UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
CURSO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ROUZICLAYDE CASTELO BARATA

A COMPREENSÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS SOB A PERSPECTIVA DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

BELÉM - PA

2017

ROUZICLAYDE CASTELO BARATA

A COMPREENSÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS SOB A PERSPECTIVA DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

BELÉM - PA

2017

Dados Internacionais de Catalogação
na Publicação (CIP) Sistema de
Bibliotecas da Universidade Federal do
Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados
fornecidos pelo(a) autor(a)

B226c Barata, Rouziclayde Castelo
A compreensão de expressões algébricas sob a perspectiva da filosofia de Wittgenstein / Rouziclayde Castelo Barata. — 2017
107 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.
Orientação: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

1. Educação Matemática. 2. Linguagem. 3. Filosofia de Wittgenstein. 4. Expressões Algébricas. I. Rosâni Abreu da Silveira, Marisa, *orient.* II. Título

---

CDD 370

ROUZICLAYDE CASTELO BARATA

A COMPREENSÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS SOB A PERSPECTIVA DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Comissão Examinadora:

Prof.ª. Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira (Orientadora) – IEMCI/UFPA

Prof.º Dr.º Paulo Vilhena da Silva (Membro externo) – ICEN/UFPA

Prof.º Dr.º Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior (Membro externo) – UNIFESSPA

Prof. Dr. José Messildo Nunes (Membro interno) – IEMCI/UFPA

BELÉM – PA
2017

Dedico este trabalho:

Aos meus pais,

pelo carinho, suporte e dedicação.

AGRADECIMENTOS

Antes e acima de tudo, agradeço à Deus, fonte de toda sabedoria;

À minha querida orientadora, Professora Marisa Rosâni, que tornou possível o desenvolvimento deste trabalho, meu muito obrigada, pela paciência, confiança à mim atribuída e por todos os ensinamentos que servirão não somente para a vida acadêmica;

Aos membros da banca examinadora, professores José Messildo Nunes, Paulo Vilhena, Valdomiro Teixeira. Suas contribuições revelaram a importância de uma pesquisa. Sou grato pela leitura atenta aos detalhes e pelo compromisso com a qualidade expressa em seus pareceres;

Ao Professor João Manoel da Silva Malheiro (UFPA / Castanhal) pela oportunidade de participar do Grupo de Estudos de Formação de Professores de Ciências e pelo exemplo de profissional;

Aos Colegas do grupo de Estudos em Linguagem Matemática (GELIM/UFPA) pelas sugestões que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa;

A todos os professores do programa de pós-graduação pela vivência harmoniosa durante o período do curso;

Aos meus pais, por acreditarem e não medir esforços para educar seus filhos, a meus irmãos pelo apoio bem como familiares e amigos pelos momentos de companhia e distração que estarão sempre em minhas lembranças.

RESUMO

Nesta pesquisa, investigamos as dificuldades dos alunos desenvolverem as regras matemáticas no contexto de sala de aula, com ênfase, principalmente, nas discussões sobre a linguagem, ou seja, com base na filosofia da linguagem de Wittgenstein (2012), destacando a importância da relação linguagem, matemática e conhecimento. Nosso objetivo principal foi investigar as dificuldades relacionadas à aprendizagem da álgebra escolar, com destaque nas expressões algébricas. Para tal, discutimos, entre outras coisas, sobre seguir regras, ver-como, tradução da linguagem natural/matemática, tratando das peculiaridades, significação e dos fundamentos da matemática que são temas tratados pelo filósofo austríaco principalmente em sua obra *Investigações Filosóficas.* Quanto à metodologia aplicada, desenvolvemos a pesquisa com 24 alunos do ensino fundamental da rede estadual no município de Castanhal, acompanhamos as aulas de expressões algébricas com o intuito de percebermos as dificuldades relacionadas à linguagem e as dificuldades por parte dos alunos decorrentes dela. Para coletar os dados aplicamos um questionário contendo quatro perguntas, mais a resolução de exercícios distribuídos em cinco anexos que nos possibilitaram perceber as confusões durante a resolução destes. A partir das respostas e observações constatamos principalmente que os alunos não dominam as técnicas necessárias para seguir as regras matemáticas fundamentais ao correto desenvolvimento de produtos notáveis e fatoração. Destacamos a importância da atuação do professor, pois, a regras matemáticas não são passíveis de serem descobertas pelos estudantes, precisam ser mostradas, explicadas.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Linguagem, Filosofia de Wittgenstein, Expressões Algébricas.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the students' difficulties when it comes to developing mathematical rules in the classroom context, which the main emphasis were on discussions about language, based on Wittgenstein's philosophy of language, highlighting the importance of the language, mathematics and knowledge. Its main objective was to investigate the difficulties related to the learning of school algebra, especially in algebraic expressions. For this, it presented a discussion about following rules, see-how, natural/mathematical language translation, working on meanings and some math fundamentals which are mainly approached by the Austrian philosopher in his work *Philosophical Investigations.*As methodology, this research was developed with 24 elementary school students from the State Network in the city of Castanhal – PA. We attended the classes of algebraic expressions in order to motice some difficulties related to language and some difficulties by the students because of that language. In order to collect the data, we applied a questionnaire containing four questions and the resolution of exercises distributed in five annexes that provided us a perception of the confusions during their resolution. From the answers and observations, we mainly notice students do not master the techniques required to follow the mathematical rules fundamental to the correct development of remarkable products and factoring. The contents of algebra are usually considered obstacles to learning, since they involve other ways of dealing and operating with the mathematical objects involved. From this result, we emphasize the importance of the teacher's performance, since the students cannot discover the mathematical rules, but they need to be shown and explained.

Key-words: Mathematical Education, Language, Wittgenstein's Philosophy, Algebraic Expressions.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A problemática relacionada ao ensino e aprendizagem da Matemática apresenta-se pertinente em várias modalidades do ensino formal e provoca normalmente muitos questionamentos a respeito da melhor forma de melhorar o aprendizado. As dificuldades vêm sendo trabalhadas com o intuito de fomentar o aproveitamento da disciplina por parte dos discentes com inferências diretas no rendimento escolar e, consequentemente, nas estatísticas dos indicadores da educação básica, que também correspondem a um ponto de interesse governamental (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

Porém, apesar dos esforços em aperfeiçoar o ensino, parece haver um contrassenso com o baixo rendimento de muitos educandos sendo a Matemática, muitas vezes, mencionada como a maior responsável pelo elevado nível de reprovações e evasão escolar no Brasil, o que é sinalizado há tempos por expressões do tipo "não gosto de matemática", "não adianta, nunca vou aprender", "matemática não é para mim". Tudo isso é mencionado por parte dos alunos que destacam não terem capacidade cognitiva para a compreensão dos conceitos explanados nas aulas (SILVEIRA, 2005).

Ainda nesse viés, a prevalência de adversidades na aprendizagem Matemática é evidente (DRUCK, 2004; CAVASATTO, 2010; CARVALHO, 2015) e demonstrada por indicadores de eficácia da educação básica em escala mundial e nacional, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos[1] (PISA) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica[2] (SAEB), respectivamente, destacando que a referida disciplina é posicionada entre as que trazem mais dificuldades aos alunos e consequentemente aos professores que a ensinam.

É importante mencionar que a Matemática possui particularidades próprias por isso seu ensino se torna muito complexo. Na tentativa em facilitar o ensino, percebe-se uma busca em amenizar, camuflar os percalços referentes a essa disciplina, esses por sua vez não podem ser desprezados, nem ignorados. Assim, deve-se tentar cada vez mais compreendê-los com o intuito de tornar o ensino cada vez mais eficiente.

Em se tratando da Educação Brasileira nos dias atuais está pautada, basicamente, na necessidade de trabalhar com metodologias ativas de aprendizagem. Dessa forma, a cobrança por tal uso se faz presente nos documentos oficiais, nos livros didáticos, nas

---

[1] Para mais detalhes consulte: http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos

[2] Para maiores informações veja: http://portal.inep.gov.br/saeb

teorias pedagógicas, reforçando a necessidade de contextualizar os conteúdos, ou seja, colocá-lo em um determinado contexto para dar sentido aos alunos.

Não negamos aqui a utilidade da contextualização, porém não se pode limitar a melhoria do ensino a ela. Principalmente quando está associada à questão do cotidiano, pois, tende se a excluir do ensino o que não tem aplicação imediata, tornando um ponto de conflito para os discentes que, cobrados por sempre contextualizar, têm dificuldades em fazer com que assuntos mais avançados como, binômio de newton, números complexos, funções trigonométricas tenham aplicação direta na vida dos alunos.

Nesse sentido é cada vez maior o argumento de defesa em ensinar aos alunos somente o que tem sentido a eles, ou seja, o que de alguma forma tenha utilidade prática ou concreta da Matemática, com problemas reais e concretos. No entanto, é necessário ter precaução em defender tais posições, pois, não se deve ensinar só o que é significativo e sim o que faz parte da própria natureza do conhecimento matemático (GOTTSCHALK, 2004).

É sobretudo a contextualização da matemática com o cotidiano como ponto de destaque ao sucesso da aprendizagem que criticamos aqui, não concordamos com a ideia de que o significado se revelaria por uma justificação extralinguística, pois, defendemos que é na própria linguagem que as palavras passam a ter sentido, a partir do seu uso.

Wittgenstein (2012) nega a existência de algo comum a todos os usos de uma expressão linguística, uma essência, ou algo definidor, para ele existem semelhanças, chamadas *semelhanças de família*[3]. Dessa forma, nem mesmo um conceito matemático possui um traço característico, ou uso específico, uma essência comum, ou seja, um conceito na matemática pura, na vida escolar ou no cotidiano não possui uma natureza extralinguística, para ele, a linguagem é uma prática pública, uma instituição humana que está à disposição de todos que a utilizam.

Assim, a relevância da pesquisa se dá por mostrar a importância da linguagem como fonte de significado, mostrar que não há uma essência na álgebra que precisa ser descoberta pelos alunos. O significado está no uso das palavras, logo, é uma atividade linguística. É necessário analisar o ensino da álgebra colocando ela em um âmbito próprio de análise, para então, levar em consideração seus conceitos específicos (variável / incógnita etc), inclusive especificando a relação existentes em outros contextos da matemática, como adição, subtração, multiplicação, potência, igualdade existente

[3] Esse termo é usado por Wittgenstein, explicaremos sobre ele no capítulo 2 na fundamentação teórica.

também na aritmética, bem como a noção de cubo, quadrado, existentes também na geometria, mostrando as relações de semelhanças existente.

Ao contrário do que pode parecer, não estamos desmerecendo os conhecimentos cotidianos, muito menos afirmando que não devemos usá-los em sala de aula. Sobre isso, Giardinetto (2002) recomenda a utilização dos conhecimentos cotidianos na escola como ponto de partida para os conhecimentos formais. Segundo ele, esses são mais refinados.

Do nosso ponto de vista, é necessário mostrar aos alunos que a Matemática não tem função unilateral, ou seja, não tem um único sentido, que é o de ser útil e resolver problemas. Dessa forma, é necessário um olhar atento às dificuldades dos alunos em discernir os diferentes usos das palavras, tais contextos podem ser intra ou extra matemáticos, e o esclarecimento aos alunos dos diversos usos são fundamentais para esclarecer as confusões linguísticas bem como minimizar o fracasso na referida disciplina.

Ainda nesse viés, a dificuldade em compreender a linguagem matemática por discentes relaciona-se a conflitos na própria formalização de conteúdos, tais como não compreender determinados conceitos fundamentais, a utilização de uma simbologia própria, a tradução da linguagem natural para linguagem matemática, entre outros.

Desta forma, é salutar a importância do papel da linguagem para a proposição de ações que visem à superação de possíveis mal entendidos e que amenizem as dificuldades com o ensino da disciplina, pois, diferentemente do que acontece na linguagem natural, na lógica e no rigor da matemática todas as palavras buscam ter um sentido preciso, sendo imprescindível que os alunos conheçam os significados pertinentes à assimilação dos conteúdos. Sobre isso, Silveira (2015) salienta, inclusive, que é necessário compreender as regras inerentes ao contexto da disciplina, para ler, interpretar e dar sentido aos textos.

Muitas dificuldades em aprender as expressões algébricas, ocorrem em virtude da presença de uma linguagem carregada de simbolismo, de regras e técnicas na qual os alunos não dominam, portanto, não veem sentido, ficando dessa forma inseguros no manuseio das variáveis, das incógnitas. Em consequência disso, observa-se uma certa falta de motivação nos alunos em estudar, apesar da importância dos conceitos matemáticos tanto para a matemática escolar quanto para o desenvolvimento da própria sociedade, bem como para o conhecimento formal como um todo.

Chalouch, Kieran (1996), Booth (2003), Polla (2010), Poffo (2011) apresentam as dificuldades enfrentadas pelos alunos com relação à assimilação dos conteúdos da álgebra elementar, mais especificamente das expressões algébricas e, das recorrentes lacunas relacionadas a educação matemática, enfatizando a necessidade de elucidar as problemáticas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem do referido conteúdo.

Essas discussões estão normalmente relacionadas à construção do conhecimento pelo aluno, na qual o conhecimento matemático perpassa espontaneamente de estruturas cognitivas existentes no estudante. A função do professor, nesse sentido, é dar suporte para que o desenvolvimento transcorra da forma mais natural possível. Assim, precisa ter relação direta com sua realidade, ou seja, que esteja mais próxima do visível, do concreto, do manipulável, como se o conhecimento matemático estivesse em um lugar, ou num mundo que o aluno precisa atingir sozinho, por construção.

Dessa forma, é comum por parte de professores, pedagogos e demais profissionais da educação a procura pela melhor maneira de ensinar as expressões algébricas, tendenciado excessivamente para a motivação dos alunos pela contextualização dos conteúdos. Isso ocorre com frequência pelo uso de diferentes metodologias, voltadas sempre para o fim de tornar o aprendizado interessante, significativo, crítico, como apontam, por exemplo, Bonadiman (2007), Oliveira (2012), Borgato (2013), Grecco (2008), Cardia (2007).

No entanto, nos estudos voltados à linguagem matemática a transmissão do conhecimento é resultante da predisposição de seguir regras, e essas são produto da ação dos homens. A tarefa do professor é ensinar essas regras, para que o aluno possa identificar o contexto nas quais elas podem ser utilizadas, principalmente, no momento em que as regras se assemelham ao contexto das situações empíricas (GOTTSCHALK, 2008).

Ademais, os estudos em filosofia da linguagem apontam para uma direção, pautada na ideia de que a matemática não traz regras óbvias ao aprendiz, passíveis de serem "descobertas". Ao contrário, é necessário compreender a importância da linguagem no ensino da matemática, conjugando os olhares e tarefas que favoreçam os processos de simbolização e a manipulação adequada de símbolos. Perceber que a linguagem é um suporte ao seguimento das regras matemáticas e, por conseguinte, o domínio de técnicas envolvidas no desenvolvimento das atividades do conteúdo estudado, em particular no desenvolvimento de expressões algébricas.

Na perspectiva da filosofia da linguagem de Wittgenstein (2012), observamos que é pela compreensão das regras e, consequentemente, pelo domínio das técnicas envolvidas nas tarefas dos conteúdo, que o aluno compreende o que lhe é ensinado. Esse domínio possibilita o seguimento correto das regras e não somente por resolução de exercícios em que o aluno acaba decorando sem saber o que está fazendo, e sim pela compreensão do sentido, de perceber o significado das regras e o esclarecimento dos termos matemáticos envolvidos, por meio de diversas tarefas, tendo em vista que a linguagem matemática não é uma mera manipulação de signos sem sentido.

No Brasil o que prevalece nos documentos oficiais, em relação ao ensino das expressões algébricas e da matemática como um todo, é o desenvolvimento natural das estruturas cognitivas presentes naturalmente nos alunos, pois, constrói o conhecimento matemático ao desenvolver táticas que resolvem situações-problema. Essa ideia é trazida em um único documento oficial que baliza o ensino chamado Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL,1998).

Observando as diferentes perspectivas de aprendizado da álgebra, e com os olhares voltados para outra vertente, que é a filosofia da linguagem de Wittgenstein, somos levados a fazer a seguinte pergunta: Quais dificuldades inerentes ao aprendizado de regras das operações com expressões algébricas são enfrentadas pelos alunos do 8º ano do ensino fundamental?

É com base nesse questionamento que na presente pesquisa enfatizaremos a linguagem no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, com um olhar voltado para as lacunas apresentadas pelos estudantes no processo de aprendizagem de expressões algébricas, principalmente às relacionadas ao entendimento e aplicação de conhecimentos algébricos em relação ao uso da linguagem natural e matemática. Nesse sentido, nosso objetivo principal é: investigar as dificuldades relacionadas a aprendizagem da álgebra por discentes do 8º ano do ensino fundamental, com base na filosofia wittgensteiniana.

Nossos objetivos específicos são: a) identificar as variantes que explicam as dificuldades dos alunos em resolver expressões algébricas; b) analisar o desenvolvimento e compreensão das regras matemáticas utilizadas na resolução de exercícios de expressões algébricas; c) discutir as implicações que a incompreensão de regras matemáticas traz à aprendizagem de expressões algébricas.

Dessa forma, este é um aspecto muito importante para a transmissão do conhecimento, pois, possibilita que as expressões sejam analisadas levando em consideração o domínio de técnicas necessárias ao seguimento das regras envolvidas nos seus conceitos específicos.

Nesse viés, sem desconsiderar as pesquisas feitas pela linha cognitivista, buscamos trazer novas compreensões para o tema do aprendizado das expressões algébricas, onde a linguagem não é somente fonte de significado e nem um suporte para algo exterior a ela. Esperamos assim, contribuir para o ensino da matemática e para as pesquisas em Educação Matemática.

Além dessa introdução, esse trabalho será apresentado em cinco capítulos, organizados da seguinte forma:

No primeiro capítulo apresentamos uma discussão sobre a linguagem, fazendo menção às peculiaridades e entrelaçamento da linguagem comum (natural) com a linguagem matemática, explanando a discussão sobre a simbiose entre ambas, pois, a matemática por si só não possui oralidade, depende de uma língua para se expressar, sendo objetiva, codificada, impessoal e atemporal. Perceber essas particularidades da linguagem é fundamental para a sala de aula, não somente para fins unicamente comunicativos, mas sim como um sistema de escrita complexo e regido por regras.

No segundo capítulo situamos o referencial teórico apoiado nas ideias do filósofo austríaco Wittgenstein, como jogos de linguagem, semelhanças de família. Além disso, definiremos especialmente o conceito de “seguir regras”, acompanhado de outros temas, a saber: compreensão para Wittgenstein; ver e ver como; tradução da linguagem natural para a matemática e vice versa. Todos esses conceitos são necessários ao ensino e aprendizagem das expressões algébricas. Trataremos, por exemplo, como uma mesma palavra pode ter diferentes usos em diferentes contextos; como uma pessoa segue uma regra e de que forma se compreende algo.

No terceiro capítulo, propomos uma noção sucinta sobre como as expressões algébricas estão sendo ensinadas; as recentes discussões no campo da educação matemática; a maneira pela qual o ensino das expressões está sendo proposto nos PCN e as características da simbologia das expressões algébricas no Ensino Fundamental, incluindo algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos, tratadas em algumas pesquisas, bem como a relevância desta na Educação Básica.

Já no quarto capítulo trazemos o percurso metodológico de nossa pesquisa. Nele, apresentamos o caminho percorrido na investigação, de que maneira vamos atingir os objetivos mencionados aos procedimentos utilizados para a concretização deste trabalho, como a coleta de dados, a observação das aulas, os exercícios propostos.

No decorrer do quinto capítulo analisamos os registros da pesquisa empírica com base no referencial teórico, mostramos algumas dificuldades linguísticas enfrentadas pelos alunos, as análises foram divididas em categorias, para melhor acoplar as discussões. De maneira minuciosa, descrevemos detalhes da sala de aula, dos alunos, da interação com a professora. Desse modo, as sessões de análises se apresentam claras e organizadas em três categorias, conforme o aporte teórico.

Na pretensão de encontrar soluções imediatas, professores filiam-se às propostas metodológicas que impõem comportamentos a ser seguido. Por vezes, não conseguem solucionar a questão da aprendizagem. Dessa forma, eles se sentem derrotados, frustrados, percebendo que não foram eficazes. Tudo isso provoca no professor o sentimento de incompetência; já os alunos, em determinados conteúdos, não conseguem aprender os conceitos necessários. (GOTTSCHALK, 2002; SILVEIRA, 2015).

Em se tratando do conteúdo das expressões algébricas e da álgebra, como um todo, não é fácil contextualizar. Nem com o cotidiano do aluno, nem com outras áreas da matemática como a aritmética e geometria. Isso ocorre, porque essas disciplinas trazem diferentes maneiras de lhe dar com objetos matemáticos, pois, diferente da aritmética, a álgebra não é estática. Essa desenvolve conceitos que variam com o tempo, e são desconhecidos a princípio. A álgebra é em geral, um conteúdo que causa sim muita estranheza no primeiro contato. Isso fica evidente nos indicadores de eficácia da educação básica, cujo índice de erros nas questões são os maiores (CURY, 2013).

Não há na educação matemática pesquisas baseadas no ensino das expressões algébricas pautados no referencial teórico da filosofia da linguagem de Wittgenstein. Os estudos relacionados a esse assunto são pautados no viés cognitivista, na vertente de que se contextualizar os alunos aprenderão mais, inclusive os estudos são influenciados pelos livros oficiais que são indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). No qual consta a cobrança que se apresenta na tese de que os conceitos algébricos sejam articulados com aplicações no cotidiano.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a discussão sobre o ensino da álgebra no ensino fundamental, aponta para o fato de que a questão problemática neste nível de ensino se dá pelo fato de estar afastado do cotidiano da maioria. Além disso, existe um exacerbado manuseio de letras e números, cujo privilégio está na habilidade mecânica, com repetição de regras algébricas sem menor sentido, sem compreender os elementos envolvidos (BRASIL, 1998).

Não somos de acordo que a solução seja aproximar do cotidiano do aluno, muito menos utilizar de maneira amena as letras e números, é necessário conhecer as particularidades, regras e dominar as técnicas do objeto estudado.

As pesquisas da filosofia da linguagem na educação matemática, em particular aquelas que fazem uso das ideias de Wittgenstein, trazem novos rumos para as pesquisas nesse âmbito. Apesar das reflexões filosóficas deste filósofo não estarem diretamente relacionadas à educação, ele elaborou propostas filosóficas a respeito do papel da linguagem na elaboração de significados, no seguimento de regras, nos diferentes usos e contextos das palavras (CHAUVIRÉ,1991; GRAYLING, 2002).

CAPITULO 1– LINGUAGEM E LINGUAGEM MATEMÁTICA: a matemática é uma linguagem.

Neste capítulo traremos algumas reflexões sobre língua, linguagem e linguagem matemática, atentando para a necessidade de observar as diferenças de uso no contexto da linguagem matemática e fora dela, pois, a linguagem matemática contém características bastantes peculiaridades e interconexões com a linguagem natural, tratando sobre a influência para o aprendizado como um todo. Porém, aqui nos deteremos ao aprendizado da matemática.

1.1 – Linguagem e língua

Para Wittgenstein, o significado das palavras está na regra ou no conjunto de regras que somos inseridos em determinados contextos e não extraídos de determinados objetos empíricos (GOTTSCHALK, 2007). Dessa forma, as regras existentes na linguagem não são óbvias aos alunos, é necessário mostra-las. Nesses termos, a interação entre professor e aluno por meio da comunicação é de fundamental importância para a aprendizagem. Assim, é necessário mas não suficiente que o professor conheça o conteúdo matemático. Para isso, precisa também identificar os atributos da linguagem matemática que implicam no aprendizado. (SILVEIRA, 2010).

Dessa forma, destacamos a importância da linguagem, do conhecimento dos códigos da língua para haver comunicação na sala de aula. Conforme destaca Granger (1974), a comunicação só ocorre por meio da interação, de experiências compartilhadas entre receptor e locutor, adquiridas por meio de técnica linguística. De forma similar, Wittgenstein (2012) afirma que compreendemos um ao outro por compartilharmos tradições, costumes, hábitos, e tudo isso ocorre em diferentes contextos.

Uma expressão bastante usada em nossos escritos é *linguagem natural (comum)* que é a linguagem utilizada nas mais variadas situações do cotidiano. Diferentemente ocorre das linguagens formais, como a linguagem matemática, a lógica, as partituras, que são linguagens específicas, objetivas e abstratas.

Apesar das variações linguísticas advindas de experiências sociais e historicamente construídas, a língua é o lado formal; enquanto que a gramática é componente constituinte da língua. Não importa se é português, francês, inglês, espanhol. Todas as línguas são constituídas por signos e funcionam sobre determinadas regras. Para Granger (2013), língua é um conjunto de componentes científico, ou seja, funciona como conceito regulador que determina um domínio de conhecimento. É um objeto da ciência que possui relações diretas com os sistemas formais.

Granger (ibid, p.129) conceitua o "sistema simbólico como um conjunto de signos efetivamente dados e efetivamente construtíveis", ou seja, esse conjunto pode ser engendrado por novos signos, ou pelo menos uma regra, por limitação que deixam sua realização parcialmente arbitrária.

Ainda nessa perspectiva, o autor caracteriza afirma que a classe de sistemas simbólicos é

> a) composto por regras, explícitas ou não, permitindo dissociar na matéria do signo os aspectos pertinentes, isto é, necessários para significar; b) conjunto de seus **significantes** pode ser transferido por decomposição a um léxico finito de **significantes** elementares; c) regras cuja natureza constitui o terceiro caráter distintivo dos **sistemas formais**. Elas devem poder relacionar-se a simples condições de concatenação dos elementos do léxico, condições cujo respeito determina as "expressões bem formadas" do sistema (GRANGER, 2013, p.133, grifos do autor).

Nesse sentido, percebemos que a língua é formada por todo um prelúdio teórico, uma relação entre significantes e significados. Segundo Granger (2013, p.136) "As línguas são sistemas simbólicos, por excelência, em razão de sua complexidade estrutural e funcional, e não pelo caráter fundamental e elementar dos traços do simbolismo que elas ilustram". Isso nos leva a um fato fundamental, todas as línguas são articulações de um sistema formal.

Sabemos que a língua é formada por um conjunto de variações linguísticas que, por sua vez, são usadas por diferentes falantes. Sobre isso, Wittgenstein (2012) ressalta que essa variação de palavras, signos, frases, não é fixa, sempre surgem novos contextos, ou seja, os diferentes usos das palavras em diferentes maneiras, em detrimentos de outros que são esquecidos pelos falantes. No entanto, destaca que na Matemática essa mutação não acontece dessa forma, ela é regida por normas que sua vez foram convencionadas.

Wittgenstein (2012) vai além e nos afirma que a leitura é um *processo determinado* que reconhecemos. Ele explica também que a familiaridade nos faz reconhecer, seja pelo formato das letras, seja pelo som. Destaca, ainda, que causa estranheza quando se muda a escrita das palavras, pois, já estávamos acostumados com essa familiaridade e que precisamos também ter com os símbolos e signos matemáticos. Para que isso ocorra, é necessário estudar, conhecer, praticar, dominar as técnicas para reconhecer os signos da álgebra, da lógica, da aritmética. E é dessa forma que as palavras terão sentido.

Nesses termos, empregamos a linguagem para nos comunicar, e aprendemos de maneira muito natural, somos acostumados desde cedo, a nos comunicar por meio dela, assim, vamos compreendendo os sentidos das palavras, conforme o uso que fazemos delas, ao ponto de a acharmos que é fácil, simples. No entanto, quando vamos aprender a gramática e a escrita, percebemos que não é tão simples assim, pois, existem regras a serem seguidas, bem como a fato de muitas palavras terem o sentido conforme o contexto que estão sendo utilizadas.

É importante que na sala de aula, o docente escute seus alunos, e possibilite que se expressem, analisando as contribuições do diálogo para a aprendizagem, bem como é fundamental ajudar os alunos a compreender o sentido das palavras desconhecidas, situando o contexto em questão.

1.2. – Linguagem Matemática

A maior parte das investigações epistemológicas não leva em consideração o papel constitutivo da linguagem e da práxis na transmissão do conhecimento (GOTTSCHALK, 2007). Também, não se leva em consideração os elementos da práxis da nossa linguagem como constituintes dos sentidos que construímos para a nossa experiência, não para sugerir novos métodos de ensino, mas para questionar determinadas orientações de teorias pedagógicas atuais e direcionar para um novo modo de ver as relações entre ensino e aprendizagem.

Tendo por base algumas considerações sobre linguagem, vemos a necessidade de esclarecermos algumas particularidades da linguagem matemática, a fim de conhecer melhor sobre como se dá o processo de apropriação dela em contexto de sala de aula, tendo em vista que possui características próprias e vão muito além do uso de termos da língua materna.

A Matemática enquanto linguagem, possui algumas peculiaridades marcantes: é objetiva, monossêmica, carregada por uma simbologia própria. Cheia de termos precisos, estruturas gramaticais, formalidade, impessoalidade, atemporalidade. Além de uma impregnação mútua com a linguagem natural, por não possuir oralidade. É constituída de um sistema simbólico escrito, enquanto a oralidade utilizada para a leitura de textos matemáticos é cedida da linguagem natural, justificando desta forma a relação de dependência entre ambas.

Sobre isso, Machado destaca que:

> Uma linguagem formal não pode prescindir do concurso da língua natural. Um formalismo sem oralidade, não obstante possa ser transcendentalmente correto, independente e interpretantes, é um discurso sem enunciador, não podendo ser considerado caracteristicamente humano. (MACHADO, 2011, p.113).

Granger reforça a não oralidade presente nos sistemas formais:

> Sem dúvida, nas linguagens formais, pode-se considerar signos isolados e “expressões bem formadas”; mas não se opõem entre si como o fonema (...) O sentido dos signos formais unitários (na matemática: +, f, (...) não se constitui por remessas a uma estrutura autônoma de oposições e correlações correspondendo a uma fonologia. É diretamente embreado no sistema dos sintagmas que corresponde ao primeiro nível de articulação das línguas naturais. (GRANGER, 1974, p. 140).

A linguagem matemática é uma linguagem formal, exclusivamente escrita, constituída por gráficos, símbolos, representações geométricas, expressões algébricas, conforme bem destaca Silveira:

> A linguagem matemática utiliza símbolos para representarem signos tais como: $\leq$, $\geq$, $\div$, $\times$, entre outros; abreviaturas: ∞, km, etc.; letras: h para altura, l para lado e números. A linguagem matemática com seus códigos, dentre outras coisas, representa de forma abreviada o texto escrito pela linguagem natural. Esta abreviatura surge por meio da formalização da linguagem, mas que comporta um resíduo indicador dos sentidos contidos no texto não abreviado, que foram suprimidos no processo de abreviação. (SILVEIRA, 2014, p. 48).

Nesse sentido, enquanto linguagem formalizada, a linguagem matemática tende a possuir objetividade e precisão, não cabendo ambiguidades. Quando ocorre confusão é em virtude da impregnação com a linguagem natural, que por sua vez serve de apoio para a matemática, e por equívoco nas regras matemáticas.

Sobre isso, Machado ressalta que

> O inevitável empréstimo da oralidade que a Matemática deve fazer à Língua Materna, sob pena de reduzir-se a um discurso sem enunciador, ao mesmo tempo que destaca uma relação de complementaridade entre os dois sistemas, por esta via põe em evidencia a essencialidade da impregnação entre ambos. (MACHADO, 2011, p. 136).

A formalização da linguagem matemática, baseada na sua própria lógica, nas suas regras não permite múltiplas interpretações das proposições. Sua linguagem é objetiva, atua com evidências de um único sentido, a fim de evitar se defrontar com a natureza ambígua da linguagem natural.

Ainda sobre isso, Machado fala que:

> A linguagem ordinária e a matemática utilizam-se de tantos termos “anfíbios”, ora com origem em uma, ora com origem em outra, que às vezes não percebemos a importância desta relação de troca, minimizando seu significado, a observação das seguintes frases contribui para a compreensão do que se afirma “o xis da questão”, “o círculo íntimo”, “a esfera do poder”, “possibilidades infinitas”. (MACHADO, 2011, p.103).

Essa imbricação entre a linguagem natural com a linguagem matemática pode gerar dificuldades por parte dos alunos em compreender os textos matemáticos. Isso ocorre pela falta de compreensão do vocabulário próprio, conforme destaca Smole e Diniz:

> A dificuldade que os alunos encontram em ler e compreender textos de problemas está entre outros fatores, ligada à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. O estilo no qual os problemas de matemática geralmente são escritos, a falta de compreensão de um conceito envolvido no problema, o uso de termos específicos da matemática que, portanto, não fazem parte do cotidiano do aluno e até mesmo palavras que têm significados diferentes na matemática e fora dela – total, ímpar, média, volume, produto – podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão. (SMOLE E DINIZ, 2001, p.72).

Para a compreensão de textos matemáticos é necessário adentrar no universo da disciplina, a fim de conhecer as regras dos conceitos matemáticos, ou seja, os objetos intrateóricos que são carregados de simbolismos, na maioria das vezes, causam muitas dúvidas aos alunos. (SILVEIRA, 2015).

Nesse sentido, afirma Carrasco:

> A dificuldade de ler e escrever em linguagem matemática, onde aparece uma abundância de símbolos impede muitas pessoas de compreenderem o conteúdo do que está escrito, de dizerem o que sabem de matemática.
>
> Nesse sentido, duas soluções podem ser apresentadas. A primeira consiste em explicar e escrever, em linguagem natural, os resultados matemáticos [...] Uma segunda solução seria a de ajudar as pessoas a dominarem as ferramentas da leitura, ou seja, a de compreenderem o significado dos símbolos, sinais e notações. (CARRASCO, 2001, p.192).

Nessa perspectiva, a compreensão dos textos matemáticos consiste no domínio da linguagem. Não se defende aqui que para aprender matemática é suficiente conhecer seus símbolos e as palavras presentes nos textos. É necessário compreender as regras que envolvem os símbolos e uso das palavras nos diversos contextos (aritmética, álgebra, probabilidade, lógica e etc), bem como o domínio das devidas técnicas envolvidas. É dessa forma que se atenta para as particularidades da linguagem matemática; a consciência dessa concepção influencia muito a prática docente, ou seja, a maneira como se lida com as peculiaridades (simbolismo, objetividade, dentre outros).

Para alguns alunos a matemática é tão difícil de entender que se assemelha a uma língua estrangeira, ou seja, mesmo conhecendo as letras, as proposições matemáticas, ainda assim, a disciplina não faz sentido algum. E, na tentativa de fazer obter o sentido das regras e diminuir os desentendimentos a respeito da linguagem matemática, alguns professores acabam relativizando o rigor dessa e desencadeiam uma falta de precisão na linguagem, causando prejuízo ao ensino (SILVEIRA E SILVA, 2013).

Ademais, no contexto de sala de aula, para interpretar um texto, é fundamental interpretar as regras matemáticas subentendidas, assim como os estudantes têm dificuldades em compreender os algoritmos, também têm em entender os problemas escritos em linguagem natural. Por vezes, até sabem quanto é 45 menos 8, mas podem não conseguir resolver a seguinte questão: José emprestou R$ 8,00 reais ao seu irmão, sabe-se que tinha R$ 45,00, com quantos reais ele ficou?

Isso nos faz constatar que os problemas de ensino, relacionados à linguagem, não se refletem apenas na manipulação de símbolos, mas em todos os aspectos que o cercam. Segundo Silveira (2014, p.70), “Na tradução de textos matemáticos, percebe-se que não basta uma mera tradução de palavras ou de símbolos da linguagem codificada para a natural, pois essa última é polissêmica e não garante a necessidade lógica da matemática”.

De certo modo, aprendemos e usamos o vocabulário da língua materna, com uma naturalidade muito espontânea, as crianças aprendem a ir buscar objetos, a sentar, sabem o que é caneta, sapato e borracha. Nesse sentido, percebem gradativamente o uso e significado de várias palavras, porém a mesma naturalidade não acontece para assimilar a gramática da língua materna.

Da mesma forma, para instruir-se quanto ao uso e significado das palavras na linguagem matemática é necessário conhecer os diferentes contextos na própria matemática e seus diversos usos conforme as regras que devem ser seguidas. Entretanto, para aprender a seguir as regras é necessário estar inserido em uma forma de vida, conforme ressalta Klüsener:

> Aprender matemática é, em grande parte, aprender e utilizar suas diferentes linguagens – aritmética, geometria, álgebra, gráfica, entre outras. Na atualidade, as linguagens matemáticas estão presentes em quase todas as áreas do conhecimento. Por isso o fato de dominá-las passa a constituir-se um saber necessário (KLÜSENER, 2001, p.177).

Com base nisso, olhemos para as atividades envolvidas no ato de ensinar, no caso da aritmética, mais especificamente, o ato de contar. Nessa atividade, os alunos não acompanham somente a fala do professor, mas também todos os seus movimentos, gestos e expressões faciais. Com isso, aprendem novas técnicas que não conheciam antes, além da técnica que conheciam antes de conferir objetos e aprendem a usar novos símbolos, antes desconhecidos.

Nesse sentido, Granger (1974, p. 152) afirma que “o simbolismo científico, como o da matemática, em certo sentido não é uma língua autônoma, pois não possui oralidade”. Em relação à matemática, explica o filósofo: “é estranha linguagem essa cuja função comunicativa é frequentemente apenas virtual e cuja presença é a de uma sombra, ou se se preferir, de uma divindade” (1974, p. 140).

Os textos matemáticos se configuram com precisão e objetividade, nesses termos e, para compreender uma expressão matemática, o aluno precisa conhecer seu uso e contexto, para se familiarizar com a linguagem, simbologia, a lógica das regras, e dessa maneira, ter sentido.

O professor precisa se preocupar com as particularidades da linguagem, explicando a escrita específica da matemática e mostrando o sentido das palavras. Apesar de em alguns momentos os termos e palavras parecerem óbvios, nem sempre são para os alunos, pois é por meio da comunicação e das explicações que os eles vão aprender.

Sobre essa problemática em relação ao aprendizado do aluno, algumas pesquisas do grupo GELIM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática da UFPA - investigaram as dificuldades dos alunos na aprendizagem da matemática e a relevância em analisarmos as vertentes da língua materna com a linguagem matemática nesse processo.

A pesquisa realizada por Melo (2013), por exemplo, averiguou as relações entre as linguagens matemáticas e natural nos contextos de função do segundo grau e de informática, na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. O pesquisador observou a relevância de atentar para as linguagens analisadas cuja simbologia e cujos termos específicos da linguagem matemática são atrelados à mera reprodução de conteúdo, assim como o uso inadequado de tecnologias nas escolas, especificamente o uso dos computadores, que por sua vez, também possui linguagem própria. E, quando não bem utilizada essa ferramenta, ao invés de proporcionar aprendizagem, termina por ter um uso obsoleto ocasionando desinteresse nos discentes.

Já pesquisa realizada por Meira (2012) teve o objetivo de analisar os procedimentos adotados por alunos no Ensino Fundamental ao interpretarem e aplicarem regras matemáticas na resolução de problemas de regra de três, dando um tratamento especial à linguagem, linguagem matemática, mediante o referencial teórico do filósofo Wittgenstein. Nesses termos identificaram que os alunos aplicam e seguem regras sem atribuírem o menor sentido, confundindo com regras aprendidas em contextos matemáticos anteriores. Além disso, apresentaram muitas dificuldades em interpretarem problemas de regra de três, sem utilizar corretamente o algoritmo da proporcionalidade. A pesquisa enfatizou que não há sentido ensinar o significado essencial das palavras, deixando de lado o uso delas.

Silva (2011) averiguou as dificuldades linguísticas enfrentadas por alunos do 5º ano no aprendizado de regras matemáticas, enfatizando as discussões sobre linguagem e constatou que os alunos têm muitas dificuldades em compreenderem as regras ensinadas pelos professores e acabam criando outras regras para resolverem as atividades ou fracassam por confundirem a regra que precisam usar. Como por exemplo, na resolução de uma multiplicação de 27 x 8, a aluna arma a conta corretamente, mas usa o algoritmo da adição ao invés da multiplicação. Dessa forma, “Se por um lado a correta compreensão do problema é indispensável, o sucesso do aluno na sua resolução também depende de saber usar a regra matemática de forma adequada” (SILVA, 2011, p.68).

Nem sempre as regras e sentidos das palavras que são óbvias aos professores, são perceptíveis aos alunos, conforme evidencia Silva (2011) em uma questão em que os alunos deviam calcular a diferença de dois números, eles responderam: “diferença? Óbvio, um custa R$ 276,00 e o outro custa R$ 175,00 / um é maior que o outro / um é par o outro é ímpar...” (p. 69). Apesar de todas as respostas estarem corretas, isso não responde a indagação da professora, pois fica nítido que o aluno não conhece o uso da palavra “diferença” no contexto da matemática, confundindo os contextos de resolução de problemas.

Ademais, Silva (2015) discute as implicações que a concepção da linguagem tem no ensino da matemática na alfabetização, se apoiando na filosofia de Wittgenstein, constatando dessa forma que a concepção referencial é dominante. Além disso, ele destaca três importantes confusões recorrentes, a saber: a) atribuir a uma regra necessariamente uma função descritiva; b) não considerar os diversos jogos de linguagem que compõem o cotidiano de sala de aula e c) o apelo para que se deixe o ensino “tradicional” por um que proporcione a “autonomia” das crianças, permitindo que elas possam construir naturalmente seu conhecimento.

As pesquisas mencionadas mostram a relevância da linguagem no contexto de sala de aula. Cabe, nesse sentido, nos determos ao estudo sobre linguagens, abrangemos aqui, linguagem como todo meio ordenado de comunicar ideias ou emoções por meio de símbolos convencionais, sonoros, gestuais, gráficos entre outros. Convém ressaltar que esta é uma atividade meramente humana, destacando que se faz uso de linguagens verbais (por meio de palavras) e não verbais (através de gestos, sons, cores, imagens, sinais). Normalmente nos comunicamos fazendo uso dos dois tipos de linguagens.

CAPÍTULO 2 – APORTES TEÓRICOS DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

2.1- Filosofia da consciência e filosofia da linguagem: a virada linguística[4]

Um dos grandes expoentes da virada linguística e, consequentemente, da filosofia da linguagem, é o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein. Suas ideias têm sido muito usadas em pesquisas na Educação Matemática, como, por exemplo, em pesquisas da Etnomatemática e pesquisas em linguagem matemática.

Assim, a filosofia da linguagem, em particular a filosofia de Wittgenstein, nos permite desbravar novos rumos para o ensino de matemática, bem como para as pesquisas nesse âmbito. A virada linguística causou alterações na maneira do pensar filosófico, pois os filósofos passaram a não buscar mais por uma "essência", uma "substância", ao invés disso tem-se uma preocupação com o significado da linguagem, pensamento e linguagem ocorrem por meio de enunciados linguísticos. (RORTY, 1992

A virada linguística leva a uma mudança de paradigma, a uma reformulação da filosofia, não mais uma procura por fundamentação da verdade (ARAÚJO, 2007) e sim em diferentes possibilidades de usos da linguagem. Dessa forma, a linguagem passa a ter um papel de destaque nos debates filosóficos, em oposição ao idealismo e psicologismo até então dominantes.

A esse respeito destaca Gracia:

> O "giro linguístico" teve efeitos e implicações que vão bem mais além do simples aumento da ênfase dada à importância da linguagem. Ele contribuiu para que fossem esboçados novos conceitos sobre a natureza do conhecimento, seja ele o do sentido comum ou o científico, para permitir que surgissem novos significados para aquilo que se costuma entender pelo termo "realidade" – tanto "social" ou "cultural" quanto "natural" ou "física" – e a desenhar novas modalidades de investigação proporcionando outro contexto teórico e outros enfoques metodológicos (GRACIA, 2005, p. 19-20).

Nesse sentido, os destaques sobre linguagem tomam outro rumo. Passam das reflexões voltadas para a "consciência", da "atividade mental" para o pensamento a partir da linguagem, da maneira como o pensamento pode ser expandido pelo uso das palavras (MARCONDES, 2001).

A linguagem admite outro sentido, pois, passa não mais a ser somente um instrumento de uso do homem, e sim uma condição para o entendimento dos objetos do pensamento. Assim, só se tem acesso ao pensamento das pessoas quando essas se

---

[4] Quando nos referimos a virada linguística neste trabalho, estamos tratando de uma virada epistemológica, a saber: a linguística e a pragmática. Em poucas palavras, a expressão designa uma mudança que ocorreu na filosofia e nas ciências humanas.

expressam. Podemos estender ao processo de aprendizagem, e dizer que só temos acesso ao que o aluno pensa, e como interpreta as atividades, quando este se expressa através da linguagem (SILVEIRA, 2015).

> Em todas estas tentativas de compreensão dos processos cognitivos e empíricos que permitiriam a construção e transmissão do conhecimento matemático, os fundamentos últimos da atividade matemática têm sido procurados em reinos ideais, empíricos ou mentais [...]. Assim, embora divirjam entre si quanto ao lócus natural dos fundamentos últimos da atividade matemática, comungam a crença de que a nossa linguagem teria uma função essencialmente comunicativa e descritiva dos significados que atribuímos às nossas experiências em geral. Metaforicamente, é como se a linguagem apenas revestisse de palavras esses significados, tendo a função exclusiva de "etiquetar" os objetos, nomeando-os (GOTTSCHALK, 2008, p. 76-77).

Como se pode ver, a filosofia da consciência se baseia em uma concepção referencialista da linguagem, servindo meramente como um apoio para algo que, de alguma maneira, já existe em algum lugar: ideal, mental ou empírico (SILVA; SILVEIRA, 2014).

Conforme explicita Hebeche (2002), nesse modelo a compreensão é tomada tal qual um processo mental privado:

> Tem-se aí a noção de que apreender o sentido do que é dito envolve algo mental ou anímico (*etwas Seelishes*), algo que ocorre ou está guardado na memória de alguém e que pode, a qualquer momento, tornar-se manifesto pela linguagem. O que ocorre na mente é distinto da sua expressão lingüística. A linguagem é como um porta-voz daquilo a que antecipadamente já se tem acesso na mente. A consciência observa o que está dentro de si e, depois, o expressa pela linguagem (HEBECHE, 2002, p. 194).

No final do século XIX, com o giro ou virada linguística, passa-se a dar uma maior ênfase ao papel de nossas expressões linguísticas e na natureza do significado linguístico. A própria concepção sobre a natureza da linguagem se modifica, e esta deixa de ser vista apenas como um suporte referencial.

2.2 - As regras matemáticas na perspectiva de Wittgenstein

No entendimento do filósofo, toda ação linguística é articulada por regras, no entanto, isso não representa que somos determinados por elas. Utilizamos palavras e proposições linguísticas nos mais diversos sentidos, dependendo do uso e contexto em que ocorrem.

Uma proposição, por exemplo, não se limita a um aglomerado de palavras, pois está circundada nas praxes que são constitutivas de significação. Nesse sentido, Wittgenstein utiliza o termo *jogos de linguagem*, para dar ênfase à importância das atividades que operam como normas constitutivas do sentido de nossos enunciados.

Em seus escritos, Wittgenstein mostrava-se interessado em entender como alguém compreende e segue regras; como uma regra (ou ordem) poderia implicar sua aplicação, pois qualquer modo de agir poderia, de alguma forma, ser interpretado de acordo com a regra (WITTGENSTEIN, 2012).

Segundo o filósofo, estamos inclinados a pensar que uma regra contém, em si mesma, todas suas possibilidades de aplicação, como se uma expressão linguística possuísse seu uso de forma intrínseca, independente da aplicação feita pelos seres humanos: "Todo signo *por si só* parece morto. O *que* lhe dá vida? No uso ele *vive* (WITTGENSTEIN, 2012, p. 129, ênfases em itálico do autor).

Seguir uma regra é outra concepção da filosofia de Wittgenstein, conforme ressalta Gottschalk:

> seguir uma regra é semelhante a obedecer a uma ordem. Somos treinados [*abrichtet*] a fazê-lo; reagimos a uma ordem de determinada maneira. Mas e se uma pessoa reage de um modo e outra, de outro à ordem e ao treinamento? Qual estará certa? Segundo ele, a maneira comum de agir das pessoas (ou, mais literalmente: 'A maneira humana comum de agir') é o quadro de referência mediante o qual interpretamos uma linguagem desconhecida. Assim, é apenas o esquema comum de modos de comportamento partilhados que pode nos dizer se alguém seguiu uma determinada regra. A maneira como reagimos é um dos aspectos que revelam se seguimos a regra corretamente. Por exemplo, ao ouvir a palavra "igual", podemos entendê-la no sentido de mesmo tamanho (se estivermos comparando fisicamente duas pessoas) ou como uma das normas da matemática. Associamos as palavras a técnicas diferentes, dependendo do contexto em que nos encontramos. (GOTTSCHALK, 2014, p. 77).

Pensamos e agimos seguindo regras, do mesmo modo que precisamos compreender o que está sendo dito, se não conhecemos uma palavra. A partir do uso, inseridos em diferentes jogos de linguagem, que passamos a compreender seu sentido, "se olharmos para as nossas práticas linguísticas, veremos que não é o empírico que irá determinar o significado de nossas palavras, mas é a própria linguagem que organiza os dados sensórios de determinadas maneiras" (GOTTSCHALK, 2013b, p.669). Assim, é no uso das regras que damos sentido às nossas ações e pensamentos.

A maneira na qual andamos, bebemos, falamos, gesticulamos fazem parte de uma forma de vida. A linguagem está atrelada a todas essas atividades, são elas que dão sentido às palavras, não se reduzem somente a um uso referencial, descrevendo significados externos à linguagem, pois, não tem somente a função de nomear/etiquetar sentidos existentes no empírico.

As regras precisam ter sentido, em um sistema de representação das cores, por exemplo, não tem significado algum dizermos que a cor preta é mais clara que a branca, ou que duas cores estão na mesma visão panorâmica ao mesmo tempo, sendo que depois que as normas foram definidas, precisam ser respeitadas para que uma proposição possa ter sentido. Conforme Wittgenstein elucida:

> Considere esta forma de expressão: “Meu livro tem tantas páginas quanto é a solução da equação "$x^3 + 2x - 3 = 0$”. Ou:” O número de meus amigos é n e “$n^2 + 2n + 2 = 0$”. Tem sentido esta frase? Não dá para reconhecer de imediato. Vê-se neste exemplo como pode acontecer que algo tenha a aparência de uma frase que entendemos, mas que de fato não tem sentido algum. (WITTGENSTEIN, 2012, p. 190).

Para descrevermos algo utilizamos regras gramaticais pré-definidas. Só podemos dizer que *uma parede é azul* ou um *muro é branco*, porque somos capazes de compreender no uso o que conhecemos por *muro, parede, branco, azul.* Para tanto, dizer *esse muro é branco* pode ter tanto sentido de uma função descritiva quanto uma função gramatical. A especificidade, a priori das regras, é necessário para compreendermos esses diversos usos das proposições que utilizamos ora como regras gramaticais, ora como descrições.

Se uma regra não nos diz de antemão como aplicá-la, como sabemos o que fazer? O filósofo austríaco nos ajuda a esclarecer:

> O que tem a ver a expressão da regra – digamos o indicador de direção – com minhas ações? Que espécie de ligação existe aí? Ora, talvez esta: “*fui treinado para reagir de uma determinada maneira a este signo e agora reajo assim*”. [...] alguém somente se orienta por um indicador de direção na medida em que haja um uso constante, um hábito” (WITTGENSTEIN, 2012, p. 92, ênfases em itálico nossa).

Assim, o critério para como a regra é significada depende da prática comum de sua aplicação, da maneira como fomos ensinados a aplicá-la. É preciso com isso sabermos o que fazer (SILVEIRA; SILVA, 2013). O suposto “abismo” que separa a regra de sua aplicação, segundo Wittgenstein, é transposto pelo treino: “Como, então, o professor interpreta a regra para o aluno? [...] Como, senão por meio de palavras e pelo domínio de técnicas?” (WITTGENSTEIN, 1998, p. 414).

De acordo com Silveira e Silva (2013):

> A prática de seguir regras está pautada na regularidade das ações: Isto é, se não houvesse um uso estabelecido das palavras entre seus usuários, não poderíamos nos comunicar. Poderíamos dizer que, se o pano de fundo do costume (prática, regularidade) de seguir uma regra fosse removido, a própria regra desapareceria (SILVEIRA; SILVA, 2013, p. 9).

Wittgenstein fornece-nos um exemplo, a nosso ver bastante esclarecedor:

> "Como acontece que a seta aponte? Não parece já trazer em si algo além de si mesma?" "Este apontar *não* é um passe de mágica que apenas a alma pode realizar. A seta aponta apenas na aplicação que o ser vivo faz dela" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 132).

Assim o filósofo austríaco nos mostra que a significação não reside em algo acontecer em nossa mente ou num passe de mágica. Se em nossas atividades diárias não houvesse aplicações para a seta (colocada no exemplo pelo filósofo), ela simplesmente não apontaria, isto é, "Se não houvesse a *convenção* de como usar um indicador de direção (uma placa de trânsito, por exemplo), se cada um de nós o interpretássemos de um modo particular, ele ainda serviria para indicar a direção?" (SILVEIRA; SILVA, 2013, p. 9).

Sobre isso, há vários questionamentos: de que maneira reconhecemos que estamos seguindo uma regra? Seguir uma regra significa dizer que estamos compreendendo? Não podemos seguir instintivamente?

Para responder a essas perguntas, com base em Wittgenstein, compreendemos que somos capazes de seguir regras a fim de resolver tal perplexidade, o autor define mais um importante conceito, o de *jogo de linguagem*. Ele aproxima os dois conceitos jogo e linguagem, pois na linguagem as regras é que determinam o que tem sentido, só podemos compreender algo se estivermos inseridos em um jogo de linguagem.

> Todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos, as quais estão ancoradas em uma práxis, em uma forma de vida. Nesse sentido, o elo semântico entre a linguagem e a realidade não é dado apenas pelas regras que governam a linguagem, mas pelos próprios jogos de linguagem, pois as regras só têm sentido contra o pano de fundo de um determinado jogo de linguagem. Por conseguinte, os jogos de linguagem têm primazia sobre as regras. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, portanto, dentro de um jogo de linguagem, que seria para Wittgenstein, a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais vem entrelaçada (GOTTSCHALK, 2014, p. 78).

Nesses termos, com o conceito jogo de linguagem, o filósofo austríaco lança luz sobre interações de nossa linguagem ao utilizar como objetos de comparação, ou seja, por meio de diferenças e semelhanças, enfatiza a possibilidade de diferentes usos de nossos conceitos em nossa forma de vida sem recorrer a itens extralinguísticos.

São os próprios jogos de linguagem que estabelecem as relações de designação básica (denominação). E são, por conseguinte, o elo entre realidade e linguagem.

Seguir uma regra é basicamente uma prática, conforme define Wittgenstein:

> A expressão "jogo de linguagem" deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida.
> Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
> Ordenar, e agir segundo as ordens-
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas-
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho)-
> Relatar um acontecimento-
> Fazer suposições sobre o acontecimento-
> Levantar uma hipótese e examiná-la-
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas-
> Inventar uma história; e ler-
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar.
> É interessante comparar a variedade de instrumentos da linguagem e seus modos de aplicação (WITTGENSTEIN, 2012, p. 27).

Ainda sobre regras, Silva (2011) observa que, uma vez que elas não contêm em si mesma suas aplicações, implica não serem óbvias ao aprendiz. Dependem, na verdade, de serem ensinadas ou aprendidas. Nessa perspectiva, Glock, comentador da filosofia de Wittgenstein, afirmar: "[se] a conexão entre uma fórmula aritmética e sua aplicação não é diretamente visível. Então como pode o aprendiz saber o que queremos dizer? Por meio de nossas explicações e instruções!" (GLOCK 1998, p. 316).

Para que as regras sejam interpretadas pelos sujeitos, precisam ter sentido, e assim terem possibilidade de seguir ou não as regras matemáticas. Segundo Silveira (2008, p. 104) "a regra segue procedimentos que apresentam sentido. *Devo proceder de tal forma, porque meu objetivo é encontrar alguma coisa*". Pois, é imprescindível que o aluno entenda o *porquê* do que está fazendo, seguir uma regra de forma inteligível, não existe pensamento ilógico, ele tem uma lógica ao resolver atividades.

No entanto, é importante que pela explicação, o aluno passe a compreender e a utilizar a lógica das regras matemáticas, pois, "Dominar técnicas é a condição lógica, para a percepção, ou compreensão, ou, ainda, para a vivência da significação" (MORENO, 2012, p. 88).

Vemos, aqui, a importância de conhecer e dominar as técnicas necessárias ao seguimento de regras para Wittgenstein. Compreender é o fundamento da explicação (WITTGENSTEIN, 1989), de seguir regras (WITTGENSTEIN, 2012) e do cálculo matemático (WITTGENSTEIN, 1976).

O filósofo diz também que as técnicas "São necessárias, para estabelecer uma prática, não só regras, mas também exemplos. Não consigo descrever como (em geral) aplicar regras, exceto *ensinando-te,* a aplicar regras (WITTGENSTEIN, 2000).

A prática de seguir regras está regulamentada em consentimento com as praxes, no uso das mesmas, segundo pontua Silveira e Silva (2013, p. 8) “Seguir regras é uma prática geral estabelecida pela concordância, pelo hábito”. A própria prática de seguir uma regra define o que está em acordo ou desacordo com ela, ou seja, temos discernimentos públicos para julgar aplicação de uma regra como correta ou incorreta.

Assim, “O domínio de técnicas é uma condição para que os aprendizes compreendam, podendo assim, seguir e inventar novas ligações internas de sentido”, (MORENO, 2012, p. 88). Nesses termos, o domínio das técnicas linguísticas é uma circunstância lógica, e não empírica.

2.3 - A compreensão em Wittgenstein

No decurso do texto falamos em compreensão, mas em que circunstância podemos dizer que compreendemos algo? Dessa forma, nos interessa discorrer a respeito da concepção de compreensão do filósofo austríaco; “compreender algo, portanto, pressupõe o domínio das regras, o que envolve um certo treino, pois, as regras são aprendidas, não são extraídas do empírico e tampouco são inatas.” (GOTTSCHALK, 2013b, p.672).

No modelo referencialista da linguagem é considerado que a consciência é algo privado na qual é representado a realidade e a linguagem, nesse sentido, seria um meio de interligar nossas representações mentais; ou seja, descreveria nossas ideias ou objetos mentais, sendo a compreensão um processo mental interno.

Na filosofia de Wittgenstein, a compreensão não ocorre por processo mental, pois compreender é possuir uma habilidade. Está fortemente relacionado com “ser capaz de”, conforme relata o filósofo:

> No sentido em que há para a compreensão processos característicos (também processos psíquicos), a compreensão não é um processo psíquico. (Diminuir e aumentar uma sensação de dor, ouvir uma melodia, ouvir uma frase: processos psíquicos). (WITTGENSTEIN, 2012, § 154, p. 88).

Baker e Hacker (2005), comentadores da filosofia de Wittgenstein, analisando as ideias do referido filósofo, dizem que, se buscássemos o “local” onde se encontra a compreensão, essa estaria acompanhada das habilidades.

Segundo Wittgenstein, a compreensão não é um processo mental: compreender é ter ou desenvolver uma capacidade. Diante disso, o filósofo sugere que:

> É evidente que a gramática da palavra “saber” goza de estreito parentesco com a gramática das palavras “poder”, “ser capaz”. Mas também com a gramática da palavra “compreender”. (Dominar uma técnica). (WITTGESNTEIN, 2012, p. 86).

Por exemplo, quem compreende o uso de uma palavra é capaz de empregá-la, de ensiná-la a alguém. (SILVA, 2011). Conforme aponta Wittgenstein, não compreender algo não implica um estado mental privado: “Quando digo: "Não conheço bem o cálculo" – não me refiro a um estado mental, mas a uma incapacidade de fazer algo” (WITTGENSTEIN, 1998, p. 173), isto é, o não entendimento significa não ter uma tal habilidade, em outras palavras, não dominar uma tal técnica.

Por vezes, ao entendermos algo, como uma equação matemática ou um tema musical, por exemplo, dizemos “agora eu sei”, “agora eu compreendo” ou ainda “agora eu posso!” e temos a impressão de que algo oculto aconteceu internamente (SLVA, 2011).

Nesse viés, Wittgenstein afirma: “Compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa *dominar uma técnica*” (WITTGENSTEIN, 2012, p. 92, ênfase em itálico nossa). Vale salientar que “técnica”, nesse contexto, se assemelha a um “saber-fazer”, ao domínio do uso de regras. Quem compreende algo é hábil a fazer determinadas atividades. Entender uma melodia, uma série numérica, uma obra de arte, um jogo etc., assim como seguir regras, está relacionado ao nosso envolvimento em complexas práticas linguísticas de nosso modo, da maneira como fomos ensinados a viver e a agir (SILVA; SILVEIRA, 2014).

Para Wittgenstein, um dos grandes problemas da filosofia teve sua origem na falta de compreensão das estruturas que conduzem nossa linguagem. Por isso ele se dedicou à linguagem por acreditar que seria uma grande ferramenta para desvendar essas incompreensões.

Nesse sentido, para Wittgenstein (2012) o conhecimento efetivo do que se tem em mente se dá pela linguagem, concomitante, o significado das palavras se dá no uso comum, na qual, ocorre no interior dos jogos de linguagem e são determinados por regras, análogo ao que expõe Gottschalk:

> O sentido de uma palavra depende da atividade em que está envolvida, do contexto em que está inserida, em suma, depende de hábitos e costumes *aprendidos* (e *ensinados*), ideia que mais tarde será formalizada através da expressão “*forma de vida*” (GOTTSCHALK, 2012, p.54).

Para Wittgenstein, a linguagem é uma prática pública e se baseia em regras e acordos que ficam disponíveis aos usuários. Nesse sentido, para compreender as regras é necessário segui-las, e no contexto da lógica, da matemática, é de fundamental importância segui-las para se apropriar dos conhecimentos, conceitos, e não dependem de pensamento a priori, ou seja, independem da experiência ou da prática (SILVEIRA, 2014). Segundo Glock (1998, p.315) “Compreender a regra é saber como aplicá-la, saber o que pode ser considerado como agir em conformidade com ela ou transgredi-la”.

Ao compreender uma proposição matemática, cabe saber aquilo que se pode fazer com ela já que regras operam em determinadas situações, ou seja, vai bem mais além de uma mera resolução, e sim à compreensão dos seus usos nos diferentes contextos, favorecendo desta forma o aprendizado. Nesse viés, para Wittgenstein a compreensão não se dá por idealização, nem descobertas, mas pelos diferentes usos e contextos, da linguagem natural e matemática.

É necessário conhecermos os acordos e desacordos advindos dos jogos de linguagem, e pelo ensino garantir a compreensão dos conteúdos. Como garantir que duas pessoas entenderão um objeto verde da mesma forma? Regras e proposições podem ser seguidas de diversas maneiras, porém, há diferentes sentidos desses desacordos, pois quem infringe as regras do trânsito está em desacordo com a lei; quem desobedece às leis de culinária, cozinha mal; quem segue regras diferentes para o xadrez, termina por jogar outro jogo. Portanto, o acordo para um determinado jogo/regra precisa ser seguido corretamente.

Os diferentes contextos de aplicação de um conceito ou palavra são *jogos de linguagem*. São diversas lógicas e técnicas de aplicação das palavras. Nesse sentido, uma palavra indica ações distintas, dependendo da situação em que for utilizada, da atividade na qual for envolvida.

Wittgenstein recusava a ideia de diversos significados, ainda que se referindo para um mesmo conceito, com características comuns a seus diferentes usos, mas são diferentes combinações de modo que faça sentido. Além disso o filósofo ressalta que “a linguagem verbal admite combinações de palavras sem sentido, a linguagem da representação, porém, não admite representações sem sentido” (WITTGENSTEIN, 2012, p. 189).

Os jogos se assemelham por semelhanças de família, formam uma família. “Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras *semelhanças familiares*, pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família” (WITTGENSTEIN, 2012, p. 52).

O conceito semelhança de família se igualam às similaridades de uma família que nos possibilita falar do conceito de determinadas coisas. Cada situação de uso do conceito revela um sentido, uma parte, um aspecto do significado. Por exemplo, os diversos usos da palavra número e suas semelhanças de família, número real, racional, irracional, complexos, número de objetos, como número de bolas, canecas, carros etc. Dessa forma, os diversos usos relacionados à palavra número possuem similaridades. Aprendemos a utilizar as palavras *jogo* e *número* em diversos contextos e nem por isso fazemos confusões, conforme salienta Wittgenstein:

> Os processos a que chamamos "jogos", tenho em mente os jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, o jogo de bola e etc. O que é comum a todos esses jogos? – Não me diga: "Tem que haver algo que lhes seja comum, do contrário não se chamariam jogos" – mas olhe se há algo que seja comum a todos – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seja comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 51).

Conforme estivermos inseridos em um contexto é que conheceremos suas regras e as proposições terão sentido. O que acontece quando usamos regras gramaticais diferentes das regras usuais? "Um quadrado que tem cinco lados, pode encontra um uso, possui um significado, quando a expressão não for empregada como proposição geométrica" (GIANNOTTI, 1995, p. 222), destro do contexto da geometria um quadrado não possui cinco lados. Nessa perspectiva, para que um conceito seja compreendido, é necessário que a regra tenha sentido, bem como mostrar o contexto em que se está sendo utilizada.

Para Wittgenstein o aprendizado se dá pelo uso, pelo sentido das palavras, não por processos cognitivos, independe de construção de conceitos, conforme destaca Gottschalk, Pagotto-Euzébio e Almeida (2014 p. 104) "a aprendizagem é um processo, mas não um processo mental, diga-se de passagem. Trata-se mais de dominar uma nova técnica, como amarrar os sapatos, ou aprender a juntar as mãos para rezar".

Ademais, para compreender as regras é necessário explicar e mostrar para que se tenha conhecimento. Segundo Moreno (2005, p.27) "A significação do conceito, supõe, assim, a exploração prévia da experiência através da sua manipulação por meio de diferentes técnicas e de outros conceitos, e do conhecimento dos resultados obtidos".

Wittgenstein esclarece que nossas atitudes como interpretar, compreender, estudar, pensar, calcular, reconhecer, ter sensações, afetos ou quaisquer outras atividades estão incluídas nas operações linguísticas. Muitas vezes nem percebemos, pois, são feitas naturalmente de diferentes maneiras, principalmente através de comportamentos, atitudes e emoções.

Normalmente, quando se descreve alguma coisa à outra pessoa, é manifestado um pensamento, um afeto, seja ele qual for como "tenho medo de você", "estou com raiva", “detesto você”. Nessas frases não é descrito nada privado ou psíquico, mas sim empregado conceitos e conjunturas linguísticas regradas os quais nos possibilita mostrar aquilo que sentimos e fazemos. Só nos expressamos porque usamos a linguagem e essa precisa ser compreendida.

Precisamos nos atentar às diferentes funções de nossa linguagem: a função normativa e função descritiva ao usarmos na sala de aula a proposição 4 + 6 = 10, não estamos descrevendo nada do mundo empírico, mas estabelecendo uma regra a ser seguida a qual Wittgenstein chama de proposição gramatical que são enunciados que passam a orientar nossas condutas e que possuem a função de regras (GOTTSCHALK, 2014).

O conjunto de proposições representa para Wittgenstein a gramática da nossa linguagem cujo domínio é requisito para descrevermos o mundo, que por sua vez, já é outra função da nossa linguagem.

2.4 - O ver-como wittgensteiniano no aprendizado da matemática

Quando observamos uma figura ambígua (figuras nas quais é possível ver duas ou mais formas diferentes, como as figuras “jovem-idosa” ou “coelho-pato”) vemos ora uma forma, ora outra. Esse é outro tema discutido por Wittgenstein em seus escritos sobre filosofia da psicologia, pois “Ao discutir sobre os conceitos de *ver* e *ver-como*, o filósofo não buscava apenas elucidar o uso dos conceitos mentais na psicologia, mas também esclarecer confusões conceituais na Matemática” (SILVA; SILVEIRA, 2014, p. 20). Ainda sobre essa temática, Wittgenstein reforça que:

> Observo um rosto e noto de repente sua semelhança com um outro. Eu *vejo* que não mudou; e no entanto o vejo diferente. Chamo esta experiência de "notar um aspecto". [...] A expressão da mudança de aspecto é a expressão de uma *nova* percepção, ao mesmo tempo com a expressão da percepção inalterada (WITTGENSTEIN, 2012, p. 177-180).

Para sua discussão, Wittgenstein usa como exemplo a figura lebre-pato de Jastrow (1901)[5]. Por meio dela é possível ver ora um pato; ora uma lebre. O filósofo discute, ainda, que parece haver algo de misterioso ou oculto, pois é curioso que seja possível *ver* a figura ora de uma forma; ora *como* outra forma. Para ele, o fato de vermos diferentes formas em uma mesma figura não se deve a processos mentais ocultos, mas ao domínio de técnicas e a aplicação de regras.

[5] JASTROW, Joseph. **Fact and fable in psychology.** London: Macmillan, 1901.

Assim, ter a habilidade de observar diferentes aspectos em uma figura ambígua se assemelha a dominar os diferentes usos que pode ter uma expressão linguística. Assim como compreender os diferentes empregos de uma palavra depende do domínio de suas regras de uso, notar os aspectos em uma figura depende do domínio de técnicas. É preciso esclarecer que o *ver-como* extrapola o âmbito do campo visual.

Como bem observa Hebeche (2002):

> O ver ou o manifestar aspectos não se limita ao campo da experiência visual. [...] A metáfora visual não nos deve enganar: os aspectos de uma palavra são o domínio de técnicas que a aproximam das funções das outras palavras na linguagem. (HEBECHE, 2002, p. 93).

Dessa forma, uma figura pode nos revelar diferentes aspectos, uma expressão linguística pode possuir diversos aspectos em seus diferentes usos, por isso dizemos que uma palavra pode ter "um rosto familiar" (WITTGENSTEIN, 2012).

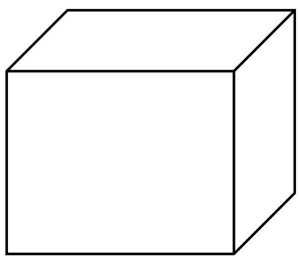
Conforme Silva e Silveira (2014), o mistério da revelação do aspecto se desfaz quando deixamos de procurar processos anímicos e olhamos para os usos das palavras e as técnicas que regem esses usos.

Acerca disso, Silva; Silveira (2014) ponderam que:

> O grau de liberdade com que se vê, na figura, ora um pato, ora uma lebre depende do “domínio de uma diversidade” (GIANNOTTI, 1995[6]), isto é, a percepção é conceitual: só sou capaz de visualizar, na figura L-P, uma lebre se já possuo (se aprendi) o conceito de lebre, e o mesmo para visualizá-la como pato. Isso implica que verei apenas o pato se possuo o conceito de pato e não o conceito de lebre e vice-versa (SILVA; SILVEIRA, 2014, p. 27).

Para exemplificar o *ver-como*, podemos imaginar a seguinte figura, comumente nos livros didáticos como a imagem de um cubo.

Figura 01: Ilustração de uma caixa



Fonte: Wittgenstein (2012, p. 254)

[6] GIANNOTTI, José Arthur. **Apresentação do mundo:** considerações sobre o pensamento de Ludwig Wittgenstein. São Paulo: Companhia das letras, 1995.

Essa ilustração pode ter sido apresentada cada vez representando algo diferente: uma caixa aberta, um cubo de vidro, uma armação de arame. Além disso, ela pode ser interpretada de várias maneiras, vemos como a interpretamos (WITTGENSTEIN, 2012). Portanto, ver é interpretar.

Nesse sentido, compreender depende de como a palavra ver é usada, tanto para a percepção de uma coisa, quanto para a visão do aspecto[7] (GIANNOTTI, 1995). "Suposição material pela qual se pode falar das regras incorpora, como seu meio de apresentação, uma técnica de ver objetos" (GIANNOTI, 1995, p.124).

O *ver-como* tem um certo grau de proximidade com o *vivenciar a significação de uma palavra*[8]. Para se obter a significação é necessário ter um adequado grau de liberdade com seu uso. E isso ocorre quando se passa a ter uma determinada maleabilidade como se fosse um artefato que se pode encaixar nesse ou naquele contexto com facilidade e familiaridade.

Nesse viés, Gianotti (1995) saliente que:

> O grau de liberdade com que se vê, é parecido com aquele que permite entender "segura" ora como verbo, ora como adjetivo. Isto, porém, se já tivermos aprendido a usar esta palavra com certa flexibilidade, como se fosse uma peça que pudesse encaixar-se neste ou naquele jogo de linguagem. (GIANOTTI, 1995, p. 136).

Um bom exemplo disso é quando vamos ensinar crianças a desenvolver as operações fundamentais na soma. Nessas operações, usa-se expressões do tipo "junte", "pertencer", "diferente". Essas são palavras que, porventura, a criança já pode ter ouvido no contexto da linguagem natural e pode até procurar uma familiaridade entre as palavras e o que representam, no entanto, é básico sempre explicar o uso das palavras e o sentido no contexto matemático.

Diferentemente, pode-se perceber em outros contextos de ensino, quando usamos palavras do tipo "vértices", "abscissas", "arestas", dentre outras, os alunos não têm ainda conceitos formados, vivência de usos. Para esses contextos, é imprescindível uma explicação, porque o que por vezes parece óbvio, para os alunos pode não ser uma vez que "O substrato dessa vivência é o domínio de uma técnica" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 272).

---

[7] Semelhança entre objetos, fisionomias (Wittgenstein, 2012).

[8] Não convém usar vivência no conceito psicológico, trata se de um conceito diferente, embora aparentado. (GIANNOTTI, 1995, p.136).

Destarte, para Wittgenstein (2012, p.56), “de acordo com a experiência, quem *vê* a folha de um determinado modo, emprega-a deste e daquele modo ou de acordo com tais e tais regras. Há naturalmente, um *ver* assim e um ver de outro modo”, não por observações empíricas e sim gramaticais. É com a explicação do uso correto das palavras que se define a maneira como se deve ver, que se modifica o modo de ver, ou seja, a compreensão é um estado do qual emerge o correto uso das palavras e do modo de ver as regras, pois, “A constatação da troca de aspecto no ato de ver não é, ela própria um ver no qual poderíamos reconhecer um processo, o que diferencia o *ver-como* do ver habitual é a *revelação de um aspecto* (GEBAUER, 2013, p.179).

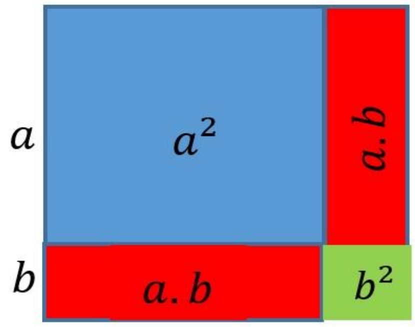
Há várias formas de visão de aspecto, conforme Wittgenstein, mas para cada uma delas se exige técnicas diferentes de se reportar ao objeto já que “Se um pensamento ecoa no *ver-como*, não é tão-só porque refletimos sobre o que já manifestamos, mas, sobretudo, porque a visão do aspecto requer uma técnica de ver este e aquele objeto” (GIANNOTI, 1995, p.127).

Se alguém fosse incapaz de mudar o aspecto, essa ausência de repercussão de algum modo reflete nas ações, nos modos de se ver, devido à falta de familiaridade. “As consequências da falta de vivência da mudança de aspecto são discutidas por Wittgenstein no exemplo de um defeito peculiar, que ele inventa com esse intuito: *a cegueira para o aspecto* (GEBAUER, 2013, p.183).

Essas reflexões trazem importantes implicações para o ensino da matemática, na medida em que mostram as interconexões entre as diferentes técnicas matemáticas, como, por exemplo, entre a multiplicação e a potenciação (GOTTSCHALK, 2006), o que possibilita, no estudo de equações exponenciais, por exemplo, *ver* o 8 *como* 2^3(SILVA; SILVEIRA, 2014).

Para dar um exemplo na resolução de atividades de expressões algébricas, podemos citar a atividade de ver a figura abaixo como a expressão do trinômio quadrado perfeito, isto é, sua representação geométrica:

Figura 02: Representação geométrica do trinômio quadrado perfeito



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Fonte: Adaptado de Souza e Batavo (2012, p.110)

Outro exemplo é o caso do "produto da soma pela diferença": em algumas atividades de operações com polinômios, por exemplo, o aluno precisa *ver* $(a + b) \cdot (a - b)$ *como* $a^2 - b^2$. Nesses exemplos, o aprendiz precisa notar as conexões entre diferentes conceitos matemáticos. Ver uma expressão como outra, não é óbvio, ele passa a enxergar dessa forma pelo desenvolvimento de uma técnica.

3.5 – A tradução de textos matemáticos segundo a filosofia da linguagem de Wittgenstein.

Entendemos que muitos alunos têm dificuldades com a matemática, por isso normalmente, muitos dos contratempos referentes à aprendizagem, são provenientes dos mal entendidos relacionados à linguagem matemática. Desse modo, refletimos de que maneira podemos oferecer mais clareza aos textos matemáticos? No momento em que os significados dos escritos ficam mais evidentes, os alunos concebem as teorias de forma mais esclarecidas, pois, torna-se mais acessível entender os conceitos e resolver os exercícios.

. Verificamos que traduzir textos matemáticos é torná-los mais evidentes, igualmente compreensíveis de modo que a linguagem matemática não deve ser vista somente como um conjunto de símbolos, mas sim, levar em consideração todos os pressupostos que envolvem a linguagem como a compreensão das proposições matemáticas, a escrita e interpretação dos seus enunciados e a impregnação com a linguagem natural.

No momento em que o significado fica mais evidente é possível seguir corretamente as regras necessárias ao contexto em questão. "A interpretação de textos matemáticos em linguagem matemática e linguagem natural requer o conhecimento do vocabulário matemático que está ligado ao conhecimento de conceitos, bem como requer a prática de seguir regras matemáticas" (SILVEIRA, 2014, p. 48).

Dessa forma, a tradução desenvolve um processo anterior ao aplicar a um novo contexto linguístico, incluindo o caráter de compreender/interpretar/traduzir, isto é, explana a tradução como propósito dos conceitos organizados. Nesse sentido, destaca Oliveira:

> Só o tradutor que traz para a discussão o assunto proposto pelo texto poderá recriá-lo verdadeiramente, isto é, aquele que encontra uma linguagem que não é só a sua, mas também a linguagem correspondente ao original. Portanto, traduzir um texto e interpretar um texto são, no fundo, as mesmas atividades. (OLIVEIRA, 2013, p. 249).

Para tanto, traduzir/interpretar as regras matemáticas são atividades que necessitam que se leve em consideração o contexto, para que, mesmo que a regra se molde automaticamente a cada circunstância, o aluno possa acompanhar, considerando que mudou o contexto mudou a regra. Dessa forma, muitos alunos mostram problemas em interpretar, pois não compreendem que é necessário conhecer tais contextos ou sistemas linguísticos para poder se adaptar à gramática e, então, efetivar o que lhe é solicitado

Assim, traduzir é interpretar e se assemelha por sua vez com seguir uma ordem; "Dizemos a ordem ordena isso - "e o fazemos; mas também: "A ordem ordena isto: eu devo...". Nós a traduzimos ora para uma proposição, ora para uma demonstração, ora para uma ação" (WITTGENSTEIN, 2012, p.179).

Para agirmos conforme ordenam as regras é necessário a compreensão do que precisa ser feito para, então, traduzir. Na tradução de um texto a outro é necessário analisar o significado do que é compreender. Wittgenstein (1989) observa, sobre o uso que fazemos do conceito de compreender, dizendo que é algo similar ao domínio de uma técnica, uma espécie de mecanismo de código.

Ainda sobre isso, o filósofo explica que:

> Uma frase é-me dada em código, com a respectiva chave. Claro que, de uma certa forma, tudo o que é necessário para a compreensão da frase me foi dado. E, no entanto, deveria responder à pergunta "Compreendes esta frase?": Não, ainda não; primeiro preciso decifrá-la. E só quando, por exemplo, a tivesse traduzido para o alemão, poderia dizer "Agora compreendo-a" (WITTGENSTEIN, 1989, p. 31).

No processo de tradução, bem como no ato de ver, exige-se o domínio de técnicas, por exemplo, para contemplar uma obra de arte é imprescindível o domínio das técnicas desenvolvidas pelos artistas. Assim, como para distinguirmos quadrado, retângulo, losango, diferentes tipos de triângulo, é necessário conhecer suas especificidades e saber identificar cada uma delas. Uma regra tem sentido quando usamos e no uso atribuímos significado, conforme ressalta Wittgenstein:

> Digo uma frase: "O tempo está bonito"; mas as palavras de fato são signos arbitrários – em seu lugar coloquemos esses: "a b c d". Mas agora, se os leio, não posso sem mais vincular-lhes o sentido acima –Eu diria que não estou habituado a dizer a associar a palavra "o" imediatamente com "a", e sim que estou habituado a usar "a" no lugar de "o" – portanto, no significado de "o". (Eu não domino esta linguagem).
>
> (Não estou habituado a medir temperaturas em graus Fahrenheit. Por isso, tal indicação de temperatura não me "diz" nada) (WITTGENSTEIN, 2012, p. 188).

Desse modo, a tradução se aproxima da atividade de interpretar; a ação de resolver exercícios se assemelha com traduzir de uma língua à outra, e, para alguns estudantes, a matemática é realmente vista como uma língua estrangeira, pois, não entendem determinadas regras de tradução e terminam por não compreender o que está escrito, da mesma maneira que não conseguem ler um texto em outra língua.

Acerca dessa visão, Wittgenstein reforça que:

> Traduzir de uma língua para outra é um exercício matemático, e a tradução de um poema lírico, por exemplo, para uma língua estrangeira, é análoga a um *problema* matemático. Porque se pode formular o problema "como se deve traduzir (isto é, substituir) esta piada (por exemplo) para uma piada na outra língua?" e este problema pode ser resolvido; mas não houve um método sistemático de o resolver (WITTGENSTEIN, 1989, p.148).

Dificuldades de traduzir os problemas matemáticos, podem estar relacionadas com o fato de muitas expressões do vocabulário matemático, como: o quadrado ABCD; a pertence ao conjunto B; dado um triângulo retângulo com catetos de medidas 20 cm e 15 cm etc. Todos esses são exemplos de vocabulário que nós professores por conhecermos estamos habituados ao uso, porém, para os alunos não lhes é familiar, e tornam-se para eles empecilhos à tradução, pois nesse sentido, e assim, "O processo a que chamamos de entendimento de uma sentença ou de uma descrição é, as vezes, um processo de tradução de um simbolismo para outro" (WITTGENSTEIN, 2003, p. 30).

Diversas vezes o aluno tanto não está familiarizado com termos matemáticos como não compreende o sentido das palavras por serem diferentes do sentido utilizado em linguagem natural e terminam por não traduzir corretamente as proposições matemáticas, como bem menciona o filósofo "A tradução para a linguagem das palavras lança luz sobre o cálculo com os novos signos porque já dominamos o cálculo com os signos da linguagem das palavras" (WITTGENSTEIN, 2003, p.322).

No ensino da matemática, os professores objetivam que os textos matemáticos não tenham ambiguidades, uma vez que, são textos objetivos e a subjetividade do professor não deve intervir no conteúdo, pois interpretar os escritos matemáticos equivale a traduzir os símbolos para a linguagem natural, consequentemente, dá sentido às palavras imersas em regras gramaticais e regras matemáticas. Assim, os escritos matemáticos consistem de abreviaturas pela qual se busca uma objetividade capaz de tornar compreensível uma sentença.

Sobre compreensão de linguagem e matemática, Silveira (2014) reforça que:

> É por meio da linguagem do aluno que podemos encontrar a origem de suas confusões e erros, como também, é por meio da linguagem que podemos lhe ensinar a traduzir corretamente um texto matemático para que o texto lhe forneça sentido. Os sentidos da linguagem cotidiana necessariamente não convergem com os sentidos na matemática (SILVEIRA, 2014, p.70).

A leitura de textos matemáticos exige uma leitura interpretativa, seja na explicação de algoritmo, seja na resolução de atividades e vai além de saber ler o que se está escrito, pois o aluno precisa de um aporte linguístico e de um referencial de linguagem matemática para decifrar os códigos matemáticos.

Nesse sentido, não se deve tentar clarificar os textos matemáticos tornando os mais simples, artifício este que pode até ser usado como ponto de partida, mas vai chegar um momento que não será suficiente, pois, o aluno não conhecendo as regras, não vai dominar a linguagem própria da matemática, necessária para se ter uma leitura consistente dos escritos em linguagem matemática.

CAPÍTULO 3 – O ENSINO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

3.1. O pensamento algébrico e a Filosofia da Linguagem de Wittgenstein

Na literatura em educação matemática não há pesquisas que tratem do ensino das expressões algébricas e os aportes da filosofia da linguagem de Wittgenstein. Várias pesquisas, referentes às expressões algébricas na educação básica, defendem a ideia de que é necessário desenvolver o pensamento algébrico nos alunos para terem sucesso na aprendizagem. Nessas pesquisas Lage (2006), Carvalho (2010) e Oliveira (2012) afirmam que o pensamento algébrico se desenvolve a partir de expressões numéricas e o não entendimento dessa relação se torna um obstáculo à aprendizagem e a generalização, pois são características necessárias ao desenvolvimento da álgebra.

Para Wittgenstein o pensamento é linguagem. Para tanto, para compreender as proposições matemáticas, inclusive as referentes às expressões algébricas, é fundamental compreender as nuances da própria linguagem matemática, tendo em vista que essa possui um campo próprio, autônomo e independente.

Outros pesquisadores como Oliveira (2012), Onuchic e Allevato (2004), Poffo (2011) e Santos (2001) concordam que o pensamento algébrico se desenvolve a partir da relação com a aritmética. Para Wittgenstein (2012) entre o contexto da aritmética e da álgebra há semelhanças de família, sendo necessário serem esclarecidas as regras de cada um. E as semelhanças dizem respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas usando símbolos) e a compreensão dos instrumentos simbólicos, que, por sua vez, resulta em representar o problema matematicamente, interpretar e avaliar os resultados.

Orton e Orton (1999) destacam que os padrões possibilitam introduzir a álgebra, e dessa forma, desenvolver o pensamento algébrico. Nesse sentido, para Arcavi (2006) só é possível desenvolver o pensamento algébrico se o símbolo tiver sentido. Para tanto é necessário que se tenha a capacidade de criar atividades práticas em sala de aula, na qual o propósito seja dar significado aos símbolos matemáticos.

Concordamos que os símbolos precisam ter sentido, e esse se dá no uso das regras, não para desenvolver o pensamento algébrico, pois, pensamento é linguagem, e sim por fazer parte do contexto da álgebra e nesse, os símbolos tratam de referentes ainda mais abstratos por tratar de números em conceitos como variáveis e incógnitas as quais apresentam uma sintaxe peculiar, isto é, uma maneira de manipular os símbolos que precisam seguir determinadas regras, o que leva seu usuário a ter que dominar determinadas técnicas de uma outra linguagem.

Nesse sentido, a linguagem é criação humana com a função de transmitir ideias e concepções que permeiam a mente humana. É utilizada para favorecer os pensamentos e leis que dão origem e sentido às formas de vida. Além disso, é proferida das mais variadas formas e permite a interação uns com os outros. Não mostra somente a maneira como vemos o mundo, mas ela pretende manifestar muito além do que o real e deixar provir o que é abstrato, internalizado nas diversas variações de nossa mente (WITTGENSTEIN, 2012).

O pensamento é um processo mental, acontece na mente e não temos acesso ao pensamento do outro, ao menos que se expressem. E isso ocorre através da linguagem. "Quando penso dentro da língua, não me pairam no espirito *significados* ao lado de expressões linguísticas; mas a própria língua é o veículo do pensamento" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 146).

A linguagem não tem como única função, nem mesmo é primordial, expressar transmitir pensamentos embora faça parte da deste processo. Além disso, ela exprimi sentimentos, ordem, dentre outros. Para Wittgenstein (2012) pensar é operar com símbolos, desta maneira, não consiste em um ato de espírito e sim em um atrelamento com o seguir regras, conforme o jogo de linguagem em que está imerso.

Para Giannotti:

> O estudo da gramática de "pensar" opera de imediato num campo aparentado com aquele do "ver como", pois, de um lado se preocupa com a intencionalidade que permite dizer o que é dito, de outro, atenta para a própria expressividade do pensar regida pelos critérios de jogos de linguagem aparentados, os quais em geral são chamados de atos de pensar (GIANNOTII, 1995, p. 211).

Dessa forma não é aceitável refletir sobre o pensar como um fenômeno, ou simplesmente um método, no final das contas pensar sobre *o pensar* também é um pensamento, de tal maneira que, na reflexão se envolve o conceito e, dessa forma, seu caráter articulado se entrelaça com o de jogo de linguagem, a fim de se revelar por semelhanças de família.

Nesse viés, o pensar, bem como a expressividade pela linguagem é algo inerente ao ser humano. São máximas que precisamos compreender, conforme destaca Wittgenstein "Se pensamos no pensamento como algo especificamente humano e orgânico, inclinamo-nos a perguntar *poderia haver um aparelho protético para pensar, um substituto inorgânico para o pensamento?"* (WITTGENSTEIN, 2003 p. 77). Dessa forma, não há sentido falarmos em substitutos para o pensar, como por exemplo, as máquinas, substituem as funções de nosso corpo, mas não as sensações. Essas são particularidades nossas.

Nesse sentido, percebemos o quanto o pensamento é linguagem já que só pensamos porque temos meios para desenvolver e expressar o pensamento. Cabe a nós procurar formas de melhorar, enfatizar as nuances da linguagem como um todo em suas diversas funções e as devidas implicações e obstáculos ao aprendizado. Para tanto, o pensamento faz parte de nossa linguagem, bem como faz parte da álgebra, e seu bom entendimento perpassa pelo uso correto das regras em seus diversos contextos e precisa ser ensinado, não descoberto.

3.2 – O Ensino da álgebra na educação básica

Apesar dos estudantes terem acesso aos conteúdos escolares, ainda há um consenso implícito de que aprender matemática é para poucos. De um modo geral se defende a ideia de que nem todas as pessoas têm aptidão para compreender tal disciplina como se aqueles que entendem tivessem algum conhecimento lógico inato, uma espécie de momentos de inspiração mostrando como devem prosseguir na resolução das questões. Isso nos parece ser uma visão puramente cognitivista do conhecimento matemático.

O conhecimento matemático contém singularidades próprias de uma linguagem formal, sistemática, independente e, essas particularidades se tornam ainda mais evidentes na álgebra por apresentarem especificidades ainda maiores. A álgebra possui uma linguagem bastante abstrata, utiliza símbolos para se referir aos conceitos matemáticos como os números. Esses atuam em diferentes funções, como incógnitas e variáveis. Conceitos inerentes à álgebra e que causam desconfortos aos estudantes, pois, a álgebra representa o mundo falado a partir de outros símbolos.

Algumas pesquisas (COSTA, 2004; PEREIRA, 2005; RIMURA,2005; ROMERO 2007; POFFO, 2010; OLIVEIRA, 2012) que tratam do ensino da álgebra - estamos nos referindo aqui ao ensino da álgebra escolar do ensino fundamental - são baseadas em uma concepção essencialista, cognitivista, como se o aluno tivesse que atingir uma suposta essência dos objetos matemáticos existentes por trás dos conceitos, como se existisse uma referência a atingir, fora da linguagem.

Ao nosso ver, as considerações de Wittgenstein sobre a natureza das proposições matemáticas e a importância de atentar aos diferentes usos, são bastante pertinentes para desfazer muitos equívocos relacionados à aprendizagem, pois, nas práticas pedagógicas correntes prevalece a conduta de procurar significados que se situam fora da linguagem matemática.

Gottschalk esclarece a respeito:

> Todas essas perspectivas também se entrelaçam, uma vez que em alguns textos construtivistas são apresentados pressupostos teóricos que enfatizam a construção mental dos conceitos matemáticos e sua negociação ao longo das interações sociais [...] Essa confusão entre pressupostos teóricos e a consecução de práticas aparentemente a eles ligadas, pode ser esclarecida ao se explicitar os pressupostos embutidos nessas práticas, os quais se encontram em clara contradição com os primeiros, no entanto parece não incomodar os educadores matemáticos em geral. (GOTTSCHALK, 2004, p. 308).

No ensino da álgebra no nível fundamental é recorrente vermos as mesmas práticas de ensino que na maior parte nos evidencia um ensino baseado no viés da cognição, onde o aluno precisa construir seu conhecimento e ter autonomia, enquanto o professor atua como mediador do processo. Quando esse prenuncia as regras, é tido como um destruidor dos objetos matemáticos por vezes, é comum observarmos a contraposição da *construção do conhecimento* por parte dos alunos com o próprio *formalismo da matemática*, como se fosse possível uma matemática não formal. (GOTTSCHALK, 2008).

A despeito de não negarmos que fatores cognitivos estejam envolvidos no procedimento de obtenção do conhecimento matemático, pretendemos mostrar que há abordagens alternativas que podem igualmente trazer luz sobre problemas referentes à aprendizagem como as contribuições da filosofia da linguagem de Wittgenstein é uma delas.

Não há literatura disponível que trate do ensino de expressões algébricas pautadas na filosofia da linguagem de Wittgenstein, nesse sentido, vimos que há necessidade de mostrar o que tem em relação ao ensino e relacionar com o viés dos aportes teóricos do filósofo austríaco, na intenção de elucidar tais pontos considerados importantes.

Dessa forma, uma mesma assertiva matemática pode ter um uso tanto descritivo (a função de descrever uma situação) quanto normativa, depende do contexto que está sendo aplicada, como por exemplo, a proposição $2 + 3 = 5$ pode descrever uma situação relacionada ao empírico, mas não significa que existe na matemática. Por esse motivo, esta é uma situação que precisa ficar bem esclarecida e isso elucida muitos pontos de conflitos quando tratamos dos objetos matemáticos.

Dessa forma, é importante entender o sentido atribuído às proposições, sejam elas em um contexto empírico ou normativo, entendendo a gramática concedida. Em relação as regras da linguagem, “Wittgenstein não utiliza o termo gramática em seu sentido usual, mas para designar as regras constitutivas da linguagem e também a sua organização, ou seja, sua gramática profunda". (GOTTSCHALK, 2004, p. 314). Por sua vez, essas regras gramaticais são parte das designações de uma palavra, explicitam o que tem e o que não tem sentido ser dito.

Exploramos as técnicas linguísticas que se relacionam com conteúdos extralinguísticos e dão sentidos às nossas experiências. Se nossa linguagem não tivesse gramática, não conseguiríamos expressar os fatos da mesma maneira na qual utilizamos. Por exemplo, só tem sentido dizermos que um objeto é de uma determinada cor, depois de conhecermos a gramática das cores. A partir daí, podemos utiliza-las para fazer descrições. "Em termos Wittgensteinianos, uma mesma proposição pode ter um uso gramatical ou empírico, dependendo da situação em que é aplicada" (GOTTSCHALK, 2004, p. 315).

Esses esclarecimentos são fundamentais para o entendimento do funcionamento de nossa linguagem e primordial para o ensino. É preciso ter o entendimento das proposições para então seguir as regras com sentido no que se está fazendo, ou seja, o objetivo esperado pelas regras gramaticais. Ao usarmos o semáforo nas leis do trânsito, as cores utilizadas são normativas, pois paramos quando o sinal está na cor vermelha; seguimos na cor verde, da mesma forma que poderíamos parar no lilás e seguir no branco, se tivéssemos aprendidos as regras dessa maneira. No entanto, fomos ensinados conforme foi determinado nas leis atuais. Para nós, só tem sentido desta forma.

Nesse sentido, destaca Wittgenstein:

> Se digo "Traga-me açúcar!" e "Traga –me leite!" têm sentido, mas não a combinação de "Leite me açúcar!", isto, não quer dizer que pronunciar esta combinação de palavras não tem nenhum efeito. E se seu efeito for que o outro fixe os olhos em mim e escancare a boca, nem por isso vou chamá-la de ordem para fixar os olhos em mim etc, mesmo que estivesse desejando produzir este efeito (WITTGENSTEIN, 2012, p. 187).

Na filosofia de Wittgenstein para interpretar e compreender as proposições nos textos matemáticos é fundamental perceber que as palavras são empregadas de diferentes maneiras, ficando relacionadas umas com as outras, de forma que se assemelham com as características contidas entre os membros de uma família, ou seja, os diferentes usos têm semelhanças e precisam ser devidamente esclarecidas.

A respeito das semelhanças no uso da linguagem, destaca Wittgenstein:

> Pense nas ferramentas em uma caixa apropriada: lá estão um martelo, uma tenaz, uma serra, uma chave de fenda, um metro, um vidro de cola, cola, pregos e parafusos. Assim como são diferentes as funções desses objetos, assim são

> diferentes as funções das palavras. (E há semelhanças aqui e ali) (WITTGENSTEIN, 2012, p. 20).

Apesar de parecer uma certa indefinição sobre o significado, pois, uma só palavra parece ter diferentes interpretações, porém o significado versa sobre um conjunto de usos, a situação mostra um aspecto desse conjunto. Dessa forma, formamos o significado sobre uma palavra nos mais diferentes usos que efetuamos, levando em consideração as semelhanças existente nesses usos, não tendo uma essência comum a eles.

Ainda sobre semelhança Wittgenstein destaca:

> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras ‘semelhanças familiares’; pois assim se envolvem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc. – E eu direi: os ‘jogos’ formam uma família.
> Do mesmo modo, formam uma família, por exemplo, as espécies de números. Por que chamamos algo de ‘número’? Ora, talvez porque tenha um parentesco – direto – com muitas coisas que até agora foram chamadas de número; e por isso, pode-se dizer, essa coisa adquire um parentesco indireto com outras que chamamos também assim. E estendemos nosso conceito de número do mesmo modo que para tecer um fio torcemos fibra por fibra (WITTGENSTEIN, 2012, p. 52).

Para que as proposições tenham sentido precisamos estar habituados a elas, ou pelo menos que sejam explicados os diferentes usos, empregos das palavras, pois, não há sentido em adivinhá-los ou descobri-los. É através desses usos que aprendemos os significados que estão imersos em diferentes jogos de linguagem, adquiridas por diferentes formas de vida. Assim todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos as quais são apoiadas em uma forma de vida.

Nesse sentido, Gottschalk afirma:

> Com conceito de “jogo de linguagem” Wittgenstein lança luz sobre relações de nossa linguagem, ao utilizar jogos como objetos de comparação, ou seja, através de suas semelhanças e diferenças, chama a atenção para os diferentes usos de nossos conceitos em nossas formas de vida sem recorrer a entidades extra-linguisticas (GOTTSCHALK, 2004, p.319).

Dentro da filosofia de Wittgenstein aprender o sentido e compreender os significados das palavras equivale ao seguimento de regras, contidas no interior dos jogos de linguagens, a partir daí que vamos entender o sentido de trinômio quadrado perfeito, incógnita, variável e etc. Dessa forma, uma consequência para a educação é que não há coerência ensinar o significado das palavras como se possuíssem uma essência.

Independente de seus usos, pois, uma palavra só manifesta um significado quando se opera com ela, respeitando uma regra. Principalmente na matemática que possui regras peculiares.

Nesse sentido, Wittgenstein destaca:

> A proposição matemática tem a dignidade de uma regra. Isto é verdadeiro a respeito de que matemática é lógica: ela se movimenta nas regras da nossa linguagem. E isso lhe dá a sua firmeza particular, a sua posição peculiar e invulnerável. Matemática é assentada sob padrões de medida (WITTGENSTEIN, 1987, p. 74).

Todos esses aportes teóricos, baseados na filosofia de Wittgenstein, são necessários para depreender a natureza do conhecimento matemático que, por sua vez, independe das semelhanças com situações baseadas no empírico. Precisamos compreender as semelhanças para diferenciar os objetos matemáticos no contexto de determinado conteúdo que constitui um jogo de linguagem, pois alguns jogos possuem semelhanças nas suas regras.

Compreender e ensinar a gramática da matemática implica que significa seguir corretamente suas regras. E isso não é simples, pois o aluno precisa conhecer e adentrar determinados contextos ou sistemas linguísticos para poder se habituar à gramática e, então, concretizar o que lhe for demandado. É a gramática que definem o que tem e o que não tem sentido e cabe à filosofia clarificar a gramática dos enunciados que causam confusões.

Na maior parte da literatura no ensino da álgebra escolar, as soluções para clarear a compreensão dos conteúdos, dos textos em si, são comumente sistematizados em argumentos do construtivismo e, por vezes, apresentam algumas limitações. Dessa forma, destacamos a necessidade de atentar aos aspectos linguísticos envolvidos, levando sem consideração que sem a linguagem nem é possível ter aprendizado, pois "Não: sem a linguagem não poderíamos nos fazer entender – mas sim, sem a linguagem não podemos influenciar outras pessoas desta e daquela maneira" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 185).

Em algumas pesquisas da linha construtivista, o professor atua como mediador no processo de aprendizagem favorecendo a construção espontânea do conhecimento por parte do aluno, através de estímulos que favorecem a transformação do conhecimento já existente. Fato defendido no próprio documento oficial que rege o ensino no País.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a álgebra é um conteúdo que amplia a habilidade de abstração e generalização além de uma valiosa ferramenta para resolver problemas, não de forma mecânica, mas sim possibilitando ao estudante pensar e construir o pensamento algébrico (BRASIL, 1998).

O referido documento influencia diretamente as pesquisas, a construção dos livros didáticos e, por sua vez, muitas atitudes dos professores. Uma quantidade considerável das pesquisas (NETO, 1998; SANTOS, 2001; MOTTIN, 2004; BANADIMAN, 2007 POFFO, 2010; OLIVEIRA, 2012; BORGATO, 2013; SILVA, 2016) destacam dificuldades dos alunos quanto ao conceito de variável e incógnita. Isso se dá muitas vezes por ser ensinado de forma mecânica, tornando dessa maneira sem significado para o aluno. Entretanto, segundo os aportes de Wittgenstein, é necessário o aluno conhecer os diversos contextos e as regras inerentes a eles para que possa ter sentido.

Usiskin (1995) sistematizou os diferentes usos das variáveis na álgebra escolar, conforme a tabela abaixo.

Concepções da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: USISKIN, 1995, p. 20

Os diferentes contextos em que são encontradas as letras precisam ser bem esclarecidos, pois geram muita confusão nos alunos. Schoenfeld & Arcavi (1988) destacam que os múltiplos usos do termo variável dificultam a compreensão dos alunos. Para Wittgenstein (2012), é necessário que os diferentes usos das variáveis sejam esclarecidas aos alunos para que possam distinguir os diferentes contextos (função, equação, representação de um número desconhecido) em que são utilizados e consequentemente seguir corretamente as regras referentes a esses diferentes usos.

Nesse viés, convém refletir sobre a álgebra enquanto aritmética generalizada. Para Asimov (1989, p. 09), “álgebra é simplesmente uma forma de aritmética”. Há pesquisas

(DIAS, 2004; PONTES, 2007, GRECCO, 2008; SPINELLI, 2011; BRUM, 2013) que compartilham dessa ideia, no entanto, para Wittgenstein (2003) o que há é uma semelhança de família; uma similaridade até certo ponto, mas tratam de jogos de linguagem diferentes.

Sobre a relação entre aritmética e álgebra Wittgenstein destaca:

> Uma equação algébrica como uma equação entre números reais é, com certeza, uma equação aritmética, já que alguma coisa aritmética está atrás dela. Mas algo está atrás da equação algébrica de uma maneira diferente da que está atrás de 1 + 1 = 2" (WITTGENSTEIN, 2003, p. 167).

Ademais, como podemos depreender que o aluno ao aprender que 2 + 2 = 4, entenderá que x + x = 2x, pois isso não é óbvio aos estudantes já que as regras da álgebra não são as mesmas das aritméticas, apesar de em alguns casos, terem uma certa familiaridade entre si. Existem similaridades nas regras como em $3^2 = 3.3$, com $x^2 = x. x$, no entanto, o mesmo não acontece com as regras, 4 + 4 = 8 com x + x = 2x. A forma de interpretá-las não são as mesmas e isso precisa ser explicado aos alunos.

Nesse sentido, fica evidente que os passos a serem seguidos, as regras, não são óbvias aos estudantes. É perceptível no contexto das expressões algébricas, em produtos notáveis, $(x+2)^2$, quando se observa que o discente pode estar familiarizado com o contexto da aritmética, por exemplo, $4^2 = 4 . 4 = 16$, mas no contexto dos produtos notáveis é necessária a técnica da distributividade para desenvolver a potência em questão, como $(x+2)^2$ = (x +2). (x +2). Para os alunos a regra não está explícita. Para seguir corretamente é necessário dominar as técnicas envolvidas.

Algumas técnicas são previamente necessárias para seguirmos as regras nos jogos de linguagem da matemática, pois não dá para ir simplificando os conceitos, tornando as regras muito simples. Podemos até partir de alguns pressupostos como a contextualização, recorrermos à conteúdos anteriores por comparação, mas não será suficiente.

Nas expressões algébricas, por exemplo, na situação de multiplicação e divisão de polinômios, nem sempre é necessário apelar à contextualização se os alunos já conhecem o desenvolvimento de determinadas operações com letras, como por exemplo, soma de expoentes com bases iguais e soma de termos semelhantes, já têm possibilidade de vislumbrar as demais regras que necessitam serem seguidas, fazendo sentido o manuseio das letras.

Só compreendemos se uma proposição matemática tem sentido se conhecermos as técnicas necessárias ao domínio das regras, e então, julgar os passos a serem tomados, conforme destaca Wittgenstein:

> Eu poderia reunir equações numéricas e equações que usam variáveis da seguinte maneira: Transformar o lado da esquerda de acordo com certas regras resulta no lado da direita. Mas, para que seja assim, os dois lados da equação têm de, por assim dizer, ser comensuráveis. As classificações feitas por filósofos e psicólogos são iguais às de quem tentasse classificar as nuvens de acordo com suas formas. O que uma proposição matemática diz é sempre o que sua prova prova. Isto é, nunca diz mais do que o que sua prova prova. Se eu tivesse um método para distinguir equações com solução de equações sem solução, então, nos termos desse método, a expressão "$(\exists x).x^2 2$ = 2x" (WITTGENSTEIN, 2003, p. 151).

As regras que precisamos seguir na matemática, estão previstas nas suas proposições, em sua formalidade, no rigor de seus conceitos (SILVEIRA, 2015). É através do domínio das técnicas que podemos compreender as regras a seguir.

Independente da metodologia utilizada para melhor ensinar a álgebra, devemos entender a relevância da linguagem no processo de aprendizagem. O construtivismo atribui à linguagem um papel apenas referencial, no entanto, esse é somente um dos atributos da linguagem. Para Wittgenstein a autonomia do aluno e a construção espontânea do conhecimento se dá a partir de maiores habilidades com a linguagem que vai além do uso referencial, para ele perpassa pelo domínio das técnicas.

3.3 – A simbologia da matemática nas expressões algébricas

De acordo Souza e Bataro (2012, p. 96) "as expressões em que aparecem letras no lugar de números são chamadas expressões algébricas". Nesse caso, as letras são chamadas variáveis. Ao substituir a variável de uma expressão algébrica por um número e efetuarmos as operações, obtemos o valor numérico da expressão.

Esse conceito de expressões algébricas é do livro didático utilizado nas aulas que foram investigadas. Sempre que temos letras no lugar de números estamos tratando de uma expressão algébricas? Mas temos outros contextos que temos números e letras e são chamadas de equações, de funções, entre outros. O aluno precisa do entendimento que se trata de contextos diferentes com algumas semelhanças entre eles, para tanto é fundamental que sejam devidamente esclarecidas.

Algumas pesquisas como BARUFI, 1999; MODEL, 2005; BRUM, 2013; CURY, 2013 tratam das dificuldades dos alunos do ensino superior em cálculo. Nessas pesquisas, os alunos encontram obstáculos em desenvolver conceitos que estudaram no ensino fundamental, mais especificamente produtos notáveis e fatoração, ou seja, não reproduziam com sentido, compreendendo que mais adiante em outros contextos iriam precisar dessas técnicas novamente, ou mesmo, reproduziam as regras sem sentido. Conhecer as regras não garante sua correta aplicabilidade. Para isso, é necessário identificar os diferentes usos, ou seja, identificar onde pode aplicar determinadas regras (WITTGENSTEIN, 2012).

Outro conceito para expressões algébricas é dado por Oliveira e Fernandez (2010), que nos diz que um polinômio na variável x é uma expressão algébrica do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_{0,}$$

Os monômios são expressões algébricas constituídas por um único termo, sendo formado por duas partes: coeficiente (número) e parte literal (variável). Os polinômios são expressões algébricas compostas pela adição de monômios.

As expressões algébricas são uma forma de expressar através de números diversas situações, "é a maneira pela qual representamos matematicamente a maioria dos fenômenos e situações presentes na natureza" (GUERRA, SILVA E MENDES, 2008, p.24).

No ensino da Matemática, as expressões algébricas se destacam em: operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) com monômios, operações fundamentais com polinômios e no desenvolvimento de produtos notáveis, a saber:

- Quadrado da soma entre dois termos $(a + b)^2$;
- Quadrado da diferença de dois termos $(a – b)^{2;}$
- Produto da soma pela diferença entre dois termos $(a + b).(a – b)$;
- Fatoração das expressões algébricas: por colocação de um fator comum em evidência, fatoração por agrupamento, fatoração da diferença de dois quadrados e fatoração do trinômio quadrado perfeito.

Nesse sentido, observamos todo um simbolismo existente no desenvolvimento desses conteúdos, pois é relevante compreendermos as regras que regem esses conceitos bem como as técnicas necessárias ao desenvolvimento destes para, assim, clarificar as ideias dos alunos, dentro das regras exigidas pela lógica matemática.

Silveira (2015, p. 259) ressalta que “A formação de conceitos em Matemática é um jogo de signos segundo regras determinadas, em que o sistema de símbolos é importante e não cada símbolo individualmente.” Nesses termos, é relevante o conhecimento das regras para a compreensão da simbologia nas expressões algébricas, pois o significado dos símbolos está relacionado com outros que juntamente definem o contexto em que estão inseridos bem como o uso das palavras, para que eles possam compreender a simbologia e consequentemente os conteúdos.

Ademais, algumas pesquisas como MODEL, 2005; MIRANDA, 2007; GIL, 2008, apesar de defenderem a construção do conhecimento pela autonomia do aluno, discutem as dificuldades que eles enfrentam por não compreenderem o sentido dos símbolos usados corriqueiramente nas aulas de matemática.

Nessa perspectiva, Model destaca:

> Símbolos e sinais são signos, desmembrados em três estruturas: o próprio signo concreto, o objeto que este representa, e a significação. O uso do conceito de símbolo é delimitado por três notas: convencional, geral e, funcionalmente desvinculado de seu referente. O símbolo ou processo simbólico, na nota convencional, significa conexão com seu referente por meio de uma regra arbitrária, adotada por convenção (MODEL, 2005, p. 45).

Dessa forma, os símbolos têm sentido quando analisados as regras que se referem. Da mesma forma que é substancialmente importante a verificação do contexto, é necessário ao sentido dado já que “Os símbolos parecem, ser por natureza insatisfeitos. Uma proposição parece exigir que a realidade seja comparada consigo. Uma proposição é como um régua comparada com a realidade (WITTGENSTEIN, 2003, p. 99).

Para Silveira (2015, p.185) “o simbolismo matemático atua como intermediador entre objeto e seu conceito, pois o conjunto de símbolos forma um sistema que interpreta regras”. Ao ler um símbolo matemático, é fundamental compreender a significação atribuída a ele, no contexto em que é empregado. É vital que o estudante reconheça um símbolo e faça uso de notações adequadas para expressar ideias. Porém, não convém somente reconhecer a simbologia da matemática, porque isso não garante seguir a regra corretamente já que é necessário que se atribua significado (DANYLUK, 1993).

Segundo Klüsener (2001, p. 186), “O uso de variáveis tende a confundir-se com o simples uso das letras x, y, z ... manipulando-as naturalmente, sem chegar a valorar a sua complexidade, nem os seus múltiplos significados". O referido autor segue exemplificando algumas situações que exemplificam o uso de letras:

- $b \cdot h$, neste caso chamamos de fórmula para determinar a medida da área do retângulo.
- $40 = 50\ x$, neste caso o valor de x não pode variar, é uma incógnita e a expressão uma equação para ser resolvida, ou seja, é preciso encontrar o valor de x.
- $\text{sen}x = \cos x \cdot \text{tg}x$, aqui temos uma identidade que relaciona o seno e o co-seno de um mesmo arco.
- $n.1 = 1.n$, esta expressão representa uma propriedade.
- $y = k.x$, aqui sim, temos a ideia de variável, já que o valor de y depende do valor que x assumir para k constante.

No estudo da álgebra no contexto escolar é um consenso que os símbolos representam grandes obstáculos ao aprendizado por muitos discentes, pois é visto sem sentido e esses não conseguem manipular as letras nos diferentes contextos em que aparecem. Entretanto apesar de ser problema para os estudantes, é parte fundamental para a matemática. Os símbolos têm muita relevância, pois, o significado das palavras está no uso e o "simbolismo matemático atua como intermediador entre o objeto e o seu conceito, pois, o conjunto de símbolos forma um sistema que interpreta regras (SILVEIRA 2015, p. 185).

A álgebra apresenta semelhanças com a aritmética e acrescenta novos conceitos e novos símbolos com uma linguagem muito mais abstrata: (θ, σ, ω, φ, μ, η, λ...), contextos diferentes no significado de igualdade, de soma, apresentando uma sintaxe própria, ou seja, uma outra forma de manipular os símbolos e para seguir as regras é necessários conhecer as técnicas específicas dessa nova linguagem.

É importante mostrar o sentido dos símbolos, conforme destaca Gomez-Granell:

> A linguagem matemática envolve a "tradução" da linguagem natural para uma linguagem universal formalizada, permitindo a abstração do essencial das relações matemáticas envolvidas, bem como o aumento do rigor gerado pelo estrito significado dos termos. (GOMES-GRANELL, 2003, p. 260).

Os símbolos são substancialmente necessários à matemática, por sua vez, está relacionado à natureza do conhecimento, fazem parte da lógica dos conceitos, da própria gramática e evitas as ilusões da intuição, conforme destaca Granger (1989, p. 81), "Não há formalismo sem sintaxe, sintaxe sem outro formalismo que o desenvolva e sintaxe não como expressão fixada das regras numa linguagem, mas sua produção eficaz, no movimento da tematização”.

O cálculo algébrico vai além da simples manipulação de símbolos, requer o sentido dado a eles por apresentar uma sintaxe própria, ou seja, uma maneira de manipular os símbolos deve ser seguir as regras corretamente. Para tanto é essencial que o aluno domine certas técnicas da linguagem algébrica.

No decorrer do ensino básico, as atividades efetivadas pelos estudantes servem para dar base para que eles ampliem o sentido dos símbolos e, por conseguinte, conheçam suas regras e dominem as técnicas necessárias ao manuseio dos mesmos, valorizando o simbolismo, mas contribuindo para a sua apropriação em diferentes contextos de modo que compreendam o sentido do uso, quer de invento matemático, quer referente a circunstâncias extra matemáticas, entender que se tratam de contextos diferentes.

CAPITULO 4 – O PERCURSO DA PESQUISA: Aspectos procedimentais

A presente pesquisa se constitui de um aporte teórico sobre a linguagem e aprendizagem em matemática, bem como aspectos de ideias do filósofo Wittgenstein, no que diz respeito as contribuições sobre filosofia da linguagem e da matemática, sendo este o fundamento teórico que vai sustentar as análises desta investigação.

Neste capítulo apresentaremos os caminhos percorridos para a execução deste trabalho, pois, toda pesquisa precisa da utilização de métodos para a devida organização, processamento, análise e "discernimento" sobre os dados. Segundo Lakatos e Marconi (2007, p.82) todo "método é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar os objetivos", possibilitando dessa forma, delinear percursos a serem seguidos, identificar, amparar erros e decisões.

As abordagens acerca da identificação das regras matemáticas no uso da linguagem foram feitas sob a óptica das contribuições da filosofia de Wittgenstein. Considerando o domínio das técnicas necessárias ao desenvolvimento dos conteúdos da matemática, esse suporte teórico balizou as análises das respostas dos educandos, favorecendo o esclarecimento sobre o sentido que é dado por eles a respeito da utilização de regras matemáticas pertinentes ao aprendizado de expressões algébricas, conforme esclarece Silveira (2008, p. 95) "a análise das regras matemáticas e de suas implicações busca entender os motivos pelos quais os alunos têm dificuldades em compreender conceitos matemáticos".

Para a pesquisa, elegemos uma abordagem qualitativa por se referir a:

> Uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Esta não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. (PRODANOV & FREITAS, 2013, p. 70).

Nesse sentido, entendemos que a pesquisa qualitativa é apropriada para se ter informações de casos peculiares e aquisição de dados mais abrangentes. Não destacando apenas a quantificação de resultados, enfatizando assim, mais os aspectos da subjetividade, pois é importante destacar que pesquisar vai muito além de coletar dados empíricos, trata- se de fundamentar a pesquisa em um referencial teórico para dialogar com a opinião de alguns autores consultados, conforme ressalta Demo (1985, p.27) "pesquisar é antes de mais nada, dialogar de forma inteligente com a realidade".

Perfil dos informantes e local da pesquisa:

A coleta de dados foi realizada, em uma sala de aula, de uma Escola Pública Estadual do Município de Castanhal - Pará, entre maio e junho de 2016, com vinte e quatro alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental com faixa etária de dezesseis a vinte e um anos, dentre os quais treze são meninas A escolha do oitavo ano se justifica pelo fato de que é nesse ano que o ensino de expressões algébricas é estudado inicialmente, causando muito desconforto aos alunos que normalmente apresentam muitas dificuldades.

A professora foi bastante receptiva, se dispôs a ajudar no que fosse necessário além de conceder espaço na turma para a referida coleta de dados. A mesma tem formação acadêmica em Licenciatura Plena em Matemática, já possui mais de quinze anos de docência, gosta de participar de formações, mas nos últimos três anos não fez nenhuma, demonstrou muito interesse em contribuir com a pesquisa em questão.

A intenção foi constatar dos alunos, no momento da resolução dos exercícios propostos, os obstáculos sobre expressões algébricas, para identificar os problemas relacionados com interpretação e aplicação das técnicas necessárias para tal resolução de atividades. Sobre isso, Fiorentini e Lorenzato (2006) ressaltam que para a investigação dos caminhos do pensar dos discentes, devem ser escolhidos bons instrumentos que possam tornar explícitas as estratégias e hipóteses, pertinentes aos alunos, que proporcionem momentos em que eles falem em voz alta ou registrem seus pensamentos com o intuito da análise das resolução no aprendizado.

Para Wittgenstein (2012), não existe pensamento privado. Para pensarmos nas coisas é necessário uma organização das estruturas gramaticais de nossa língua natural, de um tipo de linguagem, que é pública. Desta forma, para termos acesso a fragmentos do pensamento do aluno é necessário que ele o exteriorize por meio de palavras ou outra forma de comunicação. Segundo Hebeche (2002, p. 204) "o critério para compreender o que alguém imagina ou pensa é "o que ele diz ou faz", isto é, a sua descrição é o único modo de se ter acesso ao o que ele imagina".

Nesse sentido foi proposta a entrevista aos alunos, como uma maior possibilidade de ter acesso a suas estratégias de resolução. Segundo Gil (2012, p.110), a entrevista é uma "técnica muito eficiente para a obtenção de dados em profundidade acerca do comportamento humano", permitindo um maior número de respostas.

Além de proporcionar as análises, as entrevistas foram voltadas a investigar minuciosamente o tema, possibilitando acesso a linguagem dos alunos, pois, conforme

Fiorentini e Cristóvão (2010, p. 228), “a descrição e análise dos resultados a partir de uma tarefa investigativa, destaca o desenvolvimento da linguagem, sobretudo o processo de generalização e a percepção de regularidades”.

Para o levantamento das informações relativas ao trabalho, foram desenvolvidos os seguintes passos:

a) Observação das aulas da professora durante o ensino de expressões algébricas (monômios, polinômios, desenvolvimento de produtos notáveis e fatoração), perdurou por três semanas (meados de maio, início de junho de 2016). Foi observado um total de doze aulas, quatro por semana, devido a ocorrência de mudança na carga horária da disciplina de matemática no ensino fundamental, anteriormente eram seis aulas semanais. Tal alteração inclusive foi destacada pela docente como prejudicial quanto à contemplação dos conteúdos.

b) Aplicação de listas de exercícios (um total de cinco, conforme os anexos A, B, C, D, E deste documento) que foram recolhidas para as análises, não incluindo os exercícios propostos pela professora durante as aulas. Os anexos foram divididos conforme os assuntos das aulas, anexo A referente à monômios, B; operações com polinômios (adição, subtração, multiplicação e divisão), anexo C, desenvolvimento de produtos notáveis, anexo D, fatoração de polinômios e o anexo E é uma revisão de algumas atividades de produtos notáveis e fatoração, trabalhadas anteriormente.

Os exercícios que são os anexos B, C e D foram respondidos pelos alunos em um momento diferente do horário da aula de matemática, pois, tinham alguns horários vagos[9], que em comum acordo com a direção da escola foi cedido para que os discentes pudessem responder as listas de atividades com mais tranquilidade no que se refere ao tempo.

c) Todas as listas de atividades foram extraídas dos livros didáticos *Vontade de Saber Matemática*[10], usado pela professora durante as aulas e do livro *Projeto Araribá Matemática*[11]. Os alunos tinham liberdade para perguntar sobre suas dúvidas de modo que ao interagirem nos oportuniza vislumbrar possíveis dificuldades.

d) Foram confrontados pontos da literatura sobre o ensino de expressões algébricas e o referencial teórico adotado, investigando as dificuldades dos alunos quanto ao seguimento de regras e consequentemente ao domínio de técnicas matemáticas, esclarecendo suas estratégias na resolução de atividades de expressões algébricas.

---

[9] Os estudantes estavam com alguns horários disponíveis, devido a uma gincana que acontecia na escola.
[10] Souza, J., Pataro, P.M. **Vontade de Saber Matemática**, Matemática 8º Ano, 2ª Ed. Editora FTD, 2012.
[11] Projeto Araribá – 8º Ano, Editora Moderna, 3 ed. São Paulo – 2010.

e) E por fim, realizamos entrevista semiestruturada com alguns alunos, na intenção de obter mais informações que contribuísse com os objetivos da pesquisa. Segundo os autores Triviños (1987) e Manzini (1990,1991) a entrevista semiestruturada tem questionamentos básicos que podem fornecer novos dados para as análises, favorecendo não somente a descrição dos fenômenos, mas também a elucidação e compreensão de sua totalidade, favorecendo informações de forma mais livre. Nesse sentido, as perguntas podem ser alteradas, formular outras inicialmente não planejadas, podendo inclusive tomar o rumo de um diálogo.

Os questionamentos foram estabelecidos com o intuito de nos ajudar a compreender as dificuldades e táticas dos alunos quanto ao seguimento de regras.

A seguir, o questionário:

1. Você teve dificuldades em resolver os exercícios? Descreva quais dificuldades? (Caso seja possível exemplifique);
2. Explique como você identifica o que deve ser feito para resolver os exercícios que foram propostos;
3. Você encontra dificuldades em relacionar as áreas de figuras geométricas com expressões algébricas?;
4. Tente explicar suas impressões (o que achou) sobre os assuntos estudados.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISES DA PESQUISA.

No decorrer deste capítulo iremos relatar os principais fatos registrados quando observamos os alunos, tanto nas entrevistas quanto na resolução das atividades propostas. Relataremos também, alguns procedimentos da professora no decorrer de suas explicações de tal maneira que possa elucidar seu posicionamento quanto à aquisição do conhecimento por parte dos alunos.

5.1 - Observações em sala de aula

Os alunos adolescentes demonstravam um certo desinteresse pelas aulas, no geral meio displicentes, porém, na hora da explicação a professora conseguia silêncio, pede a todos respeito, atenção, enfatizando a necessidade de ouvir a explicação.

Em conversa informal, anterior ao início das observações a professora relatou que os alunos parecem não ter interesse nenhum em aprender, por mais que ela se esforce eles não reconhecem, não estão interessados em estudar. Ao se dar conta, de ter demonstrado desânimo em seu trabalho, afirmou que alguns alunos ainda têm interesse e, por esses, ela procura ser uma boa professora.

A referida professora mostrou-se disposta a ajudar na pesquisa, no que fosse possível, só afirmou categoricamente, que não gostaria de intervenções em suas aulas, se fossem sugestões até aceitaria, mas não ficaria à vontade com interferências. Na ocasião, esclarecemos que a intenção era observar e detectar alguns pontos em que os alunos têm maiores dificuldades contribuindo, dessa forma, para a educação matemática e até mesmo permitir que pesquisas futuras possam propor alguma contribuição direta através da pesquisa-ação. Mas essa não era nossa metodologia.

Foi disponibilizado aos alunos uma lista de atividades prévia para termos uma base diagnóstica de como estava o conhecimento deles sobre conhecimentos básicos de álgebra que nos permitisse identificar melhor as diversas dificuldades dos alunos, tendo em vista que as aulas eram poucas, com um tempo relativamente curto para ministrar tanto conteúdo, cabendo a nós deixar bem claro a real intenção para que em nenhum momento a professora se sentisse constrangida, ou imaginar que poderíamos achar as aulas dela insuficientes. Ela mesma reconheceu que o tempo é muito curto e, por esse motivo, não consegue passar muitas atividades.

Apesar de demonstrar em suas palavras um certo descontentamento com o desinteresse de alguns alunos, se mantém firme em suas explicações na sala, impõe firmeza ao falar. É paciente para ouvi-los quando apresentam dúvidas, procura manter um diálogo com eles no momento das correções dos exercícios que ela disponibiliza para fazerem em casa. No instante de corrigir, lê em voz alta, faz algumas indagações, no intuito de obter respostas e de maneira sucinta mostrar o que deve ser feito.

Observamos a turma por três semanas, com um total de doze hora/aula, quatro aulas por semana, dividido em dois dias da semana na referida turma. Vamos descrever os conteúdos vistos por encontro, para melhor entendimento, e relatar alguns fatos ocorridos que, porventura tenha sido relevante.

1º Dia de observação: No primeiro dia de observação, A professora corrigiu atividades do livro didático, referente a monômios, além disso, os alunos pareciam bastante apreensivos quanto à letra como representação de um número desconhecido, ou seja, não estavam compreendendo o manuseio das letras, pois, era um contexto diferente do que estavam habituados já que confundiam triplo, dobro, porque achavam que tinham que responder um valor numérico referente a pergunta feita pela professora.

2º Dia de observação: Nesse dia, o conteúdo trabalhado foi operações com monômios, adição, subtração, multiplicação e divisão, a partir desse assunto a professora explicou que para efetuar adição e subtração é necessário que se tenha as partes literais idênticas. A docente explicou, também, as regras da seguinte maneira: conserva a parte literal e soma ou subtrai os coeficientes; enfatizando que os coeficiente eram os números. Sobre isso, não houve questionamentos por parte da turma.

Na multiplicação e divisão, foi explicado de maneira bem simples e direta, *é só multiplicar ou dividir os números, a diferença é que na multiplicação soma os números de cima e na divisão subtrai (palavras da professora).* Ela tentou simplificar, para que entendessem. Em seguida foi fazer atividades.

3º Dia de observação: O conteúdo trabalho foi Potência com monômios e exercícios sobre monômios. Foi marcado no livro alguns exercícios para os alunos responderem na sala e a professora ajudava quando solicitada. Na observação ficamos bastante atentos às principais dificuldades, apesar de que a maioria não estava respondendo. Um episódio chamou a atenção: uma aluna perguntou à professora sobre o comando de uma questão: *professora como posso simplificar a questão 20 se não sei por que números posso dividir?*

A questão era:

20) Simplifique as expressões algébricas.

a) $x + x + x$

A aluna estava se referindo às simplificações na aritmética, que simplificar uma fração, por exemplo, referindo à simplificação de frações, na qual se divìdi o numerador e denominador pelo mesmo número.

A professora respondeu que não se tratava da mesma coisa, era só para ela somar ou subtrair.

4º Dia de observação: Foi aplicado uma lista de exercícios (anexo A desta dissertação) porém, como o tempo foi curto (a aula começou vinte minutos após o horário normal), não ouve tempo hábil para a correção da atividade em sala.

5º Dia de observação: O conteúdo trabalhado foi sobre os Polinômios: simplificação, grau, adição e subtração. A professora falou que simplificar era reduzir a quantidade de termos da expressão. Na soma e subtração, era suficiente operar com os termos semelhantes. Enfatizou, também, que ser semelhante é ter a mesma parte literal, ou seja, a parte representada por letras. Após juntarem os semelhantes ficaria igual às operações com monômios. Nesse dia não explicou nenhum contendo figuras geométricas. Em seguida, passou alguns exemplos.

6º Dia de observação: Nessa aula, os assuntos abordados foram Multiplicação e divisão de polinômios. Na explicação, a docente não explicou com figuras, mas foi mostrando no quadro pelas setas, que multiplica os termos do primeiro pelo segundo, porém não usou os termos propriedade distributiva. Passou alguns exemplos do livro, marcou para fazerem em casa uns com figuras geométricas.

7º Dia de observação: Nessa aula, foram realizados exercícios sobre polinômios. Esperou um pouco para que os alunos resolvessem, muitos não fizeram e a professora foi resolvendo no quadro. Enquanto respondia uma questão, usou a expressão *qualquer coisa multiplicado por ela mesma o resultado é a mesma coisa, mas soma os expoentes.* Usou esses termos se referindo aos exemplos dos tipos $x.x = x^2$ e $a.a = a^2$.

8º Dia de observação: Nessa aula, o assunto foi sobre os Produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos; quadrado da diferença de dois termos; produto da soma pela diferença. A professora apresentou um a um, fazendo as setas para mostrar que opera os termos dos parênteses, depois, usou as expressões dos produtos e fez as figuras geométricas no quadro, pediu para que os alunos olhassem também no livro didático.

9º Dia de observação: Continuando a professora passou exercícios sobre produtos notáveis. Fez alguns exemplos e pediu para resolverem uns contendo as figuras de área e perímetro do livro.

10º Dia de observação: No décimo dia, foi explicado sobre a Fatoração de polinômios, como: Fator comum em evidência, fatoração por agrupamento, fatoração da diferença de dois quadrados, fatoração do trinômio quadrado perfeito. Sobre esses assuntos, os alunos demonstraram estarem com muitas dúvidas, pois alguns comentaram que não estavam entendendo nada, enquanto que a professora explicou que precisavam resolver em casa e se basearem nos exemplos que ela fez na sala para entenderem melhor.

11º Dia de observação: No penúltimo dia a professora passou exercícios sobre fatoração. Em seguida, os alunos resolveram algumas questões dos livros, enquanto que a professora corrigiu algumas atividades durante as aulas. Alguns alunos fizeram alguns questionamentos na perspectiva de compreenderem melhor o tema abordado

12º Dia de observação: No último dia de observação foi realizado uma aplicação do questionário (anexo E desta dissertação) e se observou que apesar de algumas destas questões já havia sido passada à eles, algumas foram até respondidas na sala na mesma ocasião, mas a maioria dos alunos não responderam de maneira satisfatória, algumas vezes pareciam até mesmo não estarem muito dispostos a responderem, dois alunos chegaram a perguntar se esses exercícios todos que eles haviam respondido estava valendo ponto.

5.2 – As aulas da professora

Ao corrigir as atividades, a professora faz bastante indagações, instigando os alunos a responderem, dá oportunidade para falarem, como nos exemplos “dois ao quadrado é igual.”; “nove ao quadrado é...”; “como se representa metade de um número...”. Nesse momento, a maioria dos alunos ficam calados (poucos respondem), os que não prestam atenção não fazem muito barulho, pois, a professora faz questão de ser bastante incisiva nesse ponto, já que não admite conversas paralelas em dois momentos bastante específicos, na explicação e na correção das atividades, salientando a eles a necessidade de prestar atenção.

A professora tenta mostrar aos alunos que precisam ficar em silêncio, bem como, precisam ficar à vontade para perguntar. Ela fala que é importante participarem, mesmo eles não dando a devida importância, a maioria não questiona nada. Apesar de não conseguir o resultado desejado quanto ao diálogo a docente parece perceber a importância deste na aprendizagem. Conforme destaca Silveira (2010, p. 91), “é a partir do diálogo que professor e aluno participam do mesmo jogo de linguagem e as palavras ditas por ambos têm os mesmos significados como uma forma de vida”.

Percebemos o quanto a professora valoriza o diálogo com os alunos, no sentido, deles responderem em voz alta, ou mesmo, de expressar as dúvidas. Ela comentava que precisam expor as dúvidas e dessa forma iriam perceber que as dificuldades deles muitas vezes são comuns a outros. Nesse sentido, podem se ajudar na sala de aula.

Acordamos com a professora em passar uma lista de atividade, semelhante ao que ela já havia trabalhado em sala, para fazer parte da nossa coleta de dados, com o intuito de fazer parte de uma diagnose sobre os conhecimentos algébricos dos alunos. Da mesma forma que iriamos passar outra lista (anexo E) ao final das observações que seria uma revisão, para nos ajudar a vislumbrar melhor sobre as dificuldades manifestadas por eles.

No decorrer dos dias, as aulas tinham o mesmo ritmo. Era explicado o assunto, os alunos acompanhavam pelo livro um exemplo básico de cada assunto abordado, por exemplo: operações com monômios e com polinômios. A docente passava alguns exercícios disponibilizados nos livros didáticos para responderem em casa. No próximo encontro exercitavam algumas dessas atividades. Ela sempre corrigia na medida do possível.

Percebemos que alguns alunos não se esforçavam para responderem, influenciando no aprendizado deles, conforme destaca Silva (2011, p.65) “Quando os alunos tinham dever de casa, ou quando havia prova marcada eles não estudavam/faziam os exercícios e isto faz falta para o domínio das técnicas matemáticas”.

A professora se esforçava para manter um bom relacionamento com a turma, procurava deixá-la com liberdade para interagir/perguntar. Alguns alunos conseguem se manifestar. Os conteúdos são estudados com tempo comprometido, inclusive a professora comenta que eles precisavam ter mais aulas sobre o assunto para que resolvessem mais questões, reforçando a necessidade de eles refazerem as questões em casa já que só vão aprender se praticarem.

No decurso das observações, algumas situações nos chamaram a atenção:

Durante a correção da primeira lista de exercícios proposta pela professora, os alunos apresentavam com muitas dúvidas quanto ao uso das letras para representar um valor desconhecido. Esse valor normalmente é representado por letras e nesse contexto representa um número aleatório.

A conversa a seguir representa minimamente um desses momentos de dúvidas dos alunos, um diálogo entre professora e alunos em conjunto (na correção da atividade), pois, ela tentava explicar a eles o sentido do valor de “X”, um valor desconhecido.

Professora	Alunos
Que expressão algébrica representa "*o dobro de um número mais* 5?".	Ficaram calados, demonstrando não compreender do que se tratava.
Tentava explicar – quando vocês precisam encontrar o dobro de um número, como fazem?	Uns alunos responderam – “depende do número professora”
Não...no geral, como faz para encontrar o dobro de um número? Multiplica ele por quanto?	...por dois
Isso, qualquer número, para encontrar o dobro dele, basta multiplicar por dois.	
Tenho um número, ainda não sei qual é, mas para representar esse número? Denomino ele de “x” por exemplo, então o dobro de “x” é?...	Alguns responderam – “dois x – Outro aluno disse “mais aí está só duas vezes, então, está só o dobro, onde está o número?
A professora, tentou explicar, dizendo: Esse “x” representa o número desconhecido, a multiplicação, não aparece aqui, mas é um pontinho entre os dois e o “x” só que não precisamos escrever, mas ele existe.	Alguns alunos demonstravam não compreender.
Continua dizendo – “faz de conta que esse “x” é aquele quadradinho □ usado por vocês quando estudavam na alfabetização, Ela escreve no quadro - 2 x □ = 5, e continuou, só que o “x” aqui nesse assunto que estamos estudando não é multiplicação e sim um número desconhecido.	Os alunos permaneciam calados.
A professora exemplificou e continuou com a correção de outras questões.	

Quadro 1 - diálogo entre alunos e a professora anotado no diário

Esse diálogo foi registrado em um diário de anotações. Não teve áudio e imagens por solicitação da professora. Nesse momento, foi possível percebermos que alguns alunos não conseguem se atentar para o fato de que o “x”, no contexto em questão, representa um número desconhecido (uma incógnita), sendo percebida inclusive uma confusão por não entenderem que existe uma multiplicação entre o 2 e o “x”. Quando foi perguntado a eles como se encontra o dobro de um número, os alunos achavam que teria a obrigatoriedade de informarem um resultado final, um valor numérico como resposta, não uma representação, um padrão.

Nesse caso, a docente percebeu que alguns discentes estavam com dificuldades em enxergar a multiplicação bem como de entender o "x" como um valor desconhecido. Porém, ao tentar explicar não usou um exemplo pois imaginou que eles já conheciam da alfabetização. Não explicou que se referia a outro contexto da matemática, logo, outras regras.

Na resolução de uma atividade, na qual se pedia para encontrar o valor numérico de uma expressão, essa atividade proporciona o uso de letras e números bem como potenciação, multiplicação e etc. Na correção da questão $2(x - 4)$, quando o valor de x é igual a 8, os alunos demonstravam a mesma dificuldade em seguir a regra da multiplicação por um fator comum, querendo multiplicar o dois somente pelo primeiro termo.

Percebemos a importância da professora reforçar novamente o que já havia explicado antes, durante a correção dos exercícios, de usar termos corretos na hora de explicar, os alunos ainda com muitas dúvidas, mas observamos pela expressão de alguns que conforme ela ia explicando, eles compreendiam algo melhor. Segundo destaca Silveira (2015, p. 123) "o sujeito aprendente, ao se deparar com um conceito matemático já construído por ele, pode, em outro contexto, atribuir-lhe novos sentidos ou ressignificá-lo". Nesse sentido, conforme a professora foi explicando, eles vão reforçando algumas regras.

Outro ponto que podemos destacar, nas observações, é o fato de que durante a resolução de uma atividade com produtos notáveis, mais especificamente o produto da soma pela diferença, como no exemplo $(5 + 4a^2)\ (5 + 4a^2)$, onde no termo $(4a^2)^2$, a professora destaca o termo $(a^2)^2$ dizendo que não é uma potência, mas sim uma multiplicação. Nesse caso, ela estava se referindo ao fato de que para resolver potência de potência, multiplicam-se os expoentes. No entanto, não foi dessa forma que ela falou, e desse modo, muitos alunos fizeram uma expressão como se não tivessem compreendido, porque não se tratava de potência.

Esse exemplo confirma que nem sempre o que é óbvio para nós professores não é da mesma forma para os alunos, eles precisam que as regras sejam bem explicadas, para desfazer os maus entendidos. (SILVA 2011; SILVEIRA, 2015).

De um modo geral, a docente não se preocupa muito com alguns cuidados relacionados à linguagem, para que não cause certas confusões. Usava termos como *qualquer coisa multiplicado por ela mesma*, esclarecendo os termos, as devidas regras e os contextos em que são utilizadas. Ao explanar a respeito da soma de $a + 2a$, enfatiza que opera igual na soma, como se fossem objetos, 1 + 2 = 3, mas para o aluno, não é óbvio que a equivale a 1, muito menos é correto comparar com objetos, sem pelo menos especificar que para somar os objetos devem ser semelhantes.

5.3 - Exercícios propostos aos alunos

As atividades (anexos A, B, C, D, E desta dissertação) aplicados aos alunos para resolverem foi mostrado à professora responsável pela sala para que ela certificasse que estava de acordo com o que foi ministrado durante as aulas. Todos os exercícios sugeridos foram retirados dos livros didáticos, utilizados por ela. Quanto aos alunos, esses foram identificados pelo número da chamada.

O anexo A (respondido por 15 alunos presentes) foi bastante semelhante ao que a professora estava corrigindo no primeiro dia de observação. As atividades eram sobre as noções inicias de monômios. No dia da resolução dessa atividade foi conversado com os eles sobre os dias de aulas extras que teriam (para exercitarem mais) e a professora responsável pela turma enfatizou que todos deveriam participar, pois iria contar para a avaliação deles bem como foi dito os dias em que iriam ocorrer.

Foi explicado que esses momentos eram importantes, pois iriam proporcionar maior tempo para estudarem de tal maneira que podiam tirar algumas dúvidas, se quisessem. A professora estava participando de uma formação durante a aplicação dos anexos B, C e D.

O anexo B (resolvido por 12 alunos presentes) foi composto por questões sobre polinômios, trabalhando as operações com polinômios (adição, subtração, multiplicação e divisão). As questões foram lidas em sala antes de começarem a resolver.

O anexo C (foi respondido por 10 alunos) continha questões sobre produtos notáveis, quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença, as questões foram elaboradas conforme as atividades desenvolvidas em sala pela professora da turma e, inicialmente, as questões foram explicadas uma a uma e com exemplos.

As atividades do anexo D (respondido por 13 alunos) continha questões, conforme foi trabalhado nas aulas com a professora, sobre fatoração de expressões algébricas, fatoração por fator comum em evidência, por agrupamento, fatoração da diferença de dois quadrados e fatoração do trinômio quadrado perfeito, O anexo E (resolvido por 9 alunos) essa quantidade de alunos na sala se deu pela falta de ônibus escolar e mais da metade dos alunos dessa turma são da zona rural, ou seja, dependem exclusivamente do ônibus para ir à escola. A lista continha questões sobre produtos notáveis e fatoração. Uma revisão do que foi estudado em sala, baseado nos demais anexos, sendo que algumas dessas questões foram resolvidas no final da aula, pela professora da turma.

Na parte superior dos anexos há um círculo, neles foi solicitado que os estudantes colocassem o número da chamada, para um controle sobre quais alunos haviam respondido as listas. Denominamos os alunos pelos "números" e analisamos os equívocos que se destacaram quanto ao seguimento de regras.

5.4 – Análise das respostas dos alunos

5.4.1 – Seguir corretamente as regras matemáticas

Dentre os equívocos cometidos pelos alunos, a maioria está relacionada ao não entendimento das regras a serem seguidas, pois os estudantes têm dificuldades em seguir a lógica das regras matemáticas e, para Wittgenstein (2012), a falta de compreensão perpassa pela aquisição de habilidade, do domínio de técnicas necessárias para discernir os contextos em que devem aplicar, os conceitos que precisam utilizar e, essas atribuições desenvolvemos com explicações, com a familiaridade através do uso de determinados termos. Nesse viés, destacamos algumas dificuldades acometidas pela falta de domínio de regras relacionadas aos jogos de sinais, necessárias ao desenvolvimento de expressões. É uma técnica necessária para o desenvolvimento das operações matemáticas em tal contexto.

A questão dois da lista de atividades 01 (anexo A) representa esse fato (figura 01 abaixo). Essa atividade é de manipulação de letras e números e se resolve substituindo o valor numérico das letras e resolvendo as expressões. Dos 15 alunos que responderam 11 erraram as regras dos sinais em pelo menos uma alternativa.

2- Determine o valor numérico de:

a) $3 \cdot (x - 8)$, para $x = 12$

b) $3x + x^3$, para $x=4$

c) $x^3 - x^2 - 2x$, para $x = -2$

d) $\frac{5x}{2}$, para $x = -3$

Figura 1 - Questão dois, anexo A

Essa atividade trabalha a noção de incógnita na qual o entendimento dos jogos de sinais é um requisito necessário para o devido desenvolvimento dos conteúdos estudados. Conforme ressalta Silveira (2015, p. 132), “seguir uma regra é um jogo de linguagem, e joga quem compreende a descrição da regra”. Os alunos precisam compreender o jogo de linguagem dos sinais, pois, será necessário não somente para este conteúdo, mas para os outros contextos matemáticos que irão estudar e, no caso das expressões algébricas, seu não entendimento compromete o correto seguimento das regras.

Observemos alguns exemplos:

O aluno *sete* evidencia a dificuldade com as regras nos jogos de sinais, pois, ao desenvolver o item C ($x^3 - x^2 - 2x,\ para\ x = -2$) compreende o que deve ser feito, mas erra o resultado por não se atentar às regras dos jogos de sinais.

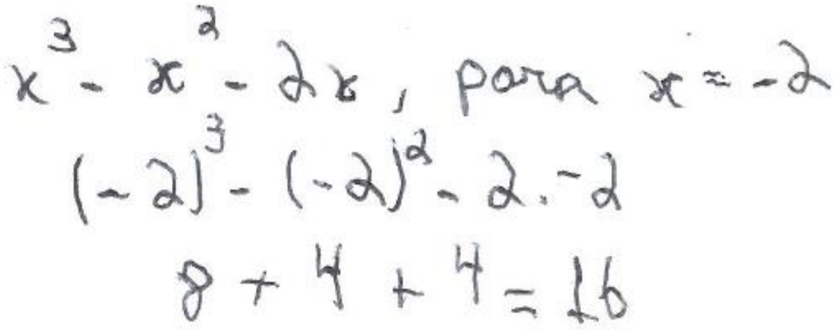


Figura 2 - Exemplo de que os alunos têm dificuldades com os jogos de sinais.

Nesse exemplo fica nítida a confusão nas regras dos sinais e interfere na resolução da atividade proposta, pois existem conteúdos estudados anteriormente que são necessários para o correto desenvolvimento de outros conceitos em outros contextos, por vezes, o não entendimento provoca muito desconforto e insegurança na aplicação das regras.

O estudante *seis* ao responder a questão do item C ($x^3 - x^2 - 2x,\ para\ x = -2$), da mesma questão da figura 1, apesar de ter colocado o resultado correto, as regras dos jogos de sinais não estão corretos. Nesse caso, a resposta certa foi coincidência, conforme mostra a figura 3:

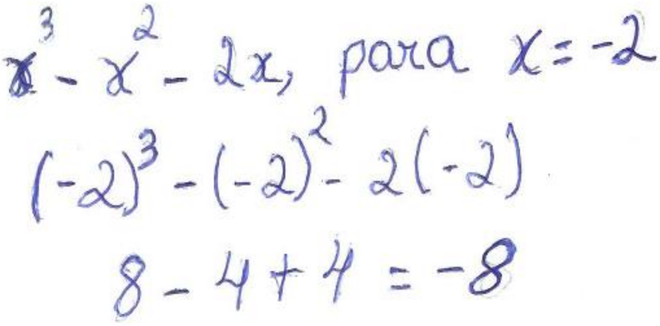


Figura 3 - Exemplo de que os alunos têm dificuldades com os jogos de sinais

O aluno *dois* ao responder o item D, que era para encontrar o valor numérico de $\frac{5x}{2}$, para x = -3, mencionou que errou por confundir o contexto das regras dos jogos de sinal, conforme ilustra a figura 4 a seguir.

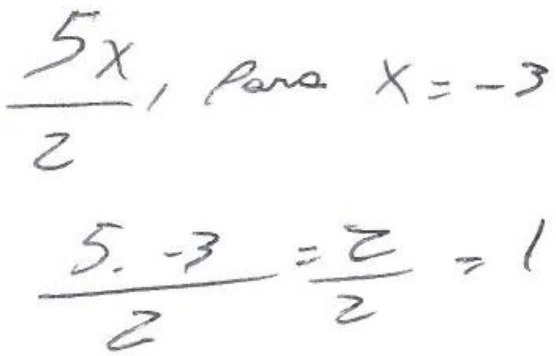
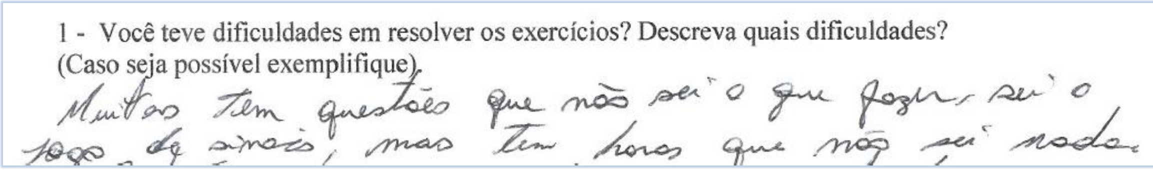


Figura 4 - Exemplo de que os alunos têm dificuldades com os jogos de sinais.

A priori o estudante *dois* parece usar a regra dos sinais para o contexto diferente da multiplicação chegando a um resultado equivocado, pois aparentemente usou outra regra que foi a do contexto da soma e subtração. A regra usada é válida, mas não para este contexto na qual o não domínio das técnicas necessárias compromete a compreensão da regra (GOTTSCHALK, 2008). Nesse sentido, o conhecimento das regras por si só não garante a correta aplicabilidade (WITTGENSTEIN, 2012). O aluno aparenta conhecer as regras, no entanto, confundiu o momento a ser utilizado.

O mesmo aluno se manifesta no questionário, em relação aos jogos de sinais, afirmando saber, mas se confunde. Inferimos que isso ocorreu porque não dominava bem a técnica ao ponto de estar familiarizado com suas diferentes aplicações, como podemos observar abaixo:


1 - Você teve dificuldades em resolver os exercícios? Descreva quais dificuldades? (Caso seja possível exemplifique).
Muitos tem questões que não sei o que fazer, sei o jogo de sinais, mas tem horas que não sei nada.

Os alunos encontram bastantes dificuldades com os jogos de sinais, terminam por desenvolver de forma indevida e o uso indevido dos jogos de sinais interfere no desenvolvimento dos produtos notáveis. Quando dominam determinadas regras, tornam capazes de desenvolver de forma semelhante com seguir uma ordem (WITTGENSTEIN, 2003). Ainda que consigam entender a regra dos produtos notáveis, se aplicarem a regra dos sinais de forma indevida, terminam por cometer erros.

Conforme podemos exemplificar com o aluno *dezesseis* ao desenvolver o item b da questão quatro do anexo C, na qual era para desenvolver o quadrado da diferença de dois termos. Nesse caso $(1-3y)^2$ dos dez alunos que responderam esse anexo sete tiveram dificuldades quanto ao desenvolvimento por seguir incorretamente as regras dos jogos.

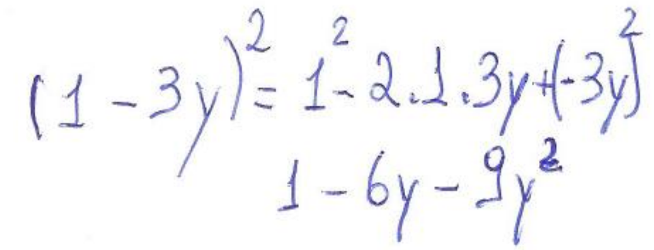


Figura 5 - Exemplo de que os alunos têm dificuldades com os jogos de sinais.

O estudante se equivocou ao atribuir o sinal negativo para $(-3)^2$, fato que alterou o resultado do produto. Da mesma forma que ocorreu no item $(x-5)^2$. Nele o aluno *cinco* usa regra dos sinais no contexto indevido.

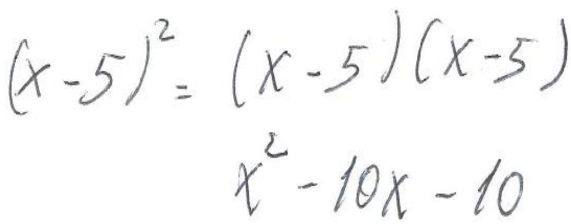


Figura 6 - Exemplo de que os alunos têm dificuldades com os jogos de sinais.

No desenvolvimento do produto notável, o aluno *cinco* confundiu a regra e alterou não somente o sinal de positivo para negativo, mas também alterou também o resultado numérico, pois ao invés de multiplicar ele somou. Precisamos observar que o contexto define como seguiremos determinadas regras (GOTTSCHALK, 2004).

Ademais, muitos alunos mostram dificuldades no desenvolvimento de potências, pois não conseguem desenvolver corretamente a regra de multiplicar a base da potência por ela mesma e termina por multiplicar a base pelo expoente. Esse erro é muito recorrente, tanto na potência com letras quanto quando se tem somente com números. Segundo Glock (1998, p.315), “Compreender a regra é saber como aplicá-la, saber o que pode ser considerado como agir em conformidade com ela ou transgredi-la”.

Alguns alunos infringem as regras de potenciação e demonstram dificuldades em desenvolver as potências e isso interfere no desenvolvimento correto das expressões algébricas. Os equívocos são recorrentes e expressos em questões diversas, conforme mostram as figuras 07, 08 e 09 abaixo. O estudante *vinte* ao resolver o item b da segunda questão do anexo A, na qual é para encontrar o valor numérico de $3x + x^3,\ para\ x = 4$, representa essa situação. O mesmo não desenvolve a potência e sim uma multiplicação da base pelo expoente.

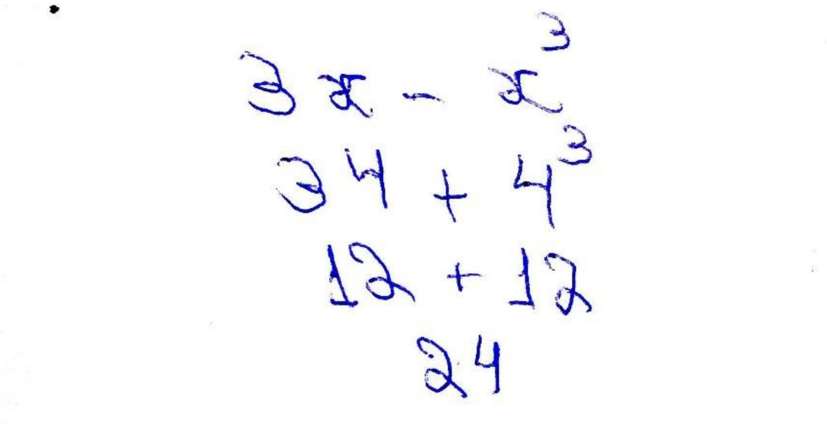
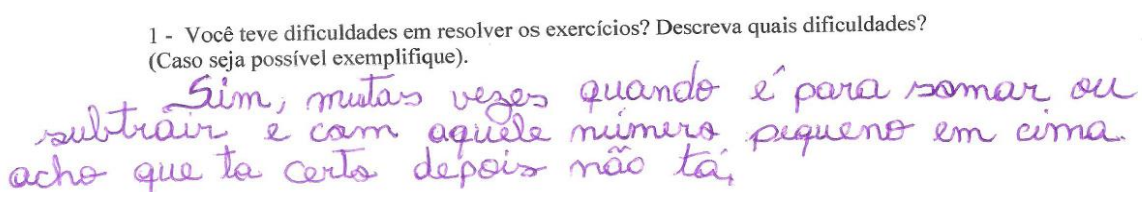


Figura 7 - Exemplo da dificuldade em desenvolver potências.

O aluno *vinte e um* expôs no questionário dificuldades sem saber como resolver exercícios envolvendo potências:


1 - Você teve dificuldades em resolver os exercícios? Descreva quais dificuldades?
(Caso seja possível exemplifique).
Sim, mutas vezes quando é para somar ou subtrair e com aquele número pequeno em cima acho que ta certo depois não tá,

O aluno *vinte* nos evidencia dificuldades nas atividades envolvendo as regras de potência ao responder o item “e” no primeiro exercício proposto no anexo C. Nesse anexo, dos dez discentes que responderam, seis apresentaram embaraços relacionados às potências, principalmente relacionados às potências da parte algébrica.

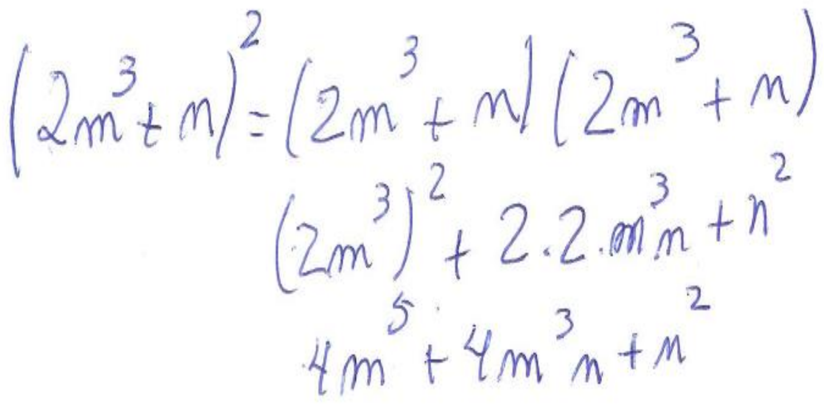


Figura 8 - Exemplo da dificuldade em desenvolver potências.

O estudante *vinte* ao desenvolver o produto notável do quadrado da soma de dois termos não aplica a regra da potenciação em $(2m^3)^2$na qual pela propriedade deveria elevar tanto o 2 quanto o m^3 ao quadrado, ou seja, o $(2m^3)^2$ = $4m^6$. No entanto, os expoentes foram somados e não multiplicados conforme a regra.

Da mesma forma, o aluno *oito* ao desenvolver o produto notável do quadrado da diferença de dois termos no item “b” da quarta questão do anexo B, não aplica a regra da potência corretamente em $(1 - 3y)^2$.

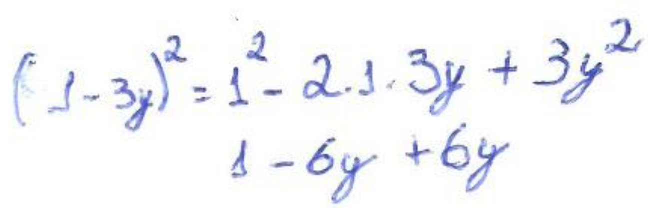


Figura 9 - Exemplo da dificuldade em desenvolver potências**.**

O aluno não resolveu a potência corretamente $(3y)^2$, não multiplicou a base 3y por ela mesma conforme a regra de potenciação. Também, resolveu multiplicando a parte literal 3 por 2 e conservou o coeficiente y. Dessa forma, nos evidencia falta de domínio das propriedades do conteúdo estudado, pois compreender as regras da potenciação é um quesito necessário ao bom desenvolvimento de produtos notáveis e fatoração.

Para que o educando se familiarize precisa manipular corretamente os signos conforme as regras determinadas no conteúdo estudado. “Wittgenstein define como domínio de uma técnica a aquisição de uma competência em linguagem, tornar-se hábil no uso de determinados signos assemelha-se a tornar hábil no manejo de certas ferramentas (GURGEL, 2008, p. 112).

Aprendizes, ao estudarem as expressões algébricas, apresentam bastantes problemas em diferenciar regras da aritmética com as demais do contexto algébrico. Essa confusão, muitas vezes, acaba sendo influenciada por alguns professores, que por sua vez, não procuram discernir corretamente as regras. Álgebra e aritmética possuem algumas similaridades em determinadas regras, mas não são semelhantes. Isso gera bastante confusão entre os estudantes que nem sempre identificam as diferenças.

Essa questão de indefinição quanto ao contexto está evidente nas respostas de alguns alunos. Por exemplo, o estudante *vinte e um* na segunda questão do anexo B, na qual tem como comando “Obtenha o polinômio reduzido”. Item b) $5ab - 10ab^2 + 14ab - a$, respondeu conforme a figura 10.

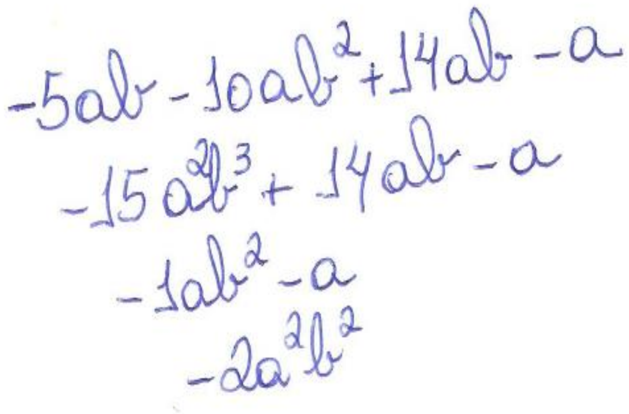


Figura 10 - Exemplo da dificuldade em diferenciar o contexto álgebra / aritmética.

O aluno ao resolver não segue as regras corretamente do contexto das expressões algébricas, levando em consideração que nas operações com monômios opera os termos semelhante com semelhante se referindo as partes algébricas. No entanto, o estudante transgredi as regras somando ou subtrai termos impróprios, como se estivesse manuseando algarismos no contexto das expressões numéricas.

Outro exemplo dessa confusão em contextos é apresentado pelo aluno *dez* que, ao responder quarta questão do anexo B, cujo objetivo é para resolver uma expressão algébrica sendo que o comando é “calcule no caderno”.

b)$(7xy + 4x + 8z - 15)$ -$(6x + 10y - 3)$

O estudante *dez* respondeu conforme a figura 11.

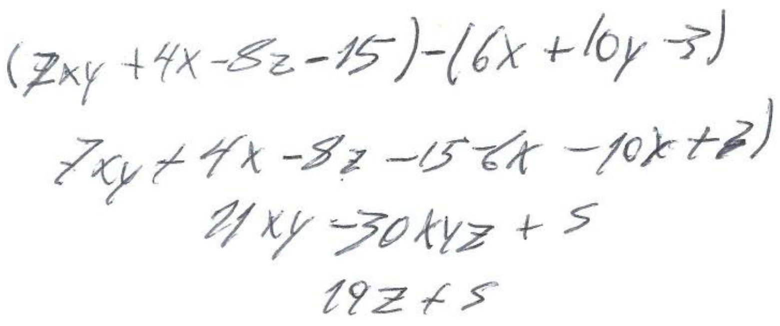


Figura 11 - Exemplo da dificuldade em diferenciar o contexto álgebra / aritmética.

O aluno opera termos indevidos por não se atentar às regras das operações com monômios, e é primordial estar atento aos diferentes contextos de aplicações das regras, para sua correta aplicabilidade. O estudante quando é posto a uma nova situação no contexto matemático, pode transpor as regras, ressignificar (SILVEIRA, 2015).

Para tanto, é necessário ser explicado e ensinado, pois para o aluno o contexto bem como as devidas regras a serem utilizados, em outro contexto, não é óbvio aos aprendizes, conforme destaca Gottschalk (2012, p.52) “Wittgenstein pressupunha que o aprender a se expressar teria que ser acompanhado necessariamente de um seguimento das regras gramaticais e ortográficas, a serem *aprendidas* e não descobertas”.

No sentido que o aluno não constrói as regras, ele precisa conhecer, descobrir sua utilidade e aplicabilidade conforme o uso. Assim, o processo de aprendizagem do ser humano perpassa pela relação professor/aluno, pois é na prática do ensinar, explicar, mostrar os diferentes usos e circunstâncias que se insere no contexto das práticas coletivas das regras, das diferentes formas de vida (GONÇALVES, 2013).

Agimos em conformidade com uma regra quando dominamos os quesitos necessários para seu entendimento. Somos acostumados a seguir, a partir do domínio das técnicas necessárias (WITTGENSTEIN, 2012) e quando compreendemos não há dúvida do significado, da aplicação das regras, pois "Não há dúvida de quero jogar xadrez; mas o jogo de xadrez é esse jogo por meio de todas as suas regras" (WITTGENSTEIN, 1987, p. 83).

As regras só têm sentido no seu uso e se agirmos conforme a exigência de sua gramática; toda linguagem envolve uma gramática, nesse sentido, os alunos precisam conhecer a gramática da matemática, para se apropriarem de suas regras e então, poder ter autonomia para *dar lances* nos jogos de linguagens envolvidos.

5.4.2 – Ver e ver-como

Na discussão do aprendizado baseado na filosofia da linguagem de Wittgenstein o conceito de ver-como pode nos elucidar algumas dificuldades de compreensão por parte dos aprendizes, pois esse não é um conceito mental, mas sim baseado no desenvolvimento de determinadas técnicas tendo em conta que o aluno, para vislumbrar um polinômio representado por uma figura geométrica, precisa estar hábil para tal. Para visualizar de diversas formas o mesmo conceito, ou seja, ter vivência do significado o aluno precisa seguir as regras para desenvolver habilidades análogas.

Na resolução da segunda questão do anexo C, dos dez alunos que responderam oito deles apresentaram erros na resolução de questões de fatoração, ou seja, apresentaram muitas dificuldades para visualizar o produto que originou a expressão algébrica. É fundamental que eles treinem mais para adquirir aptidão de *ver-como* e, então, ver um número como multiplicação ou potência.

A segunda questão foi enunciada dessa forma:

2) Que polinômio elevado ao quadrado é igual a:

a) $z^2 + 2zw + w^2$

b) $x^2 + 18x + 81$

Figura 12 - Questão dois do anexo C.

O estudante *um* respondeu o item "a" conforme a figura 13:

$$z + 2zw + w^2 = (z^2 + w^2)^2$$

Figura 13 - Exemplo da dificuldade em ver uma expressão como produto notável.

Fica evidente, na figura 13, que o aprendiz não conseguiu ver a expressão z^2 + 2zw + w^2 como o produto notável $(z + w)^2$, consequentemente como (z + w) . (z + w). É na prática de efetuar esses cálculos que passa a reconhecer uma expressão como um produto notável.

O aluno *três* também exemplifica dificuldade em enxergar uma expressão como produto na resolução do item b da figura 11, conforme a figura 14:

$$x^2 + 18x + 81 = (2x + 9)$$

Figura 14 - Exemplo da dificuldade em ver uma expressão como produto notável.

O aluno *três* ao desenvolver um polinômio resolveu, mas não o representa como produto evidenciando, dessa forma, que não visualizou a expressão como um produto notável. Ele escreveu no questionário que tem muita dificuldade com fatoração, relatando que não compreende bem.

1 - Você teve dificuldades em resolver os exercícios? Descreva quais dificuldades? (Caso seja possível exemplifique).

muitas, são tantas que é difícil saber. muitas relacionadas aos desenhos e fatoração.

Ao estudar produtos notáveis e fatoração, o estudante precisa assimilar os diferentes usos que uma expressão linguística pode ter. As proposições matemáticas podem ser expressas por figuras geométricas, um número pode ser expresso como produto em forma de potência e assim por diante. *Ver-como* extrapola o campo visual (HEBECHE, 2002),

A segunda questão do anexo D também exemplifica muitos problemas de *ver* a expressão *como* produto, pois dos 13 alunos que a responderam nove apresentaram dificuldades no desenvolvimento dela, conforme sinalizamos na figura 15:

2) Escreva o fator comum de cada um dos polinômios.

a) $32x^2y - 56xy^2$

b) $36\,ab - 18\,bc - 24ac$

Figura 15 - Questão dois anexo D.

O aluno *dez* ao responder o item “a” exemplifica dificuldades em ver a expressão como produto da mesma forma que apresenta dificuldades com a tabuada, conforme ilustrado na figura 16.

$$32x^2y - 56xy^2 = 12x^2y^2$$

Figura 16 - Exemplo da dificuldade em ver uma expressão como produto notável.

O aluno *dez* expressa essa dificuldade também no questionário:

2 - Explique como você identifica o que deve ser feito para resolver os exercícios que foram propostos.

Tem coisas que nem entendo, o ultimo assunto parece que temos que adivinhar, eu nunca sei,

Essa situação revelada pelo aluno *dez* nos evidencia que, para ele, é como se tivesse que adivinhar. Por não ter habilidade com a tabuada, logo, não consegue *ver* o número que representa o divisor comum entre 32 e 56, pois as diferentes formas de ver-como, de vivenciar as proposições matemáticas não são embasadas nas experiências empíricas e sim gramaticais. (WITTGENSTEIN, 2012).

Outro ponto de destaque no conceito de *ver como* se dá na associação de expressões algébricas com figuras geométricas. São muitas situações onde não se consegue associar as expressões mesmo sabendo calcular área e perímetro de figuras.

O exemplo ilustrado na figura 17 nos chamou a atenção, pois nenhum aluno respondeu a questão sete do anexo C, conforme a figura 17:

7) Com base na figura abaixo, responda: qual é o polinômio que representa a área do quadrado azul?

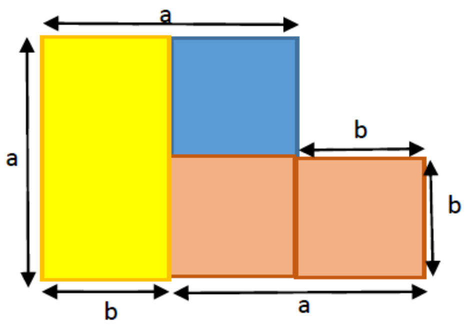


Figura 17 - Questão sete anexo C.

O aluno *treze* foi o único aluno que tentou e quase respondeu de forma correta, porém não conseguiu seguir as regras corretamente quanto à medida do lado do quadrado azul. Esta medida deveria ser elevada ao quadrado para encontrar a respectiva área na qual o lado do quadrado azul é a medida de (a – b) e, para encontrar a área de um quadrado, basta elevar a medida do lado ao quadrado. Logo, $(a - b)^2$ ou enxergar que o quadrado azul é a medida de:

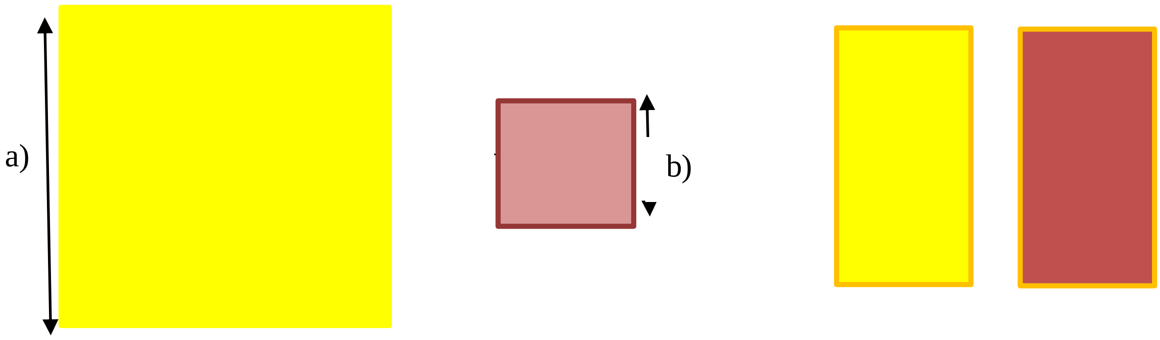


Figura 18 - Outra maneira de ver a figura 17.

Resultando na expressão $(a^2 + b^2) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$ na resolução foi mostrado aos alunos (alguns comentaram - *se eu soubesse que era só isso...*) isto evidencia que o aluno precisa do devido conhecimento das regras para conseguir visualizar o desenho conforme é mostrado na **figura 18**, que por sua vez, não são óbvias aos estudantes, por isso a necessidade da explicação. É pela explicação dos conceitos que não são evidentes aos alunos que podem começar a vivenciar diferentes usos das palavras e significados ainda não conhecidos (WITTGENSTEIN, 2012). A figura 19 ilustra a resolução utilizada pelo aluno *treze*.

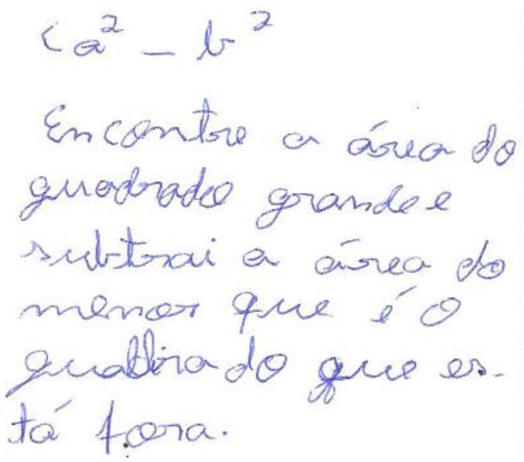


Figura 19 - Dificuldade de ver a expressão algébrica na figura geométrica.

A questão cinco, do anexo C, representou muitas dificuldades aos alunos. Dos treze, que responderam ao questionário, cinco não responderam tal questão. De oito, seis erraram e apresentam bastante dificuldade em ver a expressão como uma figura geométrica, conforme mostra a figura 20:

5) Represente geometricamente os quadrados das somas abaixo, supondo a > 0 e y > x > 0.

a) $(y + x)^2$

Figura 20 - Questão Cinco anexo C

Ao responder o item, o aluno *onze* não definiu na figura geométrica que medida seria x e y. Ele exemplificou a medida do lado do quadrado por x + y, conforme a figura 21 abaixo:

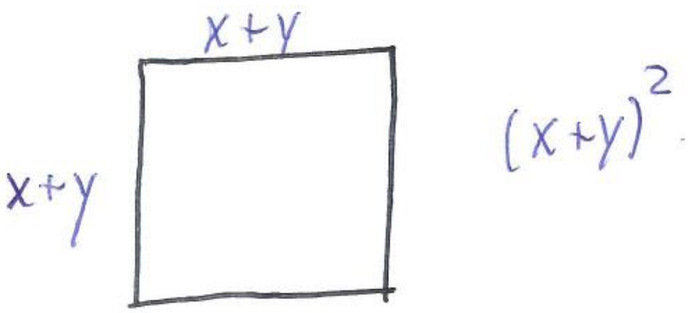


Figura 21 - Dificuldade de ver a expressão algébrica na figura geométrica.

Apresenta dificuldade com a relação às expressões:

3 - Você encontra dificuldades em relacionar as áreas de figuras geométricas com expressões algébricas?

bastante, não entendo

Apesar de o estudante afirmar que não entende, declarou também que conseguia representar minimamente a ideia de que o produto $(x + y)^2$ vem da relação da medida do lado do quadrado. Pelo acompanhamento das aulas, observamos que a relação entre expressões algébricas e figuras geométricas foi pouco explorada pela professora. Ela mostrou, algumas vezes, no quadro alguns exemplos, resolveu a questão representada na figura 20 em sala de maneira muito breve e sem explicar, por exemplo, porque a >0 e y > x > 0.

Alguns alunos expressaram nas respostas dos questionários, como nas questões resolvidas, problemas em *ver* a expressão *como* figuras geométricas. As diferentes possibilidades de uso de percepção das expressões se compreende bem a partir do domínio de técnicas, pois, ver é interpretar (WITTGENSTEIN, 2012). Ao seguir corretamente as regras, o aprendiz adquire um certo grau de liberdade com que se *vê* os diferentes aspectos e isso representa uma certa clareza conceitual (SILVA; SILVEIRA, 2014).

5.4.3 – Dificuldades com a tradução linguagem matemática / linguagem natural

Percebe-se muito evidente que há um processo de tradução da linguagem matemática, que é formalizada para a linguagem natural e vice-versa. No entanto, “esta disciplina nem sempre é tão evidente ou uma tarefa tão fácil, pois os símbolos e as regras da matemática não constituem uma linguagem familiar” (GRANELL, 2003, p. 261).

O conceito matemático só adquire sentido ao aluno quando passa a aplicá-los. Dessa forma nos conectamos com toda sua gramática. Nesse sentido a atuação do professor é fundamental para que o aluno conheça novos contextos, novas atividades e procedimentos que acompanham os símbolos e, dessa forma, vai estabelecendo uma conexão entre conceito de ensino e significado.

Na pesquisa efetuada, muitos alunos mostraram embaraços quanto à tradução de questões escritas na linguagem natural para a linguagem matemática, especificamente a algébrica. Inferimos esses percalços a partir do não seguimento das regras matemáticas na solução das atividades, tornando dessa forma, em erros cometidos pelos estudantes. Podemos exemplificar essas dificuldades na resposta do aluno ao resolver a questão cinco do anexo A, conforme a figura 22:

5) Marcela preparou para vender X kg de bolo, Y centenas de salgadinhos e Z centenas de docinhos para uma festa de aniversário. Sabendo que um quilograma de bolo custa R$ 30,00, cem salgadinhos custam R$ 28,00 e cem docinhos, R$ 62,00, escreva um polinômio que represente a quantia que Marcela deverá receber.

Figura 22 - Questão cinco anexo A

Dos quinze estudantes que responderam esse primeiro anexo, nove não identificaram o polinômio correto para representar a quantia que Marcela deveria receber.

A figura 23 apresenta a resposta do aluno *vinte e três* e evidencia um erro comum entre os alunos que responderam a questão.

$x + y100 + z100$

$30x + 100 \cdot 28y + 100 \cdot 62z$

$30x + 2800y + 6200z$

quantidade que Marcela vai receber

Figura 23 - Dificuldade dos alunos com a tradução da linguagem natural/matemática

O aprendiz transgrediu a regra matemática devido à falta de entendimento quanto ao comando, pois não precisava multiplicar por cem, conforme foi feito na resolução apresentada. A impressão que dá é de que os estudantes sentem a necessidade de operar com todas as quantidades que aparecem na questão. Na verdade esse comportamento é expresso pelo não entendimento das regras a serem seguidas.

O mesmo aluno (*vinte e três)* relata no questionário a dificuldade de entendimento dos problemas escritos em linguagem natural:

1 - Você teve dificuldades em resolver os exercícios? Descreva quais dificuldades? (Caso seja possível exemplifique).

Nas figuras, em fatorar e nas questões escritas, não sei o que pedem para fazer.

Dificuldade semelhante foram encontradas nas respostas de alguns aprendizes na primeira questão do anexo B, conforme figura 24 a seguir:

1- Represente cada situação por um polinômio.

a) A idade de Clara e de sua filha daqui a x anos, se hoje, Clara tem 28 anos e sua filha 7 anos.

b) O total em reais de Bruna, se ela tem x moedas de R$ 0,25 e z de R$1,00.

Figura 24 - Dificuldade dos alunos com a tradução da linguagem natural/matemática

O aluno *quinze* ao resolver parece não ter entendido o comando da questão. Era para representar as situações expostas nas alternativas “a e b” através de monômios. Por não entender as regras necessárias para o correto desenvolvimento das atividades, o aluno confunde o contexto dos polinômios com equações e de maneira equivocada encontra um valor numérico, conforme nos evidencia a imagem abaixo:

$$28 + 7 + x = 0$$
$$x = 35$$

Figura 25 - Dificuldade dos alunos com a tradução da linguagem natural/matemática

A linguagem matemática envolve a tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica, ou seja, uma linguagem universal. Dessa forma possibilita a abstração das relações matemáticas envolvidas (GRANEL, 2003).

A correta tradução dos escritos em linguagem formal da matemática requer também um domínio de técnicas, caso contrário, os estudantes não compreendem o que deve ser feito, ou seja, não desenvolvem a habilidade de seguir as regras conforme as especificações da matemática. Fato, exemplificado pela resposta do aluno na figura 26 em resposta à terceira questão do anexo B:

3) Escreva binômios que representem cada caso.
Uma concessionária tem x motos e y carros.
Qual binômio representa:

a) O número de veículos?

b) O número de pneus?

Figura 26 - Terceira questão do anexo B

Na figura 27 a resposta do aluno *quatro* nos evidencia a dificuldade em seguir as regras corretamente necessárias à tradução dos conceitos formais da linguagem matemática.

a) $x+y=$

b) $4(x+y)-2(x+y)$

Figura 27 - Dificuldade dos alunos com a tradução da linguagem natural/matemática

A dificuldade do aluno *quarto* foi também sinalizada na resposta do questionário do estudante *onze* mostrando que o mesmo apresenta embaraços com questões contextualizadas:

2 - Explique como você identifica o que deve ser feito para resolver os exercícios que foram propostos.

Dificil, principalmente os problemas contextualizados, não sei o que é a letra.

Com base nas respostas dos alunos, podemos ressaltar que os escritos matemáticos garantem precisão, exatidão e objetividade em seus resultados, porém são formais com palavras muitas vezes desconhecidas do vocabulário dos alunos. A formação dos conceitos é um jogo de símbolos segundo determinadas regras, o significado dos signos e símbolos da linguagem formal da matemática depende do contexto na qual estão inseridos (SILVEIRA, 2015). Assim, a significação está relacionada ao uso das expressões linguísticas, pois “Ao descrever as regras que se seguimos ao aplicar as palavras em contextos específicos, relativiza uso dogmático dos conceitos e confusões de natureza conceitual são dissolvidas” (GOTTSCHALK, 2015).

5.4.4 – A desvalorização dos estudos

Em diferentes encontros educacionais, artigos de revistas, livros, e no próprio ambiente escolar, ouvimos o discurso de que precisamos motivar os alunos para que eles possam ter interesse em aprender. Além disso, que a contextualização é garantia de motivação e consequentemente de aprendizagem. Não que ter alunos motivados em estudar seja ruim. Muito pelo contrário, porém é só o professor que garante isso? Acreditamos que os alunos precisam ver sentido e percebam a importância em estudar, além de ter consciência que não é algo fácil, mas precisam reconhecer o valor em obter conhecimento.

Não há prestigio social em estudar (SILVA, 2016). Os alunos não aprendem, mas são aprovados. Entram nas universidades algumas vezes sem grandes esforços. Nesse sentido, não há motivo para se dedicar aos estudos. No contexto escolar atual é comum o discurso de que basta fazer os trabalhos de pesquisa, solicitados pelos professores, que já conseguem as notas suficientes para serem aprovados, porque metade da nota é de trabalhos e a outra é a prova. Basta nota cinco em todas as avaliações para ser aprovado no final do ano, sendo que normalmente os trabalhos são feitos em equipe, ou seja, nem todos os alunos têm a obrigação de fazer. Quando fazem, é comum só copiarem da internet.

Para muitos estudantes estudar é ruim ou mesmo não tem sentido, pois não acham importante. O desinteresse é maior na disciplina de matemática, pois muitos alunos e professores já assumem o discurso de que *nem todos são capazes de aprender* (SILVEIRA, 2005) ou de que *é importante mas não serve para mim* (SILVA, 2016). Esses discursos reforçam a desvalorização da prática docente no país, pois se os alunos não precisam estudar, ser professor também não é importante nem necessário. Qualquer outro profissional pode ser professor em muitas universidades. Dessa forma, parece não ter sentido ser professor.

Ademais, é necessário que a comunidade escolar tome consciência da importância do eixo escola-professor-conhecimento para o desenvolvimento dela, valorizando e prestigiando a escola e o conhecimento formal como um todo e, não o contrário. Muitas vezes, observamos uma certa aversão ao conhecimento como se o estudar fosse prejudicial aos alunos.

A respeito da importância da escola e do conhecimento, Benedetti destaca:

> a educação de um País não tem como se concretizar adequadamente se: **escola** (enquanto instituição social instrutora – e não cuidadora – do indivíduo), **professor, aprendizado e conhecimento** não tiverem um **valor positivo realmente reconhecido,** outorgado pela sociedade e pelos grupos sociais significativos dos quais fazemos parte. **Ensinar** e, principalmente, **aprender** são comportamentos que **precisam** ter um **valor social muito significativo,** de maneira que seja conveniente e interessante para a maioria dos jovens conquista-los (BENEDETTI, 2013, p.54).

Nesse sentido, precisamos reconhecer a função enriquecedora para a vida pessoal e valorização do indivíduo na sociedade em que se vive. Os alunos precisam querer aprender, por entenderem que é importante. No entanto, o que vemos é um certo descaso por muitos estudantes com as atividades escolares, conforme observamos na questão a seguir:

Na questão sete do anexo C, conforme a figura 28 , na qual foi respondido por 10 alunos, destes somente um aluno tentou resolver. Os demais não tentaram resolver nada, supomos que não demonstraram o devido interesse, pois, já havia sido explicado pela professora, mesmo assim demostraram falta de interesse em responder, ou seja, parece não ter importância alguma:

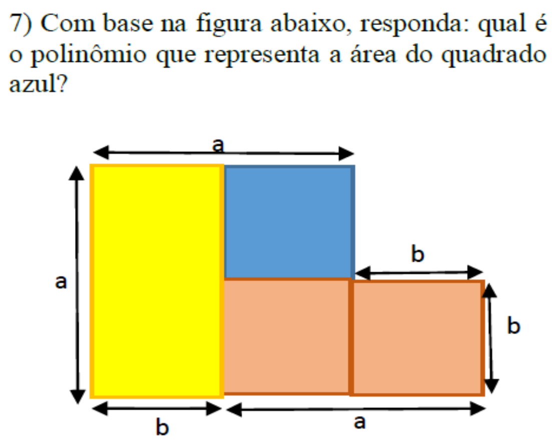


Figura 28 - Questão sete anexo C

No item b, na terceira questão do anexo C, devido a presença da $\sqrt{7}$, mais da metade dos alunos deixaram de fazer. O aluno *oito* declarou não saber a raiz de sete, conforme se vê a figura 29, mas parece nem ter lido a questão corretamente, pois não seria necessário calcular o valor desta a questão era para fatorar o polinômio $\sqrt{7}\,x + 2\sqrt{7}\,x^2$, no geral, os muitos alunos parecem ler as questões sem a devida atenção necessária para um bom entendimento, isso interfere bastante na aprendizagem**:**

$\sqrt{7}\,x + 2\sqrt{7}\,x^2$

não sei esse $\sqrt{7}$

Figura 29 - Falta de leitura apropriada

Percebe-se a falta de interesse em pelo menos ler a questão com atenção para resolver, pois só viu a raiz de sete e já disse que não sabia resolver. Sobre isso, pautamos o nosso discurso no sentido que os alunos precisam querer aprender “para que o exercício da docência se concretize de maneira satisfatória, o aprendizado formal deve ser muito desejado pelo aprendiz” (BENEDETTI, 2013, p. 55).

Não estamos aqui dizendo que o professor não precisa se apropriar do conhecimento, não precisa utilizar alguns artifícios que ajudem a fazer os estudantes compreender os conteúdos. Muito pelo contrário. Só que não existe fórmula ou metodologia mágica. Mas, o professor deve se apropriar muito bem dos conteúdos, pois é a base para um bom ensino já que não se ensina o que não sabe bem como os alunos precisam se esforçar e almejar adquirir conhecimento, sem que o professor faça papel de humorista ou comediante para que isso aconteça.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa buscamos identificar as dificuldades dos alunos no desenvolvimento das expressões algébricas, mais especificamente no que se refere às de ordem linguística tendo como referencial para análise a filosofia da linguagem de Wittgenstein, pois, acreditamos que muitos dos problemas relacionados à aprendizagem dos alunos envolvem distorções no uso da linguagem.

Nesse sentido, não consideramos a linguagem matemática como um conjunto de simbologias somente, e enfatizamos todos os pressupostos envolvidos, como a compreensão das proposições matemáticas por meio da escrita codificada, a interpretação dos escritos em linguagem natural, quando os enunciados dos escritos matemáticos ficam mais evidentes os alunos ficam mais esclarecidos quanto às regras que precisam seguir.

O conhecimento matemático possui particularidades própria de uma linguagem independente, autônoma, rigorosa, objetiva, ou seja, não se trata somente de uma manipulação de símbolos sem sentidos, existem normas a serem seguidas que independem da subjetividade ou do uso empírico; as especificidades aumentam no contexto da álgebra, pois são inseridas novas regras.

A pesquisa foi analisada no contexto das expressões algébricas, pois, para seguir corretamente as regras é necessário conhecer o contexto dos conceitos, como variável, incógnita, pois, apresentam uma sintática própria, o que evidencia que o usuário precisa do domínio de determinadas técnicas para compreender a nova linguagem, no caso, a linguagem algébrica.

Os conteúdos da álgebra são normalmente considerados obstáculos ao aprendizado, pois, envolvem outras formas de lidar e operar com os objetos matemáticos envolvidos, de maneira diferente de como é tido no contexto da aritmética e para que o aluno saiba identificar os diversos contextos e diferentes usos das palavras, ou seja, das regras matemáticas é fundamental o papel do professor. Para Wittgenstein as regras matemáticas não são passíveis de serem descobertas pelos alunos, precisam ser mostradas, explicadas.

Vale ressaltar que nossa interpretação dos objetos matemáticos não desconsidera as pesquisas pelo viés da construção do conhecimento por descobertas, por experimentação. De fato, tratamos sobre a formalidade e o rigor dos objetos matemáticos de maneira diferentes. Ao nosso ver, os objetos como os diferentes tipos de números, funções, potências entre outros, não existem por terem relação direta com o cotidiano e sim por convenções e necessidades contidas na própria formalização dos conteúdos (SILVEIRA, 2015).

Expomos um debate sobre o aprendizado da matemática, em particular o das expressões algébricas, trazendo um ponto de vista diferente quanto à importância de se atentar às particularidades da linguagem, fato, tão relevante no ensino de qualquer disciplina, da matemática se torna mais evidente, devido ao uso das simbologias.

Nossos resultados nos permite identificar muitas dificuldades dos alunos quanto à compreensão dos conceitos matemáticos, o de expressões algébricas mais especificamente, tanto com os escritos em linguagem natural, como em linguagem simbólica, assim como na relação com figuras geométricas.

Consideramos que o conhecimento matemático é fundamental no sistema educativo, tanto para o desenvolvimento intelectual, quanto social, é considerado uma importante ferramenta de aperfeiçoamento do raciocínio lógico e primordial ao avanço científico e tecnológico e a linguagem é parte fundamental desse processo.

Assim sendo, a relevância e dificuldades inerentes ao conhecimento matemático não podem ser desprezadas nem camufladas e, devemos buscar cada vez mais entender na perspectiva de alcançar um ensino mais eficiente.

De um modo geral, foi possível identificar que os alunos precisam dominar as técnicas necessárias ao correto seguimento das regras matemáticas, compreendendo que as palavras no contexto da matemática diferem do contexto empírico, advogamos que a matemática deve ser ensinada sob a perspectiva da linguagem, entendendo o seu funcionamento e sua relação com a língua natural. Para isso, é fundamental que o professor procure entender a imbricação existente entre essas linguagens, suas aproximações, interseções e distanciamentos, para que se evite certas confusões no ensino desta disciplina.

Acreditamos que nossa pesquisa contribui para o ensino da matemática e pesquisas em educação matemática em pelo menos dois aspectos. O primeiro diz respeito à percebermos que a contextualização dos conteúdos e o uso de outras metodologias por si só não estão resolvendo a problemática da aprendizagem dos alunos. O segundo aspecto se refere ao papel que a linguagem matemática desempenha na constituição dos conceitos matemáticos, para evitar determinadas confusões no ensino da disciplina o professor precisa dominar minimamente essa linguagem, e então ensinar aos alunos as técnicas necessárias ao correto seguimento das regras matemáticas.

Além disso, manifestamos a perspectiva de ampliar este trabalho, para trabalharmos no ensino das expressões algébricas o conceito de adestramento de Wittgenstein que não deve ser confundido com um treinamento animal, e sim um ensino de como seguir as regras, que aos poucos são introduzidas em práticas sociais, os alunos vão espontaneamente aprendendo as estruturas fundamentais desenvolvimento correto das regras. O adestramento pode e deve ser conduzido de forma leve, divertida e lúdica, vai depender da atuação do professor que é o maior responsável pelo aprendizado, para tanto é fundamental o entendimento o docente compreenda as nuances da imbricação da linguagem natural e matemática, e seus diferentes jogos de linguagem na qual fazem parte.

Ao contrário do que podem imaginar o adestramento pode despertar a criatividade e a autonomia no estudante, já que estas são características que naturalmente fazem parte dos seres humanos, desde que estes entendam as regras dos jogos de linguagem na qual estão inseridos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, I.L. **Do signo ao discurso**: introdução à filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola Editorial, v. 9. 2007.

ASIMOV, Isaac**. No mundo da álgebra**. 2. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1989. 186p.

ARCAVI, A. El desarrolho y el uso del sentido de los símbolos. In: PIMENTAL, A. BARBOSA, L.FONSECA, L. SANTOS, P**. Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores.** Lisboa: Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 29-48, 2006.

BAKER, G. P. & HACKER, P. M S. “Family resemblance”. In: BAKER, G. P. & HACKER, P. M. S. **Wittgenstein**: understanding and meaning – part I. 2. ed. Oxford: Blackwell, 2005. pp. 201-226.

BENEDETTI, K. S. **A dignidade ultrajada:** Ser professor do ensino público nos dias atuais. Rio de Janeiro, Barra Livros, 2013.

BOOTH, L.R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In; COXFORD, Arthur F.: SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003.

BONADIMAN, A. **Álgebra no ensino fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. (Dissertação de mestrado) Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS- Porto Alegre, 2007.

BORGATO, K. C. **O ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios:** uma articulação entre álgebra e geometria. (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Londrina – Programa de Pós Graduação em Matemática, Londrina – 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRUM, L.D. **Análise de erros cometidos por de 8º ano do ensino fundamental em conteúdos de álgebra** (Dissertação) Mestrado profissionalizante em ensino de Física e Matemática, Santa Maria, 2013.

CARDIA, L.S.F. **Integrando a geometria à álgebra na construção das expressões algébricas** (Dissertação de Mestrado), Mestrado em Educação Matemática, PUC, SP, 2007.

CARRASCO, L. H. M. **Leitura e escrita na matemática**. IN: Iara C.B et al. (orgs).Ler e escrever: um compromisso de todas as áreas, 4 ed. Porto Alegre: editora da Universidade /UFRGS, 2001 p.175-189.

CARVALHO, R.S. **Um estudo comparativo sobre a educação matemática entre Japão e Brasil.** (Dissertação) Mestrado no Ensino de Ciências e Matemática – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, SP, 2015.

CAVASATO, M. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo:** o que os erros cometidos pelos alunos podem informar (Dissertação de mestrado) – Programa de Educação em Ciências e Matemática. Faculdade de Física – PUCRS. Porto Alegre, 2010.

CHALOUH, L.; KIERAN, C. **Prealgebra: The transmition from Arithmetic to álgebra**. Research Ideas for the chassroom midde grades Mathematics. Kluwer Academic, 1996.

CHAUVIRÉ, C. **Wittgenstein**. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991

COSTA, R. J. M. **Jogar e aprender: a informática no ensino de àlgebra elementar**. 167p. Dissertação (Mestrado em Informática) – UFRJ, Rio de Janeiro (RJ), 2004.

CRUZ, A. **Seguir Regras em Wittigenstein**: Sobre a viabilidade da solução pragmática na discussão sobre regras – Seara Filosófica, p. 63-76, N. 01, Inverno 2010.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Autêntica, 2013.

DOLCE, Osvaldo & IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**. Vol. 10. São Paulo: Atual, 1997.

DRUCK, S. **A crise no ensino de matemática no Brasil**. Revista do Professor de Matemática. v. 53, n. 53, p. 01- 05, 2004.

GEBAUER, G. **O pensamento antropológico de Wittgenstein**. Tradução de Milton Camargo Mota. São Paulo: Edições Loyola, 2013.

GIANNOTTO, J.A. **Apresentação do mundo:** considerações sobre o pensamento de Ludwig Wittgenstein, Companhia das Letras, São Paulo, 1995.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2012.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra,** (Dissertação de Mestrado), Pontifícia Univ. Católica do Rio Grande do Sul, 2008.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. **A aquisição da linguagem matemática:** símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Ana. **Além da alfabetização:** a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora Ática, 2003, p. 257-282.

GONÇALVES, C. F. **Adestrar para a autonomia:** A crítica wittgensteiniana ao construtivismo. Dissertação mestrado, UENF, Campos dos Goytacazes, RJ, (2013).

GOTTSCHALK, C. **A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana**. Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GOTTSCHALK, C. **A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais**. Cadernos História, Filosofia e Ciências, jul/dez 2004. p. 305-334.

GOTTSCHALK, C. **Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar.** International Studies on Law and Education, 2014. 73-82.

GOTTSCHALK, C.M.C. **O conceito de compreensão** – a mudança de perspectiva de Wittgenstein após uma experiência docente. International Studies on Law and Education, Universidade do Porto, dez, 2012.

GOTTSCHALK, C.M.C. (Org.); PAGOTTO-EUZÉBIO, M. S. (Org.). **Filosofia e Educação: Interfaces.** 1. ed. São Paulo: Képos, 2014. V. 1. p. 272.

GRACIA, T. I. O "giro linguístico". In: IÑIGUEZ, Lupicinio (Coordenador). **Manual de análise do discurso em Ciências Sociais**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2005.

GRANGER, G.G. **Filosofia, linguagem, ciência**. (Tradução Ivo Storniolo e José Luiz Cazarotto) – Aparecida, SP: Editora Ideias & Letras, 2013.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do estilo**. Tradução de Scarlett Zerbetto Marton. São Paulo: Perspectiva, ed. da universidade de São Paulo, 1974 (coleção estudos).

GRAYLING, A. C. **Wittgenstein**. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

GRECCO, E.C.S. **O uso de padrões e sequências:** uma proposta de abordagem para a introdução à álgebra para alunos do 7º ano do ensino fundamental. (Dissertação de mestrado), Mestrado no ensino de matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2008.

GUERRA, R.B.; SILVA, J.S.C.; MENDES, M.J.F.; **Fundamentos de Matemática para o ensino fundamental**, EDUFPA, vol. 38, 2008.

GURGEL, D. F.. **A tese do aprendizado da linguagem por adestramento em Wittgenstein.** In: VIII SAF - Semana de pós-graduação em Filosofia - PUCrio, 2008, RJ. Analógos (PUCRJ), 2008. p. 106 - 114.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência**: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E.M. **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática,** Campinas, SP: Editora Alínea, 2010.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO E. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** In: Seminário Luso-Brasileiro: Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores. 2005, Lisboa. Anais... Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** Percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

KLÜSENER, R. **Ler, Escrever e Compreender a Matemática, ao Invés de Tropeçar nos Símbolos**. In: NEVES, Iara et al. Ler e Escrever: Compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Editora da Universidade, 2001. p. 177 – 191.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 6. ed. 5. reimp. São Paulo: Atlas, 2007.

MANZINI, E. J. **A entrevista na pesquisa social**. Didática, São Paulo, v. 26/27, p. 149-158, 1990/1991.

MARCONDES, D. **Filosofia, linguagem e comunicação**, 4 ed. São Paulo, Cortez, 2001.

MEIRA, J.L. **Labirintos da compreensão de regras em matemática: Um estudo a partir da regra de três.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Belém, UFPA, 2012.

MELO, L.A.S. **Dois jogos de linguagem: a Informática e a Matemática na aprendizagem de função quadrática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Belém, UFPA, 2013.

MORENO, A.R. **Introdução a uma Pragmática Filosófica:** de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas, SP; Editora da Unicamp, 2012.

NETO, F. P. R. **Um estudo sobre aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais.** 1998. 270p. Tese (Doutorado em Educação) – UFRN, Natal (RN). Orientador: John Andrew Fossa.

OLIVEIRA, L.O**. O ensino da matemática na resolução de problemas proposto em materiais didático para o oitavo ano do ensino fundamental** (Dissertação de mestrado), Mestrado no ensino de matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2012.

OLIVEIRA, P. **Quadro de referência e tradução: Schleiermacher e a hermenêutica à luz do Wittgenstein tardio**: In: MORENO, A.R.(org.) Wittgenstein e a Epistemologia. Coleção CLE, v.63, p.247-272, 2013.

ONUCHIC, l.; ALLEVATO, N. S. **Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. Educação Matemática: Pesquisa em Movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

ORTON, A; ORTON, J. **Pattern and Approach to Algebra**. Em A.Orton(Ed), Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics. Londres, Cassel, p. 104-124, 1999.

POFFO, J. **Álgebra nos anos finais do ensino fundamental: reflexões e atividades pedagógicas.** (Dissertação de mestrado) Programa de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2011.

POLLA, G.B. **As pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental:** Panorama de 10 anos da pesquisa brasileira pós PCN (Dissertação de mestrado) Programa de Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, Ms – 2010.

PONTE, J.P. BRANCO, N. MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação de Portugal.** Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Portugal, 2009.

PRODANOV, C.C. & FREITAS, E.C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico.** 2ª Ed. Novo Hamburgo – RS: Feevale, 2013.

RIBEIRO, J. **Matemática**: Projeto Raddix – raiz do conhecimento. São Paulo: Scipione, 2010.

RORTY, R Wittgenstein e a virada linguística. 1992. https://ghiraldelli.files.wordpress.com/2008/07/rorty_virada.pdf. Acesso em 27 de agosto de 2016.

SANTOS, S. M. **A dimensão figurativa como base do pensamento abstrato:** conceito e linguagem geométricos como facilitadores da construção de conceito e linguagem algébricos. 132p. Tese (Doutorado em Psicologia Social) – USP, São Paulo (SP), 2001.

SILVA, C.E.S. **Concepção de Significado: Implicações no ensino da matemática na alfabetização.** Dissertação (mestrado em Educação Matemática), Belém: UFPA, 2015.

SILVA, F. H. S.. **Formação de professores** – Mitos do processo. Belém: EDUFPA, 2009.

SILVA, P. V. **O aprendizado de regras matemáticas: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão.** Belém: UFPA, 2011. Dissertação (mestrado em Educação Matemática).

SILVA, P. V. **Qual o sentido de estudar matemática na escola? O que dizem professores e alunos**. Belém: UFPA, 2016. (Tese) Doutorado em Educação Matemática

SILVA, P. V.; SILVEIRA, M. R. A. **O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática:** um ensaio. Boletim Online de Educação Matemática (BoEM), Joinville, v.2. n.3, p. 17-34, 2014.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. “Matemática é difícil”: Um sentido pré- constituído evidenciado na fala dos alunos, 2002. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf Acesso em: 02/07/2016.

SILVEIRA, M.R.A.; SILVA, P.V.; **A compreensão de Regras Matemáticas na Formação Docente: Uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem.** Education Policy Analysis Archives. V.21; N. 27, 2013.

SILVEIRA, M. R. A. **Aplicação e interpretação de regras matemáticas**. Revista Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: v. 10, nº 1. 2008a. pp. 93-113

SILVEIRA, M.R.A.; MEIRA, J.L.; FEIO, E.S.P.; JUNIOR,V.P.T**. Reflexões acerca da contextualização dos conteúdos no ensino da matemática**. Revista Currículo sem Fronteira, v.14, n.1, p. 151-172, jan/abr. 2014.

SILVEIRA, M.R.A. **Linguagem matemática e comunicação:** um enfoque interdisciplinar AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas V.6 - n. 11, V. 6 - n. 12, 2010.

SILVEIRA, M. R. A. **Matemática, Discurso e Linguagens.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SILVEIRA, M. R. A. **Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem**. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.16, n.1, pp. 47-73, 2014.

SMOLE , K. S. ; DINNIZ, M. I. **Ler e aprender matemática.** In: SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.) Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SPINELLI, W. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar:** o caso do ensino da matemática (Tese), Programa de Pós Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

SOUZA, J.R; PATARO, P.M. **Vontade de saber matemática**. São Paulo: FTD. 2012.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.: SHULTE, Albert P. **As ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003. P.9 - 22.

VERGANI, T. **Um horizonte de possíveis sobre uma educação matemática viva e globalizante.** Lisboa: Universidade Aberta, 1993.

WITTGENSTEIN, L. **Da certeza** (DC). Lisboa: Edições 70, 2000.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas** (Zettel) (Z). Lisboa: Edições 70, 1989.

WITTGENSTEIN, L. **Gramática filosófica** (GF). São Paulo: Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. Tradução: Marcos G. Montagnoli, 7 ed – Petropolis – RJ - Vozes, 2012.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid, Alianza, 1987.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the Foundations of Mathematics** (RFM). Oxford: Blackwell, 1998.

WITTGENSTEIN, L. **The Blue and Brown books** (BB). Oxford: Blackwell, 1998.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-philosophicus** (TLP). São Paulo: Edusp, 1993.

ANEXOS

LISTA DE EXERCÍCIOS 01 - ANEXO A

1- Associe cada expressão algébrica a uma frase, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.

a) $2x + \frac{y}{3}$ d) $\frac{4x}{2}$

b) $2 \,.\, (x + 7)$

c) $3x + y^4$ e) $x^2 + 1$

I - o dobro da soma entre um número e 7.
II - A metade do quádruplo de um número.
III - O dobro de um número mais a terça parte de outro.
IV - O triplo de um número mais outro número elevado à quarta potência.
V- O quadrado de um número mais 1.

2- Determine o valor numérico de:

a) $3 \,.\, (x - 8)$, para $x = 12$

b) $3x + x^3$, para $x=4$

c) $x^3 - x^2 - 2x$, para $x = -2$

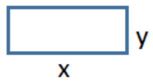
d) $\frac{5x}{2}$, para $x = -3$

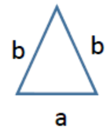
3- Escreva uma expressão algébrica para representar cada situação.

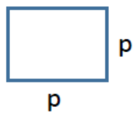
a) Para pagar algumas peças de roupa, dei R$ 28,00 de entrada e o restante dividi em 5 prestações iguais. Qual o valor de cada prestação?

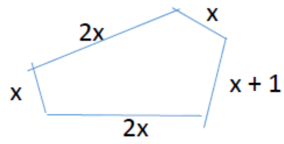
b) Nesse mês, o consumo de energia elétrica da casa de Pedro aumentou em $\frac{2}{9}$ em relação ao mês passado. Qual o consumo nesse mês?

4- Escreva um expressão algébrica que representa o perímetro de cada figura.

I) 

III) 

II) 

IV) 

Agora, calcule o perímetro da figura:

a) I, para x= 5 cm e y = 2 cm

b) II, para p = 4 cm

c) III, para a = 6,5 com e b = 7,2 cm

d) IV, para x = 5,3 cm

5) Marcela preparou para vender X kg de bolo, Y centenas de salgadinhos e Z centenas de docinhos para uma festa de aniversário. Sabendo que um quilograma de bolo custa R$ 30,00, cem salgadinhos custam R$ 28,00 e cem docinhos, R$ 62,00, escreva um polinômio que represente a quantia que Marcela deverá receber.

EXERCÍCIOS 02 - POINÔMIOS – ANEXO B

1- Represente cada situação por um polinômio.
   a) A idade de Clara e de sua filha daqui a x anos, se hoje, Clara tem 28 anos e sua filha 7 anos.

   b) O total em reais de Bruna, se ela tem x moedas de R$ 0,25 e z de R$1,00.

2) Obtenha o polinômio reduzido.

a) $3a^3 + 2b^5 - 5 + 2z^2 - 7a^3 + 10$

b) $5ab - 10ab^2 + 14ab - a$

c) $12m^2 + 9mn + 9mn - 12m^2$

3) Escreva binômios que representem cada caso.
Uma concessionária tem x motos e y carros.
Qual binômio representa:

   a) O número de veículos?

   b) O número de pneus?

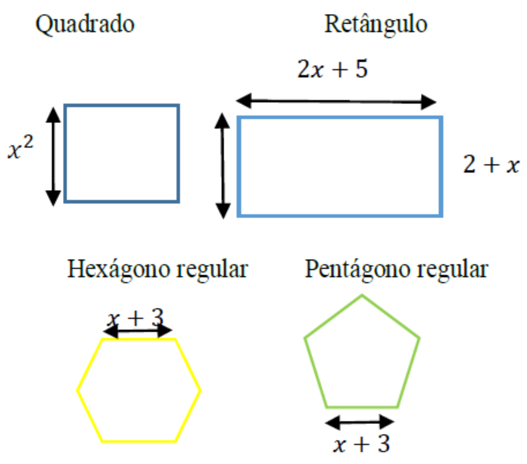
4) Calcule no caderno.

a) $(2x + 3y - 4z + 8) + (x - y + 2z - 2)$

b) $(7xy + 4x + 8z - 15)$ -$(6x + 10y - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3}\right) + y - z^2 + \left(\frac{x}{2}\right) + 4y - 3z^2$

5) Observe as figuras e responda



   a) Qual o perímetro de cada uma dessas figuras?
   b) Qual o perímetro de cada uma para x = 5?

6) Qual o produto de $(x + 1)$ e $(x - 1)$?

7) Qual a multiplicação de $(x - 1).(x + 1).(3x + 1)$?

8) Encontre os produtos escrevendo o resultado na forma reduzida.

a) $(3x).(-1{,}4x^2y).(-5y)$

b) $-2a.(x + 4)$

c) $(x + 5).(x^2 + 2x - 10)$

d) $(b - a).(2b - a)$

e) $(5 - x).(x^2 + 1)$

9) Escreva os resultados das divisões abaixo.

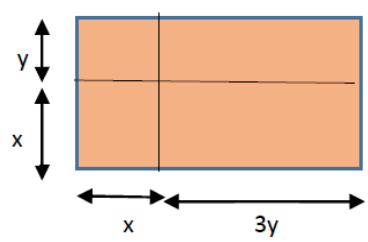
a) $(x^3y + x^2y^2 + x^2y) : (x^2y)$

b) $(6x^4y^2 - 6x^3y^2 + 6x^2y^2) : (6x^2y^2)$

c) $(3a^3b^3 - 3a^2b^4 + 3a^2b^3) : (3a^2b^3)$

d) $\left(-\frac{6x^3}{5} + 2x^2 - \frac{16x}{5}\right) : \left(-\frac{2x}{5}\right)$

10) Identifique o produto de polinômio que representam as áreas das figuras, formadas por retângulos.



EXERCÍCIOS 03 – PRODUTOS NOTÁVEIS –ANEXO C

1) Desenvolva algebricamente, cada quadrado da soma de dois termos.

a) $(3x+5)^2$ d) $(x^2+1)^2$

b) $(7a+1)^2$ e) $(2m^3+n)^2$

c) $(x+2y)^2$ f) $(4p+5q)^2$

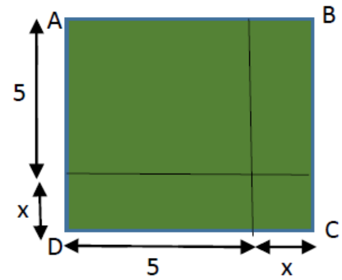
2) Que polinômio elevado ao quadrado é igual a:

a) $z^2 + 2zw + w^2$

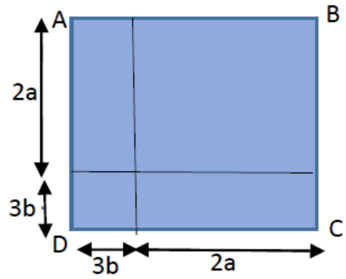
b) $x^2 + 18x + 81$

3) Em cada caso, escreva o polinômio que representa a área do quadrado ABCD.

a)



b)



4) Desenvolva cada quadrado da diferença de dois termos.

a) $(x-5)^2$

b) $(1-3y)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

d) $(2x-3y)^2$

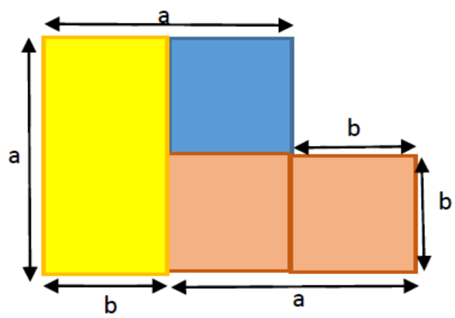
5) Represente geometricamente os quadrados das diferenças abaixo, supondo a > 0 e y > x > 0.

a) $(y+x)^2$ c) $\left(a+\frac{1}{2}a\right)^2$

b) $(2x+x)^2$ d) $\left(x+\frac{x}{3}\right)^2$

6) Calcule o valor de $(x-y)^2$ sabendo que $x^2 + y^2 = 65$ e $xy = 28$.

7) Com base na figura abaixo, responda: qual é o polinômio que representa a área do quadrado azul?



8) Encontre os polinômios que representam os resultados da multiplicações abaixo.

a) $(2x-6y).(2x+6y)$

b) $(9x-6y).(9x+6y)$

c) $\left(\frac{y}{6}+2x\right).\left(\frac{y}{6}-2x\right)$

d) $(0{,}5x+0{,}2y).(0{,}5x+0{,}2y)$

9) Encontre os polinômios cujo produto é igual a:

a) $4x^2-36y^2$

b) $81x^2-36y^2$

c) $-4x^2+\frac{1}{36}y^2$

d) $0{,}25x^2-0{,}04y^2$

e) $25-4x^2$

EXERCÍCIOS 04 – FATORAÇÃO – ANEXO D

1) Escreva os polinômios abaixo na forma fatorada.

a) $81x^2 - 1$

b) $a^4 - 121b^2$

c) $\frac{1}{4} - \frac{4}{9}y^2$

d) $-25 + d^4$

2) Escreva o fator comum de cada um dos polinômios.

a) $32x^2y - 56xy^2$

b) $36\,ab - 18\,bc - 24ac$

c) $\frac{x^3}{2} - \frac{y^2}{6}$

3) Fatore os polinômios.

a) $7bx + x - 7by - y$

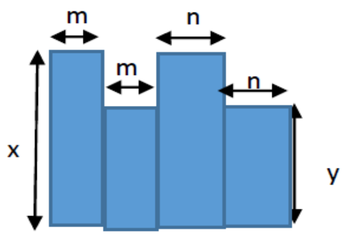
b) $\sqrt{7}\,x + 2\sqrt{7}\,x^2$

c) $ax + x + a + 1$

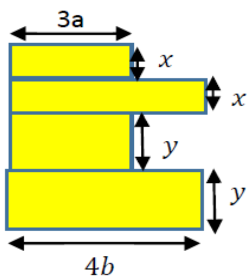
d) $7bx + xb - 7b - yb$

4) Escreva o produto de polinômios que representa a área de cada figura, formada por retângulos.

a)



b)



5) Fatore as expressões algébricas.

a) $8x^2 + 8y + mx^2 + my$

b) $7a - 21y^2 + ab - 3by^2$

c) $3ax + 3ay - bx - by$

d) $x^3 + x^2 - x - 1$

6) Complete o quadro com a forma fatorada dos polinômios.

Polinômio	**Forma fatorada do polinômio**
$x^2 + 28x + 196$	
$121x^2 - 154x + 49$	
$400 - 40x + x^2$	
$225x^8 + 121 - 330x^4$	
$64 + x^6 + 16x$	

7) Colocando o fator comum em evidência, escreva os polinômios na forma fatorada.

a) $2x^2 + 4x$

b) $ab^2 - 8ac$

c) $5zw^2 + 25z^2w$

d) $12xy^2 + 9x^5y^3$

e) $4a^3b^2c^5 - 6a^2b^3 + 14b^2c$

8) Fatore as expressões abaixo.

a) $9x^2 + 30x + 25$ d) $x^4 + 2x^2 + 1$

b) $49a^2 + 14a + 1$ e) $4m^6 + 4m^3n + n^2$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2$ f) $16p^2 + 40pq + 25q^2$

9) Fatore as seguintes expressões:

a) $x^2 - 10x + 25$ b) $1 - 6y + 9y^2$

c) $\frac{1}{4} - x + x^2$ d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

EXERCÍCIOS 05 – ANEXO E

1) Encontre os produtos escrevendo o resultado na forma reduzida.

a) $(3x) \,.\, (-1{,}4x^2y) \,.\, (-5y)$

b) $-2a \,.\, (x+4)$

c) $(x+5) \,.\, (x^2+2x-10)$

d) $(b-a) \,.\, (2b-a)$

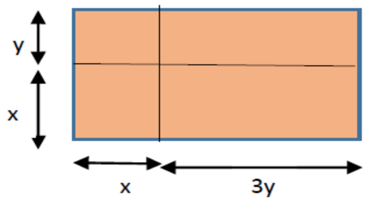
e) $(5-x) \,.\, (x^2+1)$

2) Calcule no caderno.

a)$(2x+3y-4z+8)+(x-y+2z-2)$

b)$(7xy+4x+8z-15)$ -$(6x+10y-3)$

3) Identifique o produto de polinômio que representam as áreas das figuras, formadas por retângulos.



4) Escreva o fator comum de cada um dos polinômios.

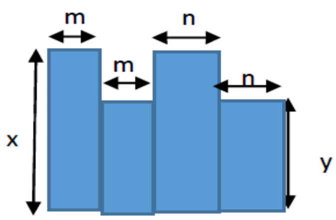
a) $32x^2y-56xy^2$

b) $36\,ab-18\,bc-24ac$

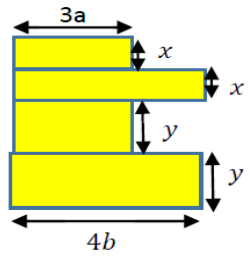
c) $\frac{x^3}{2}-\frac{y^2}{6}$

5) Escreva o produto de polinômios que representa a área de cada figura, formada por retângulos.

a)



b)



6) Complete o quadro com a forma fatorada dos polinômios.

Polinômio	**Forma fatorada do polinômio**
$x^2+28x+196$	
$121x^2-154x+49$	
$400-40x+\,x^2$	
$225x^8+121-330x^4$	
$64+\,x^6+16x$	

7) Encontre os polinômios cujo produto é igual a:

a) $4x^2-36y^2$

b) $81x^2-36y^2$

c) $-\,4x^2+\frac{1}{36}y^2$

d) $0{,}25x^2-0{,}04y^2$

8) Que polinômio elevado ao quadrado é igual a:

a) $z^2\;+\;2zw\;+\;w^2$ b) $x^2\;+\;18x\;+\;81$

9) Escreva os resultados das divisões abaixo.

a) $(x^3y+\,x^2y^2+\,x^2y)\,:\,(x^2y)$

b) $(6x^4y^2-\,6x^3y^2+\,6x^2y^2)\,:\,(6x^2y^2)$

10) Escreva uma forma fatorada do polinômio $100a^2-100b^2$.