURAÇÃO MATRICIAL DE : (a) $\int_{\Omega} c_1 \partial_{tt} \bar{S} \Phi_j dz$ , $j=1,2,\dots,n \iff c_1 [M] [\ddot{S}]$ (b) $\int_{\Omega} a_1 \partial_z \bar{R} \Phi_j dz$ , $j=1,2,\dots,n \iff a_1 [N_1] [R]$	27
Fig.5	- CONFIGURAÇÃO MATRICIAL DE : (a) $\int_{\Omega} \partial_z \bar{S} \partial_z \Phi_j dz$ , $j=1,2,\dots,n \iff [N_2] [S]$ (b) $\{d_1 \bar{R} \Phi_j\}_{z=0}$ , $j=1,2,\dots,n \iff \{d_1 [N_3] [R]\}_{z=0}$	29
Fig.6	- DIVISÃO DA REGIÃO $0 \leq z \leq h$ EM 4 ELEMENTOS .....	37
Fig.7	- FUNÇÕES LINEARES POR PARTES .....	38
Fig.8	- ILUSTRAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES $s(z,t)$ E $\bar{S}(z,t)$ , RESPECTIVAMENTE FORMAS EXATA E APROXIMADA , NUM DETERMINADO MOMENTO $t$ .....	39
Fig.9	- MATRIZ PADRÃO TRI-DIAGONAL REPRESENTATIVA DOS VALORES DE $[M]$ , $[N_1]$ E $[N_2]$ .....	41
Fig.10	- DESTAQUE DO SUBDOMÍNIO PARA A APLICAÇÃO DO ESQUEMA DE XU E MAL .....	48
Fig.11	- MUDANÇA DE VARIÁVEL : $x = A z + B$ .....	50
Fig.12	- DISPOSIÇÃO GRÁFICA DE $f_k$ E $z_k$ QUANDO $N=4$ ....	51
Fig.13	- DISPOSIÇÃO GRÁFICA DAS COORDENADAS $x_k$ , $z_k$ E $f_k$ NO CASO EM QUE $N=2$ .....	59
Fig.14	- SISMOGRAMA TEÓRICO. PRIMEIRO CASO : SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE A 2 Km DE PROFUNDIDADE ....	65
Fig.15	- SISMOGRAMA TEÓRICO. SEGUNDO CASO : SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE A 600 m DE PROFUNDIDADE ...	66
Fig.16	- SISMOGRAMA TEÓRICO. TERCEIRO CASO : SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE A 300 m DE PROFUNDIDADE ...	69
Fig.17	- SISMOGRAMA TEÓRICO. QUARTO CASO : SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE NA SUPERFÍCIE .....	71

TABELAS

Tab.1	- FUNÇÕES LINEARES POR PARTES E SUAS DERIVADAS ....	40
Tab.2	- VALORES DE $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$ , $\langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle$ E $\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle$ .....	40
Tab.3	- FUNÇÕES LINEARES POR PARTES E SUAS DERIVADAS ( $\Delta z = \text{cte}$ ) .....	42
Tab.4	- VALORES DE $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$ , $\langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle$ E $\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle$ , ( $\Delta z = \text{cte}$ )	42
Tab.5	- VALORES ASSUMIDOS PELAS MATRIZES [Q], [E] E [H] CONFORME A EQUAÇÃO CONSIDERADA .....	45

## RELAÇÃO DE SIMBOLOS

$r, \phi, z$	- coordenadas cilíndricas
$k$	- número de onda
$J_n(\xi)$	- função de Bessel de 1ª classe e n-ésima ordem
$\rho$	- densidade
$\lambda, \mu$	- parâmetros de Lamé
$\alpha$	- velocidade da onda P
$\beta$	- velocidade da onda S
$v_R$	- velocidade da onda de Rayleigh
$\vec{U}$	- vetor deslocamento
$U_r, U_\phi, U_z$	- componentes cilíndricas do vetor deslocamento
$\tau_{zz}$	- tensão normal
$\tau_{rz}$	- tensão tangencial
$\vec{F}$	- força normal-pontual (fonte)
$f(t)$	- variação da fonte com o tempo
$\delta$	- função delta de Dirac
$\delta_{ij}$	- delta de Kronecker
$R, S$	- transformadas de Hankel de $U_z$ e $U_r$
$\bar{R}, \bar{S}$	- formas aproximadas de $R$ e $S$
$\epsilon$	- erro
$\Theta_j(z)$	- j-ésima função de peso
$H$	- função de interpolação no caso vetorial
$\Phi_i(z)$	- i-ésima função de base (função de interpolação)
$R_i, S_i$	- coeficientes que assumem os valores dos campos $\bar{R}$ e $\bar{S}$ em um número discreto de pontos nodais
$n$	- número de nós com relação à profundidade
$[R], [S]$	- matrizes coluna $n \times 1$ cujos elementos são os coeficientes $R_i$ e $S_i$
$T_m(z)$	- polinômios de Chebyshev de primeira classe e m-ésima ordem
$C_m$	- m-ésimo coeficiente da expansão de Chebyshev
Intg	- integral de número de onda
$w_k$	- k-ésimo peso quando considerada a linearização das integrais de número de onda

## RESUMO

O problema em foco corresponde ao modelamento matemático da equação de onda quando é considerado um semi-espço homogêneo. Uma fonte sísmica do tipo normal-pontual, variável no tempo, localizada a uma certa profundidade, ou mesmo na superfície, ocasiona a formação do campo de onda. Faz-se uso de várias técnicas modernas visando a solução numérica deste campo. Inicialmente, tanto a equação de onda quanto as condições de contorno e os valores iniciais são levados ao domínio do número de onda ( $k$ ) através da transformada de Hankel. Nesse domínio, consegue-se diminuir a dimensão do problema por meio da parametrização de  $k$ . Com isso, a equação resultante fica dimensionalmente reduzida, mas permanece hiperbólica. A seguir, busca-se a solução numérica de tal equação através do método dos elementos finitos (dependência na profundidade) e do esquema das diferenças finitas (dependência no tempo). Como consequência, chega-se a consecutivas soluções de sistemas de equações lineares. Para retornar ao domínio inicial, essas soluções devem ser submetidas à transformada de Hankel inversa, por meio da qual os deslocamentos normal e radial são finalmente encontrados.

Vários exemplos de sismogramas teóricos obtidos através das técnicas acima citadas são apresentados. O cálculo desses sismogramas, além de não requerer muita memória de computador, situa-se dentro de uma faixa aceitável de precisão numérica e rapidez computacional.

Como extensão deste trabalho é sugerido a avaliação da resposta elástica completa no caso de um semi-espço estratificado, a inclusão de vários tipos de fontes e uma análise detalhada das condições de estabilidade dos esquemas numéricos propostos.

## ABSTRACT

The problem under investigation is to determine the motion of an homogeneous elastic half-space when a seismic source of the normal-force type is located at a depth or even on the free surface.

Several modern techniques are used to solve the wave equation numerically. At first, the Hankel transforms are applied to the problem and make possible the partial separation of variables. After this separation, the equation has reduced dimensionality, but remains hyperbolic. Next, the finite element and finite difference methods are employed to solve the coupled system of partial differential equations in  $z$  (depth) and  $t$  (time). Thus, one can obtain a linear equations system that must be solved consecutively. To return to the initial domain the inverse Hankel transforms are evaluated, and one get the final result (normal and radial displacement).

Synthetic seismograms computed by means of the above techniques are presented . The calculation of these seismograms does not require large amounts of computer storage , it has enough numerical accuracy and computational speed.

As continuity of this work, it is suggested the calculation of the complete elastic response of a vertically heterogeneous half-space, the inclusion of several kinds of sources and detailed analyses of the stability conditions.

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo o cálculo da resposta elástica completa de um semi-espaco homogêneo. São utilizadas várias técnicas modernas visando encontrar a solução numérica do campo de onda.

O crescente interesse no modelamento numérico sísmico e sismológico tem conduzido a uma ampla proliferação de métodos que variam em complexidade, precisão e facilidade de implementação. Tal esforço é estimulado pela conscientização de que, em muitas configurações de subsuperfície importantes, não existem soluções analíticas exatas para a equação de onda elástica. Nestes casos, as soluções para modelos realísticos podem ser obtidas satisfatoriamente através de métodos numéricos de aproximação. Dentre as numerosas técnicas numéricas disponíveis para esta proposta, os métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas são particularmente versáteis, posto que levam em conta não apenas as ondas diretas, ondas refletidas primárias e ondas multiplamente refletidas, mas também as ondas de superfície, ondas refletidas convertidas, ondas difratadas, etc.

O tratamento apresentado neste trabalho visa combinar a separação parcial de variáveis (via transformada de Hankel) com as soluções numéricas dos elementos finitos (dependência na profundidade) e das diferenças finitas (dependência no tempo), a fim de avaliar os valores do campo de onda, nas direções normal e radial, no caso em que uma fonte do tipo normal-pontual é utilizada.

### 1.2 Métodos para a Avaliação do Campo de Onda Elástico

O estudo da propagação de ondas em sólidos estratificados é de considerável interesse em uma variedade de aplicações. Muitas ferramentas matemáticas têm sido desenvolvidas a fim de analisar esses modelos idealizados, tentando-se compreender o processo mecânico associado com a geração das ondas e-

lásticas a partir da fonte e suas subseqüentes transformações a medida que elas se propagam. Tal esforço teve como primeira publicação o trabalho de LAMB (1904), no qual o movimento produzido por uma força transiente, na superfície de um semi-espaço uniforme, era estudado através de uma transformada integral seguida pela avaliação analítica das integrais inversas. Os tratamentos analíticos de problemas mais complexos, envolvendo uma ou mais camadas, continuaram a se desenvolver durante toda a primeira metade do século vinte. Uma interessante descrição dessas pesquisas iniciais pode ser encontrada em EWING et al. (1957) e em BREKHOVSKIKH (1980). Obteve-se assim, através desses tratamentos analíticos, uma compreensão dos processos físicos que ocorrem durante a geração e propagação das ondas elásticas. Tais tratamentos consistem de soluções formais completas enfatizando vários aspectos assintóticos do problema. São resultados bastante significativos embora forneçam somente respostas parciais para as questões básicas da Sismologia e Sísmica. Por exemplo, não são apresentados sismogramas teóricos completos, posto que estes são resultados suficientemente complicados, e fórmulas computacionais simples não estão disponíveis para a descrição da resposta.

Nesta segunda metade do século, tem-se criado muitos esquemas importantes. Vários deles envolvem algum tipo de aproximação, como por exemplo o método da refletividade (FUCHS e MÜLLER 1971) que assume homogeneidade lateral, ou o método do raio (HELMBERGER 1968, ČERVENÝ et al. 1977, CHAPMAN 1978) onde é assumido que o comprimento de onda sísmico é pequeno quando comparado com a escala de heterogeneidade.

O método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF) são as técnicas mais gerais que resolvem a equação de onda elástica, posto que suportam estruturas tri-dimensionais arbitrárias. Entretanto, embora tais métodos sejam bastantes universais, possuem uma limitada faixa de estabilidade. Isto requer o uso de pequenos incrementos no tempo, o que resulta em custos computacionais elevados. A discretização de um continuum, como realizada pelos MEF e MDF, fornecem progressivamente soluções mais precisas a medida que a estrutura da malha torna-se mais fina. Desse ponto de vista, o modelamento numérico pode ser considerado como um filtro passa baixa, no

sentido de que as baixas frequências (comprimentos de onda que são longos quando comparados com o espaçamento da malha) propagam-se de forma apropriada através da malha, ao passo que as altas frequências (comprimentos de ondas curtos comparados com o espaçamento da malha) são indesejavelmente modificadas, devido a um, ou mais, dos seguintes fatores :

(a) Amplificação ou atenuação numéricas, incluindo aquelas decorrentes de erros de truncamento;

(b) Anisotropia numérica, onde as velocidades de propagação variam com a orientação na malha de discretização;

(c) Dispersão numérica das velocidades de fase e grupo, onde a velocidade é, agora, uma função dos pontos de malha por comprimento de onda;

(d) Polarização numérica, onde campos de onda longitudinalmente ou transversalmente polarizados tornam-se quase-longitudinais e quase-cisalhantes;

(e) Geração de modos parasitas de vibração puramente numéricos, particularmente nas frequências mais elevadas, decorrentes dos esquemas de ordens mais altas (BELYTICHKO e MULLEN 1978) e das malhas não homogêneas (MULLEN e BELYTICHKO 1980).

Os modelamentos numéricos do campo de onda, via MEF e MDF, estabeleceram-se como ferramentas matemáticas muito úteis e prometem eficientes esquemas para a solução do problema inverso completo (migração simultânea e inversão de parâmetros). Contudo, a implementação em larga escala dessas técnicas tem tomado a dianteira em relação a análise quantitativa de sua precisão. Com aplicação na equação de onda, o pouco que é conhecido da precisão destas técnicas está amplamente espalhado na literatura. ALFORD et al. (1974) analisaram a precisão das soluções de diferenças finitas, segunda e quarta ordens, a partir da equação de onda escalar bi-dimensional no domínio da frequência. Além disso, apresentaram previsões analíticas dos efeitos da dispersão do grid, que estariam de acordo com resultados experimentais. BELYTICHKO e MULLEN (1978) estudaram a precisão das soluções de elementos finitos, segunda e quarta ordens, para a equação de onda escalar no domínio da frequência. BAMBERGER et al. (1980) analisaram cuidadosamente a estabilidade e a precisão das soluções de diferenças finitas e elementos finitos para a equação de onda elástica usando diferen-

ça central no tempo. MARFURT (1984) comparou quantitativamente as soluções através do MEF e MDF utilizando as equações de onda hiperbólica elástica e escalar no domínio do tempo e da frequência. Neste trabalho, Marfurt mostrou que em meios homogêneos os esquemas explícitos de diferenças finitas e elementos finitos são comparáveis ao resolverem a equação de onda escalar e a equação de onda elástica com razão de Poisson menor que 0,3. Os elementos finitos são superiores às diferenças finitas para modelamento em meio elástico com razão de Poisson entre 0,3 e 0,45.

Os sismogramas sintéticos podem auxiliar na compreensão e na interpretação de padrões de onda observados em sismogramas de campo. Neste sentido, KELLY et al. (1976) publicaram um artigo fundamentado na abordagem via MDF. Sismogramas sintéticos, calculados para vários modelos de interesse em exploração, serviram para ilustrar como a técnica pode ajudar ao interpretador. Os exemplos ilustravam também vários aspectos da implementação das diferenças finitas, envolvendo fenômenos tais como dispersão do grid e reflexões artificiais provenientes das bordas do modelo.

ALEKSEEV e MIKHAILENKO (1980) descreveram um método para o cálculo de sismogramas teóricos, que combinava a separação parcial das variáveis espaciais com o método das diferenças finitas. Inicialmente buscaram uma solução para as componentes cilíndricas  $U_i$ , do vetor deslocamento, na forma de transformada de Hankel :

$$U_i = \int_0^{\infty} k F_i(k) J_n(kr) dk, \quad n=0;1$$

A seguir, resolveram a equação de onda resultante, através do MDF. Finalmente, retornaram ao domínio inicial calculando a integral para  $U_i$  por meio do método de Filon, usando  $J_n(kr)$  como função peso.

### 1.3 Integrais de Número de Onda

No cálculo do campo de onda transiente implementado através de técnicas que envolvem transformadas por integrais, muito esforço tem sido devotado na avaliação das, assim chamadas, "integrais de número de onda" (PIESSENS e BRANDERS 1983, KUNDU e MAL 1985). Em problemas tri-dimensionais, estas integrais são do tipo  $\int_0^{\infty} F(k) J_n(kr) dk$ ,  $n=0;1;2$ . Onde  $r, a, b$  são números reais,  $F(k)$  é uma função com comportamento oscilatório e  $J_n(kr)$  corresponde à função de Bessel de primeira classe e ordem  $n$ .  $F(k)$  é obtida através de operações matriciais e sua avaliação frequentemente requer muito tempo de CPU. Por isso se faz necessário o desenvolvimento de um algoritmo eficiente que, satisfazendo uma determinada tolerância, seja capaz de avaliar essas integrais através de moderado número de coordenadas.

Para funções oscilatórias, dois métodos comumente usados podem ser encontrados na literatura (DAVIS e RABINOWICH 1975). Em um deles, a integração é realizada entre zeros do integrando e a convergência é acelerada pela aplicação da transformada de Euler (LONGMAN 1960). Este método não é eficiente em integrais de número de onda típicas, pois necessita dos zeros de  $F(k)$ , a priori desconhecidos. No outro método, uma curva quadrática é ajustada a  $F(k)$  em cada subintervalo, e a seguir, avalia-se analiticamente a integral (FILON 1928). Este método alcança a precisão desejada usando um intervalo não maior do que o necessário para integrar  $F(k)$  sozinha e, portanto, torna-se mais eficiente quando  $r$  for grande e  $F(k)$  variar lentamente. Objetivando aproximar  $F(k)$  de forma mais precisa, FLINN (1960) modificou o método de Filon usando um ajuste de quinta ordem, em vez de segunda. Contudo, a versão de Flinn requer o conhecimento de  $F'(k)$ , o que não é prático no caso das integrais de número de onda.

PROTÁZIO e GUIMARÃES (1983) desenvolveram um esquema que utilizava as quadraturas oscilantes em transformadas de Hankel e Fourier. Estas quadraturas possibilitaram o cálculo das transformadas usando um pequeno número de pontos, conseguindo-se com isso substancial economia de tempo.

CLENSHAW e CURTIS (1960) desenvolveram um algoritmo no qual o integrando é aproximado por uma série de polinômios

de Chebyshev de primeira classe, seguido pela avaliação analítica de cada termo. Recentemente, uma versão modificada do esquema de quadratura de Clenshaw-Curtis, aplicada na avaliação das integrais de número de onda, foi proposta por XU e MAL (1985). Estes autores indicam que tal versão se mostrou muito mais eficiente que outros métodos comumente usados na avaliação das integrais de número de onda.

## 2. APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS MATEMÁTICAS AO MODELAMENTO DIGITAL

### 2.1 Introdução

Neste capítulo serão explicadas as técnicas matemáticas usadas no modelamento digital referente ao problema dinâmico de propagação de ondas elásticas em um semi-espaço homogêneo.

O problema físico a ser resolvido consiste na determinação do campo de onda na superfície livre de um semi-espaço homogêneo quando é aplicada uma fonte do tipo normal-pontual, localizada a uma certa profundidade (Fig.1).

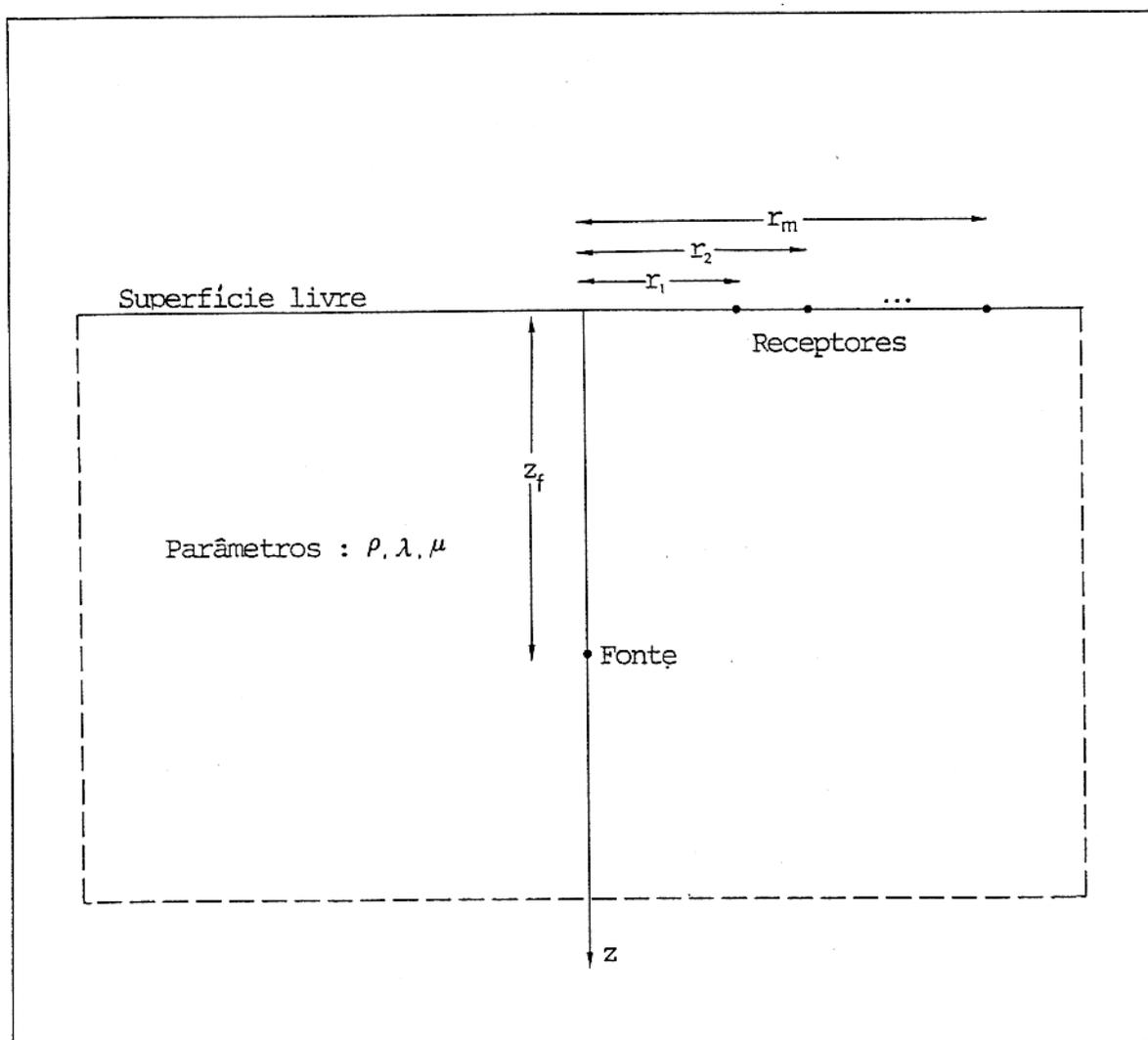


Fig.1 - CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA DO MEIO A SER MODELADO

Para tornar viável a solução, far-se-á uso de várias técnicas que, além de reduzirem dimensionalmente o problema, possibilitarão a diminuição do tempo e memória de computador. As técnicas [Tec.] utilizadas e a sequência na qual foram empregadas são fornecidas a seguir,

[A] --> [Tec.1] --> [Tec.2] --> ... --> [Tec.5] --> [B]

onde temos :

- [A] - equação de onda, mais as condições de contorno e os valores iniciais;
- [Tec.1] - Separação parcial de variáveis via transformada de Hankel;
- [Tec.2] - Aplicação do método dos elementos finitos (formulação de Galerkin) com relação à profundidade (variável  $z$ );
- [Tec.3] - Aplicação do método das diferenças finitas com relação ao tempo (variável  $t$ );
- [Tec.4] - Solução implícita do sistema linear caracterizado por matriz tri-diagonal;
- [Tec.5] - Avaliação das integrais de número de onda através de uma versão modificada do esquema de quadratura de Clenshaw-Curtis (XU e MAL 1985);
- [B] - Sismograma sintético.

Em um meio elástico homogêneo, a equação de onda é da forma abaixo (BEN-MENACHEM e SING 1981),

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div } \vec{U}) - \mu \cdot \text{rot}(\text{rot } \vec{U}) + \rho \vec{F} = \rho \partial_{tt} \vec{U} \quad (2.1)$$

onde a seguinte notação é usada:  $\vec{U} = [U_r, U_\phi, U_z]^T$  é o vetor deslocamento,  $\rho$  é a densidade,  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros de Lamé, e  $\vec{F}$  representa a força por unidade de massa. Como a equação (2.1) é válida apenas para o caso de um meio homogêneo, isto significa que os valores de  $\rho$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes.

Opcionalmente, se  $\alpha$  e  $\beta$  forem introduzidos através das relações

$$\alpha = \{(\lambda + 2\mu)/\rho\}^{1/2}, \quad \beta = \{\mu/\rho\}^{1/2} \quad (2.2)$$

a equação (2.1) poderá ser escrita como

$$\alpha^2 \text{grad}(\text{div } \vec{U}) - \beta^2 \text{rot}(\text{rot } \vec{U}) + \vec{F} = \partial_t \vec{U} \quad (2.3)$$

Sejam também assumidas as seguintes condições de contorno,

$$\{\tau_{zz}\}_{z=0} = \{\tau_{rz}\}_{z=0} = 0 \quad (2.4)$$

e os valores iniciais

$$\{\vec{U}\}_{t=0} = \{\partial_t \vec{U}\}_{t=0} = 0 \quad (2.5)$$

onde  $\tau_{zz}$  e  $\tau_{rz}$  são, respectivamente, as tensões normal e tangencial.

Ao considerar-se o caso de uma força pontual  $\vec{F}$ , com magnitude  $F_0$  e aplicação concentrada no ponto  $\vec{R} = \vec{R}_f$ , tem-se:

$$\rho \vec{F} = F_0 f(t) \delta(\vec{R} - \vec{R}_f) \hat{e} \quad (2.6)$$

onde:  $\hat{e}$  corresponde ao vetor unitário fornecendo a direção da aplicação de  $\vec{F}$ ;  $f(t)$  é uma função adimensional representando a variação da fonte com o tempo e  $\delta(\vec{R} - \vec{R}_f)$  é a função delta de Dirac tri-dimensional, definida por

$$\delta(\vec{R}-\vec{R}_f) = \begin{cases} 0, & \text{para } \vec{R} \neq \vec{R}_f \\ \infty, & \text{para } \vec{R} = \vec{R}_f \end{cases}$$

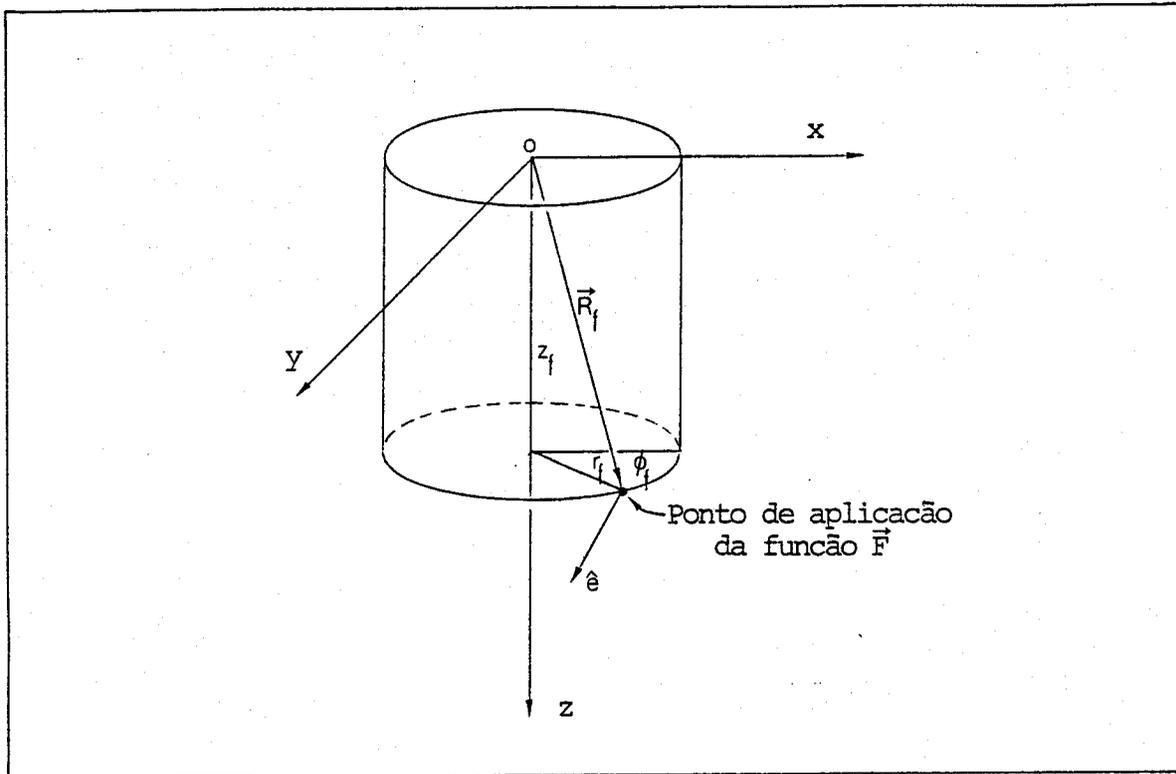


Fig.2 - APLICAÇÃO CONCENTRADA DA FUNÇÃO  $\vec{F}$  COMO DEFINIDA PELA EQUAÇÃO (2.6)

Em particular, usando coordenadas cilíndricas, obtem-se (BEN-MENAHEN e SING 1981) :

$$\delta(\vec{R}-\vec{R}_f) = r^{-1} \delta(r-r_f) \delta(\phi-\phi_f) \delta(z-z_f) \quad (2.7)$$

Se a força  $\vec{F}$  for normal e estiver concentrada em  $r_f=0$ , a uma profundidade  $z_f$ , então a equação (2.6), em coordenadas cilíndricas, passa a ser

$$\rho \vec{F} = F_0 f(t) r^{-1} \delta(r) \delta(z-z_f) \hat{e}_z \quad (2.8)$$

Na definição do local onde ocorre a singularidade,  $\delta(\phi - \phi_f)$  é desnecessário, posto que particularmente em  $r=0$  (eixo  $z$ ), torna-se sem razão um valor para  $\phi_f$ .

A seguir, cada uma das técnicas anunciadas serão desenvolvidas sequencialmente, objetivando-se a avaliação numérica do campo de onda no semi-espaco homogêneo.

## 2.2 Separação Parcial de Variáveis via Transformada de Hankel

Em virtude da geometria do sistema possuir simetria axial, torna-se conveniente o uso de coordenadas cilíndricas na equação de onda (2.1). Assim, o vetor deslocamento  $\vec{U} = [U_r, U_\phi, U_z]^T$  pode ser desmembrado em suas componentes básicas  $U_r$ ,  $U_\phi$  e  $U_z$ , obtendo-se as três equações seguintes :

$$(\lambda + 2\mu) \{ \partial_{rr} U_r + \partial_r U_r / r - U_r / r^2 + \partial_{zz} U_z \} + \mu \{ \partial_{zz} U_r - \partial_{rz} U_z \} = \rho \partial_{tt} U_r \quad (2.9)$$

$$\mu \{ \partial_{zz} U_\phi + \partial_{rr} U_\phi + \partial_r U_\phi / r - U_\phi / r^2 \} = \rho \partial_{tt} U_\phi \quad (2.10)$$

$$(\lambda + 2\mu) \{ \partial_{rz} U_r + \partial_z U_r / r + \partial_{zz} U_z \} - \mu \{ \partial_{rz} U_r - \partial_{rr} U_z + \partial_z U_r / r - \partial_r U_z / r \} + F_0 f(t) r^{-1} \delta(r) \delta(z - z_f) = \rho \partial_{tt} U_z \quad (2.11)$$

Como se observa, ocorre um desacoplamento da componente  $U_\phi$ , pois esta aparece somente na equação (2.10) e não está associada a  $U_r$  nem a  $U_z$ . Adicionalmente, o efeito da fonte aparece de forma direta na equação (2.11), e de forma indireta na equação (2.9), posto que esta também associa as componentes  $U_r$  e  $U_z$ . Portanto, a partir deste ponto, nossa atenção restringe-se às equações (2.9) e (2.11), que relacionam as componentes de interesse do vetor deslocamento  $\vec{U} = [U_r, U_z]^T$ .

A separação parcial de variáveis é feita via trans-

formada de Hankel (ALEKSEEV e MIKHAILENKO 1980), buscando-se as soluções para  $U_r$  e  $U_z$  na seguinte forma,

$$U_z(r, z, t) = \int_0^{\infty} k R(k, z, t) J_0(kr) dk \quad (2.12)$$

$$U_r(r, z, t) = \int_0^{\infty} k S(k, z, t) J_1(kr) dk \quad (2.13)$$

onde  $J_0$  e  $J_1$  são as funções de Bessel de ordens 0 e 1;  $R(k, z, t)$  e  $S(k, z, t)$  são as transformadas de Hankel para  $U_z(r, z, t)$  e  $U_r(r, z, t)$ , respectivamente.

A partir das equações (2.12) e (2.13), obtêm-se as seguintes derivadas de  $U_z$  e  $U_r$  :

$$\partial_r U_z = \int_0^{\infty} k^2 R(k, z, t) J_0'(kr) dk \quad (2.14)$$

$$\partial_{rr} U_z = \int_0^{\infty} k^3 R(k, z, t) J_0''(kr) dk \quad (2.15)$$

$$\partial_r U_r = \int_0^{\infty} k^2 S(k, z, t) J_1'(kr) dk \quad (2.16)$$

$$\partial_{rr} U_r = \int_0^{\infty} k^3 S(k, z, t) J_1''(kr) dk \quad (2.17)$$

onde :

$$J_0'(kr) = \frac{\partial J_0(kr)}{\partial(kr)} \quad ; \quad J_0''(kr) = \frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial(kr)^2} \quad (2.18)$$

$$J_1'(kr) = \frac{\partial J_1(kr)}{\partial(kr)} \quad ; \quad J_1''(kr) = \frac{\partial^2 J_1(kr)}{\partial(kr)^2} \quad (2.19)$$

A partir da teoria das funções de Bessel, as seguintes equações podem ser obtidas (WATSON 1958) :

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (2.20)$$

$$x J_1'(x) = x J_0(x) - J_1(x) \quad (2.21)$$

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0 \quad (2.22)$$

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2-1) J_1(x) = 0 \quad (2.23)$$

$$\int_0^\infty g(k) J_n(kr) dk = 0 \quad \Rightarrow \quad g(k) = 0 \quad (2.24)$$

$$r^{-1} \delta(r) = \int_0^\infty k J_0(kr) dk \quad (2.25)$$

Substituindo as equações (2.12) a (2.17) nas equações (2.9) e (2.11), e usando os resultados fornecidos pelas equações (2.20) a (2.25), onde  $x=kr$ , obtem-se :

$$\mu \partial_{zz} S - (\lambda + \mu) k \partial_z R - (\lambda + 2\mu) k^2 S = \rho \partial_{tt} S \quad (2.26)$$

$$(\lambda + 2\mu) \partial_{zz} R + (\lambda + \mu) k \partial_z S - \mu k^2 R + F_0 f(t) \delta(z - z_f) = \rho \partial_{tt} R \quad (2.27)$$

Estas duas equações podem ser colocadas na seguinte forma matricial,

$$\partial_{zz} G + A(k) \partial_z G + B(k) G - F(z, t) = C \partial_{tt} G \quad (2.28)$$

onde :

$$G = G(k, z, t) = \begin{bmatrix} S(k, z, t) \\ R(k, z, t) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\partial_z G = [\partial_z S, \partial_z R]^T, \quad \partial_{zz} G = [\partial_{zz} S, \partial_{zz} R]^T, \quad \partial_{tt} G = [\partial_{tt} S, \partial_{tt} R]^T \quad (2.30)$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & -k(\lambda + \mu) / \mu \\ k(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} -K^2 (\lambda + 2\mu) / \mu & 0 \\ 0 & -\mu k^2 / (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$C = \begin{bmatrix} \rho / \mu & 0 \\ 0 & \rho / (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$F(z, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 f(t) \delta(z - z_f) / (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Considerando-se os valores iniciais dados pela equação (2.5), e fazendo-se uso da equação (2.24), obtém-se

$$\{ G \}_{t=0} = \{ \partial_t G \}_{t=0} = 0 \quad (2.35)$$

Para um meio isotrópico, tem-se a seguinte relação tensão-deformação (AKI e RICHARDS 1980),

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2 \mu E_{ij} \quad (2.36)$$

onde  $\delta_{ij}=0$  para  $i \neq j$  e  $\delta_{ij}=1$  para  $i=j$ . Em coordenadas cilíndricas, os valores de  $E_{kk}$  e  $E_{ij}$  são dados por

$$E_{rr} = \partial_r U_r, \quad E_{\phi\phi} = (\partial_\phi U_\phi + U_r) / r, \quad E_{zz} = \partial_z U_z \quad (2.37)$$

$$E_{kk} = E_{rr} + E_{\phi\phi} + E_{zz}, \quad E_{rz} = (\partial_z U_r + \partial_r U_z) / 2 \quad (2.38)$$

Em virtude de  $\partial_\phi U_\phi = 0$ , as tensões normal e tangencial são expressas pelas seguintes equações,

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z U_z + \lambda (\partial_r U_r + U_r / r) \quad (2.39)$$

$$\tau_{rz} = \mu (\partial_z U_r + \partial_r U_z) \quad (2.40)$$

Adicionalmente, estas tensões devem satisfazer as condições de contorno fornecidas pela equação (2.4). Assim, igualando a zero as equações (2.39) e (2.40), e usando as expressões de  $U_z$  e  $U_r$  dadas pelas equações (2.12) e (2.13), chega-se a

$$\left\{ \partial_z R + \lambda k (\lambda + 2\mu)^{-1} S \right\}_{z=0} = 0 \quad (2.41)$$

$$\left\{ \partial_z S - k R \right\}_{z=0} = 0 \quad (2.42)$$

Colocando estas equações em notação matricial, obtem-se

$$\left\{ \partial_z G + D(k) G \right\}_{z=0} = 0 \quad (2.43)$$

onde

$$D(k) = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k/(\lambda+2\mu) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Assim, como resultado da aplicação da transformada de Hankel, chegou-se ao problema de valores de contorno dado pelas equações (2.28), (2.35) e (2.43), repetidas a seguir por comodidade,

$$\partial_{zz}G + A(k) \partial_z G + B(k) G - F(z,t) = C \partial_{tt}G \quad (2.45)$$

$$\left\{ \partial_z G + D(k) G \right\}_{z=0} = 0 \quad (2.46)$$

$$\left\{ G \right\}_{t=0} = \left\{ \partial_t G \right\}_{t=0} = 0 \quad (2.47)$$

Este problema é resolvido diversas vezes, para diferentes valores de  $k$ , usando-se métodos tais como elementos finitos e diferenças finitas. Visto desta forma, o problema fica dimensionalmente reduzido para as funções  $S$  e  $R$ . Uma vez obtida a solução discreta para  $G=[S,R]^T$ , segue-se a avaliação numérica das integrais dadas pelas equações (2.12) e (2.13).

### 2.3 Formulação de Galerkin do Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é uma técnica geral para elaboração de soluções aproximadas referentes aos problemas de valores de contorno. Tal método implica na divisão do domínio principal em um número finito de subdomínios simples, os chamados elementos finitos, e o uso de conceitos variacionais para construir uma aproximação da solução sobre a coleção desses elementos. Em virtude da generalidade e riqueza das idéias subjacentes ao método, ele tem sido usado com admirável sucesso na resolução de um amplo espectro de problemas, virtualmente em todas as áreas de engenharia e física matemática.

Existe uma grande quantidade de referências abordando o método dos elementos finitos, como por exemplo, a análise feita por STRANG e FIX (1973), e a publicação clássica de ZIENKIEWICZ (1977).

Com o objetivo de descrever resumidamente a formulação de Galerkin, considere-se a equação diferencial  $L(G)-F=0$ , definida no domínio  $\Omega$ , e sujeita a determinadas condições de contorno. Pode-se aproximar a solução exata  $G(z,t)$ , em  $z$ , por  $\tilde{G}(z,t)$ , através da seguinte formulação (STRANG e FIX 1973),

$$\tilde{G}(z,t) = \sum_{i=1}^n G_i(t) \Phi_i(z) \quad (2.48)$$

onde  $\Phi_i(z)$  são as funções de base linearmente independentes. São conhecidas como "funções de formato" (shape functions), ou "funções de interpolação" na análise de elementos finitos. Os coeficientes  $G_i$  assumem os valores do campo  $\tilde{G}(z,t)$  em um número discreto de pontos nodais. O erro  $\varepsilon$ , desta aproximação, em um dado ponto, pode ser expresso como

$$\varepsilon = L(\tilde{G}) - L(G) = L(\tilde{G}) - F \quad (2.49)$$

Requer-se, ainda, que a média ponderada deste erro vá a zero no domínio  $\Omega$ , posto que técnicas numéricas como diferenças finitas, elementos finitos e o método dos momentos, pertencem todos ao, mais geral, método do resíduo ponderado (ZIENKIEWICZ 1977). Portanto,

$$\int_{\Omega} \varepsilon \theta_j(z) dz = 0 \quad ; \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.50)$$

onde  $\theta_j(z)$  são funções de peso arbitrárias.

Escolhendo-se  $\theta_j = \Phi_j$ , de maneira que as funções de peso e de base sejam idênticas, fica caracterizada a formulação de Galerkin do método dos elementos finitos (MARFURT 1984),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \theta_j dz &= \int_{\Omega} \varepsilon \Phi_j dz = \int_{\Omega} \{L(\vec{G}) - F\} \Phi_j dz \\ &= \int_{\Omega} \{L(\sum_{i=1}^n G_i \Phi_i) - F\} \Phi_j dz \quad ; \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (2.51)$$

fornecendo um sistema linear de equações em  $G_i$ .

A expressão para  $L(G)$ , no presente modelamento, é obtida através da equação (2.45) :

$$L(G) = \partial_z G + A \partial_z G + B G - C \partial_{zz} G \quad (2.52)$$

Entretanto, sendo  $G$  um vetor, equação (2.29), necessita-se de uma fórmula mais geral que a fornecida pela equação (2.50). Esta generalização possui a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \varepsilon \cdot H dz = 0 \quad (2.53)$$

onde : H é a função de interpolação no caso vetorial ; o domínio  $\Omega$  vai de zero (superfície) até  $z_n$  (limite imposto ao modelamento, corresponde à profundidade do último nó do modelo) ; e o integrando  $\varepsilon \cdot H$  representa o produto interno dado por

$$\varepsilon \cdot H = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 \quad (2.54)$$

Desenvolvendo-se a equação (2.53), obtem-se :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \cdot H \, dz &= \int_{\Omega} \{L(\tilde{G}) - F\} \cdot H \, dz \\ &= \int_{\Omega} \{\partial_{zz}\tilde{G} + A \partial_z\tilde{G} + B \tilde{G} - C \partial_n\tilde{G} - F\} \cdot H \, dz = 0 \quad (2.55) \end{aligned}$$

onde  $\tilde{G} = [\tilde{S}, \tilde{R}]^T$  é uma solução aproximada de  $G = [S, R]^T$ . Integrando-se por partes a primeira parcela da equação (2.55), obtem-se,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{zz}\tilde{G} \cdot H \, dz &= H \cdot \partial_z\tilde{G} \Big|_0^{z_n} - \int_{\Omega} \partial_z\tilde{G} \cdot \partial_z H \, dz \\ &= -\{H \cdot \partial_z\tilde{G}\}_{z=0} - \int_{\Omega} \partial_z\tilde{G} \cdot \partial_z H \, dz \quad (2.56) \end{aligned}$$

Pode-se, agora, usar a condição de contorno expressa pela equação (2.46). Dessa maneira, a equação (2.56) assume a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \partial_{zz}\tilde{G} \cdot H \, dz = \{H \cdot D\tilde{G}\}_{z=0} - \int_{\Omega} \partial_z\tilde{G} \cdot \partial_z H \, dz \quad (2.57)$$

Substituindo a equação (2.57) em (2.55), chega-se a

$$\int_{\Omega} \{C \partial_{tt} \bar{G} - A \partial_z \bar{G} - B \bar{G}\} \cdot H \, dz + \int_{\Omega} \partial_z \bar{G} \cdot \partial_z H \, dz - \{D \bar{G} \cdot H\}_{z=0} = - \int_{\Omega} F \cdot H \, dz \quad (2.58)$$

As matrizes A, B, C, D e F possuem vários elementos iguais a zero, e são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

onde os valores de  $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots$  podem ser obtidos diretamente através das equações (2.31) a (2.34), e de (2.44). Deste modo, a equação (2.58) assume a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \partial_{tt} \bar{S} \\ c_2 \partial_{tt} \bar{R} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \partial_z \bar{R} \\ a_2 \partial_z \bar{S} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \bar{S} \\ b_2 \bar{R} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} dz +$$

$$+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \partial_z \bar{S} \\ \partial_z \bar{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_z h_1 \\ \partial_z h_2 \end{bmatrix} dz - \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \bar{R} \\ d_2 \bar{S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\}_{z=0} = - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} dz \quad (2.59)$$

$\bar{S}$  e  $\bar{R}$  compõem o vetor  $\bar{G} = [\bar{S}, \bar{R}]^T$ , e correspondem às soluções aproximadas de S e R :

$$S(z,t) \approx \bar{S}(z,t) = \sum_{i=1}^n S_i(t) \Phi_i(z) \quad (2.60)$$

$$R(z,t) \approx \bar{R}(z,t) = \sum_{i=1}^n R_i(t) \Phi_i(z) \quad (2.61)$$

Com o objetivo de expressar a equação (2.59) na forma de sistemas lineares, faça-se inicialmente

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_j \\ 0 \end{bmatrix} ; j=1,2,\dots,n \quad (2.62)$$

ou seja, atribui-se a H os valores  $[\Phi_1, 0], [\Phi_2, 0], \dots, [\Phi_n, 0]$  na equação (2.59), de forma que, enquanto  $h_2$  é mantido igual a zero,  $h_1$  assume os valores  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  das funções de interpolação. Como resultado deste processo, obtém-se n equações linearmente independentes :

$$\int_{\Omega} [c_1 \partial_{tt} \bar{S} - a_1 \partial_z \bar{R} - b_1 \bar{S}] \Phi_j dz + \int_{\Omega} \partial_z \bar{S} \partial_z \Phi_j dz - \{d_1 \bar{R} \Phi_j\}_{z=0} = 0$$

(j=1, 2, 3, ..., n)

(2.63)

Recorrendo ao mesmo procedimento para

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_j \end{bmatrix} ; j=1,2,\dots,n \quad (2.64)$$

obtem-se, a partir da equação (2.59), outras  $n$  equações linearmente independentes :

$$\int_{\Omega} [c_2 \partial_{zz} \bar{R} - a_2 \partial_z \bar{S} - b_2 \bar{R}] \Phi_j dz + \int_{\Omega} \partial_z \bar{R} \partial_z \Phi_j dz - \{d_2 \bar{S} \Phi_j\}_{z=0} = - \int_{\Omega} f_2 \Phi_j dz$$

(j=1, 2, 3, ..., n)

(2.65)

O valor da integral mais a direita pode ser calculado por

$$\int_{\Omega} f_2 \Phi_j dz = \int_{\Omega} \{-F_0 f(t) \delta(z-z_f)/(\lambda+2\mu)\} \Phi_j dz$$

$$= \{-F_0 f(t)/(\lambda+2\mu)\} \Phi_j(z_f)$$

(2.66)

Com o objetivo de se obter as formas matriciais das equações (2.63) e (2.65), considere-se a Fig.3, onde  $z_0=0$  indica a superfície,  $z_n$  expressa a profundidade do último nó do modelo e  $z_f$  representa a profundidade da fonte. Sejam também fornecidas as seguintes definições ,

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v(z) w(z) dz$$

(2.67)

$$\ddot{S}_i = \partial_{zz} S_i(t) \quad ; \quad \ddot{R}_i = \partial_{zz} R_i(t)$$

(2.68)

Levando-se em consideração a notação anterior e a expressão em forma de somatória para  $S$ , fornecida pela equação (2.60), a primeira integral da equação (2.63) tem o seguinte desenvolvimento :

$$\int_{\Omega} c_1 \partial_{zz} \bar{S} \Phi_j dz = c_1 \int_{z_0}^{z_n} \partial_{zz} \bar{S} \Phi_j dz = c_1 \sum_{i=1}^n \ddot{S}_i \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$$

(2.69)

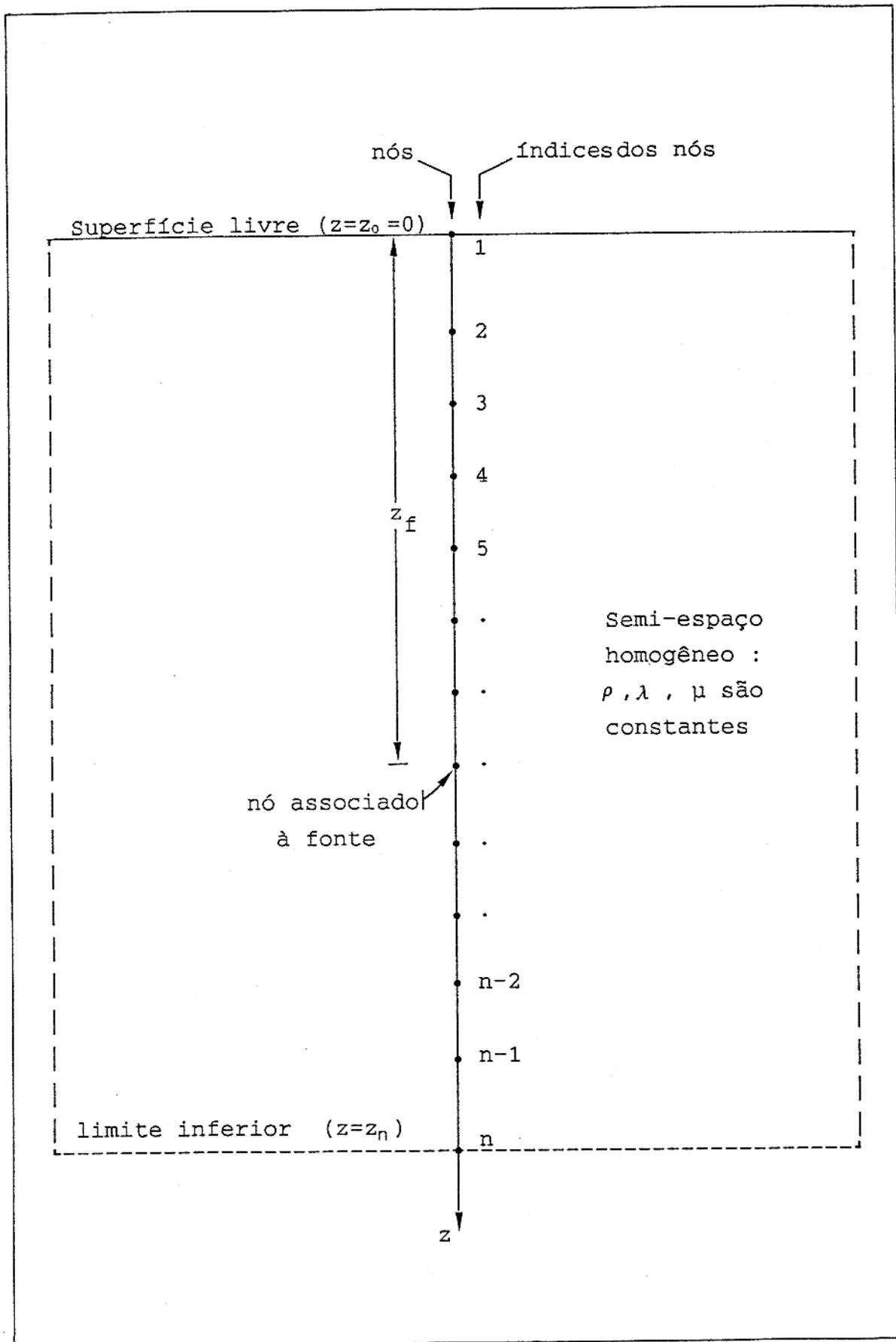


Fig.3 - MEIO A SER MODELADO E VARIÁVEIS NUMÉRICAS ASSOCIADAS

A expressão matricial para a integral acima é apresentada na Fig.4a . Atribuindo-se, respectivamente, à matriz e ao vetor coluna da Fig.4a as notações [M] e [S] , observa-se a seguinte fórmula, válida para a primeira integral da equação (2.63),

$$c_1 [M] [\ddot{S}] = \begin{cases} \int_{\Omega} c_1 \partial_z \bar{S} \Phi_j dz \\ (j=1,2,3,\dots,n) \end{cases} \quad (2.70)$$

As demais parcelas da equação (2.63) seguem um procedimento análogo. Deduz-se, assim, a seguinte equação matricial

$$c_1 [M] [\ddot{S}] - a_1 [N_1] [R] - b_1 [M] [S] + [N_2] [S] - \{d_1 [N_3] [R]\}_{z=0} = 0 \quad (2.71)$$

onde :

$$a_1 [N_1] [R] = \begin{cases} \int_{\Omega} a_1 \partial_z \bar{R} \Phi_j dz \\ (j=1,2,3,\dots,n) \end{cases} \quad (2.72)$$

$$b_1 [M] [S] = \begin{cases} \int_{\Omega} b_1 \bar{S} \Phi_j dz \\ (j=1,2,3,\dots,n) \end{cases} \quad (2.73)$$

$$[N_2] [S] = \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_z \bar{S} \partial_z \Phi_j dz \\ (j=1,2,3,\dots,n) \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\{d_1 [N_3] [R]\}_{z=0} = \begin{cases} \{d_1 \bar{R} \Phi_j\}_{z=0} \\ (j=1,2,3,\dots,n) \end{cases} \quad (2.75)$$

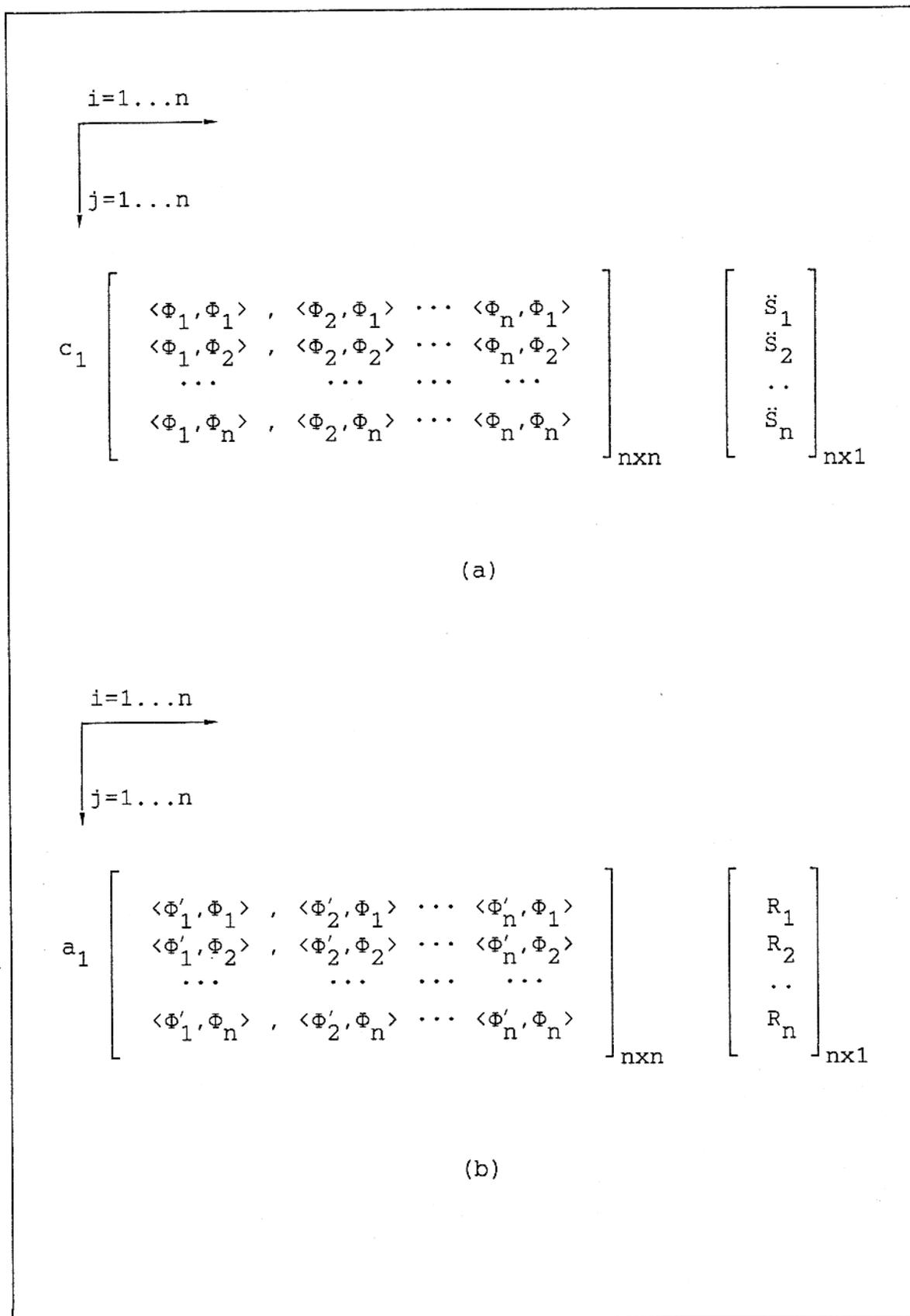


Fig.4 - CONFIGURAÇÃO MATRICIAL DE :

$$(a) \int_{\Omega} c_1 \partial_{tt} \bar{S} \Phi_j dz, \quad j=1,2,\dots,n \iff c_1 [M] [\dot{S}]$$

$$(b) \int_{\Omega} a_1 \partial_z \bar{R} \Phi_j dz, \quad j=1,2,\dots,n \iff a_1 [N_1] [R]$$

sendo  $[M], [N_1], [N_2], [N_3]$  matrizes  $n \times n$ , e  $[R], [S], [\ddot{S}]$  vetores de ordem  $n \times 1$ .

São válidas as seguintes observações relativas a equação (2.71) :

a) A disposição matricial do produto  $a_1 [N_1] [R]$  é mostrada na Fig.4b. De forma coerente com a equação (2.67), tem-se que

$$\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle = \int_{\Omega} \Phi'_i(z) \Phi_j(z) dz = \int_{z_0}^{z_n} \Phi'_i(z) \Phi_j(z) dz \quad (2.76)$$

onde  $\Phi'_i(z) = \partial_z \Phi_i(z)$  .

b) A forma esquemática de  $b_1 [M] [S]$  é idêntica a de  $c_1 [M] [\ddot{S}]$  apenas trocando, na Fig.4a,  $c_1$  por  $b_1$  e  $[\ddot{S}_i]$  por  $[S_i]$ .

c) O desenvolvimento de  $\int_{\Omega} \partial_z \ddot{S} \partial_z \Phi_j dz, (j=1,2,\dots,n)$  implica em que os elementos da matriz  $[N_2]$ , de ordem  $n \times n$ , sejam da seguinte forma

$$\text{elemento } ij = \int_{z_0}^{z_n} \Phi'_i(z) \Phi'_j(z) dz = \langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle \quad (2.77)$$

conforme mostrado na Fig.5a .

d) A matriz  $[N_3]$ , de ordem  $n \times n$ , possui elementos do tipo

$$\text{elemento } ij = \Phi_i(0) \Phi_j(0) \quad (2.78)$$

conforme mostrado na Fig.5b.

e) Os elementos da matriz coluna  $[R]$  correspondem aos coeficientes  $R_i(t)$  da equação (2.61). Adicionalmente, o valor de

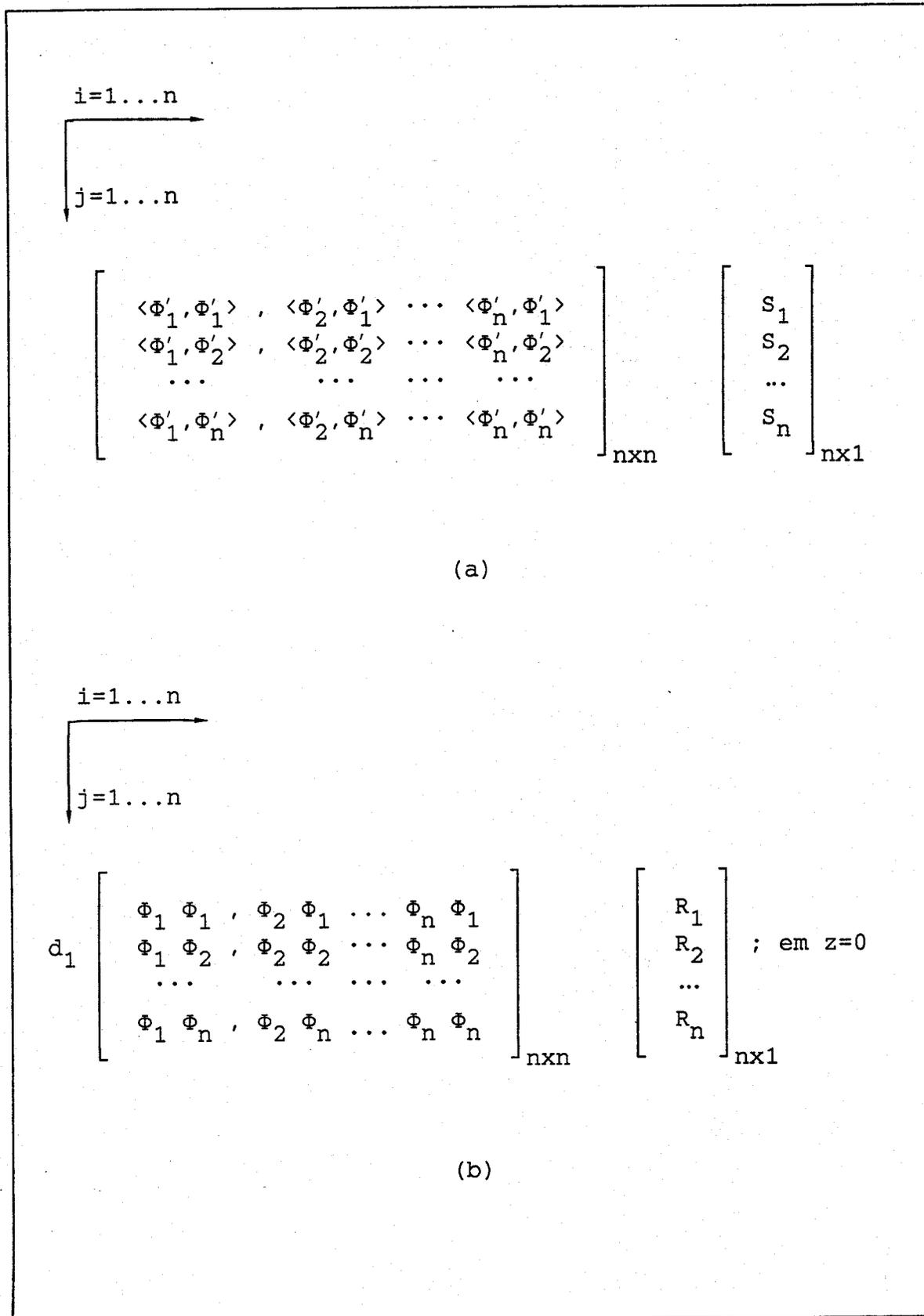


Fig.5 - CONFIGURAÇÃO MATRICIAL DE :

$$(a) \int_{\Omega} \partial_z \bar{S} \partial_z \Phi_j dz, \quad j=1,2,\dots,n \Leftrightarrow [N_2][S]$$

$$(b) \{d_1 \bar{R} \Phi_j\}_{z=0}, \quad j=1,2,\dots,n \Leftrightarrow \{d_1 [N_3][R]\}_{z=0}$$

$d_1$  não varia com  $z$ , equação (2.44), de forma que a seguinte igualdade é válida

$$\{d_1 [N_3] [R]\}_{z=0} = d_1 \{[N_3]\}_{z=0} [R] \quad (2.79)$$

Com procedimento semelhante ao aplicado à equação (2.63), obtem-se a seguinte igualdade matricial para a equação (2.65) :

$$c_2 [M] [\ddot{R}] - a_2 [N_1] [S] - b_2 [M] [R] + [N_2] [R] - \{d_2 [N_3] [S]\}_{z=0} = [F] \quad (2.80)$$

onde :

$$c_2 [M] [R] = \begin{cases} \int_{\Omega} c_2 \partial_{tt} \bar{R} \Phi_j dz \\ (j=1, 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (2.81)$$

$$a_2 [N_1] [S] = \begin{cases} \int_{\Omega} a_2 \partial_z \bar{S} \Phi_j dz \\ (j=1, 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (2.82)$$

$$b_2 [M] [R] = \begin{cases} \int_{\Omega} b_2 \bar{R} \Phi_j dz \\ (j=1, 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (2.83)$$

$$[N_2] [R] = \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_z \bar{R} \partial_z \Phi_j dz \\ (j=1, 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (2.84)$$

$$\{d_2 [N_3] [S]\}_{z=0} = \begin{cases} \{d_2 \bar{S} \Phi_j\}_{z=0} \\ (j=1, 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (2.85)$$

sendo as matrizes  $[M]$ ,  $[N_1]$ ,  $[N_2]$ ,  $[N_3]$  da equação (2.80) as mesmas da equação (2.71).

São válidas as seguintes observações relativas à equação matricial (2.80) :

a) Os elementos da matriz coluna  $[S]$  correspondem aos coeficientes  $S_1(t)$  da equação (2.60). O valor de  $d_2$  não depende da profundidade, equação (2.44), de forma que :

$$\{d_2 [N_3] [S]\}_{z=0} = d_2 \{[N_3]\}_{z=0} [S] \quad (2.86)$$

b) O vetor coluna  $[F]$  carrega a informação da fonte, atuando de forma pontual na profundidade  $z_f$  :

$$[F] = F_0 f(t) (\lambda + 2\mu)^{-1} [\Phi_1(z_f), \Phi_2(z_f), \dots, \Phi_n(z_f)]^T \quad (2.87)$$

Levando-se em conta as definições :

$$[P_1] = [N_2] - b_1 [M] \quad (2.88)$$

$$[P_2] = [N_2] - b_2 [M] \quad (2.89)$$

$$[Q_1] = -a_1 [N_1] - d_1 \{[N_3]\}_{z=0} \quad (2.90)$$

$$[Q_2] = -a_2 [N_1] - d_2 \{[N_3]\}_{z=0} \quad (2.91)$$

as equações (2.71) e (2.80) podem ser reescritas como

$$c_1 [M] [\ddot{S}] + [P_1] [S] + [Q_1] [R] = 0 \quad (2.92)$$

$$c_2 [M] [\ddot{R}] + [P_2] [R] + [Q_2] [S] = [F] \quad (2.93)$$

Estas duas últimas equações são de importância fundamental, pois representam a aplicação do método dos elementos finitos sobre o problema de valores de contorno definido pelas equações (2.45), (2.46) e (2.47) .

Introduzindo-se as seguintes expressões,

$$[G] = \begin{bmatrix} [S] \\ [R] \end{bmatrix}, \quad [\ddot{G}] = \begin{bmatrix} [\ddot{S}] \\ [\ddot{R}] \end{bmatrix}, \quad [\widetilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 \\ [F] \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{M}] = \begin{bmatrix} c_1 [M] & 0 \\ 0 & c_2 [M] \end{bmatrix}, \quad [\widetilde{N}] = \begin{bmatrix} [P_1] & [Q_1] \\ [P_2] & [Q_2] \end{bmatrix}$$

as equações (2.92) e (2.93) podem ser compactadas em

$$[\widetilde{M}] [\ddot{G}] + [\widetilde{N}] [G] = [\widetilde{F}] \quad (2.94)$$

onde  $[\widetilde{M}]$  e  $[\widetilde{N}]$  são matrizes de ordem  $2n \times 2n$ , e os vetores  $[\ddot{G}]$ ,  $[G]$  e  $[\widetilde{F}]$  de ordem  $2n \times 1$  .

Como se observa, ainda não se manipulou o processo em relação à variável  $t$  (tempo). Isto será levado em conta no item seguinte onde, além de implementada a discretização em  $t$ , são usados os valores iniciais, equação (2.47), para iniciar o processo no tempo.

## 2.4 Aplicação do Método das Diferenças Finitas com Relação ao Tempo (Variável t)

A aplicação do método dos elementos finitos, através da formulação de Galerkin, resumiu o nosso problema nas equações (2.92) e (2.93), cuja dependência em relação ao tempo pode ser solucionada através do método das diferenças finitas.

A abordagem mais simples e direta implica em considerar constante o incremento no tempo  $\Delta t$ , e introduzir uma aproximação de diferença central para  $[\ddot{S}]$  e  $[\ddot{R}]$ . Assim, tem-se

$$\partial_{tt}[S] = [\ddot{S}] = [\ddot{S}]_r \approx \{[S]_{r+1} - 2[S]_r + [S]_{r-1}\} / (\Delta t)^2 \quad (2.95)$$

$$\partial_{tt}[R] = [\ddot{R}] = [\ddot{R}]_r \approx \{[R]_{r+1} - 2[R]_r + [R]_{r-1}\} / (\Delta t)^2 \quad (2.96)$$

onde  $r-1$ ,  $r$ ,  $r+1$  indexam valores em tempos consecutivos, ou seja, em  $t-\Delta t$ ,  $t$ ,  $t+\Delta t$ , respectivamente. Adicionalmente, com o objetivo de ampliar a faixa de estabilidade do sistema, pode-se usar o esquema de Crank-Nicolson, que implica em se fazer :

$$[S] = [S]_r \approx \{[S]_{r+1} + [S]_{r-1}\} / 2 \quad (2.97)$$

$$[R] = [R]_r \approx \{[R]_{r+1} + [R]_{r-1}\} / 2 \quad (2.98)$$

Aplicando-se as equações (2.97) e (2.95) em (2.92), obtem-se a expressão matricial :

$$\{c_1 [M] + (\Delta t)^2 [P_1] / 2\} \{[S]_{r+1} + [S]_{r-1}\} = 2c_1 [M] [S]_r - (\Delta t)^2 [Q_1] [R]_r \quad (2.99)$$

De forma análoga, aplicando-se as equações (2.98) e (2.96) em (2.93), encontra-se a seguinte expressão matricial

$$\begin{aligned} \{c_2 [M] + (\Delta t)^2 [P_2] / 2\} \{[R]_{r+1} + [R]_{r-1}\} = \\ = 2c_2 [M] [R]_r - (\Delta t)^2 [Q_2] [S]_r + (\Delta t)^2 [F]_r \end{aligned} \quad (2.100)$$

As equações (2.99) e (2.100) representam, em síntese, a aplicação dos dois métodos, elementos finitos e diferenças finitas, sobre o problema de valores de contorno definido pelas equações (2.45), (2.46) e (2.47). Com relação à variável  $t$  (tempo), a equação (2.100) define o vetor  $[R]_{r+1}$  em termos :

- de seus prévios valores  $[R]_r$  e  $[R]_{r-1}$ ,
- do prescrito valor de  $[S]_r$  calculado pela equação (2.99),
- do prescrito vetor força  $[F]_r$ .

Comentário semelhante pode ser feito à equação (2.99) pois, em um dado ponto no tempo, o vetor  $[S]_{r+1}$  é definido em termos :

- de seus prévios valores  $[S]_r$  e  $[S]_{r-1}$ ,
- do prescrito valor de  $[R]_r$  calculado pela equação (2.100).

A evolução de  $[F]_r$  em relação ao tempo ( $t$ ) é conhecida posto que, a priori, é definida a variação da fonte no tempo. Entretanto, para se iniciar o processo, torna-se necessário conhecer os vetores solução em  $t=0$  e  $t=\Delta t$ , ou seja,  $[S]_1$ ,  $[S]_2$ ,  $[R]_1$  e  $[R]_2$ . A partir deles, todos os subsequentes valores de  $[S]_r$  e  $[R]_r$  (onde  $r=3,4,5,\dots$ ) podem ser encontrados através da aplicação repetida das equações (2.99) e (2.100).

Como consequência da condição inicial  $G(0)=0$  expressa pela equação (2.47), tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} [G] \\ t=0 \end{array} \right\} = 0 \Rightarrow [G]_{t=0} = 0 \Rightarrow [G]_1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [S]_1 = 0 \\ [R]_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.101)$$

A maneira mais simples de avaliar  $[G]_2$  é assumir a aproximação

$$\left\{ \frac{\partial_i G}{t=0} \right\} \approx \{ G(\Delta t) - G(0) \} / \Delta t \quad (2.102)$$

que é tanto mais precisa quanto menor for o valor de  $\Delta t$ . Entretanto, em virtude de  $\partial_i G(0) = G(0) = 0$ , o valor de  $G(\Delta t)$  aproximado pela equação (2.102) será nulo. Deste modo, tem-se

$$\left\{ G \right\}_{t=\Delta t} = 0 \Rightarrow \left\{ G \right\}_{t=\Delta t} = 0 \Rightarrow \left\{ G \right\}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} [S]_2 = 0 \\ [R]_2 = 0 \end{cases} \quad (2.103)$$

Tão somente para efeito de apresentação, o sistema constituído pelas equações acopladas (2.99) e (2.100) pode ser compactado na seguinte forma,

$$[\bar{M}] \{ [G]_{r+1} + [G]_{r-1} \} = [\bar{N}] [G]_r + [\bar{F}]_r \quad (2.104)$$

onde

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} c_1 [M] + (\Delta t)^2 [P_1] / 2 & 0 \\ 0 & c_2 [M] + (\Delta t)^2 [P_2] / 2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} 2c_1 [M] & -(\Delta t)^2 [Q_1] \\ -(\Delta t)^2 [Q_2] & 2c_2 [M] \end{bmatrix}, \quad [\bar{F}]_r = \begin{bmatrix} 0 \\ (\Delta t)^2 [F]_r \end{bmatrix}$$

## 2.5 A Escolha das Funções de Base e sua Influência sobre os Elementos Matriciais

Ao colocar-se o problema contínuo em sua equivalente forma variacional, assumiu-se, adicionalmente, as soluções aproximadas para R e S na seguinte forma,

$$S(z,t) \approx \tilde{S}(z,t) = \sum_{i=1}^n S_i(t) \Phi_i(z)$$

$$R(z,t) \approx \tilde{R}(z,t) = \sum_{i=1}^n R_i(t) \Phi_i(z)$$

Esta idéia não é nova. O que, relativamente, existe de recente é a escolha das funções de base  $\Phi_i$  : no método dos elementos finitos elas são "polinômios por parte". Esta escolha é responsável pelo sucesso do método. Desse modo, a idéia principal fundamenta-se no fato das funções de base  $\Phi_i$  poderem ser definidas "por partes" sobre sub-regiões do domínio chamadas de "elementos finitos", e em qualquer sub-domínio as  $\Phi_i$  podem ser escolhidas como sendo funções muito simples, tal como polinômios de baixo grau. Cada uma das funções  $\Phi_i$  vale zero sobre a maior parte do domínio, e entra no cálculo somente nas vizinhanças de um nó particular. Portanto, o método dos elementos finitos fornece uma técnica, geral e sistemática, para construir funções de base objetivando as aproximações de Galerkin aplicadas aos problemas de valores de contorno.

Para construir-se um conjunto de "funções de base" por partes, primeiro divide-se o domínio do problema em um número finito de elementos. Na Fig.6 é mostrado um domínio dividido em 4 elementos, cada qual possuindo um comprimento  $h_i$ . Os cinco nós existentes estão numerados de 1 a 5. O conjunto formado pelos elementos mais os pontos nodais, compondo o domínio do problema, é algumas vezes chamado de "malha dos elementos finitos".

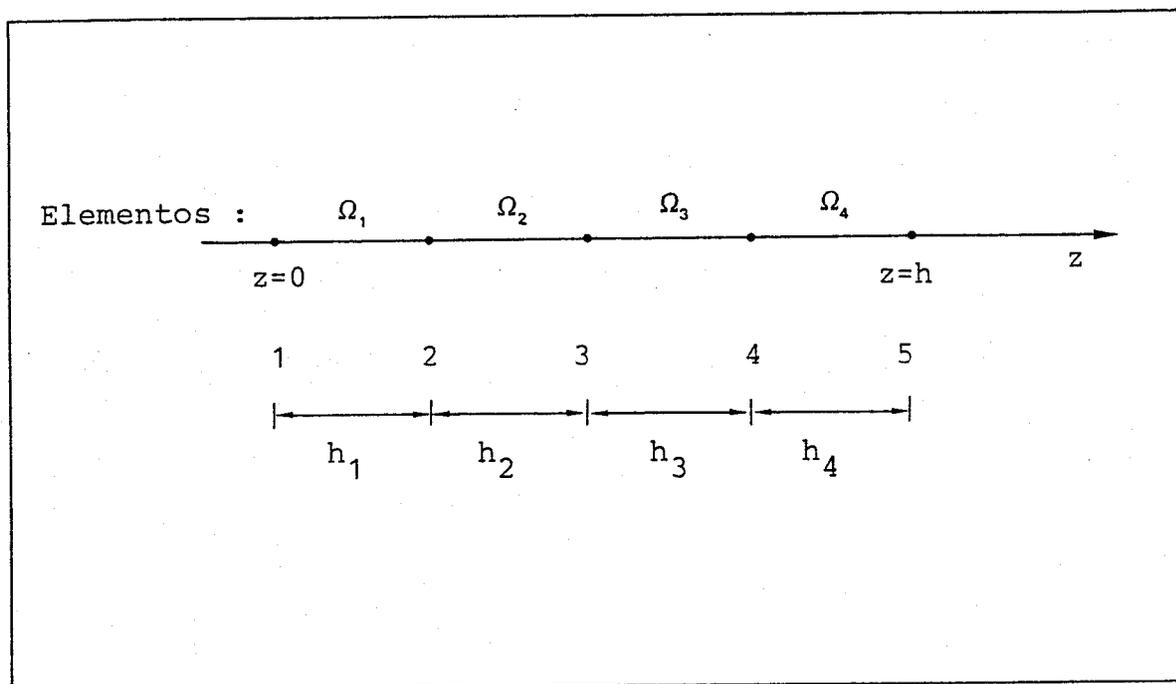


Fig.6 - DIVISÃO DA REGIÃO  $0 \leq z \leq h$  EM 4 ELEMENTOS

Tendo-se elaborado a malha dos elementos finitos, procede-se à construção do conjunto de funções de base correspondente. Tais funções são geradas por polinômios simples definidos por partes, elemento a elemento, sobre a malha. As funções de base são escolhidas de tal maneira que os parâmetros  $S_i$  e  $R_i$ , definindo as soluções aproximadas  $\tilde{S}(z,t)$  e  $\tilde{R}(z,t)$ , sejam, precisamente, os valores de  $\tilde{S}(z,t)$  e  $\tilde{R}(z,t)$  nos pontos nodais.

Um conjunto de funções de base bem simples, mas perfeitamente adequado a muitos problemas, é mostrado na Fig.7. Trata-se das funções lineares por partes. Embora tais funções possuam uma primeira derivada descontínua, as definições das matrizes  $[M]$ ,  $[N_1]$ ,  $[N_2]$  e  $[N_3]$  requerem, quando muito, que a primeira derivada tenha apenas a integral finita; e esta condição é observada pelas funções lineares por partes.

Ao se escolher as funções de base da Fig.7, como consequência, as soluções aproximadas  $\tilde{S}(z,t)$  e  $\tilde{R}(z,t)$  serão também lineares por partes, conforme mostrado na Fig.8. Como indica esta figura, espera-se que as incógnitas  $S_i$  assumam, ao final do processamento, valores representativos da função  $S(z,t)$  nos pontos nodais (o mesmo se pode dizer das incógnitas  $R_i$  em relação a  $R(z,t)$ ).

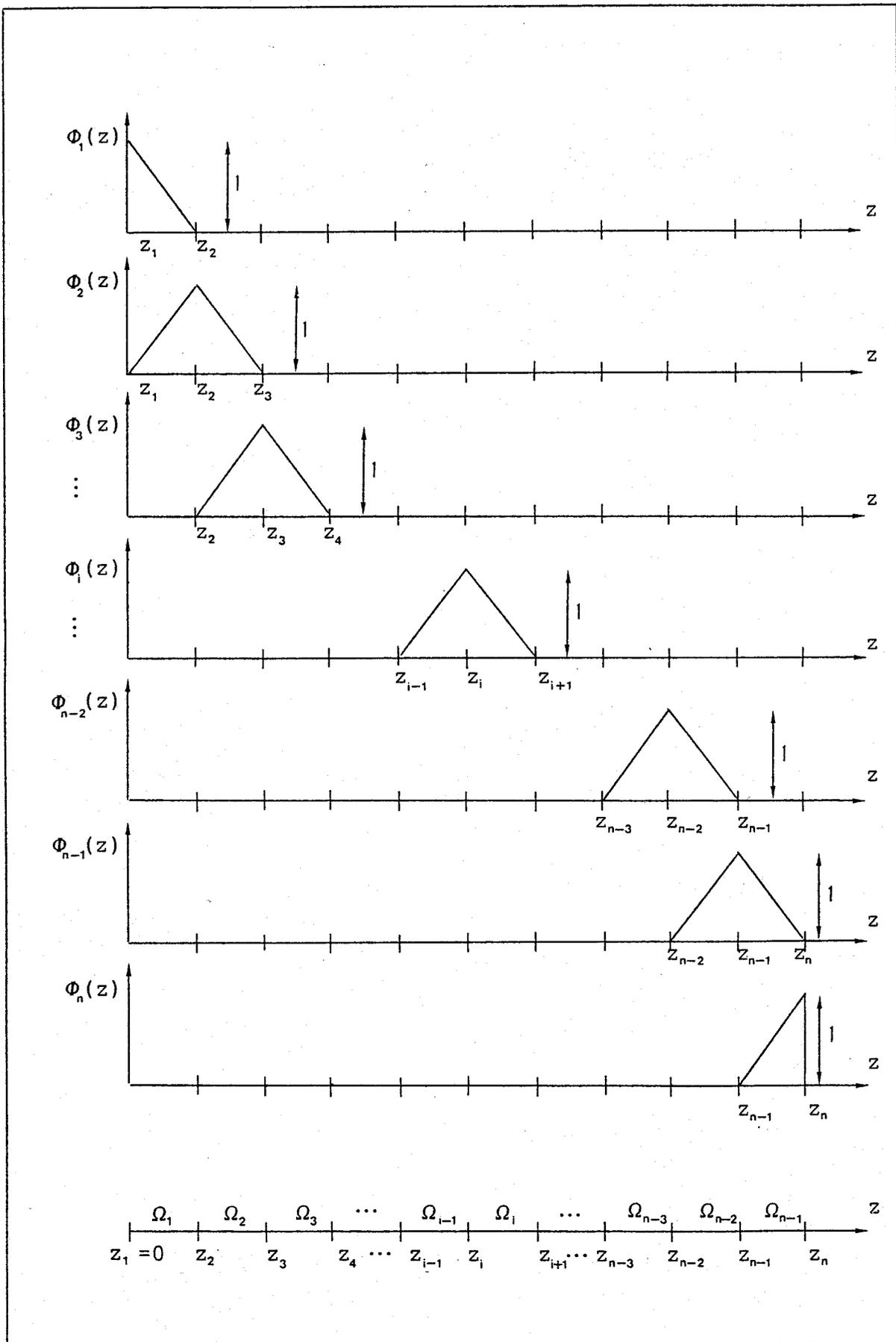


Fig.7 - FUNÇÕES LINEARES POR PARTES

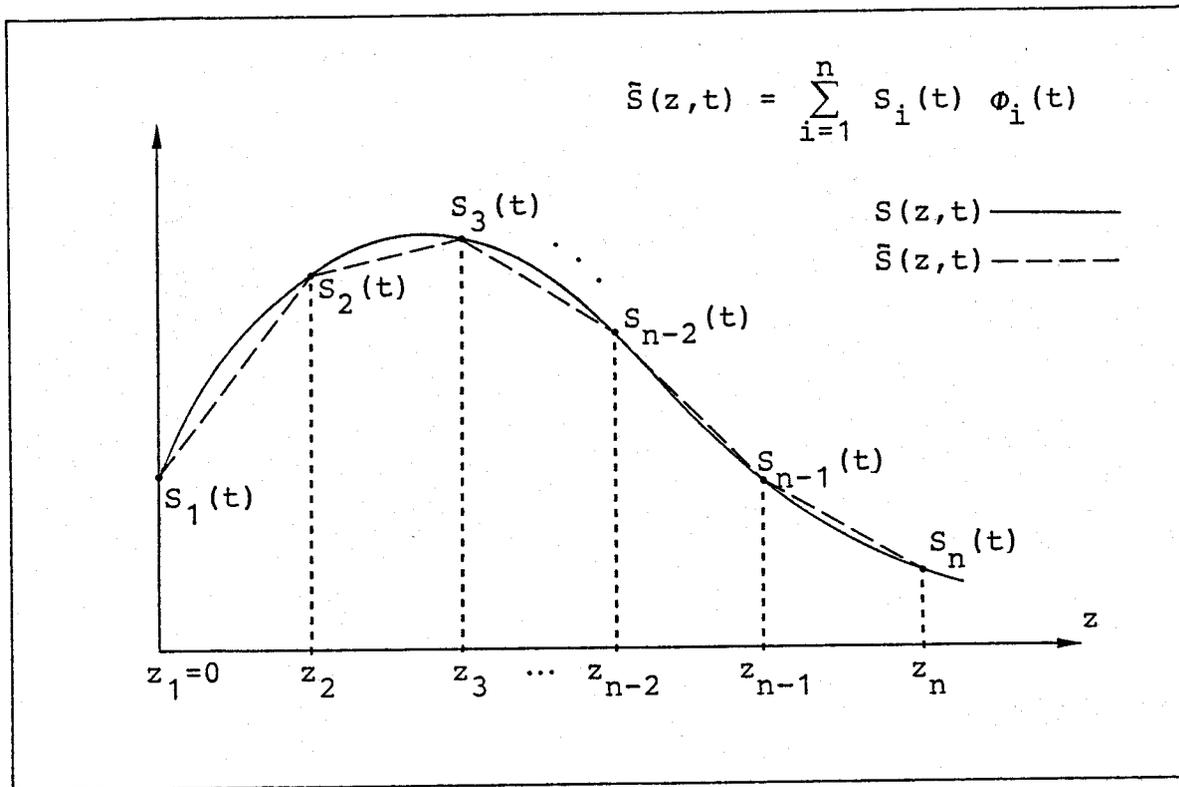


Fig.8 - ILUSTRAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES  $S(z,t)$  E  $\bar{S}(z,t)$ , RESPECTIVAMENTE FORMAS EXATA E APROXIMADA, NUM DETERMINADO MOMENTO  $t$

As expressões para as funções lineares  $\phi_i$  e suas derivadas são fornecidas pela Tab.1 . Conseqüentemente, os valores de  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$ ,  $\langle \phi'_i, \phi_j \rangle$  e  $\langle \phi'_i, \phi'_j \rangle$ , definidos abaixo, assumirão as formas mostradas na Tab.2 .

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^{z_n} \phi_i(z) \phi_j(z) dz \quad (2.105)$$

$$\langle \phi'_i, \phi_j \rangle = \int_0^{z_n} \phi'_i(z) \phi_j(z) dz \quad (2.106)$$

$$\langle \phi'_i, \phi'_j \rangle = \int_0^{z_n} \phi'_i(z) \phi'_j(z) dz \quad (2.107)$$

Tab.1 - FUNÇÕES LINEARES POR PARTES E SUAS DERIVADAS

$\Phi_i(z)$	0	$\Phi'_i(z)$	0	$z_i \leq z_{i-1}$
	$(z-z_{i-1})/(z_i-z_{i-1})$		$1/(z_i-z_{i-1})$	$z_{i-1} \leq z \leq z_i$
	$(z_{i+1}-z)/(z_{i+1}-z_i)$		$-1/(z_{i+1}-z_i)$	$z_i \leq z \leq z_{i+1}$
	0		0	$z \geq z_{i+1}$
$\Phi_1(z)$	0	$\Phi'_1(z)$	0	$z \geq z_2$
	$(z_2-z)/(z_2-z_1)$		$-1/(z_2-z_1)$	$z_1 \leq z \leq z_2$
$\Phi_n(z)$	$(z-z_{n-1})/(z_n-z_{n-1})$	$\Phi'_n(z)$	$1/(z_n-z_{n-1})$	$z \geq z_{n-1}$
	0		0	$z_1 \leq z \leq z_{n-1}$

Tab.2 - VALORES DE  $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$  ,  $\langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle$  E  $\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle$ 

$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$	$\langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle$	$\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle$	VALIDADE
0	0	0	$ i-j  \geq 2$
$(z_{i+1}-z_i)/3$	$1/(z_{i+1}-z_i)$	$-1/2$	$i=j=1$
$(z_i-z_{i-1})/3$	$1/(z_i-z_{i-1})$	$1/2$	$i=j=n$
$(z_{i+1}-z_{i-1})/3$	$1/(z_i-z_{i-1})+1/(z_{i+1}-z_i)$	0	$i=j \wedge i \neq 1 \wedge i \neq n$
$(z_i-z_{i-1})/6$	$-1/(z_i-z_{i-1})$	$1/2$	$i=j+1$
$(z_{i+1}-z_i)/6$	$-1/(z_{i+1}-z_i)$	$-1/2$	$i=j-1$

A Tab.3 apresenta os valores de  $\Phi_i(z)$  e  $\Phi'_i(z)$  no caso em que os intervalos  $z_i - z_{i-1}$  forem considerados constantes, e iguais a  $\Delta z$ . Conseqüentemente, as expressões para as integrais fornecidas pelas equações (2.105) a (2.107) assumirão as formas mostradas na Tab.4 .

Os elementos que compõem as matrizes  $[M]$ ,  $[N_1]$  e  $[N_2]$  (Fig.4 e 5) podem ser encontrados diretamente com o auxílio da Tab.4 . Portanto, estas matrizes possuirão apenas três diagonais diferentes de zero. Diz-se que são "bandeadas a três" ou "tri-diagonais". A Fig.9 mostra, de forma esquemática, a estrutura tri-diagonal assumida pelas matrizes  $[M]$ ,  $[N_1]$  e  $[N_2]$  no caso de  $n$  nós.

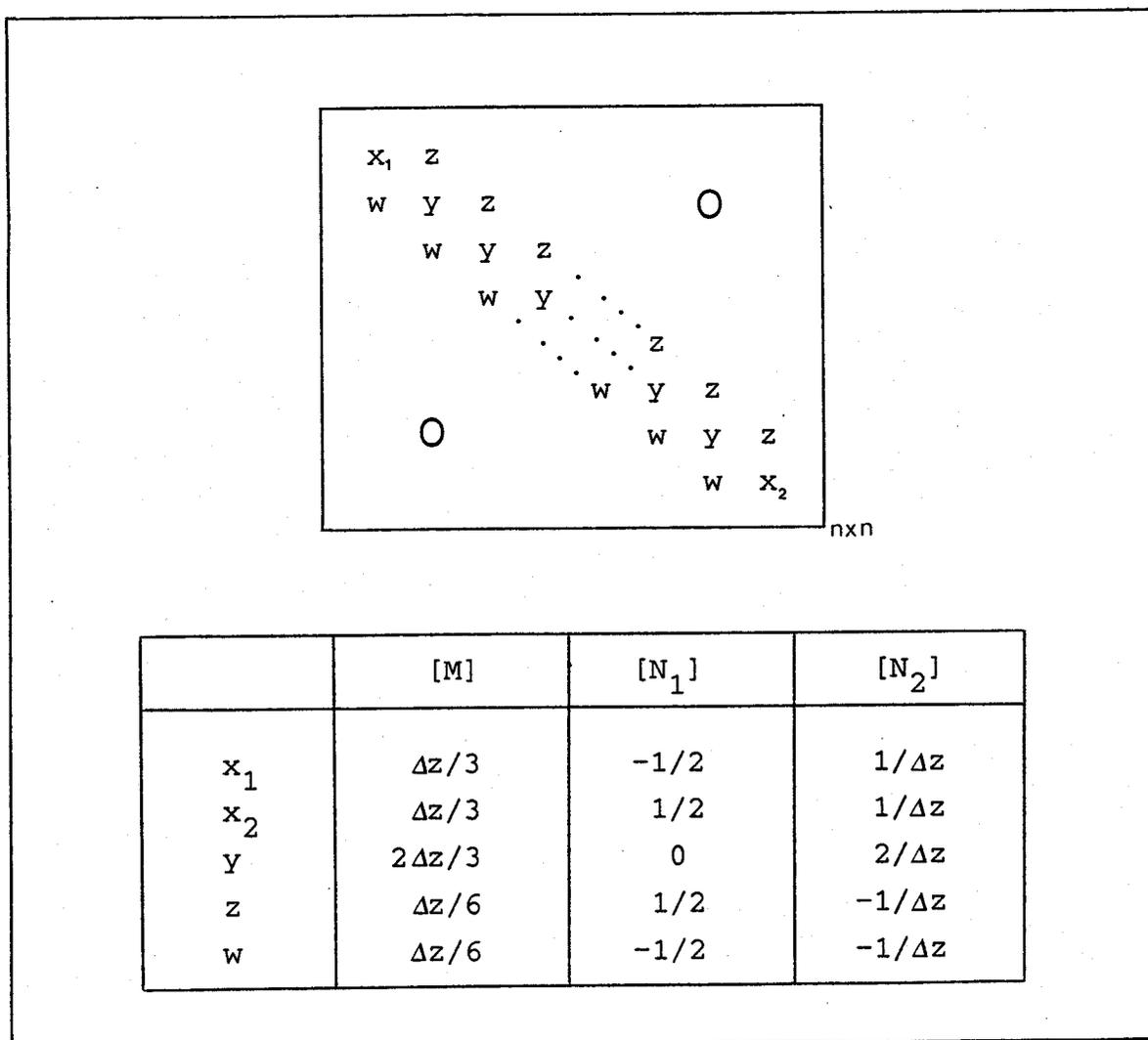


Fig.9 - MATRIZ PADRÃO TRI-DIAGONAL REPRESENTATIVA DOS VALORES DE  $[M]$ ,  $[N_1]$  E  $[N_2]$

Tab.3 - FUNÇÕES LINEARES POR PARTES E SUAS DERIVADAS ( $\Delta z = \text{cte}$ )

$\Phi_i(z)$	0	$\Phi'_i(z)$	0	$z \leq z_{i-1}$
	$(z - z_{i-1}) / \Delta z$		$1 / \Delta z$	$z_{i-1} \leq z \leq z_i$
	$(z_{i+1} - z) / \Delta z$		$-1 / \Delta z$	$z_i \leq z \leq z_{i+1}$
	0		0	$z \geq z_{i+1}$
$\Phi_1(z)$	0	$\Phi'_1(z)$	0	$z \geq z_2$
	$(z_2 - z) / \Delta z$		$-1 / \Delta z$	$z_1 \leq z \leq z_2$
$\Phi_n(z)$	$(z - z_{n-1}) / \Delta z$	$\Phi'_n(z)$	$1 / \Delta z$	$z \geq z_{n-1}$
	0		0	$z_i \leq z \leq z_{n-1}$

Tab.4 - VALORES DE  $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$ ,  $\langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle$  E  $\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle$ , ( $\Delta z = \text{cte}$ )

$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle$	$\langle \Phi'_i, \Phi'_j \rangle$	$\langle \Phi'_i, \Phi_j \rangle$	VALIDADE
0	0	0	$ i-j  \geq 2$
$\Delta z / 3$	$1 / \Delta z$	$-1 / 2$	$i=j=1$
$\Delta z / 3$	$1 / \Delta z$	$1 / 2$	$i=j=n$
$2\Delta z / 3$	$2 / \Delta z$	0	$i=j \wedge i \neq 1 \wedge i \neq n$
$\Delta z / 6$	$-1 / \Delta z$	$1 / 2$	$i=j+1$
$\Delta z / 6$	$-1 / \Delta z$	$-1 / 2$	$i=j-1$

Como se observa, estas matrizes possuem configurações simples, e seu armazenamento no computador requer pouca memória, apenas o necessário para se guardar os valores de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$ . Além do mais, o fato de serem bandeadas a três torna bastante rápida a multiplicação destas matrizes por vetores durante o processamento do programa.

Em virtude de se ter escolhido as funções lineares por partes como funções de base, a matriz  $[N_3]$ , Fig.5b, possuirá apenas um elemento diferente de zero, conforme mostrado abaixo,

$$[N_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.108)$$

Como se percebe, no método dos elementos finitos as funções de base são escolhidas a fim de se obter matrizes com pequeno número de diagonais não nulas. Entretanto, polinômios de ordem maior podem ser usados, mas isto resulta no aumento de diagonais possuindo elementos diferentes de zero e, por conseguinte, no incremento do tempo de processamento.

Na equação (2.100) o vetor  $[F]_r$  representa a fonte, e sua evolução no tempo é consequência da função  $f(t)$ , conforme indicado pela equação (2.87). Em virtude de termos escolhido as funções  $\Phi_i(z)$  como sendo lineares por partes, os valores de  $\Phi_i(z_f)$  serão iguais a zero, exceto para  $i=p$ , onde  $p$  representa o índice do nó associado ao ponto de aplicação da fonte,

$$i=p \Rightarrow \Phi_i(z_f) = \Phi_p(z_f) = 1 \quad (2.109)$$

Deste modo, o vetor coluna  $[F]_r$ , em um certo tempo  $t_r$ , assumirá a seguinte forma :

$$[F]_r = F_0 f(t_r) (\lambda + 2\mu)^{-1} [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0]^T \quad (2.110)$$

## 2.6 Solução Implícita dos Sistemas Lineares Tri-diagonais

As matrizes tri-diagonais estudadas no item anterior aparecem nas importantes equações (2.99) e (2.100) (ver também as equações (2.88) a (2.91)). Tais matrizes independem do tempo e carregam informações sobre o modo de discretização e tipos de funções de base escolhidas.

Supondo conhecido os vetores prévios  $[R]_r$ ,  $[R]_{r-1}$ ,  $[S]_r$  e  $[S]_{r-1}$ , consegue-se calcular o valor de  $[R]_{r+1}$  e  $[S]_{r+1}$  através da resolução dos sistemas lineares tri-diagonais expressos pelas equações (2.99) e (2.100). Ambas equações são do seguinte tipo :

$$[Q]_{n \times n} [E]_{n \times 1} = [H]_{n \times 1} \quad (2.111)$$

onde  $[Q]$  é uma matriz tri-diagonal, de ordem  $n \times n$ , cujos elementos são conhecidos;  $[H]$  é um vetor com elementos também determinados; e  $[E]$  representa o vetor incógnita. A Tab.5 indica ao que corresponde  $[Q]$ ,  $[E]$  e  $[H]$  em relação às equações (2.99) e (2.100). Como se observa, uma vez calculado o valor de  $[E]$ , deve-se ainda fazer uma subtração vetorial para se obter  $[S]_{r+1}$  ou  $[R]_{r+1}$ . Conforme a equação considerada, este desconto corresponde a

$$[S]_{r+1} = [E] - [S]_{r-1} \quad (2.112)$$

ou a

$$[R]_{r+1} = [E] - [R]_{r-1} \quad (2.113)$$

Existe um método particularmente simples de resolver o sistema linear tri-diagonal expresso pela equação (2.111), implementado através de um esquema implícito. Sejam  $q_{ij}$ ,  $e_i$  e

Tab. 5 - VALORES ASSUMIDOS PELAS MATRIZES [Q], [E] E [H] CONFORME A EQUAÇÃO CONSIDERADA

EQUAÇÃO	$[Q]_{n \times n}$	$[E]_{n \times 1}$	$[H]_{n \times 1}$
(2.99)	$c_1 [M] + (\Delta t)^2 [P_1] / 2$	$[S]_{r+1} + [S]_{r-1}$	$2c_1 [M] [S]_{r-1} - (\Delta t)^2 [Q_1] [R]_r$
(2.100)	$c_2 [M] + (\Delta t)^2 [P_2] / 2$	$[R]_{r+1} + [R]_{r-1}$	$2c_2 [M] [R]_{r-1} - (\Delta t)^2 [Q_2] [S]_{r+1} + (\Delta t)^2 [F]_r$

$h_i$ , respectivamente, os elementos de  $[Q]$ ,  $[E]$  e  $[H]$ . A solução é encontrada da seguinte maneira (STROUD 1974) :

a) Inicialmente, computa-se as quantidades

$$q_{11}^* = q_{11} \quad (2.114)$$

$$q_{ii}^* = q_{ii} - q_{i,i-1} q_{i-1,i} / q_{i-1,i-1}^* , \quad i=2,3,\dots,n$$

$$h_1^* = h_1 \quad (2.115)$$

$$h_i^* = h_i - q_{i,i-1} h_{i-1}^* / q_{i-1,i-1}^* , \quad i=2,3,\dots,n$$

b) Então, a solução é dada por

$$e_n = h_n^* / q_{nn}^* \quad (2.116)$$

$$e_i = h_i^* - q_{i,i+1} e_{i+1} / q_{ii}^* , \quad i=n-1, n-2, \dots, 2, 1$$

Além do fato da matriz  $[Q]$  ser tri-diagonal, o que por si só já reduziria sensivelmente a memória necessária ao seu armazenamento e o tempo de CPU gasto em sua manipulação, outras características importantes podem ser aproveitadas. Através da Tab.5, observa-se que a matriz  $[Q]$  depende de  $[M]$  e  $[N_2]$ ; ver também equações (2.88) e (2.89). Como consequência, a matriz  $[Q]$  possui um arranjo semelhante ao dado pela matriz padrão da Fig.9, com vários elementos repetidos, e é simétrica ( $z=w$ ) posto que  $[M]$  e  $[N_2]$  também o são.

Como mencionado no comentário ao final do item 2.2, o problema é resolvido diversas vezes, para diferentes valores da variável  $k$ . Uma vez estabelecido um valor para  $k$ , o esquema caminha passo a passo no tempo (variável  $t$ ) através de consecutivas resoluções das equações (2.99) e (2.100). Como a matriz  $[Q]$  não depende de  $t$ , os valores de  $q_{ij}$ , equação (2.114), po-

dem ser calculados fora do "loop" de variação do tempo, implicando na diminuição do número de operações.

Uma vez calculados os valores discretos das funções  $S(k,z,t)$  e  $R(k,z,t)$ , resta ainda avaliar numericamente as integrais expressas pelas equações (2.12) e (2.13) a fim de se obter os deslocamentos normal ( $U_z$ ) e radial ( $U_r$ ). O ítem seguinte calcula estas integrais de maneira eficiente através de um versão modificada do esquema de quadratura Clenshaw-Curtis (XU e MAL 1985).

## 2.7 Avaliação Numérica da Transformada de Hankel

Neste ítem, procede-se no sentido de avaliar numericamente as integrais expressas pelas equações (2.12) e (2.13). Como se observa, estas integrais são do tipo

$$\int_0^h F_x(x) J_n(rx) dx, \quad n=0;1 \quad (2.117)$$

onde  $J_n(rx)$  é a função de Bessel de primeira classe e ordem  $n$ ;  $F_x(x)$  é uma função que, em geral, apresenta comportamento oscilatório; e  $[0,h]$  é o intervalo de integração.

A avaliação numérica da equação (2.117) pode se tornar difícil quando a função de Bessel for muito oscilatória no intervalo de integração. Isto ocorre a medida que  $r$  assume valores cada vez mais elevados. A situação pode se agravar, ainda mais, se  $F_x(x)$  também oscilar bastante. Acrescente-se a isso o fato dos valores discretos de  $F_x(x)$  serem obtidos através de operações matriciais que requerem significativo tempo de CPU. Assim, torna-se necessária a utilização de um algoritmo eficiente que, levando em consideração estes agravantes, possa avaliar a equação (2.117) através de um número adequado de ordenadas requerido para satisfazer uma dada tolerância.

Para levar a efeito a integração, inicialmente divide-se o domínio  $[0,h]$  em vários subdomínios, e a seguir inte-

gra-se numericamente  $F_x(x)$  em cada um deles. Desse modo, o resultado final corresponde à soma das integrais parciais

$$\text{Intg} = \int_a^b F_x(x) J_n(rx) dx, \quad n=0;1 \quad (2.118)$$

relacionadas a cada um dos subdomínios (Fig.10)

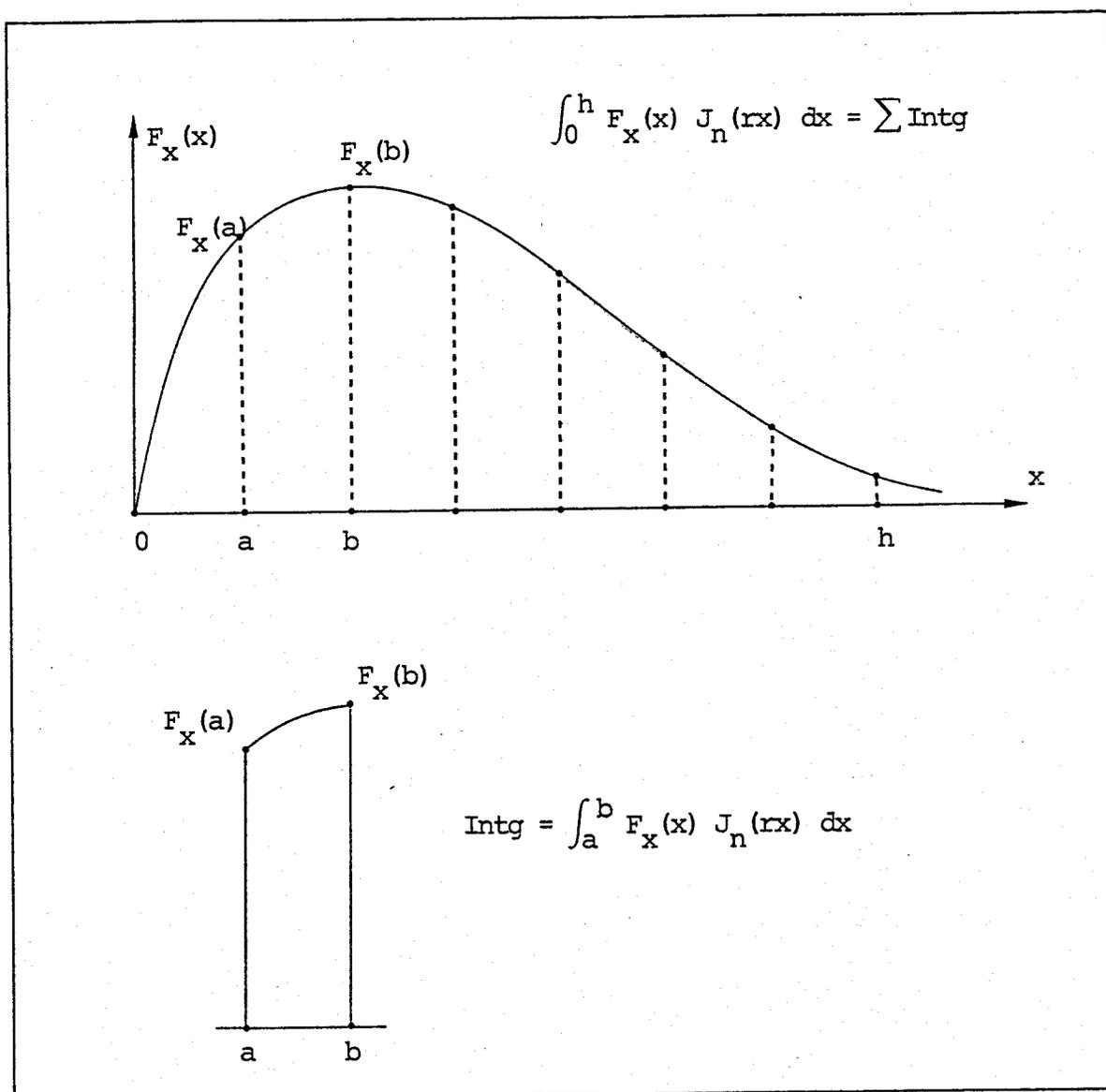


Fig.10 - DESTAQUE DO SUBDOMÍNIO PARA A APLICAÇÃO DO ESQUEMA DE XU E MAL

O algoritmo utilizado neste trabalho baseia-se no método de integração proposto por XU e MAL (1985), que é uma versão modificada do esquema de quadratura elaborado por CLENSHAW e CURTIS (1960).

Clenshaw e Curtis desenvolveram um algoritmo no qual o subdomínio  $[a,b]$  era dividido em  $N$  intervalos, e o integrando aproximado por uma série de polinômios de Chebyshev de primeira classe,  $T_m(z)$ , na forma  $\sum C_m T_m(z)$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ . Seguiu-se a avaliação analítica de cada termo.

Xu e Mal aplicaram o método de Clenshaw-Curtis na avaliação das integrais de número de onda com as seguintes modificações :

a) Usaram um algoritmo no qual a duplicação de  $N$  era combinada com a subdivisão do intervalo, de tal maneira que nenhum dado anterior fosse desperdiçado.

b) Aproximaram somente  $F_x(x)$  por polinômios de Chebyshev, e integraram  $\int_a^b x^m J_n(rx)$  analiticamente.

c) Sugeriram uma estimativa de erro prática para o esquema de quadratura.

d) Compararam resultados usando o seu método, o método de Filon (FILON 1928), uma versão adaptada do método de Filon (FLINN 1960) e um esquema adaptado de quadratura gaussiana (KUNDU 1983), em várias integrais, inclusive naquelas que surgem em problemas de propagação de ondas, demonstrando o bom desempenho do esquema sugerido.

Para iniciar a formulação do algoritmo, procede-se inicialmente a uma mudança de variável na função  $F_x(x)$ , (Fig.11), cujo objetivo é passar para o intervalo de ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev,  $[-1,1]$ . Assim, tem-se

$$x = A z + B \quad (2.119)$$

onde

$$A = (b-a)/2 \quad e \quad B = (b+a)/2 \quad (2.120)$$

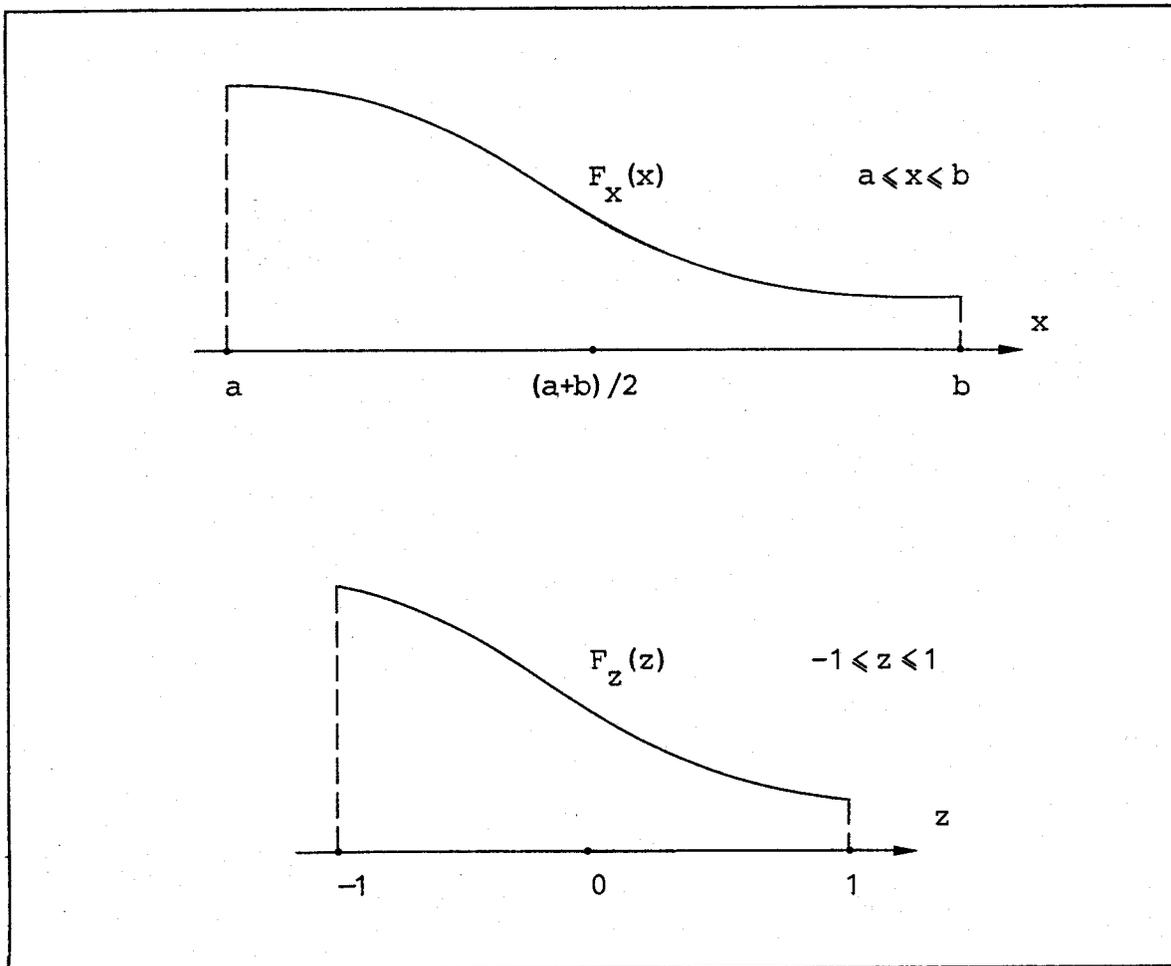


Fig.11 - MUDANÇA DE VARIÁVEL :  $x = A z + B$

Qualquer função que satisfaça as condições necessárias para a convergência de sua expansão de Chebyshev pode ser aproximada, em qualquer precisão desejada, por uma série finita com a seguinte forma

$$F_x(x) = F_z(z) = \sum_{m=0}^N C_m T_m(z) , \quad -1 \leq z \leq 1 \quad (2.121)$$

onde  $T_m(z)$  é o polinômio de Chebyshev de primeira classe e  $m$ -ésima ordem ; e  $\Sigma''$  denota uma soma finita na qual o primeiro e o último termos são divididos por 2. Aplicando-se a propriedade de ortogonalidade dos polinômios, os coeficientes  $C_m$  são

determinados por (CLENSHAW e CURTIS 1960) :

$$C_m = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(mk\pi/N) \quad (2.122)$$

onde

$$f_k = F_z(z_k) \quad , \quad z_k = \cos(k\pi/N) \quad (2.123)$$

A Fig.12 mostra a disposição gráfica de  $f_k$  e  $z_k$  no caso em que  $N=4$ . Como se observa, o índice  $k$  cresce da direita para a esquerda, e as abscissas  $z_k$  não ficam igualmente espaçadas no intervalo  $[-1,1]$ .

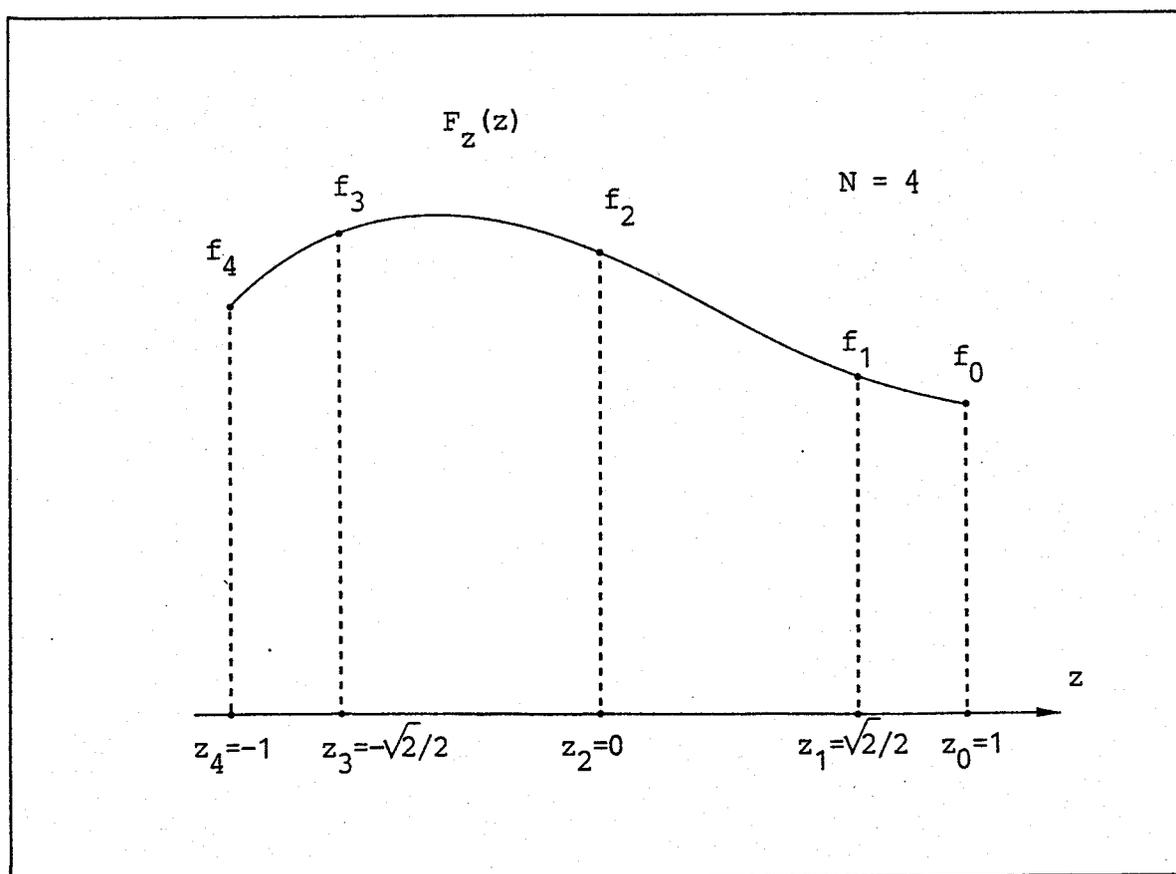


Fig.12 - DISPOSIÇÃO GRÁFICA DE  $f_k$  E  $z_k$  QUANDO  $N=4$

Reescrevendo a expansão (2.121) em série de potências, obtém-se

$$F_x(x) = F_z(z) = \sum_{m=0}^N C_m T_m(z) = \sum_{m=0}^N D_m z^m \quad (2.124)$$

Além disso, usando a equação (2.119) em (2.124), tem-se

$$F_x(x) = \sum_{m=0}^N D_m \left\{ \frac{(x-B)}{A} \right\}^m = \sum_{m=0}^N D_m A^{-m} (x-B)^m \quad (2.125)$$

A parte binomial de (2.125) vale

$$(x-B)^m = \sum_{k=0}^m x^{m-k} B^k E_{k,m} \quad (2.126)$$

sendo os  $E_{k,m}$ , portanto, os coeficientes de  $(x-B)^m$  na expansão em série de potências,

$$E_{k,m} = (-1)^k \frac{m!}{k! (m-k)!} \quad (2.127)$$

facilmente obtidos através do triângulo de Pascal.

Substituindo-se as equações (2.125) e (2.126) em (2.118), obtém-se a seguinte expressão para a integral

$$\begin{aligned} \text{Intg} &= \int_a^b F_X(x) J_n(rx) dx = \int_a^b \left\{ \sum_{m=0}^N D_m A^{-m} (x-B)^m \right\} J_n(rx) dx \\ &= \sum_{m=0}^N D_m A^{-m} \sum_{k=0}^m E_{k,m} B^k \int_a^b x^{m-k} J_n(rx) dx \end{aligned} \quad (2.128)$$

Adicionalmente, fazendo-se  $\xi = rx$ , chega-se a

$$\text{Intg} = r^{-1} \sum_{m=0}^N D_m (A r)^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^m E_{k,m} (B r)^k G_{k,m} \right\} \quad (2.129)$$

onde

$$G_{k,m} = \int_{ra}^{rb} \xi^{m-k} J_n(\xi) d\xi \quad (2.130)$$

A equação (2.129) fornece um modo eficiente de calcular numericamente a integral dada por (2.118). Após extensivos testes, Xu e Mal encontraram que, para uma ampla classe de integrais de número de onda típicas, os seguintes valores representam, com boa aproximação, a tolerância  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \max( 2,5 C_4 ; 0,5 C_3 ) , \text{ para } N=4$$

$$\varepsilon = \max( 2,5 C_8 ; 2,0 C_7 ; 1,5 C_6 ; 1,2 C_5 ) , \text{ para } N=8$$

A determinação de  $G_{k,m}$ , necessária ao cálculo de  $\text{Intg}$ , não apresenta maiores dificuldades, posto que  $G_{k,m}$  pode ser avaliado através das seguintes fórmulas, oriundas da teoria das funções de Bessel (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1965) :

$$\int_{ra}^{rb} \xi J_0(\xi) d\xi = \left\{ \xi J_1(\xi) \right\}_{ra}^{rb} \quad (2.131)$$

$$\int_{ra}^{rb} \xi^c J_0(\xi) d\xi = \left\{ \xi^c J_1(\xi) + (c-1) \xi^{c-1} J_0(\xi) \right\}_{ra}^{rb} - (c-1) \int_{ra}^{rb} \xi^{c-2} J_0(\xi) d\xi, \quad c \geq 2 \quad (2.132)$$

$$\int_{ra}^{rb} J_1(\xi) d\xi = \left\{ -J_0(\xi) \right\}_{ra}^{rb} \quad (2.133)$$

$$\int_{ra}^{rb} \xi^c J_1(\xi) d\xi = \left\{ -\xi^c J_0(\xi) \right\}_{ra}^{rb} + c \int_{ra}^{rb} \xi^{c-1} J_0(\xi) d\xi, \quad c \geq 1 \quad (2.134)$$

onde  $c$  é um inteiro, e equivale a  $m-k$  nas quatro últimas equações. Devido a estas fórmulas, apenas os valores de  $J_n(\xi)$ ,  $n=0;1$  (em  $\xi=ra$  e  $\xi=rb$ ), e de  $\int_{ra}^{rb} J_0(\xi) d\xi$  precisam ser avaliados numericamente. As integrais restantes são obtidas por recorrência.

O cálculo de  $J_0(\xi)$ ,  $J_1(\xi)$  e  $\int J_0(\xi) d\xi$  pode ser realizado mediante aproximações polinomiais (ABRAMOWITZ e STEGUN 1965) ou, opcionalmente, através das fórmulas deduzidas pelo Dr. Klaus Schiel, que são simples e se mostraram de singular

convergência (SCHIEL e GEMAQUE 1986) :

$$J_0(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \cos(\xi P_k) \quad (2.135)$$

$$J_1(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L P_k \sin(\xi P_k) \quad (2.136)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} J_0(\xi) d\xi = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \{\sin(\xi_2 P_k) - \sin(\xi_1 P_k)\} / P_k \quad (2.137)$$

onde

$$P_k = \cos\{(2k-1)\pi/(4L)\} \quad (2.138)$$

e  $L$  é um inteiro positivo que, elevando-se, permite maior precisão no cálculo. Para maiores valores de  $\xi$ , necessita-se aumentar o limite  $L$  a fim de manter uma determinada precisão.

Resta ainda examinar o procedimento adequado quando o raio for nulo ( $r=0$ ). Neste caso, a equação (2.118) se reduz a

$$\text{Intg} = \begin{cases} \int_a^b F_x(x) dx, & \text{para } n=0 \\ 0, & \text{para } n=1 \end{cases} \quad (2.139)$$

uma vez que  $J_0(0)=1$  e  $J_1(0)=0$ . Portanto, no epicentro, a componente radial do deslocamento (equação (2.13)) não é excitada; e

a componente normal (equação (2.12)), com o desaparecimento da oscilação produzida pela função de Bessel, reduz-se a um cálculo menos complicado. Muitos esquemas importantes, usados na implementação numérica da integral expressa pela equação (2.139), podem ser encontrados em DAVIS e RABINOWITZ (1975). Uma possibilidade interessante corresponde ao uso do próprio esquema de Xu e Mal. É evidente que a equação (2.129) não pode ser usada diretamente, posto que envolveria divisão por zero. Entretanto, a condição  $r=0$  pode ser aplicada na equação (2.128). Assim, obtém-se

$$\text{Intg} = \sum_{m=0}^N D_m A^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^m E_{k,m} B^k G_{k,m} \right\} \quad (2.140)$$

onde

$$G_{k,m} = \begin{cases} \int_a^b x^{m-k} dx = \{x^{m-k+1}/(m-k+1)\}_a^b, & n=0 \\ 0, & n=1 \end{cases} \quad (2.141)$$

## 2.8 Linearização Explícita da Integral Aproximada

Constata-se que em vários casos importantes é conveniente, e até bastante econômico em termos de memória e tempo de computação, obter a integral aproximada (2.129) na forma de combinação linear explícita, ou seja,

$$\text{Intg} = w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_N f_N = \sum_{k=0}^N w_k f_k \quad (2.142)$$

onde  $f_k$  são os valores da função conforme (2.123) e  $w_k$  seus respectivos pesos. Tencionando obter esses pesos, observa-se

que a equação (2.129) pode ser compactada na seguinte fórmula,

$$\text{Intg} = r^{-1} \sum_{m=0}^N D_m S_m \quad (2.143)$$

onde

$$S_m = (A r)^{-m} \sum_{k=0}^m \{E_{k,m} (B r)^k G_{k,m}\} \quad (2.144)$$

Os valores de  $D_m$  podem ser escritos como combinações de  $C_m$  (equação (2.124)), e estes, por sua vez, como combinações de  $f_k$  (equação (2.122)). Assim, obtem-se os  $D_m$  como funções dos  $f_k$  :

$$\begin{cases} D_0 = D_0(f_0, \dots, f_N) \\ D_1 = D_1(f_0, \dots, f_N) \\ \dots\dots\dots \\ D_N = D_N(f_0, \dots, f_N) \end{cases} \quad (2.145)$$

Substituindo (2.145) em (2.143) e reagrupando parcelas, chega-se à equação (2.142), com os pesos  $w_k$  em função de  $S_m$  :

$$\begin{cases} w_0 = w_0(S_0, \dots, S_N) \\ w_1 = w_1(S_0, \dots, S_N) \\ \dots\dots\dots \\ w_N = w_N(S_0, \dots, S_N) \end{cases} \quad (2.146)$$

A título de exemplo, calcula-se a seguir os valores de  $w_k$  no caso em que  $N=2$  (Fig.13). Desenvolvendo a equação (2.124) para  $N=2$ , obtém-se

$$\frac{1}{2} C_0 T_0 + C_1 T_1 + \frac{1}{2} C_2 T_2 = D_0 z^0 + D_1 z^1 + D_2 z^2$$

Substituindo os valores dos polinômios de Chebyshev nesta última equação, vem

$$\frac{1}{2} C_0 + C_1 z + \frac{1}{2} C_2 (2z^2 - 1) = D_0 + D_1 z + D_2 z^2$$

donde se conclui que

$$D_0 = \frac{1}{2}(C_0 - C_2) \quad , \quad D_1 = C_1 \quad , \quad D_2 = C_2 \quad (2.147)$$

Entretanto, conforme a equação (2.122), tem-se

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \frac{1}{2} f_2 \\ C_1 = \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{2} f_2 \\ C_2 = \frac{1}{2} f_0 - f_1 + \frac{1}{2} f_2 \end{cases} \quad (2.148)$$

Substituindo (2.148) em (2.147), obtém-se expressões para  $D_m$  em função dos  $f_k$ , ou seja,

$$\begin{cases} D_0 = f_1 \\ D_1 = \frac{1}{2} (f_0 - f_2) \\ D_2 = \frac{1}{2} (f_0 + f_2) - f_1 \end{cases} \quad (2.149)$$

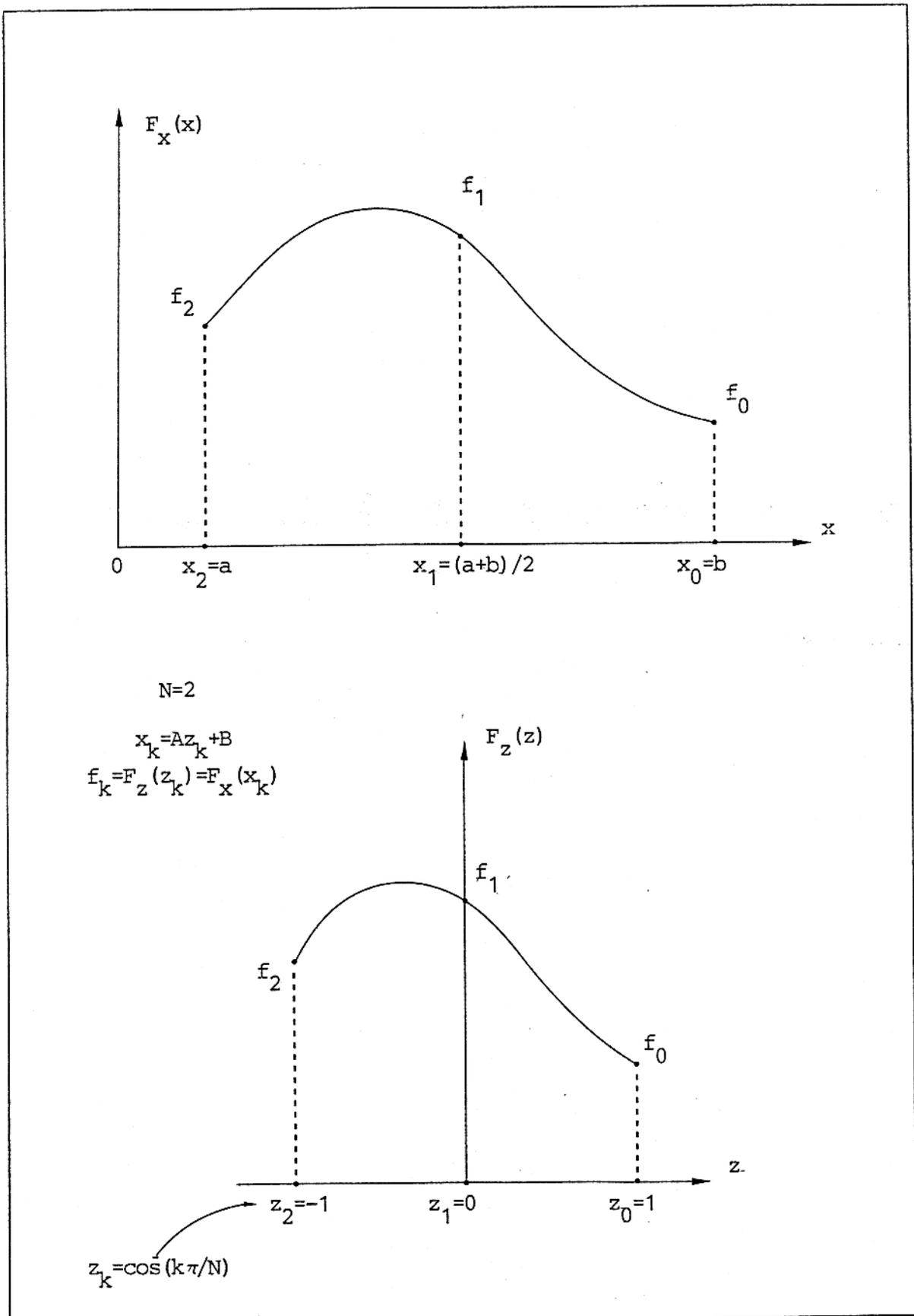


Fig.13 - DISPOSIÇÃO GRÁFICA DAS COORDENADAS  $x_k$  ,  $z_k$   
 E  $f_k$  NO CASO EM QUE  $N=2$

Prossegue-se o desenvolvimento com a substituição das equações (2.149) na equação (2.143) :

$$\begin{aligned} \text{Intg} &= r^{-1} \sum_{m=0}^N D_m S_m = r^{-1} \{ D_0 S_0 + D_1 S_1 + D_2 S_2 \} \\ &= r^{-1} \{ f_0 \frac{1}{2} (S_1 + S_2) + f_1 (S_0 - S_2) + f_2 \frac{1}{2} (S_2 - S_1) \} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} w_0 = r^{-1} \frac{1}{2} (S_1 + S_2) \\ w_1 = r^{-1} (S_0 - S_2) \\ w_2 = r^{-1} \frac{1}{2} (S_2 - S_1) \end{cases} \quad (2.150)$$

A divisão por  $r$ , que aparece nas equações (2.150), pode ser feita de forma vantajosa no final do programa, quando as áreas de todos os subdomínios que compõem o intervalo  $[0, h]$  tiverem sido computadas, evitando-se, deste modo, operações intermediárias desnecessárias.

Para o caso do epicentro ( $r=0$ ), usa-se a equação (2.140), que pode ser compactada na seguinte expressão

$$\text{Intg} = \sum_{m=0}^N D_m S_m \quad (2.151)$$

onde

$$S_m = A^{-m} \sum_{k=0}^m E_{k,m} B^k G_{k,m} \quad (2.152)$$

Seguindo o mesmo roteiro de cálculos, chega-se a

$$\begin{cases} w_0 = \frac{1}{2} (S_1 + S_2) \\ w_1 = (S_0 - S_2) \\ w_2 = \frac{1}{2} (S_2 - S_1) \end{cases} \quad (2.153)$$

A menos do fator  $r^{-1}$ , estes pesos possuem a mesma aparência daqueles fornecidos pela equação (2.150). Entretanto, os valores de  $S_m$  provenientes de (2.153) são calculados de forma muito mais simples que os de (2.150) pois não envolvem manipulações com funções de Bessel.

Para outros valores de  $N$  (4, 8 ou 16, por exemplo) o procedimento usado na determinação dos pesos  $w_k$  é similar. Contudo, o grau de dificuldade na manipulação algébrica aumenta consideravelmente a medida que  $N$  assume maiores dimensões.

No programa de computação desenvolvido para o presente trabalho usou-se  $N=4$ , e como consequência, os seguintes valores para os pesos  $w_k$ ,

$$\begin{aligned} w_0 &= r^{-1} \{S_3 + S_4 - \frac{1}{2} (S_1 + S_2)\} \\ w_1 &= r^{-1} \{\sqrt{2} (S_1 - S_3) + 2 (S_2 - S_4)\} \\ w_2 &= r^{-1} \{S_0 - 3 S_2 + 2 S_4\} \\ w_3 &= r^{-1} \{\sqrt{2} (S_3 - S_1) + 2 (S_2 - S_4)\} \\ w_4 &= r^{-1} \{\frac{1}{2} (S_1 - S_2) - S_3 + S_4\} \end{aligned} \quad (2.154)$$

### 3. SISMOGRAMAS SINTÉTICOS

Neste capítulo são apresentados vários exemplos de sismogramas sintéticos calculados através do método desenvolvido neste trabalho.

A configuração geométrica do meio modelado é fornecida pela Fig.1 . Uma fonte do tipo normal-pontual, localizada à profundidade  $z_f$ , ocasiona a formação do campo de onda. São escolhidas algumas situações onde a profundidade da fonte assume diferentes valores. Tal fonte é expressa pela equação (2.8) , e sua variação no tempo, em todos os exemplos aqui apresentados , possui a seguinte formulação :

$$f(t) = \begin{cases} C \{ \sin(2\pi t/T) - 0.5 \sin(4\pi t/T) \} & , \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & , \quad t > T \end{cases}$$

Desse modo, tanto  $f(t)$  como sua derivada  $f'(t)$  são funções contínuas.

As Fig.14-17 apresentam os deslocamentos vertical ( $U_z$ ) e radial ( $U_r$ ) na superfície do semi-espço homogêneo ( $z=0$ ) para diferentes distâncias epicentro-receptor ( $r$ ).

No cálculo de todos esses sismogramas teóricos , considerou-se sempre os seguintes valores :

velocidade da onda P :  $\alpha=1.0$  Km/s  
 velocidade da onda S :  $\beta=0.7$  Km/s  
 densidade do meio :  $\rho=2.3$  g/cm<sup>3</sup>

VIKTOROV (1967) desenvolveu uma expressão aproximada para a velocidade da onda de Rayleigh ( $v_R$ ) ,

$$v_R = \beta(0,87+1,12\sigma)/(1+\sigma)$$

onde  $\sigma$  é a razão de Poisson,

$$\sigma = (k^2 - 2) / \{2(k^2 - 1)\} \quad , \quad k^2 = \alpha^2 / \beta^2$$

Desse modo, substituindo os valores numéricos de  $\alpha$  e  $\beta$  nas fórmulas anteriores, encontra-se

$$v_R = 0,87 \beta = 0,61 \text{ Km/s}$$

Ao se calcular o valor de  $v_R$  através dos gráficos onde a onda de Rayleigh aparece (Fig.15,16,17), verifica-se que o resultado é totalmente compatível com 0,61 Km/s.

No sismograma apresentado pela Fig.14 ( $z_f=2\text{Km}$ ) duas ondas podem ser distinguidas nitidamente - a onda P, imediatamente seguida pela onda S. Nesta figura, as setas indicam os pontos de início das ondas P e S. Em decorrência da escolha de  $z_f$  (duas vezes o comprimento de onda), a onda de Rayleigh é muito fraca para poder ser vista no sismograma. Os resultados da Fig.14 concordam razoavelmente bem com os apresentados por ALEKSEEV e MIKHAILENKO (1980).

A Fig.15a e suas ampliações (Fig.15b,c) correspondem ao caso em que a fonte geradora do sinal está localizada a 600 m de profundidade. Os melhores detalhes são fornecidos pela Fig.15c; nela podem ser observados três tipos de ondas - P, S e Rayleigh. A onda P, por ter maior velocidade, separa-se mais rapidamente das outras duas, e pode ser facilmente discriminada na Fig.15c, no sismograma correspondente ao deslocamento radial ( $U_r$ ). Nesta figura as ondas S e Rayleigh não aparecem totalmente separadas, mas sim de forma superposta. Nota-se também que as amplitudes das ondas P e S decrescem mais rapidamente que as da onda de Rayleigh a medida que a distância epicentro-receptor ( $r$ ) aumenta.

Os sismogramas apresentados pela Fig.16a e sua ampliação (Fig.16b) correspondem ao caso de  $z_f=300\text{m}$ . No epicentro ( $r=0$ ) a onda P atinge uma amplitude significativa (ver Fig.16a,

componente normal  $U_z$ ), contudo ela decresce de forma bastante rápida, e já a partir de  $r=0,5\text{Km}$  a onda de Rayleigh é fortemente predominante. Desse modo, a Fig.16b apresenta, em termos práticos, apenas as ondas de Rayleigh.

Finalmente, as oscilações correspondentes às ondas de Rayleigh, oriundas de uma fonte localizada na superfície do semi-espaço ( $z=0$ ), são apresentadas no sismograma fornecido pela Fig.17 .

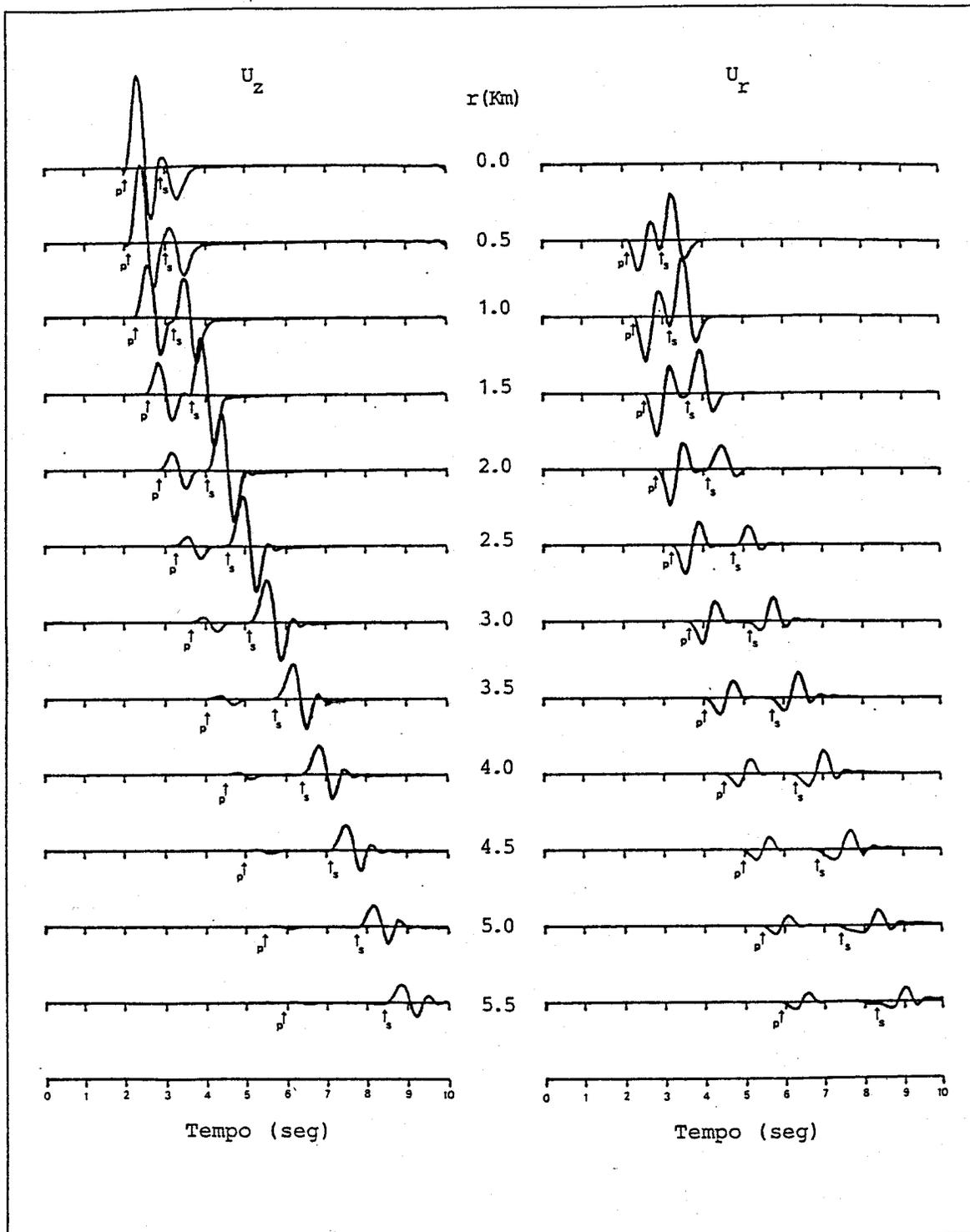


Fig.14 - SISMOGRAMA TEÓRICO. PRIMEIRO CASO: SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE A 2 Km DE PROFUNDIDADE

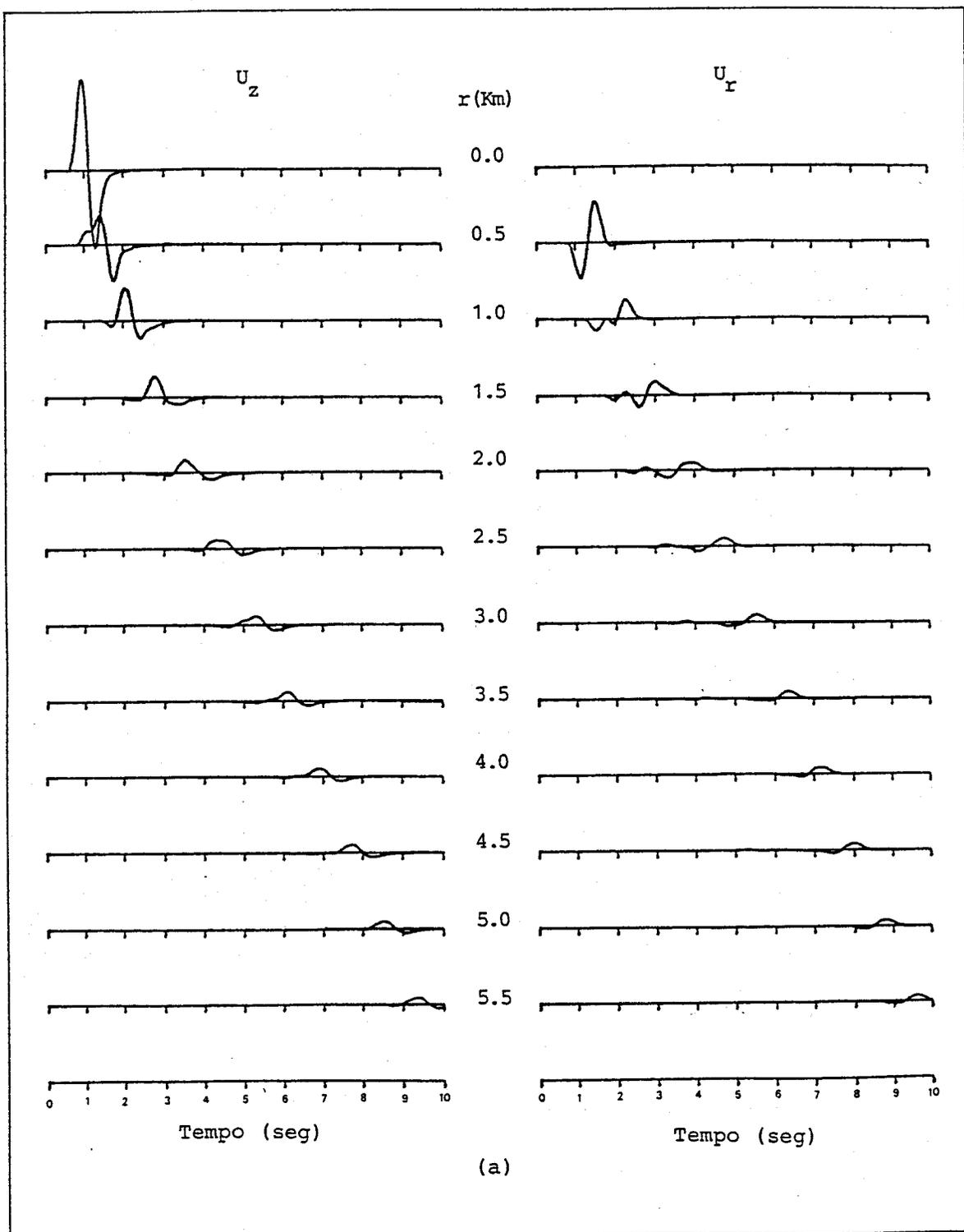


Fig.15 - SISMOGRAMA TEÓRICO. SEGUNDO CASO : SEMI-ESPAÇO HOMOGÊNICO COM FONTE A 600 m DE PROFUNDIDADE

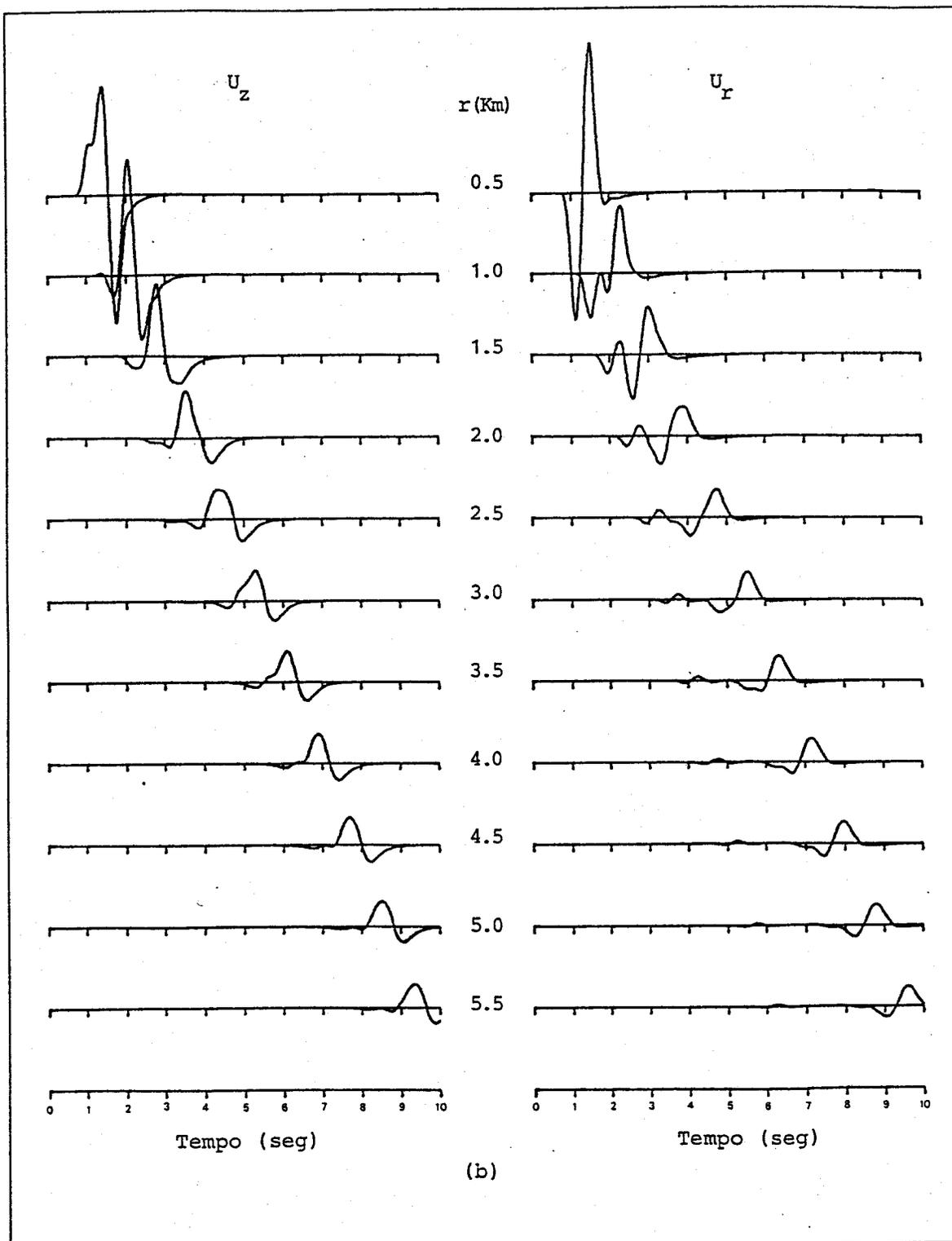


Fig.15 - CONTINUAÇÃO

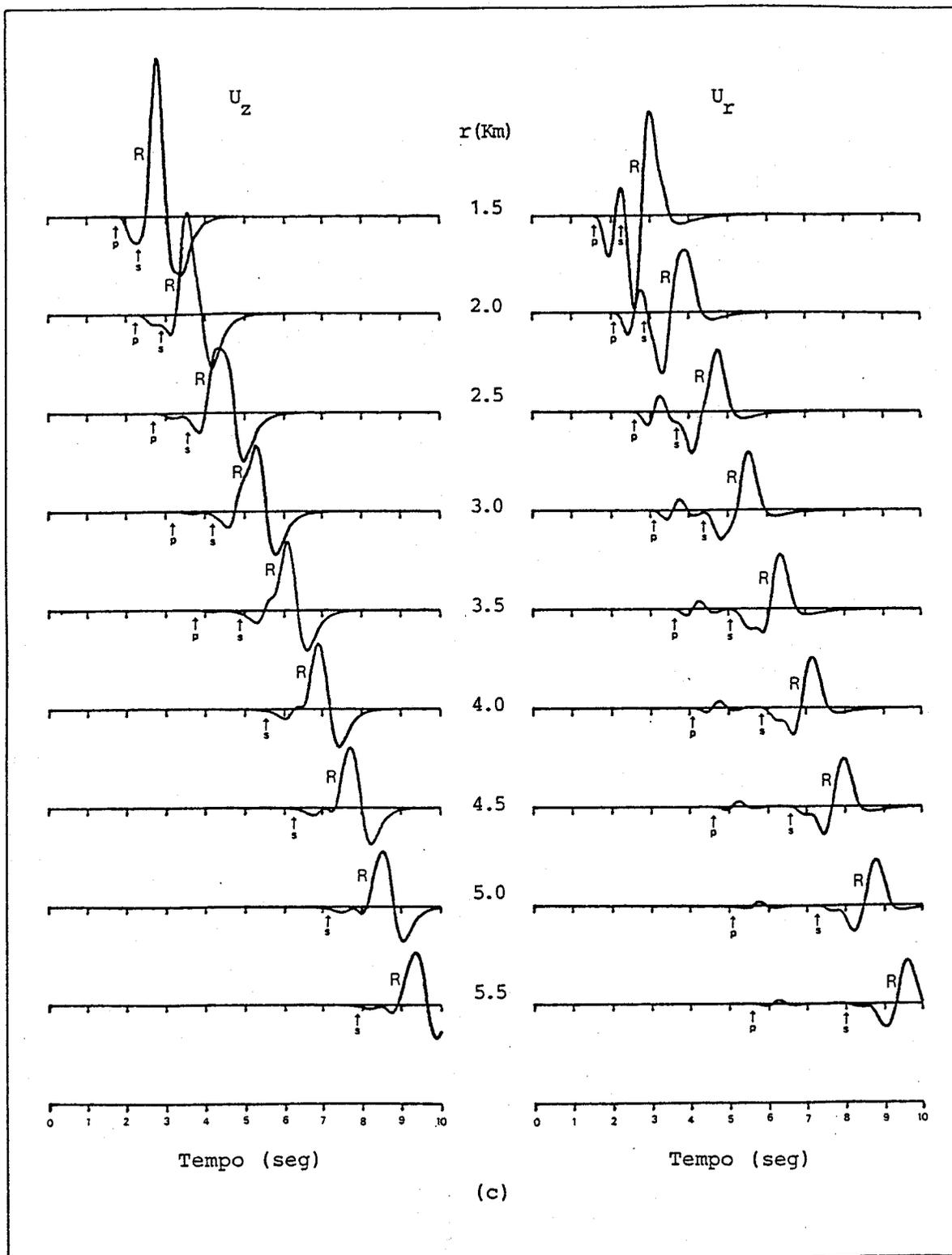


Fig.15 - CONTINUAÇÃO

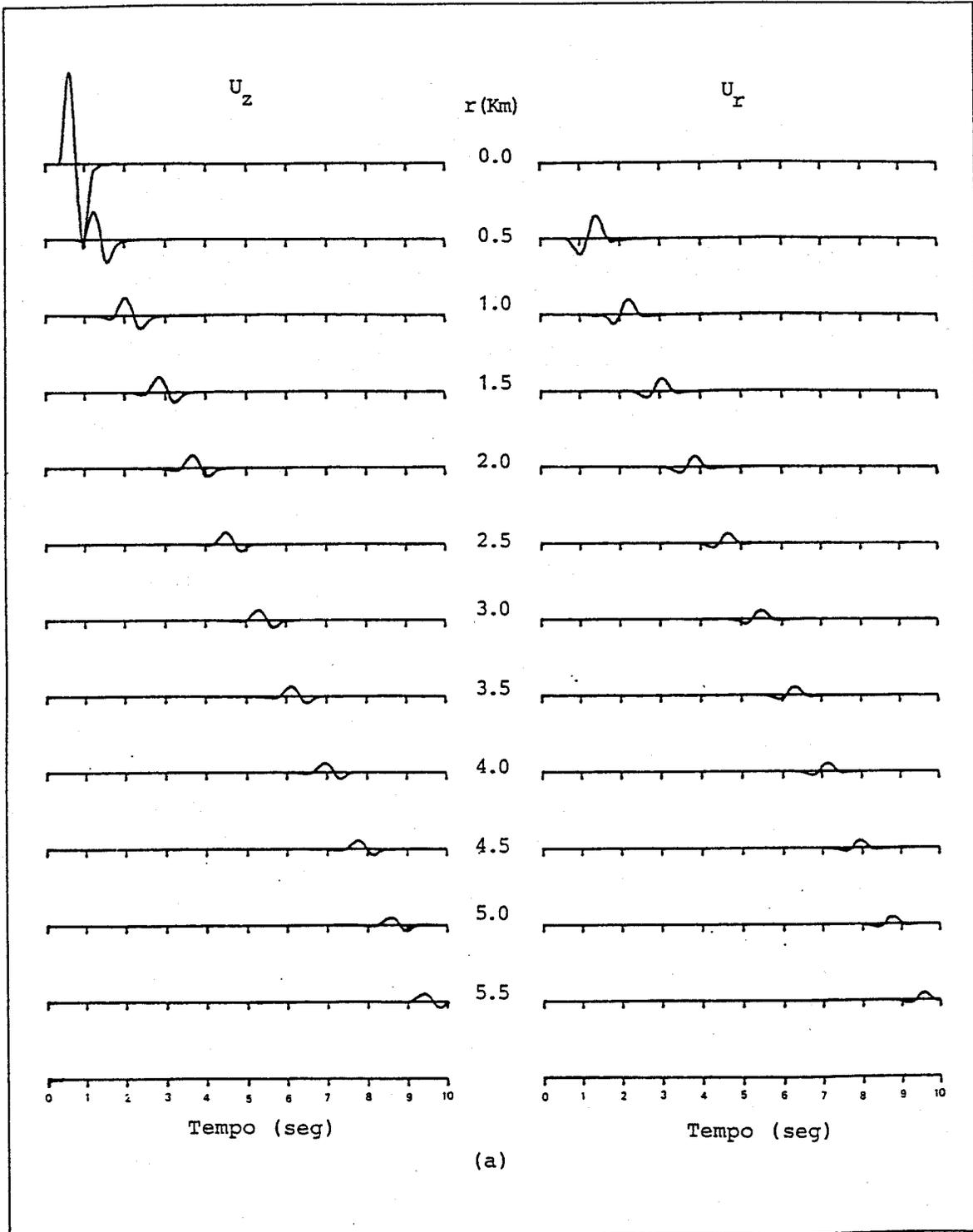


Fig.16 - SISMOGRAMA TEÓRICO. TERCEIRO CASO: SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE A 300 m DE PROFUNDIDADE

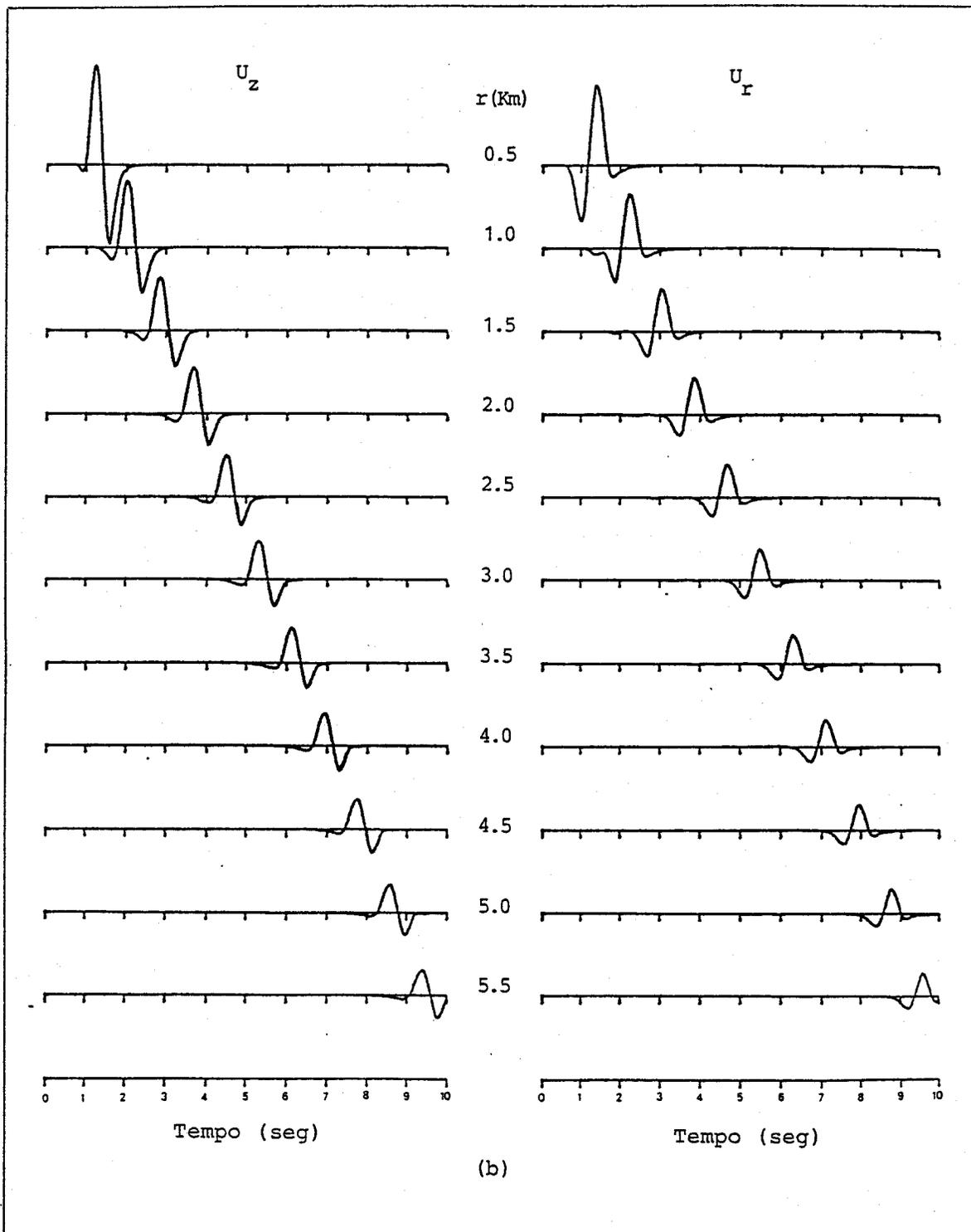


Fig.16 - CONTINUAÇÃO

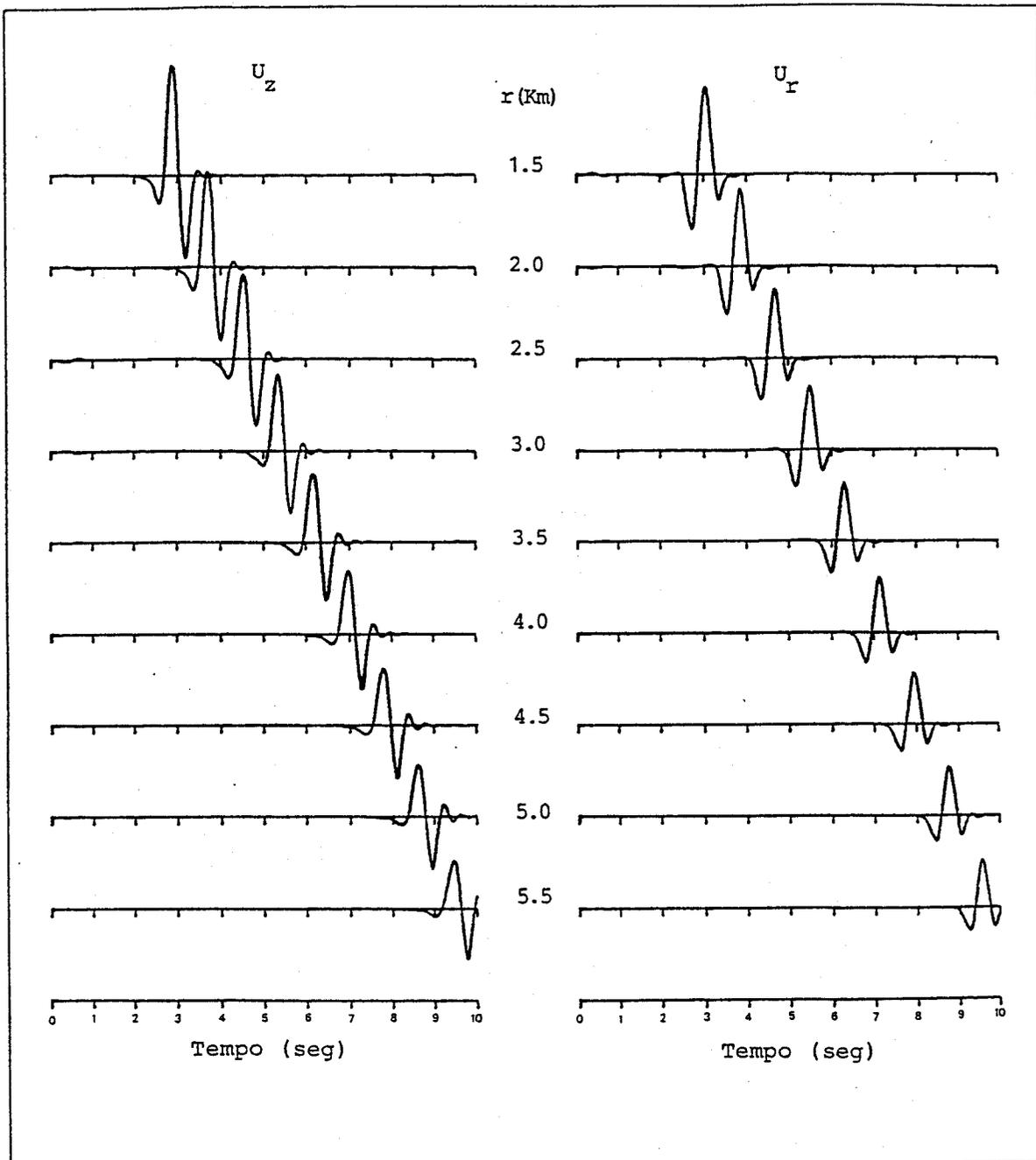


Fig.17 - SISMOGRAMA TEÓRICO. QUARTO CASO: SEMI-ESPAÇO HOMOGENEO COM FONTE NA SUPERFÍCIE

#### 4. CONCLUSÕES

A discretização de um continuum, como realizada pelo método dos elementos finitos e das diferenças finitas, fornecem soluções progressivamente mais precisas a medida que a malha é refinada. Dessa forma, tais métodos não fornecem apenas tempos de chegadas corretos para os vários eventos sísmicos, mas também levam em conta a variação da amplitude do sinal, que depende do tipo de fonte utilizada e dos parâmetros do meio.

O método proposto neste trabalho combina várias técnicas que tornam possível o aproveitamento de algumas características importantes - não é requerida muita memória de computador e, além disso, o cálculo dos sismogramas situa-se dentro de uma faixa aceitável de precisão numérica e rapidez computacional. Portanto, pode-se concluir de maneira favorável em relação a aplicabilidade do método desenvolvido.

O prosseguimento natural deste trabalho conduz ao caso estratificado, ou seja, cálculo da resposta elástica completa de um semi-espço verticalmente heterogêneo. Adicionalmente, várias questões aguardam soluções, e outras aperfeiçoamentos, de forma que esta tese pode ser significativamente ampliada. Os seguintes itens descrevem a complementação e continuação do trabalho :

- aperfeiçoamento do algoritmo de inicialização , indispensável à partida do processamento no tempo;
- aprimoramento do esquema numérico de integração aplicado na avaliação das transformadas de Hankel, e a subsequente otimização de  $k$  (intervalo do número de onda);
- inclusão de outros tipos de fontes além da normal-pontual, como por exemplo a fonte pontual explosiva;
- análise das condições de estabilidade associadas aos esquemas numéricos propostos.

Os cálculos realizados nesta tese foram levados a efeito no domínio do tempo. Uma outra possibilidade corresponde-

ria à utilização do método dos elementos finitos e da separação parcial de variáveis combinados com a implementação do problema no domínio da frequência , incluindo-se parâmetros materiais complexos do meio elástico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, J.A. - 1970 - Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover Publications. 1046 p.
- AKI, K.; RICHARDS, P.G. - 1980 - Quantitative Seismology: Theory and Methods. San Francisco, W. H. Freeman ~~1 v. 557 p.~~
- ALEKSEEV, A.S.; MIKHAILENKO, B.G. - 1980 - The Solution of Dynamic Problems of Elastic Wave Propagation in Inhomogeneous Media by a Combination of Partial Separation of Variables and Finite-Difference Methods. J. Geophys., 48: 161-172.
- ALFORD, R.M.; KELLY, K.R.; BOORE, D.M. - 1974 - Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. Geophysics, 39: 834-842.
- BAMBERGER, A.; CHAVENT, G.; LAILLY, P. - 1980 - Etude de schemas numeriques pour les equations de l'elastodynamique lineaire. Le Chesnay, INRIA Publications. 83 p.
- BELYTICHKO, T.; MULLEN, R. - 1978 - On dispersive properties of finite element solutions. In: Miklowitz and Achenbach; Modern problems in elastic wave propagation. New York, John Wiley and Sons. p. 67-82.
- BEN-MENAHEN, A.; SINGH, S.J. - 1981 - Seismic Waves and Sources. New York, Springer-Verlag. 1108 p.
- BREKHOVSKIKH, L.M. - 1980 - Waves in Layered Media. New York, Academic Press. 503 p.
- ČERVENÝ, V.; MOLOTKOV, I.A.; PŠENČIK, I. - 1977 - Ray Method in Seismology. Praha, Univerzita Karlova. 122 p.
- CHAPMAN, C.H. - 1978 - A New Method for Computing Seismograms. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 54: 481-518.
- CLENSHAW, C.W.; CURTIS, A.R. - 1960 - A method for numerical integration on an automatic computer. Numer. Math., 2: 197-205.
- DAVIS, P.J.; RABINOWITZ, P. - 1975 - Methods of Numerical Integration. New York, Academic Press. 459 p.
- EWING, W.M.; JARDETZKY, W.S.; PRESS, F. - 1957 - Elastic Waves in Layered Media. New York, McGraw-Hill Book 380 p.
- FILON, L.N.G. - 1928 - On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinb., 49: 38-47.

- FLINN, E.A. - 1960 - A modification of Filon's method of numerical integration. J. Ass. Comput. Mach., 7: 181-184.
- FUCHS, K.; MÜLLER; G. - 1971 - Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 23: 417-433.
- HELMBERGER, D.V. - 1968 - The crust-mantle transition in the Bering Sea. Bull. Seism. Soc. Am., 58: 179-214.
- KELLY, K.R.; WARD, R.W.; TREITEL, S.; ALFORD, R.M.- 1976 - Synthetic seismograms: a finite-difference approach. Geophysics, 41: 2-27.
- KUNDU, T. - 1983 - Computation of surface motion in a stratified half-space. Ph. D. dissertation. Los Angeles, School of Engineering and Applied Science, University of California. 133 p.
- KUNDU, T.; MAL, A.K. - 1985 - Elastic waves in multilayered solids. Wave Motion, 7: 459-471.
- LAMB, H. - 1904 - On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Phil. Trans. Roy. Soc., London, ser. A, 203: 1-42.
- LONGMAN, I.M. - 1960 - A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions. Math. Comput., 14: 53-59.
- MARFURT, K.J. - 1984 - Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. Geophysics, 49: 533-549.
- MULLEN, R.; BELYTICHKO, T. - 1980 - Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two-dimensional wave equation. Evanston, Dept. of Civil Eng., Northwestern University. 72 p.
- PIESSENS, R.; BRANDERS, M. - 1983 - Modified Clenshaw-Curtis method for the computation of Bessel function integrals. BIT, 23: 370-381.
- PROTÁZIO, J.S.; GUIMARÃES, P.B.M. - 1983 - O uso de quadraturas oscilantes em transformadas de Hankel e Fourier. In: VI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional; Resumo dos Trabalhos. Soc. Bras. Mat. Ap. Comp. p. 42-45.
- SCHIEL, K.; GEMAQUE, L.H.P. - 1986 - Avaliação da Integral de Número de Onda via Interpolação por Polinômios de Chebyshev e sua Aplicação em Geofísica. In: IX Congresso Nacional de

- Matemática Aplicada e Computacional; Resumo dos Trabalhos. Brasília, Soc. Bras. Mat. Ap. Comp. p. 14-18.
- STRANG, G.; FIX, G.J. - 1973 - An analysis of the finite-element method. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall. 306 p.
- STROUD, A.H. - 1974 - Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations. New York, Springer-Verlag. (Applied Mathematical Science, 10). 338 p.
- VIKTOROV, I.A. - 1967 - Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications. New York, Plenum Press. 154 p.
- WATSON, G.N. - 1958 - A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge, Cambridge Univ. Press. 804 p.
- XU, P.; MAL, A.K. - 1985 - An Adaptive Integration Scheme for Irregularly Oscillatory Functions. Wave Motion, 7: 235-243.
- ZIENKIEWICZ, O.C. - 1977 - The Finite Element Method. New York, McGraw-Hill Book Co. 787 p.