SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

ALTERAÇÕES E RECOMBINAÇÕES PRAXEOLÓGICAS REVELADAS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO EM FORMAÇÃO CONTINUADA: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar

BELÉM – PARÁ
2017

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

ALTERAÇÕES E RECOMBINAÇÕES PRAXEOLÓGICAS REVELADAS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO EM FORMAÇÃO CONTINUADA: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do Título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.**

BELÉM – PARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA

Pereira, José Carlos de Souza.
Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar / José Carlos de Souza Pereira, orientador Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – 2017.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Professores de matemática – formação. 3. Álgebra. I. Nunes, José Messildo Viana, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

ALTERAÇÕES E RECOMBINAÇÕES PRAXEOLÓGICAS REVELADAS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO EM FORMAÇÃO CONTINUADA: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do Título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.**

Data da Defesa: 05 de abril de 2017.

Conceito: APROVADO.

BELÉM – PARÁ

2017

Banca Examinadora

1º Examinador (Orientador): ____

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (IEMCI/UFPA – Presidente da Banca)

2º Examinador (Interno): ____

Prof. Dr. Renato Borges Guerra (IEMCI/UFPA)

3º Examinador (Interno): ____

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales (IEMCI/UFPA)

4º Examinador (Externo): ____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP)

5º Examinador (Externo): ____

Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade (ETRB/PA)

Membro Suplente: ____

Prof. Dr. Carlos Ademir Farias da Silva (IEMCI/UFPA)

Membro Suplente: ____

Prof. (a) Dr. Iran Abreu Mendes (IEMCI/UFP

DEDICATÓRIA

À minha esposa Margarida.

Aos meus filhos Ruan e Jeanne.

À minha mãe biológica Maria Leocádia.

Aos meus tios Osvaldo e Maria.

À memória de meu avô Olavo e de minha avó Teófila.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me concedeu capacidade intelectual para concluir esta pesquisa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, pela solicitude, amizade e sábias orientações.

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud pelas relevantes sugestões que me permitiram redimensionar as discussões analíticas desta tese.

Ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra pelas contribuições matemáticas e teóricas que engrandecem esta tese.

Ao Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales pelas importantes recomendações para aperfeiçoar o texto desta tese.

Ao Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade pelas sugestões que aprimoram a base estrutural da tese.

Ao Prof. Dr. Carlos Farias e Prof. Dr. Iran Mendes pelo incentivo e motivação durante as conversas que tivemos.

Ao Prof. Dr. Francisco Hermes Santos por acreditar na minha potencialidade e grande propulsor das ideias contidas nesta tese.

Aos professores de matemática do ensino básico que participaram do processo de formação continuada, que foram fundamentais para esta pesquisa.

A coordenação do PPGECM pela presença ativa na defesa de seus pós-graduandos.

A CAPES pela bolsa de estudo concedida.

Aos integrantes do Grupo de Estudo em Didática da Matemática (GEDIM) pela amizade e estímulos durante as etapas do Curso de Doutorado.

As Diretoras das escolas estaduais “Fernando Ferrari” e “Frei Daniel” pela compreensão quando me ausentei para cumprir alguma atividade no Curso de Doutorado

A amiga Cristiane Couto Carvalho pela corresponsabilidade na monografia do curso de especialização.

Aos amigos Fernando Matos e Gerson Bacury pelo apoio logístico e tecnológico durante o processo de formação, que tornou possível esta pesquisa se concretizar.

A minha prima Soraia pelo carinho e incentivo.

Aos meus familiares em geral.

RESUMO

Esta pesquisa de tese tem por objetivo *desenvolver um percurso de estudo e pesquisa com professores de matemática do ensino básico, visando promover possíveis alterações e recombinações praxeológicas no equipamento praxeológico objetivados destes professores submetidos ao estudo de um modelo epistemológico alternativo para a álgebra escolar*. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) é o principal modelo teórico que fundamenta a base estrutural da pesquisa. Os elementos teóricos da TAD garantem um percurso metodológico consistente e, principalmente, a praxeologia metodológica do "*Parcours d'Ètude et de Recherche (PER)*". O processo de formação continuada foi realizado, incialmente, com doze professores de matemática do ensino básico e finalizado com oito professores. A metodologia do PER norteou esse processo de formação, constituído de onze sessões. Essas sessões foram filmadas e gravadas em áudios e partes dessas gravações foram transcritas na forma textual. A análise do material obtido nessas sessões revela as memórias didáticas ostensivas e a objetivação do equipamento praxeológico dos professores de matemática que participaram, integralmente, do processo de formação continuada. A consistência da objetivação do equipamento praxeológico dos professores que elaboraram e apresentaram suas propostas de aulas para ensinar polinômios, no oitavo ano do ensino fundamental, revelaram as possíveis alterações e recombinações praxeológicas, que o estudo do Modelo Epistemológico Alternativo promoveu no equipamento praxeológico e nas práticas docentes desses professores de matemática. A formulação da resposta para a questão norteadora da tese, seguiu a praxeologia que propomos em um modelo mínimo para a formulação de respostas, no contexto da praxeologia de pesquisa da TAD. Os resultados da pesquisa mostram que as nossas duas hipóteses foram confirmadas, pela análise que realizamos de parte das transcrições das falas dos seis professores que expuseram as suas propostas de aulas, assim como, da elaboração escrita dessas mesmas propostas. A confirmação das duas hipóteses garante a prova da tese. Nas conclusões e perspectivas estão os desfechos de todo processo da praxeologia metodológica empregada nesta pesquisa.

Palavras-Chave: Álgebra Escolar; Teoria Antropológica do Didático; Parcours d'Ètude et de Recherche (PER); Modelo Epistemológico Alternativo; Memória Didática Ostensiva.

ABSTRACT

This research aims to develop a course of study and research with teachers of basic mathematics, aiming to promote possible changes and praxeological recombinations in the praxeological equipment objectified of these teachers submitted to the study of an alternative epistemological model for school algebra. The Anthropological Theory of Didactics (ATD) is the main theoretical model that bases the structural basis of the research. The theoretical elements of the ATD guarantee a consistent methodological path and, mainly, the methodological praxeology of the Parcours d'Ètude et de Recherche (PER), presented by Chevallard. The continuous training process was carried out, initially, with twelve teachers of basic mathematics and finished with seven teachers. The PER methodology guided this training process, consisting of eleven sessions. These sessions were filmed and recorded in audios and parts of those recordings were transcribed in the textual form. The analysis of the material obtained in these sessions reveals the ostensible didactic memories and the objectification of the praxeological equipment of the math teachers who participated fully in the process of continuous formation. The consistency of the objectification of the praxeological equipment of the teachers who elaborated and presented their proposals of classes to teach polynomials in the eighth year of elementary school revealed the possible praxeological alterations and recombination that the study of the Alternative Epistemological Model promoted in praxeological equipment and practices Teachers of these math teachers. The formulation of the answer to the guiding question of the thesis, followed the praxeology that we propose in a minimal model for the formulation of answers, in the context of the research praxeology of the ATD.The results of the research show that our two hypotheses were confirmed by the analysis that we made of the transcripts of the statements of the six teachers who presented their class proposals, as well as the written preparation of these same proposals.The confirmation of both hypotheses guarantees the proof of the thesis. In the conclusions and perspectives are the outcomes of all process of the methodological praxeology employed in this research.

Keywords: School Algebra; Anthropological Theory of Didactics; Parcours d'Ètude et de Recherche (PER); Alternative Epistemological Model; Ostensible Didactic Memory.

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objectif de développer un cours d'étude et de recherche avec des professeurs de mathématiques de l'enseignement fondamental, afin de promouvoir de possibles modifications et recombinaisons de l´équipement praxéologique de ces enseignants soumis à l'étude d'un modèle épistémologique alternatif pour l'algèbre scolaire.La théorie anthropologique du didactique (TAD) est le principal modèle théorique sur lequel s´appuie la base structurelle de la recherche. Les éléments théoriques de la TAD garantissent un parcours méthodologique cohérent et, surtout, la praxéologie méthodologique « Parcours d'Ètude et de Recherche (PER) ». Le processus de la formation continue a été réalisé, au début, avec douze professeurs de mathématiques de l'enseignement fondamental et finalisé avec huit enseignants. La méthodologie du PER a guidé ce processus de formation, constituée de onze séances. Ces séances ont été filmées et enregistrées en audio et une partie de ces enregistrements ont été transcrits sous forme textuelle. L'analyse du matériau obtenu lors de ces séances révèle les mémoires didactiques ostensifs et l objectivation de l´équipement praxéologique des professeur de mathématiques qui ont participé au processus de formation continue. La cohérence de l'objectivation de l'équipement praxéologique des enseignants qui ont préparé et présenté leurs propositions de leçons pour enseigner le concept de polynôme, en huitième année d'école fondamentale, a révélé les changements possibles et les recombinaisons praxéologiques, que l'étude du Modèle Épistémologique Alternatif a permis au niveau de l´équipement praxéologique et des pratiques des professeurs de mathématiques. Le libellé de la réponse à la question directrice de la thèse,a suivi la praxéologie que nous avons proposée dans un modèle minimal pour la formulation des réponses, dans le cadre de la recherche de la praxéologie de la TAD. Les résultats de notre recherche montrent que nos deux hypothèses ont été confirmées, par l'analyse d'une partie de la transcription du discours des six enseignants qui ont présenté leurs propositions de cours, ainsi que, le développement de leurs propositions écrites. La confirmation de deux hypothèse assure la preuve de la thèse. Dans nos conclusions et dans nos perspectives, nous présentos les résultats de l'ensemble du processus de la praxéologie méthodologique utilisées dans cette recherche.

Mots-Clé: Algèbre Scolaire ; Théorie Anthropologique du Didactique ; Parcours d'Ètude et de Recherche (PER) ; Modèle Epistemologique Alternatif ; Mémoire Didactique Ostensif.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem sua premissa no Curso de Especialização em Educação Matemática (2008-2009). É nesse curso que surgem as ideias iniciais da problemática aqui discutida e, como requisito de conclusão desse curso produz-se a monografia de Carvalho e Pereira (2009), na qual existe uma proposta didática para o ensino das operações polinomiais, no oitavo ano do Ensino Fundamental. Essa proposta didática atrela o ensino das operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão) às operações aritméticas fundamentais. Os autores, Carvalho e Pereira, inspiram-se nas ideias de Floriani (2000) para elaborarem tal proposta didática. A base teórica que esses autores assumem é a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) (MOREIRA, MASINI, 1982; AUSUBEL, 2002, 2003). O avanço da proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) prossegue na dissertação de Pereira (2012). Isso ocorre porque Pereira é autor nas duas obras. O redimensionamento teórico da obra de Pereira (2012), apoiado na Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999, 2002, 2009a), transforma a proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) em Modelo Epistemológico Alternativo para o ensino da Álgebra Escolar (PEREIRA, 2012).

Tanto na obra de Carvalho e Pereira (2009) quanto na de Pereira (2012) existe a problemática relacionada ao ensino da álgebra escolar (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990, 1994a; USISKIN, 1995; GASCÓN, 1994, 2011; CATALÁN, 2003), cujo modelo dominante é visto como uma generalização da Aritmética (CHEVALLARD, 1994a; GASCÓN, 1994a, CATALÁN, 2003; PEREIRA, 2012). Essa problemática nos impulsionou a investir nesta pesquisa doutoral, conforme descrevemos no primeiro capítulo desta tese.

No segundo capítulo, desenvolvemos um estudo para caracterizarmos a Álgebra Elementar Escolar. Para isso, selecionamos algumas obras de diferentes épocas. Essas obras são Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994a,1994b), Girard (1629, 1884), Viète (1630), Maclaurin (1753), Euler (1795), Lacroix (1799), Peacock (1842, 1845) e Burat (1876). Nas obras de Girard, Viète, Maclaurin, Euler, Lacroix, Peacock e Burat, realizamos uma análise ecológica mínima das organizações matemáticas escritas por esses autores. O resultado desse estudo indica que Álgebra Elementar Escolar possui conexões com os modelos epistemológicos da aritmética generalizada, da geometria euclidiana e do cálculo algébrico-funcional. Além disso, as organizações praxeológicas que os autores de diferentes épocas produziram, possuem certa familiaridade com as organizações matemáticas dos atuais livros didáticos (ANDRINI, 2012;

DANTE, 2013). Evidentemente, em cada época, o texto matemático possui sua gênese particular. O contributo deste segundo capítulo está no aprimoramento do topos do próprio autor desta tese, porque adquiriu melhor compreensão epistemológica sobre os objetos ostensivos e não ostensivos que constituem os blocos do saber-fazer e do saber da álgebra escolar atual.

O terceiro capítulo possui uma estrutura que envolve o quadro teórico relativo às questões, hipótese e objetivos. As obras de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994a), Gascón, (1994, 2002), Usiskin (1995), Catalán (2003), Delgado (2006), Ruiz-Muzón (2010), Pereira (2012), Chevallard e Bosch (2012), Ruiz-Muzón Et Al. (2012) e Coulange et al. (2012), consubstanciam esse capítulo. Além disso, acrescentamos o referencial teórico complementar (CHEVALLARD, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f, 2011a, 2011b, 2011c, 2012-2013, 2013-2014a, 2013-2014b; CHEVALLARD, BOSCH, 2012; MATHERON, 2000a, 2000b), que aprofundou ainda mais a nossa proposição de tese e a análise das informações coletadas durante o processo de formação continuada, as quais contam no Capítulo VI.

Nesse terceiro capítulo anunciamos as questões auxiliares, Q_0, Q_1 e Q_2, que compõem nossa questão principal $\boldsymbol{Q}$: **Quais alterações e recombinações praxeológicas ocorrem, no equipamento praxeológico objetivado do professor de Matemática do Ensino Básico, durante o decurso de um PER por meio de um Modelo Espistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar?** Para auxiliar a elaboração da resposta para nossa questão norteadora $\boldsymbol{Q}$, formulamos o seguinte objetivo geral: *Desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa com professores de Matemática do Ensino Básico, visando promover possíveis alterações e recombinações praxeológicas no equipamento praxeológico objetivados destes professores submetidos ao estudo de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar.*

O quadro teórico complementar possui várias interlocuções da TAD com diferentes obras (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2007, 2009g, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d, 2012-2013a, 2012-2103b; GASCÓN, 2011; CHEVALLARD, BOSCH, 2012; FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013). A partir das obras de Chevallard (1998, 2009g, 2011b) adaptamos as seguintes simbologias: $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$ = Dissertação de Pereira (2012); $\heartsuit_{\mathfrak{M}}$ = Monografia de Carvalho e Pereira (2009); $\heartsuit_{\mathfrak{E}}$ = Modelo epistemológico Alternativo de Pereira (2012) e, esta tese está denotada por $\heartsuit_{\mathfrak{T}}$. Criamos essas simbologias para dar maior fluidez ao nosso texto e conformar nosso discurso aos elementos teóricos da TAD.

O quarto capítulo descreve a praxeologia metodológica da nossa pesquisa, inserida no contexto da pesquisa qualitativa (TRALDI, DIAS, 2011), efetivado pela descritividade da revisão da literatura, referencial teórico, obtenção dos dados pelo dispositivo do PER e análise dos dados coletados durante o processo de formação continuada. Em nossa metodologia existe traços das noções da análise de conteúdo (BARDIN, 2011). Entretanto, a nossa opção teórica, a TAD, possui seus próprios “Fundamentos e métodos da pesquisa em didática” (CHEVALLARD; ARTAUD, 2013-2104a, 2013-2014b). A Investigação Codisciplinar (IC) e o “*Parcours d’Étude et de Recherche* (PER) ” (CHEVALLARD, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f) são os exemplos mais evidentes e utilizados nas pesquisas em Didática da Matemática (equivalente a Educação Matemática no Brasil). Além disso, configuram-se em nossa praxeologia metodológica, a Memória Didática Ostensiva ((MATHERON, 2000b; MATHERON, SALIN, 2002; ARAYA-CHACÓN, 2008; CANDAU, 2005, 2014) e a praxeologia do “*Parcours d’Étude et de Recherche* (PER)” (CHEVALLARD, 2001, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f; BARACHET; DEMICHEL; NOIRFALISE, 2007; ANDRADE, 2012). Desenvolvemos toda a nossa praxeologia metodológica da pesquisa alicerçada no modelo teórico da TAD e na metodologia do PER.

No quinto capítulo descrevemos todas as onze sessões do PER e exibimos partes das transcrições textuais originadas das filmagens e dos áudios dessas sessões. As sessões do PER foram modeladas em conformidade com os sistemas didáticos $S(X; Y; Q)$, $S_0(X; Y; Q_0)$, $S_1(X; Y; Q_1)$, $S_2(X; Y; Q_2)$ e $\mathcal{S}(X; Y; \mathcal{Q}_x)$. Entenda-se que os sistemas didáticos S_0, S_1 e S_2 são auxiliares de $S(X; Y; Q)$, e todos eles estão subordinados ao sistema didático $S(x; y; ♥_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$, sendo x = doutorando, y = orientador, $♥_{\tau}$ = esta tese e $\boldsymbol{Q}$ = questão norteadora. A simbologia $♥_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q}$ significa que a obra $♥_{\tau}$ leva a responder $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{Q}$ confirma a tese. O conjunto X é dos professores de matemática em formação continuada e Y dos diretores de estudo nas sessões do PER. As questões Q, Q_0, Q_1, Q_2 são controladas por $S(x; y; ♥_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$ e, $\mathcal{Q}_x$, são as questões formuladas pelos componentes de X. O sistema didático S possui a notação $S(y_1; \zeta; ♥_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$, que denota $y = y_1$ (principal diretor de estudo nas sessões do PER) e ζ = diretor de tese de y_1 (orientador).

O sexto capítulo contém a análise do processo de formação continuada com professores de matemática do ensino básico, que cumpriram a última atividade dessa formação: elaborar uma proposta de aula para ensinar polinômios no oitavo ano do Ensino Fundamental. Do total de doze professores, oito cumpriram essa atividade, dos quais seis apresentaram suas proposições de aula e dois apenas entregaram o esboço escrito. Quatro professores, dos doze, não participaram de todas as sessões do PER, desistiram por algum motivo do processo de formação continuada. Assim, nossa análise centrou-se nas propostas de aulas dos oito professores e nas transcrições das falas dos seis professores que explicaram o procedimento praxeológico contidos em suas propostas de aulas.

O procedimento praxeológico para analisar os conteúdos tanto das transcrições das falas dos professores quanto de suas propostas de aulas, norteou-se pelo modelo praxeológico mínimo que propomos na Figura 28 (Capítulo III) e resumo teórico da TAD do Quadro 20 (Capítulo VI). Dos encaminhamentos praxeológicos da análise, resultou nossa compreensão que a formulação da resposta ótimo $\boldsymbol{R}^{\blacktriangledown}$ para a questão $\boldsymbol{Q}$, de nossa tese, está atrelada ao conjunto formado pelas respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$, $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$ e $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$, indicadas em nosso modelo praxeológico mínimo. Esse conjunto de respostas confirmam nossas duas hipóteses de tese e altera o esquema herbatiano **Ⱨ3** para **Ⱨ4**, de tal modo, que a resposta $\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$ (resposta em estudo) completa sua transposição praxeológica à resposta $R^{\blacktriangledown}$. Para se chegar a resposta ótima, cumprimos quatro tipos de tarefas H_i ($\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$ e $\boldsymbol{H_4}$) da praxeologia de investigação $\mathcal{H}$ (CHEVALLARD, 2012-2013). Do Capítulo da análise avançamos para nossas conclusões e perspectivas, as quais possuem nossas considerações finais e proposições futuras.

I – A PROBLEMÁTICA DA PESQUISA NO CONTEXTO DA REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo posicionamos nossa pesquisa no contexto temporal de pesquisas já realizadas e que se inter-relacionam à problemática geral e específica que norteiam esta tese. Nesse caminho descritivo, apontaremos ideias diversas, algumas consolidadas e outras em fase de consolidação teórica. Nossa linha temporal não segue de forma linear, ora ela avança, ora ela retroage, entretanto, a problemática desta pesquisa tem sua premissa no ano de 2008, em um curso de especialização em Educação Matemática, avança no curso de Mestrado Acadêmico (2011-2012) e consolida-se com o projeto de Tese de Doutorado.

1.1. A Problemática no Curso de Especialização em Educação Matemática

O curso de especialização, ocorrido no período 2008-2009, oportunizou a leitura de referências bibliográficas de diversas áreas: Matemática, Educação Matemática, Psicologia, Filosofia, entre outras. Essas literaturas embasaram as disciplinas e a monografia de conclusão desse curso. É delas que originam as primeiras ideias para a problemática desta pesquisa doutoral. Digamos que são as ideias menores da problemática, mas que redimensionaram as possibilidades futuras.

A primeira disciplina desse curso trouxe em foco as Tendências Metodológicas em Educação Matemática. Nela surgiu a proposição de se aliar o ensino de expressões algébricas polinomiais, em dialética com o Sistema de Numeração Posicional Decimal. Nessa dialética, o valor posicional dos algarismos indo-arábicos, no Sistema de Numeração Decimal (daqui em diante SND) conduziria a modelização[1] de criação de expressões algébricas em uma variável. Essa modelização estabelece que o valor da variável seja igual à base dez. A fundamentação para essa ideia veio do livro de Floriani (2000), no qual o autor estabelece essa relação modelizadora para resolver as principais operações polinomiais com uma variável: soma, subtração, multiplicação e divisão. A resolução dessas operações polinomiais é intermediada

---

[1] A palavra **modelização** aparece em Chevallard (1989), mas não no contexto da TAD. Ocorre que, em Chevallard (2009f), ela ganha dimensão significativa no contexto da TAD, passa a ter uma compreensão diferente da de modelagem matemática como metodologia de ensino:

[...] o ponto de vista desenvolvido na TAD, com efeito, é que a atividade de modelização de sistemas (matemáticos) está no coração do trabalho matemático, ainda que a coisa nem sempre é percebida claramente (p. 13, tradução nossa)

[...] efetivamente o que causa o interesse de olhar a atividade matemática – mesmo elementar – como atividade de modelização, onde cria-se modelos e trabalha-se para os fazer falar: não para saber o sentimento de simplesmente visitar os monumentos feitos, mas para descobrir situações, dos pontos de vistas, das maneiras inéditas (ou parcialmente inéditas) de interrogar a real matemática, abrindo caminhos ainda não percorridos (p.17, tradução nossa).

pelas operações aritméticas fundamentais, ou seja, calcula-se o valor numérico para cada expressão polinomial em consonância com o SND.

A ampliação das ideias de Floriani (2000) consta na monografia, de conclusão do curso de especialização em Educação Matemática, de Carvalho e Pereira (2009). Nessa monografia, o segundo autor (PEREIRA) é o mesmo desta tese doutoral. No prosseguimento da modelização de Floriani (2000), Carvalho e Pereira (2009), fundamentaram suas ideias na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de David Ausubel (MOREIRA; MASINI, 1982; AUSUBEL, 2002, 2003). A TAS de Ausubel permitiu aos autores (CARVALHO; PEREIRA, 2009) redimensionarem a estratégia didática de Floriani, tornando-a uma proposta didática experienciada em sala de aula.

A proposta didática elaborada por Carvalho e Pereira (2009) aliou os conhecimentos prévios dos alunos, de uma turma do oitavo ano (na época 7ª série) Ensino Fundamental, sobre as operações aritméticas fundamentais, para que estes alunos compreendessem as semelhanças e diferenças que há entre as propriedades aritméticas e as propriedades algébricas. Isso porque os autores queriam e responderam a seguinte questão de pesquisa: “Como utilizar-se das operações aritméticas como conhecimento prévio já estabelecido no sistema cognitivo dos alunos desde as séries iniciais como subsunçores da aprendizagem das operações algébricas fundamentais? ” (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 2).

A pesquisa da monografia de Carvalho e Pereira (2009) conecta-se a problemática desta tese por vários motivos, a seguir, elencamos os principais:

- O segundo capítulo da monografia expõe sobre “As Implicações dos Sistemas de Numeração Posicionais em Relação às Quatro Operações Aritméticas” (p. 14-31);
- O terceiro capítulo descreve “A Transição das Operações Aritméticas para as Operações com Polinômios” (p. 32-48);
- No terceiro capítulo há o tópico “Uma proposta didática para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão com polinômios, buscando-se uma aprendizagem significativa na sétima série do ensino fundamental” (p. 35-48). É o tópico estrutural das ideias que constam na dissertação de Pereira (2012), mas com outra vertente teórica;
- O quarto capítulo discuti a efetivação da proposta didática em sala de aula (p. 49-89). Nesse capítulo constam as descrições do que ocorreu nas aulas de

> matemática conduzidas em conformidade com a proposta didática do terceiro capítulo.

O contexto principal da proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) é o ensino das principais operações polinomiais, no oitavo ano do Ensino Fundamental. Cabe ressaltar que esse contexto é vivenciado pelos autores, porque são professores de matemática do Ensino Básico. Temos assim as premissas iniciais da problemática de nossa tese, mas ainda de forma pormenorizada, algo que ganhará mais solidez na dissertação de Pereira (2012), proveniente de seu curso de Mestrado Acadêmico.

1.2. A Problemática no Curso de Mestrado Acadêmico em Educação em Ciências e Matemáticas

O curso de Mestrado Acadêmico em Educação em Ciências e Matemáticas, no qual ingressei em 2011 e concluí em 2012, garante maior avanço na problemática desta tese. É nesse curso que a proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) ganha nova dimensão teórica. Sai das ideias da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e assume as ideias da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2002, 2009, 2011a). Esse redimensionamento teórico é regado por um discurso unipessoal autobiográfico da Pesquisa Narrativa, adaptada para a TAD (PEREIRA, 2012). Note-se que a problemática desta tese possui maior grau de relação com a dissertação de Mestrado de Pereira (2012).

Os capítulos da dissertação de Pereira (2012) perfazem um percurso narrativo-descritivo, iniciando pelo capítulo de "Caracterização da Pesquisa" (p. 19). Esse capítulo possui três tópicos, cada um com particularidades próprias, mas interligam-se por intermédio do discurso narrativo do autor. O primeiro tópico faz uma síntese sobre a revisão dos "[...] Processos de Ensino e Aprendizagem da Álgebra" (p. 19-26). É um tópico que revisa compreensões relacionadas ao ensino da Álgebra no Brasil (GREGOLIN, 2002; CRUZ, 2005; CARVALHO, 2007; SOUSA, 2007; KEPPKE, 2007; LAVORENTE, 2008), Estados Unidos (USISKIN, 1995; SOUSA, 2007), França (CHEVALLARD, 1994a) e Espanha (PILAR BOLEA, 2003)[2].

O segundo tópico exibe "Breve Estudo Histórico sobre a Numeração Decimal" (p. 26-42). Esse segundo tópico constitui um percurso histórico pelos sistemas de numeração, entendidos como precursores do sistema de numeração posicional de base dez: Sistema de

[2] Nesta tese será citada por: (CATALÁN, 2003).

Numeração Babilônico, Egípcio, Ático, Romano e Hindu-Árabe (ALMEIDA, 2007; IFRAH, 1997a, 1997b, 2005; YVES, 2004; GALVÃO, 2008; CAJORI, 2007; GARBI, 2010). O terceiro tópico é estrutural na dissertação de Pereira (2012), perfaz "Um Estudo Epistemológico da Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de Polinômios" (p. 42-61), esse tópico se subdivide em dois subtópicos: "Aritmética e Álgebra na Base Dez e em Outras Bases" (p. 42) e "Objetos Ostensivos e Não Ostensivos nas Operações com Polinômios" (p. 56). Primeiro subtópico concretiza as ideias da monografia de Carvalho e Pereira (2009), de forma mais consistente, epistemologicamente, em conformidade com o sistema de numeração decimal posicional de base dez e bases quaisquer (DE MAIO, 2009, 2011; ZUIN, 2005; CARLES, 1927; ROXO et al.,1948; CRANTZ, 1949; WECHELUN, 1562). O segundo subtópico avança a narrativa do primeiro, insere-se a Teoria Antropológica do Didático (TAD) por meio dos objetos ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD e BOSCH, 1999; ALMOULOUD, 2007). Após esse segundo subtópico, o capítulo seguinte da dissertação de Pereira (2012), centra-se na Teoria Antropológica do Didático.

A Teoria Antropológica do Didático, na dissertação de Pereira (2012, p. 62-77), reafirma as ideias defendidas pelo autor no primeiro e segundo capítulos. Isso porque a modelização da TAD, em termos de bloco praxeológico – bloco prático-técnico e bloco tecnológico-teórico – reorganiza a proposta didática de Carvalho e Pereira (2009), para que ela se torne um modelo epistemológico de referência (MER) revelador das possíveis conexões entre aritmética e álgebra nos tipos de organizações praxeológica pontual e local (CHEVALLARD, 1999; CHEVALLARD, BOSCH, 1999; ALMOULOUD, 2007). Nesse redimensionamento epistemológico, a problemática da dissertação de Pereira (2012) alcança patamares mais sólido no bloco prático-técnico ou da práxis, constituído por tipo de tarefas T e a técnica τ ("modo de resolver"), este bloco é denotado por $[T, \tau]$ (CHEVALLARD, 1999). O bloco do saber ou logos, denotado por $[\theta, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999), no qual temos a tecnologia θ e a teoria Θ, também está nessa nova modelização em termos de MER (DELGADO, 2006).

O MER originado da proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) possui compreensões e intencionalidades próprias do autor (PEREIRA, 2012), que analisou suas próprias praxeologias como professor de matemática durante a sua participação na elaboração da proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) e, posteriormente, o teste dessa proposta didática em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental, na qual o mesmo era o professor de matemática.

A TAD na dissertação de Pereira (2012) é explicada por meio de várias noções fundamentais, principalmente, pelas noções do bloco da práxis e do logos. Além disso, a noção de objeto, relação pessoal, pessoa e instituição (CHEVALLARD, 2002, 2009a), definidas como noções fundamentais da TAD por Chevallard (2009a) estão bem evidentes na narrativa de Pereira, que o permite caracterizar o seu o Equipamento Praxeológico[3] (CHEVALLARD, 2009a) como professor de matemática. Nessa caracterização Pereira declara que teve conflitos cognitivos durante a dinâmica cognitiva estabelecida em seu Universo Cognitivo (CHEVALLARD, 2009a) que atualizou seu Equipamento Praxeológico para poder imprimir nova prática docente a partir da elaboração da proposta didática de Carvalho e Pereira (2009) e a transição desta proposta para MER. Os embates dessa dinâmica cognitiva são melhores explicitados no capítulo final da dissertação de Pereira (2012, p. 78-116), no qual ele analisa, em forma de episódios, suas próprias praxeologias docente no percurso de seu desenvolvimento profissional. É nesse capítulo final que Pereira (2012) concretiza as ideias finais do MER e o propõe como um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) (THURSTON, 1994; GASCÓN, 2002) para o ensino da álgebra escolar, principalmente, a do Ensino Fundamental.

Os desdobramentos da análise do teste do MER, em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental, revelaram que havia tipos de tarefas problemáticas que Floriani (2000) e Carvalho e Pereira (2009) não as examinaram em suas obras. Nesse sentido, Pereira (2012) evidencia que o trabalho da técnica τ, prevista para solucionar esses tipos de tarefas, precisava ampliar seu alcance, avançando para outros sistemas de números (Inteiros e racionais), ou seja, o sistema de numeração decimal e os números naturais limitavam o trabalho e o alcance da técnica τ (CHEVALLARD, 1999). Essa constatação permitiu que Pereira (2012) interligasse o trabalho e o alcance da técnica ao que anuncia Chevallard (2009a, p. 4, tradução nossa): "[...] **Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologias**"[4]. As palavras de Chevallard indicam a existência de

---

[3] [...] o conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, ou que está *equipada* (mesmo que não possa atualizar tal ou tal praxeologia que venha a ocupar tal posição dentro de tal instituição): é o que chamo de ***equipamento praxeológico*** da pessoa [...] (CHEVALLARD, 2009a, p. 1-2, tradução nossa, grifos nossos e no original).

[4] [...] **Estas alterações e recombinações praxeológicas estão no cerne da história social das praxeologias e no coração do problema** que queríamos levantar no que segue. Disso, aqui está um exemplo muito simples, onde o tipo de tarefa *T* é a divisão de um inteiro por outro: uma tarefa t do tipo *T* é, por exemplo, a divisão de 509 por 15. Certa técnica τ relativa a *T* conduz então a fazer isto: visto que $15 = 3 \times 5$, divide-se 509 por 5, que é equivalente a dividir 505 por 5; o quociente, 101, é então dividido por 3, que é equivalente a dividir 99 por 3: obtém-se assim 33, *que é o quociente procurado*. Esta técnica foi ensinada no colégio, nas primeiras décadas do século XX. Hoje, muitos professores de matemática se surpreendem e duvidam que ela "seja justa": de modo que o leitor experimente e sinta um momento salutar de incerteza tecnológico-teórica, abandonando em seguida o cuidado de reconstruir, se assim desejar, o logos matemático correspondente (CHEVALLARD; CIRADE, 2010, P. 1, tradução nossa).

alterações e recombinações praxeológicas no processo de transposição didática de uma instituição para outra, principalmente, quando o conceito de praxeologia está em jogo, ou seja, “[...] Uma praxeologia existente em uma instituição pode ser transposta para outra instituição com uma práxis idêntica, mas com um logos modificado; ou, ao contrário, com um logos mantido, mas com uma práxis modificada [...]” (CHEVALLARD; CIRADE, 2010, p. 1, tradução nossa). Do que anunciam Chevallard (2009a) e Chevallard e Cirade (2010) surge o fluxo mais forte para a problemática desta tese. Porém, voltada para a formação continuada de professores de matemática intermediada pelo MEA de Pereira (2012). Nesse sentido, a seguir, expomos as novas perspectivas dessa problemática.

1.3. A Problemática como Parte de um Processo de Formação Continuada de Professores de Matemática para o Ensino da Álgebra Escolar

A monografia de Carvalho e Pereira (2009) e a dissertação de Pereira (2012) são obras que estão entrelaçadas a problemática da formação continuada de professores de matemática. A primeira em nível amplo e a segunda em nível mais específico, em relação ao ensino da álgebra escolar. A confluência dessas duas pesquisas recai sobre o ensino e a compreensão epistemológica de objetos da álgebra escolar. Nessa confluência surgiu a problemática principal desta tese, que está interligada ao processo de formação continuada de um grupo professores de matemática do Ensino Básico. Conforme já anunciamos no tópico anterior, o MEA de Pereira (2012) será o principal instrumento de estudo dessa formação e as proposições teóricas da TAD, anunciadas por Chevallard (1999, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f), complementam o processo de formação.

A problemática da formação docente do professor de matemática vem sendo pesquisada em âmbito nacional e internacional. Diversos estudos têm revelado que a formação acadêmica inicial do professor de Matemática não consegue dar conta dos aspectos conceituais e epistemológicos que legitimam os objetos matemáticos ensinados na escola elementar (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990 1994a, 1999, 2009a; CHEVALLARD; BOSCH, 1999; GASCÓN, 2001, 2002, 2011; CATALÁN, 2003; DELGADO, 2006; MESQUITA, 2011; COULANGE *et al*., 2012; ANDRADE, 2012; PEREIRA, 2012). Além disso, segundo D’amore (2007), as lacunas não preenchidas na formação acadêmica inicial possibilitam o surgimento de obstáculos epistemológicos ou didáticos[5] que ficam “transparentes” nas práticas docentes do

[5] Os obstáculos de origem epistemológica são aqueles que não podem, nem devem ser evitados, pois são constitutivos do conhecimento propriamente dito. Os de origem didática são os que parecem depender das escolhas feitas no processo de ensino (BROUSSEAU, 2008, p. 51).

professor de Matemática do Ensino Básico[6], especificamente, do Ensino Fundamental e Médio. Tais lacunas podem evidenciar um dos problemas da formação docente relacionado ao modelo epistemológico da matemática assumido nas instituições formadoras (GÁSCON, 2001, 2002). Desta forma, a pesquisa de Pereira (2012), revela alguns aspectos intrínsecos de um tipo de modelo acadêmico de sua formação inicial, que pode ser o euclidianismo[7].

A formação continuada de professores de matemática, no Brasil, é objeto de estudo em várias pesquisas, isso é indicado pela busca no banco eletrônico de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior[8] (Capes), no qual fizemos uma busca aleatória por frases: 1) "teoria antropológica do didático **e** formação continuada de professores de matemática" (224.728 registros); 2) "teoria antropológica do didático **na** formação continuada de professores de matemática" (224.720 registros); 3) "formação continuada de professores de matemática" (224.588 registros); 4) "formação continuada de professores de matemática para o ensino **de** álgebra escolar" (224.632 registros); 5) "formação continuada de professores de matemática para o ensino **da** álgebra escolar" (224.697 registros); 6) "álgebra escolar e formação continuada de professores de matemática" (224.685 registros); 7) "objetos da álgebra escolar **na** formação continuada de professores de matemática" (224.698 registros) e 8) "objetos da álgebra escolar **e** formação continuada de professores de matemática" (224.713 registros).

Os resultados numéricos obtidos dos registros do banco de teses e dissertações da Capes, não significam que existam todas essas pesquisas sobre formação continuada de professores de matemática, mas sim, indicam a existência de pesquisas já finalizadas, que possuem alguma das palavras das frases que originaram a busca aleatória. Entretanto, cabe um refinamento desses resultados, algo que não faremos aqui, porque nossa intencionalidade foi apenas verificar certo quantitativo de pesquisas que tratam da formação continuada de professores de matemática no Brasil.

Nesse sentido, a problemática desta tese, redimensiona a formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico, em termos da álgebra escolar, propondo um modelo de formação adaptado a partir das ideias francesas e espanholas, que possuem modelos de formação inicial e continuada que articulam formação matemática, didática e prática

[6] Conforme está na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996, s. n. p.) a educação básica compõe-se de "educação infantil, ensino fundamental e ensino médio".
[7] "[...] los modelos epistemológicos situados dentro del *euclidianismo* tenían como único objetivo la justificación lógica de las teorías matemáticas (no necesitaban ninguna base empírica) [...]" (GASCÓN, 2001, p. 3).
[8] http://bancodeteses.capes.gov.br/

(BEDNARZ, PERRIN-GLORIAN, 2003; OLARRÍA et al., 2014). Dois países europeus, nos quais as fundamentações teóricas da Transposição Didática (TD) e Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1994a, 1994b, 1994c, 1996, 1997, 1998, 1999, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f, 2011b, 2011c, 2011d, 2012-2013, 2014; CHEVALLARD, BOSCH, 1999; CHEVALLARD, CIRADE, 2010; CHEVALLARD, ARTAUD, 2013-2014a, 2013-2014b) estão em pesquisas que tratam da formação inicial e continuada de professores de matemática. Além disso, na Itália até 2012, realizava-se o "SÉMINAIRE FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE - SFIDA"[9] [Seminário Franco-Italiano de Didática da Álgebra]. Seminário que reunia, principalmente, pesquisadores italianos e franceses para discutirem os diversos aspectos da álgebra relativos aos "[...] Campos Conceituais, Didática das Áreas de Experiência, Conhecimentos Locais e Tripla Abordagem, Personificação, Epistemografia, Epistemologia, Registros de Representação Semiótica, Semiótica, Teoria Antropológica do Didático, Teoria das Situações, etc. [...]" (DROUHARD, 2012, p. 188, tradução nossa). O contexto do SFIDA abrange da álgebra do ensino elementar até a álgebra do ensino superior. Devido essa abrangência, inferimos que a formação docente inicial e continuada de professores de matemática não fica isenta.

No âmbito estadunidense, não fizemos um levantamento mais consistente de como se dá o processo de formação continuada de professores de matemática, mas no site do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM)[10] [Conselho Nacional de Professores de Matemática] encontramos as efetivas ações prioritárias[11] em: *Access and Equity*, *Advocacy*, *Curriculum, Instruction, and Assessment*, *Professional Development*, *Research* e *Technology*. Notemos que entre as ações prioritárias do NCTM estão à formação continuada e o desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Nisso está incluído a álgebra, conforme evidencia Coxford e Shulte (1995), Ferrini-Mundy, Floden e McCrory (2003).

Com este terceiro tópico asseguramos a relevância da problemática de nossa tese e sublinhamos que o modelo de formação que propomos como parte dessa problemática será explicado nos capítulos IV e V. A seguir, expomos uma possível caracterização para a álgebra elementar escolar.

---

[9] https://sites.google.com/site/seminairesfida/sfida-38
[10] http://www.nctm.org/
[11] http://www.nctm.org/About/

II – UMA CARACTERIZAÇÃO POSSÍVEL PARA A ÁLGBERA ELEMENTAR ESCOLAR

Neste capítulo, expomos várias ideias concatenadas que nos levam a possível caracterização da álgebra elementar clássica e escolar (ASSUDE et al., 2012), seja na perspectiva do modelo clássico aritmético ou outro modelo capaz de tornar compreensível a evolução histórico-epistemológica de alguns objetos que constituem esse tipo de álgebra. Para concretizar nossa intencionalidade, aqui anunciada, faremos uma análise ecológica de várias obras, matemáticas ou não, conforme indicam Chevallard (1998) e Chevallard e Bosch (1999), de maneira que possamos extrair algumas conclusões sobre o que essas obras revelam ou discutem das possíveis características da álgebra escolar. A extensão dessa análise objetiva possibilitar ao autor desta tese, adquirir maior relação com o bloco do saber-fazer e do saber da álgebra elementar escolar, de tal modo, que isso o auxilie nas sessões do PER e na análise da atividade final do processo de formação continuada.

2.1. Aspectos Epistemológicos da Álgebra Escolar Revelados em Artigos de Yves Chevallard

Iniciamos nossa caracterização da álgebra escolar a partir do artigo de Yves Chevallard, intitulado: *A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio*. Nesse artigo Yves Chevallard (1984) anuncia a problemática que envolve o ensino da Aritmética e da Álgebra no contexto das escolas francesas (colégios e liceus). É a primeira parte de uma série se três artigos, sob esse mesmo título, com subtítulos: *A evolução da transposição didática* (1984); *Perspectivas curriculares: a noção de modelização* (1989); *Vias de alcance e problemas didáticos* (1990). Além disso, ele expõe ideias que estão associadas à evolução da transposição didática.

Ao longo do artigo de 1984, Chevallard cita e analisa fragmentos de várias obras, para situar em diferentes épocas, de como se deu o predomínio da Aritmética no contexto de práticas sociais e culturais. É por meio da análise desses fragmentos que ele assenta seu texto e assim revela elementos epistemológicos do saber matemático sobre Aritmética e Álgebra. Posteriormente, esses elementos epistemológicos servem de elementos teóricos para o autor revelar o embate de ideias entre a importância do ensino da Aritmética e da Álgebra no sistema educativo francês. Percebe-se no corpo do texto que Chevallard (1984) tem a intenção de iniciar uma discussão que não se esgotará nesse primeiro artigo, mas avançará em outros, que de fato se concretizou com a publicação de mais três artigos após esse.

Logo na introdução desse primeiro artigo o autor anuncia que a reforma no *corpus* da matemática, advinda por meio da matemática moderna (ocorrida no fim da década de 1960), trouxe a tona a problemática do currículo posto e legitimado por muito tempo no sistema educativo francês. Para explicitar essa problemática, Chevallard (1984) recorre a várias obras que estruturam o saber matemático no campo aritmético e algébrico. Entre essas obras ele cita[12]: Jacques Pelletier du Mans (1554), François Viète (1591), Euler (1774), Clairaut (1760), Félicien Girod (s. d.), M. Terquem (1827), Newton (s. d.), A. Lentin e J. Rivaud (1961), Albert Blanchard (1975), Smith (1953), Bourdieu (1974), Michel (1959), Althusser (1968), Chevallard e Johsua (1982).

A escolha dessas obras permitiu que Chevallard discutisse os tópicos postos no artigo, expondo argumentos que revelaram o posicionamento de alguns autores defenderem o saber aritmético como essencial no currículo escolar francês, segundo a compreensão de alguns destes, as epistemologias, dos objetos da Aritmética, foram estruturadas por diversas civilizações ao longo de séculos da cultura humana e constituem o currículo escolar há muitos séculos. Entretanto, outros autores viam na Álgebra a estrutura de um *corpus* matemático necessário para superar as limitações das práticas aritméticas que começaram a ser questionadas, mais incisivamente, no fim do século XVI (CHEVALLARD, 1984).

> Este lembrete da história, sem dúvida necessário, permite colocar o dedo sobre um fato crucial, do qual tiraremos mais algumas consequências: o desaparecimento em anos recentes de uma maneira secular de organizar o *corpus* matemático do ensino. A oposição da aritmética e da álgebra era de fato, até então, tradicional. Tradição antiga, que é afirmada desde o princípio pelo próprio Viète no fim do século XVI [...] (CHEVALARD, 1984, p. 52, tradução nossa).

A força das ideias de Viète vem do fato dele propor o simbolismo para a álgebra. Isso imprimiu um novo olhar para o ensino dos objetos aritméticos, culturalmente, estabelecidos em práticas sociais diversas. Vemos assim que Chevallard (1984) vê que “esta tradição – que é igual a uma concepção ao mesmo tempo epistemológica e didática, que produz um texto de ensino inalterado por muito tempo, ou pelo menos uma evolução lenta – se opôs há dois tempos [...]” (Ibidem, p. 52, tradução nossa). De um lado está o *corpus* da aritmética, essencial para as aprendizagens futuras da Matemática, de outro estão às ideias do *corpus* da álgebra, querendo ocupar seu espaço como saber cultural e escolar.

[12] As obras citadas do artigo de Chevallard (1984) não constam nas referências desta tese, pois nem nas referências do artigo dele elas constam.

Nos tópicos seguintes do artigo ele expõe "*A transição da aritmética para a álgebra*", "*O futuro da aritmética na reforma*", "*Uma álgebra encontrável?* ", "*Álgebra sem álgebra?* ", "*A dialética numérico/algébrico*" e "*Uma concepção empirista do real matemático*". Todos esses tópicos são discutidos por Chevallard de forma interligadas, revelando epistemologias aritméticas imbricadas nas algébricas, mas anuncia que o *habitus*[13] da prática aritmética coexistirá com o *habitus* da prática algébrica.

> A eliminação da oposição aritmética/álgebra, com efeito, altera as condições da aposta em relação ao aritmético e ao algébrico. A antiga relação da ferramenta de trabalho ao objeto trabalhado parece perdida. Os dois domínios – o numérico, o literal – vão coexistir numa simples justaposição, existentes que encontram em si sua própria justaposição. As relações, comuns entre essas duas ordens da realidade matemática, parecem agora abolidas. Ou melhor, elas abrem espaços para novas relações, e invertidas: não é mais o algébrico que permite estudar o numérico, é o numérico que "justifica" e permite compreender" o algébrico [...] (CHEVALLARD, 1984, p. 76-77, tradução nossa).

O que Chevallard anuncia acima, ele explicita, por meio de um trecho extraído de um manual do "*quatrième du collège*"[14], da década de 1970, conforme exposto no Quadro 01.

Quadro 1– O algébrico como essência do numérico

III – DIFERENÇA DE DOIS DECIMAIS

$x \in \mathbb{D}$, $y \in \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}$, $z = x - y$ significa que $z + y = x$.

Como é chamado z em lugar de x e y nesta ordem?

$z = 13 - (-7)$	$z = x - y$
$z + (-7) = 13$	$z + y = x$
$[z + (-7)] + 7 = 13 + 7$	$(z + y) + (-y) = x + (-y)$
$z + [(-7) + 7] = 13 + 7$	$z + [y + (-y)] = x + (-y)$
$z + 0 = 13 + 7$	$z + 0 = x + (-y)$
$z = 13 + 7$	$z = x + (-y)$

Para todo x de $\mathbb{D}$, para todo y de $\mathbb{D}$, $x - y$ é um decimal e $x - y = x + (-y)$.

Exemplos: $8 - (-7) = 8 + 7 = 15$; $9 - 14 = 9 + (-14) = -5$.

A operação que, para cada par $(x; y)$, $x \in \mathbb{D}$, $y \in \mathbb{D}$, faz corresponder o decimal $x - y$ é a subtração em $\mathbb{D}$.

Fonte: Chevallard (1984, p. 77, tradução nossa).

Entenda-se que os decimais os quais Chevallard (1984) se refere, deve ser compreendido por decimais inteiros relativos, ensinados no sistema educativo brasileiro como números

[13] [...] sistemas de *disposições* duráveis e transponíveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estruturas estruturantes, ou seja, como princípios geradores e organizadores de práticas e representações [...] (BOURDIEU, 2013, p. 87).

[14] Equivalente ao oitavo ano do Ensino Fundamental no Brasil

racionais relativos (simbolizado nos livros didáticos por $\mathbb{Q}$, assumindo-se que os números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$) estão contidos em $\mathbb{Q}$). Isso é verificável pelos dois exemplos expostos no Quadro 01. As ideias reveladas, por meio do Quadro 01, compunham o programa de 1971 para a classe do "*quatrième*" do colegial.

O segundo artigo da série intitulado "*A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio"* (CHEVALLARD, 1989) aborda as perspectivas curriculares e a noção de modelização. Logo na introdução Chevallard (1989) retoma a discussão iniciada no primeiro artigo da série, mais precisamente, do tópico intitulado de "*Uma concepção empirista do real matemático*", mas agora, ele trata sobre "*A reforma Chevènement e o triunfo empirista*". A reforma *Chevènement* propôs o resgate do numérico (aritmético) em detrimento do algébrico. Esse olhar para o numérico era visto como algo desestabilizador do currículo no sistema de ensino francês, isso ocorreu no fim dos anos de 1960 (CHEVALLARD, 1989). Essa reforma via no numérico algo prático e proveniente da realidade, que não necessitava de ideias tão abstratas, conforme exigia a álgebra. A reforma *Chevènement* relega os aspectos algébricos em segundo plano, mas não os exclui, o uso das letras é visto como uma generalização precedente dos estudos dos cálculos numéricos (CHEVALLARD, 1989).

Chevallard trata, ainda, na introdução desse segundo artigo outros três subtópicos: "*Do cálculo formal ao cálculo funcional*"; "*Do colégio ao liceu e mais adiante*" e "*Um problema de engenharia curricular*" (CHEVALLARD, 1989, p. 46-49). Esses subtópicos revelam problemáticas postas no ensino da aritmética e da álgebra no sistema de ensino francês. Problemáticas estas que envolvem o processo de transposição didática.

> [...] A transposição didática, que modifica o funcionamento dos objetos do saber, imprime certa especificidade ao programa oficial que o ensino pródigo propõe ao aluno. Esse programa oficial engendra no aluno um programa pessoal que, também conforme está no programa oficial, desfrutará de uma adequação limitada como o referido objeto de saber, pode deixar de ser puro desafio didático, sendo mais que uma ferramenta da atividade didático-matemática do aluno: por exemplo, a fatoração de uma expressão algébrica pode deixar de ser o alvo de sua atividade, tornando-se o meio para resolver uma equação do terceiro grau, conhecendo-se uma de suas raízes (CHEVALLARD, 1989, p. 47, tradução nossa).

Os objetos do saber os quais Chevallard se refere na citação (expressão algébrica e equação do terceiro grau) transitam do colégio ao liceu e mais adiante – no Brasil, do ensino fundamental ao ensino médio e ensino superior – é problemático no currículo escolar, ou melhor, no ensino da álgebra escolar. Está no currículo oficial e é ensinado, portanto, compõe um dos problemas da engenharia curricular há muito tempo. Dessa forma, insere-se na problemática anunciada por Chevallard (1989):

> O problema didático geral para o qual somos conduzidos pode ser formulado assim: é possível definir e realizar um **estado do sistema de ensino** (ou seja, um **currículo**) que determina um programa oficial para o algébrico mais apropriado as tarefas nas quais o algébrico será empregado, principalmente, no liceu? (Ibidem, p. 49, tradução nossa, grifos do autor).

A problemática da citação foi anunciada na década de 1980, na França, mesmo assim, vemo-la como atual no ensino da matemática no Brasil. E para propormos uma possível resposta, temos que compreender a epistemologia dos objetos algébricos da matemática escolar. Isso pode ser iniciado a partir do tópico que Chevallard (1989, p. 49) denomina de "*Cálculo algébrico e sistemas de números (ou de numeração)* ". Esse tópico do segundo artigo é interessante porque reconduz a reflexões do saber matemático em transição no sistema de ensino francês, mas possui conexões no sistema de ensino brasileiro. Não dá para negar que as amplitudes das ideias contidas lá e aqui são próximas, mesmo que décadas tenham avançadas e vivamos com pensamentos em tecnologias do futuro.

Um ponto importante desse tópico é o subtópico "*Uma incontornável dialética*" (CHEVALLARD, 1989, p. 50). Esse subtópico ressalta a importância histórica dos sistemas de numeração e sua inserção na escola desde a escola primária até o colégio, mas sua extensão chega ao liceu e à universidade. Vemos nos sistemas de numeração epistemologias subjacentes que precisam ser compreendidas pelo docente de matemática (professor ou outros), principalmente, no ensino básico. Essas epistemologias são pontes de acesso ao saber numérico e algébrico, coexistem, conforme já anunciamos anteriormente e não vivem sós. Há *habitus* de práticas de ensino que conduzem as etapas (anos, séries, ciclos, etc.) do sistema de ensino como todo. Isso é percebível nas palavras de Chevallard (1989):

> Os primeiros domínios dos cálculos encontrados – na história, bem como, na escola – são constituídos pelos diferentes **sistemas de números**, sucessivamente, introduzidos e estudados da escola primária ao colégio: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Embora que esses sistemas de números não possuam seus domínios de cálculo somente para esses níveis [...] (Ibidem, p. 50, tradução nossa, grifo do autor).

De maneira formal, Chevallard (1989) explicita que a noção de sistema de números é definida da seguinte forma:

> * uma **adição** (denotada por +), operação binária associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro (denotado por 0);
> * uma **multiplicação**, operação binária associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro (denotado por 1), e distributividade em relação à adição.
>
> Os sistemas de números, efetivamente, visados possuem além disso
>
> * uma **relação de ordem** (total), compatível com a adição e a multiplicação (Ibidem, pp. 50-51, tradução nossa, grifos do autor).

Essa maneira formal da definição de sistemas de números tem implicações epistemológicas relativas ao saber matemático, que fica, na maioria das vezes, restritiva a grupos específicos (matemáticos e professores que ensinam matemática nas universidades). O professor de matemática do ensino básico estuda isso como parte de sua formação inicial ou continuada, mas dissociado do processo transpositivo dos objetos da álgebra escolar.

Para Chevallard (1989) a noção de sistema de números e a relação de ordem, compatível com as operações binárias de adição e multiplicação são fundamentais para verificação da regra da simplificação. Por exemplo, se tivermos dois polinômios do primeiro grau, com seus coeficientes no sistema de números (SN), ou seja, $P(x) = ax + b$ e $Q(x) = cx + d$ (a, b, c e d em SN), chamaremos "equação do primeiro grau sobre SN" quando tivermos a igualdade do tipo $P(x) = Q(x)$. Portanto, "*qualquer equação do primeiro grau sobre SN, que não é identicamente verificável nesse SN, possui mais de uma solução*" (CHEVALLARD, 1989, p. 51). A compreensão da regra da simplificação leva ao que Chevallard (1989, p. 51) denomina de "*Um problema fundamental*". Esse problema fundamental remete ao estudo das propriedades dos sistemas de números.

> Adicionaremos, finalmente, uma última propriedade à definição dos sistemas de números. Essa propriedade é motivada pelo problema recorrente e fundamental que sustenta os sistemas de números estudados no colégio: tais sistemas, na verdade, **não contêm números suficientes**. A necessidade de sua extensão repetida (de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$, etc.) decorre dessa insuficiência, para qual podemos encontrar uma dupla origem (CHEVALLARD, 1989, p. 51, tradução nossa, grifo do autor).

A dupla origem para a insuficiência numérica decorre, segundo Chevallard (1989), de **medir grandezas** e **da existência de números resultantes de um cálculo algébrico aceitável**. Consequentemente, a extensão dos naturais ($\mathbb{N}$) para os inteiros relativos ($\mathbb{Z}$), dos inteiros relativos para os racionais ($\mathbb{Q}$), dos racionais para os reais ($\mathbb{R}$) e, mais adiante, dos reais para os complexos ($\mathbb{C}$), torna-se necessária para dar conta dos cálculos algébricos, como os dos processos resolutivos de equações. O efeito dessa extensão dos sistemas de números está na "*A maestria formal do cálculo funcional*" (CHVELLARD, 1989, p. 52). Para Chevallard essa maestria se pauta em dois objetivos.

> O **primeiro objetivo** deve assegurar o ensino de uma manipulação **formal** satisfatória do cálculo algébrico, ou, na versão mais desenvolvida, do cálculo no corpo R(x) das frações racionais – objetivo, especialmente, importante para os alunos que prosseguirão seus estudos além do colégio.
> A maestria dialética entre manipulação formal do cálculo algébrico (ou melhor: dos cálculos algébricos) e conhecimentos dos sistemas de números constitui então um **segundo objetivo** do ensino da álgebra no colégio. Esse objetivo deriva de uma dupla observação: ele não pode ter maestria do cálculo algébrico **funcional** sem que seja correto aos **empregos** do cálculo algébrico; e ele não pode haver emprego do cálculo algébrico sem que se desenvolva uma dialética entre o numérico e o algébrico [...] (CHEVALLARD, 1989, p. 52-53, tradução nossa, grifos do autor).

Os dois objetivos, com mais intensidade o segundo, levam Chevallard (1989, p. 53) a tratar da "*A modelização matemática*". Esse tópico está subdivido em oito subtópicos: "*Do extramatemático para o intramatemático", "Sistemas e modelos", "O caso do pêndulo simples", "Matemática e matematizado", "A produção de conhecimentos", Reversibilidade da relação de modelização", "Recorrência do processo de modelização" e "Modelos locais, modelos regionais"* (CHEVALLARD, 1989, pp. 53-58). Nesses oito subtópicos Chevallard expõe aspectos epistemológicos que revelam compreensões sobre o uso dos objetos aritméticos e algébricos no processo de modelização matemática. Compreenda-se que essa modelização matemática não se assenta nas características de metodologia para ensinar matemática. A modelização matemática conforme está em Chevallard (1989), constitui-se como parte da atividade matemática e, essa modelização permite estudar os objetos da Matemática e criar outros objetos matemáticos a partir dos já existentes. É com esse olhar que Chevallard revela as implicações epistemológicas do saber algébrico no campo da Matemática.

No subtópico, "*Do extramatemático ao intramatemático*", Chevallard (1989) indica algo fundamental: "*A questão da funcionalidade do cálculo algébrico* [...]" (p. 53). Essa funcionalidade "[...] *deve ainda ser analisada em seus princípios gerais como em suas modalidades concretas* [...]" (Idem). Para Chevallard (1989) o intramatemático é o estudo dos objetos matemáticos, por exemplo, dos sistemas de números. O extramatemático refere-se ao emprego dos estudos dos objetos matemáticos nos sistemas físicos, biológicos, sociais e outros. Chevallard esclarece que o "[...] *é usual no estudo matemático de tais sistemas não matemáticos que se emprega o nome de* ***modelização matemática***" (CHEVALLARD, 1989, p. 53). A modelização matemática, segundo Chevallard, precisa ser bem compreendida, por isso ele esclarece sobre sistemas e modelos.

> Introduziremos primeiro um esquema simplificado, que supõe, essencialmente, dois registros de identidades: um sistema, matemático ou não matemático, e um **modelo** (matemático) desse sistema. O processo de modelização comporta, esquematicamente, três etapas.
> **1.** Define-se o sistema que se destina estudar, especificando os "aspectos" **pertinentes** com relação ao que queremos fazer desse sistema, ou o conjunto das **variáveis** as quais decompomos nos domínios de realidade onde elas aparecem. Designaremos essas variáveis pelas letras x, y, z, a, b, c, etc., deve-se retornar à questão – é essencial- que eleva seu alcance.
> **2.** Constrói-se então o modelo para apropriadamente se falar em estabelecer certo número de relações, R, R', R'', etc., entre as variáveis levadas em conta na primeira etapa, sendo **o conjunto dessas relações**, o modelo do sistema a estudar.
> **3.** Trabalha-se o modelo assim obtido, com objetivo de produzir **conhecimentos** relativos aos sistemas estudados, conhecimentos que tomam a forma de novas relações entre as variáveis do sistema.
> A etapa 3 é sempre uma fase propriamente matemática, enquanto as etapas anteriores são originadas do domínio da realidade, o qual supõe-se revelar o sistema – a

> matemática que age sobre o objeto matemático, etc. (CHEVALLARD, 1989, p. 53, tradução nossa, grifos do autor).

Os sistemas e modelos conforme Chevallard (1989) aponta serve de conexão para visualizarmos o trabalho matemático envolto num processo de modelização. Tanto que ele exemplifica isso por meio do modelo obtido para o caso do pêndulo simples.

O subtópico "*A produção de conhecimentos*" revela a complexidade de um modelo matemático de larga escala, o teorema de Pitágoras, que em uma de suas formas algébricas, pode assumir a seguinte representação: $z^2 = x^2 + y^2$. Porém, esse modelo é mais evidenciado no estudo dos triângulos retângulos, pelo qual as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão na relação pitagórica: **a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos dois catetos**. Os outros tópicos do segundo artigo solidificam as ideias sobre a noção de modelização. Entretanto, não os discutiremos aqui, mas deixamos a critério do leitor conferir o texto integral de Chevallard (1989).

Nossa atenção volta-se agora para o último artigo da série sobre "*A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio*" (CHEVALLARD, 1990). Com esse artigo Chevallard fecha a trilogia de uma discussão que se inicia na década de 1980. O terceiro artigo da série retoma as ideias do segundo artigo, mas com novas perspectivas, percebidas já no subtítulo: "*Vias de alcance e problemas didáticos*" (CHEVALLARD, 1990, p. 5). Esse artigo está dividido em cinco tópicos: "*A modelização como conceito*", "*Construções interligadas: o numérico e o algébrico*", "*Os inteiros naturais como objeto de estudo*", "*Primeiras referências de um programa de pesquisa*" e "*Problemática do programa de pesquisa*" (CHEVALLARD, 1989, p. 5-37). Cada um desses tópicos possui subtópicos. É sobre as ideias contidas em alguns desses subtópicos que trataremos a seguir.

Começaremos pelo segundo tópico, o qual no seu primeiro subtópico intitulado "*Uma ferramenta fundamental: os inteiros naturais"* (CHEVALLARD, 1990, p. 13) revela a importância de se estudar os números naturais. Os números inteiros naturais possuem, historicamente e didaticamente, uma constituição que os garantem como "[...] *a primeira ferramenta da modelização matemática*" (CHEVALLARD, 1990, p. 13). Esse sistema de números é tomado como referência para o ensino de outros sistemas numéricos, isso garante a ele uma particular atenção no currículo do sistema de ensino francês (CHEVALLARD, 1990).

Os inteiros naturais merecem atenção porque como ferramenta de estudo intervém "[...] *em dois níveis no processo de modelização algébrica* [...]" (CHAVALLARD, 1990, p. 14). Esses dois níveis são assim compreendidos: "[...] *por um lado, as variáveis que definem o* *sistema estudado podem ser valores de SN. Por outro lado, a formulação das relações que regem o sistema pode utilizar expressões algébricas com coeficientes em SN*" (Idem). Mesmo os inteiros naturais recebendo tanto destaque eles são insuficientes, problemática que discutimos anteriormente, que revela a necessidade da extensão de ℕ para ℤ (números inteiros relativos). Isso implica no que Chevallard (1990) considera ser "*a insuficiência dos inteiros naturais como ferramenta*". A extensão de ℕ para ℤ é algo importante para a epistemologia da álgebra, porque antes os números *relativos* eram denominados de números *algébricos* (CHEVALLARD, 1990). Essa informação nos leva ao que Chevallard (1990) denomina de números "artificiais". Os números "artificiais" são assim mencionados por Chevallard (1990, p. 17, tradução nossa):

> Os números negativos são, portanto, introduzidos na prática matemática, não como números inteiros "naturais", ou seja, como números usados na contagem ou "medida" de conjuntos finitos, mais como um meio de cálculo, como um *artifício* de cálculo – da mesma forma que o automóvel pode ser considerado como um "artificio de transporte". Por essa razão, eles foram há muito tempo categorizados – incluindo as frações – na categoria dos números artificiais (Smith, 1925, capítulo IV), permitindo ser usado, flexivelmente, e assim mais agradavelmente, como uma poderosa ferramenta matemática, o cálculo algébrico.

O surgimento dos números negativos impulsionou o saber matemático no campo algébrico. Essa poderosa ferramenta matemática deu uma nova dimensão ao cálculo algébrico, principalmente, para o jogo da "regra de sinais", conhecida muito antes da invenção desses números (CHEVALLARD, 1990). No Quadro 02 temos mais explicações sobre os números "artificiais".

Quadro 2 – Fragmentos da história dos números "artificiais"

Os números "artificiais" – aqui os negativos – não são os primeiros, portanto, motivados pelo estudo dos sistemas de variáveis, tomando-se valores inteiros positivos e negativos, assim como queremos obstinadamente acreditar, apresentando raros sistemas deste tipo – altitude, elevador, perdas e ganhos, etc. Eles nascem *de exigências internas ao trabalho matemático* (exatamente: algébrico). Sem dúvida, sua introdução, que estende o domínio numérico, levantará, historicamente, muitas perguntas, que encontram necessariamente um eco no currículo do Colégio. Sabe-se que Diophante, no século III depois de Jesus Cristo, rejeitava como absurdo a equação $4x + 20 = 4$, que daria $x = -4$. Cardano, no século XVI, falava, tratando-se dos negativos, de números falsos, e Descartes, em 1637, chamava ainda de raízes falsas para as raízes negativas de uma equação. Considerar os números negativos como números "reais" pediu que arriscássemos escrever igualdades do tipo $(+15) + (-20) = -5$ (BOMBELLI, 1572), o que será realmente aceito no século XVII.

Notem, sobretudo, que na normalização progressiva do status dos negativos, na trivialização do seu emprego, o uso das letras jogará um papel unificador essencial. A ideia de utilizar uma única letra, *não afetada de um sinal*, para designar, indiferentemente, um número positivo ou negativo parece ter surgido por volta de 1659 em Hudde (SMITH, 1925, p. 259).

Fonte: Chevallard (1990, p. 18, tradução nossa).

O Quadro 03 contém fragmentos da epistemologia dos números inteiros relativos. Isso permite refletirmos sobre e de como se estruturou a extensão de ℕ para ℤ. Veremos as principais ideias dessa extensão no Quadro 03.

Quadro 3 – A transição de ℕ para ℤ

A transição de ℕ para ℤ, no espirito indicado, parte então do seguinte problema. Para todo a > 0, é necessário introduzir um "numero", denotado por –a, tal que, para quaisquer inteiros naturais b e c, verifica-se que b > ac, pode-se escrever: b – ac = b + (–a) c. Portanto, um número tal que, de acordo com a definição (em ℕ) de b – ac, tem-se: b = ac + b + (–a) c.

1. Tomemos b = a e c = 1. O número –a deve, portanto, verificar a igualdade a = a + a + (–a), ou ainda a + (–a) = a – a = 0. Em outros termos, –a é solução da equação *x + a = 0*. Se o conjunto que se quer obter a partir de ℕ por adição de "números" –a (**a** inteiro natural > 0), é efetivamente um *sistema de números* ℤ (conforme definido acima), então esta equação tem sobre Z apenas uma solução, e, assim, a equação x + a = 0 *caracteriza* –a *completamente*.
2. Sempre supondo que ℤ é um bom sistema de números, da igualdade a + (–a) = 0 se deduz primeiro (pela multiplicação por c) a igualdade ac + (–a) c = 0, e, daí (pela adição de b), a igualdade ac + b + (–a) c = b. Se os inteiros naturais a, b, c são tais que b > ac, temos então: b – ac = b + (–a) c. *Assim, para constituir Z a partir de N, é necessário e suficiente associar, para todo inteiro a > 0, um número –a tal que a + (–a) = 0.*

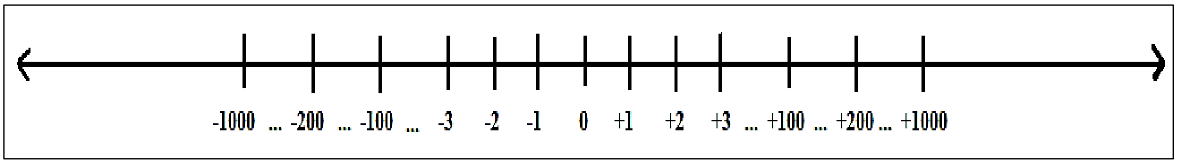
A hipótese que pode existir tal sistema de número é muito forte. Isso implica particularmente que, sobre ℤ, qualquer equação da forma x + a = 0 possui uma solução. Se, de fato, **a** pertence a ℕ, então –a pertence a ℤ e é solução da equação; se **a** pertence a ℤ – ℕ, existe b em N tal que a = –b, e a equação considerada é então satisfeita para x = b. Notamos em geral que –a é a solução (única) da equação x + a = 0, para **a** pertencendo a ℤ. Se a = –b, com b em ℕ, temos então: b = –a = –(–b). Mas geralmente, para todo **a** em ℤ, tem-se: –(–a) = a.

A hipótese que ℤ é um sistema de números permite então ver como é conveniente calcular em ℤ. Sejam assim os números –a e –b, com a e b em ℕ. O que vale sua soma, (–a) + (–b)? Tem-se as igualdes (–a) + a = 0 e (–b) + b = 0. Deduz-se, por adição membro a membro, e em virtude das propriedades emprestadas para ℤ, a igualdade: ((–a) + (–b)) + (a + b) = 0. Esta última igualdade fornece a resposta esperada, porque nos mostra que há: (–a) + (–b) = –(a + b). Todas as propriedades de ℤ no que concerne às operações de adição, de subtração, todas as relações de compatibilidade entre ordem e leis de composição podem ser obtidas dessa maneira. Além disso, a função *valor absoluto* pode então ser definida e a desigualdade triangular estabelecida. ℤ se distingue de ℕ, porque a subtração sempre está definida nele, e que a propriedade da boa ordem não é mais satisfeita como para os conjuntos menores, mas que é suficiente para aproximar a ordem de ℤ, com a ordem de ℕ, que é discreta.

Fonte: Chevallard (1990, p. 18-19, tradução nossa).

O Quadro 03 possui um modelo epistemológico simplificado para explicar a extensão do sistema dos números naturais (ℕ) para o sistema dos números inteiros (ℤ). Essa extensão é complexa e está alicerçada na Teoria de Grupos e de Anéis da álgebra moderna (que não é o propósito deste estudo). O que se observa no Quadro 03 é um estudo de modelização essencial para quem ensina matemática nos anos finais do ensino fundamental. Mas, não só isso, é um processo de modelização matemática que produz objetos matemáticos cruciais à matemática escolar. De forma não tão refinada, mas prática, a ideia da extensão de ℕ para ℤ pode ser resumida por meio de uma reta numérica graduada com números inteiros positivos de um lado (direito) e negativos do outro (esquerdo), separados no "meio" da reta pelo algarismo zero, conforme vemos na Figura 1.

Figura 1 – Reta graduada com números inteiros relativos (ℤ)



Fonte: Elaborada pelo autor (2016).

Com o sistema dos números inteiros relativos o trabalho algébrico ganhou outro patamar. A limitação da subtração em ℕ é superada e isso impulsiona o saber matemático em relação ao cálculo algébrico, mas também cria problemas para o ensino da matemática no contexto escolar. Tanto que Chevallard (1990) trata de forma breve dos "**problemas abertos e currículo**". Ele exemplifica esse entrave recorrendo à problemática relacionada ao estudo e ensino das frações e a geração destas por meio de uma modelização algébrica. Essa modelização está intrinsecamente associada aos problemas abertos e isso aproxima a atividade matemática escolar com a atividade do matemático (CHEVALLARD, 1990).

Os dois tópicos finais do terceiro artigo anunciam as "**Primeiras referencias de um programa de pesquisa**" e a "**Problemática do programa de pesquisa**" (CHEVALLARD, 1990). Não iremos expor aqui os enfoques desses dois tópicos, mas o leitor que se interessar deve consultar Chevallard (1990). Avançaremos agora para as ideias de transposição didática e ensino da álgebra (CHEVALLARD, 1994a).

2.1.1. Transposição didática e álgebra escolar

Yves Chevallard em 1994 publicou o artigo intitulado "*Ensino da álgebra e transposição didática*" (CHEVALLARD, 1994a, p. 175). Nesse artigo ele amplia as discussões expostas antes nos artigos da série "*A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio*" (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990). Porém, a atenção de Chevallard é centrada no ensino da álgebra e o processo de transposição didática. O artigo está divido em dois temas: "*A) Sobre o processo de transposição didática*" (p. 175) e "*B) Sobre o ensino da álgebra elementar*" (p. 180). De início, já esclarecemos que não esmiuçaremos em detalhes esse artigo, mas apenas as ideias mais relevantes sobre o processo de transposição didática, implícitas ou explicitas, com a modelização do Modelo Epistemológico Alternativo de Pereira (2012).

O processo de transposição didática possui elementos estruturais, centrados num universo característico: *a sociedade*. No interior da sociedade *o sistema de ensino* se constitui. Uma vez constituído o sistema de ensino, no interior deste, *os sistemas didáticos* se formam, vivem e desaparecem (CHEVALLARD, 1994a), ou seja, possuem uma ecologia. Os componentes dos sistemas didáticos são *o docente* (professor), *os discentes* (alunos, aprendizes, etc.) e *um saber* (por exemplo, operações polinomiais) (CHEVALLARD, 1994a). Chevallard (1994a) esclarece que o sistema de ensino *stricto sensu* é circundado por uma zona de interface com a sociedade: a *noosfera*[15]. Segundo Chevallard (1994a, p. 175, tradução nossa): "O conjunto do sistema de ensino e de sua noosfera é designado como o sistema de ensino *lato sensu*. A noosfera contém, notadamente, os professores atuantes, suas associações, produtores e defensores de qualquer doutrina didática, etc.". Chevallard chama atenção para os grupos socais que estão envoltos como elementos estruturais da transposição didática.

> No interior da sociedade, e no exterior do sistema de ensino *lato sensu*, duas instâncias jogam um papel essencial nos mecanismos examinados mais a frente: a comunidade sábia relativa ao saber ensinado – aqui, a comunidade dos matemáticos –, por uma parte; o grupo de famílias (parentes, pais) de outra parte.

---

[15] A noção de noosfera do sistema de ensino foi introduzida por Chevallard (1985/1991) no contexto da teoria da transposição didática para designar a esfera onde se pensa o funcionamento do sistema didático. Trata-se do verdadeiro filtro por onde se opera a interação entre o sistema de ensino e a sociedade. A noosfera relaciona a instituição produtora do saber com a escola. As produções da noosfera (programa oficiais, livros textos, recomendações para professores, materiais didáticos, etc.) condicionam fortemente as características e até a natureza do conhecimento que deve ser ensinado na escola (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 3-4, tradução nossa).

> Nestes dois grupos sociais podem-se acrescentar vários outros grupos, cuja importância foi até aqui (e com referência ao ensino geral, pelo menos) relativamente fraco: em particular os grupos de métier (CHEVALLARD, 1994a, P. 175-176, tradução nossa).

A transposição didática envolve a compreensão da "**a ecologia do saber ensinado**" (CHEVALLARD, 1994a). Essa ecologia é o "[...] conjunto de condições (e das análises que levam ao objeto) [...] (CHEVALLARD, 1994a, p. 176, tradução nossa). É a ecologia do saber ensinado que leva ao processo de transposição didática, assim anunciado por Chevallard (1994a):

> O processo de transposição didática aparece então como o conjunto dos mecanismos pelos quais é gerado o saber ensinado, em formas compatíveis com o conjunto das condições que a ele são impostas e ao alhar (em vista) das quais deverá provar sua viabilidade – exceto para desaparecer dos sistemas didáticos (desaparecimento que é, aliás, um fenômeno banal e periodicamente observável) (p. 176, tradução nossa).

Tal como é anunciado o processo de transposição, cabe um questionamento, que o próprio Chevallard (1994a) o faz e responde.

> De onde vem o saber ensinado? Vem, essencialmente, do saber sábio correspondente. Ao qual é necessário acrescentar elementos de saber endógenos, especificamente produzido no interior do sistema de ensino (*lato sensu*), que designaremos aqui como das criações didáticas (p. 179, tradução nossa).

A ideia do saber sábio estava associada ao produzido e legitimado pela comunidade sábia (acadêmica). Essa era a concepção inicial do fenômeno da transposição didática, modificada, posteriormente, pelo próprio Yves Chevallard, em outros artigos e com a proposição da Teoria Antropológica do Didático (ALMOULOUD, 2007).

Até aqui vimos alguns aspectos epistemológicos do *corpus* da álgebra e alguns destes estão na álgebra escolar, mas na forma final das regras algébricas ou "econômicas". No próximo tópico, interligamos os objetos ostensivos e não ostensivos no contexto da álgebra escolar, bem como, fazemos uma conexão histórico-temporal desses objetos.

2.2. Ostensivos e Não Ostensivos em Práticas da Atividade Matemática com Álgebra Escolar

Antes de exemplificarmos a funcionalidade dos ostensivos e não ostensivos no modelo da Álgebra Escolar, caracterizaremos tais objetos conforme as compreensões de Chevallard (1994b) e Chevallard e Bosch (1999). Essa caracterização decorre de algumas noções básicas:

> a) Qualquer ***atividade*** humana decompõe-se em certo número de ***tarefas***.
> b) Concretamente, uma tarefa de um ***tipo*** específico (abrir a porta, escovar os dentes, resolver uma equação do segundo grau, elaborar um axioma da geometria plana, dar

> uma lição de ortografia, etc.) apresenta-se como rotineira para o sujeito que deve executá-la com aplicação de uma determinada ***técnica***.
> c) Para ser viável, uma técnica deve aparecer como ***compreensível e justificável***. Esta dupla função é suportada por um discurso específico, a ***tecnologia*** da técnica.
> d) Por sua vez, a tecnologia de uma determinada técnica deve aparecer como compreensível e justificável, que é denomina ***teoria*** ou tecnologia da tecnologia. (CHEVALLARD, 1994b, p. 1, tradução e grifos nosso).

As palavras em destaque na citação constituem ideias associadas à atividade matemática e são noções da TAD, principalmente, tarefas de determinado tipo, técnica, tecnologia e teoria. Em relação a isso, Chevallard (1994b, p. 1, tradução nossa) explica que: "A hierarquia técnica-tecnologia-teoria é relativa ao tipo de tarefa considerado. Assim, a elaboração de uma tecnologia (ou de uma teoria) pressupõe uma técnica [...]". Para ilustrar essa hierarquia, Chevallard recorre à tarefa do Quadro 4.

Quadro 4 – Exemplificação da hierarquia técnica-tecnologia-teoria

a) Em uma classe de Matemática, a tarefa consiste em demonstrar a igualdade $S_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, que pode ser realizada com ajuda da *técnica* conhecida sob o nome de "indução matemática": Tornamos S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n. Tem-se S_1 = 1 e, portanto, $S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supomos então que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ e mostramos que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Tem-se $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2}+\frac{2}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Na sequência, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \geq 1$. b) Uma *tecnologia* clássica desta técnica é fornecida pela seguinte afirmação: Seja $S \subseteq \mathbb{N}$. Se $0 \in S$ e, tem-se: $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$, então $S = \mathbb{N}$. c) A justificativa para esta afirmação, ou seja, a *teoria* da técnica considerada pode consistir em uma axiomática de ℕ, incluindo a afirmação anunciada como *título de axioma* (conforme fora a escolha de G. Peano) *acrescida* de considerações sobre "a evidência" dessa afirmação (semelhantes às desenvolvidas, posteriormente, por H. Poincaré, em seu livro *A Ciência e a Hipótese*). d) Porém, a teoria pode também consistir em *demonstrar* a afirmação tecnológica indicada, a partir do seguinte enunciado *teórico*: ℕ é bem ordenado, ou seja, qualquer parte não vazia de ℕ possui um menor elemento.

Fonte: Chevallard (1994b, p. 1-2, tradução nossa).

A tarefa do Quadro 4 movimenta objetos ostensivos e não ostensivos próprios da atividade matemática. Sem esses objetos a solução da tarefa pela técnica da "indução matemática" não seria externalizada. Para melhor entendimento desses tipos de objetos, expomos no Quadro 5, as compreensões de Chevallard (1994b).

Quadro 5 – Objetos ostensivos e não ostensivos

A observação da atividade humana leva a responder, estabelecendo uma distinção fundamental entre dois tipos de objetos: os objetos *ostensivos*, de um lado, os *não ostensivos*, de outro lado. a) Denominam-se *ostensivos* os objetos que têm para nós uma forma *material*, *sensível*, qualquer que seja. Um objeto material (uma caneta, um compasso etc.) é um ostensivo. Da mesma forma - os gestos: chamaremos de ostensivos *gestuais*; - as palavras, geralmente, do discurso: falamos aqui de ostensivos *discursivos* (ou da linguagem); - os esquemas, desenhos, grafismos: fala-se, neste caso, de ostensivos *gráficos*; - as escritas e formalismos: falamos então de ostensivos *escriturais.* A característica dos ostensivos é de poderem ser *manipulados*. Esta palavra deve ser entendida em um sentido amplo: manipulação no sentido estrito (a do compasso, ou da caneta), mas também pela voz, o olhar etc. b) Ao contrário dos ostensivos, os *não ostensivos* – o que é usualmente chamado de *noção, conceito*, *ideia* etc. – não podem, estritamente falando, ser manipulados: eles somente podem ser evocados, por meio dos ostensivos associados. Assim, ao dizermos que, para resolver a equação $2^x = 10$ "toma-se o logaritmo dos dois membros", é conveniente que o *não ostensivo*, conceito de logaritmo exista, mas não podemos dizer que o *ostensiv*o (da linguagem) *logaritmo* está disponível. Para realizarmos a ação correspondente, será necessário dispormos de ostensivos *escriturais* adequados, que permitirão, por exemplo, escrever: $$2^x = 10 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 10 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln 2}.$$ A técnica de resolução das equações da forma $a^x = b$ exposta nesta obra supõe assim, ao lado de certo número de não ostensivos (conceito de logaritmo), *um sistema de ostensivos articulados a estes não ostensivos*.

Fonte: Chevallard (1994b, p. 4-5, tradução nossa).

O avanço das ideias dos ostensivos e não ostensivos está na dialética (Quadros 4 e 5) existente entre eles na atividade matemática (CHEVALLARD; BOSCH, 1999). Para reforçar o dito anteriormente destacamos a seguinte citação.

> Qualquer atividade humana pode ser descrita como uma manipulação de objetos ostensivos. Mas a análise mais superficial revela que o operador humano não pode realizar (e, eventualmente, não sabe perceber) apenas evocando ou invocando, o auxílio de objetos ostensivos apropriados, objetos *não ostensivos* que não, necessariamente, objetos específicos da atividade. Escrever 2 + 3 = 5 pode ser visto como uma simples manipulação de objetos ostensivos, mas não se efetuará, intencionalmente, sem a intervenção de alguns objetos *não ostensivos* específicos, como a noção de adição (ou, se há apenas cópia de um "padrão" de escrita, noção de "reprodução" ou de "recopiage"). Porém, geralmente, partimos do princípio que, *em qualquer atividade humana, há a coativação de objetos ostensivos e não ostensivos* (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 11, tradução nossa).

A dialética dos ostensivos e não ostensivos, na atividade matemática, remete à abordagem antropológica da parte prática, ou seja, aplicação de uma técnica para solucionar uma determinada tarefa. Em relação a isso, Chevallard e Bosch (1999, p. 11, tradução nossa) esclarecem que: “Retornando as noções fundamentais da abordagem antropológica, diremos que a aplicação de uma técnica se traduz pela *manipulação de ostensivos regulada pelos não ostensivos* [...]”. Essa abordagem antropológica dos objetos ostensivos e não ostensivos está nas práticas sociais com Álgebra Escolar. Além disso, essa mesma abordagem fundamenta o modelo da Álgebra Escolar como aritmética generalizada.

Segundo Chevallard e Bosch (1999), a atividade matemática da cultura ocidental está impregnada dessa dialética entre ostensivos e não ostensivos. Os autores ilustram esse fato, recorrendo a um problema resolvido por meio do discurso oral: “Diga qual o número que diminuído de 35 resulta nele dividido por seis? ” A técnica da resolução apresentou o seguinte discurso “O quociente de um número desconhecido por 6 é a sexta parte desse número. Consequentemente, este quociente é o número diminuído de 5/6 deste número. Os 5/6 do número procurado valem 35, o número procurado é os 6/5 de 35, ou seja 42” (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 15, tradução nossa). Esse mesmo problema é solucionado, aplicando-se uma técnica algébrica elementar (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 16, tradução nossa): “Seja *x* o número procurado. Tem-se: $x-35=\frac{x}{6}; x-\frac{x}{6}=35; \frac{5x}{6}=35; x=\frac{35\times 6}{5}=42$ ”. Comparando a resolução oral e algébrica do problema, identificamos a manipulação ostensiva dos não ostensivos. Essa prática só se materializa quando usamos a representação escrita ou simbólica da oralidade. Assim, quando pensamos e falamos a palavra “quociente”, matematicamente, reporta-se ao não ostensivo, **noção de divisão aritmética**. Na simbologia algébrica, essa noção aritmética traduz-se de diversas maneiras: $\frac{x}{6}$, $\frac{5x}{6}$, $x=\frac{35\times 6}{5}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{3x}{y}$, $\frac{3x+y}{2}$, $\frac{a}{b}$, etc.

A dimensão ostensiva da atividade matemática decorre da instrumentalidade, semioticidade e sensibilidade da atividade matemática aos ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999). Para Chevallard e Bosch (1999), “as organizações praxeológicas se materializam em sistemas de objetos ostensivos resultantes, geralmente, de vários registros semióticos [...]” (p. 23, tradução nossa). Identificamos essa compreensão na Álgebra Escolar e, como tal, é refletida na organização do modelo dessa álgebra. Por exemplo, a notação $\sqrt{n}$ é equivalente a $n^{\frac{1}{2}}$. A segunda notação permite o seguinte trabalho matemático:

$$\sqrt{8\times 4}=(8\times 4)^{\frac{1}{2}}=(8)^{\frac{1}{2}}\times(4)^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3\times 1}{2}}\times 2^{\frac{2\times 1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{2}{2}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}$$
$$=2^{\frac{3+2}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{4}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^2\times 2^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}.$$

A extensão desse trabalho alcança a matemática do ensino superior, o cálculo da derivada da função $\sqrt{x}$ (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 23): $(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Em relação à técnica de derivação aqui exemplificada, Chevallard e Bosch esclarecem que:

> [...] Diremos que, em relação à técnica de derivação empregada (que seria da mesma forma, em relação à primitivação), a notação exponencial tem uma maior instrumentalidade que a notação √: ela permite a aplicação de uma técnica que não pode ser realizada por meio da notação √. A instrumentalidade de um ostensivo, portanto, depende do número de técnicas na qual ele pode intervir e será ainda maior que as técnicas que se mostram robustas e confiáveis no cumprimento das tarefas em questão (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 23, tradução nossa).

As operações com radicais, na Álgebra Escolar, movimentam objetos ostensivos que exigem noções de potenciação e suas propriedades. Essas noções são objetos não ostensivos visualizados por representações como estas: $a^n, a^{-n}, a^n\cdot a^m, a^n \div a^m, (a^n)^m$ etc. Com essas representações ostensivas fazemos manipulações apropriadas para determinadas tarefas com álgebra escolar. Nesse sentido, Chevallard e Bosch (1999, p. 27, tradução nossa) declaram: “[...] a instrumentalidade e a semioticidade são propriedades de qualquer objeto ostensivo, independentemente do registo ao qual pertence [...]”. Outro ponto fundamental, que envolve a sensibilidade da atividade matemática aos ostensivos, é a abordagem antropológica do saber matemático em termos de praxeologias (CHEVALLARD; BOSCH, 1999).

> A abordagem antropológica descreve o saber matemático em termos de praxeologias compostas de tipos de tarefas e técnicas (constituindo a *práxis* ou *saber-fazer*) e, tecnologias e teorias (constituindo o *logos* ou “saber” no sentido restrito da palavra). Estas organizações praxeológicas são perceptíveis por meio dos ostensivos que compõem as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, bem como, pelas diferentes maneiras de ativá-los. Este trabalho com ostensivos deve ser, ao mesmo tempo, eficaz e legível, compreensível, que contribua para dar aos ostensivos seu valor instrumental e semiótico. Mas não conhecemos as leis gerais sob as quais uma escrita, uma palavra, um gesto ou gráfico torna-se (ou não) um instrumento “mais eficaz”, ou produz “mais sentido”, em função da organização matemática que ele integra e da instituição na qual esta organização vive. O desenvolvimento da matemática nos mostra novas criações, constantemente, ostensivas, novas maneiras de manipular ostensivos antigos, mas também a perda de algumas formas de falar, escrever ou efetuar certos gestos. Tal “evolução ostensiva” nunca se realiza de maneira uniforme universal, mas depende, estreitamente, das instituições e das condições ecológicas que elas são capazes de criar para fazer viver determinadas praxeologias (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 28, tradução nossa, grifos dos autores).

Das palavras de Chevallard e Bosch (1999) extraímos ideias susceptíveis de exemplificações nas práticas sociais com Álgebra Escolar. Essas práticas estão, principalmente, conectadas ao modelo da álgebra elementar como aritmética generalizada. Para ser mais explícito, vejamos o seguinte problema: **Um comerciante compra uma peça de pano à razão de 40 francos o metro. Ele revende o quarto a 54,40 francos o metro, 1/5 a 56 o metro, e o resto a 50 francos o metro. Ele retira desta venda um benefício de 1476 francos. Quantos metros havia na peça de pano?** (CHEVALLARD, 1994a, p. 185, tradução e grifos nossos). Na resolução desse problema, Chevallard primeiro recorre à noção de equação do primeiro grau com uma incógnita (não ostensivo), materializa a incógnita pela letra "*x*" (ostensivo). Esta incógnita assume o valor numérico desconhecido (não ostensivo) do comprimento da peça de pano. A ostensividade da equação do problema fica assim: $54{,}40(x/4) + 56(x/5) + 50(x - x/4 - x/5) - 40x = 1476$ (CHEVALLARD, 1994a, p. 186).

Outra possibilidade para solucionar o problema é pela Aritmética, aplicando-se a técnica do método da falsa posição – método aplicado na prática de resolução de problemas no antigo Egito (GALVÃO, 2008). Chevallard (1994a, p. 186, tradução nossa) assim resume esse método, aplicando-o na resolução do problema em questão: "[...] Escolhe-se um número qualquer, que seja visto como um "falso valor" do número procurado, escolha hábil, para evitar as frações, é prudente escolher aqui um múltiplo comum para 4 e 5, por exemplo, 20 [...]". Dessa ideia, surge a solução para o problema: "5 vezes 54,40 francos = 272 francos", "4 vezes 56 fracos = 224 francos", "(20 –5 –4) = 11 vezes 50 francos = 550 francos ", "20 vezes 40 francos = 800 francos", "(272 francos + 224 francos + 550 francos) – 800 francos = 246 francos", "[...] o comerciante, portanto, ganha 6 vezes mais, porque: 1476/246 = 6 [...]", "[...] efetivamente, a peça de pano comprada, certamente, era de comprimento 6 vezes superior ao comprimento suposto, ou seja, 6 vezes 20 = 120 metros" (CHEVALLARD, 1994a, p. 186, tradução nossa).

Tanto a solução algébrica quanto a solução aritmética são movidas pela dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos. Essa profusa dialética – digamos essencial para a atividade matemática – está na base dos objetos matemáticos surgidos ao longo de séculos da cultura humana. Assim, nosso próximo tópico revela como os objetos ostensivos e não ostensivos participam de algumas práticas sociais com Álgebra Escolar.

2.2.1. Os ostensivos e não ostensivos em práticas sociais com álgebra escolar

Iniciamos este subtópico, citando uma noção não ostensiva, descrita como teorema no livro de Simon Stevin (*Les Oeuvres mathematiques de Simon Stevin*), publicado em 1634. Esse livro foi revisado, corrigido e comentado por Albert Girard: “Mais multiplicado por mais, dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos” (STEVIN, 1634, p. 39, tradução nossa). Atualmente, o teorema anunciado por Stevin funciona em forma de regra prática do “jogo” de sinais no ensino da Álgebra Escolar. Essa regra prática é explicada por Stevin por meio de vários objetos ostensivos, conforme consta no Quadro 6.

Quadro 6 – Explicação de Simon Stevin para o “jogo” de sinais

Seja 8 – 5 multiplicado por 9 – 7, no que segue; –7 vezes –5 resulta +35 (+35, porque, como diz o teorema, – por –, produz +). Em seguida, –7 vezes 8 resulta –56 (porque, como diz o teorema, – por +, produz –). Similarmente, seja 8 – 5, multiplicado pelo 9, obtermos o produto 72 – 45; em seguida, adicionamos +72+35, resultando 107. Similarmente, adicionamos –56 –45, resultando –101; e subtraímos 101 de 107 que resta 6, para o produto da multiplicação. Da qual a disposição dos caracteres da operação é a seguinte:

$$
\begin{array}{r}
8 - 5 \\
9 - 7 \\
\hline
-56 + 35 \\
72 - 45 \quad \\
\hline
6 \qquad
\end{array}
$$

Fonte: Stevin (1634, p. 39, tradução nossa).

A regra do “jogo” de sinais constitui-se uma prática social institucionalizada no ensino da Matemática. Essa regra possui objetos não ostensivos que mesmo materializados pelos sinais + e – (ostensivos), continuam sem ostensividade completa. A compreensão de algumas dessas noções só ocorre no campo algébrico mais avançado: Teoria de Grupos e Anéis. Na Álgebra Escolar, a regra do “jogo” de sinal, assume caráter prático ostensivo pela manipulação dos sinais + e –, ou seja, **(+) + (+) = +; (–) + (–) = –; (+) + (–) = ± ou (–) + (+) = ∓; (+) · (+) = (–) · (–) = +; (+) · (–) = (–) · (+) = –; (+) ÷ (+) = (–) ÷ (–) = + e (+) ÷ (–) = (–) ÷ (+) = –**.

O predomínio cultural do modelo aritmético, na prática com Álgebra Escolar, constitui o discurso do livro de Euler (1795), intitulado *Élémens d’algèbre* [Elementos de Álgebra]. Nesse livro, Euler (1795, p. 5) anuncia que a Aritmética “[...] é a ciência dos números [...]”. Para externalizar ostensivamente essa ideia, em conexão com a Álgebra Escolar, Euler escreve: “[...] $f + m + b + x$, significa a soma dos números indicados por essas quatro letras” (EULER, 1795, p. 7, tradução nossa). Implícita na soma de Euler está o não ostensivo, noção de soma aritmética e algébrica.

A manipulação ostensiva dos sinais + e – recebe grande atenção de Euler, porque para ele "[...] na Álgebra, as quantidades consideradas simples são os números com os sinais que os precedem ou que os *afetam* [...]" (p. 10-11, tradução nossa). Notemos que há objetos não ostensivos implícitos nas palavras de Euller, ele os amplia para a noção de números inteiros positivos e negativos, de tal modo que os números positivos são afetados pelo sinal + e os negativos pelo sinal –, ostensivamente, temos: {..., –2, –1, 0, +1, +2, ...}. A ostensividade dos números inteiros positivos e negativos ampliou a manipulação algébrica, originando práticas numérico-algébricas culturalmente mantidas até os dias de hoje no ensino da Álgebra Escolar. Por exemplo, a + a = 2· a; a + a + a = 3· a; a + a + a +a = 4· a; 2 · 3a = 6a; 3 · 4b = 12b; 5 · 7x = 35x; +a vezes +b = +ab; –a vezes 3 = –a vezes +3 = –3a; –a vezes –b = +ab (EULER, 1795). Vários objetos não ostensivos promovem a manipulação ostensiva da palavra "vezes". Duas situações numérico-algébricas recebem particular atenção de Euler: $a + b = c$ e $ab = c$. Nessas duas situações, a manipulação ostensiva numérica e algébrica, depende dos não ostensiva noção de princípio aditivo e multiplicativo, para estabelecer que $b = c - a$ e $b = c/a$. Euler (1795) mostra essas noções que resumimos assim: $b = c - a \Leftrightarrow b + a = c - a + a$ e $b = \frac{c}{a} \Leftrightarrow b \cdot a = \frac{c}{a} \cdot a$

A prática ostensiva descrita acima por Euler está viva na resolução de equações do primeiro grau e se aplica em outras atividades com Álgebra Escolar. Outra prática viva no ensino da álgebra escolar é a ostensividade dos "quadrados das quantidades complexas" (EULER, 1795, p. 239), isto é, os produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos e quadrado da diferença de dois termos.

> Quando se tem de encontrar o quadrado de uma grandeza complexa, deve-se multiplicar por ela mesma, o produto será o quadro que se procura.
> Por exemplo, o quadrado de $a + b$ se encontra da seguinte maneira:
>
> $$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ \quad + ab + bb \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$
>
> Assim quando a raiz se constitui do conjunto aditivo de dois termos, como $a + b$, o quadrado contém, o quadrado de um de outro termo, aa e bb; o dobro do produto dos dois, $2ab$. De tal maneira que a soma $aa + 2ab + bb$ é o quadrado de $a + b$. Seja, por exemplo, $a = 10$ e $b = 3$, ou seja, que se queira encontrar o quadrado de 13, teremos 100 + 60 + 9 ou 169 (EULER, 1795, p. 239-249, tradução nossa).

As mesmas ideias ostensivas e não ostensivas aplicadas para o quadrado de $a + b$, aplicam-se para obtenção do quadrado de $a - b$, ou seja, $(a - b)^2 = aa - 2ab + bb$ (EULER, 1795,

p. 242). De igual modo para $(a - 1)^2 = aa - 2a + 1$, $(2a - 1)^2 = 4aa - 8a + 1$, $(x - y)^2 = xx - 2xy + yy$, $49^2 = (50 - 1)^2 = 50 \times 50 - 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1 = 2500 - 100 + 1 = 2400 + 1 = 2401$.

Uma prática numérico-algébrica que hoje vive implícita no ensino da progressão aritmética são as "proporções aritméticas" (EULER, 1795): "Quando duas relações aritméticas são iguais, está igualdade se chama uma *proporção aritmética*" (p. 314, tradução nossa). Essa não ostensividade anunciada por Euler pode ser evidenciada pela citação a seguir:

> [...] quando $a - b = d$ e $p - q = d$, de tal maneira que a diferença é a mesma entre os números p e q, assim como, entre os números a e b, diz-se que esses quatro números formam uma proporção aritmética; escreve-se pôr $a - b = p - q$, indicando claramente que a diferença entre a e b é igual à diferença entre p e q.
> Uma proporção aritmética se constitui de quatro termos, que devem ser tais, que se subtrai o segundo pelo primeiro, o valor encontrado é mesmo quando se subtrai o quarto pelo terceiro. Assim, os quatros números 12, 7, 9, 4 formam uma proporção aritmética, por que 12 – 7 = 9 – 4 (EULER, 1795, p. 314-315, tradução nossa).

As proporções aritméticas contínuas, ou seja, com maior quantidade sequencial de termos, constituem as progressões aritméticas crescentes (4, 7, 10, 13, 16, ...) ou decrescentes (19, 15, 11, 7, 3, ...) (EULER, 1795). Esses tipos de progressões aritméticas possuem práticas com Álgebra Escolar, nas quais os objetos não ostensivos (noção de aditividade positiva e negativa, posição sequencial dos termos da proporção aritmética, identificação de uma progressão aritmética crescente ou decrescente etc.) são evocados ostensivamente em práticas aritméticas e algébricas, reconhecidas e legitimadas nas diversas instituições sociais de ensino básico, principalmente, nas de ensino médio. Uma dessas práticas pode ser visualizada no Quadro 7, extraída de livro didático de matemática do Ensino Médio.

Quadro 7 – Prática com álgebra escolar e progressão aritmética

Três números estão em PA; o produto deles é 66 e a soma é 18. Calcule os três números.

Resolução:

Podemos sempre representar três números em PA por $x - r$, x, $x + r$, em que r é a razão.

Assim, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 66 \\ (x - r) + x + (x + r) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 - r^2) = 66 \\ 3x = 18 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

$6(6^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 36 - r^2 = 66/6 \Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Então, para $x = 6$ e $r = 5$, temos:

- $x - r = 6 - 5 = 1$

• $x + r = 6 + 5 = 11$
Para $x = 6$ e $r = -5$
• $x - r = 6 - (-5) = 6 + 5 = 11$
• $x + r = 6 - 5 = 1$
Verificação: $1 \cdot 6 \cdot 11 = 66$ e $1 + 6 + 11 = 18$
Portanto, os números procurados são 1, 6 e 11, que estabelecem duas PA: (1, 6, 11) e (11, 6, 1).

Fonte: Dante (2013, p. 214).

A manipulação ostensiva do Quadro 7 possui objetos não ostensivos que auxiliam a resolução da tarefa proposta. Eis alguns: 1) representação algébrica de três números em PA; 2) uso de letras para diferenciar os termos da PA e a razão; 3) noção de modelização de sistemas de equações; 4) noção de produto e soma de polinômios; 5) Identificação e cálculo de produtos notáveis; 6) noção e resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita; 7) princípio aditivo e multiplicativo; 8) noção de potenciação e cálculo de raiz quadrada etc.

Outra prática explicada por Euler (1795) relaciona as proporções geométricas: “Duas relações geométricas são iguais quando suas razões são iguais. Essa igualdade de duas relações se denominada *proporção geométrica*; escreve-se, por exemplo, $a : b = c : d$ ou $a : b :: c : d$, para indicar que a relação $a : b$ é igual a relação $c : b$ [...]” (p. 369-360, tradução nossa) ou “[...] *a* está para *b* assim como *c* está para *d* [...] (p. 360, tradução nossa). A não ostensividade dessa ideia é assim descrita por Euler:

> Uma proporção geométrica consiste então de quatro termos, tais que o primeiro dividido pelo segundo, resulta o mesmo quociente que o terceiro dividido pelo quarto. Deduz-se disso uma propriedade importante, comum a todas as proporções geométricas, que o produto do primeiro pelo quarto termo é sempre igual ao produto do segundo pelo terceiro; ou simplesmente, que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios (EULER, 1795, p. 370-371, tradução nossa).

Para Euler (1795, p. 403, tradução nossa): “Uma sequência de números que se torna sempre um mesmo número de vezes maior ou menor, denomina-se progressão geométrica, porque cada termo está para o seguinte na mesma relação geométrica [...]”. Essa noção não ostensiva anunciada por Euler, pode ser constatada ao anunciar que

> “[...] o número que indica quantas vezes cada termo é maior que o anterior, chama-se *expoente*. Assim, quando o primeiro termo é 1 e o expoente é igual a 2, a progressão geométrica é a seguinte:
> *Termos* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 etc.
> *Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256* etc.
> os números 1, 2, 3 etc., sempre indicam a quantidade de termos da progressão.
> Se supormos, em geral, que o primeiro termo é *a* e o expoente é *b*, tem-se a seguinte progressão geométrica:
> *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., n*

> *Progr. a, ab,* ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7, ..., ab^{n-1}.
> Assim, quando essa progressão é de *n* termos, o ultimo termo é ab^{n-1}
> (EULER, 1795, p. 403-404, tradução nossa).

A ostensividade atual da palavra “expoente” do francês *exposant*, traduz-se por “razão” da progressão geométrica, mas a interpretação de Euler pode ser compreendida, também, como a ostensividade de “potência”, ou seja, o resultado da potenciação, conforme a seguir: $1 \cdot 2^0$, $1 \cdot 2^1$, $1 \cdot 2^2$, $1 \cdot 2^3$, $1 \cdot 2^4$, $1 \cdot 2^5$, $1 \cdot 2^6$, $1 \cdot 2^7$, $1 \cdot 2^8$, ..., $1 \cdot 2^{n-1} = 1 \cdot (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, ..., 2^{n-1}) = 1 \cdot (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^{n-1}) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^{n-1}$. Essa prática numérico-algébrica está associada às proporções geométricas, por exemplo, os termos 1, 2, 4 e 8, estabelecem que $1 : 2 :: 4 : 8$ ou $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$ ou $1/2 = 4/8$. Outra prática que Euler (1795) destaca é a soma de todos os termos de uma progressão geométrica de *n* termos (Quadro 8).

Quadro 8 – Prática de Euler para soma de todos os termos de uma progressão geométrica

Uma das principais questões que se pretende nesta matéria é encontrar a soma de todos os termos de uma progressão geométrica; vamos então explicar o método. Seja dada a seguinte progressão, composta de dez termos:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, indicaremos a soma por $\int$, de tal modo que:

$\int = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$, tomaremos o dobro dos dois lados, $2\int = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$. Retirando-se dessa progressão a progressão indicada por $\int$, resta $\int = 1024 – 1 = 1023$, portanto, a soma procurada é igual a 1023.

Supomos, imediatamente, que na mesma progressão o número de termos seja indeterminado e igual *n*, de forma que a soma em questão, ou $\int$, seja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1}$. Multiplicando-se por 2, tem-se $2\int = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n$, subtraindo-se dessa igualdade a anterior, tem-se $2^n – 1$. Vê-se então que a soma procurada se encontra, multiplicando o último termo, 2^{n-1}, pelo expoente 2, afim de se obter 2^n e subtrai-se desse produto a unidade.

Supomos agora, de forma geral, que o primeiro termo é *a*, o expoente igual a *b*, o número de termos igual a *n* e sua soma igual a $\int$, de modo que

$\int = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ... + ab^{n-1}$.

Se multiplicarmos por *b*, teremos $b\int = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ... + ab^n$, subtraindo pela igualdade anterior resta $(b – 1) \int = ab^n – a$, de onde tiramos, facilmente, a soma procurada $\int = \frac{ab^n - a}{b-1}$. Consequentemente, encontra-se a soma de uma progressão geométrica qualquer, multiplicando o último termo pelo expoente da progressão, que se subtrai do produto o primeiro termo e, divide-se o resto pelo expoente diminuído da unidade.

Fonte: Euler (1795, p. 405-407; pp. 410-411, tradução nossa).

A prática ostensiva referente à soma $\int = \dfrac{ab^n - a}{b-1}$, atualmente, está na expressão algébrica $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}, q \neq 1$($a_1$ é o primeiro termo, n o número de termos e q a razão da progressão geométrica). Vamos aplicar a fórmula de Euler para solucionar a seguinte tarefa: "Calcular a soma dos termos da PG finita (5, 20, ..., 1280) (DANTE, 2013, p. 225). Antes de aplicarmos a fórmula, precisamos escrever a progressão desta forma: (5, 5 · 4, ..., 5 · 4^4). Assim,

$$\int = \frac{ab^n - a}{b-1} = \frac{5 \cdot 4^4 - 5}{4-1} = \frac{1280-5}{3} = \frac{1275}{3} = 425.$$

A prática com a fórmula de Euler (1795) presume, necessariamente, a dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos (noção de potenciação e decomposição de números compostos pela razão da PG). Adaptando a fórmula de Euler a nossa prática atual, ela poderia ser expressa por $\int = \dfrac{a_k - a_1}{q-1}$ (a_1 é o primeiro termo, a_k último termo e q a razão da progressão geométrica). Notemos que a manipulação ostensiva aritmética comanda as ideias de Euler e tornou, didaticamente, mais econômica a resolução da tarefa proposta.

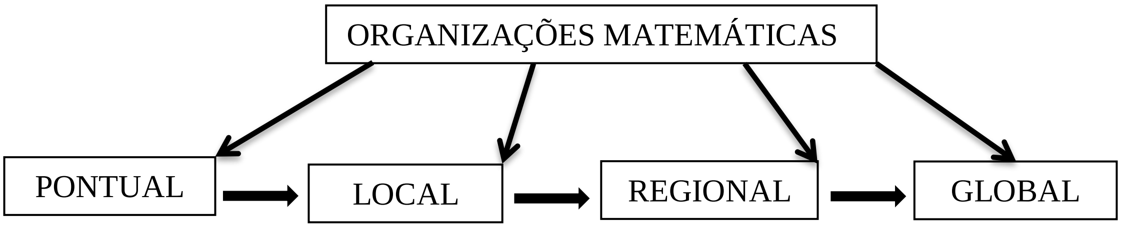
Destacamos da obra de Euler que as progressões, aritmética (PA) e geométrica (PG), possuem práticas sociais relativas ao cálculo de juros. A PA está no cálculo de juros simples e a PG no cálculo de juros compostos. Segundo Euler (1795), o progresso inicial sobre a teoria do cálculo de juros é de autoria de Leibniz, publicada em 1683, nas *Actas Eruditorum*. O próprio Euler declara que se deve dar maior atenção para o cálculo de juros compostos, porque possui um cálculo de juros sobre juros e gera maior montante continuamente.

Neste tópico exibimos algumas características da álgebra escolar em uma linha temporal por intermédio das obras de Stevin (1634), Euler (1795) e Dante (2013). Dessas obras mostramos algumas dialéticas entre objetos ostensivo e nãos ostensivos, que vivem na ecologia transpositiva de objetos da álgebra escolar.

Prosseguiremos no próximo tópico, a possível caracterização da álgebra elementar escolar, mas na perspectiva de análise ecológica de organizações matemáticas (OM) afinada com a abordagem da Teoria Antropológica do Didático.

2.3. Organizações Praxeológicas da Álgebra Elementar Escolar em Livros de Matemática de Diferentes Épocas

As obras citadas a seguir apontam diferentes contextos para o ensino da Aritmética e da Álgebra. Nossa intenção com isso é ver como se propunha o ensino da álgebra nessas obras e de que forma as Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD) (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000a) eram propostas pelos autores que as produziam. O esquema abaixo, adaptado de Matheron (2000a), resume as ideias dos tipos de Organizações Matemáticas.



Matheron (2000a) exemplifica uma Organização Matemática Pontual (OMP) por meio do tipo de tarefa T: **calcular a quarta proporcional de três números a, b, e c tal que** $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Esse tipo de tarefa está associado ao Teorema de Tales, comumente ensinado no nono ano do Ensino Fundamental brasileiro. Da reunião de várias OMP surgem as OML.

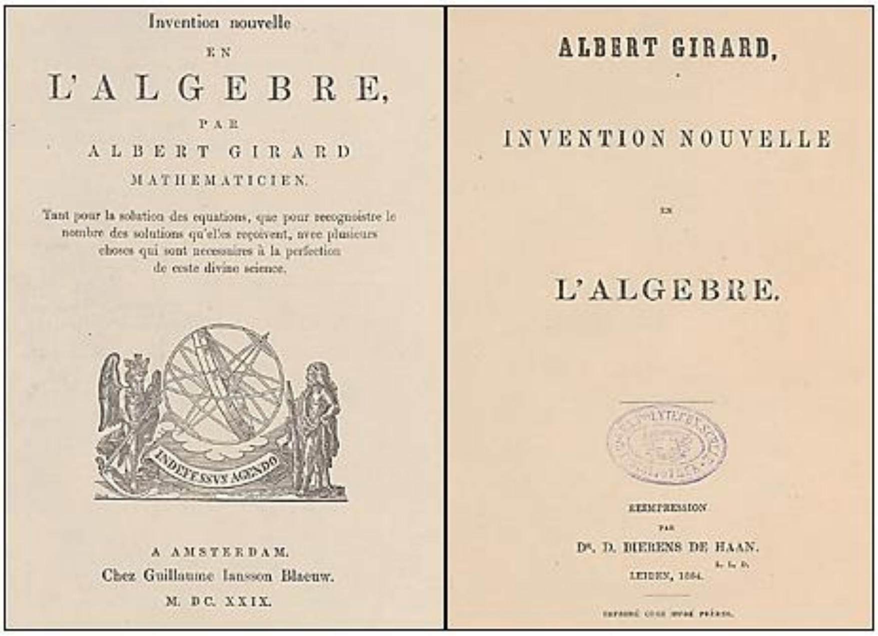
> [...] A organização matemática que decorre, resultante da agregação de diferentes organizações matemáticas pontuais em torno do elemento tecnológico θ = "teorema de Talès", que pode denotar-se por $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ com i ∊ {1, 2,3}, é então chamada de uma organização matemática local em torno do tema do teorema de Tales (MATHERON, 2000a, p. 59, tradução nossa).

Pelo exposto na citação, as OML estão ao nível de tipos de tarefas T_i e do trabalho dos tipos de técnicas τ_i. Neste nível de OM, o trabalho da técnica é fundamental, isso porque podem surgir tarefas complexas $t_i \in T_i$, que as técnicas τ_i, podem não dar conta de solucioná-las (CHEVALLARD, 1999). Esse aumento da complexidade, das tarefas, pode possibilitar que o bloco praxeológico atinja o nível tecnológico, ou seja, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, no qual o elemento teórico produz enunciados tecnológicos θ_j (MATHERON, 2000a), ou seja, atingimos o nível das OMR. Por conseguinte, as OMG são decorrentes do agrupamento das OMR. As OMG atingem o nível mais alto de complexidade praxeológica, as demonstrações matemáticas são inevitáveis e os diferentes elementos teóricos precisam ser evocados. O bloco praxeológico das OMG é denotado por $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ (MATHERON, 2000a). Esse tipo de OMG é exemplificada pela obra de Hilbert, "*Les fondements de la géométrie*" [Os fundamentos da geometria] (MATHERO, 2000a, p. 69). O nível axiomático e teórico desta obra é complexo e revisa as ideias da geometria euclidiana. As OMP, OML, OMR e OMG podem compor as obras que constituem diferentes épocas do estudo e ensino da matemática. A seguir, encontram-se algumas destas obras, selecionadas segundo o sistema didático adaptado de Chevallard (2009a, 2009b, 2009d): $\mathcal{S}$(y, *O*, Q_y). Nesse sistema didático, y = pesquisador, *O* = obras (livros) e Q_y a questão que levou ao estudo dessas obras. A questão Q_y está assim anunciada: Quais características das organizações praxeológicas da álgebra elementar escolar identificamos em obras de diferentes épocas?

2.3.1. Invention nouvelle en l'algèbre[16] (ALBERT GIRARD, 1629, 1884)

Esta obra data de 1629 e foi reimpressa em 1884 (Figura 2), possui algumas particularidades interessantes em relação aos objetos da matemática escolar, uma dessas é em relação às quatro operações aritméticas fundamentais, as quais são denominadas de conjugações comuns simples (adição e subtração) e compostas (multiplicação e divisão) (GIRARD, 1629, 1884).

Figura 2 – Contracapa do livro Girard (1629, 1884)



Fonte: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4803

No capítulo sobre "As características das potências e raízes", Girard (1629, 1884) inspira-se nas quatro conjugações comuns para propor as conjugações com os sinais de + e – (operações algébricas). Essas conjugações de sinais estão, atualmente, na adição, subtração,

16 Nova invenção em álgebra

multiplicação e divisão de números inteiros. As Figuras 3, 4 e 5 ilustram a conjugação da soma, subtração e multiplicação com sinais + e –.

Figura 3 – Conjugação aditiva com sinais + e –

$$\begin{array}{r} 3+11+28-13-5-6+3+5 \\ -5-4-40+19+17-7+8-5 \\ \hline -2+7-12+6+12-13+11 \end{array}$$

Fonte: Girard (1629, 1884, s. n. p.).

Figura 4 – Conjugação da subtração com sinais + e –

$$\text{l'exacteur.}\;\left|\begin{array}{l} 7+31-17+4-8-5+1-10+9 \\ 7+10-6+9-12+7-6+3-7 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 7+31-17+4-8-5+1-10+9 \\ -7-10+6-9+12-7+6-3+7 \\ \hline +21-11-5+4-12+7-13+16 \end{array}$$

Fonte: Girard (1629, 1884, s. n. p.).

Figura 5– Conjugação multiplicativa com sinais + e –

$$\begin{array}{lr} & 5+3-9+12+5-17-30 \\ & 4-3 \\ \hline & -15-9+27-36-15+51+90 \\ & 20+12-36+48+20-68-120 \\ \hline \text{produit.} & 20-3-45+75-16-83-69+90 \end{array}$$

Fonte: Girard (1629, 1884, s. n. p.).

Podemos observar que a prática manipulativa das conjugações com sinais + e –, das Figuras 3, 4 e 5, é próxima das manipulações operatórias com polinômios. Porém, prevalece a ideia aritmética aplicada à manipulação ostensiva das operações com números inteiros. Girard dá ênfase a essas três conjugações e apenas indica que a divisão (quarta conjugação) surge por consequência da multiplicação com sinais + e –. Isso fica evidente quando ele cita que, 20 –3 – 45 +75 –16 –83 –69 + 90 dividido por 5 +3 –9 +12 +5 –17 –30, deve resultar 4 – 3. Essa proposição praxeológica de Girard está associada à noção não ostensiva de divisão polinomial. Materializa-se isso pelos polinômios $20x^7 - 3x^6 - 45x^5 + 75x^4 - 16x^3 - 83x^2 - 69x + 90$, $5x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 17x - 30$ e $4x - 3$.

Uma modelização interessante da Organização Matemática (OM) de Girard (1629, 1884) é o que ele denomina de “construção algébrica sobre questões”. Nessas construções ele modela a noção de expressão algébrica polinomial sem uso de letras como incógnita ou variável: 4 (1) + 2 e 8 (2) – 4 (1) + 2. A multiplicação entre essas duas construções algébricas resulta 32 (3) + 4. A multiplicação citada por Girard se configura ostensivamente assim: $(4(1) + 2) \times (8(2) - 4(1) + 2) = 32(2 + 1) - 16(1 + 1) + 8(1) + 16(2) - 8(1) + 4 = 32(3) - 16(2) + 8(1) + 16(2) - 8(1) + 4 = 32(3) + 4$. Essa modelização está na álgebra escolar sob a forma de representação polinomial: $4x + 2$, $8x^2 - 4x + 2$ e $32x^3 + 4$.

Os fragmentos que extraímos da OM da obra de Girard (1629, 1884) revelam o atrelamento das noções algébricas ao numérico e a ostensividade dessas noções estão em dialética com a teoria aritmética, assim como, as técnicas que o autor descreve movimentam, essencialmente, o tratamento numérico.

2.3.2. Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre[17] (FRANÇOIS VIÈTE, 1630)

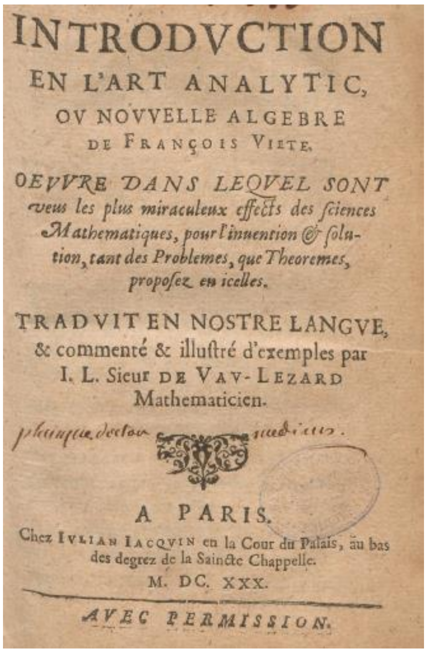
Nesta obra de Viète (1630) (Figura 6) existem várias noções matemáticas não ostensivas que as identificamos em vários objetos da álgebra elementar escolar. Entretanto, as compreensões de Viète são concebidas a partir das ideias de Euclides (Os elementos), por exemplo, no Capítulo III (p. 25, tradução nossa), ele anuncia que “A primeira das grandezas[18] escalares é o lado ou raiz”. A partir dessa primeira grandeza escalar, ele anuncia outras, simbolizando-as pelo **Q** (quadrado) e **C** (cubo): **Q Q** (quadrado multiplicado por um quadrado), **Q C** (quadrado multiplicado por um cubo), **C C** (cubo multiplicado por um cubo), **Q Q C** (quadrado ao quadrado multiplicado por um cubo), **Q C C** (quadrado multiplicado por um cubo e o produto deste por um cubo) e **C C C** (cubo multiplicado por cubo por cubo ou cubo de um cubo) (Ibidem, p. 25).

---

[17] Introdução na arte analítica, ou nova álgebra

[18] N. T. A tradução da palavra *Grandeur* remete ao significado de grandeza, tamanho, quantidade, etc.

Figura 6 – Contracapa do livro de Viète de 1630

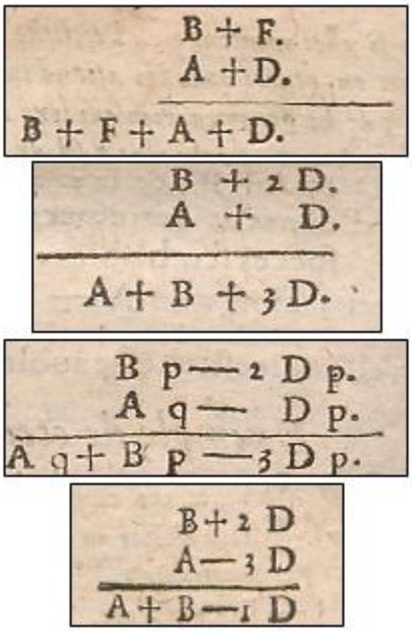

INTRODVCTION
EN L'ART ANALYTIC,
OV NOVVELLE ALGEBRE
DE FRANÇOIS VIETE.
OEVVRE DANS LEQVEL SONT
veus les plus miraculeux effects des sciences
Mathematiques, pour l'inuention & solu-
tion, tant des Problemes, que Theoremes,
proposez en icelles.
TRADVIT EN NOSTRE LANGVE,
& commenté & illustré d'exemples par
I. L. Sieur DE VAV-LEZARD
Mathematicien.
A PARIS,
Chez IVLIAN IACQVIN en la Cour du Palais, au bas
des degrez de la Saincte Chappelle.
M. DC. XXX.
AVEC PERMISSION.

Fonte: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4788 .

A representação das grandezas escalares, na OM de Viète, possui duas propriedades da potência de mesma base: produto e potência de potência. Confirmamos isso na própria explicação de Viète (1630, p. 27), quando ele estabelece que **Q C C C C C** corresponde a 17 quantidades (soma dos expoentes: 2 + 3 + 3 +3 + 3 +3). Algebricamente, temos **Q** = x^2, **C** = x^3, **Q Q** = $x^2 \cdot x^2 = (x^2)^2 = x^4$, **Q C** = $x^2 \cdot x^3 = x^3 \cdot x^2 = x^5$, **C C** = $x^3 \cdot x^3 = (x^3)^2 = x^6$, **Q Q C** = $(x^2)^2 \cdot x^3 = x^7$, **Q C C** = $(x^2 \cdot x^3) \cdot x^3 = x^8$ e **C C C** = $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = (x^3)^3 = x^9$.

Fica claro para nós que a álgebra de Viète está em dialética com a geometria, isso é passível de conclusão quando ele escreve: “Os tipos de grandezas comparativas de ordem e utilização das escalares são, P (plano), S (sólido), P P (plano-plano), P S (plano-sólido), S S (sólido-sólido), P P S (plano-plano-sólido), P S S (plano-sólido-sólido) e S S S (sólido-sólido-sólido) ” (VIÈTE, 1630, p. 29, tradução nossa). O desdobramento dessa compreensão leva Viète a descrever outras, uma delas trata dos “preceitos da lógica específica” (p. 32). É nessa lógica específica que surge a proposição do uso das letras do alfabeto. Isso é comprovado nos exemplos exibidos na Figura 7.

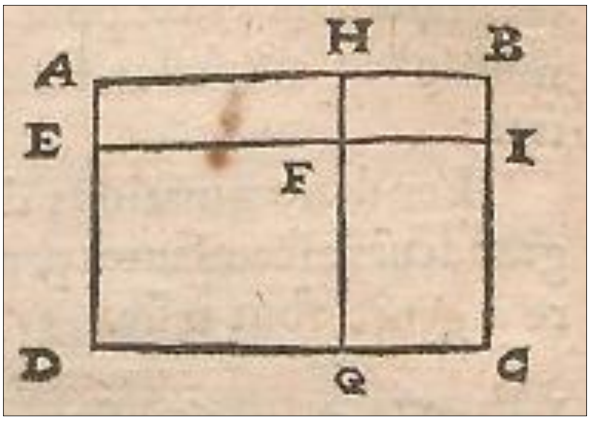
Figura 7 – Exemplos de quatro tipos de adições entre grandezas



Fonte: Viète (1630, p 34-35).

A OM de Viète possui explicações sobre a subtração, multiplicação e divisão entre grandezas. Essas explicações são possíveis anúncios tecnológicos-teórico apoiados na geometria euclidiana. Para Viète demonstrar a multiplicação de uma grandeza por outra, ele toma como pressuposto uma figura geométrica (Figura 8). Não exibiremos aqui a demonstração proposta por Viéte, mas com base na Figura 8 e, estabelecendo equivalências entre grandezas (A – B = AH, A = AB, B = HB, BC = D, BI = C e CI = D – G), ele propõe que o “[...] produto de A – B por D – G é o retângulo EFG contido sobre os lados EF igual à AH e FG igual à IC, então A multiplicado por D – G resulta DA – GA que será igual ao retângulo IEDC o qual é maior que o verdadeiro produto do retângulo IFG [...]” (VIÉTE, 1630, p. 39, tradução nossa).

Figura 8 – Figura geométrica utilizada por Viéte para demonstrar a multiplicação de uma grandeza por outra



Fonte: Viéte (1630, p. 29).

A obra de Viéte (1630) mesmo alicerçada sobre as compreensões da geometria euclidiana revela uma OM precursora de vários objetos da álgebra escolar, principalmente, noções não ostensivas da adição, subtração, multiplicação e divisão polinomial. As Figuras 7, 8 tornam possível essa nossa inferência.

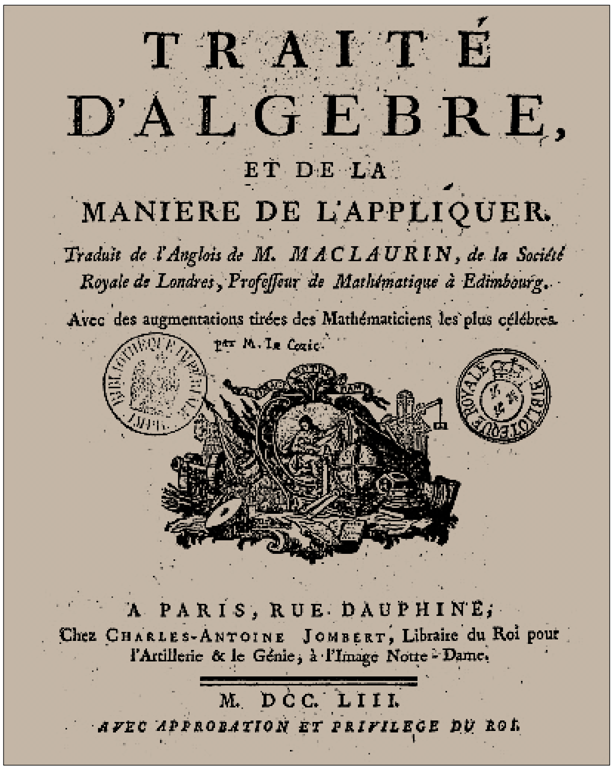
2.3.3. Traité d'algèbre et de la manière de l'appliquer[19] (COLIN MACLAURIN, 1753)

A obra de Maclaurin (1753) é uma tradução do original em Língua Inglesa. Esta obra (Figura 9) exibe uma estrutura organizacional de OM diferente das de Girard (1629, 1884) e Viète (1630). Nota-se que a organização estrutural da obra de Maclaurin, em duas partes (primeira e segunda), as quais são subdivididas em duas seções (primeira e segunda) e estas seções por capítulos, mostram uma sequencialidade textual próximo das ideias de uma Organização Didática (OD) (CHEVALLARD, 1999). Na primeira parte, a primeira seção (As operações fundamentais da Álgebra) está dividida em oito capítulos: Capitulo Primeiro – Contendo as noções preliminares; Capitulo II – As quatro operações sobre os inteiros; Capitulo III – Os divisores e múltiplos; Capítulo IV – As frações; Capitulo V – Da formação das potências e da extração de suas raízes; Capítulo VI – As quantidades com radicais e imaginárias; Capítulo VII – Cálculo das potências pelos seus expoentes e Capítulo VIII – As razões, proporções e progressões. Em sequência, a segunda seção compõe-se de seis capítulos: Capitulo I – Da análise; Capitulo II – Da resolução das equações de segundo grau; Capítulo III – Os problemas indeterminados do primeiro grau e os que são determinados imperfeitamente; Capítulo IV – Da resolução com números racionais, dos problemas onde a quantidade indeterminada tem várias dimensões; Capítulo V – Aplicação da Álgebra na Geometria elementar; e Capítulo VI – Problemas Geométricos (MACLAURIN, 1753).

A primeira parte da obra de Maclaurin (1753) pode caracterizar uma Organização Matemática Regional (OMR), isso porque identificamos a existência do bloco praxeológico $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000a) comandando as descrições dos capítulos dessa primeira parte. Além disso, a segunda parte dessa obra (Da resolução das equações de qualquer grau e aplicação da análise das curvas Algébricas (p. 169)) avança na complexidade dos objetos da Álgebra. Essa segunda parte do livro de Maclaurin, por conter objetos da álgebra elementar que foge a nossa intencionalidade nesta tese, não será exposta neste subtópico.

[19] Tratado de álgebra e a forma de aplicá-la (título em Língua Inglesa: A Treatise of Algebra in three Parts).

Figura 9 – Contracapa do livro de Maclaurin (1753)



TRAITÉ
D'ALGEBRE,
ET DE LA
MANIERE DE L'APPLIQUER.

Traduit de l'Anglois de M. MACLAURIN, de la Société Royale de Londres, Professeur de Mathématique à Edimbourg.

Avec des augmentations tirées des Mathématiciens les plus célébres.

par M. Le Cozic.

A PARIS, RUE DAUPHINE;
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095477.

O que se nota na versão francesa do livro de Maclaurin (1753) é uma álgebra elementar anunciada, no capítulo primeiro da primeira seção, assim: “A Álgebra é um Método geral para calcular tudo que é susceptível de qualquer determinação regular: é uma Aritmética universal [...]” (MACLAURIN, 1753, p. 1, tradução nossa). Para complementar a compreensão da Álgebra como Aritmética universal, autor explica que:

> A Aritmética e a Álgebra são fundamentadas sobre os mesmos princípios e procedem por meio das mesmas regras e mesmas operações fundamentais, mas a Aritmética comum trata apenas dos números e suas relações; a Álgebra envolve toda e qualquer quantidade, ou relação de quantidade, ou seja, tudo o que pode ser concebido como maior ou menor, como os números, as figuras Geométricas, o tempo, o movimento, a matéria, etc., e as relações entres essas coisas (MACLAURIN, 1753, p. 2, tradução nossa).

Vemos nas palavras de Maclaurin uma compreensão ampliada para a Álgebra Elementar, mesmo ela estando associada às ideias aritméticas, não significa que é a Aritmética comum (dos números e suas relações algorítmicas), mas uma Aritmética universal comparativa e abrangente. De fato, o texto da obra de Maclaurin (1753) contém noções da álgebra de Girard (1629), Viéte (1630) e Stevin (1634). Podemos exemplificar isso, quando Maclaurin (1753) anuncia que as simbologias mais utem são o sinal + (mais) para indicar adição: **a + b**; o sinal de – (menos) que indica subtração: **a – b**; o sinal × ou • (multiplicação): **a × b**, ou **a (•) b**, ou a • **b**; e o sinal : ou ÷ (divisão): **a (:) b**, ou **a : b**, ou **a ÷ b**. A divisão na forma de fração é também mencionada na representação $\frac{a}{b}$ (**a** dividido por **b**). Ao que nos parece, estamos diante de uma OM na vertente modelizadora da álgebra como aritmética generalizada, porém, devemos examiná-la com mais propriedade.

No capítulo II, primeira seção da primeira parte, Maclaurin (1753) explica as técnicas para "as quatro operações sobre os inteiros" (p. 5). Essas quatro operações são a adição, subtração, multiplicação e divisão. As técnicas que permitem solucionar cada uma dessas operações estão descritas por "regras". Na abordagem da TAD, vemos nessas regras possíveis anúncios das tecnologias θ_i (i = 1, 2, 3, ..., n) que justificam as técnicas τ_i (i = 1, 2, 3, ..., n).

> ADIÇÃO
>
> 1º. Se os termos são semelhantes: é necessário fazer a soma dos coeficientes, se os sinais são os mesmos; e a sua diferença com sinal do maior coeficiente, se os sinais forem diferentes.
>
> 2º. Se os termos não são semelhantes: é necessário escrever a sequência com os sinais que eles têm, ou supõem-se ter.
>
> EXEMPLOS
>
> | | |
> |---|---|
> | $4a + 2b - 2c + 5d - g$ | $4a + 4b + 3c$ |
> | $5a - 2b + 6c - 8d - 3g$ | $-4x - 4y + 3z$ |
> | $9a + 4c - 3d - 4g$ | $4a + 4b + 3c - 4x - 4y + 3z$ |
>
> (MACLAURIN, 1753, p. 5, tradução nossa).

A regra para a subtração é parecida com da adição, mas o autor recomenda atenção, pois há casos que a troca de sinal é necessária, por exemplo, *a – b* subtraído de *x + y*, resulta ***x + y – a + b***. A Figura 10, ilustra a regra para a subtração de inteiros.

Figura 10 – Exemplos de subtrações

de	$a + d$	de	$8a - 5c + 9d$
ſouſtr.	$c - g - h$	ſouſtr.	$6a - 8c - 7d$
reſte	$a + d - c + g + h$	reſte	$2a + 3c + 2d$

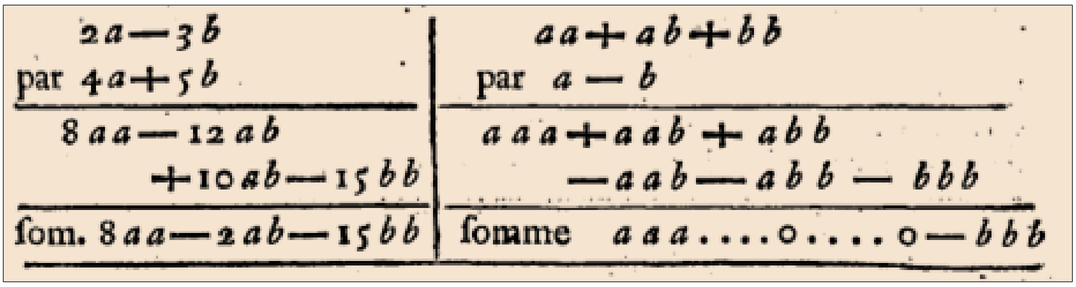
de	$9b + 15c - 7d + 8c - f$
ſouſtr.	$6b + 20c - 9d - 9c + 7f$
reſte	$3b - 5c + 2d + 17c - 8f$

Fonte: Maclaurin (1753, p. 6).

A adição e subtração sobre inteiros significam somar e subtrair polinômios na álgebra escolar atual. Duas operações que revelam certo distanciamento do modelo da álgebra escolar como aritmética generalizada (USISKIN, 1995; CATALAN, 2003), mas que, efetivamente, as noções não ostensivas aritméticas comandam a ostensividade algébrica polinomial (CHEVALLARD; BOSCH, 1999).

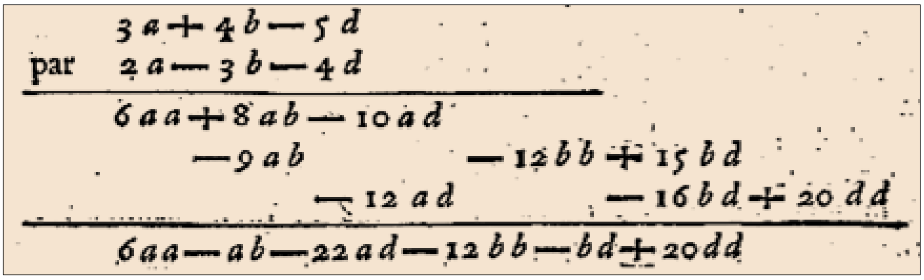
A multiplicação algébrica, na OM de Maclaurin (1753), é compreendida por meio de três regras: a dos sinais, dos coeficientes e das letras (p. 6). A regra dos sinais segue próximo do que fazemos hoje no ensino da matemática, ou seja, (+) × (+) = +, (–) × (–) = +, (+) × (–) = – e (–) × (+) = –. Em relação à dos coeficientes, é a mesma da multiplicação aritmética. Por último, a regra das letras, significa repeti-las seguidamente. As Figuras 11 e 12 mostram as três regras da multiplicação algébrica. Notamos que Maclaurin inicia a multiplicação no sentido da esquerda para a direita.

Figura 11– Exemplos de duas multiplicações algébricas



Fonte: Maclaurin (1753, p. 7).

Figura 12 – Exemplo de multiplicação algébrica



Fonte: Maclaurin (1753, p. 7).

Algumas noções básicas e tecnológicas da compreensão algébrica aparecem na obra de Maclaurin (1753, p. 7): $\overline{a-b}\times\overline{c-d}=ac-bc-ad+bd$; + *a* – *a* = *0*; +*n* multiplicado por + *a* – *a*, resulta +*na* – *na* = 0; –*n* multiplicado por + *a* – *a*, resulta –*na* + *na* = +*na* – *na* = *0*; $a^2 = a\,a$; $a^3 = a\,a\,a$; $a^3\,b^2 = a\,a\,a\,b\,b$; $2a = a + a$ e $a^2 = a \times a$. A representação $\overline{a-b}\times\overline{c-d}$ equivale a (a – b) × (c – d). Notemos que nas multiplicações das Figuras 11 e 12, a potência resultante das multiplicações entre letras iguais fica na forma sequencial de repetição e sem uso do expoente proveniente do produto de potência de mesma base. Porém, na divisão algébrica, os expoentes das letras já fazem parte da tecnologia para justificar a técnica aplicada na resolução desses tipos de divisões. Isso fica evidente nas três regras que Maclaurin anuncia para as resoluções das divisões algébricas: 1) regra dos sinais (igual à da multiplicação); 2) regra dos coeficientes (como da Aritmética) e 3) regra das letras – escreve-se o quociente quando possível entre dividendo e divisor e quando não possível fica na forma de fração, sendo numerador o dividendo e denominador o divisor, por exemplo, ***ab*** dividido por **a** resulta ***b***, mas ***bc*** dividido por ***a***, o quociente é $\frac{bc}{a}$ (Ibidem, p. 10). As divisões algébricas (ou polinomiais) que possuíam resto igual à zero eram ditas exatas. Embora Maclaurin indique a existência de divisões compostas não exatas, ele só exibe exemplos de divisões exatas.

No Capítulo V, o autor reúne compreensões dos Capítulos I, II, III e IV (práticas ostensivas e noções não ostensivas) para caracterizar o que ele denomina de "formação das potências e extração de suas raízes" (p. 28). É interessante o Capítulo V, porque nele temos o que hoje denominamos, na álgebra elementar escolar, de produtos notáveis, evidentemente, explicados pela regra da formação das potências (Figura 13).

Figura 13 – Formação das potências sucessivas do binômio a + b

$$
\begin{array}{l}
a + b\text{, racine}\\
\times\, a + b\\
\hline
a^2 + ab\\
\quad + ab + b^2\\
\hline
a^2 + 2ab + b^2\text{, quarré}\\
\times\, a + b\\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2\\
\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3\\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\text{, cube}\\
\times\, a + b\\
\hline
a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3\\
\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^3\\
\hline
a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\text{, quatriéme puissance.}\\
\qquad \&c.
\end{array}
$$

Fonte: Maclaurin (1753, p. 28).

Após o exemplo da Figura 13, Maclaurin expõe as regras para obtenção da potência de um binômio elevado a um expoente qualquer (regra dos expoentes, dos coeficientes e dos sinais). A regra dos coeficientes é descrita assim: "Para obtermos o coeficiente do primeiro termo, eleva-se ele a raiz da potência procurada; os outros coeficientes é o produto do coeficiente do termo anterior pelo expoente da primeira raiz no mesmo termo, dividido pelo expoente que deve ter a segunda raiz do termo que se procura" (MACLAURIN, 1753, p. 29). Por exemplo, $\overline{a-b}^{6} = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$ (p. 29). Aplicando-se a regra dos coeficientes temos:

$$(a)^6 - ((1\times 6)\div 1)a^5b + ((6\times 5)\div 2)a^4b^2 - ((15\times 4)\div 3)a^3b^3 + ((20\times 3)\div 4)a^2b^4 - ((15\times 2)\div 5)ab^5 + ((6\times 1)\div 6)b^6 \cdot$$

A regra dos expoentes e dos sinais é observada pelos expoentes das raízes **a** e **b**. Os expoentes da primeira raiz seguem em ordem decrescente e da segunda em ordem crescente. Os sinais dos coeficientes são definidos pelos expoentes das raízes: 1) se as duas raízes são positivas implica em sinal + (mais) para todos os coeficientes; 2) se só a segunda raiz é negativa, então sinal + (mais) quando o expoente é par e sinal – (menos) quando ímpar (MACLAURIN, 1753). Nesse sentido, $(a + b)^2 = (a)^2 + ((1 \times 2): 1)\ ab + ((2\times 1) : 2)b^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^3 = (a)^3 - ((1 \times 3) : 1)a^2b + ((3 \times 2) :2)\ ab^2 - ((3 \times 1) : 3)b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ e $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2 \times c \times (a + b) + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

Maclaurin (1753, p. 92, tradução nossa) comenta o que vem ser uma equação do segundo grau: "Tem-se visto que as equações do segundo grau são aqueles onde a incógnita é elevada ao quadrado". Ele também propõe a regra (premissa de um discurso tecnológico) para a técnica que soluciona equações do segundo grau.

> *REGRA*
>
> 1º. Transportem todos os termos que contém a incógnita em um membro da equação e todos os termos conhecidos no outro membro.
>
> 2º. Se o quadrado da incógnita é multiplicado por qualquer quantidade, dividem-se todos os termos da equação por esta quantidade.
>
> 3º. Forme o quadrado da metade da quantidade que multiplica a incógnita simples, acrescenta-se aos dois membros da equação o quadrado desta metade, e o membro preenche a incógnita será um quadrado perfeito.
>
> 4º. Tira-se a raiz quadrada dos dois membros, que de um será sempre a incógnita com a metade da quantidade que multiplicou a incógnita simples; de tal forma, que transportando esta metade, ter-se-á o valor da incógnita.
>
> EXEMPLO.
>
> $y^2 + ay = b$
>
> adiciona-se o quadrado de $\frac{a}{2}$ ...... $y^2 + ay + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$
>
> extraindo-se a raiz ...... $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$
>
> transportando $\frac{a}{2}$ ...... $y = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$
>
> porque todo quadrado é positivo e, evidentemente, que a raiz quadrada de uma quantidade negativa é imaginária [...] (MACLAURIN, 1753, p. 93, tradução nossa).

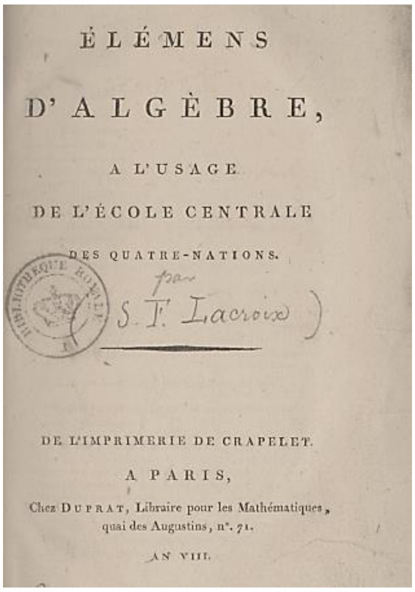
O modelo de equação de segundo grau proposto por Maclaurin, difere em parte do modelo atual presente na Álgebra Elementar Escolar: $ax^2 + bx + c = 0$. O modelo de Maclaurin assumi que os coeficientes, em jogo, são apenas dois (a e b), visto que o coeficiente associado ao termo de segundo grau é igual a +1(um positivo), logo não afeta o desenvolvimento da resolução da equação via método de completar quadrados, cuja tecnologia θ reflete na fatoração de um trinômio quadrado perfeito de um lado e extração da raiz quadrada dos dois lados. A solução, $y = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, ajusta-se na seguinte expressão algébrica: $y = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b + a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b}}{2}$. Ao que parece, Maclaurin se esquece da resolução das equações de segundo grau com coeficientes diferente de +1, associado a termo de segundo grau, mero engano, ele indica o procedimento a ser feito no segundo passo da regra. Abstraindo-se desse segundo passo, temos o modelo $my^2 + ay = b$ ($m \neq 0$ e 1). Aplicando-se o procedimento descrito por Maclaurin, temos que: $my^2 + ay = b \Leftrightarrow y^2 + \frac{a}{m} = \frac{b}{m}$. A metade de $\frac{a}{m}$ é $\frac{a}{2m}$ e seu quadrado, $\frac{a^2}{4m^2}$. Adicionando-se o quadro aos dois lados da equação, obtemos: $y^2 + \frac{a}{x}y + \frac{a^2}{4m^2} = b + \frac{a^2}{4m^2}$. Fatorando-se o primeiro membro da equação: $\left(y + \frac{a}{2m}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4m^2}$. Extraindo-se a raiz quadrada dos dois lados: $y + \frac{a}{2m} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4m^2}}$. Daqui em diante, procede-se o trabalho algébrico e, obtém-se uma fórmula resolutiva para equações de segundo grau: $y = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4m^2}} - \frac{a}{2m} \Leftrightarrow y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4bm}}{2m}$.

Conforme vimos em alguns aspectos da obra de Maclaurin (1753), a OM deste autor caracteriza a Álgebra Elementar além da concepção do modelo Aritmético e Geométrico. Dessa OM extraímos exemplos de operações algébricas polinomiais que evidenciam práticas manipulativas ostensivas convergentes com a abordagem antropológica da TAD. A obra de Maclaurin (1753) finaliza a segunda seção da primeira parte, abrangendo as aplicações da Álgebra na resolução de "Problemas Geométricos" (Capítulo VI, p. 141-168). Não examinaremos as particularidades desse capítulo, assim como, da segunda parte que completa a obra de Maclaurin, mas as particularidades que expomos neste subtópico, nos permite caracterizar a Álgebra descrita por Maclaurin, possuidora de uma epistemologia à Álgebra Elementar Escolar. Além disso, em relação à TAD, vemos essa obra, estruturada por tipos de Tarefas Ti_j (algumas exemplificadas nas Figuras 10 a 13), técnicas τ_{ij} (por exemplo, as aplicadas na resolução das tarefas das Figuras 10 a 13), tecnologias θ_j (propriedade distributiva explicada pela regra dos expoentes, dos coeficientes e dos sinais; regra para resolução de equação do segundo grau) e anúncios teóricos menores da teoria Θ (conferir – p. 58 – a citação que extraímos da p. 2 da obra de Maclaurin). Portanto, estamos diante de uma possível Organização Matemática Regional (OMR) da Álgebra Elementar (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000a).

2.3.4. Élémens d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des Quatre -Nations[20] (SILVESTRE FRANÇOIS LACROIX, 1799)

A obra de Lacroix (1799 (Figura 14)) anuncia em seu título uma organização praxeológica direcionada ao ensino de álgebra. Lacroix ao fazer isso propõe uma espécie de Organização Matemática e Didática (OMD) (CHEVALLARD, 1999). As palavras do autor tornam possível aproximar essa abordagem da TAD: “Convencido por uma larga experiência, que é essencial colocar nas mãos de um grande número de estudantes, um livro onde possam reencontrar as lições do professor [...]” (LACROIX, 1799, p. 1, tradução nossa).

Figura 14 – Contracapa do livro de Lacroix de 1799


ÉLÉMENS

D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DE L'ÉCOLE CENTRALE

DES QUATRE-NATIONS.

par S. F. Lacroix)

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n°. 71.

AN VIII.

Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6323947x .

A disposição estrutural da obra de Lacroix expõe assuntos da álgebra elementar escolar com ideias das obras de Maclaurin (1753) e Euler (1795). Porém, o discurso textual de Lacroix é o diferencial de sua obra, principalmente, sobre a resolução de equações polinomiais de diversos tipos e as confluências que elas têm com as regras do “jogo” sinais e operações

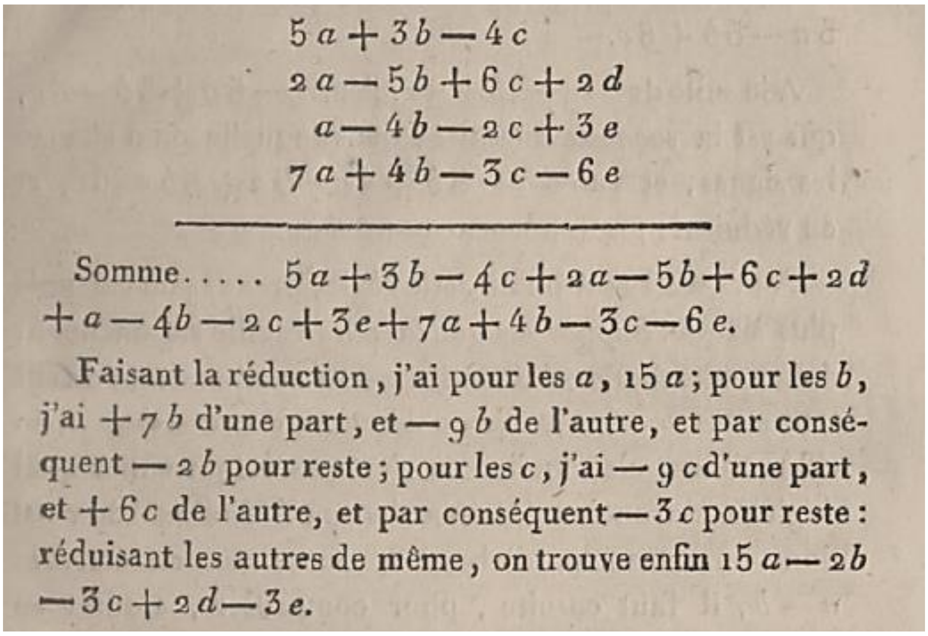
[20] Elementos de Álgebra para o uso da Escola central das Quatro-Nações

polinomiais. Vemos no texto praxeológico de Lacroix à influência das noções aritméticas em dialética com as noções algébricas.

> A vantagem das soluções literais sobre as soluções numéricas não consiste somente no que, para cada pergunta particular, age-se mais para substituir números: frequentemente, por certas adequações, tornam-se estas soluções susceptíveis de um enunciado simples e fácil de lembrar [...] (LACROIX, 1799, p. 27, tradução nossa).

As principais operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão) são explicadas como "[...] operações fundamentais sobre as quantidades consideradas em geral" (LACROIX, 1799, p. 34, tradução nossa). O texto explicativo de Lacroix relativo à adição e subtração polinomial detalha as particularidades dessas duas operações e ele as resume no exemplo da Figura 15. Lacroix expõe que existem quantidades com um termo (monômio), dois termos (binômio), três termos (trinômio) e, em geral, com mais de três termos são denominados de polinômios (p. 37). Essa classificação das expressões polinomiais prevalece nas OMD dos livros didáticos atuais de matemática.

Figura 15 – Exemplo de adição e subtração



$$5a + 3b - 4c$$
$$2a - 5b + 6c + 2d$$
$$a - 4b - 2c + 3e$$
$$7a + 4b - 3c - 6e$$

Somme..... $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Faisant la réduction, j'ai pour les a, $15a$; pour les b, j'ai $+7b$ d'une part, et $-9b$ de l'autre, et par conséquent $-2b$ pour reste; pour les c, j'ai $-9c$ d'une part, et $+6c$ de l'autre, et par conséquent $-3c$ pour reste: réduisant les autres de même, on trouve enfin $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

Fonte: Lacroix (1799, p. 37).

Nota-se que Lacroix (1799) toma certos cuidados para explicar a multiplicação polinomial, principalmente, os relativos às particularidades que a diferencia da multiplicação aritmética: "A multiplicação algébrica possui algumas considerações particulares, que não se aplica a multiplicação aritmética [...]" (p. 40, tradução nossa). Ele exemplifica uma dessas particularidades pela multiplicação de ***a a*** por ***a a a***, que resulta ***a a a a a***, porém, é conveniente para este produto, a escrita $\boldsymbol{a^5}$ (p. 42). Um dos exemplos mais complexo de multiplicação algébrica está na Figura 16.

Figura 16 – Exemplo de multiplicação algébrica

EXEMPLE V.

On propose de multiplier $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

par . . . . $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$
\begin{array}{l}
5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\
-20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\
+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\
\hline
\end{array}
$$

Produit. . . $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Fonte: Lacroix (1799, p. 48).

A técnica multiplicativa (ou algorítmica) de Lacroix (1799) é semelhante à de Maclaurin (1753), ou seja, da esquerda para a direita, mas sem a devida ordenação dos termos semelhantes da técnica de Maclaurin. Essa ordenação é explicada por Lacroix, na forma de texto cursivo, em cinco parágrafos. Lacroix avança na explicação da multiplicação algébrica, mostrando os resultados das multiplicações binominais de $\boldsymbol{a + b}$ por $\boldsymbol{a - b}$, $\boldsymbol{a + b}$ por $\boldsymbol{a + b}$, cujos produtos são, respectivamente, $\boldsymbol{a^2 - b^2}$, $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$ (p. 49). Ele finaliza a o texto praxeológico sobre multiplicação polinomial, mostrando que há várias formas de se indicar essa operação: $(a^2+3ab+b^2)\times(2a+3b) = (a^2+3ab+b^2)\cdot(2a+3b) = (a^2+3ab+b^2)(2a+3b) = \overline{a^2+3ab+b^2}\times\overline{2a+3b}$ (p. 51). O texto de Lacroix (1799) para a divisão algébrica está atrelado ao da multiplicação algébrica que, segundo este, a existência de fatores comuns ao dividendo e ao divisor, suprimidos na divisão, são provenientes dos fatores da multiplicação (p. 51).

Para Lacroix (1799) a divisão algébrica possui particularidades associadas ao jogo de sinais da multiplicação algébrica: “A maneira de fazer esta operação na Álgebra depende também dos sinais conforme empregamos para a multiplicação. O objeto, de resto, é o mesmo como na aritmética” (p. 51-52, tradução nossa). O autor ao referir-se a aritmética significa proceder a divisão algébrica com base nas ideais do algoritmo da divisão euclidiana: Dividendo = Divisor × Quociente + Resto (Figura 17).

Figura 17 – Exemplo de divisão algébrica

$$
\begin{array}{l|l}
\quad\quad\quad\quad\quad \textit{Dividende.} & \quad \textit{Diviseur.} \\
5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & 5a^4-2a^3b+4a^2b^2 \\
\cline{2-2}
-5a^7+\;2a^6b-\;4a^5b^2 & \quad \textit{Quotient.} \\
 & a^3-4a^2b+2b^3 \\
\cline{1-1}
\text{Reste } -20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & \\
\quad\quad +20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3 & \\
\cline{1-1}
\text{Reste} \quad\quad\quad\quad +10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -10a^4b^3+4a^3b^4-8a^2b^5 & \\
\cline{1-1}
\text{Reste} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Fonte: Lacroix (1799, p. 59).

A Figuras 17 possui um exemplo de divisão polinomial exata (resto final igual ao zero). Não identificamos exemplos resolvidos de divisões não exatas na obra de Lacroix (1799), mas há indicações da existência desse tipo de divisão algébrica, quando ele aborda as frações literais e resoluções de equações e sistemas de equações lineares do primeiro grau (p. 68- 101). Outra particularidade da OM de Lacroix é o uso das letras *x*, *y* e *z*, exclusivamente, para equações (do primeiro e segundo grau) e sistemas lineares. No texto praxeológico das quatro principais operações algébricas (adição, subtração, multiplicação e divisão), os termos dos tipos de polinômios possuem, predominantemente, as letras ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***.

A resolução de equações do segundo grau aborda a existência ou não da extração de raízes quadradas de certas quantidades. O desdobramento praxeológico dessa abordagem leva Lacroix a considerar a extração de raiz quadrada de quantidades negativas impossível na obtenção dos valores da incógnita de uma equação do segundo grau. Entretanto, raízes quadradas de quantidades negativas são denominadas de *quantidades imaginárias*, de tal forma que, $\sqrt{-a}$ e $a+\sqrt{-b}$, exemplificam esse tipo de quantidades (LACROIX, 1799). A problemática das quantidades imaginárias ganha certo discurso tecnológico (em referência a tecnologia θ) quando Lacroix expõe sobre "O cálculo das quantidades afetadas pelo símbolo √" (LACROIX, 1799, p. 146, tradução nossa). O texto praxeológico de Lacroix que versa sobre as operações com radicais é abrangente, inclui-se neste a seguinte situação: "[...] $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$

deve resultar $-\sqrt{ab}$, e não $\pm\sqrt{ab}$, porque $\sqrt{-a}$ é o mesmo que $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-b}$ é o mesmo que $\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}$, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ será $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, ou $\sqrt{ab}\times\sqrt{(-1)^2}$, que se reduz para $-\sqrt{ab}$, porque $\sqrt{(-1)^2}=-1$" (LACROIX, 1799, p. 148, tradução nossa). Esse tipo de prática algébrica com quantidades imaginárias, no ensino da álgebra escolar atual, está quase suprimido das OMD dos livros didáticos de matemática.

Outra praxeologia algébrica da obra de Lacroix (1799) possui uma dimensão transicional entre a álgebra elementar escolar e a álgebra do ensino superior, trata-se da obtenção das potencias do binômio *(x + a)^m^* pela sequência ou série $x^m + m\cdot a\cdot x^{m-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}a^2\cdot x^{m-2} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^3\cdot x^{m-3} + etc.$ (p. 167). Essa sequência ou série, conforma-se com as ideias de Maclaurin (1753) para os cálculos das potências dos binômios $(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $(a + b)^3$ e $(a – b)^3$. Assim, o resultado de $(x – 6)^4$, obtém-se pela sequência de Lacroix:

$$(x-6)^4 = x^4 + 4\cdot(-6)\cdot x^{4-1} + 4\cdot\frac{4-1}{2}(-6)^2\cdot x^{4-2} + 4\cdot\frac{4-1}{2}\cdot\frac{4-2}{3}(-6)^3\cdot x^{4-3} + 4\cdot\frac{4-1}{2}\cdot\frac{4-2}{3}\cdot\frac{4-3}{4}(-6)^4\cdot x^{4-4} =$$

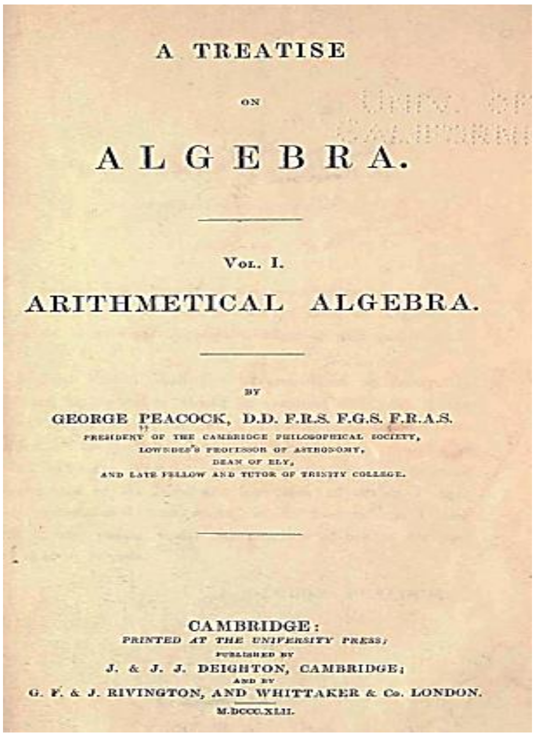
$$= x^4 - 24x^3 + 216x^2 - 864x + 1296\,.$$

A obra de Lacroix (1799) aborda outros assuntos: "Proporções e progressões" (p. 262-278), "Teoria das quantidades exponenciais e logarítmicas" (p. 278-291) e, por último, "Questões relativas ao juro de dinheiro" (p. 292-298). Esses assuntos permanecem no ensino da álgebra escolar em nossos dias, evidentemente, com alterações e recombinações transpositivas. Não exibiremos aqui o texto praxeológico de Lacroix para esses assuntos da álgebra elementar escolar, porque nossa intencionalidade foi redirecionada para as operações polinomiais fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), algo muito forte na obra desse autor. Além disso, as conexões que Lacroix estabelece entre os assuntos da álgebra elementar, principalmente, por meio de noções da tecnologia θ_j (por exemplo, a tecnologia para obtenção de potencias de binômios), levam-nos a ver a obra desse autor com características de uma possível Organização Matemática Regional (OMR) (MATHERON, 2000a). A seguir, examinaremos mais algumas obras, entretanto nos deteremos especificamente nos assuntos de polinômios.

2.3.5. A Treatise on Algebra[21] (GEORGE PEACOCK, 1842 – Vol. 1, 1845 – Vol. 2)

A obra de Peacock (1842, 1845) compõe-se de dois volumes. No primeiro volume (Figura 18), o texto praxeológico de Peacock versa sobre Álgebra Aritmética, na perspectiva dialética de que a Álgebra possibilita um alargamento teórico da Aritmética: "Álgebra Aritmética é a ciência que resulta da utilização de símbolos e sinais para denotar números e as operações para as quais eles podem ser submetidos [...]" (PEACOCK, 1842, p. 1, tradução nossa). A organização praxeológica do primeiro volume está em capítulos, do capítulo I (um) ao X (dez). Desses dez capítulos, no capítulo I – Princípios da Álgebra Aritmética (p.1-51) – Peacock estabelece as principais conexões entre as noções aritméticas e algébricas. Nesse mesmo capítulo ele situa seu texto praxeológico em relação às principais operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e suas possíveis conexões com as principais propriedades que regem o cálculo aritmético.

Figura 18 – Contracapa do primeiro volume da obra de Peacock


A TREATISE
ON
ALGEBRA.

VOL. I.
ARITHMETICAL ALGEBRA.

BY
GEORGE PEACOCK, D.D. F.R.S. F.G.S. F.R.A.S.
PRESIDENT OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY,
LOWNDES'S PROFESSOR OF ASTRONOMY,
DEAN OF ELY,
AND LATE FELLOW AND TUTOR OF TRINITY COLLEGE.

CAMBRIDGE:
PRINTED AT THE UNIVERSITY PRESS;
PUBLISHED BY
J. & J. J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;
AND BY
G. F. & J. RIVINGTON, AND WHITTAKER & Co. LONDON.
M.DCCC.XLII.

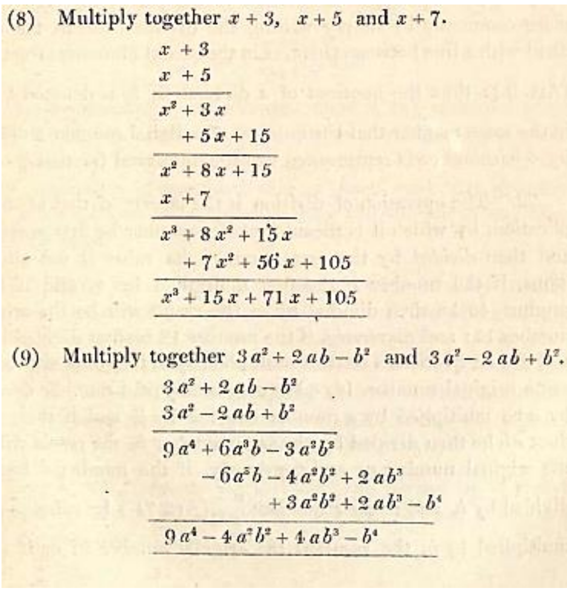
Fonte: https://archive.org/details/84142856_001.

Notamos que Peacock prima pela conexão entre Aritmética e Álgebra, quando ele explica o processo resolutivo para diferentes adições e subtrações algébricas. Isso se estende para os exemplos de multiplicações e divisões algébricas. Os exemplos de adições e subtrações

[21] Um Tratado sobre Álgebra

algébricas revelam uma pratica de cálculo algébrico dependente do aritmético, mas ajustáveis conforme os tipos de expressões polinomiais. Os exemplos de polinômios que figuram na obra de Peacock (1842) são bem próximos do que constam nos atuais livros didáticos de matemática, principalmente, o uso das letras *x* e *y*. Esse recurso praxeológico se estende para os outros capítulos. O produto algébrico entre vários números está no texto praxeológico do autor: “[...] assim, o produto de *a, b, c e x* é representado por *abcx*: o produto de *7, x* e *y* é representado por *7xy*: o produto de *7x* e *9y* é representado por $7 \times 9xy$, ou *63xy*: o produto de *7x*, *9y* e *11z* é representado por $7 \times 9 \times 11xyz$, ou $7 \cdot 9 \cdot 11xyz$, ou *693xyz*: e da mesma forma em outros casos” (PEACOCK, 1842, p. 22, tradução nossa). A tendência da aritmetização da multiplicação algébrica se verifica nos exemplos explicativos do autor. A evolução do processo multiplicativo das expressões algébricas é acrescida da propriedade do produto de potência de mesma base: $a \times a^2 = a^1 \times a^2 = a^{1+2} = a^3$; $x^{11} \times x^{12} = x^{11+12} = x^{23}$; $7a^7 \times 8a^8 \times 9a^9 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \times a^7 a^8 a^9 = = 504 a^{7+8+9} = 504a^{24}$; $ab \times a^2b^3 = a\,a^2\,b\,b^3 = a^{l+2}\,b^{l+3} = a^3\,b^4$ (PEACOCK, 1842, p. 24). Peacock amplia a prática de cálculo algébrico das multiplicações polinomiais, exibindo exemplos solucionados por meio da técnica que aplica a propriedade distributiva como elemento tecnológico (ASSUDE; COPPÉ; PRESSIAT, 2012): $(a + b + c + d)\,x = ax + bx + cx + dx$; $(a + b - c)\,x = ax + bx - cx$; $(a - b + c - d)\,x = ax - bx + cx - dx$; $(3xy - 4y^2 - 6yz) \times 7xyz = 21\,x^2y^2z - 28\,xy^2z - 42\,xy^2z^2$ (p. 26-27). Na Figura 19 temos dois exemplos mais complexo de multiplicação polinomial solucionados via técnica que usa as noções do algoritmo da multiplicação aritmética e elementos tecnológicos da distributividade.

Figura 19 – Exemplos de multiplicações polinomiais



(8) Multiply together $x + 3$, $x + 5$ and $x + 7$.

$$\begin{array}{l} x + 3 \\ x + 5 \\ \hline x^2 + 3x \\ \quad + 5x + 15 \\ \hline x^2 + 8x + 15 \\ x + 7 \\ \hline x^3 + 8x^2 + 15x \\ \quad + 7x^2 + 56x + 105 \\ \hline x^3 + 15x + 71x + 105 \\ \hline \end{array}$$

(9) Multiply together $3a^2 + 2ab - b^2$ and $3a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 2ab - b^2 \\ 3a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline 9a^4 + 6a^3b - 3a^2b^2 \\ \quad - 6a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ \quad\quad + 3a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \\ \hline 9a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 \\ \hline \end{array}$$

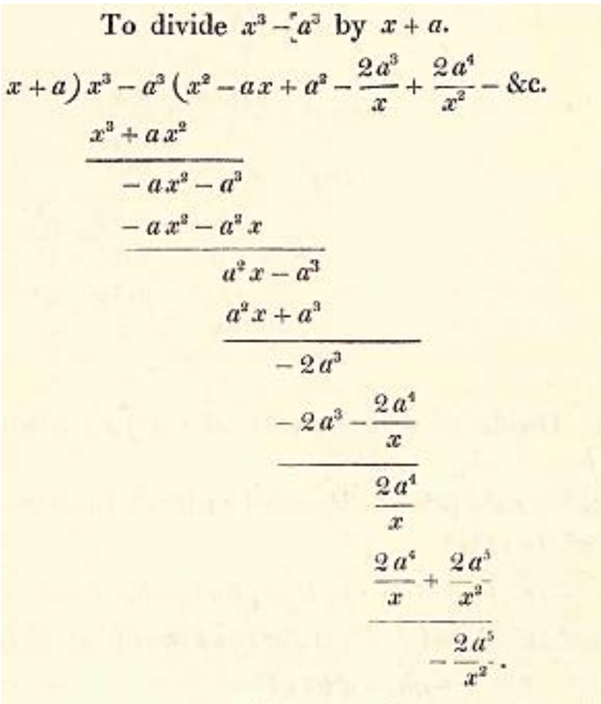
Fonte Peacock (1842, p. 37).

A primeira tarefa (Multiplique juntos $x + 3$, $x + 5$ e $x + 7$) da Figura 19 consta nos livros didáticos atuais de matemática, porém ajustada as intenções didáticas dos autores desses livros. Peacock prossegue seu texto praxeológico, estabelecendo um possível enunciado tecnológico preliminar (relativo à tecnologia θ) que conecta a multiplicação à divisão algébrica.

> Na operação de Multiplicação são dados *dois fatores* para se encontrar o *produto* entre eles; ao passo que na operação de Divisão são indicados o *produto* ou que se *presume* ser o produto e um dos dois fatores, para se encontrar o outro. Com referência a essa operação, este produto ou o produto presumido é chamado de Dividendo e o fator dado é chamado Divisor: enquanto que o fator ou fator presumido, cujo valor é necessário ser encontrado, é chamado de Quociente (PEACOCK, 1842, p. 38, tradução nossa).

Identificamos na OM de Peacock (1842) exemplos de divisão aritmética e desta o autor as amplia para as divisões algébricas com letras, na forma de fração: $a \times b \div b = \frac{a \times b}{b} = \frac{ab}{b} = a$; $a \div b \times b = \frac{a}{b} \times b = \frac{ab}{b} = a$; $\frac{4ax}{2a} = 2x$; $\frac{12a^2x^2}{3ax} = 4ax$; $\frac{72abxyz}{12axz} = 6by$; $\frac{63a^2x^3yz^5}{27a^4x^2y^3z^4} = \frac{7xy}{3a^2y^2}$ (Ibidem, p. 39-41). As divisões polinomiais com maior grau de dificuldade o autor exibe vários exemplos, alguns deles ele comenta as particularidades intrínsecas a cada exemplo. Exibimos na Figura 20 um desses exemplos.

Figura 20 – Exemplo de divisão polinomial comentado por Peacock



To divide $x^3 - a^3$ **by** $x + a$.

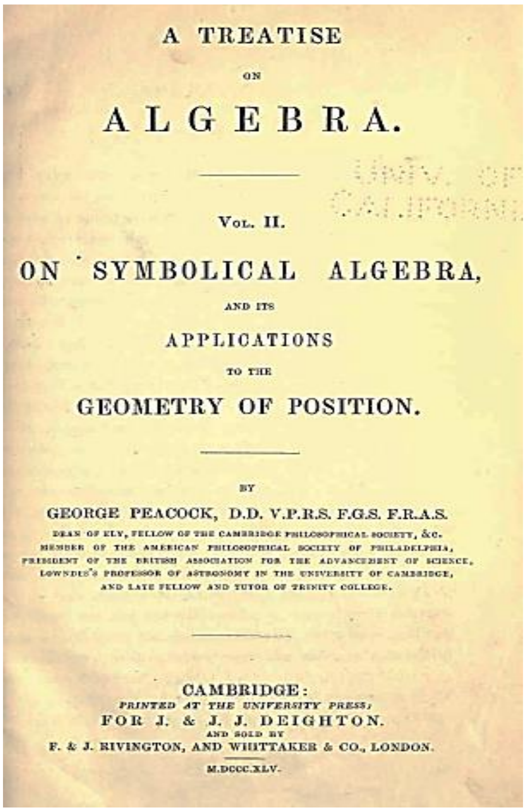
$$x + a)\; x^3 - a^3 \;(x^2 - ax + a^2 - \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^4}{x^2} - \&c.$$
$$x^3 + ax^2$$
$$-ax^2 - a^3$$
$$-ax^2 - a^2x$$
$$a^2x - a^3$$
$$a^2x + a^3$$
$$-2a^3$$
$$-2a^3 - \frac{2a^4}{x}$$
$$\frac{2a^4}{x}$$
$$\frac{2a^4}{x} + \frac{2a^5}{x^2}$$
$$-\frac{2a^5}{x^2}.$$

Fonte: Peacock (1842, p. 50)

O esquema resolutivo da divisão exposta na Figura 20 mostra a disposição dos polinômios Dividendo, Divisor e Quociente, não seguindo a estrutura do algoritmo da divisão aritmética (Dividendo – Divisor – Quociente), mas estão separados por parênteses conforme vemos na figura. Embora essa disposição dos elementos da divisão não estar em conformidade com as das obras de matemática atual, o texto praxeológico de Peacock, concernente ao primeiro capítulo de sua obra de 1842, conferem características muito próximas da álgebra elementar escolar dos atuais livros didáticos de matemática. Além disso, os tipos de tarefas (exemplos) de operações algébricas exibidos nesse mesmo capítulo, garante maior evidencia dessa caracterização.

Os outros capítulos do primeiro volume da obra de Peacock (1842) contemplam vários assuntos da álgebra elementar de igual importância aos do primeiro capítulo, mas nossa atenção, nesta tese, volta-se para a especificidade das expressões algébricas polinomiais, porque estas perpassam os assuntos desses outros capítulos e indicam a possível caracterização da álgebra elementar escolar. Avancemos para o segundo volume da obra de Peacock (1845) (Figura 21).

Figura 21 – Contracapa do segundo volume da obra de Peacock



A TREATISE

ON

ALGEBRA.

VOL. II.

ON SYMBOLICAL ALGEBRA,

AND ITS

APPLICATIONS

TO THE

GEOMETRY OF POSITION.

BY

GEORGE PEACOCK, D.D. V.P.R.S. F.G.S. F.R.A.S.

DEAN OF ELY, FELLOW OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY, &c.
MEMBER OF THE AMERICAN PHILOSOPHICAL SOCIETY OF PHILADELPHIA,
PRESIDENT OF THE BRITISH ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE,
LOWNDES'S PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE,
AND LATE FELLOW AND TUTOR OF TRINITY COLLEGE.

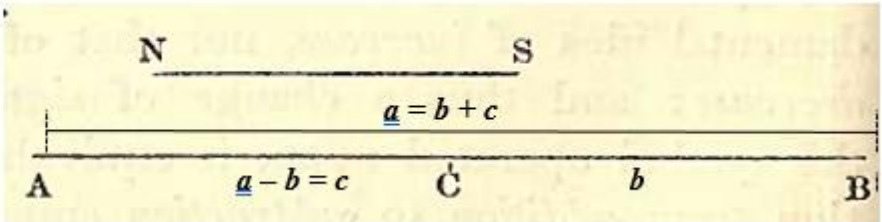
CAMBRIDGE:
PRINTED AT THE UNIVERSITY PRESS;
FOR J. & J. J. DEIGHTON.
AND SOLD BY
F. & J. RIVINGTON, AND WHITTAKER & CO., LONDON.
M.DCCC.XLV.

Fonte: https://archive.org/details/84142856_002.

O segundo volume da obra de Peacock (1845) dá continuidade ao primeiro de 1842, no prefácio do segundo volume ele declara esse prolongamento praxeológico: “Tenho procurado, no presente volume, apresentar os princípios e aplicações do simbólico, em sequência imediata aos de Aritmética, Álgebra, e ao mesmo tempo preservar essa ordem de lógica estrita [...]” (PEACOCK, 1845, Prefácio, tradução nossa). O texto praxeológico do segundo volume da obra de Peacock está bem próximo dos textos praxeológicos das OM dos livros atuais de matemática destinados ao estudo e ensino da álgebra elementar escolar, mas a forma organizacional dos conteúdos não segue a mesma disposição das dos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e Médio, do sistema de ensino brasileiro.

A sequência capitular do segundo volume vai do capítulo XI (onze) ao XLVI (quarenta e seis). O primeiro capítulo desse volume, intitulado “Sobre as Operações de Adição e Subtração em Álgebra Simbólica” (p. 1- 16), retoma as ideias do capítulo I do primeiro volume e as amplia na perspectiva de que essas duas operações da Álgebra estejam associadas às noções da Geometria euclidiana, para isso ele propõe este problema: “Um viajante se move para o sul em ***a*** milhas, depois retorna para o norte em ***b*** milhas: qual é a sua distância final a partir do ponto de partida? ” (PEACOCK, 1845, p. 10, tradução nossa). A solução resumida para o problema proposto, adaptamos no esboço da Figura 22: **N** (norte), ***S*** (sul), ***AB = a*** (distância para **S**), ***BC = b*** (distância para **N**) e ***AC = a – b = c*** (distância final).

Figura 22 – Esboço da solução de Peacock



Fonte: Peacock (1845, p. 10-11).

No capítulo XII, Peacock expõe um texto praxeológico intitulado “Sobre as Operações de Multiplicação de Divisão na Álgebra Simbólica” (p. 17, tradução nossa). Para explicar o que anuncia, ele retoma as ideias da multiplicação da Álgebra Aritmética e recomenda que os resultados da multiplicação da Álgebra Simbólica comtemplam os resultados da multiplicação na Álgebra Aritmética, mas ao contrário não (PEACOCK, 1845). Essa recomendação se origina, segundo o autor, de três diferentes casos de multiplicação da Álgebra Simbólica:

CASO 1: Quando o multiplicando e o multiplicador são monômios.

> REGRA. “Para encontrar o produto monomial devemos determinar em primeiro lugar, o seu sinal, em segundo lugar, o seu coeficiente e, por último a sua parte literal.”
> (...)
> CASO 2: Quando um multiplicando é um polinômio e o multiplicador um monômio.
> REGRA. “Multiplique o único termo do multiplicador, em regra, para cada termo sucessivo do polinômio e, em seguida, organizar os produtos dos vários termos no resultado, precedidos de seus adequados sinais, em qualquer ordem, de forma mais simétrica ou mais conveniente. ”
> (...)
> CASO 3: Quando o multiplicando e o multiplicador são polinômios.
> REGRA. “Multiplique sucessivamente cada termo de um fator por todos os termos do outro, adicionar os vários produtos parciais semelhantes, em seguida, organizar os termos do resultado em qualquer ordem mais conveniente, sem considerar o sinal do primeiro termo (PEACOCK, 1845, p. 18-20, tradução nossa).

Os três casos de multiplicação polinomial da Álgebra Simbólica de Peacock, remete-nos aos tipos de multiplicação polinomial dos livros didáticos de matemática do oitavo ano do Ensino Fundamental do sistema de ensino brasileiro.

A divisão na Álgebra Simbólica de Peacock é descrita por ele a partir das noções da divisão aritmética em relação à divisão na Álgebra Simbólica, devido elas diferirem “[...] apenas na regra adicional que é necessária para determinar o sinal do quociente ou de seu primeiro termo, quando um sinal negativo afeta um ou ambos os primeiros termos (ou os únicos termos quando ambos são monômios) do dividendo e do divisor” (PEACOCK, 1845, p. 21, tradução nossa). Os casos de divisão na Álgebra Simbólica correspondem aos mesmos da multiplicação, incluindo as mesmas regras do “jogo” de sinais: CASO 1: Quando dividendo e divisor são monômios; CASO 2: Quando o dividendo é um polinômio e o divisor um monômio; CASO 3: Quando o divisor é um polinômio e o dividendo um polinômio ou um monômio (PEACOCK, 1845).

A extensão da multiplicação e divisão na Álgebra Simbólica alcança a Geometria, Peacock (1845) propõe isso para o cálculo algébrico das quantidades de retângulos menores que subdividem uma figura geométrica retangular, ou seja, obtenção da medida da área dessa figura retangular. Ele expande essa ideia para o cálculo algébrico do volume de um paralelepípedo retângulo e obtenção do valor algébrico de uma de suas medidas. Em um dos parágrafos finais do capítulo XII, Peacock enfatiza que a multiplicação e divisão na Álgebra Simbólica implicam em compreender que elas são operações inversas, porque quando a divisão possui resto igual ao zero, o dividendo é o produto entre divisor e quociente. Destaque-se que a modelização algébrica de Peacock (1845) possui práticas que permanecem até os dias atuais, nos livros de matemática destinados ao ensino da álgebra elementar escolar. O cálculo algébrico de medidas áreas de figuras geométricas é um bom exemplo dessas práticas.

Os capítulos posteriores ao XII exibem textos praxeológicos encorpados pelas operações algébricas descritas nos capítulos XI e XII. Os capítulos XIII (A Determinação do Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum de duas ou mais Expressões Algébricas), XIV (Sobre a Redução das Expressões Algébricas para suas Formas mais simples), XV (Declaração Formal do Princípio da Permanência de Formas Equivalentes) e XVI (A Teoria dos Índices), cumprem esse papel. Não examinaremos esses capítulos nem os demais do segundo volume da obra de Peacock (1845), pois, conforme declaramos mais acima, frisaríamos nas operações algébricas fundamentais.

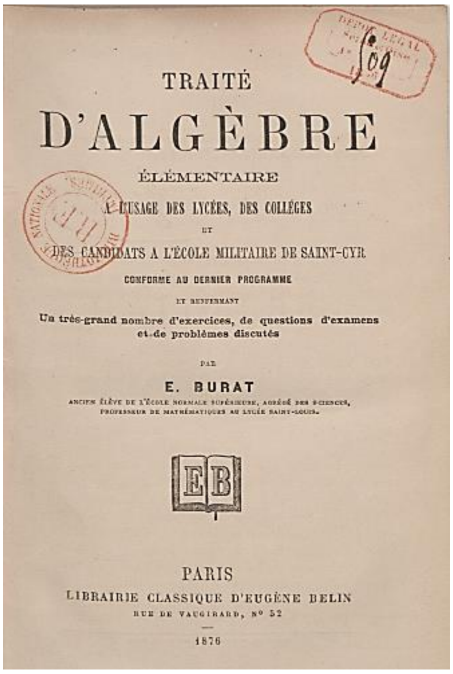
Em termos de TAD, a obra completa de Peacock (1842, 1845), julgamos exemplificar uma Organização Matemática Regional (OMR) da Álgebra Elementar, isso porque identificamos nessa obra o bloco praxeológico, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ (por exemplo, os tipos de tarefas das Figuras 19 e 20; as técnicas aplicadas para solucionar as tarefas desses tipos e os discursos técnico-tecnológicos para os casos de multiplicações e divisões polinomiais, são algumas evidencias desse bloco praxeológico), próprio das OMR (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000a). Em alguns capítulos, do primeiro e segundo volumes, notamos esboço da teoria Θ para justificar a tecnologia θ_j, algo que nos permite conjecturar a existência de uma possível Organização Matemática Global (OMG), na obra completa de Peacock, mas que requer uma análise minuciosa para confirmar tal conjectura, algo que não propomos como objetivo desta tese e apenas indicamos para futuros estudos.

2.3.6. Traité d'algèbre élémentaire, à l'usage des lycées, des collèges et des candidats à l'école militaire de Saint-Cyr[22] (ÉMILE BURAT, 1876)

O livro de Burat (1876) (Figura 23) é uma obra que escolhemos entre outras que, podemos situá-la, no contexto da TAD, como uma Organização Matemática e Didática (OMD) de Álgebra Elementar, no âmbito do sistema de ensino francês. Embora seja uma obra do século XIX, o texto praxeológico de seu conteúdo traduz compreensões que permanecem no ensino de matemática atual, evidentemente, com alterações e recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2009a; CHEVALLARD, CIRADE, 2010).

[22] Tratado de álgebra elementar, para o uso nos liceus, nos colégios e pelos candidatos à escola militar de Saint-Cyr

Figura 23 – Contracapa do livro de Burat



TRAITÉ

D'ALGÈBRE

ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES LYCÉES, DES COLLÈGES

ET

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR

CONFORME AU DERNIER PROGRAMME

ET RENFERMANT

Un très-grand nombre d'exercices, de questions d'examens et de problèmes discutés

PAR

E. BURAT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DES SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

PARIS

LIBRAIRIE CLASSIQUE D'EUGÈNE BELIN

RUE DE VAUGIRARD, N° 52

1876

Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6531600m.

A obra de Burat (1876) está estruturada de uma forma diferente das obras anteriores. Burat inicia seu texto praxeológico por uma seção denominada de "P*RÉLIMINAIRES*" [PRELIMINARES] (p. 1). Nessa seção o autor aborda "*Origine de l'algèbre, utilité des formules*" [Origem da álgebra, utilidade das formulas], "*Classificationdes formules et définitions*" [Classificação das fórmulas e definições] e "*Exercices*" [Exercício]. Após essas preliminares, segue-se o texto praxeológico distribuído por livros: LIVRO I – CÁLCULO ALGÉBRICO (p. 13-122); LIVRO II – RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU (p. 123-315); LIVRO III - EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU (p. 316-531) e LIVRO IV – PROGRESSÕES E LOGARITMOS (p. 532-676) (BURAT, 1876, tradução nossa). Na seção das preliminares Burat considera que "A álgebra tem por objetivo de simplificar e generalizar a resolução de problemas [...]" (Ibidem, p. 1, tradução nossa).

Para este autor a simplificação e a generalização estão na origem da álgebra, isso é tão forte, que ele explica essa origem por meio da resolução do seguinte problema: "Encontrar dois números cuja soma seja 78 e a diferença 20" (p. 1, tradução nossa). Burat explica que esse problema possui solução aritmética, solução por simplificação (por meio da solução das equações $x + y = 78$ e $x - y = 20$) e por generalização (a partir da solução algébrica das equações $x + y = s$ e $x - y = d$) (BURAT, 1876). A solução por generalização surge de: $x = \frac{s+d}{2} = \frac{78+20}{2} = \frac{98}{2} = 49$ e $y = \frac{s-d}{2} = \frac{78-20}{2} = \frac{58}{2} = 29$. Na sequência, Burat define o que ele compreende ser uma expressão algébrica[23] e um polinômio[24] (inclusive os classifica em monômio, binômio, trinômio e polinômio; mostra como se identificar o grau e calcular o valor numérico desses polinômios).

Nossa atenção atrela-se ao LIVRO I (Cálculo Algébrico) da obra de Burat (1876), porque cotem os assuntos[25] da Álgebra Elementar que predominam no atual ensino da Álgebra Escolar. Os textos praxeológicos dos capítulos I, II, III e IV, que tratam das operações com expressões algébricas, estão em consonância com a possível caracterização da Álgebra Elementar Escolar. As duas primeiras operações, adição e subtração (capitulo I), possuem um texto explicativo sob um discurso técnico-tecnológico aritmético.

> *Adicionar várias expressões algébricas é encontrar outra cujo valor numérico seja igual à soma dos valores numéricos das expressões propostas,* os mesmos valores numéricos são atribuídos às letras dos dois lados.
> *Subtrair duas expressões algébricas é encontrar uma terceira cujo valor numérico seja igual a diferença dos valores numéricos das duas primeiras expressões* (BURAT, 1876, p. 13, tradução nossa).

Os exemplos para essas operações seguem distribuídas em ordem de complexidade das expressões algébricas polinomiais: adição e subtração de monômios não semelhantes, adição e subtração de monômios semelhantes, adição e subtração de polinômios. Para os casos de adição e subtração de polinômios, Burat propõe uma espécie de discurso da técnica τ, a tecnologia θ, isso a partir da demonstração das regras[26] para essas duas operações, seguidas das demonstrações:

> Demonstração. – Seja encontrar a soma S de dois polinômios P e P'
> $$\mathrm{P} = a + b - c - d + e$$
> $$\mathrm{P'} = f - g + h - k - l.$$
> O valor numérico de S deve ser igual a soma dos valores numéricos de P e P'; mas o valor numérico de P' se obtém calculado a diferença
> $$(f + h) - (g + k + l);$$
> na sequência o valor numérico de S será obtido adicionando o número que representa P a diferença dos dois números $(f + h)$ e $(g + k + l)$. Porém, para adicionar um número a diferença dos outros dois, é suficiente adicionar o primeiro desses outros dois e

---

[23] "Uma *expressão algébrica* é um conjunto de letras unidas entre elas pelos sinais das operações. Assim $5 \times a^3 \times b^2$, ou $5 \cdot a^3 \cdot b^2$, ou $5a^3b^2$, é uma expressão algébrica indicando o produto por 5 do cubo do número a pelo quadrado do número b [...]" (BURAT, 1876, p. 5, tradução nossa).

[24] "Um polinômio é um conjunto de vários monômios reunidos pelos sinais + ou –. Ex.: $4a^3 + 5a^2b - 7ab^2 + 3b^3$" (BURAT, 1876, p. 7, tradução nossa).

[25] CAPÍTULO I – Adição e Subtração; CAPITULO II – Multiplicação; CAPÍTULO III – Generalização das regras anteriores e Cálculo com quantidades negativas; CAPITULO IV – Divisão; CAPITULO V – Alguns casos de decomposição de polinômios em fatores mais simples – Máximo divisor comum e menor múltiplo comum; CAPÍTULO VI – Frações algébricas; CAPÍTULO VII – Cálculo com radicais – Expoente fracionários e negativos – Converter uma fração contendo radicais no denominador (BURAT, 1876, tradução nossa).

[26] REGRA I – Para adicionar vários polinômios, escrevem-se todos os seus termos um seguido dos outros, conservando os sinais. REGRA II – Para obter a diferença de dois polinômios, escrevessem-se todos os termos do polinômio a serem subtraídos à direita do outro, alterando-se o sinal de cada um destes termos (BURAT, 1876, p. 14-15, tradução nossa).

> retirar o segundo; adicionaremos então a P a soma ($f + h$) e retiraremos o resultado ($g + k + l$).
> Ora, para adicionar a P a soma $f + h$, é suficiente adicionar a P, sucessivamente, cada uma das partes f e h; o resultado desta adição será
> $$P + f + h;$$
> agora, para retirar a soma ($g + k + l$), é suficiente subtrair, sucessivamente, cada uma das partes; então teremos
> $$P + P' = P + f + h - g - k - l.$$
> ou
> $$S = a + b - c - d + e + f + h - g - k - l,$$
> E, restabelecendo a ordem dos termos de P',
> $$S = a + b - c - d + e + f - g + h - k - l,$$
> que demonstra a regra para a adição (BURAT, 1876, p. 14-15, tradução nossa).

De forma análoga, mas com ajustes, Burat (1876) faz a demonstração para a diferença D entre P e P', ou seja, P – P' = P – ($f + h$) + ($g + k + l$), de onde ele conclui que D = $a + b - c - d + e - f + g - h + k + l$. Exibimos na Figura 24, um dos exemplos de adição polinomial proposto Burat, que engloba subtração entre monômios.

Figura 24 – Exemplo de adição e subtração de polinômios

Soit à ajouter les polynômes

$$8a^3b^2 - 6a^4b - 10a^2b^3,$$
$$6a^4b - 15ab^4 - 9a^3b^2 + 12a^2b^3,$$
$$8a^3b^2 - 12a^2b^3 + 16ab^4.$$

On les dispose de la manière suivante :

$$\begin{array}{rrrr} -6a^4b & +8a^3b^2 & -10a^2b^3 & \\ +6a^4b & -9a^3b^2 & +12a^2b^3 & -15ab^4 \\ & +8a^3b^2 & -12a^2b^3 & +16ab^4 \\ \hline & +7a^3b^2 & -10a^2b^3 & +ab^4 \end{array}$$

Fonte: Burat (1876, p. 18).

Burat finaliza o capítulo I, propondo exercícios, no total são 27 questões (tipos de tarefas *T*, na TAD), cada uma com diferente grau de complexidade. Notamos que as ideias algébricas do capítulo I estão vinculadas a compreensão das noções teóricas da Aritmética.

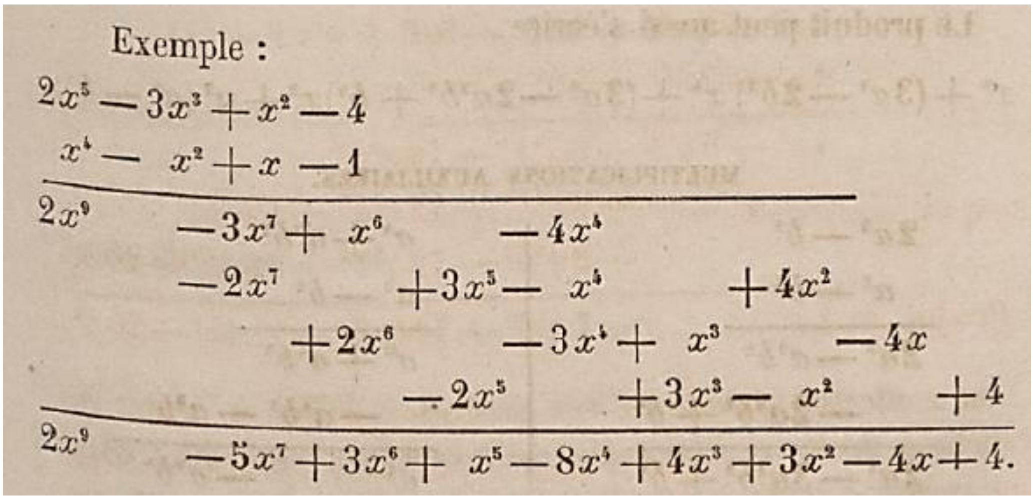
O capítulo II do LIVRO I, aborda a multiplicação algébrica. Para essa operação algébrica, Burat (1876) propõe um texto praxeológico, iniciado com seguinte discurso tecnológico, inspirado nas noções teóricas da Aritmética: "*Multiplicar duas expressões algébricas uma pela outra, é encontrar uma terceira expressão cujo valor numérico seja igual ao produto dos valores numéricos das expressões propostas*" (Ibidem, p. 22, tradução nossa). Para esse discurso tecnológico há três casos ao qual ele se aplica: multiplicação entre monômios; multiplicação de um polinômio por um monômio e inversamente; multiplicação de um polinômio por outro (BURAT, 1876). Os casos de multiplicação algébrica de Burat são os mesmos de Peacock (1845), entretanto, a explicação do processo resolutivo para cada caso (técnica τ) é acompanhado de um discurso justificador (tecnologia θ, na TAD). A seguir, na citação temos o discurso tecnológico para o caso da multiplicação entre dois polinômios.

> 3º MULTIPLICAÇAO DE DOIS POLINÔMIOS
>
> REGRA. – *Para multiplicar dois polinômios um pelo outro, multiplica-se sucessivamente todos os termos do multiplicando por cada um dos termos do multiplicador. Afeta-se do sinal + o produto dos dois termos que tenham o mesmo sinal e do sinal – aquele de dois termos que tenham sinais contrários. Faz-se em seguida, se for o caso, a redução dos termos semelhantes.*
>
> *Demonstração*. – É claro que se tem
>
> 1º $(A + B) \times (C + D) = AC + BC + AD + BD$,
>
> porque temos de multiplicar primeiro A + B por C, depois por D, e adicionar os resultados;
>
> 2º $(A - B) \times (C - D) = (A - B) \times C - (A - B) \times D$
>
> porque temos de multiplicar primeiro (A – B) por C, depois por D, e retira-se o segundo produto do primeiro.
>
> Efetuando as multiplicações, encontra-se
>
> $$(A - B)(C - D) = AC - BC - AD + BD.$$
>
> Isso posto, formamos o produto de dois polinômios
>
> $$P = a - b + c - d$$
> $$P' = e + f - g - h$$
>
> que se pode escrever
>
> $$P = (a + c) - (b + d),$$
> $$P' = (e + f) - (g + h).$$
>
> Se tornarmos
>
> $$a + c = A,\ b + d = B$$
> $$e + f = C,\ g + h = D,$$
>
> tem-se
>
> $$P \times P' = (A - B)(C - D)$$
>
> com isso retornamos ao caso anterior; portanto, pode-se escrever em sequência
>
> $$P \cdot P' = (a + c)(e + f) - (b + d)(e + f) - (a + c)(g + h) + (b + d)(g + h),$$
>
> ou, efetuamos os produtos indicados,
>
> $$P \cdot P' = \left[\begin{array}{l} ae + ce + af + cf - be - de - bf - df \\ - ag - cg - ah - ch + bg + dg + bh + dh \end{array}\right],$$
>
> e organizando a ordem dos termos
>
> $$P \cdot P' = \left\{\begin{array}{l} ae - be + ce - de + af - bf + cf - df \\ - ag + bg - cg + dg - ah + bh - ch + dh, \end{array}\right.$$
>
> o que confirma a regra prática acima [...] (BURAT, 1876, p. 26-28, tradução nossa).

Vários exemplos de multiplicações polinomiais ilustram o texto praxeológico do LIVRO I da obra de Burat (1876), um desses exemplos consta na Figura 25 e é semelhante aos dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. Além disso, os produtos notáveis constituem casos de "Resultados de Multiplicações Notáveis": $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)^3 = (a + b)^2 \times (a + b) = a^3 + 3a^2b$

+ $3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = (a-b)^2 \times (a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ e $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (BURAT, 1876, p. 36).

Figura 25 – Exemplo de multiplicação polinomial



Exemple :

$$\begin{array}{l}
2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4 \\
x^4 - x^2 + x - 1 \\
\hline
2x^9 \quad -3x^7 + x^6 \quad -4x^4 \\
\quad -2x^7 \quad +3x^5 - x^4 \quad +4x^2 \\
\quad +2x^6 \quad -3x^4 + x^3 \quad -4x \\
\quad -2x^5 \quad +3x^3 - x^2 \quad +4 \\
\hline
2x^9 - 5x^7 + 3x^6 + x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 4.
\end{array}$$

Fonte: Burat (1876, p. 29).

O texto praxeológico final do capítulo II, do LIVRO I, da obra de Burat é constituído de 24 questões relativas às operações de adição, subtração e multiplicação polinomial. As questões VII, VIII, IX e X[27], iniciam seus enunciados por "Provar que ..." (BURAT, 1876). Esse enunciado de gênero de tarefas (Provar...) (CHEVALLARD, 1999) quase está extinto dos livros didáticos de matemática destinados ao Ensino Fundamental e Médio no Brasil.

O texto praxeológico do capítulo III, do LIVRO I, é uma espécie de complemento do capítulo I e II, o próprio título indica isso: "Generalização das regras anteriores" (BURAT, 1876, p. 39, tradução nossa). Nesse capítulo, Burat define o que são "quantidades negativas[28]" e discute os desdobramentos dessa definição para o cálculo algébrico: "A expressão – 4 não tem sentido por si só, mas é introduzido na álgebra para simplificar os enunciados das regras de cálculo e para generalizar as fórmulas" (BURAT, 1876, p. 39, tradução nossa). Em decorrência do uso de quantidade negativas, no cálculo algébrico, surge o enunciado tecnológico reduzido para uma "subtração numericamente impossível" (BURAT, 1876): "*O resultado de uma subtração numericamente impossível é uma quantidade negativa*" (Ibidem, p. 39, tradução nossa). O autor expõe uma pequena demonstração para esse enunciado, concluindo que para a < b, tem-se (a – b) = – (b – a), assim 7 – 9 = – (9 – 7) = –2 (Ibidem, p.

[27] X. Provar que $(x-a)(x+a)(x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2) = x^6 - a^6$ (BURAT, 1876, p. 36, tradução nossa).
[28] DEFINIÇÃO. – Chama-se quantidade *negativa* um número isolado e precedido do sinal –; assim – 4, $-\frac{2}{3}, -\sqrt{5}$, são quantidades negativas.

39). Na sequência, Burat declara que "*Um polinômio sempre tem um valor numérico positivo ou negativo*" (p. 49, tradução nossa). De forma geral, nota-se a seguinte compreensão do autor para a adição e subtração com quantidades negativas: P + (a – b) = P + a – b; P – (a – b) = P + a – b; P + (a – b) = P – (b – a); P + (–c) = P – c; P – (–c) = P + c (p. 41). Dessa compreensão, Burat avança para a "*multiplicação de quantidades negativas*": P (a – b) = Pa – Pb; P (b – a) = –(Pa – Pb) = –P (a – b); P (–c) = –P × *c*; (–P) × (–c) = P*c* (BURAT, 1876, p. 42). Em relação à potenciação de números negativos, tem-se que: $(–a)^{2k} = a^{2k}$ e $(–a)^{2k + 1} = –a^{2k + 1}$ (p. 43). O desfecho das operações com quantidades negativas recai sobre a divisão: "[...] *o quociente de dois valores numéricos afetados com sinais é positivo se o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, é negativo se o dividendo e o divisor possuem sinais opostos*" (BURAT, 1876, p. 43, tradução nossa). Segundo Burat, a utilidade das quantidades negativas está nas generalizações das regras de cálculo das operações algébricas, assim como, nas definições e demonstrações.

Após essa breve compreensão sobre o capítulo III, atingimos o capítulo IV, do LIVRO I, da obra de Burat (1876). Nesse capítulo, a finalidade do autor é a divisão algébrica[29] em consonância com as noções da teoria aritmética. Os casos de divisões algébricas polinomiais são os mesmos da obra de Peacock (1845), acrescidos de algumas particularidades em virtude das operações com quantidades negativas (capítulo III): "DIVISÃO DE MONÔMIOS" (p. 46); "DIVISÃO DE MONÔMIOS NEGATIVOS" (p. 47); "DIVISÃO DE UM POLINÔMIO POR UM MONÔMIO" (p. 49); "DIVISÃO DE DOIS POLINÔMIOS" (p. 50) e "EXEMPLOS DE DIVISÕES NOTÁVEIS" (p. 57).

Algo nos chama atenção nos exemplos de divisões de dois polinômios, tanto na obra de Lacroix (1799) quanto nas obras de Peacock (1842, 1845) e Burat (1876), os exemplos são de divisões exatas, de tal sorte, que o descrito na regra de Burat se consolida. Entretanto, há na obra de Burat o texto praxeológico sobre as divisões ditas "impossíveis" (que entendemos ser o caso de divisões não exatas ou de polinômios incompletos).

> DIVISÕES IMPOSSÍVEIS – Dissemos que dois polinômios em *x* e *inteiros* em relação a *x* são divisíveis um pelo outro quando existe um polinômio da mesma forma que, multiplicado pelo divisor, reproduz o dividendo, no caso contrário a divisão é *impossível* (BURAT, 1876, p. 55, tradução nossa).

No texto praxeológico da citação há indícios que as divisões entre dois polinômios deveriam ser exatas ou divisões notáveis. Essa exigência está implícita no objetivo acima (nota

[29] *A divisão algébrica tem por objetivo, dada duas expressões algébricas, deve-se encontrar uma terceira cujo valor numérico seja igual ao quociente dos valores numéricos das expressões propostas* (BURAT, 1876, p. 46, tradução nossa).

de rodapé) proposto por Burat, o qual se apoia nas noções da teoria aritmética. Para Burat (1876) a divisão do polinômio $x^5 – 3x^4 + 3x^3$ pelo polinômio $x – 3$ é impossível, porque se existisse um quociente inteiro para essa divisão, o último termo deveria ser $\square x^3$ e o encontrado é $3x^2$. Além disso, o polinômio dividendo é incompleto e não se encaixa nas proposições das divisões notáveis. A disposição dos termos dos polinômios dividendo e divisor, em ordem crescente, pode levar a impossibilidade da divisão polinomial, tornando-a infindável (BURAT, 1876). Temos na Figura 26 o esquema que ilustra essa impossibilidade.

Figura 26 – Esquema de impossibilidade de divisão polinomial

$$\begin{array}{r|l} 1 + x - 2x^2 & 1 + x \\ \hline - 2x^2 & 1 - 2x^2 + 2x^3 \\ + 2x^3 & \\ \ddots & \end{array}$$

Fonte: Burat (1876, p. 56).

Vimos nos quatro capítulos do LIVRO I, da obra de Burat (1876), textos praxeológicos que apontam para uma possível caracterização da álgebra elementar dependente das noções teóricas da Aritmética, mas há indícios que essa dependência é necessária para se estabelecer relações de práticas entre o enunciado algébrico e o aritmético. Os outros capítulos do LIVRO I, assim como, os dos LIVROS II, III e IV possuem vários assuntos já contemplados nos tópicos 2.1 e 2.2 deste capítulo de tese.

A obra de Burat (1876), de acordo com a análise que fizemos, possui as características das Organizações Matemáticas Regionais (OMR), ou seja, a o bloco praxeológico [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ] está mais perceptível, que nas obras de Maclaurin (1753), Lacroix (1799) e Peacock (1842, 1845). A principal diferença da obra de Burat (1876) para essas outras obras é por conter ao final dos capítulos, questões (tipos de tarefas) com grau de dificuldade crescente, isso a torna, segundo nossa compreensão, uma Organização Matemática e Didática de Álgebra Elementar.

2.4. Conclusão I

Neste capítulo nos propusemos expor uma possível caracterização da Álgebra Elementar Escolar. As primeiras ideias se originaram dos artigos de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994a). Nesses artigos o autor revela algumas particularidades intrínsecas ao ensino da Aritmética e da Álgebra no contexto do sistema de ensino francês, principalmente, no colegial. Isso é tão forte que os artigos de 1984, 1989 e 1990 receberam o mesmo título (*A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio*), os subtítulos indicam as diferentes abordagens dos artigos: *A evolução da transposição didática* (1984); *Perspectivas curriculares: a noção de modelização* (1989); *Vias de alcance e problemas didáticos* (1990). Cada um dos subtítulos remete a discussões epistemológicas relativas aos objetos da Álgebra Elementar, de diferentes épocas, e o processo de transição ou transposição para se constituírem objetos de ensino da Álgebra Escolar. A principal característica da Álgebra Elementar, que identificamos em Chevallard (1984), perpassa pela compreensão histórico-epistemológica da constituição do saber matemático no campo aritmético e algébrico, em diferentes épocas. Em Chevallard (1989), surge à proposição de modelização inspirada nos sistemas de números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$), o cálculo algébrico ganha dimensão funcional e entra em cena como outra característica da Álgebra Elementar Escolar. A característica da Álgebra Elementar Escolar, que identificamos em Chevallard (1989), amplia-se em Chevallard (1990), mas retomando ideias de Chevallard (1984), principalmente, em relação à modelização da transição de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$. O artigo de Chevallard de 1994a (*Ensino da álgebra e transposição didática*) revela a potencialidade do saber algébrico quando devidamente transposto para tornar compreensíveis os objetos que se ensina da Álgebra Elementar Escolar.

Os objetos ostensivos e não ostensivos redimensionam as características da Álgebra Elementar, isso está exposto nos artigos de Chevallard (1994b) e Chevallard e Bosch (1999). Compreendemos que a manipulação ostensiva dos objetos da Álgebra Elementar Escolar subjaz a existência dos objetos não ostensivos, por exemplo, a noção de expressão algébrica associada às operações aritméticas fundamentais. Os objetos ostensivos e não ostensivos revelam práticas algébricas, que viveram ou vivem uma ecologia, em obras de diferentes épocas. Essas práticas fazem parte da atividade matemática com Álgebra Elementar, transpostas para o ensino da Álgebra Escolar. Exemplos dessas práticas constam nas obras de Stevin (1634) e Euler (1795). A ostensividade das práticas algébricas que extraímos das obras de Stevin (1634) e Euler (1795) caracterizam a Álgebra Elementar Escolar dependente das noções não ostensivas da Aritmética.

Para revelarmos mais evidências das características da Álgebra Elementar Escolar, examinamos algumas obras de diferentes épocas: Girard (1634,1884); Viète (1630); Maclaurin (1753); Lacroix (1799); Peacock (1842, 1845); Burat (1876). Para analisarmos de forma breve essas obras, recorremos às noções da TAD sobre os tipos de OM (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000a) e no sistema didático adaptado de Chevallard (2009a, 2009b, 2009d): $\boldsymbol{S}$(y, *O*, Q_y). Nesse sistema didático, y = pesquisador, *O* = obras (livros) e Q_y a questão que levou ao estudo dessas obras. A questão Q_y está assim anunciada: Quais as características das organizações praxeológicas da álgebra elementar escolar identificamos em obras de diferentes épocas? De certa forma, iniciamos nossos estudos pelos pressupostos teóricos dos artigos de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994a). A ênfase principal recaiu sobre as operações algébricas, particularmente, as operações polinomiais principais: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Na obra de Girard (1629, 1884) a Álgebra Elementar Escolar, caracteriza-se dependente da Aritmética, isso fica explicito na expressão algébrica 8 (2) – 4 (1) + 2 ($8x^2 - 4x + 2$, na Álgebra de hoje). A Álgebra Elementar de Viète (1630) está inspirada nas noções da Geometria euclidiana, o texto praxeológico da obra dele mostra muito bem essa característica. O texto praxeológico da obra de Maclaurin (1753) revela uma Álgebra Elementar mesmo dependente das noções Aritméticas, já indica outras possibilidades de algebrização em relação às operações algébricas polinomiais e resolução de equações. A principal característica da Álgebra Elementar de Maclaurin é mostrar a potencialidade do processo de algebrização, vinculada a Álgebra Elementar Escolar.

A obra de Lacroix (1799) avança na compreensão algébrica das quatro operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão), muito próximas das transposições didáticas atuais. Mesmo existindo potenciais progressos algébricos no texto praxeológico de Lacroix, a Álgebra Elementar continua atrelada as noções aritméticas.

A expansão das características da Álgebra Elementar surge com maior intensidade nos dois volumes da obra de Peacock (1842,1845). No primeiro volume de 1842, a Álgebra Elementar caracteriza-se no modelo de Aritmética Generalizada, o subtítulo indica isso: “ÁLGBERA ARITMÉTICA”. O segundo volume amplia as características da Álgebra Elementar do primeiro, agora, o simbolismo algébrico alcança a Geometria. Essa característica vinculada a Geometria, surgiu na obra de Viète (1630), mas em Peacock está anunciada como aplicações à Geometria de Posição. O cálculo algébrico de medidas de áreas de figuras geométricas consta no texto praxeológico do autor, assim como, a obtenção da expressão algébrica para o volume de um sólido retangular.

Escolhemos a obra de Burat (1876) para finalizar o terceiro tópico deste capítulo, porque possui um texto praxeológico de Álgebra Elementar Escolar vinculado ao modelo de Aritmética Generalizada, porém já anuncia as principais operações algébricas (adição, subtração, multiplicação e divisão) na perspectiva futura da modelização do cálculo algébrico funcional. A divisão polinomial recebe uma atenção mais refinada de Burat, devido possuir particularidades específicas, entre as quais está a impossibilidade de se efetuar tal operação.

De certo, concluímos que a Álgebra Elementar Escolar, perpassa pelos modelos da Aritmética Generalizada, Geometria e Cálculo Algébrico Funcional. Quanto à questão Q_y (Quais as características das organizações praxeológicas da álgebra elementar escolar identificamos em obras de diferentes épocas?), julgamos respondida parcialmente, conforme nossas breves análises das OM de obras de diferentes épocas, que apontam para uma Álgebra Elementar dependente das noções teóricas da Aritmética e da Geometria, com predominância de organizações matemáticas regionais.

Além disso, os estudos deste Capítulo servirão de complementação teórica para o processo de formação continuada, intermediada por um Modelo Epistemológico Alternativo para o ensino da álgebra escolar, desenvolvida conforme estabelece a metodologia praxeológica do "*Parcours d''Ètude et de Recherche*" (PER) (CHEVALLARD, 2009b, 2009c). Acrescente-se, principalmente, as compreensões de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994a, 1994b) e a estrutura praxeológica identificada nas obras de diferentes épocas. Porém, o feito mais eminente está no topos do autor desta tese, que adquiriu maior relação com o bloco do saber-fazer e do saber da álgebra elementar escolar, algo que refletirá nas discussões originadas durante as sessões do PER e na análise da atividade final da formação continuada, ou seja, as propostas de aulas dos professores de matemática do ensino básico, que participarem dessa formação.

III – O QUADRO TÉORICO RELATIVO ÀS QUESTÕES, HIPÓTESES E OBJETIVOS DA PESQUISA

Os capítulos I e II conectam-se a este por intermédio da problemática relativa aos tipos de modelos propostos para caracterizar a Álgebra Elementar e a transposição de seus objetos para integrar a Álgebra Escolar (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990, 1994a; GASCÓN, 1994, 2002; USISKIN, 1995, CATALÁN, 2003; DELGADO, 2006; RUIZ-MUZÓN, 2010; PEREIRA, 2012; CHEVALLARD, BOSCH, 2012; RUIZ-MUZÓN et al., 2012; COULANGE et al., 2012). Excetuando-se Usiskin (1995), os outros trabalhos aportam-se no contexto da Transposição Didática (TD) e Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1994a, 1994b, 1994c, 1996, 1997, 1998, 1999, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d). Prosseguiremos, nesta pesquisa, com as mesmas perspectivas teóricas aqui citadas (TD e TAD), porém assumimos o modelo da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f, 2011a, 2011b, 2011c, 2012-2013, 2013-2014a, 2013-2014b; CHEVALLARD, BOSCH, 1999, 2012; MATHERON, 2000a, 2000b) como nosso principal referencial teórico. Essa escolha teórica já se configura nos dois capítulos anteriores.

Conforme mencionamos no primeiro capítulo, a formação docente inicial e continuada do professor de Matemática do Ensino Básico (que ensina matemática no Ensino Fundamental e Médio) está contemplada nesta pesquisa. Sabemos que a formação inicial desse professor de Matemática não dá conta de formá-lo para compreender as epistemologias dos objetos matemáticos, denotados por Chevallard (2009a) pela letra "ó" em itálico (objetos ***o***). Para alguns desses objetos supomos que antes da formação acadêmica inicial, o professor de Matemática do Ensino Básico (o qual denotamos por pessoa *x*) não os conhece e esse fato caracteriza uma relação pessoal *R* vazia desse professor com esses objetos (denotada por $R\ (x, \boldsymbol{o}) = \emptyset$). Porém, a partir da formação acadêmica, supõe-se que ele passa a conhecê-los, modificando sua relação com estes objetos. Essa mudança de relação ocorre por intermédio da sujeição ao modelo epistemológico matemático escolhido pela instituição formadora **I** (universidades, institutos, etc.). Dessa forma, esse professor de matemática deve modificar sua relação pessoal com os objetos matemáticos que ele não conhecia, mas que passa a conhecê-los na formação acadêmica inicial, ou seja, surge a relação *R* não vazia (denotada por $R\ (x, \boldsymbol{o}) \neq \emptyset$) e, em conformidade, com as condições e restrições dessa instituição formadora (CHEVALLARD, 2009a). Embora como imposta (sujeição) essa formação inicial, ela internaliza práticas docentes consistentes e duradouras.

Na abordagem da TAD, Chevallard (1998, 1999) estruturou compreensões sobre as práticas docentes a partir de elementos dessa teoria. A principal origina-se do entendimento mais amplo da "noção de praxeologia" (CHEVALLARD, 1998, 1999). Configura-se nesse entendimento que exista uma prática docente capaz de explicar o processo de resolução da equação do tipo $ax + b = c$ (a, b e $c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) (BRIANT, 2013). Temos nesse modelo de equação um tipo de tarefas *T*, que engloba tarefas t (t $\in T$). Presume-se que na formação inicial, o professor de matemática conhece uma maneira de resolver esse tipo de equação. Essa maneira de resolver denomina-se de técnica τ (tal). Temos então o bloco da prática (ou do saber-fazer), denotado por [T/τ] (CHEVALLARD, 1998, 1999). Em geral, a técnica aplicada para esse tipo de equação resume-se assim: $ax = c - b \Leftrightarrow x = \dfrac{c-b}{a}$ (BRIANT, 2013).

A progressiva compreensão desse objeto e da técnica τ deve ocorrer na formação acadêmica inicial, que possui as condições necessárias para se estudar o saber relativo a esse objeto. É o momento que o professor de matemática entra em contato com o bloco do saber, ou seja, com a tecnologia θ e a teoria Θ, denotado por [θ/Θ]. Com efeito, a tecnologia é o discurso que justiça a técnica e a teoria o discurso justificador da tecnologia (CHEVALLARD, 1998.1999). Talvez, o que mais permanece internalizado na prática docente é o resumo do discurso da tecnologia θ, enquanto o que é amplo fica implícito: "'*Adicionando um mesmo número aos dois membros da equação, ou multiplicando por um mesmo número não nulo os dois membros de uma equação, obtém-se uma equação equivalente à primeira' e 'e duas equações equivalentes tem a mesma solução*'" (BRIANT, 2013, p. 14, tradução nossa). A teoria justifica esse discurso tecnológico provem do anel de polinômios $\mathbb{R}$ [X] (BRIANT, 2013).

Ao juntarmos o bloco do saber-fazer, [T/τ], com o bloco do saber, [θ/Θ], constitui-se o bloco de uma praxeologia pontual, [$T/\tau/\theta/\Theta$] (CHEVALLARD, 1998, 1999). Entenda-se que o bloco de uma praxeologia pontual gira em torno de um único tipo de tarefas *T* e pelo menos exista uma técnica τ para solucionar as tarefas t $\in T$. A configuração matemática de uma praxeologia pontual implica em uma Organização Matemática Pontual (OMP) (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000a). Em geral, as OMP estão sempre subjacentes na formação e nas práticas docentes do professor de matemática. Vários exemplos destas OMP compõem os tópicos do segundo capítulo.

A insuficiência de uma praxeologia pontual, para explicar um determinado ou vários objetos matemáticos, promove o surgimento das organizações locais e, das locais para as regionais, culminando nas globais (CEHVALLARD, 1998, 1999). Cada uma dessas organizações praxeológicas convergem, respectivamente, às Organizações Matemáticas Locais (OML) – nestas organizações prevalece o trabalho da técnica τ, Organizações Matemáticas Regionais (OMR) – estas organizações giram em torno da tecnologia θ – e Organizações Matemáticas Globais (OMG) – nestas organizações a teoria Θ é fundamental (MATHERON, 2000a). Mesmo essas organizações praxeológicas estejam reconhecidas e legitimadas no interior das instituições sociais, elas são passíveis de questionamentos pelos sujeitos que discordam, algum momento, dessas legitimidades. Essa discordância se acentua quando esses sujeitos elaboram modelos epistemológicos para tornar comunicáveis os objetos dessas Organizações Matemáticas (THURSTON, 1994; GASCÓN, 1994, 2002). Nesse embate entre sujeitos e instituições surgem os Modelos Epistemológicos de Referências (MER) (GASCÓN, 2002, 2011; CATALÁN, 2003; DELGADO, 2006; PEREIRA, 2012), ou então Modelos Epistemológicos Alternativos (MEA) (THURSTON, 1994; GASCÓN, 1994, 2002, 2011; CATALÁN, 2003; DELGADO, 2006; PEREIRA, 2012).

A dimensão epistemológica de um MER ou MEA depende da intenção de quem os propõe, servem para questionar e analisar os modelos epistemológicos ditos dominantes (GÁSCON, 2002; 2011) ou constituírem novas possibilidades de ensino e formação de professores (GASCÓN, 1998, 2011; DELGADO, 2006; PEREIRA, 2012; FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013). Nesta tese, o MEA de Pereira (2012) proposto para o ensino de Álgebra Escolar é a principal obra usada em um processo de formação continuada de professores de matemática do ensino Fundamental e Médio. Nesse processo de formação, vários objetos da Álgebra Elementar Escolar entram em cena: Sistemas de Numeração Posicionais; Conjuntos Numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$), Expressões Algébricas e as principais Operações Polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Nesse processo de formação os professores de matemática em formação continuada (pessoas *x*) estão em uma relação $R\ (x, \boldsymbol{o}) \neq \emptyset$, mas as ideias do MEA para alguns desses objetos (Expressões Algébricas e operações polinomiais) a relação $R\ (x, \boldsymbol{o}) = \emptyset$.

A relação pessoal $R\ (x, \boldsymbol{o}) \neq \emptyset$, implica no que Chevallard (2009a) chama de ***universo cognitivo de x*** (denotado por $UC\ (x) = \{(o, R(x; \boldsymbol{o})) \ / \ R(x; \boldsymbol{o}) \neq \emptyset\}$). Na constituição desse universo cognitivo, a instituição formadora **I** cumpre um papel decisivo na dinâmica cognitiva da relação pessoal de *x* com os objetos matemáticos. Essa dinâmica cognitiva emana do encontro da pessoa *x*, na instituição formadora **I,** onde esses objetos vivem (CHEVALLARD, 2009a), temos assim uma **ecologia institucional dos objetos matemáticos**. Entretanto, esse encontro ecológico da pessoa *x* com os objetos matemáticos dependerá da posição *p* (aluno de graduação, pós-graduação, etc.) que ela venha ocupar em **I** (Ibid.). A extensão desse encontro ecológico implica que a pessoa *x* se sujeite a relação institucional R_I (*p*; **o**), mas, de forma que, a relação pessoal de *x* esteja em conformidade com essa relação institucional (Ibid.), ou seja, saiba que sua posição obedece às regras institucionais do modelo de formação matemática da instituição formadora – que pode ser a do próprio professor formador. O exposto aqui conduz a formulação da questão $\boldsymbol{Q_0}$: Qual é o modelo epistemológico da Álgebra Escolar predominante no equipamento praxeológico do professor de Matemática quando este se torna professor do Ensino Fundamental e Médio?

A questão $\boldsymbol{Q_0}$ convém para conhecermos como está constituído o equipamento praxeológico objetivado do professor de Matemática do Ensino Básico e as suas praxeologias institucionais (CHEVALLARD, 1999, 2009a). Conhecendo as praxeologias institucionais desse professor, podemos questioná-lo quanto a sua formação acadêmica inicial e sobre os objetos matemáticos da Álgebra Escolar (CATALÁN, 2003; GARCIA; BOSCH; GASCÓN, 2007; PEREIRA, 2012), que vivem em seu equipamento praxeológico. É no âmbito dessa Álgebra Escolar que o MEA de Pereira (2012) se inseriu como uma OML, porque o trabalho da técnica τ ganha relevância para o ensino dessa Álgebra no Ensino Básico, principalmente, no Ensino Fundamental.

As influências das ideias teóricas de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1999) e Gascón (1994, 2002) influenciam a pesquisa de Delgado (2006), na qual propõe a reconstrução racional da Organização Matemática (OM) em torno dos Sistemas de Numeração. Essa OM ele a denomina de Modelo Epistemológico de Referência (MER) dos Sistemas de Numeração. Delgado (2006) idealiza esse MER para ser ensinado na instituição de Formação de Professores, de forma que, o matemático e o didático estejam imbricados no processo de estudo da Organização Didática (OD) dos Sistemas Numeração viventes na instituição de Formação de Professores.

As ideias de Pereira (2012) estão bem próximas do que fez Gascón (1994), mas não são as mesmas. Enquanto, Gascón (1994) remodela um modelo epistemológico das ideias gregas, ou seja, o da "análisis-síntesis clásico", tornando-o um modelo epistemológico alternativo proposto como substitutivo ao modelo dominante da Álgebra Elementar (Aritmética Generalizada), esse modelo, ao que notamos, inspira-se nos trabalhos de Lakatos, Polya (GACÓN, 1994, p. 49), evidentemente, complementado pelas ideias de Brousseau (1988, 1989) e Chevallard (1984, 1991). Esse MEA de Gascón (1994) denomina-se “análisis-síntesis reformulado” (CATALÁN, 2003, p. 72-73).

O MEA Pereira (2012) remodela os estudos de Floriani (2000) e sugere uma proposta didática (PD) para o ensino das operações polinomiais a partir do sistema de numeração posicional de base dez. Essa PD caracteriza-se, na TAD, como uma Organização Matemática e Didática (OMD) e versa sobre o tratamento e o ensino das operações polinomiais no oitavo ano do Ensino Fundamental. A PD de Pereira (2012) assume a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999; BOSCH; CHEVALLARD, 1999) porque esta teoria fundamenta a modelização matemática da PD de Pereira (2012), primeiro nos moldes de uma Organização Matemática (OM) e depois como Organização Didática (OD). Nessa dialética OM e OD, o autor (PEREIRA, 2012), estabelece um MEA para o estudo e ensino de polinômios no Ensino Básico, de forma particular, no oitavo ano do Ensino Fundamental. Os desdobramentos praxeológicos desse MEA, do ponto de vista do ensino e aprendizagem, já foram testados com alunos oitavo ano do Ensino Fundamental, isso na fase de PD (CARVALHO; PEREIRA, 2009). Na etapa de MEA a prática docente do professor de matemática está imersa na análise praxeológica que Pereira realizou e indica em suas considerações finais a possibilidade de se realizar um processo de formação continuada com professores de matemática, intermediada por esse MEA e mediada pela metodologia praxeológica do PER. Nesse sentido, assumimos essas ideias – com modificações – no desenvolvimento de nossa tese.

A modelização algébrica inicial pelo MEA de Pereira (2012) surge de tipos de tarefas T (CHEVALLARD, 1999), na qual temos que representar um número inteiro na forma de uma expressão algébrica, ou seja, admitimos que o número inteiro seja um dos valores numérico dessa expressão algébrica, por exemplo, se $x = 10$, então $342 = 3x^2 + 4x + 2 = 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 2 = 200 + 40 + 2$. A tecnologia θ, que permite fazer essa representação vem do sistema de numeração posicional de base dez, conforme consta no APÊNDICE B e C. Essa mesma tecnologia pode ser adaptada para outros sistemas de numeração posicional de bases quaisquer, admitindo-se que a variável assume o valor dessas bases, porém, o valor numérico da expressão algébrica se modifica, porque temos outras bases e outros sistemas de numeração posicional. Assim, se $x = 60$, temos que $3x^2 + 4x + 2 = 3\cdot 60^2 + 4\cdot 60 + 2 = 3\cdot 3600 + 240 + 2 = 10800 + 240 + 2 = 11042$. Nessas representações os objetos matemáticos, ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999), dialogam para conectar duas teorias Θ (Aritmética e Álgebra). A técnica τ, que soluciona os tipos de tarefas T vem da representação do número inteiro na escrita polinomial na potência de base dez ou bases quaisquer.

O MEA de Pereira (2012) converge às ideias de Thurston (1994) citadas por Gascón (2002), nas quais esse autor considera que a elaboração de um modelo epistemológico alternativo "promove a compreensão humana da matemática e melhora a comunicação dessa referida compreensão" (GASCÓN, 2002, p. 7). Com essa ideia, Thurston se contrapõe ao modelo epistemológico dominante da matemática que é denominado de "*modelo popular*" da matemática (Ibid.). O "*modelo popular*", segundo Thurston (1994), é o enfatizado nas atividades dos matemáticos, porque é o modelo da **"definição-especulação-teorema-prova (DSTP)"** (GASCÓN, 2002).

Na compreensão de Gascón (2002, p. 7), "[...] o *modelo epistemológico da matemática* predominante numa instituição escolar (seja este qual for e ainda que esteja implícito) influi imensamente sobre as características do *modelo docente* [...]". Essa influência do modelo epistemológico dominante, na instituição escolar, acaba limitando as praxeologias do professor de Matemática do Ensino Básico sob as OM e OD dos livros didáticos de matemática. Nesse sentido, a sujeição do professor de Matemática aos livros didáticos de matemática estabelece condições e restrições ao bloco que designa uma praxeologia, denotado por $[T / \tau / \theta / \Theta]$. Dessa forma, a praxeologia desse professor é restritiva ao bloco da práxis ou técnico-prático (do saber-fazer), que é denotado por $\Pi = [T / \tau]$. Consequentemente, o bloco do logos ou tecnológico-teorico (do saber), representado por $\Lambda = [\theta / \Theta]$, que agrega dois elementos essenciais da formação acadêmica incial do professor de Matemática, a tecnologia θ e a teoria Θ, parece-nos que fica na penubra dos tipos de tarefas T e técnicas τ. Os elementos téoricos da TAD expostos aqui fazem emergir as questões $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$:

- $\boldsymbol{Q_1}$: Quais tipos de técnicas τ são mobilizados pelos professores de Matemática do Ensino Básico quando explicam os tipos de tarefas T da Álgebra Escolar?
- $\boldsymbol{Q_2}$: Como esses professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar algum objeto da Álgebra Escolar no Ensino Fundamental e quais técnicas predominam nessa fase do Ensino Básico?

As questões $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$ perpassam pelas concepções anunciadas por Usiskin (1995): 1) Álgebra como aritmética generalizada; 2) Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; 3) Álgebra como estudo de relações entre grandezas; e 4) Álgebra como estudos das estruturas. Essas concepções podem caracterizar o modelo epistemológico da Álgebra Escolar predominante na prática docente do professor de Matemática do Ensino Básico (Ensino fundamental e Médio). Além disso, a junção das questões auxiliares $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$ converge, necessariamente, ao anunciado por Chevallard

(2009a, p. 4): “[...] As *alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologias”.*

Chevallard (2009a) ao anunciar que as praxeologias passam por um fenômeno de alterações e recombições, nos leva a primeira hipótese de que *podemos modificar o equipamento proxeológico*[30] *do professor de Matemática do Ensino Básico, em relação aos objetos da Álgebra Escolar, promovendo dinâmicas cognitvas que conflitem o modelo epsitemológico da Álgebra Escolar institucionalizado e predominante no universo cognitvo desse professor.*

A questão norteadora desta proposta de tese doutoral surgiu inspirada nas ideias teóricas de Chevallard (1999, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d) e no Modelo Epistemológico Alternativo proposto por Pereira (2012). Denotaremos essa questão por ***Q***: **Quais alterações e recombinações praxeológicas ocorrem, no equipamento praxeológico objetivado do professor de Matemática do Ensino Básico, durante o decurso de um PER por meio de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar?**

A questão norteadora ***Q*** engloba as três questões auxiliares já anunciadas ($\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$) e leva a nossa segunda hipótese de que *a formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico, por intermédio de um PER e, mediado por um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar, promove alterações e recombinações praxeológicas no equipamento praxeológico objetivado desse professor de matemática.*

Nesse sentido, vemos que o Modelo Epsitemológico Alternativo, idealizado por Pereira (2012), possibilita-nos promover um processo de formação continuada para professores de Matemática do Ensino Básico, nos moldes de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP[31], em Português; PER[32], em Francês e REI[33], em Espanhol), e assim contribuirmos para os desdobramentos teóricos da Teoria Antropológica do Didático e da Didática das Matemáticas.

Para auxiliar a elaboração da nossa resposta da questão norteadora ***Q***, elaboramos o seguinte objetivo geral: Desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa com professores de Matemática do Ensino Básico, visando promover possíveis alterações e recombinações

---

[30] [...] conjunto praxeologias dos quais a pessoa dispõe, da qual é equipada [...]: é o que nomeio de *equipamento praxeológico* da pessoa (CHEVALLARD, 2009a, p. 6, tradução nossa). O equipamento praxeológico compreende o conjunto de práticas que o professor de matemática possui para ensinar, por exemplo, as operações polinomiais no oitavo ano do Ensino Fundamental. Isso remete as técnicas τ, que são aplicadas na resolução das tarefas $t \in T$.
[31] Chevallard (2011a).
[32] *parcours d’étude et de recherche* (CHEVALLARD, 2009b, 2009c, 2009d; MARIETTI; CHEVALLARD, 2009). Nesta tese a sigla PER estará em consonância com PEP.
[33] *Recorridos de Estudio e Investigación* (FONSECA; CASAS; BOSCH; GASCÓN, 2009).

praxeológicas no equipamento praxeológico objetivados destes professores submetidos ao estudo de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar. Redistribuímos esse objetivo geral em objetivos específicos: 1) Identificar qual o modelo epistemológico da matemática predominou na formação acadêmica inicial do professor de Matemática do Ensino Básico; 2) Identificar nas práticas docentes dos professores o modelo epistemológico dominante da Álgebra Escolar; 3) Propiciar aos professores de Matemática do Ensino Básico uma formação intermediada por um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar; 4) Realizar um PER por meio de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar; 5) Identificar as alterações e recombinações praxeológicas ocorridas, no equipamento praxeológico objetivado do professor de Matemática do Ensino Básico, durante o desenvolvimento do PER; 6) Analisar o processo de formação propiciado pelo PER, apontando os desdobramentos teóricos para a Teoria Antropológica do Didático, na perspectiva da formação de professores de Matemática, intermedida por um Modelo Epistemológico Alternativo.

A ampliação teórica da TAD, a partir de 1998, nos permite inserir um quadro teórico complementar neste capítulo, que nos auxiliará nos capítulos posteriores, principalmente, na análise das informações coletadas durante o processo de formação continuada. Porém, o quadro teórico relativo a praxeologia metodológica do "*Parcours d'Etude et de Recherche*" (PER) será exposto do capítulo IV.

3.1. Quadro Teórico Complementar

Neste acréscimo teórico temos a intencionalidade de realizar releituras de diversos artigos de Yves Chevallard nos quais ele especifica suas proposições teóricas sobre obras no contexto da TAD. Essas nossas releituras visam tornar mais compreensível o significado teórico e simbólico da palavra "obra" empregado até este capítulo e nos demais desta tese.

O estudo das obras é reconhecido por Chevallard (1998, 1999) no contexto das organizações didáticas: "[...] As praxeologias didáticas ou *organizações didáticas* são respostas (no sentido forte) para as questões 'Como estudar a questão $q = \tau_T$?', ou 'Como estudar a obra O ?' – denotamos aqui as respostas, genericamente, por ∂q e ∂O, de tal forma, que se encontrará, por exemplo: $OD_\theta = \partial OM_\theta$ [...]" (CHEVALLARD, 1998, p. 16, tradução nossa). Nota-se que a reposta para a tecnologia didática está na tecnologia da Organização Matemática. Contudo, a praxeologia didática depende dos tipos de tarefas ou "gestos" didáticos que a torna identificável. O alargamento dessa compreensão está descrito na citação a seguir.

> A questão "Como estudar ♥?" depende evidentemente do *jogo didático* ♥[34]. Uma resposta para esta questão, ou seja, uma organização didática ∂♥ dependerá igualmente de ♥: a partir de certo nível de organização de estudo, não se estuda a questão q na perspectiva como se estuda a questão q' da *criptografia*, por exemplo! Tão pouco se poderá dizer que não haja nada em comum entre uma organização didática ∂q e outra ∂q'. Com efeito, conforme se tem indicado em uma dada instituição, só alguns tipos de praxeologias didáticas, que satisfazem certas restrições, são ecologicamente viáveis: consequentemente, todas as praxeologias didáticas ∂♥ cumprem estas restrições, *seja qual for* ♥, sem que se possa afirmar *a priori* que estas restrições não pesam, ecologicamente, sobre os níveis mais específicos da organização de estudo (CHEVALLARD, 1998, p. 16).

O que se põe na citação remete ao que seja específico ou não de ♥, isso conforma com as obras de Álgebra Elementar que examinamos no segundo capítulo. Cada uma delas possuem particularidades e semelhanças. Ecologicamente, viveram em diferentes épocas, habitaram diferentes instituições, ajustadas as condições e restrições impostas. Incluam-se nesse *jogo didático* os modelos epistemológicos de referências (MER) ou alternativos (MEA). Esses modelos são obras contemporâneas e modificáveis (GASCÓN, 2011; FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013). O MER é "[...] imprescindível para estudar o saber matemático antes que se transforme para ser ensinado [...]" (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013, p. 5, tradução nossa). Identificamos na citação algo convergente a fase inicial do MEA de Pereira (2012), ou seja, a modelização matemática das expressões algébricas polinomiais, vinculadas ao sistema de numeração posicional decimal e de bases quaisquer. Essa etapa inicial do MEA de Pereira (2012) significou a elaboração de um MER para estudar as expressões algébricas polinomiais e suas extensões operatórias ensinadas no oitavo ano Ensino Fundamental. Além disso, a citação contém fortes indícios que o saber matemático passa pelo fenômeno transpositivo antes de ser ensinado.

Uma das proposições da TAD é a "*Didactique de l'Enquête Codisciplinaire*" [Didática da Investigação Codisciplinar] (CHEVALLARD, 2007, p. 15). Esse tipo de investigação leva em conta as possíveis condições e restrições de uma escala de níveis (co) determinação didático: Civilização ⇆ Sociedade ⇆ Escola ⇆ Pedagogia ⇆ Disciplinas ⇆ Áreas ⇆ Setores ⇆ Temas ⇆ Sujeitos (CHEVALLARD, 2007). As problemáticas inclusas na Investigação Codisciplinar estabelecem alguma (s) relação (es) com os níveis da escala de (co) determinação didático e se apoiam no esquema herbatiano[35]: $(S(X, Y, Q) \hookrightarrow R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ..., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ..., O_m) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$

[34] Traduzido para o espanhol como conteúdo didático

[35] Johann Friedrich Herbart nasceu em 4 de maio de 1776 na cidade de Oldenburg, situada ao norte da Alemanha, e morreu em 11 de agosto de 1841 na cidade universitária de Göttingen. Entre 1794 e 1797, foi aluno do filósofo Johann Gottlieb Fichte (1762-1814) na Universidade de Iena. No entanto, o jovem Herbart rapidamente tomará distância da "teoria da ciência" e da filosofia prática de seu mestre. No terreno fértil das contradições do pensamento idealista, fará germinar sua própria filosofia realista. Herbart, no entanto, permanecerá em sua vida

(CHEVALLARD, 2007). No esquema herbatiano temos o sistema didático *S*, as respostas autenticadas $R_n^{\lozenge}$, as obras O_m e a resposta esperada $R^{\blacktriangledown}$ (no capitulo IV explicaremos com mais detalhes esse esquema). Adiantamos que, no terceiro tópico do segundo capítulo desta tese, existe um esquema herbatiano adaptado: (S(y, *O*, Q_y) ➥ $R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, ..., O_m$) ➥$R^{\blacktriangledown}$ (y = pesquisador; *O* = obras matemáticas de diferentes épocas; Q_y = questão que motivou o estudo das obras; $R_n^{\lozenge}$ = respostas encontradas nas obras; O_n = obras examinadas de diferentes épocas e $R^{\blacktriangledown}$ = resposta confirmada por y).

A "noção de oferta praxeológica[36]" (CHEVALLARD, 2008a, p. 7) estabelece certo "diálogo" com a temática desta tese, visto que propomos uma formação continuada mediada por um MEA (PEREIRA, 2012), que deve imprimir alterações ou recombinações praxeológicas no equipamento praxeológico dos professores de matemática do Ensino Básico, partícipes dessa formação. Deve-se entender que essa oferta ou proposição praxeológica leva em conta as condições e restrições da problemática *funcional*, anunciada por Chevallard (2008): "Dadas às restrições impostas sobre um conjunto de condições existentes ou a ser criado, qual equipamento praxeológico é possível que uma instituição ou uma determinada pessoa a utilize para agir em uma determinada área de atividade? " (Ibidem, 2008a, p. 7, tradução nossa). A existência das restrições operando sobre o conjunto de condições reflete na distinção entre estas. As restrições são condições consideradas, possivelmente, não modificáveis, enquanto as condições menores são vistas como modificáveis ou criadas sob as restrições existentes (CHEVALLARD, 2008a). A amplitude das restrições e condições alcança as ofertas praxeológicas do MEA de Pereira (2012) e a metodologia do PER que propomos a partir deste. Além disso, a problemática "*de base*" da Álgebra Elementar (CHEVALLARD, BOSCH, 2012) também está subjacente.

> [...] Admitida por numerosas pesquisas em didática da álgebra, a problemática *de base* pode ser anunciada assim: "Dadas às restrições *K* (por exemplo, as do atual ensino secundário) que são impostas sobre uma instância *U* (por exemplo, um grupo de alunos e seu professor), sob quais conjuntos de condições *C* esta instância poderá encontrar a entidade praxeológica $\wp$ (por exemplo, tal organização vista como relevante para a álgebra ensinada)? " No que segue, nós nos referiremos, não à problemática de base, mas a sua problemática *dual*, a problemática *possibilística*, que se enuncia nos seguintes termos: "Dado um conjunto de condições *C* e um conjunto de restrições *K*, aos quais tal instância *U* é submetida, quais entidades praxeológicas $\wp$ é possível que tal instância *U* conheça? " Não é assim uma pergunta que se deseja fazer como os alunos podem conhecer (e de que forma seu professor pode fazê-los

---

inteira fiel ao rigor intelectual de seu mestre Fichte, tentando, a exemplo dele, apresentar os elementos mais importantes de sua reflexão sob a forma de "deduções" (HILGENHEGER, 2010, p. 12).

[36] *1. La notion d'offre praxéologique*

> conhecer) tal ou qualquer entidade "algébrica", mas para identificar os tipos de entidades "algébricas" que é possível encontrarmos hoje na escola, sob as restrições e condições existentes. Tal perspectiva nos levará, naturalmente, abordar a problemática *contrária*, dita *impossibilística* – quais são as entidades praxeológicas $\wp$ de um determinado tipo, sob restrições *K* e condições *C*, a instância *U* não encontrará? [...] (CHEVALLARD, BOSCH, 2012, p. 21, tradução nossa).

As duas hipóteses desta tese possuem implícita a problemática "*de base*" concernente a Álgebra Elementar Escolar, porque a instância *U* (professores de matemática do Ensino Básico) mesmo tendo o conjunto de condições *C* (local, materiais e orientações adequados à ao processo de formação continuada) deve manifestar as restrições *K* (de sua formação inicial e outras, assim como, de suas práticas docentes) internalizadas em seu equipamento praxeológico, em relação à entidade praxeológica $\wp$ (MEA de Pereira (2012)). A problemática possibilística ressoa sobre o estudo que a instância *U* deve realizar da OMD do MEA de Pereira (2012), nela há as condições *C* (etapas detalhadas da modelização numérico-algébricas a partir das noções de valor posicional e representação na escrita polinomial de potência de base dez) e as restrições *K* (modelização restritiva ao sistema de numeração posicional decimal e sua extensão para as expressões algébricas de uma única variável); nesse processo de estudo a instância *U* deve encontrar e conhecer as instâncias praxeológicas $\wp$ inerentes às práticas aritméticas (operações aritméticas fundamentais e seus algoritmos) e práticas algébricas (cálculo algébrico com operações polinomiais).

A problemática "*de base*" e *possibilística* é anunciada, de forma abrangente, por Chevallard em 2009, durante as sessões do "Seminário da Teoria Antropológica do Didático – TAD & Engenharia Didática do Desenvolvimento – EDD[37]", cujo textos estão publicados no "*JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD*" 2008/2009[38]. Nesta tese restringiremos à discussão a especificidade da Álgebra Elementar, conforme expomos acima. Porém, esta especificidade insere-se no contexto das didáticas "*especificas*", a exemplo da didática das matemáticas (CHEVALLARD, 2009g). A especificidade da didática das matemáticas "[...] é assim esta parte da ciência didática que estuda a difusão – e a não difusão – das praxeologias *matemáticas* [...]. Poder-se-á assim estudar as praxeologias que tal instituição *I* contribui para difundir – sua *oferta praxeológica* [...]" (CHEVALLARD, 2009g, p. 2, tradução nossa). O descrito na citação configura-se no PER que propomos para difundir a oferta praxeológica do MEA de Pereira (2012). Nesse processo de difusão praxeológica pode ocorrer que uma instância *V* (diretor de estudo: autor desta tese) faça algo, por exemplo, um "gesto didático" para que a instância *U*

---

[37] *Séminaire Théorie Anthropologique du Didactique-TAD &Ingénierie Didactique du Développement-IDD*
[38] http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=140

(professores de matemática do ensino básico) modifique de alguma forma desejada sua relação para certa obra ♥ (artigos sobre a TAD, monografia de Carvalho e Pereira (2009), Dissertação de Pereira (2012), ente outros) (CHEVALLARD, 2009g). Chevallard denota essa situação por #(*U*; *V*; ♥), ou seja, a problemática "*de base*" e "*possibilística*" do processo de formação que conduz nossa tese fluirá se o diretor de estudo (instância *V*) conseguir que os professores de matemática em formação continuada (instância *U*) estudem as obras indicadas e externalizem sob que condições *C* e restrições *K* eles compreenderam os conteúdos dessas obras, ou seja, quais praxeologias ℘ esses professores objetivaram em seus equipamentos praxeológicos.

Agregamos a notação #(*U*; *V*; ♥), a noção de sistema didático, conforme está em Chevallard (2009g): " [...] a noção de *sistema didático*, que denoto por *S*(*X*; *Y*; ♥), onde ♥ é uma obra que *X* estuda com ajuda de *Y*" (Ibidem, p. 4, tradução nossa). Ainda segundo Chevallard (2009g): "A noção de sistema didático é integrante da noção de escola: uma escola é uma instituição que oferece de maneira declarada um habitat para certos tipos de sistemas didáticos" (Ibidem, p. 4, tradução nossa). Nesta pesquisa o *habitat* do nosso sistema didático é o curso de doutorado de uma Instituição de Ensino Superior. Para complementar a compreensão sobre sistema didático, Chevallard (2009g) acrescenta:

> Assim, no que diz respeito à formação do sistema didático *S*(*X*; *Y*; ♥). Deve-se imaginar que alguma instância V (tem-se, em alguns casos, *V* = *Y* ou mesmo *V* = *X*) pode modificar de alguma forma a relação de *U* = *X* para ♥, isso provocará a constituição de um sistema didático, permitindo a *X* estudar ♥ com ajuda de *Y*.
> O funcionamento – o "trabalho" – de um sistema didático supõe um tempo e um lugar próprio, excluídas as atividades "regulares" (não consagradas ao estudo) da vida social dos $x \in X$, pelo qual a atividade no interior de *S*(*X*; *Y*; ♥) aparece como um lazer de estudos, o que é a mesma definição grega da noção clássica de *skholê* (palavra de onde derivam as palavras "europeias" *schola, école, school, escuela, schule, skole,* etc.) (Ibidem, p. 4, tradução nossa).

Chevallard (2011b) acrescenta que, na problemática da didática "Estudar o equipamento praxeológico de uma determinada instância não é uma problemática principal, mais uma problemática derivada [...]" (Ibidem, p. 8, tradução nossa). Entretanto, ele esclarece que: "[...] o objetivo principal da didática é o estudo das condições e restrições sob as quais um tipo de equipamento praxeológico de determinada instância se modificou, ou está se modicando ou poderá ser alterado com a integração de tal ou qualquer entidade praxeológica" (CHEVALLARD, 2011b, p. 8, tradução nossa). A partir dessa descrição de Chevallard (2011b) vemos nossa pesquisa contemplada nela, mas intercalada entre as duas problemáticas da didática (principal e derivada). Isso porque analisaremos o equipamento praxeológico objetivado dos professores de matemática do Ensino Básico, em formação continuada, inclua-se nisso as condições e restrições existentes para promover as possíveis alterações ou recombinações praxeológicas nos equipamentos praxeológicos desses professores. Existem ainda as condições e restrições do dispositivo metodológico escolhido para conduzir o processo de formação continuada, o PER, porque entendemos que esse dispositivo é capaz de gerar material analisável pela ferramenta indicada por Chevallard (2011b):

> A ferramenta de tais estudos é a *análise didática*: análise do didático que conduz, ou impulsiona, ou poderá suscitar a visada mudança praxeológica. A análise didática supõe a análise de condições e restrições de todos os níveis, em particular, a *análise praxeológica* de obras, ou seja, de entidade praxeológica da qual se estuda, também, a difusão passada, presente e futura. Inversamente, *a análise praxeológica é chamada análise didática*. Esclarecer o que tal instância "sabe" – ou seja, o que contem seu equipamento praxeológico – para tal ou qualquer propósito supõe em muitos casos uma análise *genética*, revelando *como* ele aprendeu, e de que, portanto, supõe-se uma análise didática.
> O que precede leva a uma conclusão inesperada: em uma perspectiva de crítica cidadã, qualquer que seja o propósito de se "aprender" tal entidade praxeológica ♥(na família, na escola, na mídia, etc.), deve-se perguntar o que é ♥, ou seja, realizar uma análise praxeológica de ♥; ou para elucidar o que a instância docente lhe oferece assim, notadamente, para o saber ♥, convém, frequentemente, determinar como essa própria instância *sabe* ou *aprende* essa entidade praxeológica[...] (CHEVALLARD, 2011b , p. 8-9).

Para continuarmos nossas discussões teóricas apoiada na simbologia de obra de Chevallard, denotaremos as principais obras de estudo do processo de formação por: ♥$_{\mathfrak{M}}$ = Monografia de Carvalho e Pereira (2009), ♥$_{\mathfrak{D}}$ = Dissertação de Pereira (2012), ♥$_{\mathfrak{E}}$ = Modelo epistemológico Alternativo de Pereira (2012). Usaremos a simbologia♥$_{\mathfrak{T}}$ para designar esta tese. As nossas notações simbólicas nos permitem adaptar os sistemas didáticos: *S*(*U*; *V*; ♥$_{\mathfrak{T}}$) (doutorando; orientador; tese) e *S*(*U*; *V*; [♥$_{\mathfrak{M}}$,♥$_{\mathfrak{D}}$, ♥$_{\mathfrak{E}}$]) = (professores de matemática participantes do PER; diretores de estudo; obras principais). As simbologias dos dois sistemas didáticos nos auxiliarão em nossas análises do processo formação continuada e na elaboração da resposta para a questão principal ***Q***.

Chevallard (2011c) estabelece a conexão do sistema didático *S*(*X*; *Y*; ♥) com a proposição "*Étudier/chercher (X), diriger l'étude/la recherche (Y)*" [Estudar/pesquisar (*X*), dirigir o estudo/ a pesquisa (*Y*)]. O desdobramento dessa conexão está transcrito na citação a seguir.

> Um pesquisador *x* estuda uma questão Q ou, geralmente, uma obra *O* (recordemos que uma questão é uma obra). Designamos pelo símbolo ♥esta questão Q ou esta obra; nosso pesquisador *x* forma um sistema didático que, em alguns casos, escreve-se *S*(*x*; ∅; ♥), outros *S*(*X*; ∅; ♥) com *x* ∊ *X*: aqui, em princípio, os *y* ∊ *Y* não participam de forma central da pesquisa, mas a acompanha. No caso da direção por y do trabalho de tese do "jovem pesquisador" *x*, teremos, geralmente, *S*(*x*; *y*; ♥); mas poderemos ter também *S*({*x*, *y*}; *y*; ♥): *x* e *y* pesquisam em conjunto, o outro *y* assume a direção da pesquisa (CHEVALLARD, 2011c, p. 2, tradução nossa).

Com base na citação acima ajustamos nossa modelização do sistema didático *S* para conformar o símbolo ♥ a questão ***Q*** norteadora desta tese. Nessa modelização de *S* teremos a simbologia ♥$_{\tau} \rightleftarrows$ ***Q***, significando que a obra ♥$_{\tau}$ leva a responder ***Q*** e ***Q*** confirma a tese. Assim surge a relação *R*(*x*, ***Q***) e o sistema didático *S*(*x*; *y*; ♥$_{\tau} \rightleftarrows$ ***Q***), no qual *x* = doutorando e *y* = orientador. Entendemos que a relação *R* cumpre papel auxiliar na praxeologia de pesquisa que descreveremos no próximo capítulo e o sistema didático *S* e elemento praxeológico que concatenará o resultado final de nossa pesquisa.

Os sistemas didáticos modelados pela notação *S*(*X*; *Y*; Q) deve conduzir a construção de uma resposta $R^♥$ para Q (CHEVALLARD, 2011d); uma das proposições de Chevallard para construção dessa resposta interliga-se ao esquema herbatiano compactado: [*S*(*X*; *Y*; Q) ➦ *M*] ➥ $R^♥$ (CHEVALLARD, 2011d). Nesse esquema compactado o sistema didático *S*(*X*; *Y*; Q) depende do *milieu*[39] $M = \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m\}$. O *milieu M* contém as respostas “prontas” $R_n^\lozenge$ e as obras O_k. Muitas dessas respostas “prontas” estão contidas nas obras O_k (CHEVALLARD, 2011d). Chevallard (2011d) indica “cinco gestos básicos” relacionados às respostas $R^\lozenge$ e $R^♥$:

> 1) *Observar* as respostas $R^\lozenge$ depositadas na cultura e práticas sociais.
> 2) *Analisar*, o duplo plano experimental e teórico, nestas respostas $R^\lozenge$.
> 3) *Avaliar* estas mesmas respostas $R^\lozenge$.
> 4) *Desenvolver* uma resposta própria $R^♥$.
> 5) *Difundir e defender* a resposta $R^♥$ assim produzida (CHEVALLARD, 2011d, p. 9, tradução nossa).

Os “cinco gestos básicos” norteiam o mecanismo de procura de $R^\lozenge$, conexo ao “[...] trabalho de investigação sobre as eventuais respostas $R^\lozenge$, que não está dissociado do trabalho de elaboração da resposta $R^♥$ procurada [...]” (CHEVALLARD, 2011d, p. 9). O que abstraímos da citação se inter-relaciona com o esquema herbatiano ampliado: [*S*(*X*; *Y*; *Q*) ➦ $\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m\}$] ➥$R^♥$. Evidencia-se nessa ampliação do esquema herbatiano, que os conjuntos *X* e *Y* devem investigar a existência das respostas $R^\lozenge$, presentes na cultura e práticas sociais, transcritas ou não nas obras O_k. De certa maneira, fizemos isso no tópico 2.3 do segundo capítulo, no qual modelamos o sistema didático S(*y*, *O*, Q_y) para examinarmos algumas obras de diferentes épocas, de tal modo que podemos adaptar o esquema herbatiano expandido: [S(*y*,

39 Palavra que significa “meio” em Língua Portuguesa, mas no contexto da TAD, o significado é amplo, por isso a usaremos no idioma francês.

O, Q$_y$)➦M] ➥ $R_y^{\lozenge}$. A resposta $R_y^{\lozenge}$ significa, nesta tese, uma resposta particular autenticada por y para a questão Q$_y$.

Chevallard (2012-2013) expondo sobre "*Enquête codisciplinaire & EDD*[40]" [Investigação codisciplinar & EDD] torna mais explicito o significado dos elementos do esquema herbatiano expandido: "Recordaremos primeiro o esquema geral da *investigação sobre* uma questão *Q* – ou *o estudo de uma* questão *Q* –, dito *esquema herbatiano expandido*: [S(X; Y; Q)➦M] ➥ $R^{\heartsuit}$, com $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, ..., O_m\}$" (CHEVALLARD, 2012-2013, p. 1, tradução nossa). O esquema herbatiano expandido compreende que:

> *M* design um *milieu didático* ou *milieu para o estudo*, ou seja, o conjunto de ferramentas e recursos reunidos pelo sistema didático $S(X; Y; Q)$ em vista de construir a resposta $R^{\heartsuit}$ procurada. O *milieu* é constituído de *obras* – ou seja, de criações humanas intencionais, tendo uma finalidade – distinguindo-se do que precede somente duas grandes categorias: de um lado, as *respostas* $R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}$ para a questão *Q* existente nas instituições da sociedade; de outro lado, *as outras obras*, O_{n+1}, ..., O_m. A natureza dessas obras será especificada de acordo com a necessidade; em regra geral, ver-se-á que elas virão de diversos campos de conhecimento: portanto, fala-se de *investigação codisciplinar* a propósito das investigações que teremos para conduzir. Refinamos um pouco a modelização do *milieu M*, fazendo aparecer, explicitamente, entre as "outras obras", um tipo de obra essencial: as questões que são geradas pelo estudo da questão *Q* e, também, pelo estudo das respostas $R_i^{\lozenge}$ e das "outras obras" O_k necessárias para se utilizar, efetivamente, estas respostas e estas outras obras (teorias, experimentações, etc.). Recriar-se-á então o *milieu M* sob a seguinte forma: $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$. Na sequência, guardaremos em mente o esquema herbatiano expandido assim: [S(X; Y; Q) ➦ $\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$] ➥$R^{\heartsuit}$. As questões Q_{n+1}, ..., Q_m são ditas *geradas* pela investigação em curso, que aborda a *Q*, dita *geradora* da investigação (CHEVALLARD, 2012-2013, p. 1-2, tradução nossa).

O texto da citação indica que o *milieu M* é constituído por obras de criações humanas produzidas com intencionalidades e finalidades. Esse mesmo *milieu* presume uma investigação codisciplinar, gerada por uma questão *Q*, realizável se existirem às questões auxiliares Q_{n+1}, ..., Q_m, intermediando o estudo das respostas $R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}$ e das "outra obras" O_{m+1}, ..., O_p. Aplica-se a esse *milieu M* as obras ♥$\mathfrak{D}$, ♥$\mathfrak{M}$ e ♥$\mathfrak{C}$. A ampliação das ideias da investigação codisciplinar está descrita na citação abaixo.

> *Investigar sobre uma determinada questão* é um *tipo de tarefas* que denotaremos por *H* (da palavra grega *historia* que significa "*investigar*") ao entorno da qual nos esforçaremos para construir uma *praxeologia da investigação*, $\mathcal{H}$, que se denota por $\mathcal{H}$ = [H/ τ_H/ θ_H/ Θ_H]. O esquema herbatiano [S(X; Y; Q) ➦ $\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$]➥$R^{\heartsuit}$constitui um elemento *tecnológico*

40 *Éducation au développement durable* - EDD

> ($\in \theta_H$) que está *no coração desta praxeologia da investigação*: esse elemento tecnológico justifica vários gestos técnicos, sobre o qual nos voltaremos, tal como colocar-se *a procura da reposta* $R^\lozenge$ [...] (CHEVALLARD, 2012-2013, p. 2, tradução nossa).

O bloco praxeológico $\mathcal{H}$ (CHEVALLARD, 2012-2013) assume o esquema herbatiano expandido como tecnologia θ_H para justificar os gestos técnicos τ_H aplicáveis ao tipo de tarefas *H*. A extensão desse bloco praxeológico alcança o *parcours d'étude et de recherche* (PER): "Para uma determinada questão *Q*, o trabalho de investigação pode adotar uma grande diversidade de *parcours d'étude et de recherche* (PER) " (CHEVALLARD, 2012-2013, p. 2, tradução nossa). Atingimos neste parágrafo uma das abordagens da TAD (a metodologia do PER) que constituirá o capítulo IV, mas antes vejamos mais compreensões que interligam a praxeologia da Investigação Codisciplinar (IC) à praxeologia do PER.

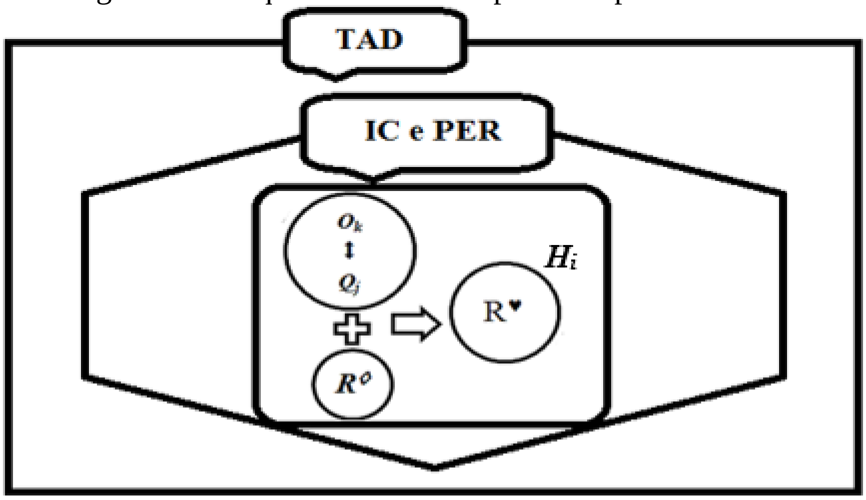
> Em certos tipos de percurso, o *investigador* ou *estudante* ignorará, voluntariamente ou não, as respostas $R^\lozenge$ depositadas na cultura e tentará construir "diretamente" a resposta $R^\heartsuit$ procurada, apoiando-se sobre as obras O_{m+1}, ..., O_p julgadas por ele apropriadas. Em tal PER, a parte da pesquisa é máxima, enquanto o estudo recai, unicamente, sobre as obras O_k, que ele está aprendendo usar como ferramenta de pesquisa.
> Em outro tipo de percurso, colocar-se-á, prioritariamente, a busca pelas respostas $R^\lozenge$ e as questões Q_j assim como as outras obras O_k mobilizadas terão então por objeto, primeiro ajudar o investigador a estudar as repostas $R_i^\lozenge$ assim reunidas, em vista de "desconstruí-las" e extrair os materiais para construção da resposta $R^\heartsuit$.
> Em todos os casos ou quase, a investigação se desenvolverá de maneira ótima de acordo com um percurso feito *de uma parte de estudo* e *de uma parte de pesquisa*, um ao outro combinado nas proporções variáveis segundo a continuidade do PER (CHEVALLARD, 2012-2013, p. 2, tradução nossa).

Temos na citação duas praxeologias de investigação relacionadas ao PER. A primeira detém-se na busca das respostas autenticadas ($R^\lozenge$) exclusivamente depositadas nas obras O_k, mas estas obras devem estar acessíveis em alguma instituição ou local para a respectiva consulta do investigador – a exemplo da pesquisa documental. A segunda é mais ampla, permite a busca das respostas autenticas em outras obras O_k, mas essa busca ocorre intermediada pelas questões Q_j que auxilia o investigador no estudo dos tipos de tarefas H_i, ou seja, os tipos de tarefas $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$ e $\boldsymbol{H_5}$. Desses cinco tipos de tarefas H_i, os três primeiros se relacionam ao estudo das repostas autenticadas $R^\lozenge$, os dois últimos à construção da resposta procurada $R^\heartsuit$.

> $\boldsymbol{H_1}$. *Observar* as respostas $R^\lozenge$ depositadas nas instituições.
> $\boldsymbol{H_2}$. *Analisar* – consistentemente, o duplo plano experimental e teórico – estas respostas $R^\lozenge$.
> $\boldsymbol{H_3}$. *Avaliar* estas mesmas respostas $R^\lozenge$.
> $\boldsymbol{H_4}$. *Desenvolver* uma resposta própria $R^\heartsuit$.
> $\boldsymbol{H_5}$. *Difundir e defender* a resposta $R^\heartsuit$ assim produzida (CHEVALLARD, 2012-2013, p. 3, tradução nossa).

De certa forma, nosso trabalho nesta pesquisa perpassa pelos tipos de tarefas H_i, principalmente, como filtro para elaborarmos a resposta ótima $R^♥$ para a questão $\boldsymbol{Q}$ que confirma nossa tese. Assim, esboçamos na Figura 27, o escopo teórico simplificado para a Investigação Codisciplinar (IC) e PER. Nessa figura a TAD é a teoria de amplo alcance em diversas áreas da cultura humana e as IC acabam sendo múltiplas também (CHEVALLARD, 2012-2013). Nessa multiplicidade o dispositivo do PER se adéqua perfeitamente ao bloco praxeológico $\mathcal{H} = [H/\ \tau_H/\ \theta_H/\ \Theta_H]$ e pela tecnologia θ_H do esquema herbatiano.

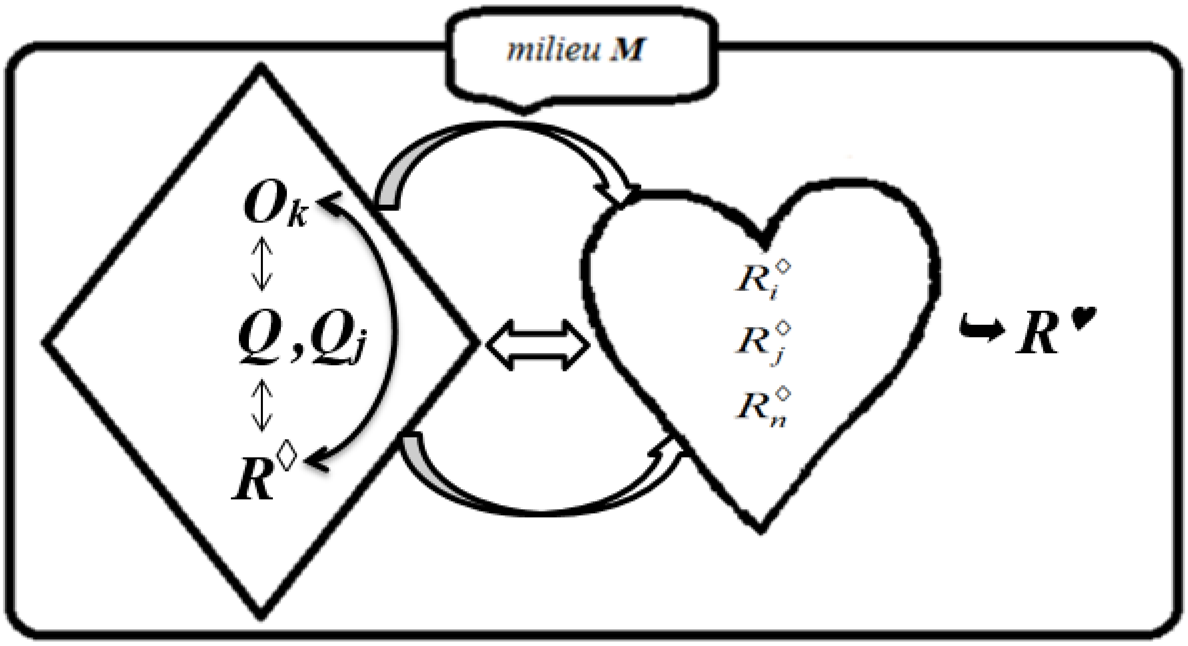
Figura 27 – Esquema teórico simplificado para IC e PER



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Persuadidos pelo esquema teórico da Figura 27, propomos quatro esquemas herbatiano adaptados para esta tese (obra ♥Ꞇ), denotados por **Ѣi**. O primeiro é relativo ao início da pesquisa, alinhamos a problemática à revisão da literatura pertinente para continuarmos as outras etapas da pesquisa: **Ѣ1**: [S(x; y; ♥Ꞇ ⇄ $\boldsymbol{Q}$) ➥M] ➥ R♡. O segundo com o *milieu M* definido, temos a mesogênese em fluxo – sistema de recursos que utilizaremos no prosseguimento da pesquisa: **Ѣ2**: [S(x; y; ♥Ꞇ ⇄ $\boldsymbol{Q}$) ➦M] ➥ R♡. O terceiro índica o avanço da pesquisa intermediado pelo *milieu M* e com as possíveis respostas autenticadas selecionadas das obras O_k: **Ѣ3**: [S(x; y; ♥Ꞇ ⇄ $\boldsymbol{Q}$) ➦M] ➦ R♡. O último seria a pesquisa finalizada, a análise do processo de formação concluída e a resposta procurada concretizada: **Ѣ4**: [S(x; y; ♥Ꞇ ⇄ $\boldsymbol{Q}$) ➦M] ➦ R♥. Exibimos no esquema da Figura 28, uma possível praxeologia em vista da elaboração da resposta R♥.

Figura 28 – Possível praxeologia à elaboração da R♥



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Os elementos característicos da Figura 28 imputam ao *milieu M* uma amplitude conforme o significado da palavra na abordagem da TAD. Entenda-se que o esquema esboçado na Figura 28 está em conformidade com o sistema didático $S(x; y; ♥_T \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$. O losango ampliado significa a escolha e validação das obras pelo *x* (doutorando) e *y* (orientador), em consonância com a questão norteadora $\boldsymbol{Q}$ e outras questões $\boldsymbol{Q_j}$ (inclusas nessas as questões auxiliares de $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$). Essas questões impulsionam a identificação das respostas $R^{\Diamond}$, contidas nas obras $\boldsymbol{O_k}$, inclusas nestas as propostas de aulas dos professores. Essas respostas $R^{\Diamond}$ são autenticadas por categorias $R_i^{\Diamond}, R_j^{\Diamond}$ e $R_n^{\Diamond}$ e, dependem das intencionalidades e finalidades de quem as propõem, a exemplo das que constam nas obras do primeiro e segundo capítulos desta tese.

A escolha das respostas $R_i^{\Diamond}, R_j^{\Diamond}$ e $R_n^{\Diamond}$ estabelece uma dialética com o símbolo do coração vazio (em branco). O preenchimento desse coração imprime uma análise praxeológica preliminar para excluir as respostas autenticadas que divergem da intencionalidade e finalidade da pesquisa conduzida por *x* (doutorando) e orientada por *y* (orientador) – concretização dos tipos de tarefas $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ e $\boldsymbol{H_3}$. Expurgadas essas respostas, restam as que conduzirão *x* na construção da resposta R♥ para a questão $\boldsymbol{Q}$ – é a vez do tipo de tarefas $\boldsymbol{H_4}$. Concretizados os tipos de tarefas $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$ por *x*; segue-se para o último, o $\boldsymbol{H_5}$. Para esse último tipo de tarefas $\boldsymbol{H_i}$, *x* divulgará e defenderá a respostas R♥, perante integrantes da comunidade científica nacional Ξ^* ou internacional Ξ^{**} (CHEVALLARD; ARTAUD, 2013-2014a).

Os cinco tipos de tarefas ***H**ᵢ*, que Chevallard (2011d) denominou de "cinco gestos básicos", ganharam novo redimensionamento teórico em Chevallard e Artaud (2013-2014a), tornando-os elementos praxeológicos dos "Fundamentos e Métodos da Pesquisa em Didática" (CHEVALLARD; ARTAUD, 2013-2014a, 2013-2014b). Essa condutibilidade praxeológica das cinco $\boldsymbol{H_i}$ estarão norteando nossas análises e conclusões finais.

No próximo capítulo ampliaremos mais compreensões teóricas da TAD, entretanto, centradas nos encaminhamentos da praxeologia metodológica da pesquisa, inserida nesta a metodologia do PER.

IV– A PRAXEOLOGIA METODOLÓGICA DA PESQUISA

A metodologia que assumimos nesta de pesquisa está interligada aos referenciais teóricos já citados anteriormente. Esses referenciais teóricos anunciam o desenvolvimento metodológico conexo ao método da pesquisa qualitativa (TRALDI; DIAS, 2011), efetivado pela descritividade da revisão da literatura, referencial teórico, obtenção dos dados pelo dispositivo do PER e análise dos dados coletados durante o processo de formação continuada. Nesse sentido, Ranpazzo (2002) argumenta que a pesquisa bibliográfica prévia serve para sabermos quais os estudos já realizados sobre a temática que queremos investigar. Nesta tese, a pesquisa bibliográfica não se restringe a um único capítulo, mas se estende do capitulo I ao V. Optamos por essa distribuição, porque a abordagem da TAD nos permite fazer isso.

Inserido nesta praxeologia metodológica existem algumas das noções da análise de conteúdo (BARDIN, 2011), por exemplo, a pré-análise, exploração do material, tratamento e interpretação dos resultados brutos obtidos. Entretanto, a nossa opção teórica, a TAD, possui seus próprios "Fundamentos e métodos da pesquisa em didática" (CHEVALLARD; ARTAUD, 2013-2104a, 2013-2014b) que contemplam essas noções. Além disso, a Investigação Codisciplinar (IC) e o "*Parcours d'Étude et de Recherche* (PER) (CHEVALLARD, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f) apontam aspectos metodológicos aplicáveis às pesquisas em Didática da Matemática. No que segue, expomos as particularidades da praxeologia metodológica empregada nesta pesquisa.

4.1. Memória Didática Ostensiva

Nossa escolha metodológica envolve a memória didática[41](MATHERON, 2000b; MATHERON, SALIN, 2002; ARAYA-CHACÓN, 2008; BOUILLON, 2010) dos professores de Matemática do Ensino Básico, porque estes participaram de um processo de formação continuada por meio de um "*Parcours d'Étude et de Recherche (PER) "* [Percurso de Estudo e Pesquisa]. Nesse processo formativo aparecem os tipos de memória didática, adaptadas por Matheron (2000b), a partir das compreensões de Candau (1996, 1998)[42], as quais são

41 [...] A memória didática seria, portanto, ao mesmo tempo, uma memória coletiva, pública e coletivamente construída por um grupo social e uma memória prospectiva, controlada por uma instituição que rege o futuro e a evolução dos conhecimentos produzidos em seu interior (BOUILLON, 2010, p. 77, tradução nossa).

42 Obras traduzidas do idioma francês para o português sob os títulos: "Antropologia da Memória" (CANDAU, 2005) e "Memória e identidade" (CANDAU, 2014).

designadas por memória de baixo nível ou protomemória[43], memória de alto nível[44] e metamemória[45]. Além disso, a memória didática desses professores, modelada pela "*memória prática da pessoa*"[46] (MATHERON; SALIN, 2002), pode revelar o modelo epistemológico da Álgebra Escolar predominante em suas práticas docentes, assim como, as limitações do equipamento praxeológico objetivado desse professor para ensinar os objetos matemáticos institucionalizados na Matemática Escolar do Ensino Básico brasileiro.

As compreensões de Matheron (2000b) impulsionam suas ideias em relação a protomemória matemática: "[...]. Pela área de estudo da matemática, esta protomemória se manifestará ao nível das práticas matemáticas efetivas dos alunos. Uma consequência da aplicação do texto do saber é a criação de um tempo de tais práticas, a maioria deles estão de fato datados [...]" (Ibidem, p. 61, tradução nossa). A extensão das práticas matemáticas possui certa especificidade protomemorial.

> [...] propomos chamar esta protomemória, específica das matemáticas, "memória prática das matemáticas", ou simplesmente, quando não existir risco de confusão, "memória prática". Esta designação é justificada pelo fato de que é ela, imediatamente solicitada por um indivíduo, qualquer que seja (aluno, professor, pai que ajuda sua criança, etc.), quando se envolve no cumprimento prático de uma tarefa identificada como parte de um saber matemático (MATHERON, 2000b, p. 61, tradução nossa).

O caráter antropológico da memória didática é o cerne da obra de Matheron (2000b), que estudou essa memória em relação ao saber matemático e, nessa relação, "[...] surge à questão da possibilidade de uma memória coletiva e a pertinência do conceito para analisar as atividades memoriais e suas manifestações no estudo das matemáticas [...]" (Idem, p.78, tradução nossa). No segundo capítulo desta tese, existe a tentativa de mostrarmos as possíveis características da Álgebra Elementar Escolar que transitaram por diversas obras de diferentes épocas. Nessas obras cada autor descreve uma espécie de memória praxeológica das

---

[43] Uma memória de baixo nível, que sugiro denominar protomemória. Esta, tal como "protopensamento" [...] [...] imanente a toda vida social e a todo processo de aculturação. Ela se constitui por dispositivos e disposições escritas no corpo. Podendo determinar atitudes e condutas, a transmissão protomemorial se faz sem pensar, age sobre os indivíduos de maneira involuntária, advém da imersão na sociedade, desde a primeira infância, mais do que de uma transmissão explicita. Ela conserva, reitera, bem mais do que transforma, cria e reconstrói [...] (CANDAU, 2014, p. 21 e 119).

[44] A memória propriamente dita ou de alto nível, que é essencialmente uma memória de recordação ou reconhecimento: evocação deliberada ou invocação involuntária de lembranças autobiográficas ou pertencentes a uma memória enciclopédica (saberes, crenças, sensações, sentimentos, etc.) [...] (CANDAU, 2014, p. 23).

[45] A metamemória, que é, por um lado, a representação que cada indivíduo faz de sua própria memória, o conhecimento que tem dela e, de outro, o que diz dela [...]. A metamemória é, portanto, uma memória reivindicada, ostensiva (CANDAU, 2014, p. 23).

[46] Para produzir um gesto é necessário possuir uma memória: esta permite reproduzir a prática anteriormente aprendida. É esta que nomeamos a memória prática da pessoa. Ela resulta da incorporação de cadeias operatórias (LEROI-GOURHAN, 1964) alcançadas por uma "comunidade matemática". ". Neste exemplo, esta "comunidade" é designada sob o termo mais genérico de instituição [...] (MATHERON; SALIN, 2002, p. 61, tradução nossa).

Organizações Matemáticas, algumas mais próximas das memórias praxeológicas dos autores atuais, outras constituem uma descrição do que vamos denominar de "memórias epistemológicas ostensivas da Álgebra Elementar".

A memória didática ostensiva do professor de matemática é constituída pelo uso dos objetos ostensivos (CHEVALLARD, 1994b; CHEVALLARD, BOSCH, 1999) como instrumento de sua prática docente (MATHERON, 2000b). No tópico 2.2 do segundo capitulo exemplificamos o uso desses objetos em práticas diversas. Matheron (2000b) cita o contributo de Lagrange para o cálculo diferencial, quando este substitui o ostensivo *f'(x)* (primeira derivada de uma função *f(x)*) pelo ostensivo $\frac{dy}{dx}$. Em nossa praxeologia metodológica, os ostensivos estão conectados aos não ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999), há entre esses dois tipos objetos uma relação dialética necessária à atividade matemática (CHEVALLARD, 1994b). A extensão dessa dialética deve estar na memória didática ostensiva (MATHERON, 2000b; MATHERON, SALIN, 2002) dos professores de matemática do Ensino Básico, mesmo que implícita. A memória didática ostensiva está diretamente interligada a metamemória (CANDAU, 2014). Matheron (2000b) assim caracteriza a memória ostensiva: "Chamaremos memória ostensiva, a memória que é deliberadamente vista, de maneira reivindicada, e pelos meios apropriados, para seus próprios sujeitos ou para outras pessoas, por uma instituição ou indivíduo" (Ibidem, p. 103, tradução nossa). Vemos essa caracterização da memória didática convergente as nossas intenções indicadas no objetivo geral e no PER que conduzem o processo de formação continuada, ou seja, identificar nessa memória didática ostensiva, as possíveis alterações e recombinações que ocorreram no equipamento praxeológico objetivados dos professores de matemática que concluírem todas as etapas da formação.

Prosseguindo os estudos de Matheron (2000b), Araya-Chacón (2008) aborda a gestão da memória didática pelo professor de Matemática do Ensino Secundário francês e da Costa Rica. A confluência do trabalho de Araya-Chacón (2008) com de Matheron (2000b) é visto sobre dois pontos, o primeiro é pertinente ao quadro teórico "[...] que incorpora as perspectivas antropológicas e sociológicas que, em nossa opinião, leva em conta as variáveis primordiais próprias às práticas institucionais [...]" (Ibidem, p. 41, tradução nossa). O segundo ponto é referente "[...] a modelização da memória assim fornecida [...]" (Idem). Para Araya-Chacón nessa modelização tem-se "[...] a existência de uma memória a partir da qual são construídos os gestos que ativam as ferramentas para efetivar uma técnica: a memória prática [...]" (Idem). Entendamos que essa memória prática – ou memória prática ostensiva – tem certa relação com a protomemória. Nossa análise das sessões do PER pretende evidenciar traços dessa relação que, de certa forma, prever a manipulação dos objetos ostensivos em dialética com os não ostensivos. Essa memória prática ostensiva está nas técnicas aplicadas às operações algébrica fundamentais das obras de Maclaurin (1753), Lacroix (1799), Peacock (1842, 1845) e Burat (1876). Matheron e Salin (2002) consideram que:

> Uma prática supõe um dispositivo constituído de meios materiais (folha de papel, caneta, régua, enunciado escrito, compasso, etc.) e técnicas (essencialmente o saber-fazer matemático, institucionalmente posto à disposição e esperado para realização da tarefa). Este dispositivo deve ser equipado por gestos apropriados para que a prática possa ser ampliada; sua ativação requer a mobilização de recursos pessoais (MATHERON; SALIN, 2002, p. 61, tradução nossa).

Implícito na citação existe a ação praxeológica do professor de matemática do Ensino Fundamental e Médio em suas práticas docentes; ela mobiliza recursos pessoais disponíveis no equipamento praxeológico desse professor. Nesse sentido, o PER que propomos a partir da modelização praxeológica da OMD da obra $\heartsuit\mathfrak{D}$ de Pereira (2012) – no bloco do saber fazer e do saber, oportuniza a análise da memória didática ostensiva do professor de Matemática do Ensino Básico, associada à objetivação de seu equipamento praxeológico por meio da elaboração e resolução de tarefas t dos tipos T, aplicando a técnica τ, em conformidade com as praxeologias $\wp$ do MEA de Pereira (2012). Para melhor elucidação do que anunciamos neste parágrafo, avancemos à metodologia do PER.

4.2. A Praxeologia Metodológica do "*Parcours d'Ètude et de Recherche* (PER)"

A praxeologia do PER está envolta com as *Activités d'Étude et de Recherche (AER)* (BARACHET; DEMICHEL; NOIRFALISE, 2007). As AER são as propulsoras de estudos em matemática. Segundo Chevallard (2009b) a pedagogia das AER tem sua essência na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, apoiada na noção de **situação fundamental**[47]. Chevallard (2009c, p. 7, tradução nossa) ainda esclarece que: "O recurso a uma situação fundamental, neste sentido, é uma exigência epistemológica estabelecida, que define um projeto de elaboração de uma infraestrutura matemática, didaticamente, adaptada a uma pedagogia das AER [...]". Nessa infraestrutura matemática, uma organização matemática pontual (OMP), denotada por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, cumpre um papel decisivo com o tipo de tarefas T, a técnica τ, a tecnologia θ e a teoria Θ. Esses quatro elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) alimentam os sistemas didáticos $\boldsymbol{S}$, em dois blocos dialéticos, o do saber-fazer (ou da práxis) e

[47] É um esquema de situação capaz de gerar, pelo jogo de variáveis didáticas que a determinam, o conjunto das situações que correspondem a um determinado saber […] (CHEVALLARD, 2009c, p. 7, tradução nossa).

o do saber (ou do logos). São esses dois blocos que regem a pedagogia das AER e do PER. Nas AER, os tipos de tarefas *T* são elementos metodológicos motivadores para o estudo da questão *Q* (ou de várias questões) durante a efetiva realização dessas AER. Para ilustrar alguns tipos de tarefas *T*, citamos cinco da obra de Pereira (2012, p. 88):

> · T_1: Identificar as ordens que cada algarismo indo-arábico ocupa;
> · T_2: Representar os números na escrita polinomial de potência de base dez;
> · T_3: Escrever a expressão algébrica que resulta de se tomar x = 10;
> · T_4: Classificar o tipo de polinômio a partir da expressão algébrica obtida;
> · T_5: Identificar o grau e o coeficiente de cada tipo de polinômio.

Esses cinco tipos de tarefas *T* permitiram ao autor reorganizar o estudo das tarefas t_i e das técnicas τ que as solucionam, estabelecendo um modelo de AER particular (ou várias AER particulares), unipessoal, em que a questão *Q*, interligou-se a questão de pesquisa[48] da obra ♥𝔇. No decurso das sessões do PER, esses tipos de tarefas *T* foram ampliados para dinamizar o estudo dos professores de matemática do Ensino Básico, conforme consta no APÊNDICE C.

Chevallard (2009c, p. 7, tradução nossa) indica que o estudo de um tipo de tarefas *T* deve levar a uma fundamentação desse tipo de tarefas: “Seja um tipo de tarefas *T* cujo estudo está programado. A AER pela qual a OMP [*T*/τ/θ/Θ] será posta na classe deve, ***em primeiro lugar***, fundamentar o tipo de tarefas *T*, exibindo pelo menos uma de suas ***razões de ser***”. Compreendemos essa proposição de Chevallard como metodológica, porque motiva estudar as tarefas t que constituem *T* (t ∈ *T*) e, nesse estudo, uma técnica τ pode instituir uma dimensão didática na OMP. Na vertente pedagógica das AER, haverá tipos de tarefas T^* problemáticas com extensão as tarefas t* (t* ∈ *T**) (CHEVALLARD, 2009c). Desse modo, para se estudar os tipos de tarefas *T** e das tarefas t*, deve-se formular certa questão *Q*: “[...] como realizar tarefas t* (de maneira compreensível e justificada) de certo tipo de tarefas *T**? [...]” (Idem, p. 7, tradução nossa). A pedagogia das AER quando aplicada, ao ensino de matemática, requer uma infraestrutura didático-matemática adequada à metodologia que conduzirá as atividades de estudo e pesquisa dos objetos matemáticos escolares. Na compreensão de Chevallard (2009c, p. 8, tradução nossa):

> [...] uma pedagogia das AER, em matemática, pede uma infraestrutura didático-matemática colocada a serviço da didática e que evidencie as razões de ser das noções matemáticas de ângulos, de retas paralelas, de retas secantes, de semirretas, de segmentos de retas, de número decimal, do desenvolvimento de uma expressão algébrica, da redução de uma fração, etc.[...]

---

48 **Quais conexões entre aritmética e álgebra determinaram as minhas praxeologias durante a ampliação didática que desenvolvi para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental?** (PEREIRA, 2012, p. 14).

A infraestrutura didático-matemática, na pedagogia das AER (ou “das situações”) converge para o uso desse dispositivo didático na pedagogia do PER (CHEVALLARD, 2009b, 2009c). Porém, a gênese do PER começou com os “*Travaux Personnels Encadrés* (TPE)[49]” [Trabalhos Pessoais Orientados], conforme anuncia Chevallard (2009b)[50]. Nessa gênese, na qual há a conexão TPE com PER, entenda-se que a metodologia desse dispositivo didático agrega várias AER, ou seja, a investigação é motivada pela questão Q e pelos tipos de tarefas T, que norteiam as atividades de pesquisa da equipe X no estudo da questão Q e de suas derivadas: Q_0, Q_1, Q_2, …, Q_n. Em nossa pesquisa, a questão $\boldsymbol{Q}$ possui as auxiliares $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$.

Chevallard (2009b) acrescenta mais sobre a praxeologia do PER: “A noção de PER permite subordinar um conjunto mais ou menos desigual de práticas sociais de conhecimento: pesquisa científica, investigação policial ou jornalística, etc. [...]” (Ibidem, p. 2, tradução nossa). Ele explica que: “[...] em uma classe escolar, pode-se dizer, portanto, que haveria muitas vezes de forma irregular, mas às vezes profusa, o PER, o micro-PER, talvez até mesmo o nano-PER, mas mesmo assim, configura-se como PER! [...]” (CHEVALLARD, 2009e, p. 7, tradução nossa). Implícitas nas palavras de Chevallard (2009e) estão a mesogênese, cronogênese e topogênese da Transposição Didática (TD). Esses três elementos da TD são assim descritos por Chevallard (2009f, p. 2-5, tradução nossa):

> **Mesogênese**. Gênese do *milieu* didático, ou seja, do sistema de recursos utilizados no processo de construção praxeológica.
> (...)
> **Cronogênese**. Gênese do tempo didático, ou seja, do tempo de construção praxeológica.
> (...)
> **Topogênese**. Gênese dos equipamentos praxeológicos (e das relações institucionais associadas) de acordo com as posições do aluno e professor durante a construção praxeológica. Os topos (o lugar, em grego antigo), do estudante (respectivamente do professor) é aquela parte da posição do aluno (respectivamente do professor) que se refere às entidades praxeológica construídas ou em construção na classe.

Durante a execução de um PER, a mesogênese é a base estruturante para que isto ocorra de maneira satisfatória. A cronogênese serve de referência para definir o tipo de PER (macro-PER, micro-PER, nano-PER) e a topogênese situa os topos dos integrantes do sistema didático *S (X, Y, Q)*, especificamente, de uma classe [*X*, *Y*] (CHEVALLARD, 2009f). Dessa forma, tomamos por base as ideias expostas por Chevallard (2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e,

---

[49] Os TPE são atividades escolares obrigatórias, no sistema de ensino francês, principalmente, nos liceus (instituição de ensino médio e tecnológico) (CHEVALLARD, 2001).

[50] A noção do PER surgiu *fora da classe de matemática*, em conexão com a noção “institucional” de TPE, que se instala nas primeiras classes iniciais, no início de 2000. É ela que dará origem a uma *primeira generalização* imediata e essencial: a de PER *codisciplinar*, com predomínio, eventualmente, disciplinar ou bidisciplinar, etc., associado ao esquema herbatiano [...] (Idem, p. 2, tradução nossa).

2009f) para descrevermos, a seguir, as adaptações que fizemos para a efetiva realização de um PER (ou micro-PER) como processo de formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico.

4.2.1. A Metodologia do "*Parcours d'Ètude et de Recherche*" na Formação Continuada de Professores de Matemática

As adaptações que fizemos para aplicar a metodologia do PER, em um processo de formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico (Ensino Fundamental e Médio), no âmbito de uma Instituição de Ensino Superior (IES), interligam-se abordagens teóricas da TAD exibida neste e nos capítulos anteriores desta tese.

A temática desse PER, provem de um projeto de formação continuada para professores de matemática do Ensino Básico, articulado às atividades de pesquisa do "Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM) ". O PER norteou-se pelo título de "**Modelo Epistemológico Alternativo para o Ensino da Álgebra Básica Articulada à Aritmética**" e transcorreu no âmbito do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Nesse PER as obras $♥_{\mathfrak{D}}$ (Dissertação de Pereira (2012)) e $♥_{\mathfrak{E}}$(MEA de Pereira (2012) contido na obra $♥_{\mathfrak{D}}$) são as principais, mas há outras obras O_k de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994, 1999, 2009a), Carvalho e Pereira (2009), Farras et al. (2013) e Bostan (2010).

A obra $♥_{\mathfrak{D}}$ de Pereira (2012) exemplifica um modelo de PER, que entendemos ser isolado, porque o autor faz uma análise praxeológica, na forma de narrativa autobiográfica, para produzir essa obra. Nesse PER isolado, o autor elaborou um Modelo Epistemológico Alternativo (obra $♥_{\mathfrak{E}}$) para a Álgebra Escolar, mais especificamente, para o estudo e ensino de expressões algébricas polinomiais no Ensino Fundamental. Entretanto, as ideias postas nesse modelo epistemológico, permite-nos estendê-las as práticas docentes dos professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio. Essa extensão praxeológica nos levou assumir a metodologia da pedagogia da investigação, na qual temos como proposta um PER aberto (CHEVALLARD, 2009b, 2009c; ANDRADE, 2012), adaptado para um percurso de formação continuada de professores de Matemática do Ensino Básico. Essa formação caracteriza-se por ser um estudo complementar de aperfeiçoamento de práticas docentes para o ensino da Álgebra Escolar. O PER que propomos, configura-se como o encaminhamento metodológico fundamental para alcançarmos os objetivos traçados para responder a nossa questão principal $\boldsymbol{Q}$ e, suas auxiliares Q_0, Q_1 e Q_2.

O desenvolvimento metodológico da pesquisa tem a questão principal $\boldsymbol{Q}$ posta em conveniência com a intenção de Y, mas sabemos que os integrantes de X formularam outras questões durante as sessões do PER, principalmente, intermediadas pelo estudo das obras $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$ e $\heartsuit_{\mathfrak{E}}$ de Pereira (2012). Essas outras questões formuladas por algum integrante x ($x \in X$) compõe um sistema didático quaternário, que denotamos por $S_k(x;\ Y;\ \mathcal{Q}_x;\ \mathcal{P}_k)$, no qual $\mathcal{P}_k$ são as praxeologias (ANDRADE, 2012) que motivaram x formular as questões $\mathcal{Q}_x$. As praxeologias $\mathcal{P}_k$ estão no equipamento praxeológico objetivado dos professores de matemática que participaram do PER. Da análise das praxeologias P_k poderemos identificar os elementos que convergem para nossas hipóteses de tese e, também, coletar materiais para a construção da resposta esperada $R^{\heartsuit}$. No capítulo seguinte temos mais compreensões sobre a nossa praxeologia de pesquisa, mas centrada na execução do PER adaptado à formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico (Ensino Fundamental e Médio).

V – DESCRIÇÃO PRAXEOLÓGICA DAS SESSÕES DO "*PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE* – PER"

Neste capítulo expomos as adaptações que fizemos para aplicar a metodologia do PER, em um processo de formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico (Ensino Fundamental e Médio), interligado as pesquisas a nível doutoral do "Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM)", do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA).

O PER que desenvolvemos possui 11 (onze) sessões com duração média de 1 (uma hora) e 40 (quarenta) minutos cada uma. Todas as sessões foram filmadas e gravadas, que, posteriormente, passaram por uma formatação acústica e transcrições parciais dos melhores áudios. As sessões seguiram um planejamento prévio para os dias de Sábado, mas ajustável conforme ocorressem imprevistos e interrupções no calendário institucional. O PER seguiu um plano de formação continuada norteada pelos recursos materiais disponíveis e acessíveis pela classe [X, Y] (X = professores de matemática, Y = diretores de estudos), classe que integra o sistema didático principal $S(X; Y; Q)$ (CHEVALLARD, 2009e). A topogênese nesse PER esteve associada aos topos[51] dos professores em formação e o topo do professor formador (diretor de estudo ocupante da posição principal no processo de formação). A temática desse PER atrelou-se ao primeiro módulo de um projeto de formação continuada para professores de matemática do Ensino Básico, módulo intitulado de "**Modelo Epistemológico Alternativo para o Ensino da Álgebra Básica Articulada à Aritmética**". Além disso, o produto final desse PER converge às intencionalidades dos componentes x (doutorando) e y (orientador), do sistema didático $S(x; y; ♥_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$.

As sessões do PER foram modeladas em conformidade com os sistemas didáticos $S(X; Y; Q)$, $S_0(X; Y; Q_0)$, $S_1(X; Y; Q_1)$, $S_2(X; Y; Q_2)$ e $\mathcal{S}(X; Y; \mathcal{Q}_x)$. Entenda-se que os sistemas didáticos S_0, S_1 e S_2 são auxiliares de $S(X; Y; Q)$, e todos eles estão subordinados ao sistema didático $S(x; y; ♥_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$. O sistema didático $\mathcal{S}$ e seus auxiliares nortearam as 11 sessões do PER, que estão descritas a seguir.

---

51 Relações institucionais existentes no equipamento praxeológico desses professores, provenientes de sua formação inicial e de suas práticas docentes.

5.1. Descrição das Sessões do "*Parcours d'Ètude et de Recherche* (PER)"

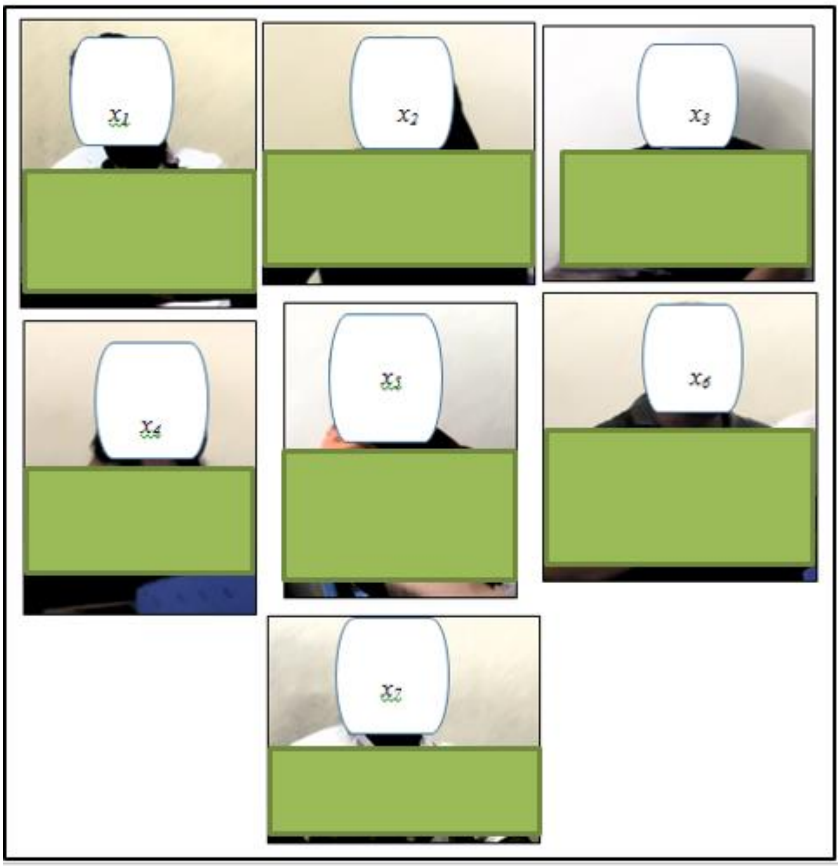
Conforme anunciamos anteriormente, o PER que adaptamos para um processo de formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico, constituiu-se de 11 sessões e estiveram sujeitas ao nosso esquema herbatiano desenvolvido [(*S(X; Y; Q)*➦ { $R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, R_3^\Diamond, ..., R_n^\Diamond$, ♥𝔇, ♥𝔈, O_{n+1}, ..., O_m }] ➥ $R^♥$. Por ser um elemento tecnológico, o nosso esquema herbatiano incorpora o sistema didático $\mathcal{S}(X;\ Y;\ \mathcal{Q}_x)$ e estabelece a dialética com o esquema herbatiano compactado ($\mathcal{S}(X;\ Y; \mathcal{Q}_x)$➦*M)* ➥ $R_x^\Diamond$ (CHEVALLARD, 2009b). O *milieu M* pode possuir as repostas $R_x = \{R_1, R_2, R_3, ..., R_n\}$ para $\mathcal{Q}_x$, de tal forma, que elementos de *X* ($x \in X$) podem autenticar algumas dessas repostas, criando $R_x^\Diamond = \{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, R_3^\Diamond, ..., R_n^\Diamond\}$. A validação das respostas $R_x^\Diamond$ pelo principal diretor de estudo $\boldsymbol{y_1}$ (autor desta tese), de $Y = \{\boldsymbol{y_1}, y_2, y_3, y_4\}$, está subordinada ao pesquisador em didática da matemática ζ (diretor de tese de $\boldsymbol{y_1}$) (CHEVALLARD; ARTAUD, 2013-2914b). Os elementos y_2, y_3 e y_4 são os diretores de estudos que auxiliaram $\boldsymbol{y_1}$ na filmagem e gravação dos áudios das onze sessões do "*Parcours d'Ètude et de Recherche* (PER)".

A posição ocupada por ζ, nesta pesquisa e no GEDIM, redimensiona o sistema didático principal *S(X; Y; Q)*, tornando-o quaternário: *S(X; Y; ζ; Q)*. Essa nova modelização de *S* alcança o sistema didático $\mathcal{S}$, ou seja, passa a ser $\mathcal{S}(X;\ Y;\ \zeta;\ \mathcal{Q}_x)$. Consequentemente, a tecnologia do nosso esquema herbatiano sofre outra alteração modelar: [(*S(X; Y; ζ; Q)*➦ { $R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, R_3^\Diamond, ..., R_n^\Diamond$, ♥𝔇, ♥𝔈, O_{n+1}, ..., *Om*}] ➥ $R^♥$. De igual forma ocorre para $\mathcal{S}$: ($\mathcal{S}(X;\ Y;\ \zeta;\ \mathcal{Q}_x)$➦*M)* ➥ $R_x^\Diamond$. Inevitavelmente, o sistema didático *S*(*x*; *y*; ♥ꞇ ⇄ ***Q***) tornou-se equivalente a *S*(y_1; ζ; ♥ꞇ ⇄ ***Q***) durante as sessões do PER. A participação dos elementos de *X* se deu de forma espontânea por meio de carta convite.

5.1.1. Primeira Sessão: 13-09-2014

A primeira sessão do PER teve duração de 1(uma) hora e 52 (cinquenta e dois) minutos. Os trinta minutos iniciais destinaram-se a apresentação do esboço planejado para o processo de formação continuada, ou seja, que a formação ocorreria nos dias de Sábado, programada para 11 sessões, cada uma com duração máxima de 3 (três), com início às 9 horas. Na sequência ocorreu a apresentação do pesquisador em didática da matemática ζ e dos diretores de estudo y_1, y_2, y_3 e y_4. Em seguida, os professores de matemática do Ensino Básico (conjunto *X*) que se fizeram presente nesta primeira sessão se identificaram pelo primeiro nome. Para esta primeira sessão, o sistema didático auxiliar de $\mathcal{S}$ está denotado por $\mathcal{S}_1(X_1; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$. A simbologia $\mathcal{S}_1$ refere-se ao primeiro sistema didático auxiliar de $\mathcal{S}$ e X_1 ($X_1 \subset X$)[52] o primeiro subconjunto de professores de matemática do Ensino Básico (Ensino Fundamental e Médio). Nessa primeira sessão X_1 possuía 7 (sete) professores matemática do Ensino Básico (Figura 29), denotados por x_n (n = 1, 2, 3, ..., 7), ou seja, $X_1 = (\{x_1; x_2; x_3; ...; x_7\}$.

Figura 29 – Subconjunto X_1 de professores



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Após as apresentações e explicações sobre o desenvolvimento do PER, iniciamos processo de formação continuada. A obra O_1 ($O_1 \in O_k$) – artigo – que deu início a formação foi a de Chevallard (1989), intitulada "*LE PASSAGE DE L'ARITHMETIQUE A L'ALGEBRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE - Deuxieme Partie - Perspectives Curriculaires: la notion de modelisation*" [A TRANSIÇÃO DO ARTIMÉTICO PARA O ALGÉBRICO NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO COLÉGIO – Segunda Parte – Perspectivas Curriculares: a noção de modelização]. Dessa obra traduzimos apenas os

[52] X_1 está contido em X.

fragmentos que julgamos pertinentes para iniciarmos um debate preliminar sobre o currículo de Aritmética e Álgebra no sistema de ensino francês e suas confluências no cenário do sistema de ensino brasileiro e nas práticas docentes dos elementos de X_1. Para motivar as discussões na primeira sessão, o diretor de estudo y_1 situou de forma sintética a abordagem da obra O_1 de Chevallard (1989), principalmente, em relação ao Movimento da Matemática Moderna, ocorrida no final da década de 1960, na França. Além disso, o diretor de estudo y_1, comentou que a extensão das ideias do Movimento da Matemática Moderna alcançou com mais intensidade o Brasil, na década de 1970. Ele citou Euclides Roxo como um dos principais difusores dessas ideias.

A sessão avançou com o estudo dos fragmentos traduzidos do artigo de Chevallard (1989): "*Un problème d'ingénierie curriculaire*" (p. 49) [Um problema de engenharia curricular] e "*CALCUL ALGEBRIQUE ET SYSTEMES DE NOMBRES*" (p. 49-52) [Cálculo Algébrico e Sistemas de Números] (**APÊNDICE A**). A leitura do primeiro fragmento motivou o surgimento da questão de estudo q_1: É possível definir e atingir um estado do sistema de ensino que determine um currículo oficial mais apropriado para as tarefas as quais o quadro algébrico será usado, principalmente, no ensino básico?

A questão q_1 foi adaptada a partir de uma problemática indicada por Chevallard (1989) (**APÊNDICE A)**. Nessa obra Chevallard dá continuidade às discussões da obra de 1984 sobre a transição do aritmético para o algébrico, em termos de escola elementar. A extensão de q_1 veio dos questionamentos dos professores em formação, os quais originaram um conjunto de questões $Q_{[1,x]}$[53] $= \{Q_{[1,1]}, Q_{[1,2]}, Q_{[1,3]},.., Q_{[1,n]}\}$, associado aos integrantes do subconjunto X_1. A questão q_1 possui certa complexidade, porque envolve uma das problemáticas do currículo escolar de matemática e o fenômeno transpositivo, principalmente, no bloco $[T, \tau]$ da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD; 1994b, 1997, 1999, 2009c). Esta questão permitiu aos diretores de estudo abertura para um debate inicial sobre **modelo epistemológico**, **álgebra escolar**, **equipamento praxeológico** e **escola elementar**. Algumas das questões $Q_{[1, x]}$ constam no Quadro 9, assim como, algumas respostas $R_{[1, x]}$. As questões e as respostas são desdobramentos do estudo do **Apêndice A** e das discussões provocadas pela **questão q_1**. As questões $Q_{[1, x]}$ e as repostas $R_{[1, x]}$ são as primeiras objetivações do equipamento praxeológico dos professores de matemática x_n do conjunto X, bem como, as primeiras ostensividades de traços de suas memórias didáticas.

[53] $Q_{[1, x]} \mapsto$ indica questão formulada por algum professor $x \in X_1$ na primeira sessão.

Quadro 9 – Algumas questões $Q_{[1,x]}$ e respostas $R_{[1,x]}$ originadas na primeira sessão do PER

Sujeitos x_n	Questões $Q_{[1,x]}$	Respostas $R_{[1,x]}$
x_1	1_ *Esse* ***x*** *é um número qualquer?*	1_ *É um número qualquer. Imagine que ele pode ser qualquer número. Cem, por exemplo. Você pode substituir ele por 100.*
x_5	1_ *Então, é possível definir?* 2_ *Atingir?* (Em referência a questão q_1)	1_ *É.* 2_*Eu ainda estou buscando isso, porque é muito difícil você ter um tempo para tentar atingir isso, você é cobrado na escola de várias formas [...].*
x_6	1_ *Então, quando se faz o currículo? Como se faz esse currículo?* 2_ *Temos que fazer o diferencial?* 3_ *[...] o que nós queremos ensinar, passar para o aluno?* 4_ *[...] de que forma?*	1_*Já tem nas Secretarias de Educação e não são chamados os profissionais de Matemática [...].* 2_*Temos. Estou aqui para isso, para buscar coisas novas [...].* 3_*O que está ali no currículo.* 4_*Não há, não tem. Não tem aquela preparação de você, no final do ano, verificar o conteúdo que você vai administrar. Não existe. Já vem no livro. [...]. Você tem que seguir pelo livro [...].*
x_4	1_*Mas como é que eu vou reconstruir aquele objeto, o caminho dele na sociedade e no currículo?*	1_*Tem caminhos, estratégias, vontade de mudança de fazer [...]. Vamos fazer por etapas. Por blocos: Geometria, Álgebra, Aritmética [...].*
x_7	1_ *Haveria algum problema, por exemplo, se nós tirássemos os complexos do conteúdo dos alunos?*	1_*Já que aqui na universidade a gente vê isso de uma forma um pouco mais aprofundada [...].*

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

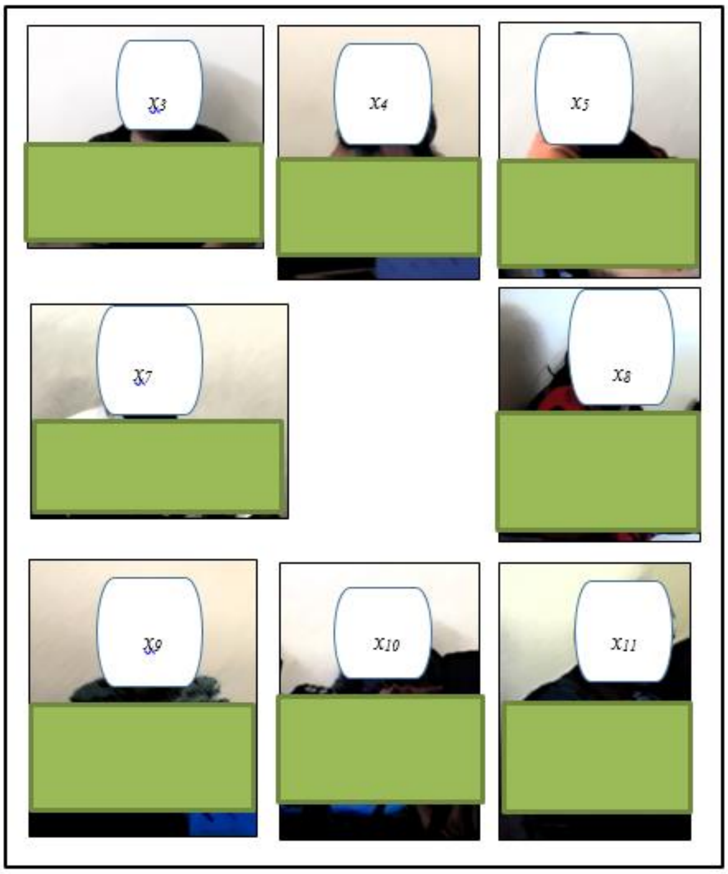
As falas registradas no Quadro 9 deixam transparecer alguns aspectos pessoais e institucionais dos professores x_n com o currículo da matemática escolar. Suas falas externalizam características da memória de alto nível, pois mostram que tem consciência da problemática de se discutir um currículo mais adequado para a matemática escolar.

Os estudos da primeira sessão prosseguiram na segunda, ainda centrado no fragmento traduzido do artigo de Chevallard (1989).

5.1.2. Segunda Sessão: 20-09-2014

A segunda sessão do PER prosseguiu os estudos da primeira. Entretanto, o sistema didático $\mathcal{S}$ funcionou sob a modelização do sistema didático auxiliar $\mathcal{S}_2(X_2; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$. Temos no $\mathcal{S}_2$ o segundo subconjunto de X, ou seja, $X_2 \subset X$ e $X_2 \supset X_1$ (X_2 contém X_1). Em X_2, os x_n são acrescidos de mais quatro professores de matemática do Ensino Básico: $X_2 = \{x_1, x_2, ..., x_{11}\}$. Essa nova configuração do sistema didático $\mathcal{S}$ não significou maior participação nos estudos da segunda sessão, os professores x_1, x_2 e x_6 se ausentaram por motivo de trabalho. A Figura 30 exibe os professores que participaram da segunda sessão do PER.

Figura 30 – Subconjunto X_2 de professores



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

A retomada dos estudos pelo diretor de estudo y_1, auxiliado pelo diretor de estudo y_2, seguiu o tempo didático de estudo de 1 (uma) hora e 32 (trinta e dois) minutos. De certa forma, os professores x_3, x_4, x_5 e x_7 já possuíam em seus **topos**[54] as ideias abordadas da primeira sessão. A continuidade dessas ideias voltou-se para o segundo fragmento traduzido da obra de Chevallard (1989), no qual ele trata do "*CALCUL ALGEBRIQUE ET SYSTEMES DE NOMBRES*" [Cálculo Algébrico e Sistemas de Números] (**APÊNDICE A**), ou seja, dos sistemas de números denotados por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ – no Brasil são denominados de conjuntos numéricos, exceto o conjunto $\mathbb{D}$ (conjunto intermediário entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$) que se incorpora em $\mathbb{Q}$. Para motivar a objetivação da memória didática dos professores formulou-se a questão de estudo q_2: Quais as razões de se ensinar esses sistemas de números na escola? Essa questão permitiu aos diretores de estudo conhecerem as compreensões e práticas que os professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio, em formação continuada, possuíam sobre tais conjuntos numéricos e, também, como eles os mobilizam no ensino da Álgebra Escolar, nas diferentes instituições I (escola pública, escola particular), onde esses professores ocupam diferentes posições e exercem suas atividades docentes (CHEVALLARD, 2009c). Os desdobramentos da segunda sessão resultaram nas formulações de questões $Q_{[2,\,x]}$[55] e repostas $R_{[2,\,x]}$ para essas questões. No Quadro 10 exibimos algumas dessas questões e respostas.

Quadro 10 – Algumas questões $Q_{[2,\,x]}$ e respostas $R_{[2,\,x]}$ originadas na segunda sessão do PER

Sujeitos x_n	Questões $Q_{[2,\,x]}$	Respostas $R_{[2,\,x]}$
x_5	①_ *[...] será que esses números que eles chamam de fracionários na verdade não é um número decimal? Será que é aí que eu encontro a dízima?* (Em referência ao conjunto $\mathbb{D}$)	①_ *Porque a dízima é o fim do sistema numérico, que eu tenho que explicar, assim, rapidamente, sempre está em uma ou duas folhas do livro, e eu tenho que falar do livro, quando chega no número de exercício, dependendo do que aquele livro contém eu tenho que falar de todos eles [...]*
x_4	*_Quais são as razões de ensinar esses sistemas de números na escola?*	①*_A gente ensina porque, eu pelo menos vejo assim no livro, eu ensino porque está na grade curricular, tem que acompanhar [...].*

[54] Relações estabelecidas nos equipamentos praxeológico desses professores a partir do estudo inicial do Apêndice A.

[55] *[2, x]* ⟶ significa formuladas na segunda sessão pelos elementos *x*.

x_3	*①_Por que se aplica o sistema decimal na escola, como no Brasil de um modo geral?* *②_Qual era a diferença que eu tinha da base 10 para a base 4, base 5, base 8, e as atividades propostas de agrupamento de números, agrupamento de modelo de prática indicada nos materiais dos jogos, material do lado dos softwares, não é?*	① e *②_O número em si tem posição [...]. Tudo gera o ensino no âmbito escolar, acho que tem muita coisa trocada aí, acho que a gente não conhece tudo [...].*
x_{10}	*①_ [...] o que o aluno vai apender da matemática se ele não tem ideia de sistemas de números?*	*①_Surgiu da representação, mas disso evoluiu para as outras fontes, as aplicações. Então eu acho que a importância disso tudo é a essência. É a essência da matemática, o porquê aprender, onde aplicar isso [...].*
x_8	*①_ [...]quais as razões de ensinar sistemas de números?*	*①_Bom, no meu entender, quando eu coloco essa parte de sistemas de números para o meu aluno, eu tento mostrar o seguinte, eu quero que ele entenda a matemática mais a frente [...]. Então quando eu tenho um aluno de 5ª, um aluno de 6ª, um aluno de 7ª, eu tenho que deixar isso bem claro para meu aluno de forma teórica e, também, acima de tudo na prática [...].*

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

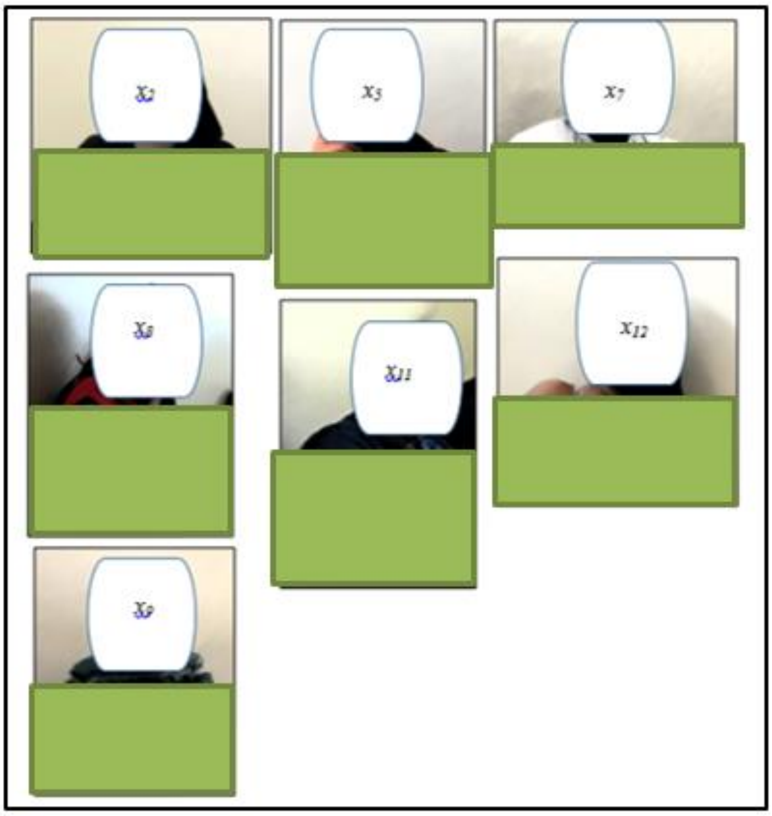
Todas as questões $Q_{[2,\, x]}$ se originaram das compreensões descritas no Apêndice A e motivadas pela questão de estudo q_2. Notamos nas falas dos professores externalizações das memórias praxeológicas de alto nível, que mostram dinâmicas cognitivas associadas as praxeologias que estes professores guardam em seus equipamentos praxeológico, subordinadas as suas práticas ostensivas com sistemas de numeração.

Nos vinte minutos finais da segunda sessão, o diretor de estudo y_1, exibiu um fragmento da obra de Bostan (2010), contendo duas tarefas t, uma de multiplicação polinomial e a outra de multiplicação de números inteiros representados na potência de base dez. As duas tarefas t estão assim anunciadas: "Polinômios: [...] multiplicar $3x^2 + 2x + 1$ e $6x^2 + 5x + 4$ em $\mathbb{Z}$ [x]" e "Números Inteiros: [...] multiplicar 321 e 654 na base 10" (BOSTAN, 2010, p. 93, tradução nossa). Essas duas tarefas possibilitaram a formulação da questão de estudo $\mathcal{Q}_3$ interligada ao bloco praxeológico $[T/\tau/\theta/\Theta]$ da TAD. A questão de estudo $\mathcal{Q}_3$ está assim anunciada: Quais semelhanças operatórias há entre a multiplicação polinomial na variável x em $\mathbb{Z}[x]$ e na base 10 nos números inteiros? O estudo dessa questão ficou estabelecido, no contrato didático, que ficaria sob a responsabilidade dos professores do conjunto X e que ela estaria conectada ao estudo das obras $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$ e $\heartsuit_{\mathfrak{E}}$ de Pereira (2012) e, também, motivaria o estudo da obra O_k da terceira sessão, a qual descrevemos a seguir.

5.1.3. Terceira Sessão: 27-09-2014

A terceira sessão possui o sistema didático auxiliar $\mathcal{S}_3(X_3; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$. Esse sistema didático possui o subconjunto de professores X_3 ($X_3 \subset X$). O subconjunto X_3 completa os elementos x_n (n = 1, 2, 3, ..., 12) do conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}\}$. Nos estudos da terceira sessão se ausentaram, por compromissos profissionais e doença, os professores x_1, x_3, x_4, x_6 *e* x_{10}. A Figura 31, mostra os elementos de X_3 que participaram dos estudos da terceira sessão. A sessão foi conduzida por $\boldsymbol{y_1}$ e auxiliado por y_2, y_3 e y_4. Esta sessão durou 01 (uma) hora e 52 (cinquenta e dois) minutos.

Figura 31 – Subconjunto X_3 de professores



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

O terceiro sistema didático auxiliar $\mathcal{S}_3$, “dialoga” com a segunda sessão do PER, pela questão de estudo q_3, possuidora de uma problemática docente, situada nos blocos do saber-fazer $[T/\tau]$ e do saber $[\theta/\Theta]$. No bloco do saber-fazer existem práticas que escapam das compreensões dos professores x_n de $X \in \mathcal{S}$. Outro aspecto de q_3 situa-se no bloco saber, principalmente, em relação a teoria Θ de $\mathbb{Z}[x]$ (polinômios do anel dos inteiros). Conforme anunciamos, anteriormente, o contrato pedagógico relativo à questão de estudo q_3, estabeleceu que essa questão não seria debatida pontualmente, mas integrada ao estudo das obras O_k, entre estas inclua-se o artigo de Farras, Bosch e Gascón (2013), intitulado “*Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática*[56]”. A escolha e o estudo dessa obra seguiram a mesogênese do PER, por entendermos que ela enriqueceria o *milieu M* do esquema herbatiano $(\mathcal{S}(X; Y; \zeta; Q_x) \rightarrow M) \hookrightarrow R_x^{\lozenge}$.

Para iniciar o estudo do artigo de Farras, Bosch e Gascón (2013), o diretor de estudo y_1, provocou os professores de matemática de X_3 se posicionarem quanto aos questionamentos $q[y_1]_1$: “[...] *ser professor e docente são a mesma coisa? Tem diferença do eu professor e do eu docente?* [...]” e $q[y_1]_2$: “ [...] *A ideia de ser professor de uma disciplina específica, ela acontece por uma escolha ou às vezes por uma situação?* ”. As respostas R_x surgidas para esses questionamentos revelam alguns traços da memória didática dos componentes de X, assim como, aspectos da objetivação do universo cognitivo ($UC(x)$) de professores de matemático do Ensino Básico (Ensino Fundamental e Médio). Temos no Quadro 11, algumas respostas R_x.

Quadro 11 – Respostas R_x para os questionamentos $q[y_1]_1$ e $q[y_1]_2$ da terceira sessão do PER

Sujeitos x_n	Respostas R_x
x_5	*_Olha, eu vou falar minha visão enquanto professor [...]. Uma coisa que eu aprendi aqui, que muitas das situações, enquanto professor, estou tentando repassar para os alunos, as respostas não estão ali. Elas só se encontram aqui. E eu imagino então que a docência vai fazer com que essas respostas aconteçam e eu posso dar uma resposta do que seria a visão do que eu tenho enquanto professor. Por enquanto eu estou vivendo como professor, fazendo apenas algumas coisas repetitivas e que são apenas...Eu só acho que faço uso só das técnicas. Eu só estou conseguindo reproduzir as técnicas, não estou obtendo a tecnologia para estar definido essa resposta. Então imagino que ser professor é isso. E a docência faz um complemento daquilo que está faltando para dar esta resposta [...].*
x_8	*_No meu caso, eu escolhi ser professora porque eu queria ser professora e, apesar do tempinho que eu já estou lecionando, se eu fosse digamos assim, prestar... dizer assim: volta para o início e você começaria tudo de novo? A*

[56] As três dimensões do problema didático da modelização matemática

	questão é essa. Como eu escolhi a profissão que eu gosto, uma das profissões que eu gosto como de outras, eu faria tudo de novo. Porque eu gosto de ministrar aula, eu gosto de passar informação, eu gosto de passar conhecimento, eu gosto de me qualificar [...]. Então, para mim, foi escolha mesmo, por gostar da profissão [...].
x_{12}	*_ Eu acho que tem casos que foi a situação que levou a pessoa a trabalhar com determinada disciplina e tem situações que a pessoa escolheu. Nem sempre a pessoa pode escolher. Às vezes a situação é mais forte do que a motivação para escolher, do que ela prefere, no que ela sente melhor [...].*
x_7	*_ Eu penso assim, é uma escolha e situação. Se essa escolha, for uma escolha que não vem agregada com uma convicção, eu não estou convicto do que eu quero, ela vai gerar uma frustração lá na frente. Eu conheço várias pessoas, ex-alunos que escolheram fazer determinado curso, mas no decorrer do curso mudaram. Fizeram vestibular novamente e tiveram que mudar, porque fizeram uma escolha e não tinham convicção dessa escolha [...]. A diferença entre o professor e o docente. Se ele for um bom profissional, além dele ser um professor, ele vai professar, claro, a profissão que ele aprendeu, ele vai poder se qualificar. Porque eu penso assim, que docente é um grau um pouco mais forte que o nível profissional do professor. Aquele cara que se qualifica mais, estuda mais, ele não fica com aquela praxeologia local de instrutor, pontual. Procura outros saberes [...].*
x_2	*_ Eu acho que a diferença talvez seja, acho que da pessoa gostar e tentar um aprimoramento e seguir, porque na minha situação também eu gostava de estudar Matemática, mas não de dar aula, eu não queria, não gostava. Quando eu entrei na sala a primeira vez eu comecei a gostar de dar aula. Gostei de passar o conhecimento que eu tinha. Então eu acho que passar para a docência talvez pudesse... essa busca de ir atrás de novos conhecimentos, para melhorar, não sei.*
x_{11}	*_ [...]. Para mim a Matemática foi uma escolha no momento, para eu ser professor, eu dizia que não queria ser professor. Mas, no momento assim eu peguei e fui, fiz Matemática, me formei em licenciatura, pela UFPA. Já fiz uma especialização em Educação Matemática na UEPA e eu amo o que eu faço. Eu pensei que não fosse gostar de ser professor, pelo contrário, eu amo o que eu faço [...]eu acho assim que a docência e professor é algo muito próximo, muito próximo. A diferença é o grau de escolaridade. Mas para que seja um docente ou um professor, vamos supor, no nível maior, tem que ter amor por aquilo que faz [...].*

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

As respostas dos professores exibidas no Quadro 11, dizem respeito as suas escolhas profissionais e formação inicial para se tornarem professores de matemática do Ensino Básico. As verbalizações transitam de nível protomemorial (verbalizações emotivas, fala coloquial) ao nível de memória de alto nível (reflexões sobre o que é ser professor de matemática).

Após as falas dos professores do Quadro 11, retomamos o estudo do artigo de Farras, Bosch e Gascón (2013), visto que o diretor de estudo y_1 enviou, via *e-mail*, o artigo para que os professores o lessem e durante a sessão do PER expusessem suas compreensões sobre as ideias que os autores defendem nesse artigo. De certa forma, os questionamentos inicias de y_1 e as falas dos x_n já estavam em conexão com o estudo dessa obra. Para estimular a manifestação oral dos professores x_n presentes na terceira sessão do PER, o diretor de estudo y_1 expôs de forma breve como a temática da obra de Farras, Bosch e Gascón (2013), estava nas práticas docentes desses professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio. Dessa breve exposição oral, y_1 manifestou o questionamento $q[y_1]_3$: "[...]. *Quando eu vou iniciar o meu aluno nos primeiros ensinos da álgebra, qual é a minha preocupação?* [...]". Estimulados por esse questionamento os professores manifestaram suas respostas R_x, conforme constam no Quadro 12. Esse questionamento teve a intencionalidade de estimular as falas dos professores de matemática x_n, promovendo as objetivações de suas memórias didáticas e de seus equipamentos praxeológicos.

Quadro 12 – Respostas R_x para o questionamento $q[y_1]_3$ de y_1

Sujeitos x_n	Respostas R_x
x_{11}	*_ Então o que eu tento fazer, o que eu faço na verdade, para que eles comecem a compreender, é que todos nós que já demos aula no fundamental, vai ensinar o polinômio. O aluno pergunta se é português. E vamos supor, pego a variável, aquela incógnita, na verdade tento passar para eles como se fosse representando uma quantidade qualquer, por um exemplo, uma laranja, uma maçã. Porque aí eles vão começar a entender que se eu for somar laranja, eu não posso dizer que eu vou somar laranja com maçã. Vai dar frutos. Daí então, eu faço isso para eles começarem a entender que as letras, elas representam algo diferente. Então não pode ter aquela soma entre coisas diferentes. Então eu fico nesse dilema. Mas pelo menos ajuda eles a compreenderem melhor um pouquinho, pelo menos eu vejo, eles começam a compreender. Aí depois eu já vou explicando "olha, isso é uma incógnita, pode representar números também, pode representar com outra coisa" e é assim que eu vou caminhando. Eu fico com que eles tentando aprender a sentir a soma, subtração, multiplicação, divisão. E eu, inicial mesmo assim, quando começo a álgebra que eles aprendam as operações. São as operações básicas. E se ele souber as operações, daí em diante vão começar a fluir normalmente no conteúdo.*
x_7	*_ Eu penso que a gente entende que eles já venham da 1ª a 4ª série com essa questão das quatro operações básicas, mas eu tive uma experiência no ano passado, na verdade nível fundamental, sempre fui do médio. Eu tive a experiência de trabalhar com a 5ª série. E eu percebi que a grande maioria, acho que você tem 70%, 80% dos alunos, não dominam as quatro operações. Então na 5ª série, da 5ª série em diante, a gente tem que reforçar esse trabalho feito de 1ª a 4ª. Então a primeira preocupação, dentro da sua pergunta, é fazer eles voltarem sim às operações básicas. Se eles conseguirem fazer isso, se eu conseguir, aliás, desenvolver isso neles, a minha preocupação é que eles dominem as variáveis. O que significam as variáveis para poder trabalhar uma equação em frente. Então é carregar*

	essa preocupação nas séries iniciais, fazer com que eles dominem as operações básicas e depois trabalhar as variáveis, para que a gente possa somar variáveis diferentes, de repente eu posso colocar cada fruta como uma variável diferente. Então quantas frutas eu tenho? Essa soma, variáveis diferentes, ela acontece no contexto.
x_2	*_ Eu percebo que, além das dificuldades nas operações básicas, eles têm dificuldade também, no 6º ano, nas propriedades. No elemento neutro, que é o que a gente vai utilizar muito no 7º ano que é a mudança de operação, que eles confundem com a mudança de sinal. Eu acho que aí dá uma embaralhada no saber, no raciocínio deles. Também acho que essas propriedades, eles ficam muito perdido aí. Acho que nem tanto nas operações básicas, mas nesse processo comutativo, associativo. Eles ficam perdidos.*
x_8	*_ Eu acho assim, vou falar da minha experiência. Para mim com uma turma, a grande dificuldade dos alunos hoje, para mim, na minha opinião, é o simples fato de chegar em casa e não exercitar. Aquela aula que tu dás, naquele exato momento, ele aprende, desenvolve, ele consegue entender, faz exercícios. Se você corrigir individualmente, a grande maioria faz do jeito que você ensinou. Só que quando ele chega na casa dele, ele não estuda. E aí no outro dia, ou melhor, nas outras aulas, a gente tem que repetir porque ele não estuda. A grande maioria, não estou dizendo que são todos, tem alguns que estudam em casa, tem a... Como eu posso dizer assim, a força da família, enfim. Aí com esse pessoal a gente não tem muita dificuldade. Agora a grande dificuldade maior é que a grande maioria chega em casa não estuda. Não é só matemática, é quase todas as disciplinas. Aí isso vira uma bola de neve, enfim. Aí fica uma coisa bem difícil para nós, professores, tentar "colocar" o resto dos conteúdos, que é muito extenso, na mente de cada um. Minha opinião é essa, mas a forma de ensinar digamos a matéria de polinômios. Eu acho uma forma de... quem está ensinando, em particular administrar em sala de aula. Eu particularmente consigo mostrar para o meu aluno que uma variável tem a ver com um determinado conteúdo específico, como cor, laranja, tipo de cor que ele tem para colocar, ele entende, ele começa a fazer, mas o grande problema para mim é esse: o aluno chega em casa com desinteresse [...].*
x_5	*_ [...]. Esse texto aí, eu tinha lido, logo no início e a gente tenta ensinar essas operações e define pelo menos, grande parte delas na nossa aula, até quando você transfere a quantidade de laranja para essa variável, isso é muito difícil. Mas o aluno ainda não tem essa noção, isso já era modelizar, preparando os alunos para essa modelização. Os livros didáticos têm uma única só vertente, já tem um modelo pronto no livro. E a construção fora da sala de aula é a outra vertente que a gente tem que buscar. Então devemos sempre buscar esses dois caminhos, buscar uma do livro e uma que a gente construiu. Esse princípio de construção se dá toda vez que eu vou falar em variável, vou falar em incógnita, algo dessa natureza. Então, eu tenho uma construção feita aí. Agora para a forma que a gente vai aplicar isso, a forma que a gente vai utilizar também, vai caber a cada um de nós, saber um pouco mais. É isso que eu estou buscando falo sempre, que estou conseguindo enxergar essas coisas aqui, porque nós fazermos algo dessa natureza, mas não temos essa justificativa para dar. A partir dessa leitura a gente consegue*

	visualizar isso. Você falou "eu troco minha variável por isso", essa palavra "variável" vai ser muito difícil para os 30 ou 40 que estiverem em sala de aula entenderem, mas se a gente conseguir esse processo de modelização, acho que isso aí é satisfatório. Eu penso dessa forma.

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

As respostas dos professores para o questionamento $q[y_1]_3$ expressa a objetivação memorialistas de seus equipamento praxeológico, surgem fragmentos da prática ostensiva que esses professores realizam para ensinar objetos da matemática escolar – citam a deficiência de aprendizagem das operações aritméticas e o uso de incógnitas ou variáveis como sendo problemática em suas práticas docentes. As verbalizações transcritas no Quadro 12 se confundem nos três tipos de memórias defendidas por Candau (2014) – protomemória, memória de alto nível e metamemória – mas, a memória prática ostensiva (MATHERON; SALIN, 2002) está bem evidente nas falas desses professores.

O estudo na sessão progrediu com mais ênfase, no conteúdo do artigo, após o diretor de estudo y_1 comentar sobre os problemas docentes[57] da modelização matemática (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013) tratados pelos autores e que figuram nas falas dos professores do Quadro 13. De certa forma, os questionamentos $q[y_1]_1$, $q[y_1]_2$ e $q[y_1]_3$, induziram a isso. Porém, para tornar mais intenso o estudo e as discussões, o diretor de estudo formulou o questionamento $q[y_1]_4$: "[...]. *Nós temos condições de fazer uma proposta, para a sala de aula, para iniciar nossos alunos na álgebra?* ". O desdobramento desse questionamento expomos no Quadro 13.

Quadro 13 – Respostas R_x para o questionamento $q[y_1]_4$ de y_1

Sujeitos x_n	Respostas R_x
x_9	*_Acho que um grande obstáculo aí nesse processo, acho que é baseado nessa ideia da própria organização do estudo que já está preestabelecido, principalmente se a gente tomar como referência que o livro didático, por exemplo, que já vem, na verdade, predeterminado a sequência didática que o professor deve coordenar isso nas suas aulas. Acho que o grande obstáculo mesmo, seria ver esse saber, o modo como está estabelecido, e, sobretudo, essas questões que o colega colocou ainda há pouco aí como variáveis, que é a predisposição do professor em construir determinado material ou uma aula que possibilite ao aluno ingressar no âmbito da álgebra. Porque um dos fatores determinantes seriam exatamente essas práticas que já estão estabelecidas, principalmente no contexto do livro didático, que acaba sendo tomado como referência do professor na construção das suas aulas.*

[57] P_0 (formulação inicial do problema didático: "pré-científica"); P_1, P_2 e P_3 (as três "dimensões" fundamentais do problema didático: *epistemológica, econômica e ecológica*) (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 2).

x_{12}	*_ A pouco, estava falando das dimensões, das principais ou a principal, talvez seja a dimensão epistemológica do objeto que se quer ensinar. Então, como eu posso propor algo novo, diferente, se eu continuo com a mesma noção do objeto? Se eu continuar com a mesma noção, não tem como propor nada diferente, a não ser que eu pare e vá reformular esse objeto, só que para isso eu teria que ir atrás e ver como aquele objeto... e aí eu volto naquela questão, por que ele é ensinado? Como que é ensinado dessa maneira, na escola, quem trouxe ele para a escola e aí eu vou ter que ir atrás disso para poder repensar a minha prática. Foi o que a gente falou da modelização, se eu vou repensar, se eu vou modelizar o conhecimento matemático, numa nova maneira, então, eu preciso pensar nas três dimensões, que a primeira delas é a epistemológica. Entendo dessa forma.*
x_5	*_ Eu acho que a gente tem que repensar no conteúdo do objeto, não é? Para essa situação aí. Eu acho, não sei se é.*
x_7	*_ Eu quero fazer um comentário assim, espero não estar errado, mas eu penso assim, vou falar da instituição, na qual eu me formei. A questão dada é que, a gente também não foi preparada para dar aula aos alunos mediante a esse processo[...] eu estudei análise em real, álgebra, álgebra I, álgebra II e aí vai. Conteúdos que eu não vou ensinar em sala, entre aspas, naquele nível do meu aluno, evidentemente que me formei um profissional, um professor, que tem um nível para chegar lá e entender aquele conteúdo [...]. Eu penso que essa mudança que a gente tem que fazer na nossa forma de ensinar, tem que partir inclusive da instituição, reformular o seu conteúdo, é um pensamento meu. Para que a gente sai daqui já refletindo, desde a academia, eu me formei com essa preocupação de não me limitar. Eu posso passar o que eu aprendi aqui, daqui em diante tem que começar a procurar outras práticas, outras maneiras de dar aula como o colega mencionou, é um pensamento meu.*
x_{11}	*_ [...]a gente não tem aquela preparação para mostrar para os alunos do fundamental e médio, nós não estamos preparados, não sei hoje, não faz tanto tempo que eu formei; eu em formei em 2008 [...]. Eu acho que esse tipo de assunto, a decomposição, a gente sabe, mas não ver com esses olhos, que poderia ser ensinado ao aluno para quebrar aquela mística em muitos assuntos. De um número a gente parte para uma expressão, envolvendo vários assuntos. Primeiro numericamente, depois, fração, número decimal [...]nós temos esse conhecimento, nós temos, agora para chegar numa turma que não sabe nada, fazer isso, eles vão dizer assim "esse cara é doido". Eles querem aquele domínio nas operações, uma relação numérica, sempre regrada a partir das operações, deve-se preparar bastante o aluno para isso.*

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

As respostas dos professores para o questionamento $q[y_1]_4$ revelam compreensões metamemórias bem acentuadas, inclusive relativas a formação acadêmica inicial – expressa na fala do professor x_7. Identificamos nas falas de todos cinco professores a preocupação de se pensar uma prática para se ensinar objetos da álgebra escolar.

A fala de x_{11} é um reflexo do que y_1 mostrou no quadro, nesta mesma sessão, a partir da decomposição do número 4689: 4689 = 4000 + 600 + 80 + 9 = 1000 (4 + 6/10 + 8/100 + 9/1000) = 1000 (4 + 0,6 + 0,08 + 0,009) = 1000 × 4,689. Parte dessa ideia foi anunciada na segunda sessão, mas nesta sessão ela ganhou um ingrediente a mais, principalmente, quando y_1 modelou uma expressão algébrica, tomando a variável $x = 10$: $4689 = 4000 + 600 + 80 + 9 = 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10 + 9 = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 9$. Com essa modelização, o conjunto X estava diante das primeiras ideias do MEA de Pereira (2012).

A sequência contínua do PER foi interrompida por dois sábados, devido motivos eleitorais (04/10/2014) e festejos culturais de grande amplitude no dia 11/10/2014. Entretanto o diretor de estudo y_1, estabeleceu um contrato didático de estudo à distância, os professores x_n receberiam, via *e-mail*, uma atividade prática para cumprirem até a retomada da formação presencial, no dia 18/10/2014.

5.1.4. Quarta Sessão: 18-10-2014

A quarta sessão do PER, configurou-se como uma retomada de estudos da terceira sessão. O sistema didático a partir da quarta sessão é o geral, ou seja, $\mathcal{S}(X; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$. O tempo didático dessa sessão durou 01 (uma) hora e 13 (treze) minutos. Por ser uma retomada de estudos, apenas os professores x_4, x_8 e x_9, compareceram. A sessão foi conduzida pelo diretor de estudo y_1, auxiliado pelos diretores y_2 e y_3. Conforme contrato pedagógico estabelecido na terceira sessão, os professores receberiam, via *e-mail*, a atividade que consta no Quadro 14.

Quadro 14 – Atividade para os professores x_n

- Elaborar um texto resolutivo e explicativo para as seguintes divisões polinomiais de A por B:

1) $A(x) = x^4 - x$ e $B(x) = 2x + 1$
2) $A(y) = y^4 + 1$ e $B(y) = y^2 - \sqrt{2}\,y + 1$
3) $A(z) = 3z^6 + z^4 + 5z^2 + 1$ e $B(z) = 3z^2 + z + 1$

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

O comando da atividade está em consonância com as questões auxiliares $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$ e $\boldsymbol{Q}_2$ de $\boldsymbol{Q}$ e objetivo geral da tese. Efetivamente, intencionamos que os professores x_n revelassem suas práticas para solucionar as divisões polinomiais. Entretanto, no início da quarta sessão estavam presentes só os professores x_4 e x_9, posteriormente, chegou o professor x_8. Devido a essa pouca presença dos elementos de X, exibimos no Quadro 15, "recortes" das falas dos professores x_4 e x_9, que revelam traços de suas memórias didáticas ostensivas.

Quadro 15 – Falas dos professores x_n sobre a atividade do Quadro 14

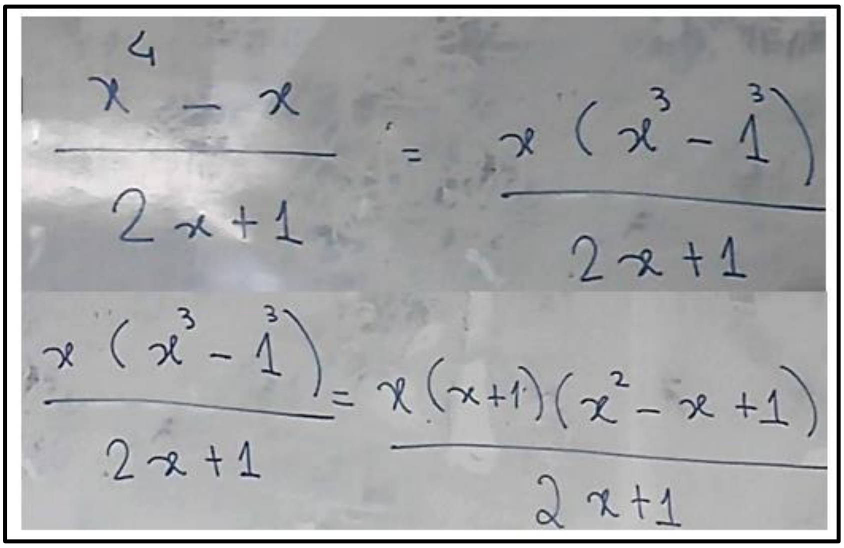
Sujeitos x_n	"Recortes" das falas dos sujeitos x_n
x_4	*_ [...] não tenho muita experiência com a sétima série nesses trabalhos [...] eu trabalho na verdade na EJA. Então quando eu trabalho na EJA, como é que eu desenvolvo isso aí? Eu falo do princípio da divisão dos números naturais. Da questão do dividendo, divisor, do quociente, até porque para justificar, quando a gente trabalha com polinômios, a questão por que o sinal é trocado. Porque quando é negativo, quando você passa para fazer a subtração ou operação com dividendo, porque troca de sinal. Então no primeiro momento eu trabalho com a divisão entre números naturais, todo passo a passo dessa divisão, as classes; como eu início as classes, no caso 123 dividido por 12, classe da centena, da dezena, da unidade, tudo eu trabalho aquela parte toda como se estivesse trabalhando a base na mesma divisão, para depois entrar com o polinômio. E aí, sempre na hora que eu vou trabalhar, eu sempre retomo a questão dos números naturais. Por exemplo, uma comparação entre as expressões algébricas e os números naturais. Nesse sentido, como eu faço a segunda questão, que achei bem interessante porque tem uma raiz de 2 e y. Então o que eu faço? Ao dividir lá nos números naturais, sempre a gente faz assim, vamos supor, 12 dividido por 3 vai dar quanto no quociente? Então, qual o número multiplicado por 3 se aproxima de 12 ou que seja igual a 12. Nesse sentido não dá. Eu não trabalho com polinômios dessa forma, fica um pouco complicado [...].*
x_9	*_ A exemplo, do que a colega colocou ali, geralmente trabalhar com divisões polinomiais, com as outras operações, às vezes, até que elas são bem mais aceitáveis, principalmente em nível de sétima série. Mas a divisão, o que eu observo? Inclusive, já havia até coibido em todos os colegas, que eles fazem as operações utilizando os polinômios, mas até um certo limite. Ou seja, tendo o divisor mais simples, então à medida que vai se estendendo, por exemplo, ao cubo, cubo da soma, cubo da diferença, eles já preferem evitar o processo. É justamente porque eles acabam até estabelecendo valores que o aluno não vai assimilar aquele processo. Então dentro dessas propostas aí que o colega propôs para gente, eu estava até conversando com ele ainda pouco, que são tarefas não tão simples, porque, na verdade, foge daquilo que o livro didático apresenta, daquilo que, às vezes, estamos até mesmo acostumados a operacionalizar. Ou seja, existem algumas situações aí que, em geral, o algoritmo que se recorre é o que ela colocou lá. Noção de dividendo, divisor, quociente e resto, na verdade, é o algoritmo do euclidiano. Então eu acho que o principal foco para essas operacionalidades, é esse algoritmo que, eu particularmente, acabo, às vezes, fazendo uso para explicar essas noções [...].*

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

A principal conclusão, dos professores x_4, x_8 e x_9, foi que esses exemplos de divisões polinomiais não estão nos livros didáticos de matemática do ensino básico e, dificilmente, estão nas práticas dos professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio.

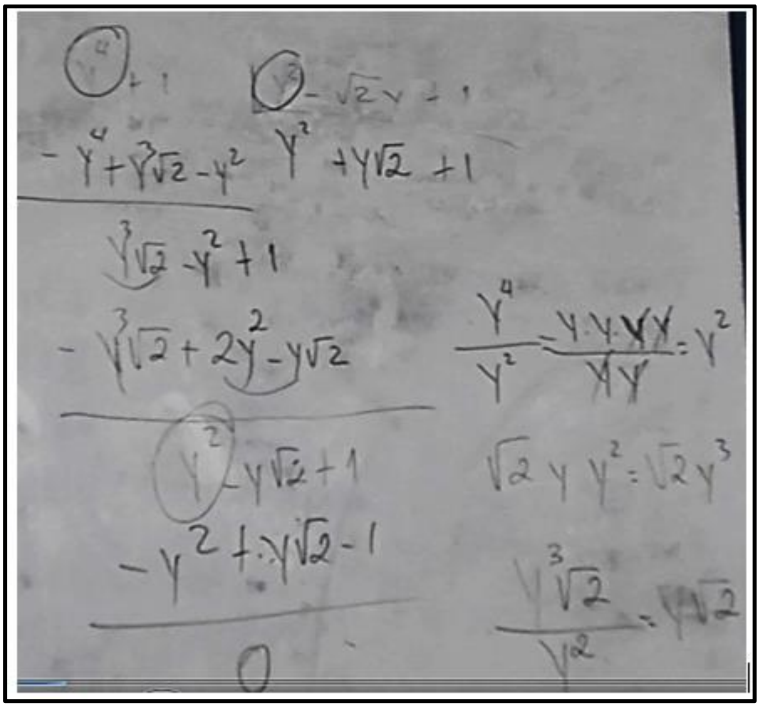
Temos nas Figuras 32 e 33, a maneira como os professores x_4 e x_9 resolveram os itens 1) e 2) da atividade proposta. Nessas duas figuras vemos as técnicas que os dois professores recorreram para lograr êxito na resolução da tarefa que cada um escolheu.

Figura 32 – Resolução do professor x_9 para o item **1)** da atividade



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Figura 33 – Resolução do professor x_4 para item **2)** da atividade



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Notemos que as práticas ostensivas dos dois professores diferem uma da outra (Figuras 32 e 33). O professor x_9 tentou solucionar a tarefa do item 1) pelo processo da simplificação de expressões algébricas, mas observou a impossibilidade ao aplicar essa técnica. O professor x_4 recorreu a técnica usual, aplicada no Ensino Fundamental, para resolver divisões polinomiais.

Diferente do professor x_9, o professor x_4 consorciou a simplificação de expressões algébrica com as ideias aritméticas do algoritmo euclidiano e assim teve êxito na resolução da tarefa do item 2). As implicações dessas duas memórias práticas ostensivas expressam que os equipamentos praxeológico desses professores possuem praxeologias diferentes para enfrentar a problemática possibilística da divisão polinomial, ou seja, quais praxeologias $\wp$ cada um conhece para solucionar tipos de tarefas T, ditas problemáticas no ensino dessa operação polinomial. Dito isso, avencemos para a descrição da quinta sessão.

5.1.5. Quinta Sessão: 22-11-2014

A quinta sessão é uma retomada do processo de formação do PER após interrupção de quatro Sábados consecutivos, motivados por diversos fatores (Eleição, ENEM, feriados, etc.). A sessão durou 01 (uma) hora e 13 (treze) minutos. Nessa quinta sessão, o conjunto X e Y do sistema didático $\mathcal{S}(X; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$ esteve assim constituído: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_4\}$. Esta sessão marca o início do estudo da dissertação (obra $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$) de Pereira (2012). Esse estudo seguiu etapas distintas, a primeira foi a leitura da obra no período que houve a interrupção da formação nos dias de Sábado. A segunda parte ocorreu a partir desta sessão.

A retomada dos estudos e da formação continuada iniciou com o diretor de estudo y_1 expondo as ideias gerais sobre a Teoria Antropológica do Didático, contidas na obra de Chevallard (1999) e as conectando ao texto da obra $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$ de Pereira (2012). Além disso, o diretor de estudo y_1 enfatizou que os professores deveriam ter lido a dissertação de Pereira (2012) como uma atividade de estudo para sua formação e relacionassem suas práticas docentes as ideias que o autor propõe para o ensino da Álgebra Escolar, em relação aos conteúdos de Álgebra ensinados no Ensino Fundamental e Médio. Entretanto, os professores não cumpriram de fato essa atividade de estudo. Assim, as discussões ficaram diluídas e escassas. A quinta sessão ganhou mais um aspecto de "conversa geral" e não de estudo da obra $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$. Talvez isso ocorreu porque a maioria dos professores ainda não tinha o hábito de realizar a leitura de uma obra em convergência analítica com suas atividades docentes. O redimensionamento dos estudos da quinta sessão avançou para a sexta sessão.

5.1.6. Sexta Sessão: 29-11-2014

A sexta sessão é uma continuidade da sessão anterior. Esta sessão durou 01 (uma) hora e 55 (cinquenta e cinco) minutos. Nesta quinta sessão, os conjuntos X e Y, constituíram-se por $X = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_9\}$ e $Y = \{y_1, y_3\}$. Notemos que os componentes de X e Y não são os mesmos da quinta sessão, isso motivou o diretor de estudo y_1 retomar algumas ideias discutidas nas sessões anteriores e enfatizar que a obra de Chevallard (1999) norteia as obras ♥𝔇 (dissertação) e ♥𝔈 (Modelo Epistemológico Alternativo) de Pereira (2012). Para instigar as falas dos professores e saber se eles tinham estudado a obra ♥𝔈 contida na obra ♥𝔇. Entretanto, para evitar o que ocorreu na quinta sessão, o diretor y_1 elaborou um texto (**APÊNDICE B**), resumindo as ideias da obra de Chevallard (1999) e da obra ♥𝔈 de Pereira (2012), para que os professores integrantes de X, estudassem-no dentro do tempo didático da sexta sessão e possibilitasse a fluidez do diálogo entre os professores x_n e y_1.

A ênfase do estudo desta sessão, centrou-se no que Chevallard (1999) anuncia sendo tipo de tarefa T, técnica τ, tecnologia θ e teoria Θ. Esses elementos da (TAD) estão exemplificados na obra ♥𝔈 de Pereira (2012). Mas nesta sessão predominou o estudo do que são tarefas t, tipos de tarefas T_i e gêneros de tarefas. A compreensão do que seria técnica τ, tecnologia θ e teoria Θ, também compôs as discussões. 4

O estudo começou pela leitura do fragmento traduzido da obra de Chevallard (1999) (**APÊNDICE B**), no qual o diretor de estudo y_1 estimulou os professores de matemática pensarem em suas práticas e na relação solidária que existe entre tarefas t e tipo de tarefas T. Além disso, y_1 questionou os professores de X, se eles ao ensinarem o assunto de equação do primeiro grau com uma e duas incógnitas, no Ensino Fundamental, há possibilidade de se pensar nas futuras tarefas solidárias, ou seja, interligadas aos tipos de tarefas de função polinomial do primeiro grau. A menção ao objeto equação do primeiro grau, por y_1, se justifica por ser um objeto que remete, de fato, às ideias de expressões algébricas. No Quadro 16, a seguir, exibimos algumas falas dos professores x_n de X.

Quadro 16 – Algumas falas dos professores x_n durante o processo de estudo na sexta sessão

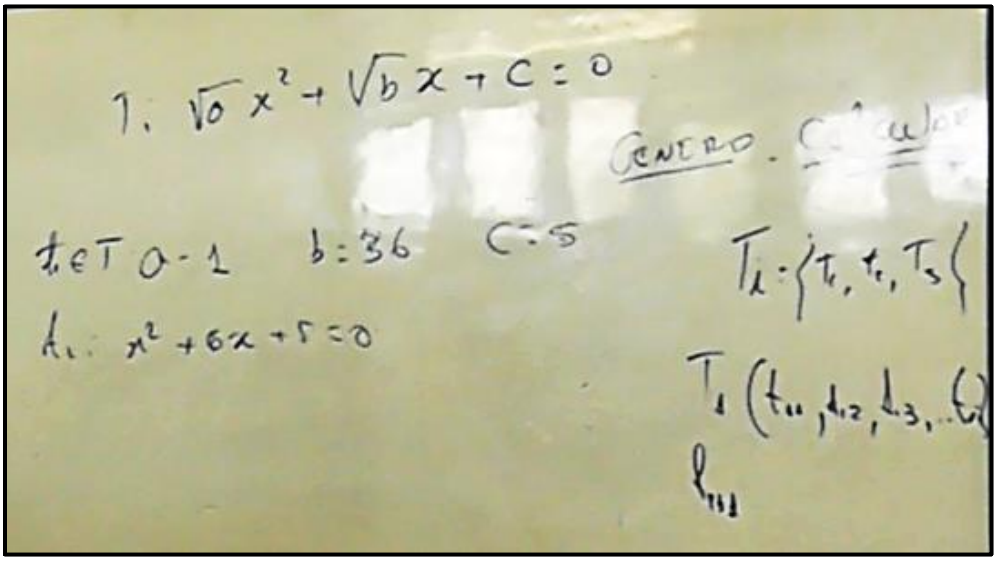
Sujeitos x_n	Falas dos sujeitos x_n
x_7	*_ [...]. Não sei. Eu poderia dizer que, uma pergunta que eu faço, que o estudo da equação, estudar um dos pontos da função, você quando estuda equação de segundo grau, eu estou estudando um dos pontos da função, que é encontrar as suas raízes e lembrar função de primeiro grau, mostrar equação de primeiro grau, seria visto como objetos diferentes ou como partes do mesmo objeto?*
x_8	*_Como objeto, é o mesmo objeto de explicação. Está entendendo? Como é que o aluno vai estudar função, se ele não tem noção de equação? Aí entra a palavra, uma tem que ser solidária à outra. Ou seja, você tem que ter a base.*
x_9	*_ [...]eu acho que essa noção de função seria o que o y_1 falou, talvez uma expansão do tipo de tarefa de equação. Então, o x_7 também falou isso de que,*

	quando você estuda a equação, na verdade seria um fragmento e a restauração quando você estuda em função, por exemplo, a localização de um ponto, que seria no caso a raiz. O zero numa função, então, eu compreendo aí nesse caso que, embora sejam objetos mesmo diferentes, mas que na verdade existe esse grau de aproximação. Essa semelhança é muito forte.
x_3	*_ Essa praxeologia, acho que, em geral, são coisas parecidas. Por exemplo, dar ao aluno várias maneiras de resolver um problema, uma equação, uma função. E ele sempre vai fazer aquela pergunta de aluno para o professor: "Mas nunca me ensinaram ensinado desse jeito, ensinaram-me daquele outro jeito". Onde eu quero chegar? É o seguinte, o reforço nessa perspectiva da TAD é mostrar tarefa dentro da atividade matemática. E dentro desse rol das tarefas, a relação do termo na base que é do aluno. Agora, se a gente levar isso para a sala de aula, essa formação, essa noção, essa questão da TAD, com certeza o aluno vai enxergar isso no médio e no superior. Ele não vai ter tanta dificuldade no estudo. Porque, muitos dizem mesmo que não reconhecem uma função em uma reta. E quando chega no superior, ele vê geometria analítica. Chega no nível superior também consegue lembrar, porque a noção dele é muito mais pura. Então eu acho que se a gente começar a colocar mesmo no ensino básico, eu acho que é fundamental esse compromisso com técnica, com a tarefa. Esse conjunto.*

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

Após 40 (quarenta) minutos de estudo, a noção de tipos de tarefa, tarefa e gênero de tarefa está bem evidente no estudo da sexta sessão. Para avançar mais na compreensão dessas noções, o diretor de estudo y_1 anuncia: *"[...] vou escrever aqui uma tarefa. Vamos ver se vocês já se confrontaram com essa tarefa. Eu já estou caminhando dentro das ideias de um modelo que vocês vão ver [...]"*. A Figura 34, exibe as anotações das discussões sobre as tarefas (ou tipos de tarefa *T*) anunciada por y_1.

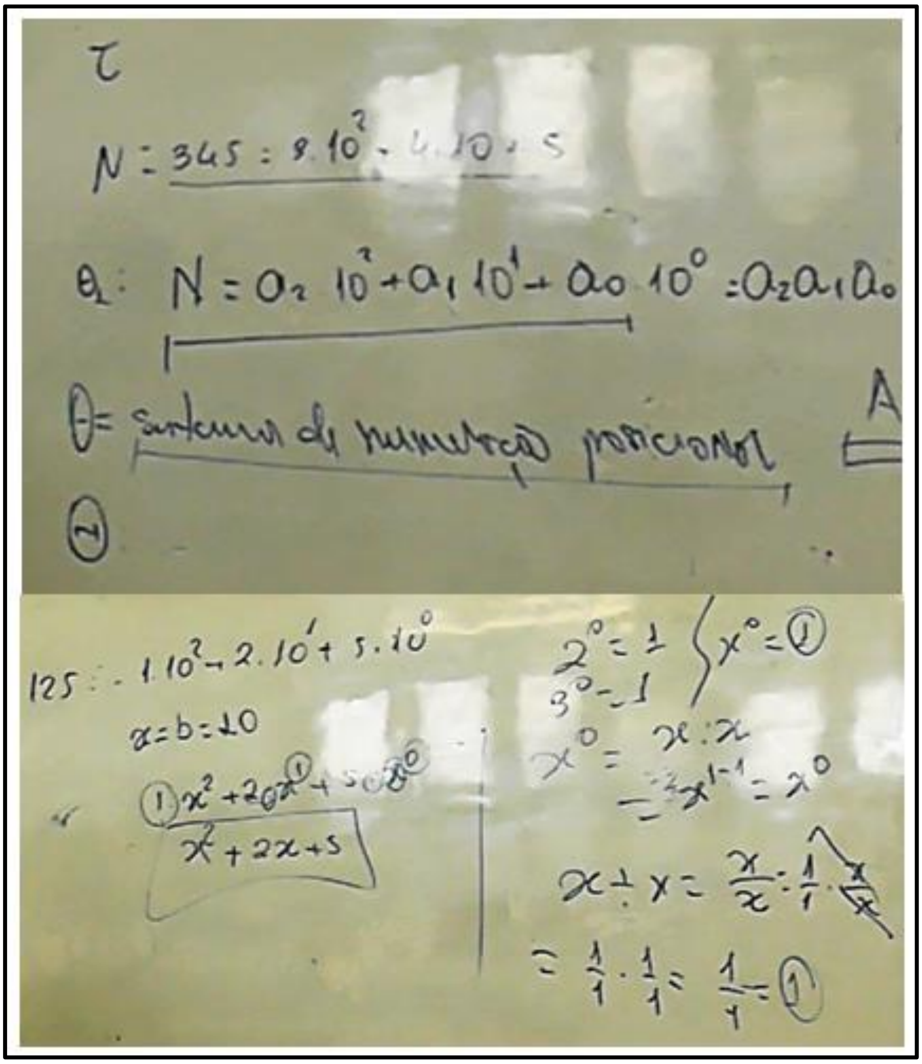
Figura 34 – Anotações no quadro branco realizadas por y_1



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

A parir do exposto na Figura 34, os professores x_n questionaram y_1 sobre a técnica τ, tecnologia θ e a teoria Θ, aplicáveis as tarefas t, do tipo T (calcular as raízes de equações do tipo $\sqrt{a}x^2 + \sqrt{b}x + c = 0$). Isso impulsionou o estudo sobre gênero de tarefas, tipos de tarefas T_i, tarefas $t_i \in T_i$ (i = 1, 0, 2, ..., n), subtarefas e técnicas τ. Além disso, os questionamentos dos professores convieram para conectar a formação ao estudo do Modelo Epistemológico Alternativo de Pereira (2012). A Figura 35 exibe fragmentos do estudo da sexta sessão, em relação aos elementos da TAD contidos nas obras, ♥𝕯 e ♥𝕮, de Pereira (2012). No estudo da sexta sessão os professores de matemática x_n tiveram, efetivamente, contato com a modelização algébrica da obra ♥𝕮.

Figura 35 – Fragmentos do estudo da sexta sessão



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

O posicionamento dos professores foi pontual, isso porque o estudo da modelização algébrica que consta nas obras de Pereira (2012), ocorreu de forma breve (**APÊNDICE B**). O aprofundamento desse estudo transcorreu na próxima sessão.

5.1.7. Sétima Sessão: 06-12-2014

A sétima sessão teve uma duração de 02 (duas) horas e 31 (trinta e um) minutos. Uma das mais longa do PER. Os conjuntos X e Y do sistema didático $\mathcal{S}(X; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$ estiveram assim constituídos: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ e $Y = \{y_1, y_3, y_4\}$. O estudo nesta sessão situou-se em um texto adaptado da obra ♥𝔇 de Pereira (**APÊNDICE C**). Prosseguimos os estudos da sexta sessão, mas agora com maior ênfase nas ideias que contam na obra ♥𝔇 de Pereira (2012). Conforme anunciamos, anteriormente, o estudo da obra ♥𝔇, constituiu-se uma das atividades dos professores x_n a partir da quinta sessão, porém, notamos que isso não ocorreu de fato. Consequentemente o diretor de estudo y_1 e o diretor de tese ζ adaptaram o texto do Apêndice C para dinamizar a formação continuada nesta sétima sessão.

Os primeiros 20 (vinte) minutos da sétima sessão serviu para o diretor de estudo expor, de forma geral, as principais ideias epistemológicas e históricas que estão imersas na obra ♥𝔇 de Pereira (2012). Algo que despertou o interesse dos professores x_n, no estudo das ideias defendidas pelo autor da obra ♥𝔇, é que este autor aliou as noções epistemológicas e históricas de sistemas de numeração, em diferentes civilizações, para justificar a modelização algébrica polinomial proposta na obra ♥𝔈 (PEREIRA, 2012). O diretor de estudo y_1 ao comentar sobre a existência de uma diferença temporal histórica entre o estudo e ensino de matemática nos países da Europa em relação a descoberta e colonização do Brasil, promoveu a manifestação oral de alguns professores x_n, transcritas no Quadro 17.

Quadro 17 – manifestação oral dos professores x_n

Sujeitos x_n	Falas dos sujeitos x_n
x_3	*_ Essa questão da história na transição histórica, às vezes você vai contar na sala de aula uma história da matemática, só aquela história em forma de nota de rodapé, artificializa o que tem no livro didático, não é suficiente [...].*
x_1	*_ [...]. Os egípcios, os sumérios, eles também já foram um povo que usavam a sua própria matemática com aquela lógica [...]. Quando falamos em atraso de quatro séculos em relação aos franceses, tem que ver que é bem novo. Eles já passaram pelas dificuldades que a gente passou ou passa, por serem mais antigos que a gente e, hoje, eles estão mais evoluídos. Agora a gente está vendo as ideias que eles já viram há muito tempo. Só que naquela época, no contexto histórico, o Brasil era colônia, para estudar matemática, a matemática que*

	estava aqui era a matemática dos portugueses [...]. Então, um atraso para o Brasil é um atraso também de Portugal, porque se a gente fosse colonizado pelos franceses, talvez as ideias estariam mais avançadas para a gente. Sobre a numeração hindu, ainda sobre a posição do zero, houve uma época em que eles só afastavam, eles fizeram primeiro, eles afastavam a posição do zero, era só um afastamento, aí havia aquela confusão, é 011 ou é 101? [...]
x_6	*_ Nós estávamos lá embaixo, antes você chegar*[58]*, a colega até citou, de fato, que no Brasil se apoia muito no que vem de fora: da Espanha, de Portugal [...] não tem essa identidade própria, brasileira, do que está sendo visto no Brasil. Por que nós temos sempre que verificar algo que vem de fora? Não criado aqui mesmo. Temos que aderir algo só porque tem mais estudos a frente? Somente isso? Será que do jeito que eles fizeram lá, com a educação que foi, de ponta e tal, [...] será que a mesma coisa que estão falando lá, é a mesma coisa que os jovens daqui estão vendo? Ou, tem-se que aplicar, do jeito que foi aplicado lá, aqui no Brasil? Temos que nos indagar também: será que a gente não ficará para trás de novo, tentando aplicar uma coisa que é lá de fora, aqui dentro? Então, chamam várias pessoas de lá de fora para fazer os estudos e depois aplicar aqui no Brasil. Mas eles conhecem a realidade do Brasil e a necessidade dos alunos do Brasil? Dessa forma, ficam abertos esses questionamentos.*

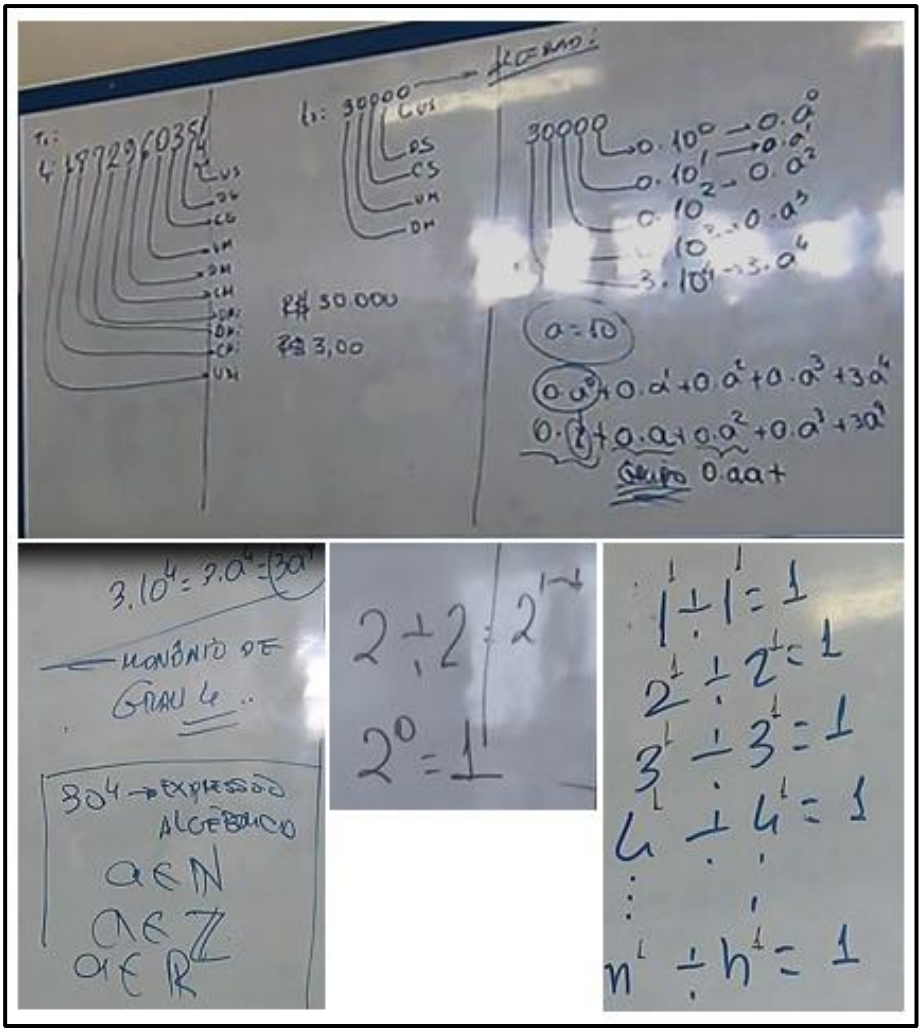
Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

As falas dos três professores (Quadro 17), de certa forma provocadas pelo comentário de y_1, expressam compreensões e opiniões, que as situamos nas memórias de alto nível e metamemórias (CANDAU, 2014). Temos nessas verbalizações indícios que os universos cognitivos desses professores já possuem relações pessoais modificadas pelos estudos das obras do *milieu* M dos esquemas herbatianos do PER. A fala do professor x_1 revela que este estudou a obra ♥𝔇 de Pereira (2012), ou seja, esse estudo promoveu prováveis alterações praxeológicas no equipamento praxeológico deste professor, pois ele cita algumas civilizações que constam nessa obra, principalmente, em referência ao algarismo zero. As falas dos outros dois professores são mais centradas em suas experiencias profissionais ou compreensões particulares, abstraídas das sessões anteriores do PER.

Após as manifestações orais dos professores do Quadro 17, prosseguimos os estudos da obra ♥𝔇. Entretanto, as manifestações orais dos professores foram mais pontuais, exceto as dos professores x_3, x_6 e x_7, que se posicionaram quanto aos estudos ilustrados nas Figuras 36 e 37. As interações desses três professores com as ideias exibidas nas duas figuras motivaram o diretor de estudo y_1 a expor outras compreensões ostensivas da matemática escolar conectadas ao MEA de Pereira (2012).

[58] Referindo-se ao diretor de estudo y_1.

Figura 36 – Fragmentos dos estudos da sétima sessão

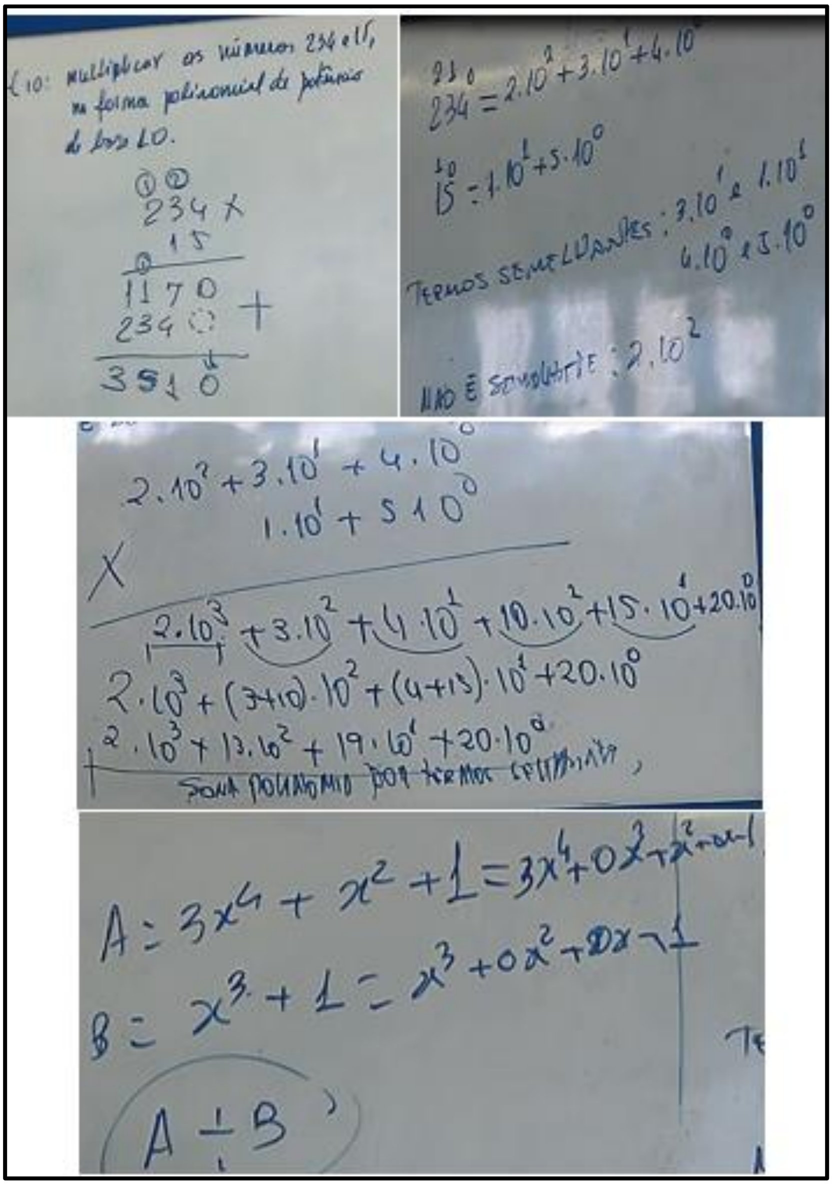


Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

A Figura 36 possui fragmentos das discussões surgidas durante os estudos desta sétima sessão do PER. A ostensividade exibida na Figura 36 são do diretor de estudo y_1, que são exemplos de ostensivos escriturais e estão na memória prática ostensiva de y_1. Essa prática ostensiva contribuiu para esclarecer algumas dúvidas do professores, uma delas está associada a noção não ostensiva de ordens no sistema de numeração decimal, mostrada ostensivamente com o número 1.872.960.354, no qual temos 1 unidade de bilhão (1 UBi), 8 centenas de milhão (8 CMi), 7 dezenas de milhão (7 DMi), 2 unidades de milhão (2 UMi), 9 centenas de milhar (9 CM), 6 dezenas de milhar (6 DM), 0 unidade de milhar (0 UM), 9 centenas simples (9 CS), 5 dezenas simples (DS) e 4 unidades simples (4 US). Na extensão das discussões, um professor indagou sobre o resultado da potenciação quando o expoente é zero, ou seja, ele queria uma ostensividade, na matemática escolar, que fosse possível explicar numericamente para os alunos. Para essa indagação o diretor estudo y_1 sugeriu a prática ostensiva indicada na Figura

36. Na sequência dos estudos, os professores solicitaram para y_1 mostrar uma tarefa que envolvesse a multiplicação modelizada pelas ideias do MEA de Pereira (2012). Temos essa tarefa na Figura 37 e, também, o indicativo de uma divisão com polinômios incompletos.

Figura 37 – Fragmentos dos estudos da obra ♥𝔇 na sétima sessão



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Exibimos no Quadro 18 fragmentos das falas dos professores x_3, x_6 e x_7 relativas as aos estudos que provocaram as ostensividades das Figuras 36 e 37.

Quadro 18 – manifestação oral dos professores x_3, x_6 e x_7

Sujeitos x_n	Falas dos sujeitos x_n	Observação de y_1
x_3	**_ Só uma indagação. É interessante quando se coloca o valor atribuído ao "a" [...]todo "a" é igual a 10, é um "a" número, todo número indicado com o 0, é 0. Só que aí não está se referindo a própria Aritmética, é a transição da Aritmética para a Álgebra. Em um momento você faz as contas da Aritmética, noutro momento você atribui a unidade algébrica, então, posso não ter esse raciocínio, não é verdade?* ***_ Isso confunde a gente no ensino da Álgebra.* ****_ [...]o profissional, professor de matemática, nós temos que saber matemática em primeiro lugar, nossa base de formação é fraca, é fraca...*	**Em relação ao exibido na Figura 37.* *** Relativo a ostensividade das propriedades da potenciação.* **** Em referência a formação inicial do professor de matemática para compreender os objetos matemáticos e a manipulação desses objetos durante o ensino da álgebra.*
x_6	*#_ [...] Quando y_1 estava explicando, veio-me de novo a mente os alunos, naquele esquema, $a^0 = 1$. Foi passado para eles, lá, a reta numérica, números inteiros da reta numérica, eles diziam: "Professor, como é que esse a^0 vai dar 1? ". Eles começam a indagar e não entendem, porque não está na realidade deles. [...] que é tão simples para nós enxergarmos, mas eles não conseguem enxergar.*	*# Em relação ao exibido na Figura 37.*
x_7	*##_ [...] eu entendo a preocupação de vocês, representantes das universidades, em sempre deixar claro para a gente que temos que buscar isso, buscar uma mudança, isso a gente já entendeu, por isso estamos aqui, mas o que eu penso e que está todo mundo colocando é como nós fomos preparados, dentro da instituição, para irmos lá para o ensino básico passar o nosso conteúdo. Aqui ninguém está naquela posição de comodismo, não existe comodismo para quem está atuando, a gente tem que estar sempre estudando. Mas uma coisa é clara assim, na UFPA, por exemplo, nunca, durante a minha formação, mostrou-me conteúdos do ensino fundamental e médio direcionados para lecionar. Aqui o curso é voltado para bacharelado, são cursos de alto grau de dificuldade, que vão nos dar com certeza base para ensinarmos, só que é como o colega colocou aqui, esse trato com o objeto, dessa forma, não foi passado, a gente vai ter que buscar. Mas por que buscar se eu fiz uma formação para isso? Eu estava para aprender uma licenciatura, isso porque nosso curso da*	*## Em relação as discussões originadas a partir das Figuras 36 e 37.*

	federal é bem diferente lá da UEPA, é diferente dos demais cursos. Então, o que os amigos estão falando é isso, nós não lidamos na universidade durante a formação com esse dado fundamental e médio, terminamos um curso que era praticamente bacharelado de nível alto, tivemos que buscar na marra, mas entendo a preocupação de vocês em colocar aquela busca, nós estamos buscando. Mas eu penso que tem que haver uma mudança na grade curricular, isso aí é fato...	

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

O conteúdo dos fragmentos das falas dos professores, no Quadro 18, esboçam metamemórias relacionadas as suas formações institucionais, práticas docentes e opiniões desencadeadas a partir dos estudos realizados nesta sétima sessão do PER e das anteriores. De certa forma, entendemos que essas verbalizações, dos três professores, indicam a existência de dinâmicas cognitivas modificadoras de suas relações pessoais e institucionais com os objetos da álgebra escolar, ou seja, presumimos que o universo cognitivo desses professores possui alterações praxeológicas promovidas pelos os estudos dinamizados no processo de formação continuada e pelo dispositivo metodológico do PER.

Nesta sessão encerramos os estudos de obras e, novamente, interrompemos a formação continuada e as sessões do PER. Era o mês de dezembro de 2014 e os professores tinham várias atividades profissionais para concluir. Outro fator para esta pausa esteve relacionado a Instituição onde ocorria a formação, ela entraria em recesso de final de ano. A retomada da formação continuada e das sessões recomeçaria no dia 17 de janeiro de 2015. Nesse retorno, os professores x_n deveriam elaborar uma aula (com plano de aula ou equivalente) para ensinar algum conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental II ou do Ensino Médio, mas essas propostas de aulas deveriam contemplar as ideias estudadas e discutidas nas sessões anteriores, principalmente, as das obras de Pereira (2012).

5.1.8. Oitava Sessão: 17-01-2015

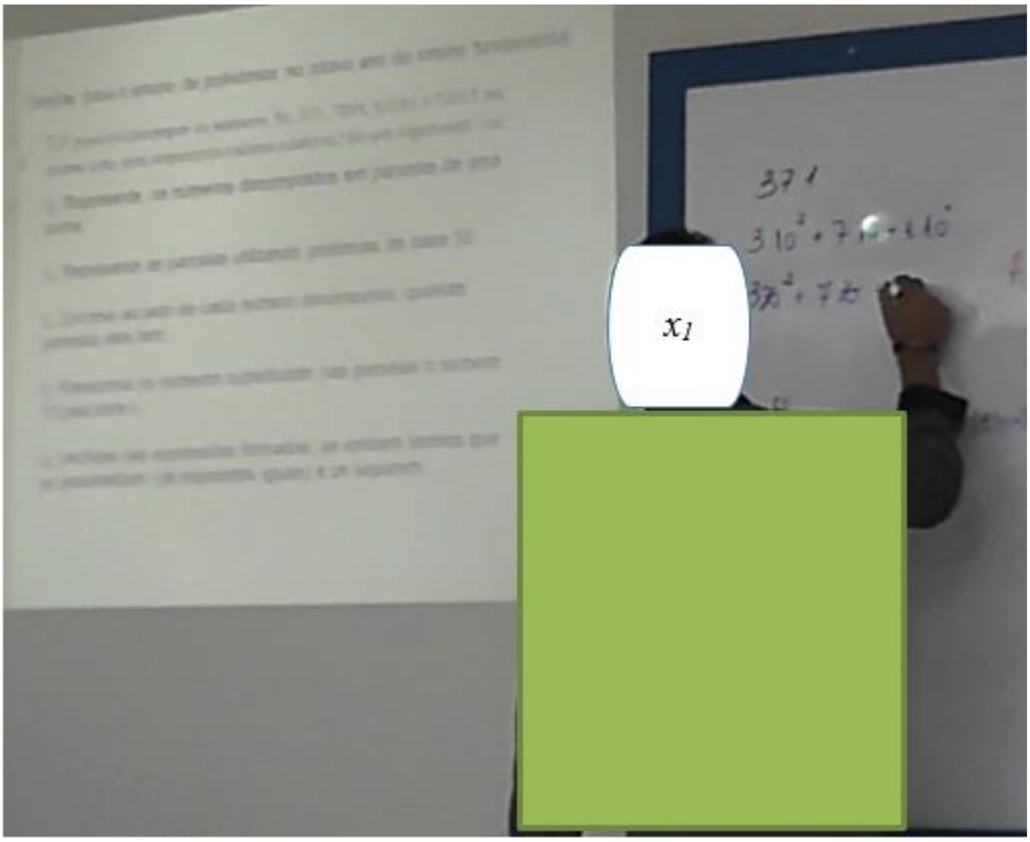
A oitava sessão durou apenas 27 (vinte e sete) minutos. Isso ocorreu porque os professores que compareceram a essa sessão (x_1, x_3, x_4, x_5 e x_8) tinham várias dúvidas quanto a atividade acordada na sétima sessão. Assim, o diretor de estudo y_1 explicou, novamente, como deveriam elaborar essas propostas de aulas para ensinar algum conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental II ou do Ensino Médio, de forma que estas contemplassem as ideias das obras de Pereira (2012). O diretor de estudos y_1 sugeriu aos professores que eles consultassem os livros didáticos de matemática do oitavo ano do Ensino Fundamental e elaborassem suas propostas de aulas para essa série. Feito isso, estabeleceu-se que na próxima sessão os professores x_n expusessem suas propostas como atividade final do processo da formação continuada.

5.1.9. Nona Sessão: 24-01-2015

A nona sessão durou 01 (uma) hora e 45 (quarenta e cinco) minutos e seguiu o estabelecido na oitava sessão, ou seja, os professores x_n apresentariam as suas propostas de aulas para ensinar algum conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental II ou do Ensino Médio. Nesta nona sessão do PER os conjuntos X e Y estiveram assim constituídos: $X = \{x_1, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Após a fala inicial do diretor de estudo y_1, os professores x_1, x_4 e x_8 confirmaram que exporiam suas propostas de aulas. Entrava em cena a topogênese desses professores e a objetivação de seus equipamentos praxeológicos.

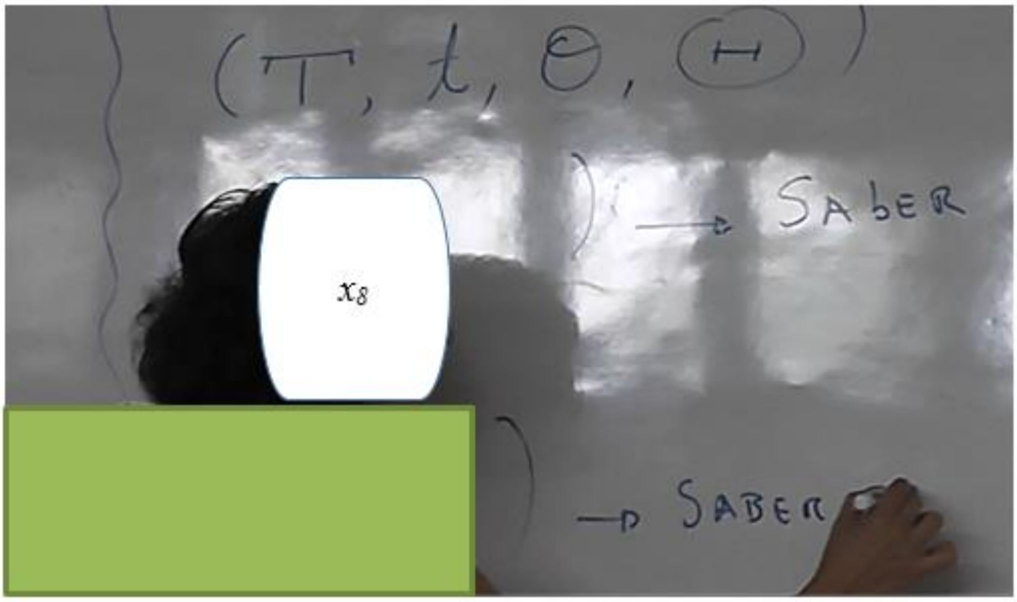
O professor x_1 assumiu a primeira apresentação (Figura 38), na sequência, x_8 (Figura 39) e x_4 (Figura 40) apresentaram suas propostas de aulas. Essas propostas estão nos Anexos A, B e C. A conformidade das três propostas com as obras de Pereira (2012) é evidente. Entretanto, cada professor adaptou outras particularidades em conexão com o exposto nas obras ♥𝔇 e ♥𝔈 (PEREIRA, 2012).

Figura 38 – Apresentação da proposta de aula de x_1



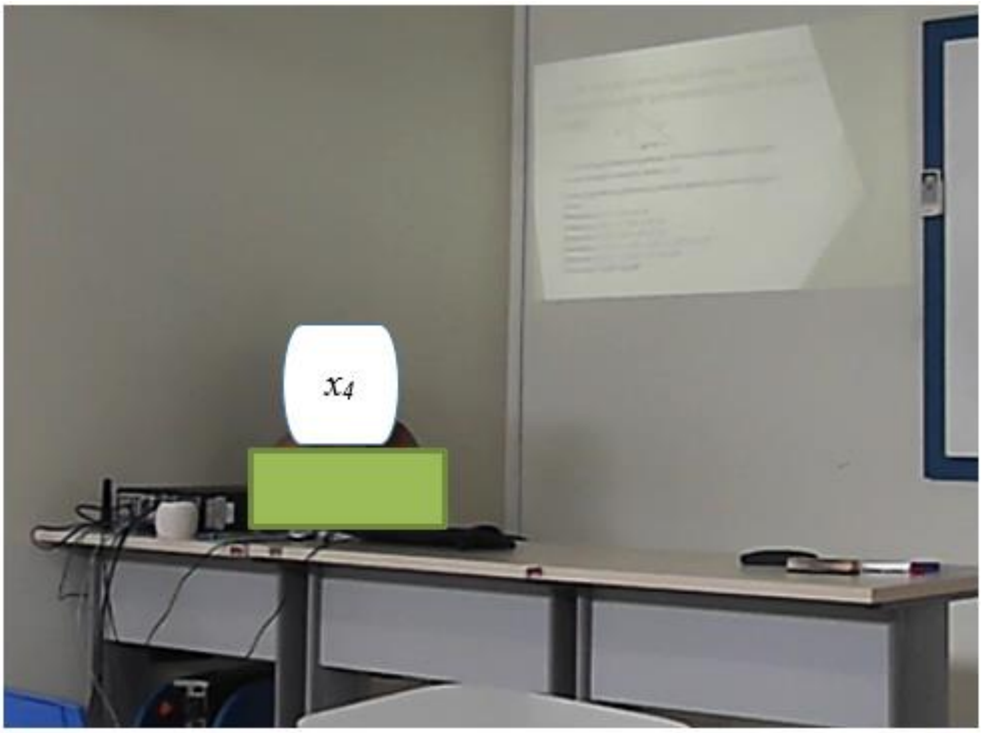
Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Figura 39 – Apresentação da proposta de aula de x_8



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Figura 40 – Apresentação da proposta de aula de x_4



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

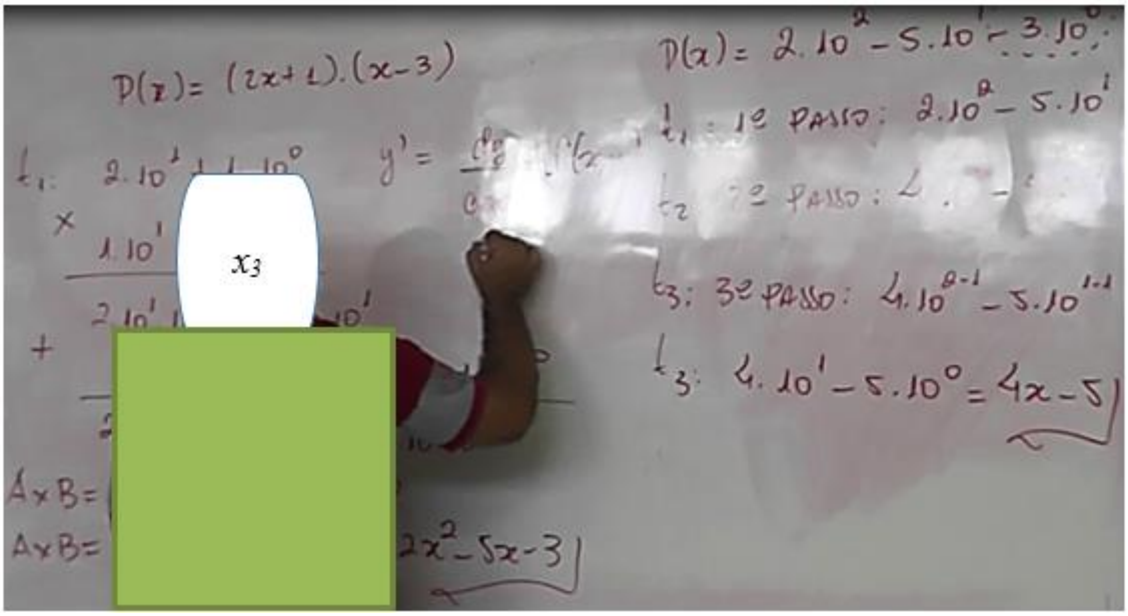
No Capítulo VI examinaremos com mais refinamento a apresentação das propostas de aulas de x_1, x_4 e x_8. Adiantamos que a proposta de x_1 teve maior objetividade para as intenções didáticas desse professor; digamos que ele foi mais pontual nas suas intenções de ensino. A proposta do professor x_8 possui maior ambição em termos de sua compreensão sobre a TAD e de suas finalidades didáticas. Vemos na proposta de aula do professor x_4 algo próximo das ideias didáticas de x_1 e x_8. Temos na próxima sessão mais dois professores, expondo suas propostas de aulas.

5.1.10. Décima Sessão: 31-01-2015

A décima sessão durou 01 (uma) hora e 36 (trinta e seis) minutos. Nesta décima sessão do PER os conjuntos X e Y estiveram assim constituídos: $X = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_8\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Após a fala inicial do diretor de estudo y_1, o professor x_3 iniciou a apresentação de sua proposta de aula (Anexo D). Após esse professor, o professor x_5, apresentou sua proposta de aula (Anexo E). Os dois professores revelaram traços de seus topos e a objetivação de seus equipamentos praxeológicos.

As propostas de aulas dos professores x_3 (Figura 41) e x_5 (Figura 42) estão conectadas as ideias do MEA de Pereira (2012), mas possuem adaptações inseridas por esses dois professores, principalmente, para que as tarefas estivessem mais próximas das organizações praxeológicas dos livros didáticas de Matemática do oitavo ano do Ensino Fundamental.

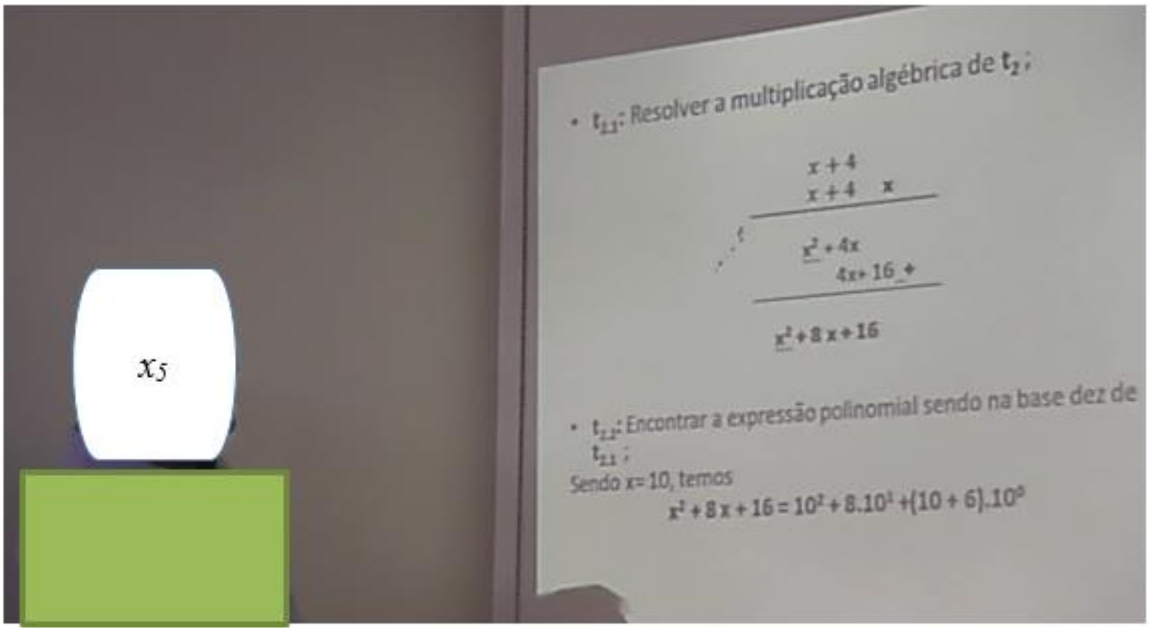
Figura 41 – Apresentação da proposta de aula de x_3



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

O professor x_3 externalizou em sua explicação elementos de uma memória prática ostensiva (Figura 41), na qual identificamos a existência de alterações e recombinações praxeológicas promovidas pelo estudo das obras de Pereira (2012).

Figura 42 – Apresentação da proposta de aula de x_5



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

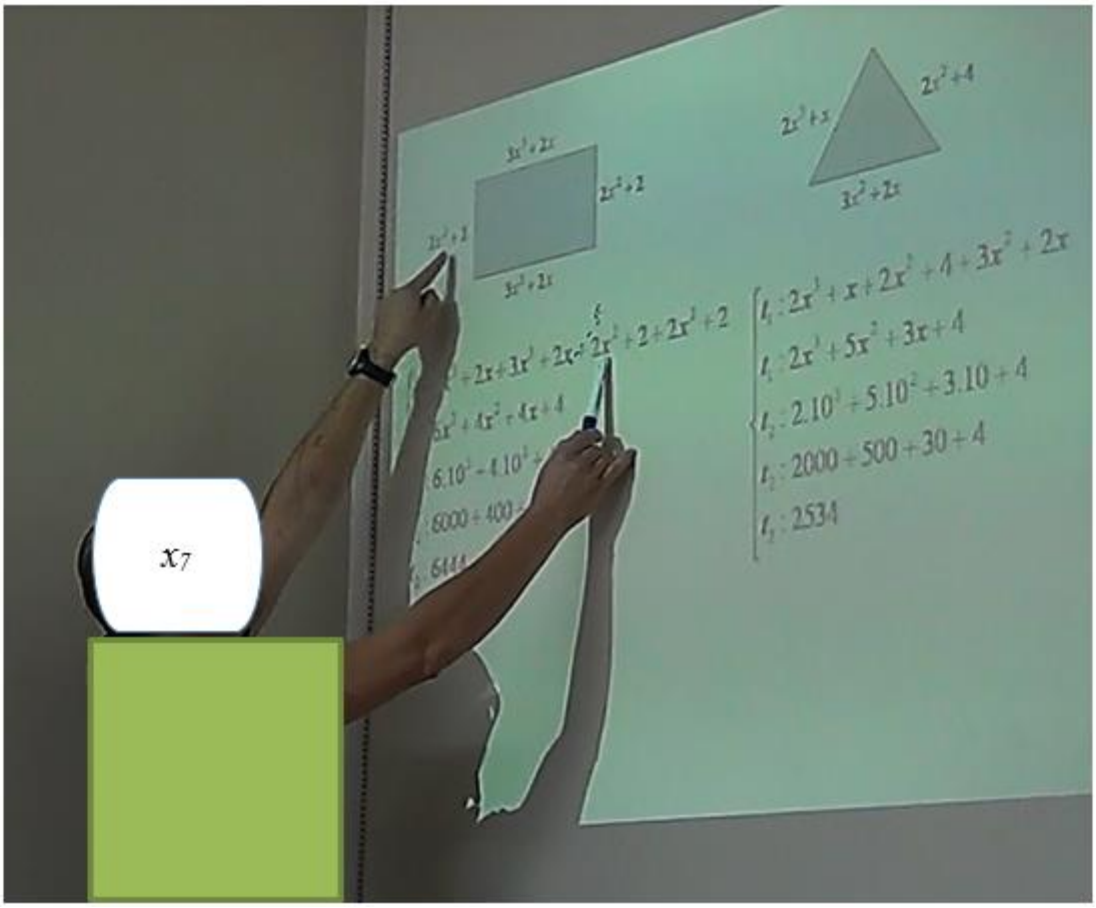
Se a memória prática do professor x_3 exibiu significativas alterações e recombinações praxeológicas, a do professor x_5 foi mais recombinativa no bloco do saber-fazer (Figura 42). Esse professor falou que consorciou as ideias do MEA de Pereira com as dos livros didáticos de matemática do oitavo ano do Ensino Fundamental.

Conforme anunciamos na sessão anterior, temos aqui mais duas propostas de aulas para nossas análises no Capítulo VI. A seguir, descrevemos a última sessão do PER.

5.1.11. Décima Primeira Sessão (sessão final do PER): 07-02-2015

A última sessão do PER, ou seja, a décima primeira, durou 01 (uma) hora e 27 (vinte e sete) minutos. Nesta última sessão do PER os conjuntos X e Y estiveram assim representados: $X = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_9\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_4\}$. Após a fala inicial do diretor de estudo y_1, o professor x_7 iniciou a apresentação de sua proposta de aula. O professor x_9 entregou sua proposta de aula (Anexo F) manuscrita para o diretor de estudo y_1, informando-o que não apresentaria, oralmente, tal proposta. Então, o professor x_7 (Figura 43), finalizou as apresentações das propostas de aulas. Mesmo o professor x_9 não expondo sua proposta de aula, ele revela traços de sua topogênese e possível objetivação de seu equipamento praxeológico.

Figura 43 – Apresentação da proposta de aula de x_7



Fonte: Elaborada pelo Autor (2016).

Finalizada a apresentação do professor x_7, que teve uma duração superior as dos outros professores que apresentaram suas propostas de aulas, encerramos a última sessão do PER com a fala do diretor de tese ζ.

Parte dos conteúdos deste capítulo, principalmente as transcrições das sessões do PER, serão retomados no próximo capítulo.

VI – ANÁLISE DO PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO INTERMEDIADO POR UM MODELO EPISTEMOLÓGICO ALTERNATIVO

Neste capítulo retomaremos várias ideias que estão na base estrutural do primeiro ao quinto capitulo desta tese. Além disso, outros aspectos poderão surgir conforme os desdobramentos de nossa análise do processo de formação continuada. Porém, para organizarmos o fluxo praxeológico deste capítulo, faremos um resumo das principais compreensões teóricas que estarão permeando o refinamento de nosso discurso analítico, que devem conformar nossas hipóteses, questão de pesquisa, objetivos e a elaboração da possível reposta para nossa questão de pesquisa.

6.1. Retrospecto Articulativo para analisarmos o processo de formação continuada

Expomos, nesta tese, a problemática articulada a revisão da literatura, de tal forma, que essa articulação retoma o Curso de Especialização de Educação Matemática – 2008 a 2009 – no qual a obra de Carvalho e Pereira (2009) é elaborada. A articulação prossegue com a dissertação de Pereira (2012), produzida durante o Curso de Mestrado Acadêmico (2011-2012). A conexão da obra de Carvalho e Pereira (2009) com a obra de Pereira (2012) ocorre primeiro por intermédio de Pereira, que é autor nas duas obras; a segunda conexão está no Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) para o ensino de polinômios, elaborado por Pereira, cuja gênese desse MEA vem dos estudos de Floriani (2000) e é ampliado com a fundamentação da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999, 2002, 2009a; PEREIRA, 2012). Os redimensionamentos dessas duas conexões prosseguiram nesta pesquisa doutoral, na qual estabelecemos um processo de formação continuada para professores de matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Tanto na obra de Carvalho e Pereira (2009) quanto na de Pereira (2012) existe a problemática relacionada ao ensino da álgebra escolar (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990, 1994a; USISKIN, 1995; GASCÓN, 1994, 2011; CATALÁN, 2003), cujo modelo dominante é visto como uma generalização da Aritmética (GASCÓN, 1994a, USISKIN, 1995; CATALÁN, 2003; PEREIRA, 2012). Essa problemática nos impulsionou a descrevermos uma possível caracterização para a Álgebra Elementar Escolar. Para produzirmos essa descrição, o estudo de diversas obras de diferentes épocas foi inevitável. Além disso, as organizações praxeológicas que os autores de diferentes épocas produziram, possuem certa familiaridade com as organizações matemáticas atuais. Evidentemente, em cada época, o texto matemático possui sua gênese particular, mas notamos que a presença da relação numérico-algébrico é predominante nos textos praxeológicos das obras que examinamos. Essa característica dos textos praxeológicos (numérico-algébrico) tem conexão com a obra de Pereira (2012) e o MEA contido nessa obra.

A fundamentação teórica que sedimentará a análise do processo de formação continuada está resumida no Quadro 19. Os acréscimos teóricos que propomos para a Teoria Antropológica do Didático foram formulados a partir de Chevallard (2009g, 2011b, 2011c, 2011d). Com nessas obras de Chevallard, propomos a simbologia $\heartsuit_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q}$, significando que a obra $\heartsuit_{\tau}$ (esta tese) leva a responder $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{Q}$ confirma a tese. De igual forma estabelecemos a relação $R(x, \boldsymbol{Q})$ e o sistema didático $S(x; y; \heartsuit_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$, no qual x = doutorando e y = orientador.

Quadro 19 – Resumo de alguns pontos da fundamentação teórica e as possíveis conexões com a análise das sessões do PER

Universo Cognitivo da pessoa *x*	$UC(x) = \{(o, R(x; \boldsymbol{o})) \,/\, R(x; \boldsymbol{o}) \neq \emptyset\}$	(CHEVALLARD, 2009a)	**Análise das memórias didáticas ostensivas**
Equipamento Praxeológico da pessoa *x*	[...] o conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, ou que está *equipada* (mesmo que não possa atualizar tal ou tal praxeologia que venha a ocupar tal posição dentro de tal instituição): é o que chamo de ***equipamento praxeológico*** da pessoa [...]	(CHEVALLARD, 2009a, p. 1-2, tradução nossa, grifos nossos e no original).	**Análise do equipamento praxeológico objetivado**
Problemática “*de base*” da **Álgebra Elementar**	[...] Admitida por numerosas pesquisas em didática da álgebra, a problemática *de base* pode ser anunciada assim: “Dadas às restrições *K* (por exemplo, as do atual ensino secundário) que são impostas sobre uma instância *U* (por exemplo, um grupo de alunos e seu professor), sob quais conjuntos de condições *C* esta instância poderá encontrar a entidade praxeológica $\wp$ (por exemplo, tal organização vista como relevante para a álgebra	(CHEVALLARD, BOSCH, 2012, p. 21, tradução nossa).	**Análise das memórias didáticas ostensivas**

	ensinada)?" No que segue, nós nos referiremos, não à problemática de base, mas a sua problemática *dual*, a problemática *possibilística*, que se enuncia nos seguintes termos: "Dado um conjunto de condições *C* e um conjunto de restrições *K*, aos quais tal instância *U* é submetida, quais entidades praxeológicas $\wp$ é possível que tal instância *U* conheça? " Não é assim uma pergunta que se deseja fazer como os alunos podem conhecer (e de que forma seu professor pode fazê-los conhecer) tal ou qualquer entidade "algébrica", mas para identificar os tipos de entidades "algébricas" que é possível encontrarmos hoje na escola, sob as restrições e condições existentes. Tal perspectiva nos levará, naturalmente, abordar a problemática *contrária*, dita *impossibilística* – quais são as entidades praxeológicas $\wp$ de um determinado tipo, sob restrições *K* e condições *C*, a instância U não encontrará?		**Análise do equipamento praxeológico objetivado** **Relação com as questões Q_0, Q_1 e Q_2**
Investigação Codisciplinar e o *milieu* ***M***	*M* design um *milieu didático* ou *milieu para o estudo*, ou seja, o conjunto de ferramentas e recursos reunidos pelo sistema didático *S*(*X*; *Y*; *Q*) em vista de construir a resposta $R^{\heartsuit}$ procurada. O *milieu* é constituído de *obras* – ou seja, de criações humanas intencionais, tendo uma finalidade – distinguindo-se do que precede somente duas grandes categorias: de um lado, as *respostas* $R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}$ para a questão *Q* existente nas instituições da sociedade; de outro lado, *as outras obras*, O_{n+1}, ..., O_m. A natureza dessas obras será especificada de acordo com a necessidade; em regra geral, ver-se-á que elas virão de diversos campos de conhecimento: portanto, fala-se de *investigação codisciplinar* a propósito das investigações que teremos para conduzir. Refinamos um pouco a	(CHEVALLARD, 2012-2013, p. 1-2, tradução nossa).	**Relação com as questões Q_0, Q_1 e Q_2**

	modelização do *milieu* M, fazendo aparecer, explicitamente, entre as "outras obras", um tipo de obra essencial: as questões que são geradas pelo estudo da questão Q e, também, pelo estudo das respostas $R_i^\lozenge$ e das "outras obras" O_k necessárias para se utilizar, efetivamente, estas respostas e estas outras obras (teorias, experimentações, etc.). Recriar-se-á então o *milieu* M sob a seguinte forma: $M = \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$. Na sequência, guardaremos em mente o esquema herbatiano expandido assim: [S(X; Y; Q) ➦ $\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$]➥$R^\heartsuit$. As questões Q_{n+1}, …, Q_m são ditas *geradas* pela investigação em curso, que aborda a Q, dita *geradora* da investigação.		**Análise das Questões Q_x e das Respostas R_x dos Professores**
Ampliação das ideias da investigação codisciplinar	*Investigar sobre uma determinada questão* é um *tipo de tarefas* que denotaremos por H (da palavra grega *historia* que significa "*investigar*") ao entorno da qual nos esforçaremos para construir uma *praxeologia da investigação*, $\mathcal{H}$, que se denota por $\mathcal{H}$ = [H/ τ_H/ θ_H/ Θ_H]. O esquema herbatiano [S(X; Y; Q) ➦ $\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$]➥$R^\heartsuit$constitui um elemento *tecnológico* ($\in \theta_H$) que está *no coração desta praxeologia da investigação*: esse elemento tecnológico justifica vários gestos técnicos, sobre o qual nos voltaremos, tal como colocar-se *a procura da reposta* $R^\lozenge$ [...].	(CHEVALLARD, 2012-2013, p. 2, tradução nossa).	**Relação com as questões Q_0, Q_1 e Q_2** **Elaboração da Resposta $R^\heartsuit$**
	H_1. *Observar* as respostas $R^\lozenge$ depositadas nas instituições. ***H_2***. *Analisar* – consistentemente, o duplo plano experimental e teórico – estas respostas $R^\lozenge$.		**Elaboração da Resposta $R^\heartsuit$**

Cinco **tipos de tarefas** $\boldsymbol{H_i}$	$\boldsymbol{H_3}$. *Avaliar* estas mesmas respostas $R^{\lozenge}$. $\boldsymbol{H_4}$. *Desenvolver* uma resposta própria $R^{\heartsuit}$. $\boldsymbol{H_5}$. *Difundir e defender* a resposta $R^{\heartsuit}$ assim produzida.	(CHEVALLARD, 2012-2013, p. 3, tradução nossa).	**Relação com a questão** $\boldsymbol{Q}$

Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

Os elementos teóricos do Quadro 19 estão conectados às sessões do PER e ao produto resultante da formação continuada com professores de matemática do Ensino Básico. Além disso, as memórias didáticas desses professores devem revelar práticas docentes quando ensinam os objetos da Álgebra Escolar, ou seja, a objetivação de seus equipamentos praxeológicos esteve em jogo durante as onze sessões do PER.

As sessões do PER possuem um sistema didático principal $S(X; Y; Q)$ e seus auxiliares $S_0(X; Y; Q_0)$, $S_1(X; Y; Q_1)$ e $S_2(X; Y; Q_2)$. Para evitarmos uma confusa intepretação sobre quem pertence aos conjuntos X e Y, nas sessões do PER, estabelecemos que X simboliza o conjunto de professores de matemática em formação continuada e Y o conjunto de diretores de estudos (doutorandos). O orientador de tese, de alguns elementos de Y, passou a ser denotado pelo símbolo ζ, significando diretor de tese (CHEVALLARD; ARTAUD, 2013-2914b). Ao adotarmos o símbolo ζ equivalente a orientador de tese, o sistema didático principal $S(X; Y; Q)$ assumiu a modelização de $S(X; Y; \zeta; Q)$. Essa modelização provocou o ajuste do elemento tecnológico de S, ou seja, o esquema herbatiano desenvolvido assume a forma de $[(S(X; Y; \zeta; Q) \curvearrowright \{ R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, R_3^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, \heartsuit_{\mathfrak{D}}, \heartsuit_{\mathfrak{E}}, O_{n+1}, \ldots, O_m \}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Além disso, o sistema didático $S(X; Y; \zeta; Q)$ subordina $\mathcal{S}(X; Y; \mathcal{Q}_x)$ e o elemento tecnológico de $\mathcal{S}$; temos então $\mathcal{S}(X; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x)$ e o esquema herbatiano $(\mathcal{S}(X; Y; \zeta; \mathcal{Q}_x) \curvearrowright M) \hookrightarrow R_x^{\lozenge}$. As alterações simbólicas, em S e $\mathcal{S}$, remodela o nosso sistema didático $S(x; y; \heartsuit_{\mathfrak{T}} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$, tornando-o equivalente a $S(y_1; \zeta; \heartsuit_{\mathfrak{T}} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$. Dessa forma, o sistema didático $S(y_1; \zeta; \heartsuit_{\mathfrak{T}} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$ comandará este capítulo de nossas análises do processo de formação continuada.

Outro ponto que precisamos destacar é relativo aos elementos do conjunto X, que participaram das sessões do PER. Incialmente, o conjunto X possuía 12 (doze) componentes, mas no decurso das sessões do PER, os componentes x_6, x_{10}, x_{11} e x_{12} desistiram da formação continuada, as razões dessa desistência não sabemos precisar, mas supomos que o processo de formação não correspondeu aos seus anseios. Efetivamente, para nossas análises, o conjunto X possuirá oito componentes x_n: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\}$. Os quatro componentes que desistiram estão referidos no Capítulo V, porém os oito professores de matemática que participaram de toda formação e apresentaram a atividade final possuem, de fato, maior relevância para nossas análises.

6.2. Análise do processo de Formação dos Professores x_n

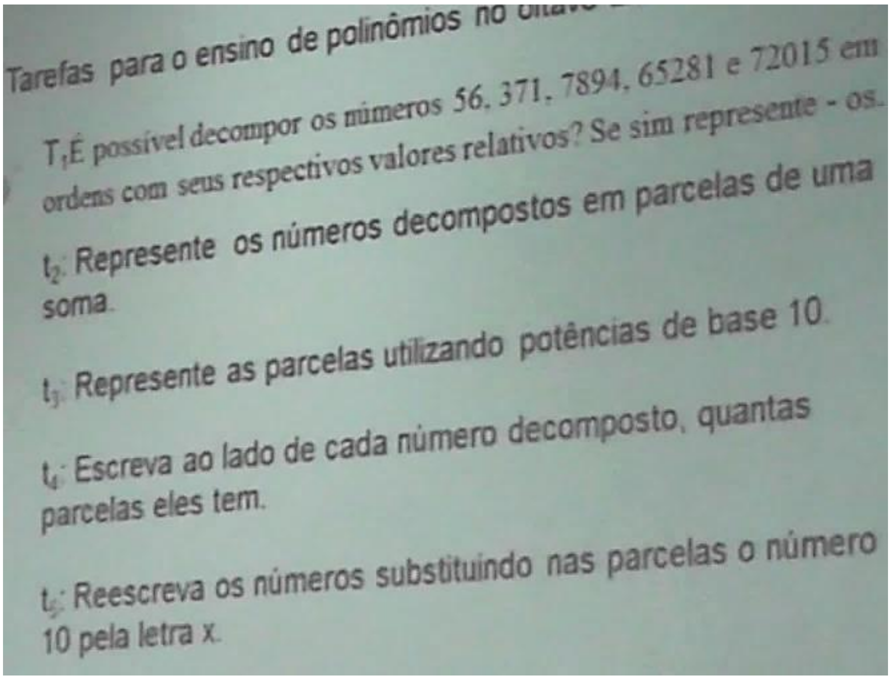
As propostas de aulas elaboradas pelos sete professores, que concluíram o processo de formação continuada, estão nos Anexos e seis destas foram apresentadas nas sessões nove, dez e onze. Nossa atenção sobressairá nas evidências externalizadas e reveladoras das memórias didáticas ostensivas (MATHERON; SALIN, 2002) desses sete professores de matemática. A memória didática ostensiva é um modelo para a memória didática e está associada à *memória prática da pessoa* e a *memória de um saber*[59] (MATHERON, SALIN, 2002; ARAYA-CHACÓN, 2008). De certo que “[...] a **ostensão da memória**, ocorre mobilizando vários registros: **da linguagem** para evocar as técnicas relacionadas com as tarefas, anteriormente, problemáticas; **gestual** para indicar ou mostrar [...]” (MATHERON; SALIN, 2002, p. 62, tradução e grifos nossos). Sabemos que outros tipos de registros estão presentes na ostensão da memória, mas o da linguagem e o gestual ganharam maior relevância nas sessões do PER.

No capítulo anterior, as Figuras 38, 39, 40, 41, 42 e 43, exibem aspectos da ostensão das memórias práticas dos professores x_1, x_3, x_4, x_5, x_7 e x_8. Interliguem-se nessas memórias práticas a objetivação de parte do equipamento praxeológico desses professores e o surgimento de questões $\boldsymbol{Q_x}$ e respostas $\boldsymbol{R_x}$. No que segue, analisaremos as propostas de aulas e alguns trechos transcritos das falas dos professores x_n, quando estes expuseram suas propostas de aulas, elaboradas a partir dos estudos das obras O_k (CHEVALLARD, 2012-2013), que enriqueceram o *milieu* das sessões do PER, principalmente, as de Pereira (2012). A análise dessas propostas de aulas sugue a ordem como ocorreu a apresentação das mesmas pelos seus autores durante as três últimas sessões do PER: x_1, x_8, x_4, x_3, x_5 e x_7. Além dessas seis propostas de aulas, analisaremos pôr último, as dos professores x_2 (enviou em forma de slides) e x_9 (entregou na forma manuscrita). Esses dois professores, x_2 e x_9, não expuseram, oralmente, suas intencionalidades praxeológicas com suas propostas de aulas.

[59] [...] No caso de uma disciplina escolar, esta memória externa é a *memória de um saber*. O saber matemático é então uma memória social externa à pessoa, provenientes de escolhas anteriores relevantes nas “comunidades matemáticas” que o construiu, que comandam os gestos para sua prática, os mesmos se atualizam nas instituições onde eles são aplicados.
A memória do saber é acessível porque é externa à pessoa e está depositada em obras matemáticas [...] (MATHERON; SALIN, 2002, p. 62, tradução nossa).

A proposta de aula do professor x_1 (ANEXO A) propõe um tipo de tarefas T_1, redistribuído nas tarefas t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6. Vemos na proposta desse professor uma compreensão particular do tipo de tarefas T_i, entendido como uma tarefa geral, que deve gerar as tarefas t_i. Essa externalização escrita da memória de x_1, revela que o Universo Cognitivo deste professor (daqui em diante ***UC(x₁)***) possui uma relação *R* não vazia com o bloco $[T, \tau]$, do saber-fazer (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2009a; CHEVALLARD, BOSCH, 2012), mas ainda muito básica, digamos que é uma memória ostensiva de baixo nível (MATHERON, 2000b; ARAYA-CHACÓN, 2008). Entretanto, a exposição oral desse professor mostra uma memória mais elaborada em relação aos estudos realizados nas sessões do PER, ou seja, o ***UC(x_1)*** sofreu modificações afetado pelo estudo de algumas obras O_k (CHEVALLARD, 2012-2013), como as de Chevallard (1989, 1999) e as de Pereira (2012). Essas modificações indicam recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2009a) promovidas no Equipamento Praxeológico de x_1 (***EP(x_1)***). De certo que há conflitos praxeológicos entre o modelo epistemológico predominante no ***EP(x_1)*** com as ideias praxeológicas $\wp$ da TAD (CHEVALLARD; BOSCH, 2012) e as do MEA de PEREIRA (2012). Nota-se que o professor x_1 formulou as tarefas de sua proposta de aula, assumindo a modelização numérico-algébrica das obras de Pereira (2012). Isso nos indica uma possível alteração praxeológica no ***UC(x_1),*** do ponto de vista didático, para ensinar álgebra no oitavo ano do Ensino Fundamental. A Figura 44 resume a apresentação da proposta de aula do professor de matemática x_1.

Figura 44- Resumo da apresentação da proposta de aula do professor x_1



Fonte: Elaborada pelo autor (2017).

A fala inicial do professor x_1, para expor sua proposta de aula, contem indicativo de preocupação sobre o ensino da álgebra no oitavo ano do Ensino Fundamental. Ele rememora o tempo que estudava álgebra na sétima série e externaliza, resumidamente, o possível modelo epistemológico que o professor de matemática utilizava para ensinar álgebra nessa etapa do ensino básico. A força desse modelo epistemológico o influenciou quando se tornou professor de matemática e seguiu o modelo proposto no livro didático. Entendemos que o professor x_1 vivenciou um *milieu* M constituído de obras O_k e suas respostas $R^{\lozenge}$(CHEVALLARD, 2012-2013), que o equipou, praxeologicamente, para ensinar álgebra escolar no Ensino Fundamental. A transcrição de parte da fala inicial do professor x_1 apresenta indícios que parecem evidenciar isso e conecta-se a nossa $\boldsymbol{Q_0}$.

> *Falando sobre o elemento do trabalho, no sentido de consciência, de preocupação nessa série, da 7ª série, deixa eu voltar a 7ª série, desde quando eu fiz essa 7ª série, que hoje é o 8º ano, que eu estava lá e de repente o professor começava a jogar um bocado de letras e a gente tinha que saber dizer que nome se dava, se era binômio, se era trinômio, tinha que somar letra, multiplicar letra. Então foi uma barreira muito grande, que hoje eu tenho dificuldade de chegar para os alunos, e de repente... . Eu sigo basicamente o que está no livro didático* [...] (PROFESSOR x_1, 2015).

Percebemos certo entusiasmo do professor x_1 ao tomar contato com as ideias contidas na obra ♥𝕯 de Pereira (2012). Ele anuncia que a obra ♥𝕯 possibilita uma nova praxeologia $\wp$, diferente da internalizada em seu equipamento praxeológico. Num linguajar protomemorial (CANDAU, 2014), ele declara ser possível alterar sua prática docente com as ideias contidas na obra ♥𝕯. Além disso, identificamos na fala de x_1, a problemática possibilística para o ensino da álgebra escolar (CHEVALLARD; BOSCH, 2012).

> [...] *quando eu fiz essa série de sequências, que eu chequei a dissertação, fiquei muito contente quando estava lendo. Eu fiquei muito grato pela oportunidade ter acompanhado esse sistema, eu vou fazer essas tarefas lá na escola do meu filho. O link entre a aritmética e a álgebra, agora podemos fazer uma coisa mais suave, em vez de chegar e dizer "Esse aqui é um monômio, isso aqui é um binômio, esse aqui é o trinômio e fim de papo*" [...] (PROFESSOR x_1, 2015).

No prosseguimento de sua explanação, o professor x_1, esboça certa reflexão de sua prática docente como professor de matemática e ressalta que não se dá a devida atenção para a extensão da ideia de valor relativo dos algarismos, em relação as ordens e classes, de um determinado número natural. Essa reflexão conflui com nossas questões $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$, mas no âmbito da Matemática Escolar, que de certa forma, ressoa no ensino da álgebra escolar. Evidentemente, observadas as condições C e restrições K do currículo do ensino básico relativas aos assuntos de álgebra escolar e das organizações praxeológicas propostas pelos autores dos livros didáticos de matemática.

> [...] *A gente não valoriza a 5ª série, por exemplo, a gente não faz essa retomada para decompor um número em valor relativo, a gente não faz isso de jeito nenhum. Como a gente não faz e a tarefa 1 pede que eu faça decomposição, a primeira tarefa diz o seguinte, "É possível decompor esses números em ordens com seus respectivos valores relativos? Se sim, represente, decomponha". A ideia é trazer para o aluno aquela história que ele já viu na 4ª série, com certeza, porque eu dei uma olhada no livro didático, já tem essa decomposição no 4º, 5º anos do fundamental I. E aí eu tinha que fazer a revisão e dizer que cada ordem dele, ocupam valor relativo a ordem que ele se encontra. Aí eu volto a falar de relativo de ordem e trabalhar a ordem dele. Depois que a gente faz isso, na segundo tarefa, eu pedir para representar os números, decomposto em parcelas de uma soma. Em parcelas, para ele poder... Já passou decomposto ali no número, agora eu posso pegar o 56 e decompor em 50 + 6; 371 em 300 + 70 + 1* [...] (PROFESSOR x_1, 2015).

As ideias praxeológicas, do MEA de Pereira, causam conflitos cognitivos no ***UC(x₁)***, porém, o efeito desses conflitos o fazem expor um pensamento mais elaborado sobre as praxeologias ℘ recorrentes no ensino dos objetos da álgebra escolar, em particular, a compreensão que ele abstrai do que são termos semelhantes a partir do algoritmo da soma aritmética. Essa nova compreensão de x_1, indica ocorrência de possíveis alterações praxeológicas na relação $\boldsymbol{R}$ de x_1 com o bloco do saber da álgebra escolar, ou seja, $\boldsymbol{R}(x_1; [\theta, \Theta])$ (CHEVALLARD, 1999, 2009a). Dessa forma, podemos interpretar no trecho da fala do professor x_1, transcrita a seguir, uma memória próxima da de alto nível (MATHERON, 2000b; CANDAU, 2014), que se configura como uma resposta truncada $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x_1}}$ para alguma questão $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{x_1}}$ não externalizada durante as sessões do PER, entretanto, a $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x_1}}$ insere-se em nossas hipóteses de tese e converge à $R^♥$ para nossa questão $\boldsymbol{Q}$.

> [...] *uma das coisas que eu noto muito é quando a gente pede para somar os termos semelhantes, ele quer somar o 10x com x^2 e agora quando eu estou falando posicional, eu vou frisar bastante. Eu não posso somar centena com dezena, o algoritmo da soma separa, a gente coloca unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena. Justamente porque se está fazendo um link com essa ideia. Eu estou pegando a parte do 100 que é o 10^2, portanto ao quadrado, eu vou somar só os semelhantes, só aqueles que tem quadrado* [...] (PROFESSOR x_1, 2015).

A ideia exibida no MEA de Pereira para explicar termos semelhantes é redimensionada pelo professor x_1 na tentativa de facilitar a compreensão do aluno, conforme vemos na tarefa t_6: "**Verifique nas expressões formadas, se existem termos que se assemelham (iguais) e os separem**". Isso revela que x_1 faz uma recombinação praxeológica, mas ao testar essa recombinação, com seu próprio filho, percebe que precisa reformular tal tarefa. Essa tentativa de validar o propósito da tarefa t_6, emana características da memória de alto nível (CANDAU, 2014) , porque x_1 tenta analisar a ostensividade da sua memória prática docente por intermédio da memória prática ostensiva de seu filho (MATHERON, 2000b). Com isso, entra em cena, em termos de memória didática, o “jogo didático” das obras ♥ (CHEVALLARD, 1998) que esse professor conhece ou estudou no processo de formação continuada.

> [...] *Eu achei que colocando a palavra “igual”, entre parênteses, o aluno poderia entender base e expoente. Minha ideia é que ele iria associar esse “igual” a semelhante. Como meu filho estava sem fazer nada, falei para ele: “Filho, faz essas tarefas aqui”. (...). Quando chegou no semelhante, eu acho que ele queria que tudo fosse igual, inclusive o valor numérico, para ele 3x, só poderia separar com outro que tivesse 3x também. Então, eu tive que refazer a tarefa também, é expoentes iguais. Todo número que está do lado dele, não caracteriza a semelhança. Para caracterizar a semelhança é o expoente de cima e isso dá uma ideia de posição que o número se encontrava* [...] (PROFESSOR x_1, 2015).

O professor x_1 concluiu a apresentação de sua proposta de aula, enfatizando que ela seria algo apenas inicial, mas tentaria elaborar outras tarefas que envolvessem as operações polinomiais. Em seguida, ele solicita a opinião dos outros professores sobre o que expôs. Uma dessas opiniões, do professor x_8, indica uma estratégia didática por meio de fichas dedutivas. Imediatamente, x_1 diz que faz uso dessa estratégia e já elaborou as fichas com as tarefas de sua proposta de aula. As discussões avançam e surge a pergunta de um professor externo ao conjunto X, o qual denotaremos por $\mathfrak{X}$. Esse professor externo participou de algumas sessões do PER com intuito de compreender os elementos teóricos da TAD. Eis a pergunta de $\mathfrak{X}$: “Vai haver uma tarefa antes, algo parecido, para que o aluno consiga fazer essa conversão? ”. A resposta de x_1 está transcrita a seguir:

> *Não, o quê que eu proponho é com base no que o professor falou sobre as tarefas. O quê que eu pensei? Eu pensei na tarefa 1, retomar com ele na tarefa 1, a história do valor relativo e valor absoluto do número, mostrando para ele que o valor relativo tem a ver com a ordem que ele se encontra. Lá no 56 por exemplo, o quê que ele tem que fazer? Tem que colocar 50 e o 6. A ideia da tarefa T_1 é prepara-lo, seguidamente, com as outras na sequência, é que ele pegue esse 56 e mostre que 6 e o 6, e que esse camarada aqui, o 5, é 5×10. Então decompô-lo na respectiva ordem* [...] (PROFESSOR x_1, 2015).

Vemos na resposta de x_1 aspectos mais aprimorados de sua memória didática ostensiva em relação ao sistema de numeração posicional decimal. Ele consegue expressar o propósito de ter elaborado a sequência de tarefas t_i a partir da T_1 e cita que seguiu as ideias que o diretor de estudo y_1 (professor) expôs sobre tarefas. Esse revelar praxeológico de x_1 dá indicativos de uma dinâmica cognitiva em evolução, tanto do ponto de vista transpositivo quanto do didático. Com isso, podemos presumir que a nossa praxeologia de investigação $\mathcal{H}$ (CHEVALLARD, 2012-2013), ajusta-se a metodologia do PER, principalmente, porque este dispositivo metodológico da TAD depende do elemento tecnológico de $\mathcal{H}$, o esquema herbatiano.

Após analisarmos a proposta de aula do professor x_1, vejamos a proposta de aula do professor x_8 (ANEXO E), o segundo a expor suas ideias para ensinar conteúdos de álgebra escolar a partir do oitavo ano do ensino fundamental. A proposta de aula desse professor esboça aspectos teóricos mais refinados em relação a proposta de x_1, ou seja, mostra uma memória didática de alto nível (MATHERON, 2000b; CANDAU, 2014) e uma dinâmica cognitiva (CHEVALLARD, 2009a) mais aprimorada em relação ao estudo de obras ♥ (CHEVALLARD, 1998, 2009g, 2011b), inclusas nestas as de Chevallard (1999, 2001), Carvalho e Pereira (2009), Pereira (2012) e Travassos (2008). A obra de Chevallard (2001) e de Travassos não compuseram as obras O_k do *milieu M* das sessões do PER. Em sua fala inicial o professor x_8 revela o porquê de ter consultado outras obras.

> [...]. *Eu ando mudando muito o meu ritmo de trabalho em sala de aula. E aí está o projeto de y_1, praxeologia e o ensino de álgebra na escola básica [...]. Eu elaborei meu trabalho assim, introdução, eu acho que é importante por uma introdução, a interpretação matemática, depois eu coloquei a localização, onde eu pretendo colocar em prática essa praxeologia de y_1 e o levantamento de noções teóricas. Eu tentei fazer isso, porque eu achei importante, até porque vai me ajudar no futuro, nas minhas intenções que tenho aqui na UFPA. Daí eu coloquei, depois do levantamento de noções teóricas, uma noção de didática da matemática, noções de transposição didática, noção da teoria antropológica didática – TAD, noções de praxeologias. Eu tive que buscar tudo isso para poder fazer o trabalho proposto por y_1. Tipo de praxeologia analisado no estudo, eu abordei no meu trabalho também. Daí entra o que y_1 propôs para a gente: noção de tarefas, tipo de tarefas, noção de técnicas, noção de tecnologia e noção de teoria. Tudo isso eu achei importante para esse trabalho. Depois vem tipos de praxeologias, que eu achei importante, na questão pontual, local e regional, que eu observei no trabalho de y_1. Depois eu coloquei elaborar tarefas, que foi a atividade proposta: elaborar tipo de tarefas para o ensino de polinômios no 8º ano do ensino fundamental* [...] (PROFESSOR x_8, 2015).

O professor x_8 adapta a modelização de tipo de tarefas e de tarefas, do MEA de Pereira, na elaboração das duas atividades contidas em sua proposta de aula. Nessas duas atividades, observa-se que o professor se inspiras no modelo geométrico euclidianista para encadear as ideias algébricas – algo identificado nas obras do Capítulo II: Viète (1630), Maclaurin (1753) e Peacock (1845). A influência do modelo geométrico no universo cognitivo de x_8 (***UC(x_8)***) parece ser tão dominante, que o leva ao conflito praxeológico sobre tipo de tarefas T e tarefas t_i, conforme vemos na Figura 45.

Figura 45 - Conflito praxeológico de x_8 na elaboração de tipo de tarefas T e tarefas t_i

ATIVIDADE N°1

1ºEtapa: Tarefa (T): Calcular o polinômio que representa o comprimento do segmento $\overline{AC}$ da figura abaixo. Escreva o resultado em forma de número natural e polinomial.

A__________B__________C

Onde: $\overline{AB} = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 5$ $\overline{BC} = 6x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

2° Etapa: Tipos de tarefas (t1): Desenvolva os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em parte na forma de base 10.

3° Etapa: Tipos de tarefas (t2): Somar todos os segmentos $\overline{AB} + \overline{AC}$ Utilizando as técnicas proposta por Pereira (2012), seguindo as ideias contidas no modelo epistemológico alternativo utilizado pelo o autor com objetivos de resolução dessas operações.

Fonte: Proposta de aula do professor x_8 (2015).

Diremos que o equipamento praxeológico de x_8 (***EP(x₈)***) sofreu efeitos da problemática "*de base*" da álgebra elementar (CHEVALLARD; BOSCH, 2012), quando este elaborou a "ATIVIDADE Nº 1" de sua proposta de aula. As etapas indicadas nessa atividade deixam transparecer que o professor está submetido as restrições K e condições C, dos modelos epistemológicos da álgebra escolar, que vivem nas instituições escolares e predominam em sua prática docente institucional (CHEVALLARD, 1994a; CATALÁN, 2003; GARCIA, BOCH, GASCON, 2007). A extensão dessas restrições e condições avançou à "ATIVIDADE Nº 2", porque o professor, ao fazer a substituição dos coeficientes inteiros por números decimais nos termos algébricos de grau 3 e 2 dos polinômios que representam os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, manteve a mesma compreensão praxeológica da atividade anterior. Porém, essa simples troca de inteiros por decimais, externaliza uma objetivação do ***EP(x₈)*** em termos de recombinação praxeológica adaptada ao MEA de Pereira (2012). Embora existam incoerências praxeológicas nas duas atividades do professor x_8, em relação as simbologias da TAD, por exemplo, ao denotar tarefa por "T" e tipos de tarefas por "t1 e t2", ele consegue expor a intencionalidade de sua proposta de aula, ou seja, aliar as ideias praxeológicas da obra ♥𝔇 de Pereira, com as do modelo geométrico proposto nos livros didáticos de matemática. Ressaltamos que as oralidades de sua apresentação corrigiram algumas dessas incoerências, assim como, alguns professores e o diretor de estudo y_1, ajudaram-no a perceber os erros existentes em sua proposta de aula, tanto teórico quanto didático, principalmente, na segunda atividade, na qual esse professor não consegue aplicar as ideias do MEA de Pereira para concretizar a soma com números naturais, algo verificado na soma: 12500000 + 640000 + 80 + 5 = 12564085. Esse erro foi percebido pelos professores e mostramos mais adiante as devidas correções. Além disso, nossas duas hipóteses de tese foram acrescidas de novas concretudes de respostas $R_i^{\lozenge}$, $R_j^{\lozenge}$ e $R_n^{\lozenge}$. Por exemplo, mantendo a proposta de aula do professor x_8 (ANEXO E) sem corrigir os erros existentes em tal proposta.

Antes de explicar o que pretendia com sua proposta de aula, o professor x_8, faz um preâmbulo, resumindo o que o aluno precisa para alcançar a aprendizagem quando estuda. Segundo indicativos de trabalhos que este professor leu, o aluno para entender qualquer tipo de tarefas, ele precisa saber ler, interpretar e fazer as tarefas propostas. O professor também acrescenta o hábito de estudar em casa e o apoio familiar. Essa fala do professor ressoa com características de memória de alto nível e metamemória, pois resume ideias de outrem e suas também.

> [...] *para um aluno, para ele vencer essa aprendizagem, ou seja, para ele não ter dificuldade na aprendizagem, as leituras que eu já fiz de alguns trabalhos, para ele conseguir entender qualquer tipo de tarefas, em primeira mão, o aluno primeiramente tem que saber o quê? Ele tem que saber ler, interpretar, e depois saber o quê? [...] saber fazer. Se ele não tiver esses três passos, não tem doutor que o faça entender. E ainda digo mais, pelas leituras que eu fiz, eu percebi também o seguinte, ele também tem que ter o hábito de estudar, o hábito de estudar em casa, senão não dá para entender nem o tipo de tarefas e, com certeza, acrescente-se o apoio familiar* [...] (PROFESSOR x_8, 2015).

A explicação de x_8 para a “ATIVIDADE Nº 1” significa expressar sua metamemória sobre as tarefas que ele encandeou para conformar o bloco do saber-fazer (tipo de tarefas T e técnica τ) e do saber (tecnologia θ e teoria Θ) do MEA de Pereira. Nessa atividade as questões auxiliares, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$, e os sistemas didáticos S_1 e S_2, tornam-se mais evidentes na praxeologia de investigação $\mathcal{H}$, inserida na metodologia do PER.

> [...] E*u elaborei essa atividade aqui, atividade um, eu dividi em três etapas, a primeira etapa, calcular o polinômio que representa o comprimento do segmento* $\overline{AC}$ *da figura abaixo. Escreva o resultado em forma de número natural e polinomial, ou seja, eu quero o resultado em forma de número natural e depois polinomial. Essa aqui não tive problemas na minha da técnica, deu para desenvolver legal, o que foi que eu fiz aqui? Eu desenvolvi, mas para eu chegar nesse entendimento, eu dividi na segunda etapa, tipos de tarefas. O primeiro passo que eu vou fazer, eu vou desenvolver o segmento* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *em parte, na forma de base 10. Depois o que foi que eu fiz? Tipos de tarefa, somar todos os segmentos* $\overline{AB}$ *mais* $\overline{AC}$ *utilizando as técnicas proposta por Pereira (2012), seguindo as ideias contidas no modelo epistemológico alternativo utilizado pelo autor, com o objetivo de resolução dessas operações, ou seja, segui o que ele fez. Eu não criei*

> *um modelo, segui o que o Pereira fez ali. Então está aqui a tarefa, depois vem os tipos de tarefa, a tarefa número 1. Aí o tipo de tarefas, é esse desenvolvimento, essa leitura, a tarefa tem dois outros desenvolvimentos, ok? Daí eu continuei e aí eu fiz assim, desenvolvendo os segmentos* $\overline{AB}$ *por parte; desenvolvendo do segmento* $\overline{AB}$ *por parte na forma decimal, considerando x=10. Aí eu desenvolvi, eu coloquei... houve uma tecnologia de potência de base 10 que permitiu produzir uma técnica, proposta de Pereira* [...] (PROFESSOR x_8, 2015).

Anteriormente, comentamos da "ATIVIDADE Nº 2", de como ela teve significado para nossa tese, mas para o professor x_8 significou problemas praxeológicos. Digamos que o (***UC(x₈)***) passou por conflitos cognitivos porque o ***EP(x₈)*** não estava equipado com praxeologias $\wp$, que dessem conta de solucionar as tarefas dessa atividade; nem o MEA de Pereira (2012) contém esse tipo de tarefas articulados a técnica τ que solucionou as tarefas da "ATIVIDADE Nº 1". Entretanto, o professor x_8, ao objetivar seu equipamento praxeológico e sua memória prática ostensiva, compartilhou essa problemática praxeológica com os outros professores e diretores de estudo, permitindo que houvesse contribuições tanto para sua proposta de aula quanto para acréscimos de novas ideias ao MEA de Pereira.

> [...] *agora eu vou pegar o número decimal, um número bem feio e vou fazer a mesma coisa que eu fiz na atividade 1, só que não deu certo. É aí que o nó vai acontecer. Não sei se vocês vão me ajudar. Olha os tipos de tarefas, não sei também se errei em alguma coisa. [...]. Então, olha só, eu fiz, mas a técnica utilizada para calcular em naturais pode fracassar em outro conjunto numérico. Eu fiz assim e fracassou, eu não consegui desenvolver mais. Olha ali, 1,25 eu transformei para base 10, por* 125×10^2, e esse *número 6,4, eu transformei para* 64×10^2. *Então* x^3 *troquei para* 10^3*, peguei o x e substitui por 10. Esses números decimais eu transformei para a base 10* [...] (PROFESSOR x_8, 2015).

Para mostramos com mais detalhes a problemática praxeológica vivenciada por x_8, em sua proposta de aula, adaptamos a Figura 46 para analisarmos o porquê da técnica contida no MEA de Pereira falhou na resolução da "ATIVIDADE Nº 2".

Figura 46 – Resolução da “ATIVIDADE Nº 2”

$\overline{AB} = 1{,}25x^3 + 6{,}4x^2 + 8x + 5$

$\overline{AB} = 1.25x^3 + 6.4x^2 + 8x + 5$

$\overline{AB} = 125.10^2.10^3 + 64.10^2.10^2 + 8.10^1 + 5.10^0$

$\overline{AB} = 125.10^5 + 64.10^4 + 8.10 + 5.1$

$\overline{AB} = 12500000 + 640000 + 80 + 5$

$\overline{AB} = 12564085$ → Um número natural

$\overline{BC} = 0{,}006x^3 + 4.10x^2 + 5x + 2$

$\overline{BC} = 0{,}006x^3 + 4.10x^2 + 5x + 2$

$\overline{BC} = 6.10^{-3}.10^3 + 4.10.10^2 + 5.10^1 + 2..10^0$

$\overline{BC} = 6..10^0 + +4.10^3 + +5.10^1 + +2.10^0$

$\overline{BC} = 6.1 + 4.1000 + 5.10 + 2.1$

$\overline{BC} = 6 + 4000 + 50 + 2$

$\overline{BC} = 4058$ → Um número natural

Somando os dois números naturais encontrados obterão :

$12564085 + 4058 = 1256801313$ → Resultado na forma de número natural

<u>Outra técnica seguindo a posposta de Pereira</u>

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, considerando x = 10

$\overline{AC} = 1.25x^3 + 6.4x^2 + 8x + 5 + 0{,}006x^3 + 4.10x^2 + 5x + 2$

$\overline{AC} = 125.10^2.10^3 + 64.10^2.10^2 + 8.10^1 + 5.10^0 + 6.10^{-3}.10^3 + 4.10.10^2 +$
$5.10^1 + 2..10^0$

$\overline{AC} = 125.10^5 + 64.10^4 + 8.10 + 5.1 + 6..10^0 + +4.10^3 + +5.10^1 + +2.10^0$

$\overline{AC} = 12500000 + 640000 + 80 + 5 + 6.1 + 4.1000 + 5.10 + 2.1$

$\overline{AC} = 12500000 + 640000 + 80 + 5 + 6 + 4000 + 50 + 2$

$\overline{AC} = 12500006 \quad 68000 \quad 130 \quad 7$

Fonte: Adaptada da proposta de aula do professor x_8 (2015).

A confusa atividade 2, elaborada pelo professor x_8, mostra que, esse professor ao propor tarefas nas quais os coeficientes dos termos algébricos eram números decimais ou algo híbrido, como em “$4.10x^2$”, tenta realizar uma alteração praxeológica no MEA de Pereira (2012), mas seu universo cognitivo não estava equipado, suficientemente, com a compreensão do bloco do saber que rege a Organização Matemática da obra de Pereira. Acrescente-se os equívocos na aplicação da técnica τ, identificados por outros professores no momento que x_8 explicava a resolução da referida atividade. Por exemplo, em $125 \cdot 10^2 \cdot 10^3$, o expoente 2 deve ser negativo e, em $64 \cdot 10^2 \cdot 10^2$, o expoente do primeiro dez deve ser -1. Vejamos o correto valor numérico natural que representaria o segmento $\overline{AB}$: $\overline{AB} = 125 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 + 64 \cdot 10^{-1} \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 125 \cdot 10^1 + 64 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 1250 + 640 + 80 + 5 = 1000 + 200 + 50 + 600 + 40 + 80 + 5 = 1000 + (200 + 600) + (50 + 40 + 80) + 5 = 1000 + 800 + 170 + 5 = 1000 + 800 + 100 + 70 + 5 = 1000 + (800 +100) + 70 + 5 = 1000 + 900 + 70 + 5 = 1975$. O interessante é que o valor natural do segmento $\overline{BC}$ está correto, ou seja, $\overline{BC} = 4058$. Calculando-se $\overline{AC}$: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 1975 + 4058 = 6033$ (soma aritmética). A soma pelas ideias algébricas seria: 1975 + 4058 = 1000 + 900 + 70 + 5 + 4000 + 0 + 50 + 8 = (1000 + 4000) + (900 + 0) + (70 + 50) + (5 + 8) = 5000 + 900 + 120 + 13 = $5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 13 \cdot 10^0$, fazendo-se $x = 10$, tem-se $5x^3 + 9x^2 + 12x + 13$.

Ao corrigirmos os erros da resolução da "ATIVIDADE Nº 2, surge a pergunta: O polinômio $5x^3 + 9x^2 + 12x + 13$ é o resultado de ($1,25x^3$ + $6,4x^2$ + $8x$ +5) + ($0,006x^3 + 4 \cdot 10x^2 + 5x$ + 2)? Com uma simples observação, ver-se que não. A soma dos dois polinômios resulta $1,256x^3 + 46,4x^2 + 13x + 7$. Porém, se fizermos $x = 10$, temos: $1,256 \times 10^3 + 46,4 \times 10^2 + 13 \times 10 + 7 = 1256 \times 10^{-3} \times 10^3 + 464 \times 10^{-1} \times 10^2 + 13 \times 10 + 7$ = 1256 + 4640 + 130 + 7 = 1000 + 200 + 50 + 6 + 4000 + 600 + 40 + 0 + 100 + 30 + 7 = (1000 + 4000) + (200 + 600 + 100) + (50 + 40 + 30) + (6 + 0 + 7) = 5000 + 900 + 120 + 13 = 5000 + 900 + 100 + 20 + 10 + 3 = 5000 + 1000 + 30 + 3 = 6000 + 0 + 30 + 3 = 6033.

Nota-se nos dois parágrafos anteriores a existência da complexidade praxeológica embutida na "ATIVIDADE Nº 2 da proposta de aula do professor x_8. Talvez seja essa complexidade que se tornou uma restrição praxeológica à prática ostensiva desse professor para solucionar essa atividade, digamos que esse professor não possuía em sua memória prática praxeologias $\wp$ para superar a complexidade da segunda atividade que ele elaborou como parte de sua proposta de aula. Acrescente-se que o ***EP(x₈)*** possui lacunas praxeológicas não preenchidas durante a formação continuada e, principalmente, em relação ao bloco do saber-fazer Π e do saber Λ (CHEVALLARD, 2009a) de alguns objetos não ostensivos que sustentam a dialética numérico/algébrico da modelização da OM do MEA de Pereira, some-se ainda a dificuldade para elaborar e compreender tarefas problemáticas (CHEVALLARD, 1999), nas quais os objetos ostensivos e não ostensivos são essenciais para o sucesso da atividade matemática.

Prosseguimos nossa análise, examinando a proposta de aula do professor x_4 (ANEXO C), que está estruturada em tipos de tarefas T_i, tarefas t_i e subtarefas $t_{i,n}$ (i = indica tarefa e n = subtarefas). Em conformidade com as noções teóricas da TAD (CHEVALLARD, 1998, 1999; CHEVALLARD, BOSCH, 1999), a proposta de aula de x_4, está elaborada com oito tipos de tarefas T_i e outros três mais convenientes com a classificação de tarefas t_i. Constata-se na proposta de aula de x_4 que as tarefas dos primeiros oito tipos de tarefas T_i (i = 1, ..., 8) não possuem resolução e os três finais contam de resolução. Presumimos que o professor optou pela resolução das tarefas finais por julgar de maior complexidade ou por conectarem os modelos epistemológicos da álgebra escolar predominantes nos livros didáticos de matemática do Ensino

Fundamental e Médio: álgebra como aritmética generalizada e álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (USISKIN, 1995; CATALÁN, 2003; KEPPKE, 2007; PEREIRA, 2012). Está evidente nas tarefas finais da proposta de aula de x_4, a presença de elementos do modelo geométrico euclidianista e o uso dos objetos da álgebra elementar escolar como recurso praxeológico para solucionar as tarefas formuladas (PEACOCK, 1845; CHEVALLARD, 1989, 1994a, 1994b, 1998, 1999, 2009b).

O professor x_4 formulou os tipos de tarefas de T_1 a T_8, norteado pelas obras estudas nas sessões do PER e adaptou os dois finais, T_{10} e T_{11}, provavelmente, da Organização Matemática e Didática de um livro didático de matemática. Isso confirma que o processo de formação continuada promoveu dinâmicas cognitivas no ***UC(x₄)*** e causou recombinações praxeológicas, pelo menos didáticas, no ***EP(x₄)***, com maior ênfase nas ideias contidas no bloco do saber-fazer das obras $♥_{\mathfrak{D}}$ e $♥_{\mathfrak{E}}$ de Pereira (2012). Para apresentar sua proposta de aula, o professor x_4 escolheu a tarefa t_1 do tipo T_2, a t_2 do tipo T_5 e as duas tarefas do tipo T_{11}. A Figura 47 exibe as escolhas de x_4.

Figura 47 – Tipos de tarefas e tarefas selecionadas por x_4

T_2: Indicar o valor relativo dos algarismos indo-arábico nos números naturais.

t_1: Indicar o valor relativo dos algarismos no número 1555;

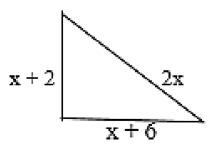
t_2: Indicar o valor relativo dos algarismos no número 2000.

T_5: Determinar a soma aritmética entre dois números escritos na representação polinomial de potência de base 10.

t_1: 124 e 232;

t_2: 845 e 139.

T_{11}: De acordo com a figura abaixo, determine a escrita polinomial que representa cada situação a seguir:



t_1: A escrita polinomial de potência de base 10 do perímetro da figura acima (triângulo isósceles), sendo x =10;

$t_{1.2}$: Escrever a expressão algébrica que representa o perímetro da figura (triângulo isósceles);

t_2 : O polinômio que representa a área da figura;

$t_{2.1}$:A expressão polinomial sendo na potência de base 10 de t_2 , sendo x = 10;

Fonte: Adaptada da proposta de aula do professor x_4 (2015).

As tarefas t_1 e t_2 da Figura 47 não estão solucionadas na proposta de aula de x_4 (ANEXO C), mas as tarefas e subtarefas do tipo T_{11} possuem solução. A solução das tarefas t_1 e t_2 foram mostradas pelo professor no momento que ele explicou sua proposta de aula. As transcrições de trechos da oralidade desse professor revelam partes de sua memória ostensiva para solucionar t_1 e t_2.

> [...] *A primeira tarefa, qual o valor relativo dos algoritmos indo-arábico nos números naturais. Eu coloque assim, indicar o valor relativo dos algarismos 1555, onde eu queria que o aluno representasse o valor relativo deles, indicando nesse número. O quê que eu fiz para que ele fizesse essa indicação? Primeiro, eu separei por algarismos e, cada algarismo, eu separei por posição de ordem, posição de ordens para que ficasse um pouco mais claro para ele. Como eu coloquei aqui, o que é valor relativo? Valor relativo é a posição que o algarismo ocupa em um determinado número. Então para ficar mais claro, eu deixei dessa forma. Coloquei o algarismo 1 que representa a decomposição 1000, algarismo 5, primeiro 5 que eu decompus na forma de 500, o outro 5 em forma de 50 e o outro em 5. Acabei separando, por que eu fiz essa divisão aqui? Porque eu queria deixar claro, quero deixar claro para o aluno, que ao separar, para verificar a posição do valor relativo, ele consiga perceber a sua ordem, vamos supor, aqui eu tenho 5 que vai fazer referência a unidade; 50 que é 5×10, que é cinco dezenas; 500 que é 5×100, que é cinco centenas e 1 que é 1×1000. Aí aqui vai da ordem das unidades, dezenas, centenas e milhar, com isso a gente consegue relacionar as posições de uma maneira mais simples, vamos dizer, não sei se vai ser tão plausível assim, mas eu penso que poderia ser assim, poderia ficar dessa forma. E a outra atividade eu fiz, se alguém quiser comentar alguma coisa. Posso passar então? Bom, aqui foi outro ponto que eu achei importante passar, que é determinar a soma aritmética entre dois números escritos na representação polinomial de potência de base 10. Então o número que eu separei foi o 845 e 139. Teve outra tarefa anterior? Teve, só que eu achei mais importante falar sobre essa, devida a transformação que vai surgir no meio dessa operação. Aí o que eu fiz? Eu fiz a decomposição, depois que eu fiz a decomposição deixei na forma polinomial de potência de base 10 e fiz a operação, a soma como x_8 fez anterior. Quando eu fiz aqui, ficou $800 + 100 = 900$, $40 + 30 = 70$ e $5 + 9 = 14$. Aí deixei reservado aqui e fiz na forma de potência na base 10, ficou $9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 14 \cdot 10^0$. Nessa situação, quando eu coloco nessa forma aqui, um em baixo do outro, para deixar mais claro, que vai ter a soma dos termos semelhantes. No caso, a posição, a ordem aqui. Só que aconteceu um probleminha bem aqui, $9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 14 \cdot 10^0$, aí de acordo com a técnica o algarismo tem que ser menor do que a base, ou seja, aí eu estudei aquela parte lá da propriedade da técnica do Pereira, que ele retrata que quando isso ocorre, nós temos que fazer a transformação, porque esse algarismo é maior do que a base. No caso, a base que eu estou falando é a base 10. Aí eu fiz a transformação, temos que decompor o 14, eu só fiz acrescentar aqui a técnica, fiz dessa forma a decomposição do 14, $(10^1 + 4) \cdot 10^0$. Ao fazer isso, eu posso também usar a propriedade distributiva, aqui embaixo, eu faço a referência. Eu sei que o 10 aqui, não estou observando o expoente, mas eu sei que o expoente é 1. Aí quando eu faço isso, aí eu coloco $9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Nesse momento eu coloquei, lembrando que 10^0 é 1. Eu só retirei para não mexer muito com a cabeça do aluno, desde lá eu estou reforçando, por quê? Para mostrar que esse número, ele está na base decimal e o expoente dele é zero. Aí eu venho aqui e coloco que 10^0 é igual a 1. Fazendo isso, eu coloco novamente, aqui, verifico os termos semelhantes a 10^1 e faço $7 + 1= 8$, fica $9 \cdot$*

$10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4$ e tem que dar certinho esse resultado aqui, se eu fizesse normalmente, 5 + 9, 14. Como 14 iria passar de 10 transformaria na dezena, uma dezena, ficaria 4 + 3 = 7, com mais uma dezena, 8. Dessa forma, eu deixei tanto na forma tradicional como na decomposição e na forma da representação polinomial de potência de base 10 [...] (PROFESSOR x_4, 2015).

A explicação do professor x_4 sobre seu entendimento matemático e didático da resolução das tarefas t_1 e t_2, transparecem aspectos de sua memória didática ostensiva, situados nos três tipos: protomemória, memória de alto nível e traços de metamemória. Conjugue-se a isso, a externalização praxeológica ou objetivação de seu equipamento praxeológico sobre o estudo da obra de Pereira (2012) e as dinâmicas cognitivas promovidas em seu universo cognitivo, advindas desse estudo. Temos assim, mais respostas $\boldsymbol{R_i^\lozenge}$, $\boldsymbol{R_j^\lozenge}$ e $\boldsymbol{R_n^\lozenge}$, para nossas questões dos sistemas didáticos $\boldsymbol{S_0}$, $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ e $\boldsymbol{S}$, assim como, elementos de confirmação parcial de nossas duas hipóteses de tese.

As resoluções das tarefas e subtarefas pertencentes ao tipo de tarefas T_{11} constam na proposta de aula de x_4 e por possuir vários problemas em sua formulação, vemo-la como problemática, então optamos por mostrar na Figura 48 a memória prática ostensiva de x_4 e as transcrições das as opiniões de alguns dos professores x_n, do professor externo $\mathfrak{X}$ e do diretor de estudo y_1, sobre o procedimento praxeológico matemático e didático de x_4.

Figura 48 – Resolução das tarefas e subtarefas do tipo de tarefas T_{11} por x_4

t_1: A escrita polinomial de potência de base 10 do perímetro da figura acima (triângulo isósceles), sendo x =10;

Perímetro = x +2 + 2x + x + 6
Perímetro = 10 + 2 + 2.10 + 10 + 6
Perímetro = 2.10^1 + 10 + 10 +2 + 6
Perímetro = 2. 10^1 + 1.10^1+ 1.10^1 + 2. 10^0 + 6. 10^0
Perímetro = (2 +1 + 1).10^1 + (2 + 6).10^0
Perímetro = **4.10^1 + 8 .10^0**

$t_{1.2}$: Escrever a expressão algébrica que representa o perímetro da figura (triângulo isósceles);

Como perímetro na escrita polinomial de potência de base 10 corresponde a **4.10^1 + 8 .10^0**, *logo sua expressão algébrica equivale:* **4x + 8**

t_2 : O polinômio que representa a área da figura;

Como a figura é triângulo e sua área corresponde a metade do produto de sua base pela altura, logo A = $\frac{(x+6).(x+2)}{2}$

Representando base do triângulo por **B** a altura por **H**, temos:

B = (x +6) e H = (x+ 2) então , A = (B . H)/ 2

B.H = (x + 6) . (x + 2) = x.x + 2.x + 6.x + 6.2 (usando a propriedade distributiva)

B.H = x^2 + (2 +6)x + 12 redução determos semelhantes

B.H = x^2 + 8x +12, portanto **A = (x^2 + 8x +12)/2**

$t_{2.1}$:A expressão polinomial sendo na potência de base 10 de t_2 , sendo x = 10;

Partindo do mesmo princípio da tarefa anterior t_2B .H

B.H = (x + 6) . (x + 2) = (1.10 + 6) . (1.10 +2)
= 1.10.10 + 1.10.2 + 6 .1.10 + 6.2
= 1.10^2 + 2.10 + 6.10 +12
= 1.10^2+ (2 + 6).10 + 12 redução de termos semelhantes
= 1.10^2+ 8. 10^1 + (10+2)10^0

Portanto **A = [1.10^2+ 8. 10^1 + (10+2)10^0] /2**

Fonte: Adaptada da proposta de aula do professor x_4 (2015).

> [...] x_4 *deixou algumas lacunas que eu estou enxergando daqui, tem uma lacuna que ele deixou no modelo. Ele provocou aqui um pensamento, eu nãos sei se aparecerá nos outros, por isso eu não vou comentar, mas* x_4 *provocou o surgimento de uma problemática* (DIRETOR DE ESTUDO y_1).
>
> *Acho que tem uma problemática ali para pensar, será que olhando algebricamente é possível, claro, que a gente tenha uma representação algébrica para números diferentes. Tomamos x = 6, por exemplo, nós temos de fato um triângulo isósceles? Não necessariamente a gente precisa representar da mesma forma, algebricamente, o segmento para caracterizá-lo ali como um triângulo isósceles. Observa que ali ela põe 2x e lá embaixo ela x + 6. De cara a gente vai pensar, mas não tem um triângulo isósceles, pela figura e pelas representações polinomiais das medidas dos lados, a gente não tem um triângulo isósceles, se for pensar. Mas e se x for igual a 6, a gente tem. Embora a figura precise de uma nova forma, mas aí nós teríamos. Você está entendendo? Você diz que o triângulo é isósceles...* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$).
>
> *É um triângulo pitagórico* (PROFESSOR x_4).
>
> *É, mas também não dá para dizer que é pitagórico, porque não tem nada que o caracteriza como pitagórico. O que levou o segundo equívoco é que você tomou como base. Por exemplo, a base teria que ser altura. Iria precisar caracterizar então que o triângulo é retângulo para assumir como base, porque já atribuiu uma medida para o cálculo da área, você tomou x + 6 e x + 2, assumindo que x + 6 é base, mas, no entanto, não dá para a gente afirmar, a figura não deixa clara. Está me entendendo? Aí você está considerando os lados iguais, aí seria x + 6 e x + 2 aí vai ficar errado mesmo.*
> *Agora para dizer que é triangulo isósceles, poderia dizer que x + 6 é igual a 2x, poderia ter um termo de isósceles por uma representação algébrica diferente de x + 6 e 2x, se o x for igual ao 6, eu teria... eu não sei se vocês estão conseguindo entender o que eu estou querendo dizer* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$).
>
> *O* $\mathfrak{X}$ *está expondo uma problemática que envolve a construção de tarefas, ou adaptações delas. Acabou já revelando uma das coisas que eu não revelei, porque não sou que tenho que revelar, são vocês que estão em formação que, talvez, enxerguem* (DIRETOR DE ESTUDO y_1).
>
> *É porque na questão quando ele fala que é isósceles, deveria ter deixado no quadro, que se um lado for x + 6, o outro deveria ser x + 6* (PROFESSOR x_4).
>
> *Não necessariamente, você poderia dizer que é isósceles, por exemplo, x + 6 e 2x, poderia ser chamado de lados. Agora, para a questão do cálculo da área, aí especificaria entre altura* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$).
>
> *É que eu não deixei claro desde o início, quem seria a base e quem seria a altura.*
> *Ah, não era nem para ter deixado a questão do isósceles.*
> [...] *Aquela questão, o que acontece? Está na nossa cabeça, a gente acha que vai ser de fácil compreensão pelo aluno. É igual quando a gente escreve alguma coisa, se eu escrevo algo que realizei, se outra pessoa não ler para mim, vou achar tudo claro, porque fui eu que realizei, conforme fiz* (PROFESSOR x_4)

A Figura 48 e os diálogos transcritos acima evidenciam a objetivação dos equipamentos praxeológicos de x_4, y_1 e, do professor $\mathfrak{X}$. Tudo gerado por uma problemática identificada no desenvolvimento praxeológico do tipo de tarefas T_{11}, no qual o objeto triângulo se mostrou problemático para x_4 nas conexões de noções aritméticas e algébricas, some-se ainda as propriedades que regem esse objeto, relativas a medida dos lados e dos ângulos internos. Esse tipo de tarefas, elaborado por x_4, possui elementos das problemáticas registradas por Chevallard (1984, 1989, 1990), principalmente, as associadas a noção de modelização e de problemas didáticos, concernentes ao ensino de objetos matemáticos. Isso transparece que x_4 é carente de uma memória do saber sobre triângulos para consorciar outras memórias de um saber (MATHERON; SALIN, 2002), digamos mais refinado em termos de organizações praxeológicas (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2009a, 2009b, 2009c; MATHERON, 2000a).

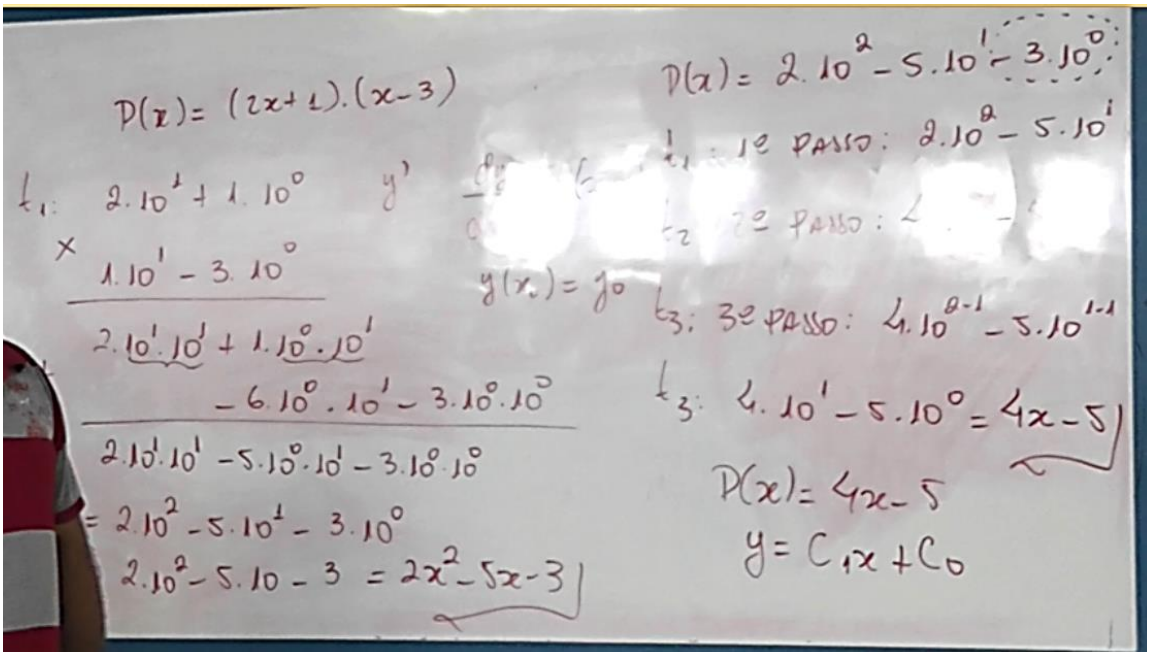
As resoluções de x_4, exibidas na Figura 48, torna possível vermos que o MEA de Pereira imprimiu recombinações didáticas no ***EP(x₄)***, ou seja, a técnica τ foi bem compreendida por esse professor. Quanto aos conflitos cognitivos promovidos no ***UC(x₄)***, gerados pelas observações do professor $\mathfrak{X}$, provocou diálogos praxeológicos reveladores de que o professor x_4 tem uma fraca relação pessoal com certos objetos matemáticos, por exemplo, triângulos. Isso não significa que o ***EP(x₄)*** não possua certa praxeologia $\wp$ para ensinar esse objeto, mas que o ***UC(x₄)*** precisa de dinâmicas cognitivas que promovam alterações praxeológicas no bloco do saber $\Lambda= [\theta \ / \ \Theta]$ para melhorar sua memória prática ostensiva quando formular ou solucionar tarefas t_i, que demandem maior "lastro" de saberes específicos de objetos da geometria plana.

A análise das propostas de aulas dos professores x_1, x_8 e x_4 evidencia a existência de várias práticas ostensivas com objetos da álgebra escolar, que entendemos ser respostas $\boldsymbol{R}^{\Diamond}$institucionalizadas em obras ♥ de diversas épocas, por exemplo, Chevallard (1994a, 1994b), Euler (1795), Viète (1630), Maclaurin (1753), Lacroix (1799), Peacock (1842, 1845), Dante (2013), Pereira (2012), entre outras. Esse fato está de acordo com o primeiro tipo de tarefas $\boldsymbol{H_i}$, que preconiza a observação da existência dessas repostas depositadas nas instituições.

Após analisarmos a proposta de aula do professor x_4, vejamos a proposta de aula do professor x_3 (ANEXO B), que inicia com uma "Tarefa 1", configurando-se como um tipo de tarefas T. A "Tarefa 1" relaciona geometria e álgebra, no cálculo de área de dois retângulos com medidas de lados diferentes. A figura A representa a ideia de retângulo com medidas de lados indicadas pelos polinômios x e $2x + 1$, enquanto a figura B representa essa mesma ideia, mas com medidas dos lados indicadas por $2x$ e $x + 1$. O desdobramento da "Tarefa 1" resulta em seis tarefas t_i: t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6. Todas as seis tarefas t_i são modelizadas pelas ideias contidas nas duas obras de Pereira (2012). O professor x_3 prossegue sua proposta de aula com a "Tarefa 2" e "TAREFA 3 -EXTRA". A "Tarefa 2" avança a conexão entre os modelos aritmético, geométrico e algébrico, enquanto a "TAREFA 3 -EXTRA" pauta-se no modelo aritmético/algébrico por meio de uma regra denominada de “*Regra de Três Passos* (R3P) ”. A “Tarefa 2” é redistribuída em seis tarefas t_i (i = 1, 2, 3, ..., 6), as quais entendemos ser seis subtarefas, devido o enunciado da “Tarefa 2” está em conformidade com os de tarefa na TAD. Quanto a “TAREFA 3 -EXTRA” é uma tarefa cujo o enunciado está na forma de problema, pois foi recopiada de uma prova de exames vestibulares.

As memórias ostensivas (MATHERON, SALIN, 2002) reveladas na proposta de aula do professor x_3 evidencia que o ***UC(x₃)*** passou por conflitos praxeológicos para se adaptar as proposições praxeológicas $\wp$ das obras O_k estudas nas sessões do PER. Entretanto, nota-se que esse professor recombinou seu ***EP(x₃)***, por intermédio da técnica τ do MEA de Pereira (2012), para solucionar as tarefas contidas em sua proposta de aula. Cabe ressaltar que x_3 ao solucionar a “TAREFA 3 -EXTRA” perfaz certa alteração e recombinação praxeológica na ideia indicada para resolver essa tarefa, ou seja, a “R3P”. Ele identifica que a “R3P” está conectada a noção de cálculo de derivadas e estende essa mesma ideia para modelização do MEA de Pereira (2012). A Figura 49, exibe parte da memória prática ostensiva que o professor x_3 recorreu para mostrar a resolução da “TAREFA 3 -EXTRA”.

Figura 49 – Resolução de x_3 para a “TAREFA 3 -EXTRA”



Fonte: Elaborada pelo autor (2017).

O ANEXO B contém a maior parte das descrições praxeológicas da proposta de aula de x_3 e isso poderia nos levar a analisar só essas descrições, pois são memórias práticas ostensivas externalizadas por esse professor. Entretanto, a oralidade, proveniente da apresentação dessa proposta de aula, revelou outras compreensões não descritas no Anexo B. Notamos isso logo na fala inicial de x_3:

> [...] *a minha preocupação foi a seguinte, exatamente mostrar essa relação que o objeto matemático se encontra através do modelo epistemológico alternativo. Aí já pelos trabalhados mencionados aqui, anteriormente apresentados, eu poderia até dar uma mexida nas informações que foram muito importantes dos outros colegas, mas eu não quis mexer em nada, eu deixei igualzinho estava, não tive a intenção de ser melhor. Eu também peguei a parte importante ligando o polinômio à álgebra com a geometria, certo? E no primeiro momento da tarefa, eu consegui fazer as subtarefas, em relação as questões. Em si, do livro didático, eu acho que não está bem formulado, ou seja, é mais aquela praticidade mesmo direta, determine, resolva, calcule* [...] (PROFESSOR x_3, 2015).

O professor x_3 declara sua intencionalidade de mostrar a possível relação ***R*** que o objeto matemático (polinômios) estabelece no MEA de Pereira (2012). Vemos essa relação com multiplicidade no universo cognitivo de desse professor: ***R(x_3; o)*** – professor com objeto; ***R(x_3; $\wp$)*** – professor e praxeologias sobre o objeto; ***R(x_3; ♥)*** – professor e obras estudadas ou não nas sessões do PER; e ***R(x_3;*** ♥$\mathfrak{E}$) – professor e a obra específica (MEA de Pereira). Todas essas relações ocorreram de fato, a Figura 62 é uma reposta $\boldsymbol{R}^{\lozenge}_{x_3}$ para elas. A transcrição a seguir, da fala do professor x_3, dá maior clareza a relação ***R***, quando este professor se refere a resolução da “TAREFA 3 -EXTRA”.

> *Porque lá na frente vai ser revelada uma álgebra chamada de álgebra superior. Mas as tarefas estão aí, elas são classificadas, vamos dizer, como fácil, médio, não está muito difícil, eu acho complicado, “difícil” é uma palavra muito forte, elas vêm todas desordenadas no livro didático, não tem aquela sequência* [...]
> *Repare que vai aparecer a técnica, qual técnica? Quem pode arriscar? É claro que os alunos do oitavo ano não vão saber, que isso aí é exatamente a definição de derivada. Se você pegar uma derivada, o que é derivada? Não é isso? Derivada de uma função. Como foi que eu cheguei aqui? Exatamente se o aluno praticar essa técnica apresentada na formação e nos trabalhos, já apresentados, o aluno não vai ter dificuldade com a álgebra superior, porque na álgebra superior, eles não querem saber o que é grau, o que é expoente. Eles dão a técnica que já está estabelecida naquele livro didático, mas por trás tem muita coisa. Aqui, por exemplo, eu posso revelar o polinômio $P(x) = 4x - 5$. Em relação à geometria, eu posso chegar assim em $y = C_1x + C_0$, vamos chamar de uma modelização de um polinômio do primeiro grau. Não a partir dessa tarefa, mas sim das outras tarefas. Por exemplo, se você pegar uma tabela com valores numéricos, onde tem uma função, com certeza vai chegar a derivada, através das derivadas vai aparecer os polinômios, de primeiro, de segundo até de n-grau, está certo? Então é isso que está faltando, ao meu ver, em uma aula de matemática, não só com polinômio, mas sim qualquer atividade. É exatamente buscar esses subsídios que matemática formalística esconde, não revela, poder revelar para o aluno. Aí daqui a gente pode fazer um monte de coisas, a partir dessa ligação do polinômio com a geometria. Está aqui no livro didático essa atividade, todos podem ver no exercício, é interessante. Uma atividade que quer saber exatamente, às vezes já passa direto para a representação,*

> *uma propriedade. Aí eu fiquei até encucado com a dissertação do Pereira, por quê? Porque tem uma tarefa, eu não lembro bem, tem uma situação onde um aluno resolve e o outro resolve diferente, não é isso? Aí o que foi que eu interpretei nisso aí? Eu achei que o primeiro se ele consegue decompor, não sei se era16 ou se era 15, acho que era 15. Se ele decompõe para base 10 e deixa a parte independente sem o cinco, acho que dava o mesmo valor. Eu fiz lá e falei: será que estou equivocado? Eu achei interessante, muito interessante. Mudou totalmente como x_8 dizia, a minha praxeologia, a minha ideia* [...] (PROFESSOR x_3, 2015).

A verbalização do professor x_3 exibe compreensões praxeológicas, as quais podemos caracterizá-las na forma de protomemória, memória de alto nível e metamemória. A conclusão que esse professor abstrai após a resolução das tarefas de sua proposta de aula, acrescida do conflito cognitivo proveniente de uma situação que ele notou na obra ♥$\mathfrak{D}$ de Pereira, está ao nível que denominamos de metamemória didática. Essa metamemória didática parece que surgiu das dinâmicas cognitivas vivenciadas por x_3 no processo de formação continuada e dos estudos de obras O_k, inclusas as de Pereira (2012). Destaque-se ainda a resposta $\boldsymbol{R_{x_3}}$ para sua postura praxeológica a partir da formação continuada, nos moldes da metodologia do PER, ou seja, x_3 declara que mudou sua praxeologia.

A resposta $\boldsymbol{R_{x_3}}$está inserida nos tipos de tarefa H_i e em dois dos nossos esquemas herbatiano, ***Ƕ**$_2$* e ***Ƕ**$_3$*, que estabelecem a dialética do *milieu M* com a resposta R$^{\heartsuit}$. Até este ponto, analisamos a desenvoltura praxeológica de quatro professores de matemática do ensino básico, quanto aos efeitos matemáticos e didáticos da formação continuada por intermédio de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar, subordinada a praxeologia metodológica do PER. Reconhecemos que já possuímos informações em boa quantidade para formalizarmos a nossa resposta *R*$^{♥}$, mas precisamos analisar as propostas de aulas dos outros professores para, de fato, elaborarmos a resposta para nossa questão principal $\boldsymbol{Q}$. Vejamos o que diz a proposta de aula do professor x_5.

A proposta de aula do professor x_5 (ANEXO D) está composta de duas atividades, “ATIVIDADE 1” e “ ATIVIDADE 2”. A primeira atividade possui um tipo de tarefas T_1 e cinco tarefas t_i (i = 1, 2, ..., 5), enquanto a segunda atividade é constituída do tipo de tarefas T_2, das tarefas t_1, t_2 e t_3, das subtarefas $t_{2,1}$, $t_{2,2}$, $t_{3,1}$ e $t_{3,2}$. Embora as notações de tipo de tarefas, tarefas e subtarefas estejam em consonância com a TAD, há problemas na formulação textual, mas isso é atenuado pelo modo como x_5 estruturou a resolução das tarefas e subtarefas de sua proposta de aula. As falhas existentes assinalam que o ***UC(x**$_5$**)*** possui uma dinâmica cognitiva conflituosa com os elementos da TAD, porém, essa dinâmica é mais intensa com as ideias do MEA de Pereira. As duas atividades elaboradas por x_5, diferenciam-se pela conexão entre modelos epistemológicos diferentes. A primeira está na dialética numérico-algébrica e a segunda na geométrica-algébrica-numérico. A explicação inicial de x_5, para sua proposta de aula, objetiva traços memoriais ostensivos situados entre protomemória e memória de alto nível, indicando que o ***EP(x₅)*** passou por recombinações praxeológicas em relação ao bloco do saber-fazer da TAD.

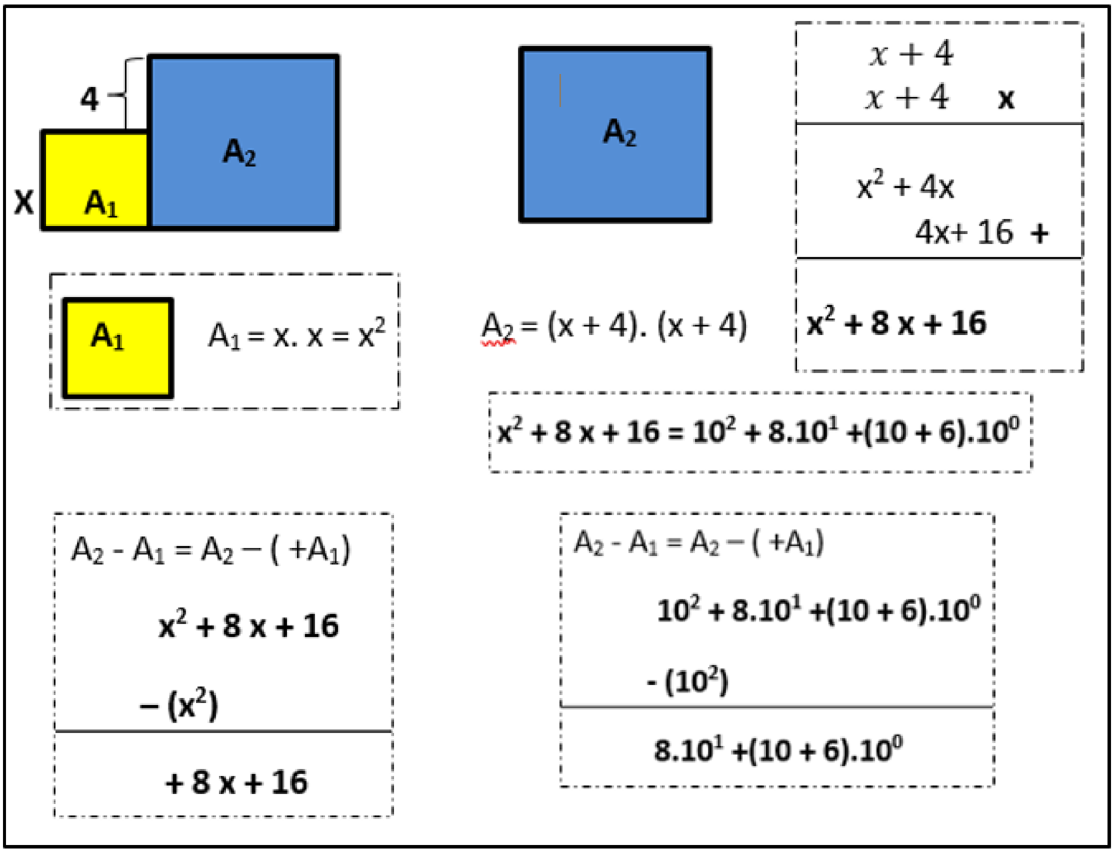
> *Essa atividade proposta e observando as atividades dos colegas (...) eu coloquei lá o estudo antropológico das praxeologias, eu disse "vou estudar isso para saber". A praxeologia, antropologia é uma coisa muito grande e as praxeologias são maiores ainda. Ao invés de eu fazer um funil, eu distanciei mais, abrir mais, cada vez mais. Fiz um estudo disso, lendo as dissertações que eu tinha, fiz dois tipos de tarefas. Eu fiz, não, peguei de um livro e criei baseado no que estava lá na dissertação. Mas, eu peguei justamente igual do livro. Aí eu defino como sendo de uma organização praxeológica local (isso que eu foquei lá), mas existe a global, pontual, regional. Foquei nessa local. Temos duas questões, para não levar muito tempo* [...]
> [...] *A única correção que eu fiz na formulação dessa atividade, que lá está "Identificar" e a tarefa t_1 aqui é "Represente as ordens que cada algarismo indo arábico ocupa". O comentário que eu fiz a respeito disso – eu até estava procurando ele aqui – é sobre a representação do número na potência de base 10, ela vai contemplar justamente o polinômio da característica dele ser completo ou não. Eu observei isso na leitura que eu fiz. Então eu coloquei um exemplo que abordasse isso. Eu fui lendo e conseguindo visualizar, entendeu? Porque esse é muito simples, essa atividade. Aqui eu posso definir as ordens e a classe das unidades simples* [...] (PROFESSOR x_5, 2015).

Se a primeira atividade elaborada por x_5 implicou em dinâmicas cognitivas que afetaram seu universo cognitivo e promoveram incorporações praxeológicas $\wp$ ao seu ***EP(x₅)***, então a segunda atividade significou maior desdobramento didático para recombinar a dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos da OM e OD do livro didático do qual ele adaptou a " ATIVIDADE 2".

> [...] *A atividade 2 eu peguei o livro, que eu estava falando, do 8º ano. Peguei uma atividade que estava lá no livro e resolvi ela. Aí eu resolvendo ela, fiz uma observação, eu estava colocando justamente as observações que fiz para poder resolver ela. Em relação à anterior, essa aí, essa decomposição aritmética, a representação na potência de 10 e a decomposição aritmética, ela também depende dos objetos ostensivos e não ostensivos. Então, a segunda atividade, de acordo com o que eu estudei sobre a teoria, de acordo com que eu estudei sobre essas operações polinomiais, elas são regidas pela não ostensividade. É a manipulação desses objetos matemáticos, consegue-se a manipulação deles, determinada justamente pela ostensividade. Que tipo de objetos? Que tipo de técnicas resolvem esses tipos de tarefas aritméticas? Essa parte estava descrita lá na dissertação. Então, eu peguei essa observação e associei a esta tarefa. Peguei o livro, desenvolvi a estrutura dessa tarefa: "T2 – Com relação a figura abaixo, escreva um polinômio que represente o que é pedido em cada item"* [...] (PROFESSOR x5, 2015).

Além de externalizar uma espécie de memória prática ostensiva, relativa a praxeologia de estudo pessoal, o professor x_5 cita que as manipulações dos objetos ostensivos, em dialética com os não ostensivos, são essenciais na atividade matemática (CHEVALLARD, 1994a; CHEVALLARD; BOSCH, 1999; PEREIRA, 2012). Mostramos, no Capítulo II, essa dependência manipulativa da álgebra elementar escolar para com os objetos ostensivos e não ostensivos. A Figura 50, adaptada da resolução da segunda atividade da proposta de aula de x_5, nos dá uma dimensão dessa dialética dos objetos ostensivos e não ostensivos, na memória prática desse professor consorciada com a memória institucional pública (MATHERON; SALIN, 2002) do livro didático.

Figura 50 – Resolução adaptada da “ ATIVIDADE 2” da proposta de aula de x_5



Fonte: Adaptada da proposta de aula do professor x_5 (2015).

As representações figurais e escriturais, exibidas na figura 50, são objetos ostensivos associados aos não ostensivos: noção da forma de um retângulo quadrado e de cálculo de medida da área desse tipo de figura geométrica; ideia de classificação de tipos de polinômios e operações algébricas; conceito de termos algébricos semelhantes; noção de propriedade de potência de mesma base, entre outros. Essa importância dos objetos ostensivos e não ostensivos, identificada por x_5 no decurso dos estudos para elaborar sua proposta de aula, nos garante que alterações e recombinações praxeológicas ocorreram, mesmo que de forma tímida e superficial. Entretanto, a fala de outros professores sobre o conteúdo da proposta de aula de x_5 é significativa como respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$, $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$ e $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$ para o nosso esquema de *milieu M*, representado na Figura 28 do Capítulo III.

> *Na verdade, ele fez o seguinte, ele observou o pensamento de y_1, observou a dissertação de Pereira, foi o que eu percebi, que colocaste a tarefa e os tipos de tarefas. Só lembrando que... só para a gente localizar, que a tarefa sempre começa com o verbo. Determine e tal. Daí eu percebi que tu colocaste nos tipos de tarefas um olhar aritmético para o professor entender. Para quando ele for ministrar a aula deles, tenha um olhar, um ensino para o aluno dele, aritmético, depois vem outro olhar, que eu percebi que colocaste o algébrico, percebi que depois começaste a colocar os polinômios. E depois colocaste o geométrico, colocaste a figura e tal. Eu achei interessante. Agora é sempre bom lembrar, assim, para todos nós que estamos todo dia na sala de aula, o seguinte, que antes de começar a aplicar essa técnica, esse modelo que Pereira aborda, é sempre bom a gente tentar antes da aula, ir lá para frente e reexplicar para o aluno, fazê-lo lembrar de qual é a diferença do numérico, do algébrico e do aritmético para que ele possa entender as tarefas. Eu sempre estou olhando desse lado, estou tendo cuidado, até porque quando começar esse ano letivo, eu vou fazer isso, porque eu não fazia. Eu entrava logo no numérico e no aritmético* [...] (PROFESSOR x_8, 2015).

> *Até o que você está falando, é interessante que o próprio Duval chamava atenção para a questão da representação da mudança de registro, porque muda o registro e o aluno imagina que é outro objeto matemático, não, é o mesmo objeto matemático com representação semiótica diferente, faz sentido. De repente a gente ignora isso. E aí, uma sugestão, para continuar o trabalho, por que na área daquele quadrado amarelo, o retângulo amarelo, foi considerada x^2, por que não utilizou a técnica para fazer também, como fizeste no outro? É mais simples, mas será que traria problemas para o aluno fazer? Binômio por binômio a gente já viu naquele módulo, e se for monômio por monômio, será que surgiria alguma dificuldade? Será que seria diferente? Aí ficou um x^2, como se fosse algo mágico. Como se o aluno entendesse que aquilo ali é uma regra, qual que é a regra: $x \cdot x = x^2$ ou $x + x = 2x$? Aí de repente quem sabe isso não auxilia de ele enxergar, o porquê de $x \cdot x = x^2$, de repente isso facilita.*
> *Uma outra confusão que eu sempre vejo nos livros em relação a geometria, em relação as figuras planas, determinados autores utilizam as dimensões como comprimento e largura, ora base e ora altura. Sei lá, no meu ponto de vista, cada autor, se for tentar entender buscando fontes, eu não cheguei à conclusão nenhuma, porque cada autor chama isso de um nome, não tem jeito. Eu particularmente procuro trabalhar as figuras planas, com as dimensões de comprimento e largura. A altura, para mim, só tem altura as figuras espaciais. Parece simples, mas o aluno faz confusão, porque ora a altura está na vertical, ora está na horizontal* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$, 2015).

> *Até confunde na hora do trabalho quando se tem um sólido geométrico e se quer planificar as faces, precisa deixar claro isso* (PROFESSOR x_4, 2015).

> *$\mathfrak{X}$ falou uma coisa interessante. Você está falando o que eu já ensinei alguns anos, a gente trabalha, por exemplo, retângulos, triângulos, e a gente não fala no retângulo, base e altura. Fala comprimento e largura, justamente por causa da espacial. E agora na espacial você já coloca lá o prisma e aí, temos altura e altura? Isso é verdade o que estão dizendo* [...] (PROFESSOR x_7, 2015).

Percebe-se na fala do professor x_8 que ele conflui memória de alto nível com metamemória em seu posicionamento sobre a proposta de aula de x_5. Por fazer isso, o professor x_8 se situa no processo de formação e anuncia que usará, em sua prática docente, as ideias do MEA de Pereira, mas recomenda que se compreenda a problemática da modelização praxeológica do numérico, algébrico e aritmético (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990; CATALÁN, 2003; PEREIRA, 2012). Essa compreensão de x_8 é uma objetivação de equipamento praxeológico e mostra que houve dinâmicas cognitivas, provocando alterações didáticas de sua relação com o ensino de objetos da álgebra escolar.

A interferência positiva da fala do professor $\mathfrak{X}$ trouxe à tona uma das problemáticas da modelização geométrica-algébrica, algo que consta em Chevallard (1984, 1989, 1990). Essa provocação de $\mathfrak{X}$, torna-se um revelar de sua compreensão praxeológica sobre a “ ATIVIDADE 2” da proposta de aula de x_5. Porém, a extensão dessa compreensão mobiliza o ***EP(*$\mathfrak{X}$*)*** e as dinâmicas cognitivas de seu universo cognitivo para ensinar objetos da geometria plana e espacial. Estimulados pela fala do professor $\mathfrak{X}$, os professores x_4 e x_7, também externalizam dinâmicas cognitivas conflituosas em seus universos cognitivos e a interferência praxeológica que isso causa em suas praxeologias $\wp$ para ensinar geometria no Ensino Fundamental e Médio.

As verbalizações dos professores x_8, $\mathfrak{X}$, x_4 e x_7 são relações memoriais públicas que se hibridizam com suas memórias práticas ostensivas provenientes das suas relações pessoais com a memória de um saber (MATHERON; SALIN, 2002), que acabam objetivando seus equipamentos praxeológicos no confronto da problemática possibilística da álgebra elementar, ou seja, existem praxeologias $\wp$, sob condições C e restrições K, as quais esses professores estão submetidos no enfretamento dessa problemática “*de base*” (CHEVALLARD; BOSCH, 2012), que entendemos ser extensiva ao ensino da matemática escolar.

Prosseguimos nossa análise das propostas de aulas dos professores x_n, examinando fragmentos da apresentação da proposta de aula do professor x_7. A proposta de aula desse professor não consta nos ANEXOS, porque o mesmo informou que teve um problema técnico em seu computador e não recuperou os arquivos, entre os quais os da formação.

A proposta de aula do professor x_7 tem semelhanças com a do professor x_8, principalmente, no aspecto da abordagem inicial dos elementos da TAD. A transcrição a seguir da fala inicial de x_7 comprova o nosso discurso.

> *Vou iniciar a minha apresentação. Confesso que não foi muito fácil, assim, para mim conseguir compreender a dissertação do professor, porque é falta até de leitura. Eu queria entender, compreender o máximo possível para tirar as ideias do que eu vou*

apresentar. E a parte que eu vou mostrar é, assim, é uma mudança que eu estou disposto a fazer também em sala de aula. Não tinha essa prática, confesso. O que a gente está estudando aqui em sala de aula, a gente vai apresentar de uma forma diferente e eu vou colocar o que eu entendi. Parte do que vimos com o professor e adotar. Você quer ou não queira, está em sala de aula para tentar ajustar o ensino de matemática com nossos alunos. Vou me esforçar para me aproximar o máximo possível do que foi ensinado. Mas eu estarei em contato com vocês para consertar os erros existentes, que, com certeza, eu acho que vão haver [...]

[...] *Eu comecei a apresentação, assim, eu fiz um resumo teórico de algumas coisas que eu li da dissertação do professor e que vão aparecer aqui, ao longo da explanação. Então, se estiver errado alguma coisa, depois eu conto com vocês para me ajudarem. Primeiro conceito que eu coloquei foi de objeto. O que é um objeto ao meu entender? Do ponto de vista da semântica da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa x ou uma instituição I o reconhece da existência para ela. Aí tirei lá do Chevallard (1999) essa leitura que eu fiz. No nosso caso, qual é o objeto que a gente está usando aqui? O objeto matemático. Já que qualquer coisa pode ser um objeto, eu coloquei, vamos trabalhar os objetos matemáticos* [...]

[...] *Outro conceito que a gente vai usar durante as nossas falas aqui é o conceito de tarefa, que, na leitura que eu fiz, eu entendi assim. Na raiz da noção da praxeologia, se encontra as noções de tarefa t e de tipo de tarefas T. Na maioria dos casos, uma tarefa se expressa por um verbo, em um problema com sentido completo. Então, eu entendi na leitura que uma tarefa ganha esse nome de tarefa porque ela é representada por um verbo. E não somente o verbo, mas é o verbo que construa uma frase com sentido completo. Esse verbo... só, por exemplo, só o verbo "calcular", isso não é uma tarefa. Eu entendi lá que é um gênero de tarefa. Então, tem que calcular, aí pede um complemento. Com esse complemento, dando sentido completo, a gente tem uma tarefa* [...]

[...] *Técnica, que é um outro conceito que a gente também vai usar aqui no nosso discurso. Uma praxeologia relativa a uma tarefa requer, em princípio, uma maneira de realizar essa tarefa. Essa determinada maneira de fazer a tarefa dá-se o nome de técnica, que já vem ser o saber fazer. Então, a gente tem lá uma tarefa de um objeto, a maneira de realizar essa tarefa, a gente chama de técnica* [...]

[...] *Outra coisa que eu acho também, que a gente utiliza muito, é conceito de tecnologia. Se entende por tecnologia e se indica geralmente por* θ*, é o discurso racional sobre a técnica. Discurso, como primeiro objetivo, é justificar racionalmente a técnica* τ*. Então, a tecnologia, ela tem a função de justificar, explicar o uso da técnica. E a técnica é o que a gente usa para saber fazer a tarefa* [...]

[...] *. Um outro que a gente utiliza muito é o conceito de teoria. O discurso tecnológico contém afirmações da tecnologia, o discurso tecnológico. Mais ou menos explícitas em que podem haver questionamentos. Chega-se, então, ao nível mais elevado de justificativas, explicações, os das teorias, que retomem em relação à técnica, o papel que esta última tem em relação a respeito da técnica. Então, o que eu entendi na leitura lá desse texto de Chevallard foi que a teoria, ela tem a função de explicar a tecnologia de uma forma mais aprofundada. A tecnologia é o que nós utilizamos para realizar a técnica, justifica a técnica. Então, a teoria justifica a tecnologia, a tecnologia justifica a técnica* [...]

[...] *No postulado de base da TAD, se admite que toda atividade humana regularmente realizada pode descrever esse modelo único, que se resume aqui com a palavra praxeologia. Eu acho, não tenho muita certeza, mas eu acho que o que eu vou usar aqui*

> *é uma praxeologia pontual, o modelo que eu vou utilizar é pontual. Eu entendo que é pontual porque eu vou fazer uso de uma única técnica para realizar essa tarefa. Se eu estiver equivocado, vocês me corrijam, por favor* [...] (PROFESSOR x_7, 2015).

A verbalização organizada de x_7 sobre os elementos da TAD é consequência do estudo e uso do texto da obra de Chevallard (1999), mas há acréscimos explicativos memoriais de alto nível do professor. Essa organização inicial da apresentação da proposta de aula de x_7 é reflexo do estudo de obras O_k, nas sessões do PER. Mesmo que o professor tenha se apoiado no texto de Chevallard (1999), ele exterioriza alterações praxeológicas em curso em seu universo cognitivo que, epistemologicamente, ganha significado teórico e didático em sua formação docente inicial e continuada, para assim melhorar suas relações pessoais e institucionais com certos objetos (CHEVALLARD, 2009a) da matemática escolar.

Quadro 20 – Esboço da proposta de aula de x_7

Atividade 1

Calcular a adição entre os números do sistema de numeração decimal 23558 e 52376.

t_1: Decompor estes números em forma de numeração decimal, mostrando seu valor relativo.

t_2: Reescrever estes números em forma polinomial em potência de base dez.

t_3: Calcular a adição destes números reescritos em forma de potência de base dez.

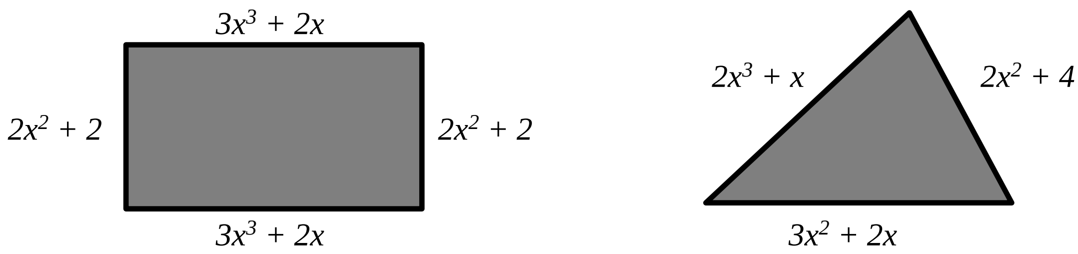
Atividade 2

Calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas mostradas a seguir.

t_1: Escrever uma expressão polinomial que representa o perímetro de cada figura plana.

t_2: Calcular o perímetro de cada figura geométrica plana, utilizando potência de base dez (fazendo x = 10).

t_3: Calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas, utilizando potência de base dez (fazendo x = 10).

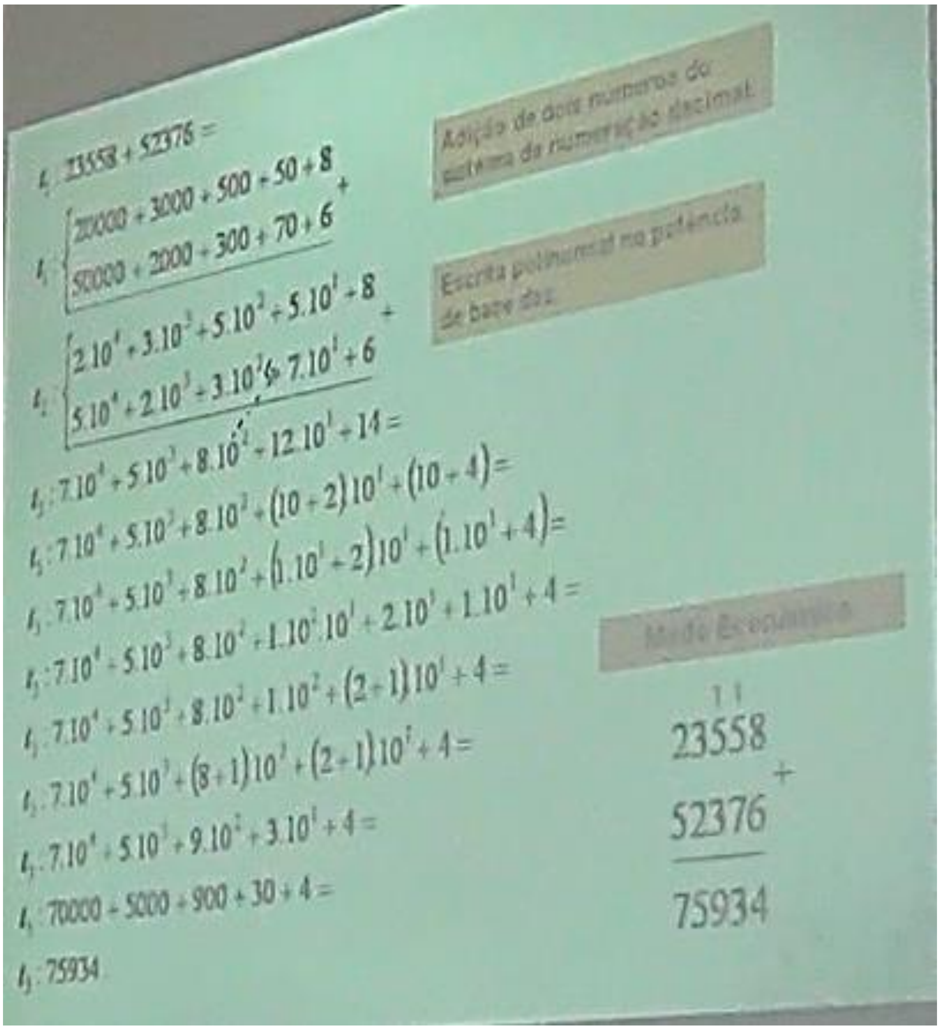


Fonte: Elaborado pelo Autor (2017).

O professor x_7 estruturou sua proposta de aula, organizando-a em duas atividades, compreendida por ele como duas tarefas (atividade 1 e atividade 2) e três subtarefas t_1, t_2 e t_3. Mostramos no Quadro 20 o que seria a proposta de aula do professor x_7.

No momento em que x_7 concluiu a explicação da primeira atividade, o diretor de estudo y_1, esclareceu sobre a notação para tarefa e subtarefas, de tal modo que, as tarefas t_1 e t_2, são, respectivamente, "Calcular a adição entre os números do sistema de numeração decimal 23558 e 52376" e "Calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas mostradas a seguir". Consequentemente, as subtarefas dessas respectivas tarefas são denotadas por: $t_{1,1}$; $t_{1,2}$; $t_{1,3}$; $t_{2,1}$; $t_{2,2}$ e $t_{2,3}$. Na Figura 51 apresentamos a praxeologia de x_7 para a tarefa t_1.

Figura 51 – Resolução de x_7 para a tarefa t_1 e subtarefas $t_{1,1}$, $t_{1,2}$ e $t_{1,3}$



Fonte: Elaborada pelo Autor (2017).

Se observarmos a Figura 51 veremos, no lado direito frontal, a comparação entre a modelização da técnica τ do MEA de Pereira e a técnica aritmética institucionalizada, a qual x_7 denomina "Modo Econômico". Abstraímos da Figura 51 que houve alteração e recombinação praxeológica para que x_7 confrontasse a solução obtida pelas duas técnicas. Isso confere com que dizem Chevallard e Cirade (2010, p. 1, tradução nossa): "Um aspecto crucial do conceito de praxeologia é que não existe práxis sem logos, mesmo quando isto parece ausente, porque é pouco visível [...]". Os procedimentos praxeológicos de x_7 para solucionar a tarefa t_1, dão mais visibilidade ao que anunciam Chevallard e Cirade.

> *A primeira subtarefa pede para escrever cada número, o seu valor relativo. Então está aqui, 23.558. O valor relativo de 2 é 20.000; o valor relativo de 3 é 3.000. Esse primeiro 5 é 500, esse segundo 5 é 50 e esse 8 é 8. A mesma coisa, eu fiz com outro lá, 53.376. O 5 é 50.000, o primeiro 3 é 3.000, o segundo 3 é 300, o 7 é 70, o 6 é 6. Então, essa aqui foi a primeira ideia que eu tive para colocar como subtarefa para eles, está bom? Ele decompõe o valor relativo. A segunda subtarefa é reescrever esses valores em potência de base 10. Aí eu coloquei. Quem é esse aqui em potência de base 10? Vai trabalhar até com a quantidade de zero, são quatro zeros. Então, 20.000 é $2 \cdot 10^4$, esse outro é $3 \cdot 10^3$; $500 = 5 \cdot 10^2$; $50 = 5 \cdot 10^1$. E o oito, que eu coloquei ele sozinho. Mas eu sei que aqui eu tenho um erro, eu deveria ter colocado 10^0. Depois que eu me atentei, mas vou deixar assim agora* [...]
> *A questão dos termos semelhantes também. Eu percebi isso também. O $50.000 = 5 \cdot 10^4$; $2.000 = 2 \cdot 10^3$; $3 \cdot 10^2$ é 300. O 70 é $7 \cdot 10^1$. E aqui seria $6 \cdot 10^0$. E a tarefa 2, a subtarefa 2. E a terceira é fazer um cálculo dentro da potência base 10, que aqui já tem a ideia... quando eu peço para fazer o cálculo, já tem aquela ideia de não extensivo. Na verdade, deles enxergarem os termos semelhantes. Uma questão semelhante é a execução desses dois. Dois e cinco... sete. Aqui são semelhantes, então 3 + 2 dá 5. Semelhantes, cinco e três dá oito. Semelhantes, cinto e sete, doze. Aqui tem semelhante, vou ter que mostrar que a soma daqui dá catorze* (PROFESSOR x_7, 2015).

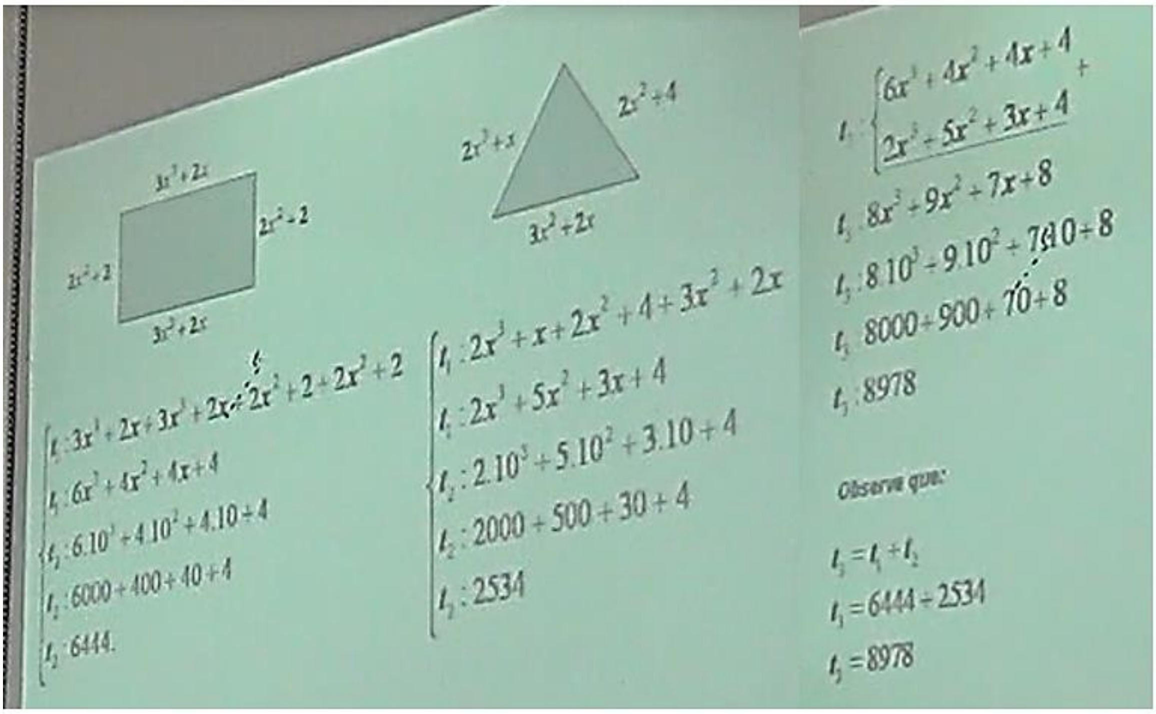
A dinâmica cognitiva mobilizada por x_7 para solucionar a tarefa t_1 (Atividade 1) está em função da manipulação de objetos ostensivos, acessíveis pelas praxeologias $\wp$ que este possui em seu universo cognitivo e que seu equipamento praxeológico dispõe, mesmo que seja superficial. Podemos ver no discurso praxeológico didático de x_7, a dificuldade para se compreender a manipulação ostensiva que este faz para explicar a resolução exibida na Figura 64. De fato, temos a percepção que os ostensivos e não ostensivos são essenciais no ensino dos objetos da matemática escolar. As transcrições de fragmentos da fala do professor x_7, torna mais explicita essa dependência praxeológica ostensiva, altamente necessária, para que a memória prática do professor x_7 solucionasse a tarefa t_2 (Atividade 2).

> [...] *vou trabalhar aquela ideia de trocar o dez pelo x que é fazendo agora um link com geométrica. Atividade dois: Calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas mostradas a seguir. Aqui tem aquele mesmo erro de notação de subtarefas, que o professor mencionou, que chamei de subtarefa t_1, que é $t_{2,1}$: Escrever uma expressão polinomial que represente o perímetro de cada figura plana; $t_{2,2}$: Calcular o perímetro de cada figura geométrica plana, utilizando potência de base 10 (fazendo $x = 10$). E a terceira, calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas, utilizando a potência de base 10. Aqui é calcular o perímetro de cada figura. E aqui é calcular a soma dos perímetros, está bom? E as figuras são essas.*
> *Vamos partir para a primeira subtarefa $t_{2,1}$, que é escrever a expressão polinomial que representa o perímetro de cada figura. Aí fiz assim, na primeira, que é a $t_{2,1}$. Vou escrever a expressão polinomial, daquele lado lá, mas o seu oposto, no caso, que eu coloquei iguais aqui, é um paralelogramo, não é? Pode ser um retângulo ou*

> *paralelogramo. Esse lado aqui mais esse outro, que são iguais. Os termos em evidência, os termos comuns, x três, então, três e três vai dar seis; x dois, aqui. Então, o coeficiente, dois mais dois dá quatro. O termo x, que tem esse e esse, dois e dois, quatro. E o termo independente, dois mais dois, quatro* [...] (PROFESSOR x_7, 2015).

A linguagem explicativa inicial da resolução da tarefa t_2 é quase incompreensível sem a ostensividade da Figura 65, ou seja, a dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos, assume a externalização das praxeologias $\wp$ que o professor x_7 dispõe em sua memória prática para enfrentar a tarefa t_2 e as subtarefas $t_{2,1}$, $t_{2,2}$ e $t_{2,3}$. Por exemplo, "*x três*" representa x^3 e "*três e três vai dar seis*" significa $3x^3 + 3x^3 = 6x^3$. Além disso, os objetos ostensivos da Figura 52 são mais factíveis de compreensão por outro professor de matemática, algo que ficaria meio nebuloso na transcrição da verbalização praxeológica do professor x_7.

Figura 52 – Solução de x_7 para a tarefa t_2



Fonte: Elaborada pelo Autor (2017).

Após o professor x_7 concluir a explanação de sua proposta de aula, várias observações surgiram de parte dos outros professores, propiciando assim uma dinâmica cognitiva coletiva bem interessante e construtiva para o processo de formação continuada. Vejamos trechos das falas de alguns professores.

> [..] *agora, eu fico pensando também, que faltou fazer um link com essas subtarefas, no sentido que parece que a atividade um é uma coisa e as tarefas são outra coisa totalmente diferente. É como se fosse quatro atividades. Não sei, eu estou pensando aqui na linguagem. Na elaboração dessas tarefas. Aliás, eu percebi isso em muitas atividades que os colegas apresentaram. Aí vem a atividade, calcular a adição, depois*

> *vem a tarefa. Parece que na linguagem, são quatro questões diferentes. A ideia é que as subtarefas te levem a desenvolver atividade. Eu penso se não é isso, certo? As subtarefas, elas são etapas para te auxiliar a responder, a resolver a atividade proposta. A tarefa proposta foi calcular aquela soma. Certo? Para calcular aquela soma, você tem as subtarefas. Aí eu percebo, nos diversos problemas, nas diversas atividades que foram apresentadas, parece não haver um link entre essas subtarefas e a tarefa dada. Parece que são coisas diferentes. Eu acho que falta um link da tarefa com as subtarefas, que façam o aluno compreender que cada subtarefas vai levá-lo a resolver aquela tarefa, que foi a tarefa inicial* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$).
>
> *Eu pensei, assim, como a tarefa era essa, direcionada para não fazer no modo econômico, convencional. Então, eu coloquei dessa forma para mostrar para eles como eles iriam desenvolver essa tarefa, quais são as subpartes. Mas eu acho que faltou...* (PROFESSOR x_7).
>
> *Exato, porque, ali olha, eu resolveria calcular aquela soma, pronto, resolvi a primeira conta. Eu faria a soma ali. Aí depois ia para tarefa t_1, parece ser outra coisa que não é a primeira. Você está entendendo onde eu estou querendo chegar? Que parece que aquele primeiro comando lá me leva a fazer a inversão e eu vou somar do modo econômico que eu sei resolver. Aí eu vou para a tarefa t_1. Aí eu já vou fazer outra coisa, eu vou decompor um número* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$).
>
> *Isso que não ficou claro, porque eu também estou observando, eu tenho essa dificuldade. Aqui ponto as subtarefas estarão relacionadas com a tarefa geral. Será que aquele comando geral e a subtarefa vão ser, tipo assim, um auxílio para eu enxergar um campo da resolução?* (PROFESSOR x_4).
>
> *Para revelar logo de cara, vai dar esse conflito mesmo, com tarefa e subtarefa. Eu acho que você tem que elaborar a tarefa para não ser revelada a resolução dela. E a subtarefa, você vai passo a passo, para o aluno enxergar a resolução* (PROFESSOR x_3).
>
> *Poderia ser, então, esse caso... como que poderia ser? Como que ele poderia alterar para que ela não fosse ainda revelada?* (PROFESSOR x_4).
>
> *Porque, assim, eu tinha entendido que a gente tinha que impor uma tarefa e que, para ela ser desenvolvida, você ia criar as condições. Eu chamo de subtarefa.*
> *Pois é. Eu acho que... não sei se eu interpretei errado na hora de escrever, porque a tarefa é essa. Agora, como é que eu quero que eles façam essa tarefa? Seguindo essas subtarefas* (PROFESSOR x_7).
>
> *É, eu acho que poderia ser algo, portanto, algo da natureza calcular... a soma de dois números naturais. Algo assim. E aí, na tarefa t_1, você apresentava os números e pedia para ele decompor* (PROFESSOR $\mathfrak{X}$).

As verbalizações dos professores $\mathfrak{X}$, x_7, x_3 e x_4, externalizam um conflito praxeológico[60] de práticas docentes relativo ao bloco do saber-fazer, mas centrado na formulação de tarefas e na sequencialidade das subtarefas provenientes dessas tarefas. Essas verbalizações, traduzem-se como uma análise didática (CHEVALLARD, 2011b) das praxeologias de x_7 e da sua

[60] Compreensão pessoal de como cada professor elaboraria as tarefas e subtarefas para melhorar a proposta de aula do professor x_7 e aplicar a técnica sugerida no MEA de Pereira (2012).

proposta de aula. Some-se a essa análise didática, o fluxo de metamemória empregada para exteriorizar a compreensão dos professores sobre os assuntos estudados nas sessões do PER, em particular, os aspectos teóricos da TAD e do MEA de Pereira (2012).

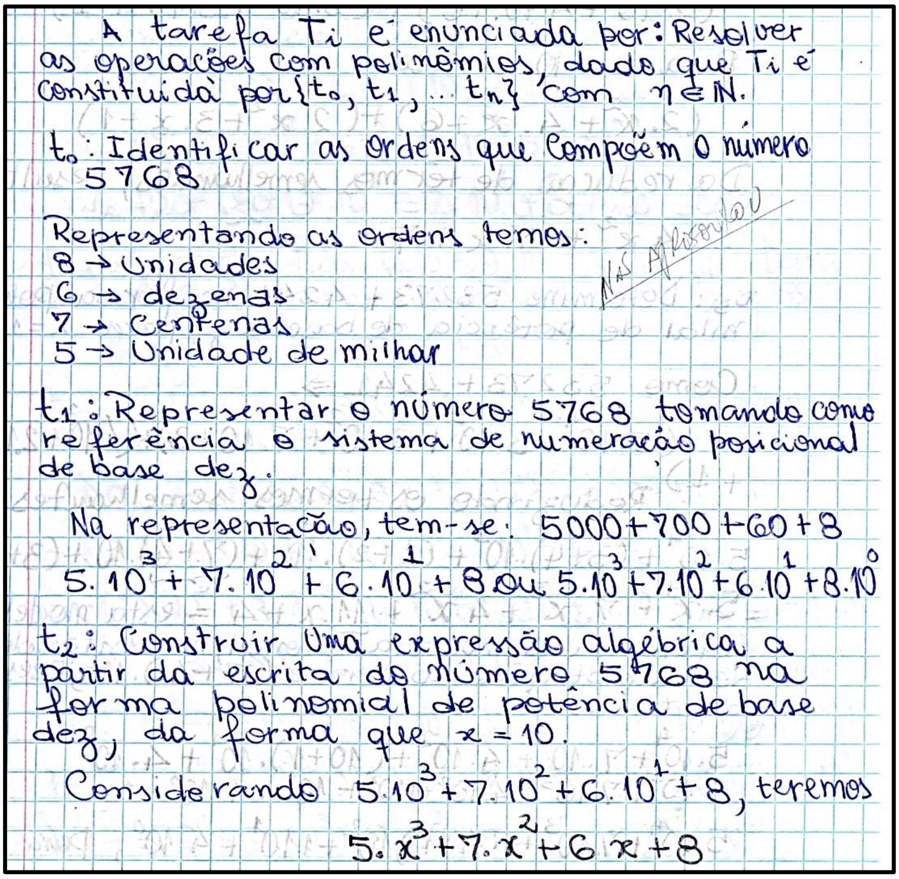
Com a análise da proposta de aula de x_7 alcançamos um volume de respostas $\boldsymbol{R}^{\lozenge}$significativo para propor a nossa resposta $R^{\heartsuit}$ e assim finalizarmos a praxeologia de pesquisa $\mathcal{H}$, concretizando o nosso esquema herbatiano **Ƅ4**: $[S(x;\ y;\ \heartsuit_{\tau} \rightleftarrows \boldsymbol{Q}) \rightarrow M] \rightarrow \mathrm{R}^{\heartsuit}$. Porém, examinaremos as propostas de aula dos professores x_2 (ANEXO F) e x_9 (ANEXO G), que por motivo de saúde não apresentaram suas propostas nas sessões finais do PER.

A proposta de aula do professor x_2 tem certa semelhança com a proposta de x_1, principalmente na disposição sequencial das tarefas t_i (i = 1, 2, ..., 5) pertencentes ao tipo de tarefas T_1. Por não conter a solução das tarefas t_i, fica meio arriscado emitirmos opiniões analíticas mais refinada sobre a intencionalidade de x_2 com sua proposta de aula. Além disso, o professor não pôde apresentar sua praxeologia explicativa para essas tarefas, mediada pelas ideias das obras de Pereira (2012). O que abstraímos da formulação da aula de x_2, diz respeito ao tipo de tarefas T_1 ("Decompor os números 32, 407, 1237 e 29472 em ordens com seus respectivos valores relativos e em parcelas"), que está adequado ao anúncio de uma tarefa $\mathbf{t_1}$, no contexto da TAD. As tarefas de t_1 a t_4 (ANEXO F) seriam subtarefas de $\mathbf{t_1}$, que deveriam ser denotadas por $\mathbf{t_{1,1}}$, $\mathbf{t_{1,2}}$, $\mathbf{t_{1,3}}$ e $\mathbf{t_{1,4}}$. A tarefa t_5 ("Resolva a soma algébrica na expressão $2x^2 - 4x^2 + 4x^3 + 2x^3$") tem a formulação textual aceitável, embora a conjugação do verbo empregado (resolver) não esteja em conformidade com o comando de uma tarefa, no contexto da TA, que indica o verbo no infinitivo (CHEVALLARD, 1998, 1999). No enunciado da tarefa t_5, existe a dúvida sobre o que é uma soma algébrica, pois parece ser o resultado da manipulação ostensiva com o sinal "+". Vê-se na proposta de aula de x_2 prenúncios de possíveis recombinações praxeológicas decorrentes do processo de estudos desencadeado nas sessões do PER e, com base, na análise da proposta de aula do professor x_1.

Temos na proposta de aula de x_9 um exemplo de metamemória exteriorizada pela compreensão da ostensividade das notações simbólicas dos elementos da TAD e das obras de Pereira (2012). Essa ostensividade da metamemória de x_9 pode ser uma compreensão teórica, didática e algébrica, na qual se evidencia que o universo cognitivo desse professor reelaborou dinâmicas cognitivas bem consistentes para compreender a dimensão praxeológica das ideias contidas no MEA de Pereira. Acrescente-se nessa dinâmica cognitiva a objetivação do $\boldsymbol{EP(x_9)}$ que externaliza modificações praxeológicas nas relações pessoais de x_9 nos blocos do saber-fazer e do saber da álgebra escolar, principalmente, assumindo a modelização defendida na obra

♥𝔈, para elaborar tipos de tarefas T_i e tarefas t_i, aplicáveis ao ensino de polinômios a partir do oitavo ano do ensino fundamental. Essa recombinação praxeológica dinamizada na proposta de aula de x_9 prevê a resolução das tarefas t_i pela técnica τ, conforme descrita nas obras ♥𝔇 e ♥𝔈. A Figura 53 comprova os efeitos praxeológicos no ***EP(x₉)*** relativos as praxeologias ℘, do bloco $\Pi = [T / \tau]$, da prática, no contexto teórico da TAD (CHEVALLARD, 2009a; CHEVALLARD, CIRADE, 2010).

Figura 53 – Praxeologia de x_9 no bloco $[T / \tau]$


A tarefa Ti é enunciada por: Resolver as operações com polinômios, dado que Ti é constituída por $\{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$.

t_0: Identificar as ordens que compõem o número 5768

Representando as ordens temos:
8 → Unidades
6 → dezenas
7 → centenas
5 → Unidade de milhar

NÃO APROFUNDOU

t_1: Representar o número 5768 tomando como referência o sistema de numeração posicional de base dez.

Na representação, tem-se: 5000+700+60+8

$5.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 8$ ou $5.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 8.10^0$

t_2: Construir uma expressão algébrica a partir da escrita do número 5768 na forma polinomial de potência de base dez, da forma que $x = 10$.

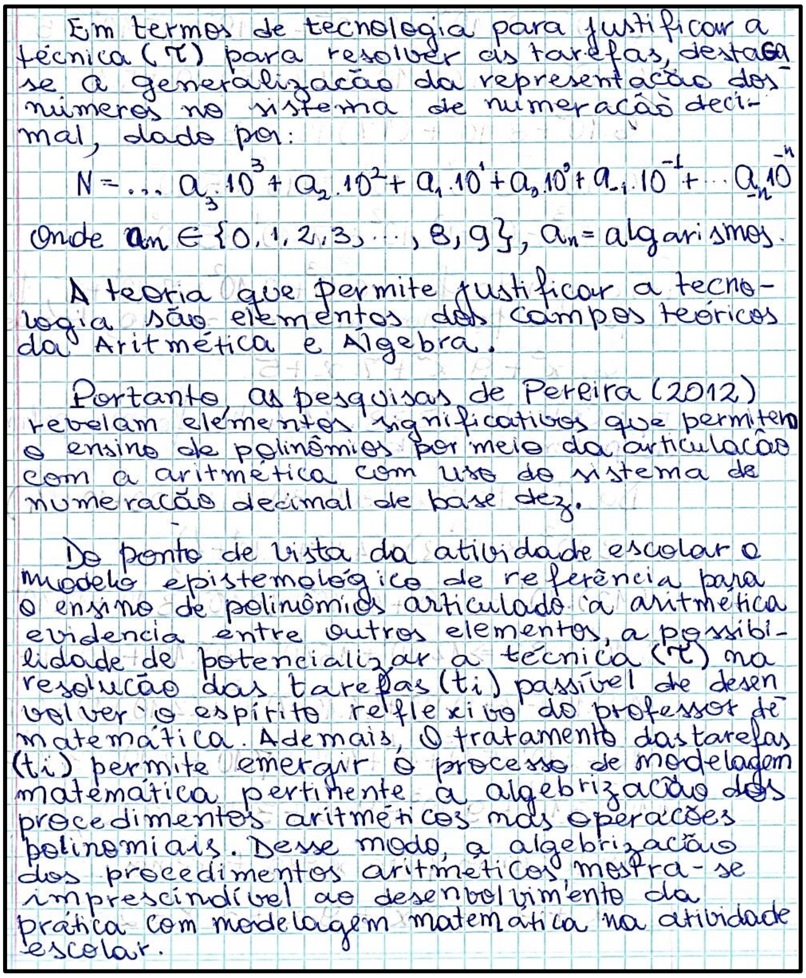
Considerando $5.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 8$, teremos

$5.x^3 + 7.x^2 + 6x + 8$

Fonte: proposta de aula do professo x_9 (2015).

As recombinações praxeológicas registradas no ***EP(x₉)*** dinamizaram o ***UC(x₉)*** em relação ao bloco do saber, $\Lambda = [\theta / \Theta]$, da OM das obras ♥𝔇 e ♥𝔈 de Pereira. Essa dinâmica cognitiva causou alterações praxeológicas na relação pessoal de x_9 com a tecnologia θ e teoria Θ, sustentadoras da modelização dessa OM. A Figura 54 expõe a ostensividade metamemorial desse professor, indicativa de alterações praxeológicas promovidas em seu universo cognitivo. Entenda-se que a proposta de aula de x_9 assinalam a ocorrência de alterações e recombinações praxeológicas na prática docente desse professor, mesmo que de maneira temporária, ou seja, durante o processo de formação continuada, intermediada por um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar.

Figura 54 – Ostensividade metamemorial do professor x_9 indicativa de alterações praxeológicas



Em termos de tecnologia para justificar a técnica (τ) para resolver as tarefas, destaca-se a generalização da representação dos números no sistema de numeração decimal, dado por:

$$N = \ldots a_3 . 10^3 + a_2 . 10^2 + a_1 . 10^1 + a_0 . 10^0 + a_{-1} . 10^{-1} + \cdots a_{-n} 10^{-n}$$

Onde $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, a_n = algarismos.

A teoria que permite justificar a tecnologia são elementos dos campos teóricos da Aritmética e Álgebra.

Portanto, as pesquisas de Pereira (2012) revelam elementos significativos que permitem o ensino de polinômios por meio da articulação com a aritmética com uso do sistema de numeração decimal de base dez.

Do ponto de vista da atividade escolar o modelo epistemológico de referência para o ensino de polinômios articulado à aritmética evidencia entre outros elementos, a possibilidade de potencializar a técnica (τ) na resolução das tarefas (t_i) passível de desenvolver o espírito reflexivo do professor de matemática. Ademais, o tratamento das tarefas (t_i) permite emergir o processo de modelagem matemática pertinente a algebrização dos procedimentos aritméticos nas operações polinomiais. Desse modo, a algebrização dos procedimentos aritméticos mostra-se imprescindível ao desenvolvimento da prática com modelagem matemática na atividade escolar.

Fonte: proposta de aula do professo x_9 (2015).

Atingimos o ápice de nossa análise, conseguimos examinar as oito propostas de aulas dos professores x_n de matemática, que permaneceram até o final do processo de formação continuada, dinamizada pela praxeologia metodológica do PER., Porém, para finalizar este capítulo, precisamos elaborar a resposta $R^{\heartsuit}$ para confirmar nossas hipóteses e sedimentar nossa praxeologia de investigação $\mathcal{H}$, conformando os cinco tipos de tarefas $\boldsymbol{H_i}$ (CHEVALLARD, 2012-2013) aos sistemas didáticos S_0, S_1, S_2 e S.

6.3. A Formulação da Resposta $R^{\heartsuit}$

Analisamos as propostas de aulas dos professores de matemática que permaneceram até a última sessão do PER. Cada proposta de aula contempla particularidades transpositivas e praxeológicas próprias de quem as elaborou, mas subordinada ao estudo das obras O_k e das orientações do diretor de estudo y_1. Essa dinâmica praxeológica do processo de formação continuada desencadeada pela metodologia do PER teve seu início no Capitulo I, no qual o diretor de estudo y_1 descreve o trajeto da problemática desta tese, conectando-a a monografia de Carvalho e Pereira (2009) e dissertação de Pereira (2012). Essas duas obras significam para esta pesquisa duas repostas $\boldsymbol{R}^{\lozenge}$validadas pelos cinco tipos de tarefas $\boldsymbol{H_i}$, descritas em Chevallard (2012-2013). Essas duas repostas são do tipo $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$, que responderam questões Q_n ou Q_m, de certo esquema herbatiano ampliado, da praxeologia de investigação $\mathcal{H}$ (CHEVALLARD, 2012-2013). Especificamente, essas duas respostas $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$, estão validadas nas obras $\heartsuit_{\mathfrak{M}}$ (CARVALHO; PEREIRA, 2009) e $\heartsuit_{\mathfrak{D}}$ (PEREIRA, 2012).

A problemática desta tese teve seu redirecionamento teórico em Pereira (2012) e ganhou consistência nesta pesquisa, conservando o mesmo modelo teórico da TAD, mas redimensionada por intermédio da praxeologia metodológica do PER, que assegurou o fluxo do processo de formação continuada, mediada pelo estudo de obras O_k, sendo a principal o MEA de Pereira (2012). Essa opção teórica e metodológica representa um conjunto de praxeologias $\wp$, empregadas por y_1, que conduziu todas as etapas desta pesquisa. Esse conjunto de praxeologias $\wp$ tornou possível realizarmos um processo adaptado de Investigação Codisciplinar e Percurso de Estudo e Pesquisa (CHEVALLARD, 2011, 2012-2013), pelo qual as questões $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$, dos sistemas didáticos S_0, S_1 e S_2, foram todas contempladas com respostas $R_j^{\lozenge}$.

A escolha da praxeologia metodológica do PER está na análise ecológica de obras de diferentes épocas, realizada no Capítulo II, que entendemos ser o produto de um PER "solitário" de estudos de obras (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2009b, 2009d), ou seja, um tipo de PER constituído por um sistema didático $\boldsymbol{S}(\text{y};\ \mathcal{O},\ \text{Q}_\text{y})$, cujo os elementos são o pesquisador $\mathbf{y} = \boldsymbol{y_1}$, obras O e a questão Q_y que levou $\mathbf{y}$ a estudar essas obras. Essa análise representa uma resposta $\boldsymbol{R_{y_1}^{\lozenge}} \in \boldsymbol{R}^{\lozenge}$, que serviu para ampliar o topos de y_1 e assim torná-lo mais equipado em torno do bloco do saber-fazer ($\Pi = [\text{T} / \tau]$) e do saber ($\Lambda = [\ \theta / \Theta]$) da álgebra elementar escolar. Essa dinâmica praxeológica do diretor de estudo y_1, no estudo de obras, foi enriquecedor para o êxito de várias sessões do PER e compreensão dos modelos de álgebra escolar revelados pelos professores de matemática que concluíram ou não a formação continuada.

As onze sessões do PER organizaram o *milieu M*, da Figura 28, para que a metodologia fosse factível e tivesse êxito o processo de formação. Cada uma das sessões teve um tempo didático de formação que, de alguma forma, promoveu a objetivação do equipamento praxeológico dos professores x_n pela ostensividade gestual, discursiva e escritural (CHEVALLARD, 1994b). Essas ostensividades revelaram como os topos desses professores estavam equipados com praxeologias $\wp$ para compreender a modelização do MEA de Pereira (2012), estudada no decurso da formação. Essas ostensividades estão nas falas transcritas nos Capítulos V e VI, e nas propostas de aulas dos oito professores, destas, sete são os ANEXOS A, B, C, D, E, F e G. As ostensividades gestuais, discursivas e escriturais dos professores x_n, configuram-se como resposta $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$para que a resposta $\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$ se torne a $R^{\blacktriangledown}$.

As propostas de aulas dos professores x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 e x_9, pertencem as respostas $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$para as questões $\boldsymbol{Q_j}$, inclusas nestas, nossas questões $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$. O alcance praxeológico das propostas de aula desses oito professores possuem elementos transpositivos que asseguram as respostas para essas três questões. Isso aparece na análise que fizemos das transcrições das falas dos professores que expuseram suas propostas de aula ou nas Figuras que elaboramos a partir das filmagens e dos ANEXOS.

As memórias didáticas identificadas nas dinâmicas cognitivas externalizadas por esses professores, do tipo protomemória, memória de alto nível e metamemória (MATHERON, 2000b, CANDAU, 2014), são tipos de memórias inclusas nas respostas $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$, mas as metamemórias de alguns professores estão autenticadas como respostas $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$, pois expressam compreensões ostensivas teóricas e práticas, internalizadas em seus universos cognitivos, de suas sujeições institucionais de formações passadas e presentes (CHEVALLARD, 2009a). Outras respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$ são as memórias práticas que esses professores manifestaram usar quando ensinam objetos da matemática escolar.

As implicações da nossa praxeologia de pesquisa $\mathcal{H}$ alcançou seu objetivo geral, chegamos a proposição da resposta ótima $R^{\blacktriangledown}$ para a questão $\boldsymbol{Q}$, mas para esse feito, atendemos os tipos de tarefas de investigação H_1, H_2 e H_3, porém, esses dois tipos só estarão satisfeitos, com os tipos H_4 e H_5 (CHEVALLARD, 2012-2013). O tipo H_4 altera nosso esquema herbatiano **Њ3** para **Њ4**, de tal modo, que a resposta $\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$completa sua transposição didática à resposta $R^{\blacktriangledown}$. O tipo H_5 é futuro, depende da difusão e defesa da $R^{\blacktriangledown}$. Assim, a resposta $R^{\blacktriangledown}$ para a nossa questão norteadora $\boldsymbol{Q}$ é um conjunto constituído pelas respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$, $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$ e $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$. Esse conjunto de respostas atende o objetivo geral, comprova as duas hipóteses de tese e confirma nossa tese, pois **ocorreram alterações e recombinações praxeológicas, nos equipamentos praxeológicos objetivados dos professores de Matemática do Ensino Básico, durante o decurso de um PER por meio de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar**.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os desdobramentos praxeológicos desta pesquisa doutoral ganharam dimensões no contexto da Teoria Antropológica do Didático, modelo teórico que possui sua própria praxeologia metodológica da pesquisa por intermédio da Investigação Codisciplinar e do "*Parcours d'Ètude et de Recherche* (PER) ". Nesta pesquisa assumimos a metodologia do PER em toda sua plenitude praxeológica, de tal sorte, que cumpriu todas as etapas planejadas no processo de formação continuada que desenvolvemos com professores de matemática do Ensino Básico. Nesse processo de formação, o estudo de diversas obras e a modelização praxeológica do Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) de Pereira (2012), dinamizou as ideias praxeológicas dos professores que participaram da formação. Considere-se nesse processo de formação continuada a relevância da metodologia do PER e as adaptações que fizemos conforme os objetivos previstos para desenvolvermos esta pesquisa.

A problemática desta pesquisa possui conexões praxeológicas de sujeições passadas e presentes, do próprio autor desta tese. As fases desta problemática se inter-relacionam. A primeira surgiu no Curso de Especialização em Educação Matemática (2008-2009). É nessa primeira fase que temos a obra de Carvalho e Pereira (2009) e a primeira modelização praxeológica do MEA de Pereira (2012), porém, inspirada nas ideias de Floriani (2000) e da Teoria da Aprendizagem Significativa (MOREIRA, MASINI, 1982; AUSUBEL, 2002, 2003). Os resultados desta primeira fase serviram de subsídios para a segunda fase, desenvolvida no Curso de Mestrado Acadêmico em Educação em Ciências e Matemáticas (2011-2012).

Nessa segunda fase, o produto é a dissertação de Pereira (2012) e um dos resultados que gerou a modelização numérico-algébrica, do MEA de Pereira (2012), fundamentada na TAD. A terceira fase está nesta pesquisa doutoral, que aponta resultados promissores, tanto no aspecto teórico da TAD quanto nas perspectivas futuras do MEA de Pereira (2012), no campo da Educação Matemática.

A problemática uni-sequencial das três fases, levou-nos a realizar uma análise ecológica de obras de diferentes épocas, visto que algumas pesquisas apontam o modelo dominante da álgebra escolar sendo a Aritmética Generalizada (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990; GASCÓN, 1994, 2011; USISKIN, 1995; CATALÁN, 2003; PEREIRA, 2012). O exame dessas várias obras matemáticas ou não (CHEVALLARD, 1984, 1989, 1990, 1994a,1994b; GIRARD, 1629, 1884; VIÈTE, 1630, MACLAURIN, 1753; EULER, 1795; LACROIX, 1799; PEACOCK, 1842, 1845; BURAT, 1876), comprovam que um dos modelos que caracteriza a Álgebra Ementar Escolar é a Aritmética Generalizada. Essa caracterização predomina nas organizações praxeológicas das obras que examinamos do século XVI ao XIX. Modelo este, visto ultrapassado, principalmente, por Gascón (1994, 2011) e Catalán (2003), mas que estruturou todo um saber matemático, conforme mostramos no Capítulo II. Acrescente-se que as organizações matemáticas dessas obras mostram, também, que a Álgebra Elementar Escolar, perpassa pelos modelos da Geometria e Cálculo Algébrico Funcional.

A revisão da literatura de nossa pesquisa foi acrescida de ideias de obras de diferentes épocas, porque as literaturas que compõem a primeira e segunda fase de nossa problemática enfatizam o modelo predominante no ensino da álgebra escolar sendo a Aritmética Generalizada. Entretanto, vimos que outros modelos coexistem, ecologicamente, com essa Aritmética Generalizada. A importância desse mergulho histórico e epistemológico, nessas obras de diferentes épocas, trouxe contribuições para nossa formação pessoal e influenciou nas discussões que ocorreram nas sessões do PER.

O quadro teórico da segunda fase de nossa problemática foi acrescido de um quadro teórico complementar. Esse quadro teórico complementar trouxe novas compreensões teóricas para nossa pesquisa, principalmente, as da "*Didactique de l'Enquête Codisciplinaire*" [Didática da Investigação Codisciplinar (IC)] e do "*parcours d'étude et de recherche* (PER) " [Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)]. Esses elementos teóricos da TAD sedimentaram nossas ideias praxeológicas e metodológicas de nossa pesquisa. Compete-nos destacar que o uso desses elementos teóricos, nas pesquisas científicas a nível doutoral, ainda é pouco explorado, assim, nossa tese surge como uma reveladora dessas ideias teóricas, no contexto das pesquisas em Educação Matemática Brasileira.

Ao assumirmos a praxeologia metodológica do PER (2009b, 2009c, 2009d), no processo de formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico, confirmamos o potencial do modelo teórico da TAD para esse fim. Além disso, outros aspectos teóricos da TAD que embasam nossas proposições teóricas, principalmente, da Figura 28, assim como dos sistemas didáticos S_0, S_1, S_2 e S. Os três primeiros sistemas didáticos são auxiliares de S e estão em conformidade com a praxeologia metodológica da TAD. A composição dos sistemas didáticos S_0, S_1 e S_2, contém o conjunto X de professores de matemática do Ensino Básico; o conjunto Y dos diretores de estudo e as questões $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_2}$. O sistema didático S é o principal, possui o doutorando, o diretor de tese (orientador) e a questão norteadora da pesquisa. Esses sistemas didáticos estiveram no foco de todas as onze sessões do PER. O resultado desse procedimento metodológico culminou na obtenção de alto volume de informações, coletadas por equipamentos de áudio e filmagem, completadas com produções escritas das propostas de aulas de oito professores (ANEXOS).

Parte das transcrições dos áudios das filmagens das onze sessões do PER, constituem o material descritivo do processo de formação continuada, exibido no Capítulo V e VI. Vemos nessas transcrições manifestações praxeológicas ou discursos didáticos que resultaram da objetivação do equipamento praxeológico dos professores que participaram desse processo de formação. As dinâmicas cognitivas que os professores vivenciaram durante a formação continuada pelo estudo de obras de Chevallard (1984, 1989, 1999) e as de Pereira (2012), indicam que houve, para alguns, recombinações praxeológicas em relação ao bloco do saber-fazer da álgebra escolar, enquanto para outros, ocorreram alterações e recombinações praxeológicas nos dois blocos praxeológicos, o do saber-fazer ($\Pi = [T / \tau]$) e do saber ($\Lambda = [\theta / \Theta]$) (CHEVALLARD; CIRADE, 2010).

A participação de professores do conjunto *X* não foi uniforme, a primeira sessão contou com sete professores (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7), a segunda com oito (x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10} e x_{11}), a terceira com sete (x_2, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{11} e x_{12}), no total participaram da formação 12 professores, mas apenas oito cumpriram a atividade conclusiva do processo de formação, quatro desistiram, o motivo dessa desistência não sabemos precisar. Desses oito, seis elaboraram e apresentaram sua proposta de aula (x_1, x_3, x_4, x_5, x_7 e x_8) e dois (x_2 e x_9), por motivo de doença, só entregaram o esboço de suas propostas.

A análise que fizemos de fragmentos das falas dos seis professores (x_1, x_3, x_4, x_5, x_7 e x_8), quando estes explicaram suas propostas de aulas e, também, da forma escrita dessas propostas (ANEXOS A, B, C, D, E, F e G), comprova que o processo de formação continuada promoveu dinâmicas cognitivas consistentes no universo cognitivo desses professores. Além disso, os tipos de memórias didáticas externalizadas, no sentido de compreensão das ideias de Matheron (2000b) e Candau (2014), situaram-se em protomemória, memória de alto nível e metamemória. Em alguns casos, predominou a de alto nível e a metamemória, exemplo dos professores x_3, x_7 e x_8. Entretanto, visualizamos nas verbalizações desses professores uma memória didática com prática ostensiva, do ponto vista didático, apoiada nos modelos aritmético-algébrico, geométrico-algébrico e algébrico-aritmético. Todos esses modelos epistemológicos foram apontados nas obras do Capítulo II, principalmente, nas de Chevallard (1984, 1989, 1990), Viéte (1630), Euler (1795) e Peacock (1942, 1845). Constamos nas propostas de aulas de x_3, x_4, x_5 e x_7 a presença forte desses três modelos consorciados com o MEA de Pereira (2012).

Evidenciamos na proposta de aula de x_9 (ANEXO G) as características mais acentuadas da metamemória, exemplificada pela ostensividade escritural dos elementos da TAD e pelas ideias praxeológicas do MEA de Pereira. Para este professor notamos que o processo de formação continuada promoveu dinâmicas cognitivas em seu universo cognitivo, cujo resultado mostrou que houve alterações e recombinações praxeológicas no equipamento praxeológico desse professor, em torno dos blocos do saber-fazer e do saber da álgebra escolar.

De forma geral, identificamos que o processo de formação desencadeado pela modelização praxeológica da organização matemática e didática das obras $♥_{\mathfrak{D}}$ e $♥_{\mathfrak{E}}$ de Pereira (2012) e estruturado nos moldes praxeológicos da metodologia do PER cumpriu seu propósito, ou seja, promover alterações e recombinações praxeológicas nos equipamentos praxeológicos desses professores. Diga-se que em relação a problemática possibilística da álgebra elementar, as praxeologias $\wp$ que esses professores conheciam, conflitaram com as das obras de Carvalho e Pereira (2009) e Pereira (2012). Nesse conflito praxeológico as recombinações foram predominantes nos equipamentos praxeológicos dos oito professores, mas quanto as alterações praxeológicas, nas propostas de aulas dos professores x_7, x_8 e x_9, elas ficaram mais evidentes.

Queremos destacar que um dos resultados do processo de formação continuada está nos procedimentos didáticos que os professores revelaram em suas verbalizações transcritas no Capítulo VI, principalmente, no aspecto praxeológico de elaboração de tipo de tarefas e tarefas, conforme o modelo teórico da TAD. Verificamos ainda a preocupação dos professores x_1, x_7 e x_8 em relação ao ensino e aprendizagem dos objetos da álgebra escolar.

A nossa praxeologia metodológica da pesquisa exibe um fluxo continuo de ideias, alicerçadas na TAD, que nos propiciou uma análise praxeológica de diversos artigos de Yves Chevallard, exibida no Capítulo III. Porém o resultado mais proeminente está na releitura que fizemos de textos de Chevallard (1998, 1999, 2007, 2008a, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f, 2009g, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d) que tratam do significado teórico de obras e da metodologia do PER. Essa contaminação teórica nos levou a elaboração e proposição de um modelo mínimo (Figura 28) que utilizamos em nossa praxeologia de formulação da resposta ótima $R^{♥}$ para a questão $\boldsymbol{Q}$ do sistema didático principal da tese.

O resultado e a funcionalidade do modelo mínimo requerem uma dinâmica praxeológica de formulação de várias respostas autenticadas $R^{\lozenge}$ – nesta pesquisa estão as das obras O_k, as do diretor de estudo e as dos professores de matemática do ensino básico que concluíram o processo de formação continuada – validadas pelos cinco tipos de tarefas H_i, descritas por

Chevallard (2012-2013). O resultado desse modelo requer uma validação, indicada pelo símbolo “◊”, que aparece nas respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$, $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$ e $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$. Da análise e validação dessas respostas o símbolo “♡” (respostas em validação praxeológica), torna-se a reposta selecionada ou conjunto de respostas ♥ (símbolo usado por Chevallard para indicar obras). A confirmação da resposta $R^{♥}$, ocorre pelos esquemas herbatiano Ꞗ3 e Ꞗ4, de tal sorte, que a resposta $\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$completa sua transposição praxeológica para resposta $R^{♥}$.

Nesta pesquisa, a transposição praxeológica de $\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$ para $R^{♥}$, decorre das respostas $\boldsymbol{R_{y_1}^{\lozenge}}$(que ampliaram o topos do autor desta tese em relação a álgebra elementar escolar), as respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$(ostensividades gestuais, discursivas e escriturais dos professores x_n), as respostas $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$(propostas de aulas e metamemórias de alguns professores) e as respostas $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$ (as obras ♥$_{\mathfrak{D}}$ e ♥$_{\mathfrak{C}}$; tipos de memórias didáticas identificadas nas dinâmicas cognitivas dos professores).

A nossa resposta $R^{♥}$ foi elaborada para conformar a questão $\boldsymbol{Q}$ aos sistemas didáticos $S(x; y; ♥_{\mathrm{T}} \rightleftarrows \boldsymbol{Q}) = S(y_1; \zeta; ♥_{\mathrm{T}} \rightleftarrows \boldsymbol{Q})$ e seus auxiliares S_0, S_1 e S_2. Nesse sentido, propomos como resposta $R^{♥}$ para a $\boldsymbol{Q}$, o conjunto formado pelas respostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$, $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$ e $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$, porque interpretamos que esse conjunto de respostas satisfez o objetivo geral, comprovou as duas hipóteses de tese, consolidando a tese, ou seja, **ocorreram alterações e recombinações praxeológicas, nos equipamentos praxeológicos objetivados dos professores de Matemática do Ensino Básico, durante o decurso de um PER por meio de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar**. Além disso, o esboço praxeológico da Figura 28, adquiri características de modelo praxeológico para elaboração de respostas $R^{♥}$, no contexto teórico da TAD, principalmente, pela metodologia praxeológica do PER.

Os resultados obtidos mostraram que os objetivos foram alcançados, desde do objetivo geral aos específicos, as hipóteses confirmadas, as questões respondidas. Destacamos ainda que a metodologia praxeológica estrutural desenvolvida nesta pesquisa contribui para o contexto teórico da TAD, porque mostra todo um trabalho praxeológico de pesquisa doutoral, sustentado no modelo teórico da TAD, principalmente, na metodologia do PER, a qual adaptamos ao contexto de um processo de formação continuada para professores de matemática do Ensino Básico. Para estruturarmos essa adaptação praxeológica da metodologia PER e propormos algumas simbologias, fizemos releituras de diversas obras de Chevallard e de obras complementares de outros autores (Capítulos III e IV). Da compreensão teórica que abstraímos dessas releituras, adaptamos ou criamos algumas simbologias pertinentes as nossas intenções teóricas, de tese doutoral, no contexto da TAD. Algumas dessas simbologias estão indicadas nos parágrafos anteriores de nossas conclusões, porém, sem o indicativo das ideais associadas a elas, entre quais estão as seguintes simbologias:

- ♥$_{\mathfrak{M}}$ = Monografia de Carvalho e Pereira (2009); símbolo que denota uma obra resultante de curso de especialização;
- ♥$_{\mathfrak{D}}$ = Dissertação de Pereira (2012); símbolo que denota uma obra resultante de curso de mestrado;
- ♥$_{\mathfrak{E}}$ = Modelo Epistemológico Alternativo de Pereira (2012); símbolo para denotar a obra de um MEA elaborado ou em elaboração;
- ♥$_{Ʈ}$; símbolo para denotar a obra de uma Tese em elaborada ou em elaboração;
- *S*(*U*; *V*; [♥$_{\mathfrak{M}}$,♥$_{\mathfrak{D}}$, ♥$_{\mathfrak{E}}$]); sistema didático para estudo das obras, ♥$_{\mathfrak{M}}$,♥$_{\mathfrak{D}}$ e ♥$_{\mathfrak{E}}$, pelas instancias *U* e *V*;
- ♥$_{Ʈ}$ ⇄ ***Q***; simbologia significando que a obra ♥$_{Ʈ}$ leva a responder ***Q*** (questão principal da pesquisa de tese de doutoramento) e ***Q*** confirma a tese;
- *S*(*x*; *y*; ♥$_{Ʈ}$ ⇄ ***Q***), sistema didático no qual *x* = doutorando e *y* = orientador.

Nossas contribuições teóricas para futuras pesquisas no campo da Didática da Matemática, inspirada nos moldes da praxeologia de pesquisa da própria TAD, conforme propõem Chevallard e Artaud (2013-2014a, 2013-2014b), estão resumidas nas Figuras 27 e 28 do Capítulo III, acrescidas dos esquemas herbatianos **Њ**$_i$: **Њ**$_1$: [*S*(*x*; *y*; ♥$_{Ʈ}$ ⇄ ***Q***) ↪*M*] ↪ R$^{\heartsuit}$; **Њ**$_2$: [*S*(*x*; *y*; ♥$_{Ʈ}$ ⇄ ***Q***) ➦*M*] ↪ R$^{\heartsuit}$; **Њ**$_3$: [*S*(*x*; *y*; ♥$_{Ʈ}$ ⇄ ***Q***) ➦*M*] ➦ R$^{\heartsuit}$ e **Њ**$_4$: [*S*(*x*; *y*; ♥$_{Ʈ}$ ⇄ ***Q***) ➦*M*] ➦ R$^{♥}$. Algumas simbologias dos quatro esquemas herbatianos são inéditas e estes esquemas representam elementos tecnológicos da praxeologia de investigação $\mathcal{H}$. Uma das simbologias que acrescentamos ao contexto da TAD é o R$^{\heartsuit}$, significando resposta em estudo, que dependerá da análise das repostas $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$, $\boldsymbol{R_j^{\lozenge}}$ e $\boldsymbol{R_n^{\lozenge}}$, para se tornar a resposta ótima R$^{♥}$. Essa praxeologia metodológica de R$^{\heartsuit}$ de para R$^{♥}$ é um dos diferencias teóricos desta pesquisa para outras pesquisas correlatas, citadas na revisão da literatura.

As Figuras 27 e 28 (Capitulo III) representam esquemas teóricos adaptados das releituras de textos de Chevallard e outros autores, são duas figuras esquemáticas que compactam as ideias teóricas da IC, PER e *milieu* M. Os esquemas esboçados nessas duas figuras representam construtos teóricos inéditos, em relação as outras pesquisas que tivemos acesso por meio eletrônico ou impresso.

A configuração metodológica do nosso PER é um dos resultados significativos de nossa pesquisa, mostra como conduzimos todo o processo de formação continuada com professores de matemática do Ensino Básico e os desdobramentos provenientes dos estudos realizados durante as onze sessões desse dispositivo didático e metodológico.

A formulação da resposta R♥ (resposta ótima) para nossa questão principal $\boldsymbol{Q}$, exemplifica uma análise praxeológica de um conjunto composto pelas respostas $\boldsymbol{R}^{\lozenge}$, $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i}}^{\lozenge}$, $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j}}^{\lozenge}$ e $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}^{\lozenge}$. A análise que realizamos desse conjunto de respostas revelou a existência de algumas variáveis de difícil controle e escapou as nossas observações no decorrer das sessões do PER. Uma dessa variáveis, é não sabermos o motivo que levou quatro professores desistirem do processo de formação continuada.

As perspectivas futuras da modelização praxeológica do MEA de Pereira (2012), para o ensino da Álgebra Escolar, estão no artigo submetido e aprovado para publicação em uma revista eletrônica de Educação Matemática, intitulado "**Ensino de Operações Polinomiais Intermediado pela Aritmética no Sistema de Numeração Posicional Decimal**". Esse artigo é um resultado complementar desta pesquisa ora finalizada, mas as ideias acrescentadas nesse artigo possibilitam novos estudos, principalmente, para a formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico brasileiro.

Para a Educação Matemática brasileira as nossas perspectivas futuras é que o produto desta tese, incentive outros pesquisadores a se aventurarem na proposição de Modelos Epistemológicos Alternativos para o ensino da Álgebra Escolar ou apliquem em diferentes contextos de formação inicial ou continuada de professores de matemática, a metodologia do PER que adaptamos nesta tese. Além disso, o MEA de Pereira (2012) pode ser objeto de pesquisas em outros contextos escolares, principalmente, em turmas do ensino fundamenta II (a partir do oitavo ano) e do ensino médio. Para esse fim, a praxeologia metodológica do nosso PER requer adaptações aos contextos institucionais onde se desenvolverão tais pesquisas. Outra possibilidade é a reaplicação do nosso processo de formação, em outras formações continuadas de professores de matemática e, nessas formações, indicamos as ideias teóricas e metodológicas de nosso PER.

Ao concluirmos esta tese, algumas questões ficaram em aberto para possíveis futuras pesquisas em Didática da Matemática, entre as quais citamos:

- De que forma as novas ideias acrescentadas ao MEA de Pereira seriam aplicáveis, no contexto de sala de aula, para turmas do ensino fundamental II e do ensino Médio?
- Quais adaptações são necessárias à reaplicação do nosso processo de formação continuada de professores de matemática em outros contextos institucionais?
- Quais ideias praxeológicas do MEA de Pereira (2012) podem promover práticas ostensivas que fiquem internalizadas no equipamento praxeológico de futuros professores de matemática?
- Quais recombinações e alterações praxeológicas são identificáveis na memória prática ostensiva de professores de matemática quando estes usam apenas os livros didáticos de matemática para ensinar assuntos da álgebra escolar?

Do ponto de vista científico, os procedimentos metodológicos e teóricos que empregamos nesta pesquisa, seguiram modelos teóricos reconhecidos em pesquisas nacionais e internacionais, principalmente, no âmbito da Didática da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fernando Manuel Mendes de Brito. Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. **Engenharia didática: evolução e diversidade**. In: R. Eletr. de Edu. Matemática, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>. Acesso em: 10 mai. 2014.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **A noção de Tarefa Fundamental como Dispositivo Didático para um Percurso de Formação de Professores**: o caso da geometria. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Belém, 2012.

ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática** – 8º ano. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ARAYA-CHACÓN, Andrea-María. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica**. These en vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE, 2008. Disponível em: <http://thesesups.ups-tlse.fr/187/1/Araya-Chacon_Andrea-Maria.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2013.

ASSUDE, Teresa; COPPÉ, Sylvie; PRESSIAT, André. **Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège: atomisation et réduction.** In: COULANGE, Lalina; *et al.* Enseignement de l'Algèbre Élémentaire: bilan et perspectives. Hors série – Revue Recherches en didactique des mathématiques. France: Éditions la Pensée Sauvage, 2012, pp. 41-62.

AUSUBEL, D.P. **Adquisicion y Retencion del Conocimiento: Una perspectiva cognitiva**. trad. Genís Sánchez Barberán. Barcelona: Paidós, 2002.

AUSUBEL, D.P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. trad. Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano, 2003.

BARACHET, Françoise; DEMICHEL, Yann; NOIRFALISE, Robert**. Activites d'Etude et de Recherche (AER) Pour Dynamiser L'Etude de da Geometrie dans l'Espace en Classe de Seconde**. In: Petit x 75, 34-49, 2007. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25&num=75>. Acesso em: 10 mai. 2014.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Trad. Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.

BOSTAN, Alin. **Algorithmes rapidez pour les polynômes, séries formelles et matrices**. In: Journées Nationales de Calcul Formel, Vol. 1, n. 2, pp. 75-265, 2010. Disponível em: <http://ccirm.cedram.org/cedram-bin/article/CCIRM_2010__1_2_1_0.pdf>. Acesso em: 10 mai. 2014.

BOURDIEU, Pierre. **O senso prático**. Trad. Maria Ferreira; rev. trad. Odaci Luiz Coradini. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2013. (Coleção Sociologia).

BRASIL. **Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)**. Brasília, 1996. Disponpivel em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 16 mai. 2015.

BEDNARZ, Nadine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. **Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles: articulation entre formation mathématique, didactique et pratique**. 2003. Disponível em: < http://emf.unige.ch/files/6014/5459/4120/EMF2003_Conference_Bednarz.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2017.

BRIANT, Nathalie. **Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.** Thèse pour obtenir le grade de Docteur - Délivré par UNIVERSITE MONTPELLIER 2. 2013. Disponível em: <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00920506/document>. Acesso em: 10 mai. 2014.

BROUSSEAU, Guy **Les obstacles ´epist´emologiques et la didactique des mathématiques**.. 1989. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/516581/filename/Les_obstacles_epistemologiques_et_la_didactique_des_mathematiques89.pdf >. Acesso em: 18 abr. 2015.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008. (Educação em ação).

BROUSSEAU, Guy. **Les différents rôles du maître**. 1988. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00497481/document>. Acesso em: 18 abr. 2015.

BURAT, Émile. **Traité d'algèbre élémentaire, à l'usage des lycées, des collèges et des candidats à l'école militaire de Saint-Cyr**. Paris: Librairie Classique d'Eugène Belin, 1876. Diponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6531600m>. Acesso em: 31 jul. 2014.

CAJORI, Florian. Uma História da Matemática. Tradução Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CANDAU, Joël. **Antropologia da Memória**. Lisboa: Instituto Piaget, 2005.

CANDAU, Joël. **Memória e identidade**. Trad. Maria Letícia Ferreira. São Paulo: Contexto, 2014.

CARLES, D. José Dalmau. **Aritmética Razonada y Nociones de Álgebra:** Tratado Teórico – Prático – Demostrado. 57ª Edición, corregida y aumentada por D. José Maria Dalmau Casademont. Barcelona: Juan Darne, 1927. Madrid: Libreria y Casa Editorial, 1927. Gerona: Editores Dalmau Carles, Pla S. A., 1927.

CARVALHO, Cláudia Cristina Soares de. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/claudia_cristina_carvalho.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2011.

CARVALHO, Cristiane C.; PEREIRA, José C. S. **Aprendizagem significativa – das operações aritméticas às operações algébricas**: o tratamento das operações algébricas a partir das operações aritméticas como conhecimento prévio. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Belém, 2009.

CATALÁN, Pilar Bolea. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2003. (Monografias del Seminário Matemático "Garcia de Galdeano", 29). Tesis - Universidad de Zaragoza.

CHEVALLARD, Yves. **Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique**. 1997 Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=30>.Acesso em: 15 jun. 2015.

CHEVALLARD, Yves. Introduction à la théorie anthropologique du didactique / **Introdução à teoria antropológica do didático**. Slides bilíngue: Francês/ português.2011a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Yves. **Sigisbées et Sycophantes**. In: Journal du Seminaire TAD/IDD-2010/2011–3; pp. 1-14, 2011b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2010-2011-3.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Profession, Chercheur en Didactique** . In: Journal du Seminaire TAD/IDD-2011/2012–2; pp. 1-9, 2011c. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2011-2012-2.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Le Mathématique et le Didactique**. In: Journal du Seminaire TAD/IDD- 2010/2011–4; pp. 1-15, 2011d. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2010-2011-4.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. (1985, 1991). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné**.** Grenoble: La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique].

CHEVALLARD, Yves. **« Le fait de la recherche »**. In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 3; pp. 1-8, 2009f. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf >. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **À propos des PER**. In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 1; pp. 7-23, 2009e. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-20010-1.pdf >. Acesso em: Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Notes pour un Exposé à Venir** . In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 6; pp. 1-20, 2009g. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2008-2009-6.pdf>. Acesso em: Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. 1998. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2015.

CHEVALLARD, Yves. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques.** 2002. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf>. Acesso em: 02 jun. 2012.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: <http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF> . Acesso em: 18 abr. 2012.

CHEVALLARD, Yves. **Enseignement de l'algebre et transposition didactique**. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol. 52, n. 2, 1994a. Disponível em: <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf> . Acesso em: 09 maio 2012.

CHEVALLARD, Yves. **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. 2009c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Yves. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**: questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009d. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Yves. **La notion de PER : problèmes et avancées**. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Yves. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 24 abr. 2011.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique et l'avenir de l'École.** 1996. Disponível em:<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=6 >. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college -** premiere partie – l'évolution de la transposition didactique. In: Petit x, nº 5, p. 51-94, 1984. Disponível em: < http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>. Acesso em: 09 mai. 2012.

CHEVALLARD, Yves. **Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college** – deuxieme partie – perspectives curriculaires : la notion de modelisation . In: Petit x, nº 19, p. 43-72, 1989. Disponível em: < http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>. Acesso em: 10 mai. 2014.

CHEVALLARD, Yves. **Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college** – troisième partie – voies d'attaque et problemes didactiques. In: Petit x, nº 23, p. 05-38, 1990. Disponível em: < http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>. Acesso em: 10 mai. 2014.

CHEVALLARD, Yves. **Les processus de transposition didactique et leur théorisation**. 1994c. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=114>. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. 1994b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125>. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Sur les Praxéologies de recherche en didactique – « Méthodologie de la recherche en SHS »**. 2014. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 mai. 2015.

CHEVALLARD, Yves. **Symposium: "Didactique de l'enquête codisciplinaire et des parcours d'étude et de recherche"**. In: Colloque international "Efficacité et Équité en Éducation". 2008b. Disponível em: <http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_chevallard.pdf >. Acesso em: 14 set. 2012.

CHEVALLARD, Yves. « **Didactique de L'Enquête Codisciplinaire** ». In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 1; pp. 15-29, 2007. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-du-seminaire-tad-idd-1.pdf>. Acesso em: Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Sur la TAD**. In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 8; pp. 7-25, 2008a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-du-seminaire-tad-idd-8.pdf>. Acesso em: Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves. **Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1: Enquête codisciplinaire & EDD**. 2012-2013. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf>. Acesso em: 07 jul. 2016.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf >. Acesso em: 24 abr. 2011.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna. **L'algebre entre effacement et reaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algebre**. In: COULANGE, Lalina; *et al.* Enseignement de l'Algèbre Élémentaire: bilan et perspectives. Hors série – Revue Recherches en didactique des mathématiques. France: Éditions la Pensée Sauvage, 2012, pp. 19-39.

CHEVALLARD, Yves; CIRADE, Gisèle. **Les ressources manquantes comme problème professionnel**. 2010. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Version_YC-GC_presque_comme_le_livre.pdf >. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Yves; ARTAUD, Michèle. **Fondements et méthodes de la recherche en didactique - Leçon 3: Praxéologies de recherche I.** 2013-2014a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DDM_-_UE_35_-_YC_-_Lecons_3.pdf> . Acesso em: 15 jun. 2015.

CHEVALLARD, Yves; ARTAUD, Michèle. **Fondements et méthodes de la recherche en didactique - Leçon 4: Praxéologies de recherche II.** 2013-2014b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DDM_-_UE_35_-_YC_-_Lecon_4.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2015.

CID, Eva; BOLEA, Pilar. Diseño de un Modelo Epistemológico de Referencia para Introducir los Números Negativos en um Entorno Algebraico. In: *communication au 2e congrès TAD*, p. 575-594, Uzès, 2007. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/EvaPilar-CITAD-II-2010.pdf> Acesso em: 15 jun. 2015.

CONTADOR, P. R. M. Matemática, uma breve história. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. v. 1.

COULANGE, Lalina; *et al.* **Enseignement de l'Algèbre Élémentaire**: bilan et perspectives. Hors série – Revue Recherches en didactique des mathématiques. France: Éditions la Pensée Sauvage, 2012.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

CRANTZ, Paul. Manuales Técnicos Labor N.º 2: **Aritmética y Álgebra**. Versión de la Duodécima Edición Alemana por David Soler Carreras. Barcelona, Madrid, Buenos Aires, Rio de Janeiro: Editorial Labor S. A., 1949.

CRUZ, Eliana da Silva. **A Noção de Variável em Livros Didáticos de Ensino Fundamental**: um estudo sob a ótica da organização praxeológica. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/index.php?tipoPesquisa=1>. Acesso em: 01 mai. 2011.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações – vol. 3**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 1

DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. (Fundamentos de matemática; 16).
DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: estruturas algébricas e matemática discreta.** Rio de Janeiro: LTC, 2009. (Fundamentos de matemática).

DELGADO, Tomás Ángel Sierra. **Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas:** los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Memoria para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madrid, 2006.

DELORD, Michel. **Opérations arithmétiques et algèbre des polynômes ou Apprend-on seulement les opérations pour trouver le résultat?** 2003. Disponível em: <http://michel.delord.free.fr/ar-alg.pdf>. acesso em: Acesso em: 15 jun. 2015.

DROUHARD, Jean-Philippe. **Le Seminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algebre**. In: COULANGE, Lalina; *et al.* Enseignement de l'Algèbre Élémentaire: bilan et perspectives. Hors série – Revue Recherches en didactique des mathématiques. France: Éditions la Pensée Sauvage, 2012, pp. 183-192.

EULER, Léonard. **Élémens d'algèbre**. Lyon, 1795. Disponível em: <http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-8611 >. Acesso em: 14 ago. 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingos. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. In: **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, v. 15, n. , p. 1-28, 2013. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757> . acesso em: 07 set. 2014.

FERRINI-MUNDY, Joan; FLODEN, Robert; MCCRORY, Raven. **Knowledge for Teaching School Algebra**: Challenges in Developing an Analytic Framework. 2003. Disponível em: <https://msu.edu/~mccrory/_pubs/Ferrini_KATFramework.pdf>. Acesso em: 07 set. 2014.

FLORIANI, José Valdir. **Professor e pesquisador**: exemplificação apoiada na matemática. 2. ed. Blumenau: Ed. da FURB, 2000.

FONSECA BON, Cecilio; *et al*. **Diseño de un Recorrido de Estudio e Investigación en los Problemas de Modelización**. 2009. Disponível em: <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/DidMatDisCientifica/Fonseca_Casas_Bosch_Gascon_R.pdf >. Acesso em: 24 jun. 2013.

FONSECA,C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. In: *Educación Matem ática*, vol. 22, núm. 2, p. 5-34, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n2/v22n2a2.pdf> . Acesso em: 15 jun. 2015.

FONSECA,C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas**:** el caso de la “regla de Ruffini”. s/d. Disponível em:<http://docplayer.es/21185630-El-momento-del-trabajo-de-la-tecnica-en-la-completacion-de-organizaciones-matematicas-el-caso-de-la-regla-de-ruffini.html>. Acesso em: 08 abr. 2012.

FREITAS, M. T. M.; FIORENTINI, D. As possibilidades formativas e investigativas da narrativa em educação matemática. **Horizontes**, Revista Semestral do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco. v. 25, n. 1, p. 63-71, jan./jun. 2007. Disponível em: <http://www.saofrancisco.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/edicao_completa%5B11019%5D.pdf#page=63> . Acesso em: 01 jun. 2011.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008. (Coleção Texto)

GARBI, Gilberto G. O romance das equações algébricas. 4. ed. rev. ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GARCÍA, Francisco Javier; *et al*. El Álgebra como Instrumento de Modelización. Articulación del Estudio de las Relaciones funcionales en la Educación Secundaria. In: **Investigación en Educación Matemática**, v. XI, p. 71-90, 2007. Disponível em: <www.dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2696957.pdf >. Acesso em: 21 jun. 2013.

GASCÓN, Josep. Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. In: *Recherches en didactique des mathematiques*, 13/3, p. 295-332, 1993.

GASCÓN, Josep. El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. In: *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 5.3, p. 673-702, 2002. Disponível em: <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=124> . Acesso em: 21 jun. 2013.

GASCÓN, Josep. Las tres dimensiones fundamentales de um problema didáctico: el caso del álgebra elemental. In: **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 14, nº 2, p. 203-231, 2011.

GASCÓN. **Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas**. Ponencia presentada en las XVI Jornadas del SI-IDM celebradas en Huesca (30-31 de marzo y 1 de abril del año 2001). Disponível em: <http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/prac_investigaci5/Gascon_Problemas_de%20_nvesti.pdf >. Acesso em: 21 jun. 2013.

GASCÓN. Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l'“arithmétique généralisée. **Petit x**, n. 37, p. 43-63, 1994. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25&num=37 >. Acesso em: 27 mar. 2016.

GIRARD, Albert. **Invention nouvelle en l'algèbre**. Chez Cuillaume Iansson Bleuw. Amsterdam, 1629. Reimpression par Dr. Bierens de Hann. Leiden, 1884. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4803 > . Acesso em: 30 jul. 2014.

GREGOLIN, Vanderlei Rodrigues. **O Conhecimento Matemático Escolar**: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação).

Universidade Federal de São Carlos, Centro de Educação e Ciências Humanas. São Carlos, 2002. Disponível em: <http://portal.fclar.unesp.br/publicacoes/tese_vrg.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2011.

HILGENHEGER, Norbert. **Johann Herbart**. Trad. José Eustáquio Romão. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me4672.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2016.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos, volume 1**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997a.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos, volume 2**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997b.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas. rev. téc. Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

KEPPKE, Charston Lima. **Álgebra nos Currículos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2007.

LACROIX, Silvestre-François (1765-1843). **Élémens d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations**. [Par S.-F. Lacroix.]. De l'imprimerie de Crapelet. A Paris, Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques. 1799. Disponível em: <:http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6323947x> . Acesso em: 02 ago. 2014.

LARGUIER, Mirène. La connaissance des differents types de nombres : un probléme de la profession en seconde. In : **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 32, nº 32, pp. 101-144, 2012.

LARGUIER, Mirène. **La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.** Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Montpellier II. France, 2009.

LAVORENTE, Carolina Riego. **A Matemática Moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2008.

MACLAURIN, Colin**. Traité d'algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris, 1753. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095477>. Acesso em: 31 jul. 2014.

MARIETTI, Julia; CHEVALLARD, Yves. **Le concept de PER et sa céception actuelle en Mathematiques et Ailleurs** :Une étude préparatoire. 2009. Mémoire de 1^{re} année du master de sciences de l'éducation. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Memoire_de_MR1_de_Julia_Marietti.pdf >. Acesso em: 14 set. 2012.

MATHERON, Yves. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. In: *petit x*, n° 54, pp. 51 - 78, 2000a. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12>. Acesso em: 15 jun. 2015.

MATHERON, Yves. **Une Etude Didactique de la Memoire nans l'Enseignement des Mathematiques au College Et au Lycee. Quelques Exemples.** These pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE I, 2000b.

MENDOZA, Miguel Angel Gómez. La transposición didáctica: historia de un concepto. In: **Revista Latinoamericana de Estudios Educativos**, v. 1, p. 83-115, 2005. Disponível em: <http://200.21.104.25/latinoamericana/downloads/Latinoamericana1_5.pdf> . Acesso em: 07 set. 2014.

MESQUITA, Flávio Nazareno Araújo. **As dinâmicas praxeológicas e cognitivas e a construção do conhecimento didático do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Belém, 2011.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S (1982, 2001). **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro.

MUZÓN, Noemí Ruiz. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. 2010. Memoria presentada per aspirar al grau de Doctora en Matemátiques – Departament de Matemátiques – Universitat Autónoma de Barcelona. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/Volumen_1.pdf>. Acesso em: 07 set. 2014.

OLARRÍA, A. R.; DELGADO, T. A. S.; CASABÒ, M. B.; PÉREZ, J. G. Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. In: **Bolema**, v. 28, n. 48, p. 319-340, 2014. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/16.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2017.

PEACOCK, George. **A Treatise on Algebra. Vol. I**. Arithmetical Algebra. Cambridge : Printed at the University Press; Published By J. & J. J. Deighton, Cambridge; and by G. F. & J. Rivington, and Whittaker & Co. London. 1842. Disponível em: <:https://archive.org/details/84142856_001>. Acesso em: 16 jul. 2016.

PEACOCK, George. **A Treatise on Algebra. Vol. II**. On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position. Cambridge: Printed at the University Press; Published By J. & J. J. Deighton, Cambridge; and by G. F. & J. Rivington, and Whittaker & Co. London. 1845. Disponível em: <https://archive.org/details/84142856_002>. Acesso em: 16 jul. 2016.

PEREIRA, José Carlos de Souza. **Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

RAMPAZZO, Lino. **Metodologia científica**: para alunos dos cursos de graduação e pós-graduação. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2002.

RÓNAI, Paulo. **Dicionário francês –português, português –francês**. ed. 4. Rio de Janeiro: Lexikon, 2012.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática – 2º Ciclo – 1ª Série**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1948.

SENSAGENT, Dictionaire on line. Disponível em: <http://dictionnaire.sensagent.com/lien/fr-pt/ >.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. rev. atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics**. Vol. II. New York : Dover, 1958. Disponível em: <https://archive.org/details/historyofmathema031897mbp>. Acesso em: 26 jul. 2014.

SOUSA, Adilson Sebastião de. **Metacognição e Ensino de Álgebra**: análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação. São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-29012009-120830/pt-br.php>. Acesso em: 14 jun. 2011.

STEVIN, Simon. **Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin**. Leyde, 1634. Disponível em:<http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2161127 >. Acesso em: 14 ago. 2014.

SYSTRANET france, Dictionnaire on line. Disponível em: <http://www.systranet.com/fr/fr/dictionary/french-portuguese/prian> .

THURSTON, W. P. On Proof and Progress in Mathematics. In: *Appeared in Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 30, nº 2, p. 161-177, 1994. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/math.ho/9404236.pdf >. Acesso em: 21 jun. 2013.

TRALDI, Maria Cristina; DIAS, Reinaldo. **Monografia passo a passo**. ed. 7. Campinas: Editora Alínea, 2011.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VIÈTE, François. **Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre**. Paris, 1630. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4788 >. Acesso em: 30 jul. 2014.

WECHELUM, Andrean. **Arithmética**. 1562. Cum Privilegio Regis. Disponível em: <http://fondosdigitales.us.es/fondos/libros/985/10/arithmetica/> Acesso em: 09 set. 2011.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros: o método analítico na *Arithmetica Raciocinada* de Pedro d'Alcantara Lisboa, publicada em 1863. **Revista Educação em Questão**. Natal, v. 23, n. 9, p. 31-52, mai. /ago. 2005. Disponível em: <http://www.revistaeduquestao.educ.ufrn.br/pdfs/v23n09.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE – A: Fragmentos do artigo de Chevallard (1989)

LE PASSAGE DE L'ARITHMETIQUE A L'ALGEBRIQUE

DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE

DEUXIEME PARTIE

PERSPECTIVES CURRICULAIRES: LA NOTION DE MODELISATION

INTRODUÇÃO

- UM PROBLEMA DE ENGENHARIA CURRICULAR (CHEVALLARD, 1989, p. 49)

O problema didático geral, que em seguida é conduzido pode ser formulado assim: é possível definir e atingir um estado do sistema de ensino (ou seja, um currículo) que determine um currículo oficial para o algébrico mais apropriado para as tarefas as quais o algébrico será usado, principalmente, no ensino médio (Liceu)?

Pergunta reformulada:

É possível definir e atingir um estado do sistema de ensino que determine um currículo oficial mais apropriado para as tarefas as quais o quadro algébrico será usado, principalmente, no ensino básico?

O CÁLCULO ALGÉBRICO E OS SISTEMAS DE NUMEROS (NUMERAÇÃO)

- UMA INCONTORNÁVEL DIALÉTICA (CHEVALLARD, 1989, p. 49- 50)

Os primeiros domínios de cálculo encontrado - na história assim como na escola - são constituídos pelos diferentes sistemas de números sucessivamente introduzidos e estudados na escola primária e no colégio (ensino fundamental): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

O problema didático da construção dos diferentes sistemas de números está no coração do currículo do colégio. Este é, objetivamente, um problema difícil, na frente do qual alguns entre os melhores tem recuado e que se pode pensar que não tem recebido até agora solução satisfatória [...]

Pergunta:

Quais as razões de se ensinar esses sistemas de números na escola?

A dupla origem para a insuficiência numérica decorre, segundo Chevallard (1989), de **medir grandezas** e **da existência de números resultantes de um cálculo algébrico aceitável**.

Consequentemente, a extensão dos naturais (ℕ**)** para os inteiros relativos (ℤ), dos inteiros relativos para os racionais (ℚ), dos racionais para os reais (ℝ) e, mais adiante, dos reais para os complexos (ℂ), torna-se necessária para dar conta dos cálculos algébricos, como os dos processos resolutivos de equações.

O efeito dessa extensão dos sistemas de números está na "*La maîtrise formelle du calcul fonctionnel*" (CHVELLARD, 1989, p. 52). Para Chevallard essa maestria se pauta em dois objetivos:

- **O primeiro objetivo deve assegurar o ensino de uma manipulação formal satisfatória do cálculo algébrico, ou, na versão mais desenvolvida, do cálculo no corpo R(x) das frações racionais – objetivo, especialmente, importante para os alunos que prosseguirão seus estudos além do colégio.**
- **A maestria dialética entre manipulação formal do cálculo algébrico (ou melhor: dos cálculos algébricos) e conhecimentos dos sistemas de números constitui então um segundo objetivo do ensino da álgebra no colégio. Esse objetivo deriva de uma dupla observação: ele não pode ter maestria do cálculo algébrico funcional sem que seja correto aos empregos do cálculo algébrico; e ele não pode haver emprego do cálculo algébrico sem que se desenvolva uma dialética entre o numérico e o algébrico** [...] (CHEVALLARD, 1989, p. 52-53, tradução nossa, grifos do autor

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college – deuxieme partie – perspectives curriculaires : la notion de modelisation . In: Petit x, nº 19, p. 43-72, 1989. Disponível em: < http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>. Acesso em: 10 mai. 2014.

APÊNDICE – B: Fragmentos das ideias de um Modelo Epistemológico Alternativo para o Ensino da Álgebra Básica Articulada à Aritmética

MODELO EPISTEMOLÓGICO ALTERNATIVO PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA BÁSICA ARTICULADA À ARITMÉTICA

1. Elementos da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999)

Tipos de Tarefas

- Na raiz da noção praxeologia, encontram-se as noções solidárias de *tarefa*, *t*, e de *tipo* de tarefas, *T*.
- A noção de tarefa, ou melhor, de *tipo* de tarefas, supõe um objeto relativamente preciso. *Subir uma escada* é um tipo de tarefa, porém *subir*, simplesmente, *não o é*. Da mesma forma, *calcular o valor de uma função em um ponto* é um tipo de tarefas, porém *calcular*, simplesmente, é o que se chamará um *gênero* de tarefas, que pede um determinativo.
  Concretamente, um gênero de tarefas não existe não mais que sobre a forma de diferentes *tipos* de tarefas, cujo o conteúdo está estritamente especificado. *Calcular* ... é um gênero de tarefas; *calcular o valor (exato)de uma expressão numérica contendo um radical* é um tipo de tarefas, da mesma forma que *calcular o valor de uma expressão, contendo a letra x, quando se atribui para x um determinado valor*. Durante ao longo dos anos do colégio, o gênero *Calcular*... se enriquece de novos tipos de tarefas; ocorrerá o mesmo no liceu, onde os alunos vão primeiro aprender a *calcular com vetores*, depois, mais tarde, a *calcular uma integral ou uma primitiva*, etc. Isso ocorrerá o mesmo, por conseguinte, com os gêneros *Demonstrar...*, *Construir...*, ou também *Expressar... em função de...*

2. Alguns exemplos de tipo de tarefas *T* e tarefas *t* (PEREIRA, 2012)

- Tipos de tarefas T: uma tarefa $\mathbf{t_2} \in \mathbf{T}$ **é:** Representar o número racional inteiro 345 na forma de potência de base 10;
- Técnica τ: a técnica que resolve a tarefa $\mathbf{t_2}$, é a representação de N = 345 = $3.\ 10^2 + 4.\ 10^1 + 5$;
- Tecnologia θ: a técnica τ é justificada na tecnologia de N = $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_2a_1a_0$;
- Teoria Θ: elementos teóricos da Aritmética e Álgebra.

- t_1: Calcular A + B, onde A = $5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ e B = $4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$;
- t_2: Calcular C + D, onde C = $4x^2 + 6x + 8$ e D = $7x^2 + 4x + 3$;
- t_3: Determinar E – F, sendo E = $9x^2 + 8x + 7$ e F = $3x^2 + 4x +$;
- t_4: Determinar G – H, sendo G = $5x^2 + 4x + 2$, H = $x^2 + 8x + 4$;
- t_5: Determinar M × N, sendo M = $x^2 + 2x + 8$ e N = $x + 2$;
- t_6: Calcular P × Q, onde P = $3x^2 + 2x + 4$ e Q = $4x^2 + 2$;
- t_7: Determinar o quociente e o resto de R **:** S, onde R = $x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ e S = $x^2 + 2x + 4$.

Alguns desses tipos de tarefas T_i podem ter seus pressuposto no sistema de numeração decimal indo-arábico, como as que seguem:

- T_1: Identificar as ordens que cada algarismo indo-arábico ocupa;
- T_2: Representar os números na escrita polinomial de potência de base dez;
- T_3: Escrever a expressão algébrica que resulta de se tomar $x = 10$;
- T_4: Classificar o tipo de polinômio a partir da expressão algébrica obtida;
- T_5: Identificar o grau e o coeficiente de cada tipo de polinômio.

C D U

1 2 5 = $1.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0 = 1.x^2 + 2.x^1 + 5.x^0 = x^2 + 2x + 5$ → três termos algébricos → trinômio (polinômio do 2º grau de coeficientes 1, 2 e 5)

UM C D U

1 0 0 0 = $1.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 0.10^0 = 1.x^3 + 0.x^2 + 0.x^1 + 0.x^0 = x^3$ → um termo algébrico → monômio (polinômio do 3º grau de coeficiente 1)

UM C D U

3 2 5 4 = $3.10^3 + 2.10^2 + 5.10^1 + 4.10^0 = 3.x^3 + 2.x^2 + 5.x^1 + 4.x^0 = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 4$ → quatro termos algébricos→ (polinômio do 3º grau de coeficientes 3, 2, 5 e 4)

DM UM C D U

2 0 0 0 0 = $2.10^4 + 0.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 0.10^0 = 2.x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x^1 + 0.x^0 = 2x^4$ → um termo algébrico → monômio (polinômio do 4º grau de coeficiente 2)

APÊNDICE – C: Elementos de um Modelo Epistemológico Alternativo

ELEMENTOS DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO ALTERNATIVO: as operações polinomiais[61]

José Carlos de Souza Pereira

José Messildo Viana Nunes

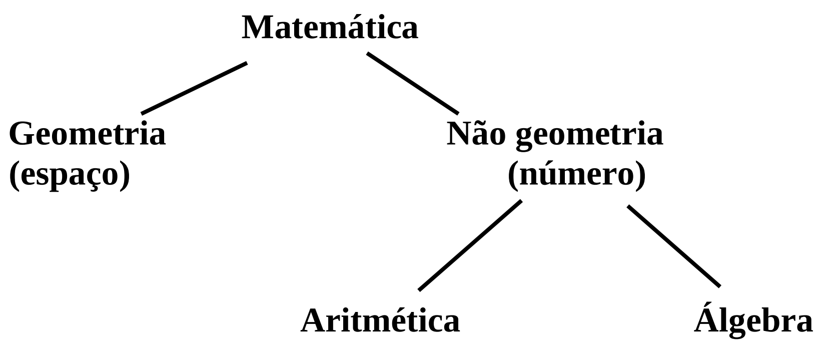
I- ALGUNS CONTEXTOS INTRODUTÓRIOS

Para Chevallard (1994) a palavra álgebra recebe uma significação quando se trata do ensino desta *no programa oficial* da França. Segundo o próprio Chevallard,

> [...] O rótulo "álgebra" tem muito tempo jogado na França um papel estruturante essencial no corpus da matemática ensinada, em conjunto com "aritmética" e "geometria" (deixando aqui de lado a análise matemática), no âmbito de uma estrutura duplamente oposta [...] (Ibidem, p. 181, tradução nossa).

O esquema a seguir resume o que Chevallard considera *ser uma estrutura duplamente oposta*:

Figura 1: Estrutura duplamente oposta.



Fonte: Chevallard (1994, p. 181, tradução nossa).

A pesquisa de Keppke (2007) exibe um estudo sobre a "Álgebra nos Currículos do Ensino Fundamental". Nesse estudo ele analisa alguns documentos que nortearam ou norteiam o ensino da álgebra no Brasil, entre os quais estão: "os Guias Curriculares (1970), a proposta Curricular para o Ensino de 1º Grau (1980) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª edição, anos 1990)" (Ibidem, p. 40).

---

[61] Texto adaptado da dissertação de mestrado de Pereira (2012): **ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE CONEXÕES ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA NO CONTEXTO DO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

Desses três documentos, os Parâmetros Curriculares Nacionais é o mais recente e ainda orienta o ensino de matemática na Educação Básica.

Segundo Keppke (2007, p. 49):

> No Brasil, principalmente a partir da década de 1950, podemos observar muitas iniciativas de mudança curricular as quais, em sua maior parte, partiram do governo [...]
> Nesse contexto, o ensino da Álgebra sofreu um processo de simplificação, para atender a uma demanda por ensino que atingia, de fato, todas as classes sociais. A Álgebra passou a ser, com a industrialização, exigência básica para a formação de pessoas de qualquer camada social. A Álgebra passou a ser requisito e exigência já na formação básica. Porém, as dificuldades que surgiram, tanto por parte dos professores quanto por parte dos alunos, no processo de ensino aprendizagem da Álgebra, fizeram com que de porta de entrada para a ascensão social, a Álgebra passa-se a ser, também, barreira instransponível para essa mesma desejada ascensão.

Em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) assim ressalta Keppke (2007, p. 56 -57):

> No tocante à Álgebra, os PCN sugerem a exploração de situações de aprendizagem para desenvolver o pensamento algébrico no 3º ciclo (5ª e 6ª séries – ***6º e 7º anos do ensino fundamental***), visando que o estudante: reconheça as representações algébricas como um instrumento de expressão de generalizações das propriedades das operações aritméticas [...]
> Para o 4º ciclo, os PCN indicam a exploração de situações de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, com os seguintes objetivos: a produção e a interpretação de diferentes escritas algébricas (expressões, igualdades e desigualdades), a identificação de equações, inequações e sistemas, a resolução de situações-problemas por meio de equações e inequações do primeiro grau [...]
> Com relação ao quarto ciclo (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental – ***8º e 9º anos***), os PCN apresentam como proposta aos professores que estimulem e proporcionem aos estudantes novas vivências e situações que possibilitem a eles o uso dos conhecimentos matemáticos, evidenciando sua importância e significado, bem como os estudantes se sintam mais competentes ante esse conhecimento [...] (grifos nosso).

II – A NUMERAÇÃO DECIMAL

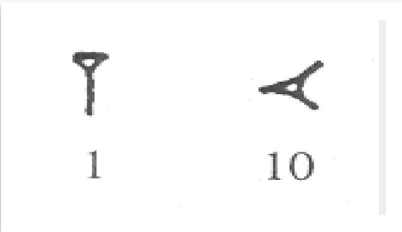
Segundo Ifrah (2005) a invenção dos números fez surgir *"o primeiro procedimento aritmético*" que está associado a um "*[...] artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos* [...]" (Ibidem, p. 25).

A correspondência biunívoca, estabelecida acima, remete-nos a ideias matemáticas mais avançadas – a bijeção entre elementos de conjuntos. O termo bijeção está inserido na álgebra moderna. Daí essa ideia ou noção pode servir de conhecimento prévio para o ensino e a aprendizagem de outros tópicos dessa mesma álgebra.

Os babilônios adotaram várias bases para suas práticas numéricas, contudo, a base sexagesimal foi a mais importante. A referência dessa base recai sobre os sumérios. Segundo Ifrah (1997a, p. 162): *"[...] Em vez de contar por dezenas, centenas e milhares, os sumérios* *tinham preferido optar pela base 60, agrupando assim os seres e as coisas por sessentenas e potências de sessenta".*

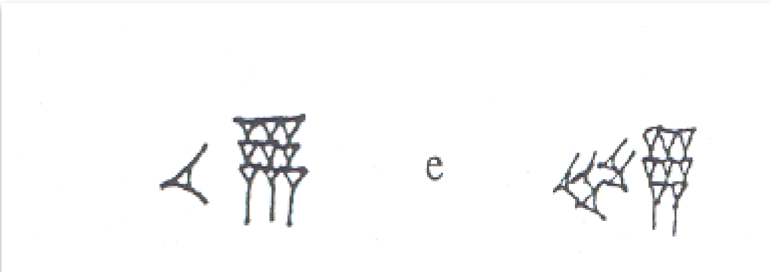
O sistema de numeração babilônico possuía apenas dos símbolos (Figura 2) , mas a contagem inicial compunha-se de cinquenta e nove unidades. A composição dessas 59 unidades era caracterizada pela aditividade. Após essas 59 unidades, iniciavam-se as sessentenas e as potências de sessenta que caracterizavam a escrita posicional desse sistema de numeração. Na Figura 3 temos os números 19 (10 + 9) e 58 (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8) na escrita aditiva. Já na Figura 4 há um exemplo da escrita posicional.

Figura 2: Os dois símbolos da numeração babilônica.



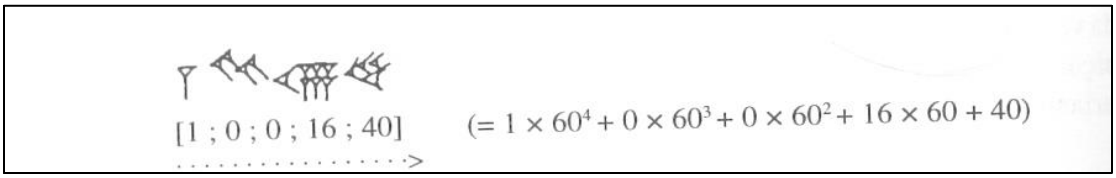
Fonte: Almeida (2007, p. 23).

Figura 3: Escrita dos números 19 e 58 no sistema de numeração babilônico.



Fonte: Almeida (2007, p. 23).

Figura 4: Representação na base sessenta.



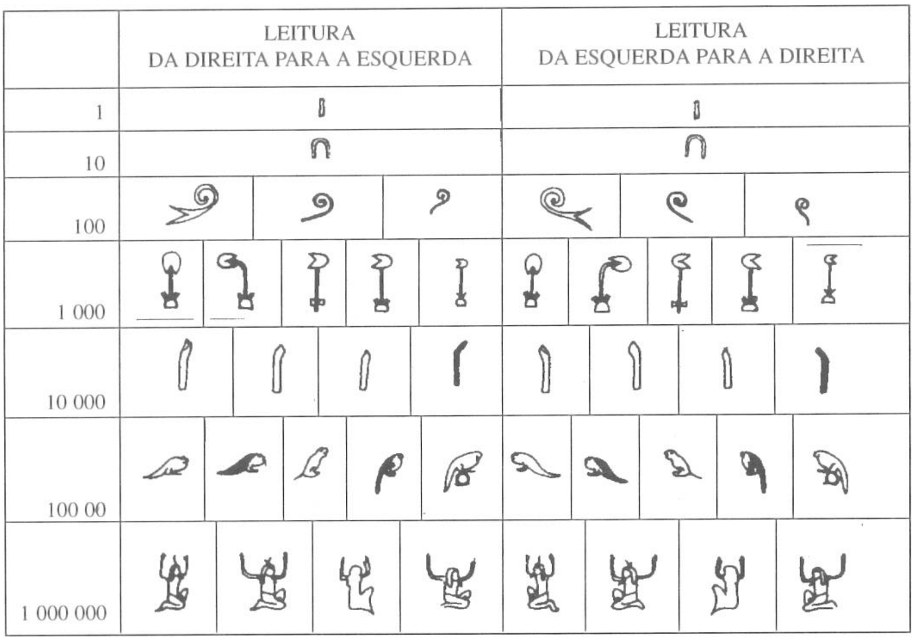
Fonte: Ifrah (1997a, p. 310).

A civilização egípcia idealizou um sistema de numeração caracterizado pela aditividade e associado à ideia de base dez. Esse sistema de numeração possuía mais símbolos que o sistema de numeração babilônico.

> O algarismo da unidade é um pequeno traço vertical. O da dezena é um sinal em forma de asa, semelhante a uma ferradura disposta como uma espécie de "U" maiúsculo ao inverso. A centena é representada por uma espiral mais ou menos enrolada, como a que se pode realizar com uma corda. O milhar é figurado por uma flor de lótus acompanhada de seus caule, a dezena de mil pelo desenho de um dedo levantado, ligeiramente inclinado, a centena de mil por uma rã ou um girino com uma calda bem pendente e o milhão por um homem ajoelhado levantando os braços na direção do céu (IFRAH, 1997a, p. 341)

A Figura 5 expõe os algarismos do sistema de numeração egípcio.

Figura 5: Algarismos hieroglíficos da numeração egípcia.



Fonte: Ifrah (1997a, p. 342).

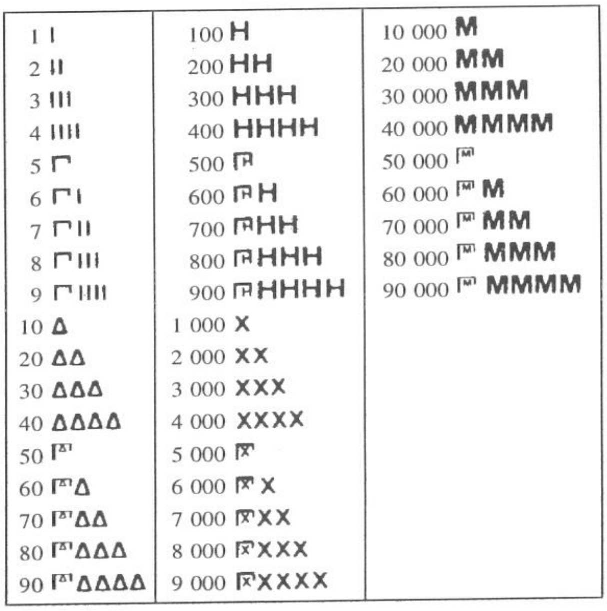
Quando a escrita egípcia passou da hieroglífica para a hierática, os algarismos hieroglíficos, também, foram adaptados para essa nova escrita. O Papiro de Rhind está grafado em caracteres hieráticos. Dessa forma, o Papiro de Rhind é uma prova material da escrita hierática egípcia.

Os egípcios desenvolveram uma técnica particular para resolverem multiplicações e divisões em seu sistema de numeração. Essa técnica é denominada por Contador (2008) como *o método dos dobros*. Não trataremos de tal técnica neste estudo, mas aos interessados em conhecê-la, recomenda-se consultar Contador (2008).

A numeração grega antiga, como o sistema numérico ático, possuía característica aditiva e uma grafia muito interessante. De certa forma, essa representação dos números áticos, quando associados ao nosso sistema de numeração usual, expressa uma disposição aditiva de ordens e classes.

A Figura 6 serve como ícone ilustrativo da relação aditiva do sistema de numeração ático e exibe a representação simbólica de alguns números desse sistema. Seguramente, há certa semelhança do sistema de numeração ático com o sistema de numeração egípcio, porém, alguns símbolos estão mais próximos da numeração romana.

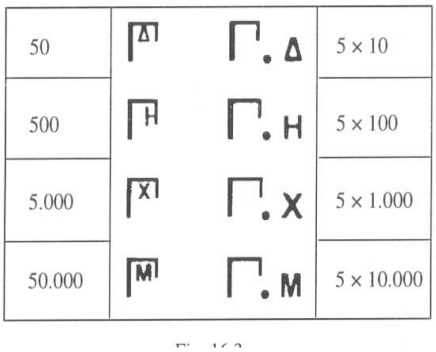
Figura 6: Notação numérica das inscrições da Ática – século V a. C. até o início da era cristã.



Fonte: Ifrah (1997a, p. 383).

No sistema de numeração ático nota-se a existência do princípio multiplicativo. Vê-se isso para os números 50, 500, 5.000 e 50.000. A Figura 7 elucida o exposto.

Figura 7: Princípio multiplicativo no sistema de numeração ático.

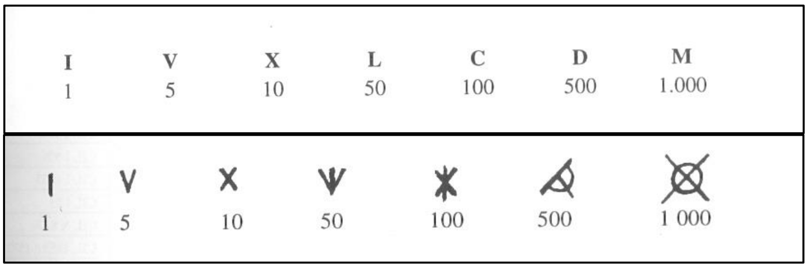


Fonte: Ifrah (1997a, p.384).

Os números romanos são apresentados para nossa compreensão em sua forma final pelos algarismos I, V, X, L, C, D e M. Essa forma de apresentação passa uma impressão de simplicidade simbólica desses algarismos. Contudo, não é bem assim.

Comparando os algarismos romanos de hoje com as primeiras notações desses, a semelhança é reduzida apenas para os algarismos I, V e X. Para Ifrah (1997a, p. 397) *são apenas modificações tardias de formas mais antigas.* A Figura 8 exemplifica isso.

Figura 8: Os algarismos romanos do passado e os atuais.



Fonte: Ifrah (1997a, p. 397).

Agora, vamos à história da numeração Hindu-Árabe. Duas civilizações que impulsionaram o conhecimento aritmético e algébrico. Sem dúvida, o desenvolvimento da matemática ocidental perpassa pelos estudos matemáticos dessas duas civilizações. A começar pelos algarismos denominados de indo-arábicos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0.

A numeração falada da civilização indiana, mais precisamente a língua *sânscrita*, contribuiu para o que hoje conhecemos como escrita por extenso dos numerais.

> Assim, o número 8.237, por exemplo, pode ser enunciado da seguinte maneira: "oito mil, duzentos, três dezenas e sete", segundo a decomposição aritmética abaixo:
> $8 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7$.
> Naturalmente, em lugar de seguir as potências decrescentes da base dez, o enunciado do mesmo número poderia ser feito no sentido inverso, seguindo as potências crescentes de dez a partir da menor unidade, isto é, aproximadamente assim:
> "Sete, três dezenas, duzentos, oito mil".
> Essa era exatamente o tipo de enunciado que os astrônomos indianos empregavam para exprimir os números "com todas as letras", através dos nomes de número da língua sânscrita. Procediam assim segundo as potências ascendentes de dez. Logo, para o número precedente, teríamos a seguinte decomposição aritmética:
> $7 + 3 \times 10 + 2 \times 10^2 + 8 \times 10^3 = 8.237$ (IFRAH, 1997b, p. 110).

A solução que os astrônomos indianos encontraram para indicar a ideia do zero foi recorrer à *palavra sânscrita* ***šhûnya***[62]*, que significa "vazio" e, por extensão, "zero"* (IFRAH, 1997b, p. 110). Nascia assim um significado para aquele par de cravos inclinados dos babilônios. Para diferenciar, por exemplo, 42 de 402. Os hindus pronunciavam 402: "*dvi śūnya*

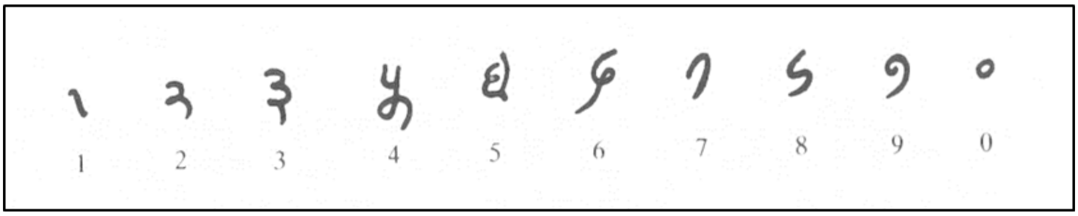
---

[62] Em Ifrah (2005, p. 270) está grafado *śūnya*. Grafia que usarei neste texto.

catur" ("DOIS. VAZIO. QUATRO"). Usando a palavra "*śūnya" os* hindus tinham constituído o algarismo zero, mas apenas de forma oral. Na língua sânscrita, os algarismos das nove unidades simples eram pronunciados: *eka, dvi, tri, catur, pañca, sat, sapta, asta, nava* (IFRAH, 2005, p. 267). Havia certa independência de pronuncias para alguns números conforme a potência de dez.

Os árabes recopiaram, inicialmente, *a numeração posicional e os métodos de cálculos originários da índia* (IFRAH, 2005, p. 299). Nessa época (metade do século IX) os símbolos numéricos hindus tinham a representação conforme na Figura 8.

Figura 8: Os nove algarismos hindus recopiados pelos árabes.



Fonte: Ifrah (2005, p. 299).

Esses algarismos passaram por modificações na cultura árabe antes de assumirem a forma como os conhecemos atualmente. Além disso, a primeira introdução desses algarismos na cultura ocidental cristã ocorreu na Europa (final do século X), por meio do monge francês Gerbert d'Aurillac (IFRAH, 1997b).

O estágio final da grafia numérica Hindu-Árabe, tal como conhecemos hoje na cultura ocidental, é consolidado por volta do século XIII e XIV. Após isso, o que se verifica é o aprimoramento tipográfico proporcionado pela invenção da imprensa por Gutenberg (IFRAH, 2005, p. 310). Assim, os algarismos indo-arábicos atinge a grafia numérica atual, que ensinamos nas instituições escolares por meio do sistema de numeração decimal.

III – OS OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS NAS OPERAÇÕES POLINOMIAIS

Vejamos o que dizem Chevallard e Bosch (1999) sobre objetos ostensivos e não ostensivos.

> [...] o problema da *natureza* dos objetos matemáticos e a sua *função* na atividade matemática nos levam a uma dicotomia que consiste em distinguir dois tipos de objetos: os ostensivos e os não ostensivos. Falamos de ostensivo, lembrando que este termo tem origem no latim *ostendere* que significa mostrar, apresentar com insistência, para nos referir a todo objeto que tem uma natureza sensível, certa

> materialidade e devido a este fato tal objeto pode ser apreendido pelo sujeito por ser uma realidade perceptível. Assim, um objeto ostensivo é um objeto material qualquer tal como os sons (entre os quais as palavras de uma língua) os grafismos (entre os quais os *grafemas* que permitem a escrita das línguas naturais ou construídas das línguas formais) e os gestos. Os objetos não ostensivos são então todos os objetos como as ideias, as intuições ou os conceitos, existentes institucionalmente, no sentido de que lhes são atribuídas existências, sem poder ser vistos, ditos, mostrados, percebidos por si mesmo. Esses objetos podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (palavras, frases, grafismos, escritas, gestos ou um longo discurso). Assim, os objetos *função* e *primitiva de uma função* são objetos não ostensivos que aprendemos a identificar e ativar por meio de expressões escritas e grafismos utilizados nas práticas e situações particulares (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 10, tradução nossa).

Outro exemplo que Chevallard e Bosch (1999) recorrem para esclarecer a manipulação dos ostensivos e dos não ostensivos é uma adição de polinômios.

> É conveniente se fixar sobre as relações que unem, na atividade humana, objetos ostensivos e objetos não ostensivos. A intervenção dos não ostensivos na práxis de manipulação de objetos ostensivos pode conduzir a dar aos não ostensivos ativados o estatuto de condições de uma manipulação adequada dos instrumentos ostensivos. Assim, a existência para mim, segundo uma relação idônea, do objeto não ostensivo "adição de polinômios" pode parecer como uma condição para que eu escreva: $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = x^3 + x^2 + 5x - 1$. Do mesmo modo, o fato que, contrariamente ao hábito gerado pelo ensino secundário, eu escrevo $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ invocará a hipótese que existe para mim certos objetos não ostensivos que condicionam a tarefa realizada, motivando-a, regulando o seu desenvolvimento e propondo um critério de parada da transformação operada – poderá se tratar, neste caso, do objeto não ostensivo "desenvolvimento limitado de ordem 1", por exemplo.
> A análise do papel dos não ostensivos como condição da manipulação de ostensivos aparece, no entanto ambivalente. Ela pode conduzir, ou dar primazia aos não ostensivos, como se a *intendência ostensiva* devesse necessariamente segui-lo, ou dar primazia aos ostensivos, como se o condicionamento por objetos não ostensivos pudesse ser tido como essencial [...] (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 12, tradução nossa).

A dialética que existe na manipulação dos ostensivos e dos não ostensivos está posta na resolução da tarefa – **resolver: $(x^3 + x +1) + (x^2 + 4x - 2)$** – que é uma tarefa $t_0 \in T$. Assim, prosseguindo com essa dialética, inferimos que T é: **resolver as operações com polinômios**.

A técnica τ e a tecnologia θ que elucidam a representação $\mathbf{(x^3 + x +1) + (x^2 + 4x - 2) = -1 +5x + x^2(1 + x)}$, foram descritas por Chevallard e Bosch (1999).

> [...] a co-ativação de ostensivos e não ostensivos está sempre presente e aparece em todos os níveis da atividade, bem como no plano da técnica como no seu entorno tecnológico-teórico. A técnica que conduz a escrita $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x -2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ requer uma manipulação de ostensivos escritos (parênteses, letras, números, etc.), orais (pequenos discursos do tipo "*x* mais 4*x*, 5*x*....") e gestos (por exemplo para agrupar os termos do mesmo grau e verificar se nenhum foi esquecido). Esta manipulação é conduzida por não ostensivos, entre os quais a noção de organização dos termos por ordem decrescente dos expoentes, a noção de "termos (ou monômios) do mesmo grau", "fatoração por x^2", ou ainda a noção de "resto de ordem 2", etc. (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 12, tradução nossa).

Floriani (2000) também mostra a possibilidade de aliarmos o algoritmo usual da soma, subtração, multiplicação e divisão aritmética ao ensino das operações com polinômios. Entretanto, Carvalho e Pereira (2009) esclarecem que há limitações para o que indica Floriani.

> Após passarmos pela soma, subtração e multiplicação com polinômios, chegamos à divisão. Tentaremos aproximar a divisão de polinômios com a divisão usual ensinada dentro do sistema de numeração decimal indo-arábico. Para tanto, precisamos ter certeza de que é possível fazer isso, pois algumas divisões de polinômios transcendem essa situação (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 42).

A constatação de Carvalho e Pereira (2009, p. 44-46) é mostrada por eles como segue:

$6x^3 + 6x + 4 : 1x^2 + 2 = 6.10^3 + 6.10 + 4 : 1.10^2 + 2 = 6000 + 60 + 4 \mathbf{:} 100 + 2 = 6064 : 102 =$

$$
\begin{array}{l|l}
\;606'4' & 102 \\ \cline{2-2}
-510 & 59 = 5x + 9 \\ \cline{1-1}
\;0964 & \\
-918 & \\ \cline{1-1}
\;046 = 4x + 6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 + 0x^2 + 6x + 4 & 1x^2 + 0x + 2 \\ \cline{2-2}
-(6x^3 + 0x^2 + 12x) & 6x \\ \cline{1-1}
0 + 0x^2 + (-6x) + 4 = -6x + 4 &
\end{array}
$$

$\mathbf{6x^3 + 0x^2 + 6x + 4 = (1x^2 + 0x + 2)\,(6x) + (-6x + 4).}$

O tipo de tarefa (resolver a divisão polinomial) que Carvalho e Pereira (2009) recorreram para mostrar que a divisão polinomial quando convertida em divisão numérica por meio da escrita polinomial na potência de base dez nem sempre será possível, contem particularidades operatórias, como as que seguem:

- Os polinômios $6x^3 + 6x + 4$ e $1x^2 + 2$ são incompletos e isso implica em completá-los para proceder com a divisão polinomial;
- Para completar os dois polinômios, precisamos dos objetos não ostensivos: noção de polinômios incompletos, identificação dos termos que faltam nos polinômios, noção de termos de coeficientes nulos na variável x;
- Para evocar os objetos não ostensivos, usamos os objetos ostensivos $0x^2$, $0x$ e sinal de +, que completam os polinômios $6x^3 + 6x + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ e $1x^2 + 2 = 1x^2 + 0x + 2$;
- Se aplicarmos a técnica da escrita polinomial na potencia de base dez nos dois polinômios e, em seguida, transformarmos essa escrita nos números inteiros positivos N_1 e N_2, surgem, explicitamente, os termos de coeficientes nulos: $N_1 = 6.10^3 + 6.10 + 4 = 6000 + 60 + 4 = 6\mathbf{0}64$ e $N_2 = 1.10^2 + 2 = 100 + 2 = 1\mathbf{0}2;$

- Transformando $N_1 = 6064$ e $N_2 = 102$ em polinômios na variável $x = 10$, obtemos: $6064 = 6.\ 10^3 + 0.\ 10^2 + 6.\ 10 + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ e $102 = 1.\ 10^2 + 0.\ 10 + 2 = 1x^2 + 0x + 2$;

- A constatação de Carvalho e Pereira (2009) revela que a divisão de $6x^3 + 6x + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ por $1x^2 + 2 = 1x^2 + 0x + 2$, na forma dos números $N_1 = 6064$ e $N_2 = 102$, não são equivalentes, pois o quociente e o resto em ambos os casos diferem;

IV – O MODELO EPISTEMOLÓGICO ALTERNATIVO E A ELABORAÇÃO DE TIPOS DE TAREFAS COM OPERAÇÕES POLINOMAIS

1- Ideias que revelam a tecnologia θ e a Teoria Θ, de tipos de tarefas T_i e tarefas $t_i \in T_i$, bem como a técnica τ:

Temos no exposto por De Maio (2009, p. 267), segundo o qual *a forma geral para representarmos os números na forma de potências, polinômios, é* $N = \ldots a_3 \cdot b^3 + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + \ldots$, *onde* $0 \leq a_i < b$ *e* $b \geq 2$ *e a e b números naturais*. Essa generalização é plausível à representação de números em bases quaisquer. O mesmo autor (2009, p. 268) usa essa generalização na representação dos números no sistema de numeração decimal, sendo:

$N = \ldots a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$, *onde* $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a_i *= algarismo*.

Pelo exposto no parágrafo anterior, a técnica τ que resolve a tarefa **t_1** (**Representar o número racional inteiro 345 na forma de potência de base 10**), é a representação de N = 345 = 3. 10^2 + 4. 10^1 + 5. 10^0 e está justificada na tecnologia θ de N = $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_2 a_1 a_0$. Já para a tarefa **$t_2$** (**Representar o número racional decimal $\frac{8}{1000}$ (oito milésimos) na forma de potência de base 10**), a técnica que a resolve é a mesma de **t_1**, com a necessária adequação. Portanto,

$$N = \frac{8}{1000} = 0{,}008 = 8.\ 10^{-3} = 0.\ 10^0 + 0.\ 10^{-1} + 0.\ 10^{-2} + 8.10^{-3} =$$

$$a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + a_{-3} \cdot 10^{-3} = a_0 \cdot 10^0 + \frac{a_{-1}}{10^1} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3} =$$

$$a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \frac{1}{100} + a_{-3} \cdot \frac{1}{1000} = a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 0{,}1 + a_{-2} \cdot 0{,}01 + a_{-3} \cdot 0{,}001 =$$

$$a_0 + 0{,}a_{-1} + 0{,}0a_{-2} + 0{,}00a_{-3} = a_0{,}a_{-1}a_{-2}a_{-3}.$$

Na obra de Roxo et al. (1948) temos a seguinte descrição tecnológica:

> No sistema de base 10, todo número N pode ser escrito sob a forma
> $N = u + d \,.\, 10 + c \,.\, 10^2 + \ldots$
> onde *u, d, c,* etc. indicam respectivamente os algarismos das unidades, dezenas, centenas, etc.
> Do mesmo modo, no sistema de base *b*, o número *N* poderá ser posto sob a forma de soma ordenada segundo as potências de *b*, do seguinte modo
> $N = \alpha + \beta.b + \gamma.b^2$
> onde α, β, γ, etc. indicam números menores que *b*. Assim, no sistema centesimal (*b* = 100*)*, o número 7(13)05 representa
> $7 \times 100^3 + 13 \times 100^2 + 0 \times 100 + 5 = 7130005.$
> É na representação milenária (*b* = 1000) que se baseia a própria leitura dos números no sistema de numeração decimal. Por exemplo
> 3208467 = 3(208) (467).
> Para indicar que *A* é a representação na base *b* de um número *N*, dado no sistema decimal, escreveremos
> $N = A_{(b)}$
> Assim
> $7130005 = 7(13)05_{(100)}$ (ROXO et al., 1948, p. 64).

Com base na escrita dos números *N*, pertencentes ao sistema de numeração decimal, conforme se encontra em Roxo et al. (1948), propomos a escrita polinomial abaixo para os números inteiros positivos N_1 e N_2 no sistema de numeração decimal:

$$N_1 = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + x_3 \cdot 10^3 + \ldots + x_n \cdot 10^n, 0 \le x_i < 10, i = 0,1,\ldots,n \text{ e}$$

$$N_2 = y_0 + y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 10^2 + y_3 \cdot 10^3 + \ldots + y_n \cdot 10^n, 0 \le y_i < 10, i = 0,1,\ldots,n.$$

Assim, as operações $N_1 + N_2$, $N_1 - N_2$, $N_1 \times N_2$ *e* $N_1 : N_2$, são possíveis nessa representação polinomial?

O tratamento que Crantz (1949) propôs à multiplicação merece atenção. Crantz manipula a potência de base dez para clarificar como ocorre a conversão de uma ordem para outra durante o processo multiplicativo do algoritmo tradicional da multiplicação.

> [...] o produto $523 \,.\, 412 = (5.\, 10^2 + 2.\, 10 + 3)\,(4.\, 10^2 + 1.\, 10 + 2)$.
>
> Produz um efeito surpreendente resolver, primeiramente, esta operação colocando um fator debaixo do outro e escrevendo imediatamente na terceira linha (da direita à esquerda) o *resultado:*
>
> $$\begin{array}{r} 523 \\ 412 \\ \hline 215476 \end{array}$$

Para isso se procede assim:

$$\left.\begin{array}{l}(a \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + c)\\ \\ (\alpha \,.\, 10^2 + \beta \,.\, 10 + \gamma)\end{array}\right\} =$$

$$= c\gamma + (b\gamma + c\beta)\,.\,10 + (a\gamma + c\alpha + b\beta)\,.\,10^2 + (a\beta + b\alpha)\,.\,10^3 + a\alpha\,.\,10^4$$

$$6 \qquad 7.\,10 \qquad 24.\,10^2 \qquad 13.\,10^3 \qquad 20.\,10^4$$

separando logo $20.\ 10^2$ de $24.\ 10^2$ para somá-lo, como $2.\ 10^3$ a $13.\ 10^3$ e obter $15.\ 10^3$, de onde se separa por sua vez $10.\ 10^3$ para somá-lo como $1.\ 10^4$ a $20.\ 10^4$ e obter $21.\ 10^4 = 2.\ 10^5 + 1.\ 10^4$ (CRANTZ, 1949, p. 31, tradução nossa).

A modelização algébrica proposta por Crantz para a multiplicação de números com três ordens, no sistema de numeração decimal, insere-se na escrita polinomial de N_1 e N_2. Consequentemente, $N_1 + N_2$ e $N_1 \times N_2$ são validadas para essa modelização algébrica. As duas outras operações, isto é, $N_1 - N_2$ *e* $N_1 : N_2$, são validadas, obedecendo-se as particularidades numéricas do sistema de numeração indo-arábico.

A álgebra no âmbito dos sistemas de numeração posicional de bases não decimal requer manipulação ostensiva e não ostensiva de objetos matemáticos que estão estruturados em conformidade com o sistema de numeração decimal. Vejamos o exemplo ilustrado pela tarefa t_3:

- t_3: Calcular: $251_{(7)} \times 314_{(7)}$.

Para resolver essa tarefa, representamos N_1 e N_2 na escrita polinomial:

$N_1 = 2.\ 7^2 + 5.\ 7 + 1$ e $N_2 = 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$.

Logo, $N_1 \times N_2 = (2.\ 7^2 + 5.\ 7 + 1\ )\ (3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4)$. Então,

$(2.\ 7^2 + 5.\ 7 + 1)\ (3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4) =$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 8.\ 7^2 + 15.\ 7^3 + 5.\ 7^2 + 20.\ 7 + 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + (1.\ 7 +1).\ 7^2 + (2.\ 7 + 1).\ 7^3 + 5.\ 7^2 + (2.\ 7 + 6).\ 7 + 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 1.\ 7.\ 7^2 + 1.\ 7^2 + 2.\ 7.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 5.\ 7^2 + 2.\ 7.\ 7 + 6.\ 7 + 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 1.\ 7^2 + 2.\ 7^4 + 1.\ 7^3 + 5.\ 7^2 + 2.\ 7^2 + 3.\ 7^2 + 6.\ 7 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 1.\ 7^2 + 5.\ 7^2 + 2.\ 7^2 + 3.\ 7^2 + 6.\ 7 + 1.\ 7 + 4$

$= (6 + 2).\ 7^4 + (2 + 1 + 1).\ 7^3 + (1 + 5 + 2 + 3).\ 7^2 + (6 + 1).\ 7 + 4$

$= 8.\ 7^4 + 4.\ 7^3 + 11.\ 7^2 + 7.\ 7 + 4 = (7 + 1).\ 7^4 + 4.\ 7^3 + (7 + 4).\ 7^2 + 1.\ 7^2 + 0.\ 7 + 4$

$= 1.\ 7^5 + 1.\ 7^4 + 4.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 4.\ 7^2 + 1.\ 7^2 + 0.\ 7 + 4$

$= 1.\ 7^5 + 1.\ 7^4 + (4 + 1).\ 7^3 + (4 + 1).\ 7^2 + 0.\ 7 + 4$

$= \mathbf{1}.\ 7^5 + \mathbf{1}.\ 7^4 + \mathbf{5}.\ 7^3 + \mathbf{5}.\ 7^2 + \mathbf{0}.\ 7 + \mathbf{4} = \mathbf{115504}_{(7)}$.

Se a escrita polinomial de N_1 e N_2 for representada pelos polinômios $2x^2 + 5x + 1$ e $3x^2 + x + 4$, e a tarefa consisti em: **Multiplicar $2x^2 + 5x + 1$ por $3x^2 + x + 4$**. Logo, o resultado que se obtém é o polinômio $6x^4 + 17x^3 + 16x^2 + 21x + 4$. Notam-se nesse polinômio que os coeficientes dos termos algébricos são quase todos diferentes dos que aparecem no resultado da multiplicação da escrita polinomial dos números N_1 e N_2. Isso ocorreu porque na multiplicação polinomial, o processo resolutivo não exige transporte de ordem. Entretanto, do polinômio $6x^4 + 17x^3 + 16x^2 + 21x + 4$, chega-se ao resultado da multiplicação dos números N_1 e N_2. Para isso, é suficiente tornar $x = 7$ e proceder com os ajustes dos coeficientes e dos expoentes de x pelo produto de potência de mesma base, observem:

$6x^4 + 17x^3 + 16x^2 + 21x + 4 = 6.\ x^4 + 17.\ x^3 + 16.\ x^2 + 21.\ x + 4$

$= 6.\ x^4 + (2.7 + 3).\ x^3 + (2.\ 7 + 2).\ x^2 + (3.\ 7).\ x + 4$

$= 6.\ x^4 + 2.x.\ x^3 + 3.\ x^3 + 2.\ x.\ x^2 + 2.\ x^2 + 3.\ x.\ x + 4$

$= 6.\ x^4 + 2.x^4 + 3.\ x^3 + 2.\ x^3 + 2.\ x^2 + 3.\ x^2 + 0.\ x + 4 = 8.\ x^4 + 5.\ x^3 + 5.\ x^2 + 0.\ x + 4$

$= (7 + 1).\ x^4 + 5.\ x^3 + 5.\ x^2 + 0.\ x + 4 = 1.\ x.\ x^4 + 1.\ x^4 + 5.\ x^3 + 5.\ x^2 + 0.\ x + 4$

$= \mathbf{1}.\ x^5 + \mathbf{1}.\ x^4 + \mathbf{5}.\ x^3 + \mathbf{5}.\ x^2 + \mathbf{0}.\ x + \mathbf{4} = \mathbf{115504}_{(7)}$.

Para Chevallard e Bosch (1999) a distinção entre técnica, tecnologia e teoria dependem do caráter funcional destas no tipo de tarefas que são tomadas como referencial. Vemos isso imbricado na maneira como assumimos ensinar a adição, tomando-se como referencia o sistema de numeração decimal.

Por exemplo, ao somarmos 23268 com 32286, pelo algoritmo usual, os algarismos indo-arábicos são tomados em seu valor absoluto, por ser mais cômodo explicar a funcionalidade da técnica desse algoritmo, em que a tecnologia θ se resume em apenas somar dois números naturais N_1 e N_2 e o resultado é um número natural N_3, isto é, $N_1 + N_2 = N_3$. A teoria Θ, neste caso, é a aritmética ou uma parte desta (propriedade do fechamento). No entanto, se essa mesma adição for pensada para justificar o transporte de ordem, o valor a ser considerado é o da ordem (posição) que cada algarismo ocupa no sistema de numeração decimal (de modo que 10 unidades é igual a 1 dezena, 10 dezenas é igual a 1 centena, 10 centenas é igual a 1 milhar , 10 milhares é igual 1 dezena de milhar, etc.), ou seja, a teoria aritmética contém elementos tecnológicos do sistema de numeração posicional decimal, conforme vimos anteriormente. A técnica τ é representar os números N_1 e N_2 como segue:

- $N_1 = 2.10^4 + 3.\ 10^3 + 2.\ 10^2 + 6.\ 10 + 8$ e $N_2 = 3.10^4 + 2.\ 10^3 + 2.\ 10^2 + 8.\ 10 + 6$;
- N_1 = *2 dezenas de milhar + 3 unidades de milhar + 2 centenas + 6 dezenas + 8 unidades* e N_2 = *3 dezenas de milhar + 2 unidades de milhar + 2 centenas + 8 dezenas + 6 unidades*;
- A técnica agora é somar às ordens correspondentes, associando a tecnologia à teoria para proceder ao transporte de ordem quando for necessário. Portanto, $\boldsymbol{N_1 + N_2}$*= 23268 + 32286 = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 14 dezenas + 14 unidades = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 10 dezenas + 4 dezenas + 10 unidades + 4 unidades = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 1 centena + 4 dezenas + 1 dezena + 4 unidades = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 5 centenas + 5 dezenas + 4 unidades =* ***55554 =*** $\boldsymbol{N_3}$.

Podemos resolver 23268 + 32286 pela escrita polinomial na potência de base dez. Assim,

$$\begin{array}{rl} & 23268 = 20000 + 3000 + 200 + 60 + 8 = 2 \,.\, 10^4 + 3 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 10^2 + 6 \,.\, 10 + 8 \\ + & 32286 = 30000 + 2000 + 200 + 80 + 6 = 3 \,.\, 10^4 + 2 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 10^2 + 8 \,.\, 10 + 6 \\ \hline & = 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + 14 \,.\, 10 + 14 = \end{array}$$

$$= 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + (10 + 4) \,.\, 10 + (10 + 4)$$

$$= 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + (1 \,.\, 10 + 4) \,.\, 10 + (1 \,.\, 10 + 4)$$

$$= 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + 1 \,.\, 10 \,.\, 10 + 4 \,.\, 10 + 1 \,.\, 10 + 4$$

$$= 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + 1 \,.\, 10^2 + (4 + 1) \,.\, 10 + 4$$

$$= 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + (4 + 1) \,.\, 10^2 + (4 + 1) \,.\, 10 + 4$$

$$= 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10 + 4 = 55554.$$

Um dos efeitos da tecnologia θ sobre a técnica τ é a modificação dessa técnica de forma que ela alargue sua abrangência ou se sofistique de modo que resulte em uma nova técnica (ALMOULOUD, 2007). Nesse sentido, as ideias de Floriani (2000) de associar o algoritmo usual da adição e da divisão aritmética para resolver adição e divisão de polinômios, teve um intuito, com certa limitação, de propor uma técnica numérico-algébrica para resolver adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios. O elemento tecnológico dessa técnica é considerar a variável no sistema de numeração decimal, na qual ela assume sempre o valor igual a dez, possibilitando transformar um polinômio em um número natural ou inteiro.

Vamos retomar a tarefa t_0, **resolver:** $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x – 2)$, e confrontá-la com a tarefa t_4, **resolver:** $(10^3 + 10 + 1) + (10^2 + 4.10 – 2)$, lembrando que a tarefa t_0 tem como solução: $– 1 + 5x + x^2(1 + x)$. Essa solução é proposta por Chevallard e Bosch (1999).

A tarefa t_4 é uma consequência dos estudos da obra de Floriani (2000) e constam na monografia de Carvalho e Pereira (2009), na qual consideramos as ideias dele para representar os polinômios da tarefa t_0 como sendo $10^3 + 10 + 1$ e $10^2 + 4.10 – 2$. Assim, a tarefa t_4, recai em somar **1011** (1000 + 10 + 1) com **138** (100 + 40 – 2 = 100 + 38). Procedo à soma de **1011** com **138** que resulta **1149**. Representando **1149** na forma polinomial de potência de base dez, ele assume a escrita: $1 . 10^3 + 1 . 10^2 + 4 . 10 + 9$. Faço $x = 10$ para transformar $1 . 10^3 + 1 . 10^2 + 4 . 10 + 9 = 1 . x^3 + 1 . x^2 + 4 . x + 9 = x^3 + x^2 + 4x + 9$. Portanto, a solução da tarefa t_0 seria o polinômio $x^3 + x^2 + 4x + 9$. Por que essa solução difere da Chevallard e Bosch (1999)?

Resolvendo, novamente, a tarefa t_4, porém, ajustando a técnica τ oriunda das ideias que apreendemos de Floriani (2000). Desta maneira,

$$(10^3 + 10 + 1) + (10^2 + 4.10 – 2) = (1.\ 10^3 + 1.\ 10^1 + 1.\ 10^0) + (1.\ 10^2 + 4.\ 10^1 – 2.\ 10^0) =$$

$$= 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 1.\ 10^1 + 4.\ 10^1 + 1.\ 10^0 – 2.\ 10^0 = 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + (1 + 4).\ 10^1 + (1 – 2).\ 10^0 = 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 5.\ 10^1 – 1.\ 10^0.$$

Da escrita polinomial de base dez resultante, $1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 5.\ 10^1 – 1.\ 10^0$. Fazemos os ajustes necessários à escrita polinomial na variável $x = 10$, que resulta na solução de Chevallard e Bosch (1999). Logo,

$$1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 5.\ 10^1 – 1.\ 10^0 = 1.\ x^3 + 1.\ x^2 + 5.\ x^1 – 1.\ x^0 = x^3 + x^2 + 5x – 1 = – 1 + 5x + x^2 + x^3 = – 1 + 5x + x^2 (1 + x).$$

A resolução da tarefa t_0 (**resolver:** $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x – 2)$), seguindo as ideias de Floriani (2000) que preconiza a técnica do cálculo dos valores numéricos dos polinômios $x^3 + x + 1$ *e* $x^2 + 4x – 2$, fazendo-se $x = 10$, exige o trabalho dessa técnica por meio do algoritmo da soma aritmética. Porém, a tarefa t_0 não se ajusta a essa técnica. Isso decorre do fato do polinômio $x^2 + 4x – 2$ possuir o coeficiente negativo menos dois (– 2). Assim, esse coeficiente imprime uma mudança na técnica de Floriani (2000) para que ela se ajuste a técnica de Chevallard e Bosch (1999). Portanto, a solução que obtivemos para a tarefa t_0 por intermédio da tarefa t_4 (**resolver: $(10^3 + 10 + 1) + (10^2 + 4.10 - 2)$**), na qual consideramos os valores numéricos dos polinômios $\boldsymbol{x^3 + x + 1}$ ***e*** $\boldsymbol{x^2 + 4x - 2}$, ou seja, **1011** e **138**. Não está totalmente incorreta, mas, não segue o mesmo trabalho da técnica de Chevallard e Bosch, que usam a técnica τ de reduzir termos semelhantes. Contudo, quando recorremos à técnica que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009), ou seja, pela escrita polinomial da potência de base dez, para resolver a tarefa t_4, encontramos a solução equivalente a de Chevallard e Bosch (1999). Desse modo, a técnica τ pela escrita polinomial na potência de base dez, quando aplicada na resolução da soma de dois polinômios, segue o mesmo trabalho da técnica que Chevallard e Bosch (1999) usaram para solucionar a tarefa t_0.

O pressuposto de Chevallard e Bosch definindo *tarefas, técnicas, tecnologias e teorias*, foi para anunciarem *a noção de organização praxeológica (ou praxeologia) pontual, regional ou global que são o conjunto de técnicas, tecnologias e teorias para as praxeologias pontuais* (COSTA, 2008, p. 19). Dessa forma, nas palavras de Pereira (2012, p. 70):

> - No oitavo ano (7ª série) do Ensino Fundamental, o questionamento sobre a resolução de uma operação de polinômios, por exemplo, a adição. Isso constitui uma organização praxeológica pontual;
> - Se o propósito for resolver diferentes operações de polinômios. Então, a organização praxeológica é local;
> - Ao se conceber as operações de polinômios como manipulações de expressões algébricas, principalmente, do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, nesse sentido, a organização praxeológica caracteriza-se pela regionalidade.

Um exemplo de uma Organização Matemática Pontual (OMP) é a tarefa: **calcular A + B**, **em que A =** $\boldsymbol{2x^2 + x + 2}$ ***e*** $\boldsymbol{B = x^2 + x + 3}$. Por conseguinte, se várias destas OMP puderem ser agrupadas por intermédio da tecnologia θ que justifica as técnicas τ resultantes da escrita polinomial na potência de base dez e estas técnicas τ quando mobilizadas permitem resolver os tipos de tarefa T dessas OMP. Então, do agrupamento dessas várias OMP surge uma Organização Matemática Local (OML). Essa OML é designada por Fonseca, Bosch e Gascón (2010) pela notação $OM_\theta = [T/\tau/\theta/\Theta]$.

Da monografia de Carvalho e Pereira (2009, p. 38), extraí a atividade citada a seguir. Ela engloba várias OMP que constituem a OML dessa atividade.

> Sejam os seguintes polinômios, $A = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $B = 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$, $C = 4x^2 + 6x + 8$, $D = 7x^2 + 4x + 3$, $E = 9x^2 + 8x + 7$, $F = 3x^2 + 4x + 1$, $G = 5x^2 + 4x + 2$, $H = x^2 + 8x + 4$, $M = x^2 + 2x + 8$, $N = x + 2$, $P = 3x^2 + 2x + 4$, $Q = 4x^2 + 2$, $R = x^3 + 3x^2 + 7x + 6$, $S = x^2 + 2x + 4$. Determinemos A + B, C + D, E – F, G – H, M × N, P × Q e R **:** S.

Na atividade citada, observamos sete tarefas t_i de tipos de tarefas T_i. Denominaremos essas tarefas por t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 e t_7. Quais são elas?

- t_1: Calcular A + B, onde $A = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ e $B = 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$;
- t_2: Calcular C + D, onde $C = 4x^2 + 6x + 8$ e $D = 7x^2 + 4x + 3$;
- t_3: Determinar E – F, sendo $E = 9x^2 + 8x + 7$ e $F = 3x^2 + 4x +$;
- t_4: Determinar G – H, sendo $G = 5x^2 + 4x + 2$, $H = x^2 + 8x + 4$;
- t_5: Determinar M × N, sendo $M = x^2 + 2x + 8$ e $N = x + 2$;
- t_6: Calcular P × Q, onde $P = 3x^2 + 2x + 4$ e $Q = 4x^2 + 2$;
- t_7: Determinar o quociente e o resto de R **:** S, onde $R = x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ e $S = x^2 + 2x + 4$.

2- Elementos praxeológicos por meio do modelo epistemológico alternativo:

O modelo epistemológico alternativo proposto por Pereira (2012) centra-se, principalmente, no bloco prático-técnico **[T,τ]** (do saber fazer ou da práxis). Nesse boco, o símbolo **T** representa tipo de tarefas e o símbolo **τ** a técnica que pode solucionar as tarefas **t** que constituem o tipo de tarefas **T**. Isso significa que $\mathbf{T = \{t_0, t_1,..., t_n\}}$, com $n \in \mathbb{N}$. A extensão da ideia de tipo de tarefas T, leva aos tipos de tarefas $\mathbf{T_i}$, com $i > 0$ e $i \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathbf{T_i = \{T_1, T_2,..., T_n\}}$.

O bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] (do saber ou do logos), ou seja, da tecnologia θ e da teoria Θ, no modelo epistemológico alternativo (PEREIRA, 2012), possui compreensões conectadas entre dois campos teóricos da Matemática: Aritmética e Álgebra. Esse bloco é voltado para o professor de matemática ou pessoas que estudam matemática. Vejamos como o modelo epistemológico alternativo de Pereira (2012) pode auxiliar no ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental.

A ideia principal contida no modelo epistemológico alternativo é iniciar o ensino da Álgebra, retomando as operações aritméticas fundamentais por meio do sistema de numeração decimal, no qual as ordens e as classes imputam o valor posicional nos algarismos indo-arábicos. Assim podemos pensar em tipos de tarefas T_i:

- T_1: Identificar as ordens que os algarismos indo-arábicos ocupam no sistema de numeração decimal;
- T_2: Indicar o valor relativo dos algarismos indo-arábicos nos números naturais;
- T_3: Resolver adição aritmética com quantidade de parcelas e ordens iguais;

- T_4: Resolver adição aritmética com quantidade de parcelas iguais e quantidades de ordens diferentes;
- T_5: Resolver adição aritmética com quantidade de parcelas e ordens iguais que exijam a “reserva”;
- T_6: Resolver adição aritmética com quantidade de parcelas iguais e quantidades de ordens diferentes que exijam a “reserva”;
- T_7: Resolver subtração aritmética sem uso do “recurso”;
- T_8: Resolver subtração aritmética com uso do “recurso”;
- T_7: Resolver multiplicação aritmética com dois fatores e quantidade de ordens iguais;
- T_8: Resolver multiplicação aritmética com dois fatores e quantidade de ordens diferentes;
- T_9: Resolver divisão aritmética com dividendo e divisor, tendo a mesma quantidade de ordens;
- T_{10}: Resolver divisão aritmética com dividendo e divisor, tendo quantidade de ordens diferentes;
- T_{11}: Representar números naturais pela soma dos valores relativos dos algarismos indo-arábicos;
- T_{12}: Representar números naturais na escrita polinomial da potência de base 10;
- T_{13}: Identificar as ordens semelhantes dos números naturais quando escritos na representação polinomial da potencia de base 10;
- T_{14}: Determinar a soma aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial da potencia de base 10;
- T_{15}: Determinar a soma aritmética entre três números naturais escritos na representação polinomial da potencia de base 10;
- T_{16}: Resolver a subtração aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial da potencia de base 10;
- T_{17}: Resolver a multiplicação aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial da potencia de base 10;
- T_{17}: Resolver a divisão aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial da potencia de base 10;

- T_{18}: Criar uma expressão algébrica a partir da escrita de um número natural na forma polinomial de potência de base 10, atribuindo-se a variável escolhida o valor *10*;
- T_{20}: Criar uma expressão algébrica a partir da escrita de um número natural na forma polinomial de potência de base 2, atribuindo-se a variável escolhida o valor *2*;
- T_{21}: Criar uma expressão algébrica a partir da escrita de um número natural na forma polinomial de potência de base 3, atribuindo-se a variável escolhida o valor *3*;
- T_{22}: Criar uma expressão algébrica a partir da escrita de um número natural na forma polinomial de potência de base 5, atribuindo-se a variável escolhida o valor *5*;
- T_{23}: Criar duas expressões algébricas, por meio da escrita de dois números naturais na forma polinomial de potência de base 10 e atribuindo-se a variável escolhida o valor *10*, de forma que a soma dessas duas expressões algébricas seja equivalente à soma aritmética desses dois números naturais;
- T_{24}: Criar duas expressões algébricas, por meio da escrita de dois números naturais na forma polinomial de potência de base 10 e atribuindo-se a variável escolhida o valor *10*, de forma que a subtração entre essas duas expressões algébricas seja equivalente à subtração aritmética entre esses dois números naturais;
- T_{25}: Criar duas expressões algébricas, por meio da escrita de dois números naturais na forma polinomial de potência de base 10 e atribuindo-se a variável escolhida o valor *10*, de forma que a multiplicação entre essas duas expressões algébricas seja equivalente à multiplicação aritmética entre esses dois números naturais;
- T_{26}: Criar duas expressões algébricas, por meio da escrita de dois números naturais na forma polinomial de potência de base 10 e atribuindo-se a variável escolhida o valor *10*, de forma que a divisão entre essas duas expressões algébricas seja equivalente à divisão aritmética entre esses dois números naturais.

Anunciamos acima 26 tipos de tarefas T_i, cada um desses tipos de tarefas possui tarefas t_i. Os tipos de tarefas T_i devem servir para elaboração de tarefas t_i como, por exemplo, as que expomos a seguir:

- t_1: Identificar as ordens que compõem o número 3467.
- t_2: Indicar o valor relativo dos algarismos indo-arábicos no número 4567.
- t_3: Resolver: 345 + 123.
- t_4: Resolver: 9845 + 234.
- t_5: Resolver: 9876 + 3457.
- t_6: Se A = 68998 e B = 5689, calcular A + B.
- t_7: Criar uma expressão algébrica a partir da escrita do número 30568 na forma polinomial de potência de base 10, de forma que $x = 10$.
- t_8: Criar uma expressão algébrica a partir da escrita do número 45 na forma polinomial de potência de base 3, de forma que $y = 3$.
- t_9: Somar os números 246 e 231, na forma polinomial de potência de base 10.
- t_{10}: Multiplicar os números 234 e 15, na forma polinomial de potência de base 10.

As tarefas aqui anunciadas servem para revelar a relevância da Teoria Antropológica Didático na atividade matemática do professor de matemática. Além disso, os elementos teóricos dessa teoria estão postos no modelo epistemológico alternativo proposto por Pereira (2012). Modelo este, que remodela ideias para ensinar a álgebra escolar.

Referências

ALMEIDA, Fernando Manuel Mendes de Brito. **Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

BOLEA CATALÁN, Pilar. **El processo de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2003. (Monografias del Seminário Matemático “Garcia de Galdeano”, 29). Tesis - Universidad de Zaragoza.

BOUILLON, Stéphane. **Temps, Culture Des Professeurs et Memoire Didactique** - Une étude comparée des modes de gestion de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et à l'école primaire. Thèse pour le Doctorat de l'Université Bordeaux 2. Mention : Sciences de l'Education. 2010. Disponível em: < http://www.theses.fr/150334893>. Acesso em: 29 jan. 2017.

CARLES, D. José Dalmau. **Aritmética Razonada y Nociones de Álgebra:** Tratado Teórico – Prático – Demostrado. 57ª Edición, corregida y aumentada por D. José Maria Dalmau Casademont. Barcelona: Juan Darne, 1927. Madrid: Libreria y Casa Editorial, 1927. Gerona: Editores Dalmau Carles, Pla S. A., 1927.

CARVALHO, Cristiane C.; PEREIRA, José C. S. **Aprendizagem significativa – das operações aritméticas às operações algébricas**: o tratamento das operações algébricas a partir das operações aritméticas como conhecimento prévio. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Belém, 2009.

CHEVALLARD, Yves. Enseignement de l'algebre et transposition didactique. **Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino**. Vol. 52, n. 2, 1994. Disponível em: <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf>. Acesso em: 09 mai. 2012.

_______________. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Com la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: <http://jose-desktop.uacm.edu.mx/nolineal/libros/campomedio/El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teoria_antropologica_de_los_didactico.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2012.

______________. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 24 abr. 2011.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2011.

CRANTZ, Paul. Manuales Técnicos Labor Nº 2: **Aritmética y Álgebra**. Versión de la Duodécima Edición Alemana por David Soler Carreras. Barcelona, Madrid, Buenos Aires, Rio de Janeiro: Editorial Labor S. A., 1949.

DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. (Fundamentos de matemática; 16).

DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: estruturas algébricas e matemática discreta.** Rio de Janeiro: LTC, 2009. (Fundamentos de matemática).

DELGADO,Tomás Ángel Sierra. **Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas:** los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Memoria para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madrid, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingos. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FLORIANI, José Valdir. **Professor e pesquisador**: exemplificação apoiada na matemática. 2. ed. Blumenau: Ed. da FURB, 2000.

FONSECA,C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas:** el caso de la "regla de Ruffini". s/d. Disponível em: <http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Fonseca_Bosch_Gascon.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2012.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008. (Coleção Texto).

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos, volume 1**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997a.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos, volume 2**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997b.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas. rev. téc. Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

KEPPKE, Charston Lima. **Álgebra nos Currículos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2007.

PEREIRA, José Carlos de Souza. **Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática – 2º Ciclo – 1ª Série**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1948.

SILVA, Maria José Ferreira da. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/maria_jose_ferreira_silva.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2012.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As Ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

ANEXOS

ANEXO – A: Esboço da Proposta de Aula do Professor x_1

Elaborar tarefas t_i de tipos de tarefas T_i, para o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental.

T_1: É possível decompor os números 56, 371, 7894 e 65281 em ordens com seus respectivos valores relativos?

t_2: É possível representar os números em parcelas de uma soma?

t_3: Represente as parcelas utilizando potências de base 10.

t_4: Escreva ao lado de cada número decomposto, quantas parcelas eles tem.

t_5: Reescreva os números substituindo nas parcelas o número 10 pela letra x.

t_6: Verifique nas expressões formadas, se existem termos que se assemelham (iguais) e os separem.

ANEXO – B: Proposta de Aula do Professor *x_3*

Elaborar tarefas t_i de tipos de tarefas T_i, para o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental. As tarefas propostas foram retiradas do livro didático e readaptadas ao modelo epistemológico alternativo de Pereira (2012), e também durante a formação.

Tarefa 1

A soma das áreas das duas figuras abaixo pode ser expressa por um binômio. Determine-o.

Figura A

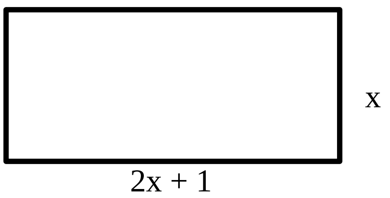
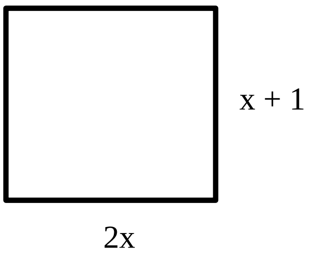


Figura B



t_1 : Represente as medidas da figura A na forma polinomial de base dez, tomando x = 10;

$2x + 1 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$ e $x = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

t_2 : Represente as medidas da figura B na forma polinomial de base dez, tomando x = 10;

$2x = 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$ e $x + 1 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

t_3 : Represente a escrita polinomial no sistema de numeração posicional decimal Indo-Arábico para as figuras A e B;

$2x + 1 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 20 + 1 = 21$

$x = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 10 + 0 = 10$ e

$2x = 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 20 + 0 = 20$

$x + 1 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 10 + 1 = 11$

t_4 : Represente a expressão polinomial da área da figura A;

Área do retângulo A : (base) x (altura)

$A = (2x + 1) \cdot x = (2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0) \cdot (1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0) = (20 + 1) \cdot (10 + 0) = 21 \cdot 10 = 210 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 = 2x^2 + x^1 + 0 = \mathbf{2x^2 + x}$.

t_5 : Represente a expressão polinomial da área da figura B;

Área do retângulo B : (base) x (altura)

$B = (2x) \cdot (x + 1) = (2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0) \cdot (1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0) = (20 + 0) \cdot (10 + 1) = 20 \cdot 11 = 220 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 = 2x^2 + 2x^1 + 0 = \mathbf{2x^2 + 2x}$.

t_6 : Determine A + B, onde $A = 2x^2 + x$ e $B = 2x^2 + 2x$;

$A = 2x^2 + x = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 = 200 + 10 = 210$

$B = 2x^2 + 2x = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 = 200 + 20 = 220$

$A + B = 210 + 220 = 430 = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x^1 + 0 \cdot 10^0 = 4x^2 + 3x^1 + 0 \cdot 1 = 4x^2 + 3x^1 + 0 = \mathbf{4x^2 + 3x}$. (Binômio de grau 2 e coeficientes 4 e 3)

Outra maneira:

$A = 2x^2 + \ \ x = \mathbf{2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1}$

$\underline{B = 2x^2 + 2x = \mathbf{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1}}$

$\mathbf{A + B} \qquad = \mathbf{4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 = 4x^2 + 3x}$ **.**

Maneira econômica:

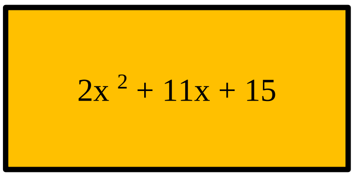
$A = \quad 2x^2 + \quad x$

$\underline{B = \quad 2x^2 + 2x}$

$\mathbf{A + B = 4x^2 + 3x}$ **.**

Tarefa 2

A área do retângulo abaixo é expressa pelo polinômio $2x^2 + 11x + 15$. Qual é o polinômio que representa a medida da altura desse retângulo?



2x + 5

t_1 : Representar números naturais na escrita polinomial da potência de base 10;

t_2 : Identificar as ordens semelhantes dos números naturais quando escritos na representação polinomial da potencia de base 10;

t_3 : Resolver a divisão aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial da potencia de base 10;

t_4 : Criar duas expressões algébricas, por meio da escrita de dois números naturais na forma polinomial de potência de base 10 e atribuindo-se a variável escolhida o valor *10*, de forma que a divisão entre essas duas expressões algébricas seja equivalente à divisão aritmética entre esses dois números naturais;

t_5 : Resolver divisão aritmética com dividendo e divisor, tendo quantidade de ordens diferentes;

t_6 :

A área do retângulo = (base) x (altura)

$$2x^2 + 11x + 15 \quad = (2x + 5) \ \textbf{.} \ (\text{altura})$$

$$\text{Altura} = \frac{2x^2 + 11x + 15}{2x + 5}$$

Sendo $A = 2x^2 + 11x + 15$ e $B = 2x + 5$ determine a divisão A **:** B ;

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 11x + 15 & 2x + 5 \\ \hline 2 \,.\, 10 + 11 \,.\, 10 + 15 \,.\, 10 & 2 \,.\, 10 + 5 \,.\, 10 \\ \hline 200 + 110 + 15 & 20 + 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,2\,5 & 2\,5 \\ \cline{2-2} -\ \underline{2\,5} & 1\,3 \\ 7\,5 & \\ & \\ -\ 0\ – & \end{array}$$

N = 13 = u + d **.** 10 = 3 + 1 **.** 10^1 = 3 + 1 **.** x^1 = 3 + 1 **.** x = **3 + x .**

Ou seja:

O polinômio que representa a medida da altura desse retângulo é **x + 3** .

TAREFA 3 - EXTRA

(UFV – MG) Éder e Vando, alunos do 8º ano, brincam de modificar polinômios com uma *Regra de Três Passos* (R3P). No 1º passo, apagam o termo independente; no 2º passo, multiplicam cada monômio pelo seu grau; e, no 3º passo, subtraem 1 no grau de cada monômio. Pela aplicação da R3P ao polinômio p(x) = (2x + 1) (x – 3), obtém-se o polinômio:

a) 4x – 5
b) 2x + 3

c) $4x + 5$
d) $4x + 3$
e) $2x – 3$

O.B.S.: Essa última tarefa mostrarei em sala de aula (se der tempo)

ANEXO – C: Proposta de Aula do Professor x_4

Tarefas sobre Polinômios para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

De acordo com a proposta e sugestões de Carvalho e Pereira (2009) e Pereira e Nunes (2014), elaborei algumas tarefas T_i, para serem resolvidas, usando as técnicas desenvolvida por Pereira (2012), baseado nas ideias do modelo epistemológico alternativo.

$$N_1 = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + x_3 \cdot 10^3 + ... + x_n \cdot 10^n, 0 \leq x_i < 10, i = 0,1,...,n$$

T_1: Identificar as ordens que cada algarismo indo-arábico ocupa no sistema de numeração decimal.

t_1: Identificar as ordens que compõe o número 1457;

t_2: Identificar as ordens que compõe o número 4003.

T_2: Indicar o valor relativo dos algarismos indo-arábico nos números naturais.

t_1: Indicar o valor relativo dos algarismos no número 1555;

t_2: Indicar o valor relativo dos algarismos no número 2000.

T_3: Representar os números na escrita polinomial de potência de base 10.

t_1: Representar o número 256 na escrita polinomial de base 10;

t_2: Representar o número 1005 na escrita polinomial de base 10.

T_4: Identificar as ordens semelhantes dos números naturais quando escritos na representação polinomial de potência de base 10.

t_1: 154 e 478;

t_2: 145 e 30.

T_5: Determinar a soma aritmética entre dois números escritos na representação polinomial de potência de base 10.

t_1: 124 e 232;

t_2: 845 e 139.

T_6: Resolver a subtração aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial de potência de base 10.

t_1: 374 e 122;

t_2: 245 e 193.

T_7: Resolver a multiplicação aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial de potência de base 10.

t_1: 546 e 46;

t_2: 205 e 24.

T_8: Resolver a divisão aritmética entre dois números naturais escritos na representação polinomial de potência de base 10.

t_1: 264 e 12

t_2: 4100 e 25

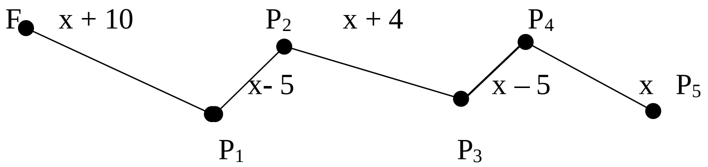
T_9: Representar na potência de base 10, os números a seguir, escrever na forma de polinômios que os representa, bem como sua classificação e grau, considerando que x = 10.

$125 = 1.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0 = 1x^2 + 2.x + 5$ (trinômio do 2º grau)

$2000 = 2.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 0.10^0 = 2x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0 = 2x^3$ (monômio do 3º grau)

$2004 = 2.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 4.10^0 = 2x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 4x^0 = 2x^3 + 4$ (binômio do 3º grau)

T_{10}Uma fábrica de doces distribui seus produtos em dez pontos de venda P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, separados entre si por distância que estão indicadas na figura seguinte:



Nessas condições, escreva o polinômio reduzido que representa a distância percorrida desde a fábrica, F, até o ponto de venda P_5, passando por todos os pontos intermediários.

Distância FP_5 = Dist. FP_1 + Dist.P1P2 + Dist.P_2P_3 + Dist.P_4P_5

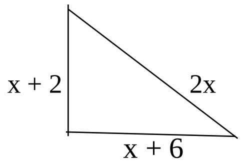
Distância FP_5 = $(x + 10) + (x- 5) + (x + 4) + (x – 5) + x$

Distância FP_5 = $x + 10 + x – 5 + x + 4 + x – 5 + x$

Distância FP_5 = $x + x + x + x + x + 10 + 4 - 5 - 5$

Distância FP_5 = $5x + 4$

T_{11}: De acordo com a figura abaixo, determine a escrita polinomial que representa cada situação a seguir:



t_1: A escrita polinomial de potência de base 10 do perímetro da figura acima (triângulo isósceles), sendo x =10;

Como o perímetro representa a soma das medidas dos lados da figura, temos:

Perímetro = x +2 + 2x + x + 6
Perímetro = 10 + 2 + 2.10 + 10 + 6
Perímetro = 2.10^1 + 10 + 10 +2 + 6
Perímetro = $2.\ 10^1 + 1.10^1 + 1.10^1 + 2.\ 10^0 + 6.\ 10^0$
Perímetro = $(2 +1 + 1).10^1 + (2 + 6).10^0$
Perímetro = $\mathbf{4.10^1 + 8\ .10^0}$

$t_{1.2}$: Escrever a expressão algébrica que representa o perímetro da figura (triângulo isósceles);

Como perímetro na escrita polinomial de potência de base 10 corresponde a $\mathbf{4.10^1 + 8\ .10^0}$, *logo sua expressão algébrica equivale:* **4x + 8**

t_2 : O polinômio que representa a área da figura;

Como a figura é triângulo e sua área corresponde a metade do produto de sua base pela altura, logo $A = \frac{(x+6).(x+2)}{2}$

Representando base do triângulo por **B** a altura por **H ,** temos:

B = (x +6) e H = (x+ 2) então , A = (B . H)/ 2

B.H = (x + 6) . (x + 2) = x.x + 2.x + 6.x + 6.2 (usando a propriedade distributiva)

B.H = x^2 + (2 +6)x + 12 redução determos semelhantes

B.H = x^2 + 8x +12, portanto $\mathbf{A = (x^2 + 8x +12)/2}$

$t_{2.1}$:A expressão polinomial sendo na potência de base 10 de t_2 , sendo x = 10;

Partindo do mesmo princípio da tarefa anterior t_2 B .H

B.H = (x + 6) . (x + 2) = (1.10 + 6) . (1.10 +2)

= 1.10.10 + 1.10.2 + 6 .1.10 + 6.2

= 1.10^2 + 2.10 + 6.10 +12

= 1.10^2 + (2 + 6).10 + 12 redução de termos semelhantes

= $1.10^2 + 8.\ 10^1 + (10+2)10^0$

Portanto $\mathbf{A = [1.10^2 + 8.\ 10^1 + (10+2)10^0]\ /2}$

Referências

CARVALHO, Cristiane C.; PEREIRA, José C. S. **Aprendizagem significativa – das operações aritméticas às operações algébricas**: o tratamento das operações algébricas apartir das operações aritméticas como conhecimento prévio. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Belém, 2009.

NUNES, José M. V.; PEREIRA, José Carlos de Souza. **Elementos de um modelo epistemológico alternativo:** as operações polinomiais. Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2014.

PEREIRA, José Carlos de Souza. **Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Telaris- Matemática- 8º ano**. SP. Editora :Ática, 2012.

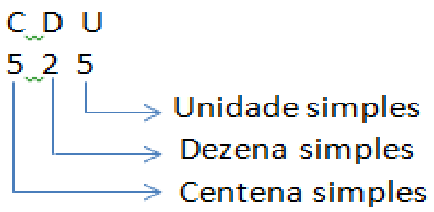
ANEXO – D: Proposta de Aula do Professor x_5

Elaborar tarefas t_i de tipos de tarefa T_i, para o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental. As atividades propostaS pelo grupo estão relacionadas aos estudos desenvolvidos durante as aulas aos sábados e na coleta de dados da Monografia de Carvalho e Pereira (2009), Dissertação de Pereira (2012), Texto final da formação (PEREIRA; NUNES, 2014) e livro didático Para Viver Juntos.

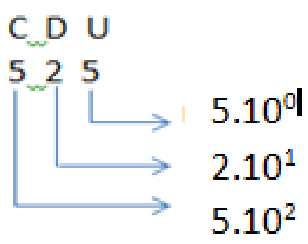
ATIVIDADE 1

T_1 – Representar o número racional inteiro 525.

t_1 : Identificar as ordens que cada algarismo indo arábico ocupa;



t_2 : Representar os números na escrita polinomial de potência de base dez;



525 = $5.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0$ (escrita polinomial de potência de base dez)

t_3 : Escrever a expressão algébrica que resulta se tomar x =10;

525 $= 5.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0 = 5x^2 + 2x + 5$

t_4 : Classificar o tipo de polinômio a partir da expressão algébrica obtida;

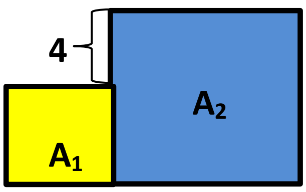
525 $= 5.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0 = 5x^2 + 2x + 5$ → Três termos algébricos → Trinômio

t_5 : Identificar o grau e o coeficiente de cada tipo de polinômio;

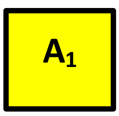
525 $= 5.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0 = 5x^2 + 2x + 5$ → Polinômio de 2ª grau de coeficientes 5, 2 e 5.

ATIVIDADE 2

T_2 – Com relação a figura abaixo, escreva um polinômio que represente o que e pedido em cada item.

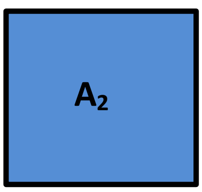


t_1 : Representar a forma polinomial da área da figura amarela?



$A_1 = x.\ x = x^2$

t_2 : Representar a forma polinomial da área da figura azul?



$A_2 = (x + 4).\ (x + 4)$

$t_{2.1}$: Resolver a multiplicação algébrica de **t_2** ;

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x+4 \quad \mathbf{x} \\ \hline x^2+4x \\ 4x+16 \quad \mathbf{+} \\ \hline \mathbf{x^2+8x+16} \end{array}$$

$t_{2.2}$: Encontrar a expressão polinomial sendo na base dez de **$t_{2.1}$** ;

Sendo x= 10, temos

$$\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 10^2 + 8.10^1 + (10 + 6).10^0}$$

t_3: A diferença entre a área do quadrado azul(A_2) e a do quadrado amarelo(A_1)

$$A_2 - A_1 = A_2 - (+A_1)$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{x^2 + 8x + 16} \\ \mathbf{-(x^2)} \\ \hline \mathbf{+ 8x + 16} \end{array}$$

$t_{3,1}$: Representar a diferença na base 10.

$$A_2 - A_1 = A_2 - (+A_1)$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{10^2 + 8.10^1 + (10 + 6).10^0} \\ \mathbf{-(10^2)} \\ \hline \mathbf{8.10^1 + (10 + 6).10^0} \end{array}$$

$t_{3,2}$: Representação da diferença posicional.

$$A_2 - A_1 = A_2 - (+A_1)$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{100 + 80 + 16} \\ \mathbf{-\ 100} \\ \hline \mathbf{80 + 16 = 96} \end{array}$$

REFERÊNCIAS

1. Monografia de Carvalho e Pereira (2009)
2. Dissertação de Pereira (2012)
3. Texto final da formação (PEREIRA; VIANA, 2014)
4. Oliveira, Carlos N. C. de
   Para viver juntos : matemática 8° ano : ensino fundamental / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita, Marco Antonio Martins Fernandes. – 3 ed. – São Paulo: Edições SM, 2014. – (Para viver juntos; v.8)

ANEXO – E: Proposta de Aula do Professor x_8

A partir da compreensão do primeiro módulo do PROJETO: **Modelo Epistemológico Alternativo para o Ensino da Álgebra básica articulada à aritmética** estudada na dissertação de Pereira (2012) o qual vem investigando atividade matemática envolvendo Análise Praxeológica de conexões entre aritmética e Álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática, pois neste sentido vão ser abordados neste texto os elementos que foram discutidos nos encontros dos grupos de professores com objetivo final de cada professor elaborar uma atividade que envolva praxeologia matemática dos tópicos debatidos em aulas presenciais que abordaram os seguintes assuntos: tarefas, tipos de tarefas, técnicas e tecnologias e em seguida produzir tarefas ti e tipos de tarefas Ti, para o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental.

Sendo assim, o foco teórico e principal é compreender cada vez mais a teoria Antropológica da Didática (TAD) de Yves Chevallard que anlizar temas importante como : Tarefas,, tipos de tarefas, tipos de técnicas, objetos ostensivos e não ostensivos, relação pessoais e institucionais com objetos e instituições todos apoiados em ideias na dissertação de (Pereira: Viana 2014) e (Carvalho e Pereira 2009) dentre outros importantes autores que me ajudará a elaboração um projeto de pesquisas a partir do objeto de estudo que a principio já tenho como foco Trigonometria ou números complexos.

Pois ao longo dos anos venho percebendo que tenho domínio em muitos assuntos matemáticos ministrados em sala de aula, porem tenho muitas dificuldades e carência de informações pedagógicas dos mesmos, mas segundo Ma(1999), apend D'Ambrósio,2005), o professor deve ter um conhecimento "profundo" de matemática para que possa tomar decisões apropriadas em sua prática de ensino e dessa forma quero aprofundar meus conhecimentos matemáticos para iniciar uma escolha importante de meu objeto de estudo para pesquisas futuras.

Nesse caminho, este texto é um passo importante na trajetória das pesquisas, que vou abraçar nesse novo horizonte de informações matemáticas o qual refretará em habilidades e conhecimentos em Educação Matemática que venho absorvendo no grupo de pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) da Universidade Federal do Pará. Diante de tudo, pretendo adquirir competências, conhecimentos, leituras e uma melhor compreensão das praxeologias e epistemologias de vários pesquisadores de modo a me passar segurança de produzir vários artigos envolvendo praxeologias e epistemologias em relação a quaisquer conteúdos matemáticos que possa escolher os quais venho desenvolvendo em sala de aula com alunos do ensino fundamental e médio, pois tenho interesse de analisar novas praxeologias e epistemologia de objetos de estudo que são problemática nas minhas atividades profissionais no ensino Básico. E finalizar com um bom projeto de pesquisas futuras com o foco principal de melhoras no ensino e aprendizagem dos alunos.

Além disso, na realização desta tarefa, assumir o compromisso de adquirir mais informações básicas do significado da palavra praxeologia, o qual vem de origem grega, sua composição é formada pelos termos práxis, no sentido de prática, e logos no sentido de apresentar elementos que permitem justificar e entender a prática (Chevallard et al, 2001, p.251).

Sendo assim, observei através das leituras que existem tipos de praxeologia tanto na atividade humana como na atividade matemática. Na humana no sentido de praticar algo na vida, por exemplo, na atividade humana, todo cidadão que possui uma trajetória intelectual tem uma certa praxeologia, podermos mencionar um professor, pois o mesmo possui práticas adquirida como a experiência, o exercício, a rotina, o hábito, um saber provindo da experiência, técnica, ou aplicação de uma teoria, teorema dentre outros que adquiriu nas universidades, ou seja toda prática tem dois sentidos importante: O saber fazer na prática e o saber na teoria, que se chama praxeologia.

Porém, vou me prender a estudar e compreender alguns tipos de praxeologias, em especial praxeologia matemática e a praxeologia didática ambas são construídas por pessoas que se propõem a estudar matemática, incluindo professores, alunos, matemáticos e outros interessados.

Segundo (PEREIRA, 2012) na atividade matemática a construção de uma praxeologia que consistiu a construção de um modelo matemático da realidade das operações de polinômios de tal modo que interpretou os resultados obtidos para responder as questões dos resultados de polinômio com alguns tipos de tarefas (ti). E dessa forma vi a necessidade de buscar mais informações teóricas para entender melhor o funcionamento do modelo matemático que Pereira, 2012 estuda.

Observei que existem elementos importantes que compõem uma praxeologia matemática os quais são: Tarefas, Tipos de tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teoria. Mas por trais desses elementos existem três aspectos importantes para praxeologia funcionar nas atividades matemáticas que são: Aprender Matemática, Ensinar Matemática e Criação de uma matemática nova, este último aspecto somente matemáticos e outros profissionais da exata dominam e criam uma nova matemática. Com esse entendimento foi possível entender mais a praxeologia que (Pereira, 2012), utilizou em sua dissertação. Onde Tarefa (T) é um problema, ou seja, uma questão a ser respondida, sendo que nesta questão se faz presente um conjunto de questões que se tornam problemática, uma vez que o aluno não saberá resolver de forma imediata, pois dentro da questão Tarefa(T) existe tipos de tarefas (ti) a ser resolvidas para poder chegar na resposta da tarefa (T). Embora afirmar que os verbos calcular, construir e medir utilizados sozinhos em determinadas questões não indicam uma tarefa e sim gêneros de tarefas segundo (Travassos, 2008) aborda. As Técnicas : Para responder à questão proposta ou seja, para realizar uma tarefa (T) e os tipos de tarefas (ti) dentro das tarefas (T), nos devemos ter um jeito de resolver, ou seja uma, duas ou mais técnicas. Isto é, para resolver um tipo de tarefa nós dispomos de várias técnicas, mas cada técnica tem suas limitações, pois quando se dificulta a problemática torna-se limitado o alcance da técnica. A tecnologia: O tipo de tarefa e a técnica empregada para sua resolução constituem o bloco pratico-técnico da praxeologia, o saber – fazer. Este Saber é constituído de elementos que permitam justificar e entender a técnica empregada, apresentando um discurso interpretativo de seu âmbito de aplicabilidade e validade, o qual nós denominamos de tecnologia.

A utilização da palavra tecnologia se dá por esta ser uma composição de dois termos em sua origem grega, Tékhne (técnica) e logos (discurso). O discurso da técnica permite que nós passamos compreender e validar a técnica utilizada, além disso, a tecnologia propicia a construção de novas técnicas. Por exemplo, a tecnologia, nós podemos apresenta a fatoração de polinômios que justifica explica a formula resolutiva da equação do segundo grau. Já a Teoria consiste em um discurso matemático suficientemente amplo que serve para interpretar e justificar a tecnologia. No caso da equação do segundo grau, a teoria que explica justifica a tecnologia anteriormente citada, é o teorema fundamental da álgebra. Segundo (Travassos, 2008) este teorema garante que todo polinômio de grau n tem n raízes e pode ser escrito na forma fatorada e estas raízes podem ser complexas e ou multiplicas. Portanto esse processo de tarefas, tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria não se finda na teoria, pois uma teoria pode gerar novos tipos de tarefas, novas técnicas e novas tecnologias.

ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE EM ETAPAS

ATIVIDADE N°1

1ºEtapa: Tarefa (T): Calcular o polinômio que representa o comprimento do segmento $\overline{AC}$ da figura abaixo. Escreva o resultado em forma de número natural e polinomial.

A__________B___________C

Onde: $\overline{AB}$ = $2x^3 + 6x^2$ + 8x +5 $\overline{BC} = 6x^3 + 4x^2 + 5$x +2

2° Etapa: Tipos de tarefas (t1): Desenvolva os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em parte na forma de base 10.

3° Etapa: Tipos de tarefas (t2): Somar todos os segmentos $\overline{AB} + \overline{AC}$ Utilizando as técnicas proposta por Pereira (2012), seguindo as ideias contidas no modelo epistemológico alternativo utilizado pelo o autor com objetivos de resolução dessas operações.

Desenvolvimento dos segmentos $\overline{AB}$ por parte na forma decimal considerando x= 10

$\overline{AB}$ = $2x^3 + 6x^2$ + 8x +5

$\overline{AB}$ = $2.10^3 + 6.\,10^2 + 8.\,10^1 + 5.\,10^0$

$\overline{AB}$ = 2.1000 + 6. 100 + 8.10 + 5.1

$\overline{AB}$ = 2000 + 600 + 80 + 5

$\overline{AB}$ =2685 → Um número natural

$\overline{BC} = 6x^3 + 4x^2 + 5$x +2

$\overline{BC} = 6.\,10^3 + 4.\,10^2 + 5.\,10^1 + 2.\,.\,10^0$

$\overline{BC}$ = 6.1000 + 4.100 + 50 + 2.1

$\overline{BC}$ = 6000+400+50+2

$\overline{BC}$ = 6452 → Um número natural

Somando os dois números naturais encontrados obterão:

2 6 8 5

6 4 5 2

8 10 13 7 → Resultado na forma de número natural

$\overline{\boldsymbol{AC}}$ **=** $\boldsymbol{8x^3}$ **+** $\boldsymbol{10x^2}$ **+ 13x + 7** → Resultado na forma polinomial

<u>Outra técnica seguindo a posposta de Pereira</u>

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, considerando x = 10

$\overline{AC} = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 5 + 6x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

$\overline{AC} = 2.10^3 + 6.\,10^2 + 8.\,10^1 + 5.\,10^0 + 6.\,10^3 + 4.\,10^2 + 5.\,10^1 + 2..\,10^0$

$\overline{AC}$ = 2.1000 + 6. 100 + 8.10 + 5.1 + 6.1000 + 4.100 + 50 + 2.1

$\overline{AC}$ = 2000 + 600 + 80 + 5 + 6000 + 400 + 50 + 2

Somando na ordem temos :

2000 + 600 + 80 + 5

6000 + 400 + 50 + 2

8000 1000 130 7

Sendo que o 7 na ordem da unidade

Sendo que o 130 na ordem da dezena

Sendo que o 1000 na ordem da centena

Sendo que o 8000 na ordem da unidade de milhar

Concluirmos que o segmento de polinômios possuem $\overline{\boldsymbol{AC}}$ **=** $\boldsymbol{8x^3}$ **+** $\boldsymbol{10x^2}$ **+ 13x + 7** quatro termos algébricos e se caracteriza em um polinômio do 3° grau de coeficientes (8 , 10, 13 e 7).

<u>ATIVIDADE N°2</u>

1ºEtapa: Tarefa (T): Calcular o polinômio que representa o comprimento do segmento $\overline{AC}$ da figura abaixo. Escreva o resultado em forma de número natural e polinomial.

A_________B__________C

Onde: $\overline{AB} = 1{,}25x^3 + 6{,}4x^2 + 8x + 5$ $\overline{BC} = 0{,}006x^3 + 4.10x^2 + 5x + 2$

2° Etapa: Tipos de tarefas (t1): Desenvolva os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em parte na forma de base 10.

3° Etapa: Tipos de tarefas (t2): Somar todos os segmentos $\overline{AB} + \overline{AC}$ Utilizando as técnicas proposta por Pereira (2012), seguindo as ideias contidas no modelo epistemológico alternativo utilizado pelo o autor com objetivos de resolução dessas operações.

Desenvolvimento dos segmentos $\overline{AB}$ por parte na forma decimal considerando x= 10

$\overline{AB}$ = 1.25x^3 + $6.4x^2$ + 8x +5

$\overline{AB}$ = 125.$10^2.10^3$ + 64. $10^2.10^2$ + 8. 10^1 + 5. 10^0

$\overline{AB}$ = 125. 10^5 + 64. 10^4 + 8.10 + 5.1

$\overline{AB}$ = 12500000 + 640000 + 80 + 5

$\overline{AB}$ =12564085 → Um número natural

$\overline{BC} = 0{,}006x^3 + 4.10x^2 + $ 5x +2

$\overline{BC} = 6.10^{-3}.10^3 + 4.10.10^2 + 5.10^1$ + 2. . 10^0

$\overline{BC} = 6..10^0 +$ + 4 . 10^3 + + 5 . 10^1 + + 2. 10^0

$\overline{BC}$ = 6.1+4.1000+5.10+2.1

$\overline{BC}$ = 6 + 4000 + 50 + 2

$\overline{BC}$ = 4058 → Um número natural

Somando os dois números naturais encontrados obterão :

12564085 + 4058 = 1256801313 → Resultado na forma de número natural

<u>Outra técnica seguindo a posposta de Pereira</u>

$\overline{AC}$ = $\overline{AB}$ + $\overline{BC}$, considerando x = 10

$\overline{AC}$ = 1.25x^3 + $6.4x^2$ + 8x +5 + $0{,}006x^3 + 4.10x^2 + $ 5x + 2

$\overline{AC}$ = 125.$10^2.10^3$ + 64. $10^2.10^2$ + 8. 10^1 + 5. 10^0 + $6.10^{-3}.10^3 + 4.10.10^2 + 5.10^1$ + 2. . 10^0

$\overline{AC}$ = 125. 10^5 + 64. 10^4 + 8.10 + 5.1 + $6..10^0 +$ + 4 . 10^3 + + 5 . 10^1 + + 2. 10^0

$\overline{AC}$ = 12500000 + 640000 + 80 + 5 + 6.1+ 4.1000 + 5.10 + 2.1

$\overline{AC}$ = 12500000 + 640000 + 80 + 5 + 6 + 4000 + 50 + 2

$\overline{AC}$ = 12500006 68000 130 7

Somando na ordem temos :

12500000 + 640000 + 80 + 5

6 + 4000 + 50 + 2

Sendo que o ? na ordem da unidade

Sendo que o ? na ordem da dezena

Sendo que o ? na ordem da centena

Sendo que o ? na ordem da unidade de milhar

Concluirmos que o segmento de polinômios possuem quatro termos algébricos e se caracteriza em um polinômio do 3° grau de coeficientes (?).

Referencias:

Pereira(2012)

Carvalho e Pereira (2009)

Ma (1999), apend D'Ambrósio, 2005)

Yves Chevallard et al, 2001, p.251

Travassos, 200

ANEXO – F: Esboço da Proposta de Aula do Professor x_2

Tarefas para o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental

T_1: Decompor os números 32, 407, 1237 e 29472 em ordens com seus respectivos valores relativos e em parcelas?

t_1: Represente as parcelas utilizando potências de base 10.

t_2: Reescreva os números substituindo nas parcelas o número 10 pela letra x.

t_3: Nas expressões formadas agrupe os termos semelhantes.

t_4: Some os termos semelhantes.

t_5: Resolva a soma algébrica na expressão

$$2x^2 - 4x^2 + 4x^3 + 2x$$

ANEXO – G: Proposta de Aula do Professor x_9

Construção de tarefas t_i de tipos de tarefa T_i para o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental

A tarefa T_i é enunciada por: Resolver as operações com polinômios, dado que T_i é constituída por $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$.

t_0: Identificar as ordens que compõem o número 5768

Representando as ordens temos:
8 → Unidades
6 → dezenas
7 → Centenas
5 → Unidade de milhar

Nas Aproximado

t_1: Representar o número 5768 tomando como referência o sistema de numeração posicional de base dez.

Na representação, tem-se: $5000+700+60+8$

$5.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 8$ ou $5.10^3+7.10^2+6.10^1+8.10^0$

t_2: Construir uma expressão algébrica a partir da escrita do número 5768 na forma polinomial de potência de base dez, da forma que $x = 10$.

Considerando $5.10^3+7.10^2+6.10^1+8$, teremos

$$5.x^3+7.x^2+6x+8$$

t_3: Resolver: $246+231$, com uso da potência de base dez.

De 246 e 231, temos: $(2.100+40+6)+(200+30+1)$

$= (2.10^2+4.10^1+6)+(2.10^2+3.10^1+1)$

Associando os termos semelhantes; teremos:

$(2+2).10^2 + (3+4).10^1 + (6+1)$

$4.10^2 + 7.10 + 7$ ou $400+70+7 = 477$

t_4: Determinar a tarefa t_3 na forma polinomial para $x=10$.

Como $246+231 =$
$(2.10^2+4.10^1+6) + (2.10^2+3.10^1+1)$

Para $x=10$, tem-se:

$(2.x^2 + 4.x + 6) + (2.x^2 + 3.x + 1)$

Da redução de termos semelhantes, resulta.

$4x^2 + 7.x + 7$

t_5: Determine $53273 + 4241$ na forma polinomial de potência de base dez, para $x=10$.

Como $53273 + 4241 \Rightarrow$
$(5.10^4 + 3.10^3 + 2.10^2 + 7.10 + 3) + (4.10^3 + 2.10^2 + 4.10^1 + 1)$

Reduzindo os termos semelhantes:

$5.10^4 + (3+4).10^3 + (2+2).10^2 + \underbrace{(7+4)}.10^1 + (3+1).10^0$
$= 5.x^4 + 7.x^3 + 4x^2 + 11.x + 4$ = esta modelação difere da soma tradicional, necessitando de adaptações ao termo $(7+4).10^1$, Reescrevendo, temos:

$5.10^4 + 7.10^3 + 4.10^2 + (10+1).10^1 + 4.10^0$

$5.10^4 + 7.10^3 + 4.10^2 + 1.10^2 + 10^1 + 4.10^0$

$5.10^4 + 7.10^3 + (4+1)10^2 + 1.10^1 + 4.10^0$, para $x=10$

$5.x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x^1 + 4$.

t_6: Multiplicar 225 com 31, na forma polinomial de potência de base dez.

Para o produto, temos: $(200+20+5).(30+1)$

$(2.10^2+2.10^1+5.10^0).(3.10^1+10^0)$.

$6.10^3+2.10^2+6.10^2+2.10^1+15.10^1+5.10^0$

$6.10^3+(2+6).10^2+(2+15).10^1+5.10^0$

$6.10^3+8.10^2+(17)10^1+5.10^0$

$6.10^3+8.10^2+10^2+7.10^1+5.10^0$

$6.10^3+(8+1).10^2+7.10^1+5.10^0$

Finalizando, fica: $6.10^3+9.10^2+7.10^1+5$, para a forma polinomial com $x=10$, temos:

$6.x^3+9x^2+7.x+5$.

t_7: Calcular: 338 . 414, na forma polinomial de potencia de base dez.

Da Construção $(300+30+8).(400+10+4)$

$=(3.10^2+3.10^1+8).(4.10^2+1.10^1+4)=$

$=(12).10^4+3.10^3+12.10^2+12.10^3+3.10^2+12.10^1+32.10^2$

$8.10^1+32 \Rightarrow 12.10^4+15.10^3+47.10^2+20.10^1+32.10^0$

$(2+10).10^4+(5+10)10^3+(4.10+7).10^2+(2.10^1).10^1+(3.10^1+2)10^0$

$1.10^5+2.10^4+5.10^3+10^4+4.10^3+7.10^2+2.10^2+3.10^1+2.10^0$

$1.10^5+3.10^4+9.10^3+9.10^2+3.10^1+2.10^0$, Se

Considerarmos para $x=10$, teremos:

$=x^5+3x^4+9x^3+9x^2+3.x+2=$

A técnica (τ) que permite a resolução das tarefas expostas é a representação por meio do sistema de numeração decimal na potência de base dez, necessitando para tanto, de modificações ou ajustes em alguns casos, como evidência Pereira (2012).

Em termos de tecnologia para justificar a técnica (τ) para resolver as tarefas, destaca-se a generalização da representação dos números no sistema de numeração decimal, dado por:

$$N = \ldots a_3 . 10^3 + a_2 . 10^2 + a_1 . 10^1 + a_0 . 10^0 + a_{-1} . 10^{-1} + \ldots a_{-n} 10^{-n}$$

Onde $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, a_n = algarismos.

A teoria que permite justificar a tecnologia são elementos dos campos teóricos da Aritmética e Álgebra.

Portanto, as pesquisas de Pereira (2012) revelam elementos significativos que permitem o ensino de polinômios por meio da articulação com a aritmética com uso do sistema de numeração decimal de base dez.

Do ponto de vista da atividade escolar o modelo epistemológico de referência para o ensino de polinômios articulado à aritmética evidencia entre outros elementos, a possibilidade de potencializar a técnica (τ) na resolução das tarefas (t_i) passível de desenvolver o espírito reflexivo do professor de matemática. Ademais, o tratamento das tarefas (t_i) permite emergir o processo de modelagem matemática pertinente à algebrização dos procedimentos aritméticos nas operações polinomiais. Desse modo, a algebrização dos procedimentos aritméticos mostra-se imprescindível ao desenvolvimento da prática com modelagem matemática na atividade escolar.