UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

MAYSA DA SILVA LEITE ALMEIDA

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU: UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

BELÉM - PA

2017

MAYSA DA SILVA LEITE ALMEIDA

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU: UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, na área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

BELÉM – PA

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –

Biblioteca do IEMCI, UFPA

1980 Almeida, Maysa da Silva Leite.

Resolução de equações do 1º grau: um modelo epistemológico de referência / Maysa da Silva Leite Almeida, orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra – 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Prática de ensino. I. Guerra, Renato Borges, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

MAYSA DA SILVA LEITE ALMEIDA

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU: UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. Renato Borges Guerra – Presidente

IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – Membro Interno

IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade – Membro Externo

ETRB

À minha família, fonte de força e motivação para seguir sempre em frente, mesmo nas situações mais adversas.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Dr. Renato Borges Guerra, pela preciosa parceria de trabalho, pela paciência e generosidade em ensinar, orientar e aconselhar. Agradeço por dividir comigo a autoria deste trabalho.

Ao professor Dr. José Messildo Viana Nunes, por sua disponibilidade em ajudar, seja com materiais, informações, sugestões e provocações ao longo deste curso.

Ao professor Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade, pelas contribuições e orientações.

Aos colegas do grupo GEDIM, pelos momentos de estudo e compartilhamento de ideias e pelas discussões, em especial, ao Denivaldo, ao Flávio e à Audrey pelo companheirismo e amizade.

À minha família, por me incentivar e apoiar em minhas decisões. Em especial, minha mãe, Benedita Almeida, meu irmão, Ivon Almeida, e, minha prima-irmã, Valéria Leite.

Ao meu grande amigo Rafael Silva Patrício, por toda ajuda e suporte ao longo deste caminho.

A todos que de alguma forma ajudaram a trilhar esse caminho até aqui, e me inspiraram a estudar como forma de alcançar meus objetivos.

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino”.

Leonardo Da Vinci

ALMEIDA, Maysa da Silva Leite. **Resolução de equações do 1º grau: um modelo epistemológico de referência.** 2017. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

RESUMO

Este trabalho trata da resolução de equações do primeiro grau enquanto uma prática escolar e foi desenvolvido por meio de um percurso de estudo e investigação (PEI). O percurso desta investigação levou ao encontro de quatro praxeologias distintas historicamente, cujas análises evidenciaram a necessidade da concepção de um modelo epistemológico de referência (MER). Buscou-se, então, construir uma resposta para o problema de concepção do MER que permitisse a construção de novas organizações didático-matemáticas para o ensino do objeto em questão, segundo uma inteligibilidade matemática. Como resposta parcial ao problema, o MER apresentado teve como fundamentação matemática as estruturas algébricas dos corpos, especialmente o corpo dos inteiros módulo p.

Palavras-chave: Modelo Epistemológico de Referência. Teoria Antropológica do Didático. Resolução de equações do primeiro grau. Inteiros módulo p.

ALMEIDA, Maysa da Silva Leite. **Solving first degree equations: a epistemological model of reference.** 2017. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

ABSTRACT

This work deals with the solving first degree equations as a school practice and was developed through a path of study and research (PSR). The course of this investigation led us to the encounter of four historically distinct praxeologies, whose analyzes evidenced the need for the conception of an epistemological model of reference (EMR). We then sought to construct an answer to the problem of conception of EMR that would allow the construction of new didactic-mathematical organizations for the teaching of the object in question, according to a mathematical intelligibility. As a partial answer to the problem, the EMR presented here has as a mathematical foundation the algebraic structures of the fields, especially the field of the integer numbers modulus p.

Key-words: 1. Epistemological model of reference. 2. Anthropological theory of didactic. 3. Solving first degree equations. 4. Integer modulus p.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A resolução de equações como uma prática cultural escolar é realizada desde tempos antigos. Um dos primeiros vestígios dessa prática consta em um documento conhecido como *Manuscrito de Bakhshali,* com suposta criação no início da Era Cristã, mas esse dado é incerto assim como sua autoria.

Este manuscrito é uma compilação de regras e problemas acompanhados de comentários. Essas regras associadas aos exemplos permitiam estabelecer técnicas diferentes para os diferentes tipos de equações de acordo com os tipos de problemas.

O desenvolvimento histórico da matemática modificou profundamente os objetos da Álgebra que se concentrava em torno da Teoria das equações. Esses desenvolvimentos teóricos mostraram-se importantes para o estudo das relações entre diversas estruturas da matemática, que hoje compõe a moderna Álgebra.

De acordo com Chevallard (1985) a reforma da matemática moderna trouxe mudanças significativas para o ensino tanto de um ponto de vista da organização dos conteúdos quanto da vieram com a reforma da matemática moderna, que na França, foi implantada a partir do final da década de sessenta, o mesmo ocorrendo no Brasil.

Essa transformação em pouco tempo trouxe mudanças significativas para o ensino da matemática. A Aritmética, tida como base do currículo da matemática escolar, teve que ceder espaço à Álgebra que se apresentou como campo teórico de grande utilidade para a construção de novas organizações matemáticas para o ensino e, em particular, para o ensino da resolução das equações do primeiro grau a uma variável.

Em um manual de álgebra publicado em 1827[1], "para o uso de pessoas impedidas de receber assistência de um mestre", a primeira aula começa com as seguintes linhas:

I. A álgebra é a arte de executar sobre quaisquer quantidades, ao menos os símbolos gerais, todas as operações aritméticas, e de representar, com a ajuda dos mesmos símbolos, todas as relações entre essas quantidades.

---

[1] Manuel d'algebre ou exposé élémentaire des principes de cette science, por M. Terquem.

II. A parte da álgebra que ensina as regras para a realização de operações aritméticas em qualquer quantidade é chamado cálculo literal.

III. A parte da álgebra que lida com a forma de representar, utilizando sinais, as relações entre quantidades, é chamada cálculo por equação.

IV. Veremos a seguir que, no cálculo por equações, precisamos constantemente do cálculo literal; de modo que este é um lugar para começar.

Enquanto, segundo Chevallard (1985), A. e J. Lentin Rivaud, em seus elementos de álgebra moderna, cuja quarta edição apareceu em 1961 (o primeiro em 1956), que situa o aparecimento da álgebra moderna em 1910, a insere como prolongamento da aritmética e da álgebra tradicional: "Na escola primária, escreve-se, a criança pensa sobre coleções e grandezas concretas de onde gradualmente emerge o conceito de número abstrato, independente da natureza das coisas contadas ou medidas. O ensino secundário ensina aos adolescentes a manipular x e y independentemente dos números que essas letras representam. Um passo a mais no cálculo e chegamos ao cálculo com polinômios, em seguida, a composição de transformações formais. Bem, a álgebra moderna vai treinar o aluno a raciocinar sobre as propriedades das operações, independentemente dos elementos (números, polinômios, transformações...) sobre os quais se efetuam essas operações".

A álgebra, entendida no sentido tradicional desta palavra passou então a ser questionada pelas alterações feitas. Mas, como Chevallard enfatiza, a aritmética e os problemas práticos não desapareceram, embora seja apenas uma das partes do corpus aritmético tradicional, mas sim a dialética entre aritmética e álgebra.

O ensino das equações passou a se constituir de modo independente dos problemas, embora uma das razões que sustentam seu ensino seja o enfrentamento de problemas, como deixam claro os PCN's de Matemática quando apontam os objetivos do quarto ciclo; um deles determina o desenvolvimento do pensamento algébrico para que o aluno: "Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos."(BRASIL, 1998,p. 81).

De outro modo, na escola, o ensino de equações do primeiro grau é justificado pelo seu uso como ferramenta para a resolução de problemas o que lhe confere um importante papel como modelo matemático para o enfretamento de situações em contextos defendidos pela pedagogia escolar e incluso nos programas de ensino de matemática.

As organizações matemáticas para o ensino da resolução das equações do primeiro grau a uma variável, sustentadas pela álgebra moderna, então, seguiam esse propósito e talvez isso seja uma das razões que as tenham imputados duras críticas que culminaram com o fim do seu ensino nas escolas brasileiras.

Mas, poderá ser observado que o ensino da resolução das equações de primeiro grau vive em organizações matemáticas nos livros didáticos atuais de modo independente dos problemas, embora, de certo modo, ainda se recorra a problemas para justificar seu ensino, mas desenvolvido de um modo sem um discurso claro que explique ou justifique a prática de resolução.

Compreendendo que o ensino das equações do primeiro grau é indispensável por se tratarem de modelos matemáticos para enfrentamento de situações em contextos postulamos que o seu ensino deve anteceder problemas, mas como um fazer inteligível que permita compreender para que se faz, e, porque se faz uma operação na resolução de uma equação como chegaram a propor as organizações sustentadas pela álgebra moderna.

Nesse sentido, nosso objetivo neste trabalho é construir uma resposta para o problema de concepção de uma organização didático-matemática para o ensino de resolução das equações do primeiro grau.

Para nosso propósito, encaminhamos no primeiro capítulo os elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático que permitiram fundamentar a problemática considerada.

No segundo capítulo, apresentamos uma organização didático-matemática Hindu sobre o objeto de ensino considerado. O propósito desse capítulo é compreender se as técnicas de resolução estão de algum modo presente nos dias atuais. Isso pode encaminhar alguma técnica como vestígio cultural escolar.

No terceiro capítulo, consideramos as organizações didático-matemáticas do início do século XIX, mais precisamente de Reynaud (1810) baseada na aritmética generalizada, de modo a observar a evolução das técnicas empregadas, inclusive as suas invariâncias.

No quarto capítulo, consideramos uma organização didático-matemática sustentada pela álgebra moderna, cujos elementos teóricos são indispensáveis para o propósito maior deste trabalho, inclusive buscar compreender aspectos que possam evidenciar, de algum modo, estranhezas que levaram a seu insucesso.

No quinto capítulo, consideramos uma organização didático-matemática que vive atualmente nas escolas brasileiras, pois se trata de um livro aprovado pelo PNLD 2014, para compreender as técnicas usadas e o discurso tecnológico que a sustentam de modo a fornecer subsídios para a construção de nossa resposta.

Finalmente, no sexto capítulo, apresentamos um modelo epistemológico de referência que busca considerar o modelo recorrido pela matemática moderna, com o diferencial que tem de evidenciar as regras como objetos não naturalizados poderão permitir construir uma organização didático-matemática inteligível para o ensino da resolução das equações do primeiro grau.

1 CONSIDERAÇÕES TEÓRICO – METODOLÓGICAS

1.1 A TAD E CONSTRUÇÃO DE ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS

A Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD, se propõe a ajudar a identificar toda estrutura de conhecimento humano possível, de modo independente de qualquer ponto de vista epistemológico-cultural, que possa assumir julgamento de valor *a priori* ou *a posteriori*, o que seja ou não um conhecimento ou uma "simples" prática.

Sob essa hipótese, que não especifica de nenhum modo uma dada atividade, entre outras atividades humanas, a TAD rejeita a visão particularista do mundo social admitindo que toda atividade humana, regularmente realizada, pode ser descrita por meio da noção de *praxeologia,* que generaliza as diferentes noções culturais correntes sobre "uma habilidade que é adquirida por treinamento" (CHEVALLARD, 2009, p.4).

Uma praxeologia supõe, em princípio, uma ação em situação que em sua forma pontual pode ser compreendida por uma tarefa (T), tomada em sentido amplo, e de um modo de saber-fazer essa tarefa que denominamos de técnica (ô).

Assim, são tarefas as ações de desenvolver a expressão literal dada, dividir um inteiro por outro, ler um manual técnico, integrar a função sen x, como também são tarefas as ações de ir do sofá ao armário, de sorrir a alguém e, inclusive, pensar sobre a aula a ser ensinada.

Parece claro que uma técnica pode não ser algorítmica e, inclusive, suficientemente difusa, que não permita ser notada por quem a pratica. Além disso, a técnica relativa a uma dada tarefa depende do espaço social em que se realiza essa tarefa, pois o espaço social é quem legitima ou institucionaliza o que é saber-fazer essa tarefa.

Para deixar claras essas noções, recorremos aqui ao exemplo da tarefa “fazer farinha de mandioca”. As técnicas empregadas nos municípios da região norte se distinguem das técnicas empregadas na região nordeste do Brasil, que são “sentidas” ou “percebidas” por todos aqueles que conhecem as duas farinhas dessas regiões.

O questionamento do tipo “qual o modo certo de fazer farinha?” pode fazer emergir verdadeiras paixões regionais pelos sujeitos que vivem em cada uma das diferentes regiões produtoras, levando-os a defenderem seus respectivos modos de fazer farinha.

Em particular, a produção de farinha está culturalmente instituída pelos sujeitos regionais, de modo que fazer farinha é uma prática naturalizada, no sentido de que se faz assim, porque é assim que se faz.

O espaço social que legitima e institui o saber-fazer, entendido pelo bloco constituído de uma tarefa e de seu modo de ser realizada, é denominado pela TAD genericamente de instituição (*I*).

Em nosso exemplo pode acontecer de um sujeito de uma região não aceitar ou reconhecer como legítimo o modo de fazer farinha de outra região, e, inclusive, considerá-lo absurdo, como podemos depreender do seguinte extrato de texto:

> Finalmente, em uma instituição *I* dada, e à propósito de um tipo de tarefas T dada, há, em geral, uma *única* técnica, ou, pelo menos, um *pequeno número* de técnicas *institucionalmente reconhecidas* com a exclusão de técnicas alternativas possíveis – que podem existir efetivamente, mas em outras instituições. Esta exclusão é correlativa, entre os atores de I, uma ilusão de "naturalidade" das técnicas *institucionais* em I – fazê-lo assim, é natural... –, por contraste com o conjunto de técnicas alternativas possíveis, que os sujeitos de I ignoram, ou, se eles são confrontados com elas, as vêem espontaneamente artificiais, e (portanto) “contestáveis”, “inaceitáveis”, etc. Nesta visão, observam-se frequentemente, entre os sujeitos de *I*, verdadeiras *paixões institucionais* para as técnicas naturalizadas na instituição (CHEVALLARD, 1999, p. 223, tradução nossa).[2]

A não aceitação pelos sujeitos de uma dada instituição de uma ou mais técnicas para um dado tipo de tarefa pode decorrer do modo de pensar essa prática, designado de discurso ou *logos*, que dá inteligibilidade à técnica no interior de sua instituição. Isso encaminha a segunda parte da praxeologia, a do saber. Denominado de tecnologia, o discurso – o *logos* – fundamenta a técnica e a torna inteligível como um meio para realizar as tarefas daquele tipo. Esse modo de pensar

---

[2] Por fin, en una institución *I* dada, y a propósito de un tipo de tareas *T* dado, existe en general una *sola* técnica, o al menos un *pequeño número* de técnicas *institucionalmente reconocidas*, con la exclusión de técnicas alternativas posibles – que pueden existir efectivamente pero en *otras* instituciones. Dicha exclusión es correlativa, entre los actores de *I*, de una ilusión de “naturalidad” de las técnicas *institucionales* en *I* – hacerlo así, es natural... –, por contraste con el conjunto de técnicas alternativas posibles, que los sujetos de *I* ignoran, o, si se les confronta a ellas, las miran espontáneamente como *artificiales*, y (por ello) “contestables”, “inaceptables”, etc. En esta visión, se observa frecuentemente, entre los sujetos de *I*, verdaderas *pasiones institucionales* para las técnicas naturalizadas en la institución (CHEVALLARD, 1999, p. 223).

está sujeito a um componente teórico mais amplo que rege a tecnologia em si mesmo.

Imaginemos, a produção de farinha de mandioca sob condições semelhantes, por exemplo, o mesmo tipo de mandioca, o mesmo tipo de instrumentos e mesmo conjunto sequencial de procedimentos, permitindo concluir que será produzido o mesmo tipo de farinha, como pode ser verificado pelas farinhas bragantinas produzidas por diferentes produtores. Neste caso, específico da técnica para fazer farinha, não existe uma teoria que a sustente.

Entretanto, a tarefa “resolver uma equação” deve ser enfrentada sob um conjunto de condições matemáticas, por exemplo, as práticas com as estruturas algébricas que preconizam as regras da prática algébrica. Tais regras permitem encontrar sua solução, ou soluções, independentemente do sujeito que irá produzi-la. No entanto, na escola, a técnica da balança que é utilizada para resolver equações do primeiro grau na escola, não se constitui como uma técnica adequada, por possuir limitações que não permitem resolver a tarefa completamente.

Parece clara a relatividade do saber preconizado pela TAD segundo as atividades humanas realizadas sob condições impostas pelas instituições. Nesse sentido, é preciso ter em conta sempre que o modelo praxeológico proposto pela TAD assume essa relatividade, como fica claro o seguinte extrato de texto:

> Entende-se por *tecnologia*, [...], um *discurso racional* – o *logos* – sobre a técnica, [...], discurso cujo primeiro objetivo é *justificar* “racionalmente” a técnica [...], para assegurar-se de que permite realizar as tarefas de um tipo, isto é, realizar o que se pretende. O estilo de racionalidade posto em jogo varia segundo o espaço institucional e, em uma instituição dada, ao fio da história dessa instituição, de maneira que uma racionalidade institucionalmente dada poderá parecer...como pouco racional em outra instituição (CHEVALLARD,1999, p.224, tradução nossa).[3]

Chevallard (2009) deixa claro que o saber-fazer não é obtido da natureza, mas são “artefatos”, “obras”, construções institucionais que são dotadas de sentido por meio das situações que lhes dão uma razão de ser. Se assumirmos o estado do

---

[3] Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ, un discurso racional – el *logos* – sobre la técnica – la *tekhnê* – ô, discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica ô, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución (CHEVALLARD,1999, p.224).

Pará como instituição, a farinha do município de Bragança do estado do Pará se destaca entre as farinhas produzidas em outros municípios do mesmo estado; há o *know-how* bragantino em jogo que somente um produtor de farinha bragantino pode alcançar.

Mas, as praxeologias podem não ser invariáveis no tempo, pois no interior das instituições podem se estruturar em diacronia sincrônica, no sentido de se adaptar a novas formas adquiridas de pensar o saber-fazer dessas instituições.

O conjunto de todas as praxeologias presentes em uma dada instituição, que é denominado de *equipamento praxeológico institucional,* quando submetido a uma dinâmica cognitiva para atender uma demanda institucional, produzirá uma dinâmica praxeológica institucional que pode fazer com que algumas praxeologias sejam remodeladas, desapareçam, enquanto outras podem surgir com novos elementos que serão assim adicionados a esse equipamento praxeológico ao longo do tempo.

A mudança de uma praxeologia pode decorrer de sua transposição de uma instituição para outra instituição ou de uma posição para outra posição no interior de uma mesma instituição; por exemplo, o órgão regulador do estado do Pará poderia impor a transposição das praxeologias de “fazer farinha de mandioca” dos produtores bragantinos para os produtores de farinha dos outros municípios paraenses.

Mas, a transposição de uma praxeologia exige uma nova (re)construção que pode tornar-se problemática, considerando-se que o novo *habitat* pode impor condições sobre a ecologia dos saberes necessários – que são substanciados por todas as esferas sociais (cultura, sociedade, etc.) e ambientais(tipo de solo, de mandioca, etc.) que deverão agir sobre essa reconstrução – diferentes das condições impostas por seu *habitat* original.

Especificamente, quando falamos sobre uma dada praxeologia matemática, precisamos considerar que sua prática na escola pode se distinguir consideravelmente de sua prática por matemáticos. Eles pensam a prática matemática de modo diferente do modo de pensar da escola – o que é suficiente para afirmar que eles estão a tratar de outra prática.

Sob a compreensão da TAD podemos afirmar que o campo de práticas dos matemáticos, ou da matemática acadêmica, está subordinado a condições distintas das condições impostas sobre as práticas matemáticas da escola. Estas (inter)agem de modos distintos sobre e com as práticas do professor e do aluno.

A relatividade da racionalidade institucional, mesmo que se possa considerar que o professor de matemática é um sujeito acadêmico, é um dos aspectos da didática que a TAD revela e que pode encaminhar compreensões sobre o ensino e a aprendizagem da matemática nas escolas que geralmente não são alcançados pelas pesquisas com ênfase na pedagogia, como parece nos encaminhar o seguinte extrato de texto.

> Em geral, face a uma imemorial tradição que vê no nível da pedagogia (sede das condições e restrições vistas como não específicas de tal e tal conteúdo praxeológico) o alfa e o ómega da ecologia da didática escolar, os didáticos tem privilegiado o estudo das condições e restrições no nível da disciplina, esquecendo, por vezes, os condicionamentos dos níveis superiores, sem os quais muitos fenômenos tocante a difusão da disciplina não possam ser explicados. Há um estreitamento do âmbito do estudo que, embora sem consequências para a invalidação de algumas pesquisas, deve, em outros casos, ser reconsiderado. (CHEVALLARD, 2009, p. 6, tradução nossa).[4]

A TAD considera as condições que frequentemente são restrições impostas sobre as práticas do professor que não são criadas pelo professor, independente de ele saber ou ignorar. As condições criadas, em outros níveis, que Chevallard (2009) denomina de níveis co-determinação didática, são, esquematicamente mostrados a seguir:

Humanidade
↓↑
Civilização
↓↑
Sociedade
↓↑
Escola
↓↑
Pedagogia
↓↑
Disciplina

[4] Bien entendu, face à une tradition immémoriale qui voyait dans le niveau de la pédagogie (siège de conditions et contraintes regardées comme non spécifiques de tel ou tel contenu praxéologique) l'alpha et l'oméga de l'écologie du didactique scolaire, les didacticiens ont étudié de façon privilégiée les conditions et contraintes ayant leur siège au niveau de la discipline, oublieux parfois, en cela, des conditionnements de niveau supérieur sans lesquels nombre de phénomènes touchant la diffusion de la discipline ne peuvent être expliqués. Il y a là un rétrécissement du champ de l'étude qui, tout en étant dénué de conséquences invalidantes pour certaines recherches, doit, en d'autres cas, être reconsidéré (CHEVALLARD, 2009, p. 6).

Segundo Chevallard (2009), esse esquema quando pensado de baixo para cima, indica que o nível de disciplina revela o conteúdo praxeológico (matemática, gramática, física, quimica, biologia, etc.) interagindo com os demais níveis, em suposta sequência do nível mais imediato, pedagogia e escola, em acordo com sistemas de ensino regulados pela sociedade, legitimados pelos níveis mais externos e quase sempre esquecidos, o de uma cultura da humanidade.

O esquema sugere que os níveis de codeterminação didática agem sobre o nível da disciplina a ser ensinada, mas é importante considerar que o modo como as inter-relações entre os níveis de codeterminação didática agem sobre as práticas docentes não são estáticas. Podem variar segundo os momentos da história social e, em particular, da história social da praxeologia específica a ser ensinada.

Nesse sentido, podemos supor que dificuldades de ensino, e, ou de aprendizagem sobre uma dada praxeologia, podem ser compreendidas a partir da história social dessa praxeologia, pois essa praxeologia pode ser fruto de recombinações praxeológicas que podem ser entendidas com ajuda do seguinte extrato de texto.

> Se $\Pi \oplus \Lambda$ denota uma praxeologia $[T, \tau, \theta, \Theta]$ existente em uma instituição *I*, a sua transposição para outra instituição *I**, denotada por $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, pode em alguns casos (aproximadamente) se escrever $\Pi \oplus (\Lambda^*)$; Neste caso, a *práxis* será (essencialmente) a mesma, mas o logos terá mudado. A praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ pode ser da forma $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, em que o logos é mantido, mas a práxis alterada, e às vezes esvaziada de sua substância (quando temos $\Pi^* \approx \emptyset$). Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno *no coração da história social das praxeologias* (CHEVALLARD, 2009, p.4, tradução nossa).[5]

Assim, uma praxeologia pode comportar um discurso que pode se mostrar insuficiente para encaminhar uma completa inteligibilidade da prática em situação. Nesse sentido, é preciso questionar a praxeologia a ser ensinada, mesmo que tal praxeologia seja fruto de recombinações praxeológicas realizadas pelas instituições produtoras de matemática.

---

[5] Si l'on note $\Pi \oplus \Lambda$ une praxéologie [Τ / τ / θ / Θ] existant en une institution I, sa transposée en une autre institution I*, qu'on peut écrire $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, pourra en certains cas s'écrire (approximativement) $\Pi \oplus (\Lambda^*)$: en un tel cas, la praxis sera bien (essentiellement) la même, mais le logos aura changé. La praxéologie transposée $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ pourra quelquefois aussi s'écrire $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, avec, donc, un logos maintenu, mais une praxis modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance (on aura $\Pi^* \approx \emptyset$). Les altérations et recombinaisons praxéologiques sont ainsi un phénomène au cœur de l'histoire sociale des praxéologies (CHEVALLARD, 2009, p. 4).

É útil considerar que os matemáticos exercem função que vai além de produção *stricto sensu*, como deixa claro o seguinte extrato de texto referente ao papel exercido pelos matemáticos no processo de transposição didática externa.

> Função que se realiza mais ou menos indiretamente e que decorre do poder epistemológico ou cultural adquirido, de investidura, de gestão, de controle, de assunção *do conjunto das práticas sociais – e das instituições que as albergam – em que esse saber se põe em jogo* (CHEVALLARD, 2005, p.181)[6].

A expressão "conjunto das práticas sociais [...] em que esse saber se põe em jogo" no extrato anterior quer dizer que a suposta presença do saber matemático nas práticas escolares autoriza os matemáticos a impor suas condições normativas sobre praxeologias escolares. A reforma da matemática moderna, no ensino, constitui um exemplo dessa ação da transposição didática externa. As consequências dessa ação não se mostraram nada favoráveis quando transpostas para a sala de aula.

Não é raro notarmos que na história de diferentes praxeologias, frequentemente, não há mudanças substanciais do bloco do saber-fazer ao longo do tempo, mas que apresentam mudanças significativas quanto aos discursos matemáticos que buscam dar inteligibilidade para essas práticas; tentam-se construir novas praxeologias como aplicações de teorias matemáticas, sem ter em conta outros saberes, inclusive não matemáticos, que são essenciais, senão indispensáveis, para tornarem possível o ensino.

Em geral, as praxeologias construídas para o ensino, tais como as mais antigas da aritmética – ou da álgebra, como uma extensão da aritmética – se constituem exemplos do que estamos falando. Entre essas praxeologias, encontramos as destinadas ao ensino da regra de três que foram reconstruídas ao longo do tempo com diferentes discursos, em geral, com variações teóricas matemáticas sempre dotadas de preocupações pedagógicas para tornarem suas praxeologias acessíveis aos alunos. Embora a intenção possa ser pedagogicamente relevante, os discursos construídos não conseguiram dar a inteligibilidade

---

[6] Función que se realiza más o menos indirectamente y que deriva del poder epistemológico o cultural adquirido, de investidura, de investidura, de gestión, de control, de asunción del *de las prácticas sociales* (y de las instituciones que las albergan) *en el que ese saber se pone en juego.* De ese modo, la razón invocada es tanto de orden metodológico como epistemológico (CHEVALLARD, 2005, p. 181).

necessária às suas práticas, deixando caracterizar suas praxeologias como saberes práticos ou miméticos, no sentido de se aprender por imitação. No entanto, o ensino dessas praxeologias ainda é mantido nas escolas básicas por sua legitimidade cultural e não pela legitimidade epistemológica matemática desejada pelos matemáticos; estes chegaram a propor o fim de seu ensino considerando as dificuldades de considerá-las como um saber matemático.

Chevallard (2005) deixa claro que uma praxeologia matemática, entendida como um saber matemático, para ser ensinado, conta com o papel indispensável de outros saberes, entendidos em sentido amplo, incluindo os saberes práticos, miméticos, etc. Ele destaca os saberes paramatemáticos e protomatemáticos que podemos tomar em forma generalizada como parasaberes e protosaberes considerando a codisciplinaridade, nem sempre visível, mas presente no estudo das praxeologias matemáticas da escola, principalmente, as que se referem às supostas aplicações de saberes matemáticos, sempre demandados pelos níveis de co-determinação didática; pela escola, independente de ser básica ou profissional para atender a pedagogia com o discurso da contextualização que por sua vez atende interesses diversos da sociedade frente ao seu desenvolvimento científico-tecnológico, que se manifestam inclusive por interesses em pesquisas em Educação Matemática, como no uso da Modelagem Matemática para o ensino.

A presença dos parasaberes e protosaberes são assim destacados por Chevallard (2005) quando trata do ensino dos saberes matemáticos.

> As distinções introduzidas previamente: noções matemáticas/noções paramatemáticas/noções protomatemáticas, que esboçam *análise epistemológica do regime didático* do saber (a respeito do ensino de matemática) revelam que há saberes (em sentido amplo: saber e saber-fazer) que são aprendidos sem ser nunca especificamente ensinados (se definido o ato de ensino como compreensão reflexiva de seus fins e a explicitação de sua intenção didática) (CHEVALLARD, 2005, p.67, tradução nossa).[7]

[7] Las distinciones introducidas previamente: nociones matemáticas/nociones para-matemáticas, nociones para-matemáticas/nociones protomatemáticas, que esbozan un *análisis epistemológico* del *régimen didáctico* del saber, (en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas), revelan que hay saberes (en sentido amplio: saberes y procedimientos*) que son *aprendidos* sin ser nunca específicamente *enseñados* (si se define el acto de enseñanza como comprensión reflexiva de sus fines y la explicitación de su *intención* didáctica (CHEVALLARD, 2005, p.67).

O extrato de texto chama especial atenção aos protosaberes, aqueles aprendidos sem ser nunca ensinados que agem como ferramentas indispensáveis no ensino de uma praxeologia matemática. Eles agem como subentendidos, que se manifestam como que sorrateiramente em sua implicitude, do extrato mais profundo do meio socio-cultural das práticas escolares.

Nesse sentido, nos parece que ignorar ou excluir, intencionalmente ou não, os saberes que tornam possível o ensino de um dado saber tem importantes implicações sobre o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, considerando que os sujeitos de um dada posição da escola, professor e aluno, podem não estar dotados das "ferramentas" culturais necessárias.

Isso fica claro, por exemplo, quando são enfrentadas supostas situações textualizadas como um exercício de aplicação de saberes matemáticos. Os professores e alunos não estão dotados dos parasaberes[8] e, principalmente, dos protosaberes específicos da situação que são necessários para encaminhar o uso dos saberes matemáticos da escola; não é por acaso o desconforto manifestado pelos professores de matemática quando frente a problemas extra-matemáticos.

Na vulgata escolar, as praxeologias matemáticas da escola são praxeologias de matemáticos; a matemática da escola é "coisa de matemáticos". Paradoxalmente, no entanto, o ensino de matemática na escola é frequentemente conduzido por praxeologias com ênfase em saberes práticos, empíricos, com indisfarçável mecanicidade, que se aprende por imitação. Essa característica do ensino encaminha, não raro, a perda moral, enquanto saber, das praxeologias matemáticas escolares.

Chevallard (1997) afirma que os saberes presentes na escola são saberes paramatemáticos, considerando o reduzido, senão ausente, conteúdo teórico. E mais, que há falta de unidade entre as praxeologias ensinadas, isto é, clara ausência de integração de praxeologias que encaminhem o estudo ao encontro de um corpus teórico matemático. Essa problemática é explicitada pelo modelo praxeológico da

[8] Parasaberes, entendidos como extensão da noção dada por Chevallard (2005), como saberes que embora não se constituam em objetos de ensino, são necessários para o ensino de um dado saber. São, portanto, saberes ou procedimentos que entram no campo de percepção didática do professor e que funcionam como ferramentas de ensino.

TAD sob a denominação do “problema de articulação da praxeologias escolares” (GARCIA, 2005).

A resposta a essa problemática pode ser encaminhada por meio de um modelo praxeológico de referência (MER) para um dado saber a partir de uma teoria ou tecnologia matemática, inspirado no modelo lato senso das organizações praxeológicas proposto pela TAD (CHEVALLARD, 1999) que apresente as praxeologias convenientemente articuladas e integradas como aplicações dessa teoria.

A construção de um MER que encaminha a unidade, segundo uma inteligibilidade, das praxeologias matemáticas, estará sujeito aos parasaberes e os protosaberes impostos pelos níveis de codeterminação didática, mas deve encaminhar um fazer de integrações de praxeologias na escola com unidade, do estilo próprio dos matemáticos em suas atividades.

Nesse sentido, o professor questionador das praxeologias escolares é posto a frente de um problema que pode parecer, em princípio, somente seu: o problema de reconstruir praxeologias para ser ensinadas segundo um MER tendo em conta as condições e restrições conhecidas por ele.

Claro que as condições não são de todo conhecidas pelo professor, já que podem pertencer a níveis mais externos de codeterminação didática, que não podem ser alcançados por ele, mergulhado na esfera dos sistemas didáticos. Outras, nem tanto. São suficientemente explicitas, embora nem sempre notadas, mas com claras implicações didáticas, por exemplo, as condições impostas pelas matrizes do ENEM sobre os sistemas de ensino e didáticos.

Mas, nem sempre é possível introduzir um determinado saber matemático na escola. Nesse caso, como podemos propor um MER para um dado saber que permita construções de novas organizações praxeológicas, considerando que há de se buscar um equilíbrio entre os saberes práticos, inclusive procedimentais, que agem no ensino, e que não fiquem tão distante dos saberes matemáticos legitimados pela sociedade, inclusive pela academia? A vigilância epistemológica é necessária, diz Chevallard (2005).

Esse problema do professor, como ora anunciado, é um tipo de problema primordial, ou seja, é uma questão de pesquisa em educação que Chevallard (2009) anuncia como segue.

Q : Dado um projeto de atividade em que uma pessoa quer se enganjar, qual é, para essa pessoa, o equipamento praxeológico indispensável, ou pelo menos útil, na concepção e execução desse projeto?

Em nosso caso, nosso projeto de interesse é construir um um modelo epistemológico de referência (MER) que possa destacar a atividade matemática escolar próxima à atividade da matemática acadêmica no sentido de uma atividade regrada, isto é, de ser realizada por meio de regras. Isso se distancia do fazer empírico, mimético, em geral, limitado a um único tipo de tarefa, que se faz presente nas escolas.

Especificamente, considerando a suposta falta de unidade e a presença de fazeres miméticos no estudo das resoluções de equações do primeiro grau nas escolas básicas,estamos interessados em responder parcialmente a seguinte questão:

Como conceber um MER para a resolução de equações do primeiro grau a uma variável que permita construções de novas organizações praxeológicas, considerando o equilíbrio entre os saberes práticos, inclusive procedimentais, que agem no ensino desse objeto e que não fiquem tão distante dos saberes matemáticos?

Para responder a esta questão consideramos o problema primordial parcial, o que está restrito somente à fase de concepção, cuja resposta é o MER para a resolução das equações do primeiro grau.

1.2 MÉTODO DE PESQUISA UTILIZADO

A TAD encaminha a metodologia para construir respostas para o problema primordial, em geral, como a *investigação* para determinar as ferramentas praxeológicas úteis para o estudo desse problema. Essa investigação deverá engendrar um percurso de estudo e investigação (PEI), no sentido de que os instrumentos a serem utilizados não estão a priori determinados.

A ideia do PEI é simples. Segundo Chevallard (2009), em todas as atividades humanas se encontra uma linha de demarcação entre o que é feito *ali e agora* e o que é assumido como "dado", o que é construído em outro lugar e usado como meio infraestrutural necessário ou mesmo indispensável para o que foi feito; é "silêncio da infraestrutura" que se substancia na tendência entre pessoas e instituições de esquecerem *a infraestrutura como um problema.*

Assim, segundo Chevallard (2009), o PEI se desenvolve por meio de questionamentos cujas respostas em praxeologias a serem encontradas surgirão gradualmente e, mesmo que possamos dizer que de algum modo que elas eram óbvias, elas se articulam segundo o fato antropológico de que toda atividade humana envolve uma *infra-estrutura praxeológica.* O PEI assim nos leva aos encontros com fragmentos infraestruturais indispensáveis para a construção de nossas respostas.

A problemática posta sob a condição de recorrer somente as tarefas que pertencem aos possíveis[9] das práticas escolares, nos encaminham à uma investigação que exigen responder diferentes questões imbricadas entre si, entre elas, por exemplo, as assim anunciadas:

Q_1: Houve mudanças de técnicas ao longo do tempo?

Q_2: Existem invariantes nas técnicas que viveram e vivem no ensino das escolas?

Q_3: O desenvolvimento do saber matemático influenciou mudanças de tecnologia e técnicas?

Essas questões são iniciais e cujas respostas podem ou não exigir outro questionamentos, mas por ora são úteis, senão suficientes, para orientar a busca do que estamos interessados e que levaremos a cabo nos capítulos seguintes.

Essas questões nos levam ao encontro de um MER considerando práticas escolares históricas, sem perder de vista o equilíbrio entre as práticas empíricas e as práticas matemáticas, e isso insere este trabalho na linha de investigação proposta por Chevallard (2005) de buscar delimitar vantajosamente, particularmente graças a certas economias retrospectivas, a gênese sócio-histórica das equações do primeiro grau. Para isso, Chevallard (2005) assim recomenda:

---

[9] No sentido de uma noção ou prática que pode, inclusive, ser inédita, mas, que não causa estranheza.

> Tendo em conta os ganhos alcançados, seria possível constituir uma epistemologia artificial como um resumo melhorado – isto é, deixando de lado todas as dificuldades encontradas sem saída, os fracassos, mas mantendo toda a riqueza de desenvolvimentos fecundos e, às vezes esquecidos – da construção histórica do saber (CHEVALLARD, 2005, p.55).

Nesse sentido, consideramos um breve percurso histórico sobre o ensino da álgebra nas escolas básicas, em busca de compreender a resolução de equações do primeiro grau em algumas práticas ao longo do tempo que julgamos representativas do fazer escolar até aos dias atuais. As obras que tratam dos temas ora elencados se tornam objetos de nossos estudos e passam integrar a infra-estrutura necessária para a construção de nossa resposta parcial.

2 UM PASSO INICIAL PARA A SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES SIMPLES

2.1 INTRODUÇÃO

Consideramos aqui as resoluções das equações do primeiro grau presentes no trabalho de Datta e Singh (1938) que trata da matemática hindu em que encontramos passos, senão iniciais, importantes sobre a resolução das equações gerais e, em particular, para as equações do primeiro grau de uma variável, por apresentarem técnicas algébricas, no sentido da aritmética generalizada, que contribuem à construção de uma resposta à questão de interesse desta pesquisa.

O trabalho de Datta e Singh, substanciado no livro denominado *History of hindu mathematics – a source book,* é, segundo os autores, produto de um estudo sobre o desenvolvimento da Matemática Hindu, desde tempos mais remotos até o século XVII da Era Cristã, envolvendo diferentes fontes, inclusive originais em Sânscrito, da matemática hindu que são reconhecidas como históricas seguras, ente elas, os Manuscrito de Bhakshâlî, e das obras de Aryabhata I (499), Bhaskara II (1150), Narâyâna (1350), Srîpati (1039).

Segundo Datta e Singh (1938), a estrutura adotada neste livro atende à intenção de:

> [ ] colocar diante de quem não tem acesso às fontes sânscritas, todas as evidências, desfavoráveis e favoráveis, para que julguem por si mesmos as reivindicações da matemática hindu, sem depender exclusivamente de nossas declarações (Prefácio, tradução nossa).[10]

Em nossa interpretação as reivindicações da matemática hindu, que referem Datta e Singh, tratam do não reconhecimento da influência da matemática hindu sobre a matemática ocidental, em particular, sobre as praxeologias matemáticas que hoje vivem em nossas escolas.

Nossa interpretação parece se confirmar quando encontramos vestígios das técnicas hindus remotas para resolução de equações que se fizeram presentes na matemática ocidental e, inclusive, ainda presente nas escolas brasileiras. Esse aspecto torna imperioso considerar a obra de Datta e Singh neste trabalho.

[10] [ ] to place before those who have no access to the Sanskrit sources all evidence, unfavourable as well as favourable, so that they can judge for themselves the claims of Hindu mathematics, without depending solely on our statements (DATTA; SINGH ,1938, Prefácio).

2.2 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO SIMPLES COM UMA INCÓGNITA

As equações de primeiro grau com uma variável eram denominadas pelos matemáticos hindus de equações simples com uma incógnita. Assim, quando nos referirmos às equações simples, estaremos referindo as equações de primeiro grau com uma variável.

Segundo Datta e Singh (1938), para que as equações de qualquer tipo pudessem ser resolvidas, antes era necessário prepará-las e isto começava com um trabalho ainda mais preliminar que era de formar a equação (*samî-karana*) construindo uma igualdade (*sama:* igual e *Kr*: fazer).

2.2.1 A formação de uma equação e sua redução

Assim, a resolução de uma equação começava com sua representação. Esta era realizada de modo a facilitar as operações necessárias de adição/subtração e multiplicação/divisão, por exemplo. Sobre isso os autores supracitados trazem as seguintes descrições como regra.

A de Prthûdakasvâmi (860):

> Nesse caso, no problema proposto pelo autor da pergunta, *yâvat-tâvat* é posta como o valor da quantidade desconhecida; Então executando a multiplicação, divisão, etc., como requerido no problema, os dois lados são cuidadosamente feitos iguais. A equação começa desse modo, então a regra (para sua solução) segue (apud DATTA; SINGH, 1938, p.29, tradução nossa).[11]

Nesse sentido segue Bhâskara II (1150) quando diz:

> Tome *yâvat-tâvat* como o valor da quantidade desconhecida. Então, fazendo exatamente o que foi especificamente dito - para subtrair, adicionar, multiplicar ou dividir - os dois lados iguais (de uma equação) são cuidadosamente construídos (BHÂSKARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938, p.29, tradução nossa).[12]

No entanto, essas regras estão longe de serem de fácil execução; É esclarecedor considerar o que Nârâyana diz:

---

[11] In this case, in the problem proposed by the questioner, *yâvat-tâvat* is put for the value of the unknown quantity; then performing multiplication, division, etc., as required in the problem the two sides shall be carefully made equal. The equation being formed in this way, then the rule (for its solution) follows (Prthûdakasvâmi, 860 apud DATTA; SINGH, 1938, p. 29).

[12] Let *yâvat-tâvat* be assumed as the value of the Unknown quantity. Then doing precisely as has been specifically told-by subtracting, adding, multiplying or dividing – the two equal sides (of an equation) should be very carefully built (BHÂSKARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938, p.29).

> No problema (proposto), o valor da quantidade desconhecida é assumido por *yâvat*, uma, duas ou qualquer múltiplo dela, com ou sem termo absoluto, o qual agora pode ser adicionado ou subtraído. Então sobre o valor assumido opcionalmente precisam ser performadas, em acordo com o estabelecido do problema, as operações tais como adição, subtração, multiplicação, divisão, regra de três, dupla regra de três, somação, figuras planas, explorações, etc. E, portanto, os dois lados precisam ser feitos iguais. Se a igualdade dos dois lados não se estabelece explicitamente, então um lado precisa ser multiplicado, dividido, acrescido ou subtraído de uma apropriada inteligência (acordando com o problema) e assim os dois lados necessariamente são feitos iguais (NÂRÂYANA, 1350 apud DATTA; SINGH, 1938, p.30, tradução nossa).[13]

As complexidades presentes na formação de uma equação ficam assim definitivamente postas, pois o extrato de texto deixa claro que uma suposta “apropriada inteligência”, que depende do problema, pode ser necessária para compor essa equação.

Para vencer as complexidades, como era característico dos tratados hindus, os problemas são classificados em tipos que se associam a tipos de equações. Uma vez identificado o tipo de problema tem-se o tipo de equação que resultará.

Mas, despistando as complexidades, a construção da igualdade se constituía no procedimento mais preliminar para a solução da equação, ou seja, a solução da equação começava com sua formação, pois a construção dos dois lados seguia uma *nyâsa*, nome dado ao esquema gráfico como técnica de escrever a equação para as operações adicionais.

De acordo com Datta e Singh (1938), em geral, as operações eram representadas por palavras do Sânscrito que na representação das equações eram usadas de forma abreviada à sua primeira sílaba e colocada depois, ou ocasionalmente antes, da quantidade afetada. Para a operação de adição a palavra usada era *yuta (yu)*, por exemplo, e, com exceção da subtração, não havia símbolos especiais para as operações fundamentais no manuscrito de Bakhshâlî. A seguir, no

---

[13] In a problem (proposed), the value of the quantity which is unknown is assumed to be *yâvat,* one, two or any multiple of it, with or without an absolute term, which again may be additive or subtractive. Then on the value thus assumed optionally should be performed, in accordance with the statement of the problem, the operations such as addition, subtraction, multiplication, division, rule of three, double rule of three, summation, plane figures, excavations, etc. And thus the two sides must be made equal. If the equality of the two sides is not explicitly stated, then one side should be multiplied, divided, increased or decreased by one's own intelligence (according to the problem) and thus the two sides must be made equal (Nârâyana, 1350 apud DATTA; SINGH, 1938, p. 29-30).

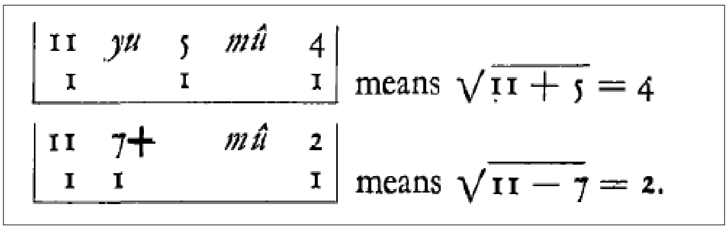
quadro 1, temos as principais operações, com as palavras correspondentes em Sânscrito e suas abreviaturas, bem como algumas potencias da quantidade desconhecida.

Quadro 1 – Termos e abreviações hindus para as operações fundamentais e potências da incógnita

	Termo em Sânscrito	Abreviação
Adição	Yuta	Yu
Subtração	Ksaya	ksa (+)
Multiplicação	guna/gunita	Gu
Divisão	bhâga/bhâjita	Bhâ
Coeficiente	Rûpa	Ru
Raiz quadrada	Mûla	Mû
Quadrado	varga	Va
Cubo	ghana	Gha
Quarta potência	varga-varga	va-va
Quinta potência	varga-ghana-ghâta	va-gha-ghâ
Sexta potência	ghana-varga	gha-va
Sétima potência	varga-varga-ghana-ghâta	Va-va-gha-ghâ

Os matemáticos hindus, como Bakhshalî, por exemplo, escreviam os dois lados (membros) um após o outro, na mesma linha, sem nenhum sinal que simbolizasse igualdade entre os membros. Assim como no exemplo a seguir:

Figura 1 – Representação hindu das equações



Fonte: DATTA E SINGH, 1938, p.15

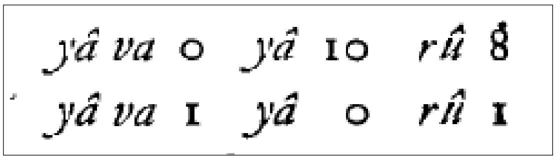
Na figura 1, a equação: 11 *yu* 5 *mû* representa a adição *yu* (da abreviação de *yuta,* do Sânscrito, que significa *adicionar*) entre as duas quantidades 11 e 5, que por sua vez, estão sob a operação *mû* (da abreviação de *mûla*, do Sânscrito, que significa *raiz*), 4 representa o segundo membro. Ao lado, a expressão $\sqrt{11+5}=4$

que é como se representa atualmente a equação. Ainda na mesma figura, temos outro exemplo em 11 7+ *mû*, que significa a diferença entre os números 11 e 7, sob a raiz, *mû*, e o número 2 representando o segundo membro; na representação atual ficaria $\sqrt{11-7}=2$

Esse modo de escrita foi abandonado pelos Hindus e substituído por outro em que os dois lados passam a ser escritos um abaixo do outro, ainda sem o sinal de igualdade, e de modo que os termos de ordens semelhantes ficassem escritos um abaixo do outro, incluindo os termos de ordens ausentes, em ambos os lados, que eram escritos com coeficientes (*rû*) nulos. Datta e Singh (1938, p. 31) apresentam exemplos dessa representação retirados de Prthudakasvami (860):

A equação $10\mathrm{x} - 8 = \mathrm{x}^2 + 1$ era escrita como segue:

Figura 2 – Representação da equação 10x – 8 = x^2 + 1



yâ va o *yâ* 1o *rû* $\dot{8}$
yâ va 1 *yâ* o *rû* 1

Fonte: DATTA E SINGH, 1938, p. 31.

Quando se escreve x no lugar de *yâ,* obtém-se:

$$x^2 \cdot 0 + x \cdot 10 - 8 \quad \text{(1º membro)}$$
$$x^2 + x \cdot 0 + 1 \quad \text{(2º membro)}$$

$$0 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 8 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \qquad (1)$$

Mais esclarecedor a respeito do arranjo dos termos da equação é o seguinte exemplo apresentado por Datta e Singh (1938, p.31) e extraído de Prthûdakasvâmi (860).

A equação $197\mathrm{x} - 1644\mathrm{y} - \mathrm{z} = 6302$ é representada por:

$$y\hat{\mathrm{a}}\ 197\ k\hat{\mathrm{a}}\ 164\dot{4}\ \ n\hat{\imath}\ \dot{1}\ r\hat{\mathrm{u}}\ 0 \quad \text{(1º membro)}$$
$$y\hat{\mathrm{a}}\ \ 0\ \ k\hat{\mathrm{a}}\ \ 0\ \ n\hat{\imath}\ 0\ r\hat{\mathrm{u}}\ 6302 \quad \text{(2º membro)} \qquad (2)$$

Na representação da equação anterior (2), o conhecido 6302 (segundo membro) é escrito em termos dos desconhecidos com coeficientes nulos, isto é, há uma clara intenção de explicitar o que denominamos hoje de termos semelhantes.

Isso facilitaria a redução desses termos, pois com a equação organizada assim, o procedimento da resolução é continuado separando o(s) desconhecido(s) dos conhecidos. Sobre esse procedimento, Datta e Singh (1938) citam as seguintes regras:

A de Srîpati que afirma:

> De um lado o quadrado da incógnita e a incógnita devem ser isoladas com a remoção das quantidades conhecidas; as quantidades conhecidas (devem ser isoladas) no lado oposto (SRÎPATI, 1039 apud DATTA; SINGH, 1935, p.34, tradução nossa) [14]

Essa intenção de isolar os termos com a incógnita é ratificada por Bhâskara II quando diz:

> Então a incógnita de um lado (da equação) deve ser subtraída da incógnita do outro lado; da mesma forma, o quadrado e as outras potências da incógnita; as quantidades conhecidas de um lado devem ser subtraídas das quantidades conhecidas do outro (isto é, do anterior) lado (BHÂSKHARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938, p.34, tradução nossa)[15]

Esses entendimentos estão substancializados no seguinte exemplo encontrado em Datta e Singh (1938, p. 34) usando as equações do comentário de Prthudakasvami, indicado acima, que diz que o isolamento total – no primeiro membro, constam apenas os termos com o desconhecido e segundo membro apenas o conhecido – (*samasodhana*) feito de acordo com a regra produz a equação:

Figura 3: Equação com o termo desconhecido isolado

yâ va 1 *yâ* 1̇0
rû 9̇"

$$x^2 - 10x = -9.$$

Fonte: DATTA E SINGH, 1938, p. 34.

---

[14] From one (side) the square of the unknown and the unknown should be cleared by removing the known quantities; the known quantities (should be cleared) from the side opposite to that (DATTA E SINGH, 1938, p. 34).

[15] Then the unknown on one side of it (the equation) should be subtracted from the unknown on the other side; so also the square and other powers of the unknown; the known quantities on the other side should be subtracted from the known quantities of another *(i.e.,* the former) side.

Esse objetivo e, portanto, o jeito de pensar para resolver uma equação, que se traduz em isolar a incógnita em um lado e os conhecidos no outro lado, é um aspecto que ainda se faz presente na resolução das equações do primeiro graus nas escolas brasileiras. Essa forma de reduzir a equação por meio dessa técnica pode ser interpretada hoje como a técnica de “redução dos termos semelhantes”.

Não menos importante é notar que já se operava com quantidades negativas, sendo que estas eram indicadas por um ponto ou pequeno círculo acima do número, como aparece com $\dot{9}$ ou $1\dot{0}$, na figura 2.

A técnica de separação da incógnita de um lado da igualdade e os conhecidos do outro lado da igualdade era aplicável a qualquer equação e poderia ser usada para classificar a equação quando encontrada em sua forma reduzida.

Portanto, as operações algébricas, inclusive a eliminação de parênteses, eram usadas com o propósito de reduzir as equações com a redução e eliminação de termos. Isso permitia classificar uma equação e isso encaminhava as técnicas que poderiam ser usadas para sua solução.

No inicio, segundo Datta e Singh (1935, p.35) uma classificação Hindu referida em um trabalho canônico de cerca 300 B.C, é realizada em acordo com o grau; equações simples (*yâvat-tâvat*), quadrática (*varga*), cúbica (*ghana*) e biquadrática (*varga-varga*). Essa classificação sofre ligeiras modificações como a de Brahmagupta (628) e de Prthûdakasvâmi (860). Em ambas encontramos as equações lineares com uma incógnita que detemos nossa atenção por ser de nosso interesse.

2.2.2 As técnicas de resolução da equação simples

Como destacado anteriormente, na matemática hindu as equações decorriam de problemas e não ao contrário como acontece nos manuais atuais. Isso levou ao encaminhamento de desenvolvimento de diferentes técnicas para diferentes tipos de equações simples obtidas com sentido segundo o tipo de problema considerado.

2.2.3 Técnicas para a solução da equação do tipo $\mathbf{ax = b}$

A TÉCNICA DA FALSA POSIÇÃO

Datta e Singh (1938) afirmam que os registros hindus de problemas mais antigos envolvendo equações algébricas simples e de um método para a sua solução ocorre no tratado de Bakhshâli, provavelmente escrito próximo ao início da Era Cristã, em que se inserem problemas do tipo:

> O valor determinado para o primeiro não é conhecido, o segundo é dado duas vezes o primeiro, o terceiro três vezes o segundo; e o quarto é quatro vezes o terceiro. A quantidade total distribuída é 132. Qual é a quantidade do primeiro? (DATTA; SINGH, 1938, p.37, tradução nossa).[16]

Parece claro que se x é o valor determinado para o primeiro, e, seguindo as operações em acordo com o problema, obtemos, na notação atual:

$$x + 2x + 6x + 24x = 132$$

A solução apresentada por Bakhshâlî é apresentada por Datta e Singh (1935) como segue.

Figura 4: Resolução de um problema pela regra da falsa posição.

Rule of False Position. The solution of this equation is given as follows :

"'Putting any desired quantity in the vacant place'; any desired quantity is || 1 ||; 'then construct the series'

$$\left|\begin{array}{c|c|cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

'multiplied' || 1 | 2 | 6 | 24 |; 'added' 33. 'Divide the visible quantity' $\left|\begin{array}{c} 132 \\ 33 \end{array}\right|$; (which) on reduction becomes $\left|\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right|$. (This is) the amount given (to the first)."[1]

Fonte: DATTA E SINGH, 1935, p. 37.

Esta técnica, chamada regra da falsa posição, está relacionada à proporcionalidade, ou melhor, à regra de três. Assim, a solução da equação é reduzida ao problema: Encontrar o valor da incógnita que faz a expressão que traduz o problema produzir 132, tendo em conta que 33 é o produzido quando a incógnita é tomada igual a 1.

Incógnita	Conhecido
x	132
1	33

$$x = \frac{1 \times 132}{33} = 4$$

[16] The amount given to the first is not known. The second is given twice as much as the first; the third thrice as much as the second; and the fourth four times as much as the third. The total amount distributed is 132. What is the amount of the first? (DATTA; SINGH, 1938, p. 36-37)

Para aplicar essa técnica é possível tomar inicialmente qualquer valor para a incógnita que produza um valor não nulo para o outro lado da equação. Mas, ela tem alcance limitado, ou seja, somente pode ser aplicada ao tipo de problemas cuja equação associada com sentido pode ser reduzida à equação do tipo $ax = b$, como no exemplo acima. Portanto, outros tipos de equações exigem outras técnicas.

A TÉCNICA DA INVERSÃO

A técnica da inversão chamada *vilomagati* (trabalhar para trás) era usada geralmente na Índia de tempos muito antigos. Datta e Singh trazem uma definição dada por Aryabhata I e que diz: “No método de inversão, os multiplicadores tornam-se divisores e os divisores tornam-se multiplicadores, a adição torna-se subtração e a subtração torna-se adição” (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p. 232).

No entanto, Datta e Singh afirmam que a descrição dada por Brahmagupta é mais completa, e é enunciada como segue:

> Começando pelo fim, faça o multiplicador divisor, o divisor multiplicador; (faça) a adição, subtração e a subtração, adição; (faça) quadrado, raiz quadrada, e, raiz quadrada, quadrado; Isto dá a quantidade requerida (BRAHMAGUPTA, 628 apud DATTA; SINGH, 1935, p. 232, tradução nossa). [17]

Os problemas a seguir são exemplos que ilustram os tipos de problemas que podiam ser resolvidos pela técnica anteriormente citada:

> (I) Qual é a quantidade que quando dividida por 7, (em seguida) multiplicada por 3, (em seguida) elevada ao quadrado, (em seguida) acrescido de 5, (em seguida) dividido por $\frac{3}{5}$, dividido pela metade, reduzido à sua raiz quadrada, acontece de ser o número 5?
> (2) O resíduo de graus do sol menos três, dividido por sete, extraída a raiz quadrada do quociente, e a raiz menos oito multiplicada por nove, e ao produto adicionado um, a quantidade é cem. Quando isso acontece em uma quarta-feira? (DATTA; SINGH, 1935, p. 232-233, tradução nossa).[18]

---

[17] Beginning from the end, make the multiplier divisor, the divisor multiplier; (make) addition subtraction and subtraction addition; (make) square square-root, and square-root square; this gives the required quantity (BRAHMAGUPTA, 628 apud DATTA; SINGH, 1935, p. 232).

[18] (I) What is that quantity which when divided by 7, (then) multiplied by 3, (then) squared, (then) increased by 5, (then) divided by $\frac{3}{5}$, (then) halved, and then reduced to its square-root happens to be the number 5?
(2) The residue of degrees of the sun less three, being divided by seven, and the square-root of the quotient extracted, and the root less eight multiplied by nine, and to the product one being added, the amount is a hundred. When does this take place on a Wednesday? (DATTA; SINGH, 1935, p. 232-233).

O método da inversão, portanto, consistia em resolver um problema no sentido contrário em que era narrado, desfazendo-se as operações indicadas na ordem inversa em que apareciam. Assim, cada uma das operações era trocada por outra. começando pela última. Prosseguindo esse processo invertido, ao final desse processo, então, encontrava-se a quantidade procurada.

2.2.4 Uma técnica para as equações do tipo $\mathbf{ax + b = p}$ (Bakhshâlî)

Essa técnica se destina à solução de um tipo de problemas considerado no tratado de Bakhshâli que conduz, em última instância, a uma equação do tipo

$$ax + b = p$$

Pela técnica da falsa posição é atribuído um valor arbitrário *g* para *x* que produzirá um valor *p’.*

$$ag + b = p'$$

Fazendo a diferença entre as duas de modo a reduzir os termos semelhantes encontramos:

$$ax - ag = p - p'$$

que é uma equação que pode ser reduzida a forma $ax = b$. Assim o problema pode ser reduzido ao problema: Encontrar a incógnita que produz $p - p' + ag$*, se a é o produzido para o valor da incógnita igual a 1.*

Incógnita	Conhecido
x	$p - p' + ag$
1	a

$$x = \frac{1 \times (p - p' + ag)}{a}$$

De onde se obtém que:

$$x = \frac{p - p'}{a} + g$$

A expressão acima pode ser usada para tipos de problemas que admitem em alguma instancia a formulação dada pela equação $ax + b = c$. O importante aqui é notar que a solução pode ser obtida a partir de coeficientes conhecidos, ou seja, pode ser obtida por uma fórmula o que permite automatizar a solução.

2.2.5 Uma Técnica para as equações lineares do tipo $\mathbf{ax + c = bx + d}$ (Âryabhata I (499))

Datta e Singh (1935, p.40) apresentam a técnica de Âryabhata I (499) para esse tipo de equações relacionadas a um tipo de problemas, dito do patrimônio, como o que segue:

> Duas pessoas, que são igualmente ricas, possuem, respectivamente, a, b vezes certa quantidade desconhecida, juntamente com c, d unidades monetárias em dinheiro. Qual é o montante? (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p.40, tradução nossa).[19]

A formulação do problema leva a seguinte equação:

$$ax + c = bx + d$$

Para solucionar esse tipo de problema, Aryabhata I (499) enuncia a seguinte regra:

> A diferença dos "valores" conhecidos referentes as duas pessoas devem ser divididos pela diferença dos coeficientes da incógnita. O quociente será o valor da incógnita, se as suas posses forem iguais (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p.40, tradução nossa).[20]

Portanto, a solução é

$$x = \frac{d - c}{a - b}$$

Esse tipo de problema é considerado por outros escritores, como demonstra Datta e Singh (1938) quando trazem o de *Bîjanita* de Bhaskara II:

> Uma pessoa tem três centenas de moedas e seis cavalos. Outra tem dez cavalos (cada) de valor similar e ele tem ainda uma dívida de cem moedas.

[19] Two persons, who are equally rich, possess respectively *a, b* times a certain unknown amount together with *c, d* units of money in cash. What is that amount? (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p.40)

[20] The difference of the known "amounts" relating to the two persons should be divided by the difference of the coefficients of the unknown. The quotient will be the value of the unknown, if their possessions be equal (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p.40)

> Mas eles têm patrimônios iguais. Qual é o preço de um cavalo?(BHÂSKARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938 p.42, tradução nossa) [21]

Brahmagupta ratifica a regra de Âryabhata I para esse tipo de equações, mas fazendo referência apenas aos coeficientes da equação. Ele diz:

> Em uma equação (linear) com uma incógnita, a diferença dos termos conhecidos feita na ordem inversa, dividida pela diferença dos coeficientes da incógnita (é o valor da incógnita) (BRAMAGUPTA, 628 apud DATTA; SINGH, 1938, p. 40, tradução nossa).[22]

Srîpati segue no mesmo sentido e escreve:

> Primeiro remova a incógnita de um dos lados (da equação), deixando o termo conhecido; o inverso (deve ser feito), do outro lado. A diferença dos termos absolutos, tomada na ordem inversa, dividida pela diferença dos coeficientes da incógnita será o valor do desconhecido (SRÎPATI, 1039 apud DATTA; SINGH, 1938, p.40, tradução nossa)[23]

A regra de Bhaskara II recomenda:

> Subtraia a incógnita de um lado, da incógnita no outro, e o termo absoluto no segundo, do termo no primeiro lado. O número absoluto residual deve ser dividido pelo coeficiente residual da incógnita; Assim, o valor da incógnita torna-se conhecido (BHÂSKARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938 p. 41, tradução nossa)[24]

Enquanto Narâyâna escreve:

> De um lado, isolar a 'incógnita' e do outro, as quantidades conhecidas; em seguida, dividir o resíduo conhecido pelo coeficiente residual da incógnita. Assim, certamente vai se tornar conhecido o valor do desconhecido (NARÂYÂNA, 1350 apud DATTA E SINGH, 1938, p.41, tradução nossa)[25]

Para ilustração, Datta e Singh (1935, p.41) consideram o problema referido acima extraído de Brahmagupta:

> Diga o número de dias decorridos até o momento em que quatro vezes a décima segunda parte dos graus residuais somados a um, mais oito, será

---

[21] One person has three hundred coins and six horses. Another has ten horses (each) of similar value and he has further a debt of hundred coins. But they are of equal worth. What is the price of a horse (BHÂSKARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938 p.42).

[22] In a (linear) equation in one unknown, the difference of the known terms taken in the reverse order, divided by the difference of the coefficients of the Unknown (is the value of the unknown). (BRAMAGUPTA, 628 apud DATTA; SINGH, 1938, p. 40).

[23] First remove the unknown from anyone of the sides (of the equation) leaving the known term; the reverse (should be done) on the other side. The difference of the absolute terms taken in the reverse order divided by the difference of the coefficients of the unknown will be the value of the unknown (SRÎPATI, 1039 apud DATTA; SINGH, 1938, p.40)

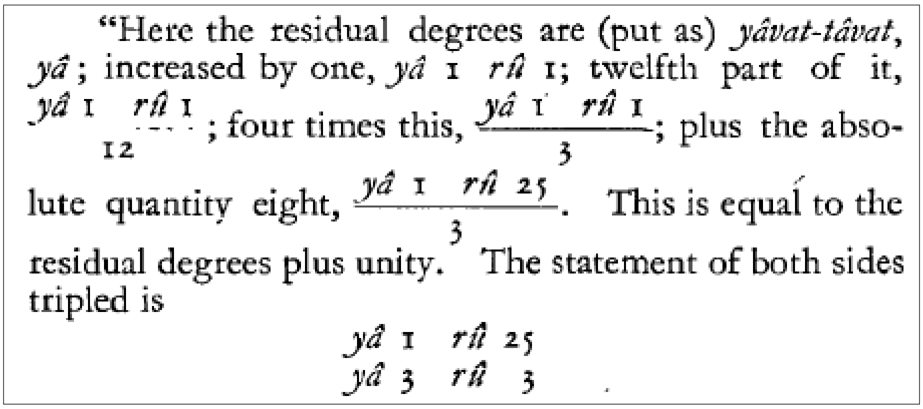
[24] Subtract the unknown on one side from that on the other and the absolute term on the second from that on the first side. The residual absolute number should be divided by the residual coefficient of the unknown; thus the value of the unknown becomes known (BHÂSKARA II, 1150 apud DATTA; SINGH, 1938 p. 41).

[25] From one side clear off the' unknown and from the other the known quantities; then divide the residual known by the residual coefficient of the unknown. Thus will certainly become known the value of the unknown (NARÂYÂNA, 1350 apud DATTA E SINGH, 1938, p.41)

> igual aos graus residuais mais um (BRAMAGUPTA, 628 apud DATTA; SINGH, 1938, p. 41, tradução nossa).[26]

Segundo Datta e Singh (1938, p.41), esse problema foi resolvido por Prthudakavâsmî como se segue:

Figura 5 – Formação e resolução de um problema envolvendo equação simples.


"Here the residual degrees are (put as) *yâvat-tâvat*, *yâ*; increased by one, *yâ* 1 *rû* 1; twelfth part of it, $\frac{\text{yâ } 1 \ \text{ rû } 1}{12}$; four times this, $\frac{\text{yâ } 1 \ \text{ rû } 1}{3}$; plus the absolute quantity eight, $\frac{\text{yâ } 1 \ \text{ rû } 25}{3}$. This is equal to the residual degrees plus unity. The statement of both sides tripled is

yâ 1 *rû* 25
yâ 3 *rû* 3

Fonte: DATTA E SINGH, 1938, p. 41.

A diferença entre os coeficientes da incógnita é 2, e este valor irá dividir diferença dos termos absolutos, a saber 22, produzindo o resíduo dos graus do sol, 11. Estes graus residuais devem ser conhecidos para serem irredutíveis. Os dias decorridos podem, então, ser deduzidos procedendo como anteriormente enunciado, nas regras por Narâyâna, Bhâskara II, Brahmagupta.

A representação atual desta equação e sua resolução é dada por Datta e Singh (1935) do seguinte modo:

$$\frac{4}{12}(x+1) + \ 8 = x + 1$$

$$(x + 25) = 3x + 3$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

Datta e Singh (1938) acrescentam que existem alguns casos no trabalho de Bakhshali onde um método similar a este, que autores posteriores parecem ter seguido para a solução de uma equação linear. O método é aplicado ao seguinte problema:

---

[26]Tell the number of elapsed days for the time when four times the twelfth part of the residual degrees increased by one, plus eight will be equal to the residual degrees plus one (BRAHMAGUPTA, 628 apud DATTA; SINGH, 1938, p. 41).

> Duas pessoas partem com diferentes velocidades iniciais (a_1, a_2); viajam por sucessivos dias, distâncias cada vez maiores em diferentes velocidades (b_1, b_2). Mas eles cobrem a mesma distância após o mesmo período de tempo. Qual é o período? (BAKHSHALI, apud DATTA; SINGH, 1938, p.42, tradução nossa)[27]

Para resolver o problema, o período é denotado por x, obtendo-se a equação:

$$a_1 + (a_1 + b_1) + (a_1 + 2b_1) + \ldots \text{ até x termos}$$

$$a_2 + (a_2 + b_2) + (a_1 + 2b_2) + \ldots \text{ até x termos}$$

Ou

$$\left\{a_1 \frac{x-1}{2} b_1\right\} x = \left\{a_2 \frac{x-1}{2} b_2\right\} x$$

De onde vem a equação $x = \frac{2\,(a_2 - a_1)}{b_1 - b_2} + 1$ que é a solução dada na obra Bakhshali: “o dobro da diferença dos termos iniciais dividido pela diferença das diferenças comuns, é aumentada de 1 unidade. O resultado será o número de dias em que a distância percorrida será a mesma” (DATTA E SINGH, 1938, p.42).

2.3 ANÁLISES COMPLEMENTARES SOBRE A PRAXEOLOGIA HINDU

2.3.1 O tipo de tarefa

As organizações didático-matemáticas não são dirigidas diretamente para o estudo das equações do primeiro grau de uma incógnita dos hindus. Elas destacam os tipos de problemas e com eles associados os tipos de equações. Assim, a tarefa encontrada aqui é a de resolver a equação simples que está associada a um problema proposto.

Parece, então, que o objetivo do estudo são os problemas e isto deve atender interesses da noosfera. Esse objetivo para ser alcançado exige eliminar dificuldades como a da “inteligência apropriada” para resolver cada problema. Para isto, uma taxionomia de problemas é estabelecida levando também a uma taxionomia das equações simples.

---

[27] Two persons start with different initial velocities (a^1, a^2*);* travel on successive days distances increasing at different rates (b^1, b^2). But they cover the same distance after the same period of time. What is the period? (BAKHSHALI, apud DATTA; SINGH, 1938, p.42).

2.3.2 A técnica

Essa organização, sem dúvida, facilita o enfrentamento de problemas específicos pelo uso de fórmulas e regras elaboradas, mas exige, por outro lado, um investimento na atividade de estudo que permita incorporar as regras e fórmulas e, ao mesmo tempo, adquira em situação a percepção necessária para identificar o tipo de problema que lhe encaminhará o tipo de equação e técnica necessária para resolvê-la.

Com exceção da regra da falsa posição, as técnicas encontradas, para os tipos de equações consideradas como simples, são baseadas em isolar a incógnita por meio de operações aritméticas entre os termos de mesma natureza, de modo que ao final, em um dos lados da equação, permaneça apenas o desconhecido, e, no outro lado, o conhecido, permitindo assim, determinar o valor procurado.

2.3.3 A tecnologia

Embora esta organização didático-matemática possa levar a aprendizagem das equações como um saber prático, no sentido dado por Chevallard (2005), a organização apresenta fundamentos tecnológicos que permitem engendrar as fórmulas e regras.

Do exposto, podem ser extraídos, sem dificuldade, ao menos os seguintes elementos técnico-tecnológicos:

I. A noção de termos semelhantes, no mínimo, considerando as potências de uma incógnita;
II. Operações algébricas: Entendidas como as operações de adição, subtração, multiplicação, potenciação, por exemplo, de termos considerando quantidades conhecidas (números) e desconhecidas (letras), entre si, bem como, as diferentes potências da quantidade desconhecida;
III. Redução de termos semelhantes: Entendida aqui como a diferença entre termos semelhantes;
IV. Operações inversas: Entendidas de modo a considerar que as quantidades, (conhecidas e desconhecidas) adicionadas de um lado da equação, devem ser subtraídas no outro, assim como, as quantidades multiplicadas devem ser divididas, etc.

Esses elementos são recorridos para derivar as fórmulas e regras como foi demonstrado acima para derivar a segunda técnica de Bakhshâlî, mas não se resumem apenas a essa fórmula. Elas agem para engendrar a fórmula de Âryabhata, bem como as regras anunciadas por outros autores aqui citados e os procedimentos mais complexos demonstrados nos dois últimos exemplos.

É preciso ficar claro que a afirmação acima não deriva de uma análise tomando os elementos tecnológicos citados a luz dos elementos tecnológicos que vivem nas salas de aula atuais de matemática básica, mas do modo que são definidos e tomados em ação para a solução das equações aqui apresentadas.

As regras operatórias aqui consideradas derivam da generalização da aritmética e não guardam necessariamente relação com as regras operatórias tomadas como propriedades de estruturas algébricas. Aqui, os termos carregam consigo significados empíricos não presentes nos termos algébricos que vivem em de nossas escolas. Tudo acontece na aritmética dos números inteiros e quebrados.

Essa característica empírica presente nas atividades da aritmética se torna uma limitação ao estudo das equações, pois exigem uma situação, isto é, um problema que lhe dê razão de existir. Sem problema não há equação. Isto não permite considerar o estudo das equações de modo independente que permita vislumbrar outros tipos de equações do primeiro grau, pois estas podem não se encontrar nos possíveis dos problemas.

Em que pese essa limitação exposta, podemos associar os elementos tecnológicos, ora apontados, com elementos tecnológicos presentes, pelo menos nas práxis, nas escolas atuais. Eles parecem os mesmos em ação, inclusive a intenção de isolar a incógnita em um lado da equação, deixando o outro lado para os conhecidos dados ou calculados.

Esses passos algébricos iniciais que seguem a técnica da inversão aritmética parecem, assim, se fazer perpetuar nas escolas atuais. É preciso estar atento que o saber não necessariamente antecede o saber-fazer, ou melhor, o saber fazer não deriva necessariamente em gênese do saber que o explica, justifica ou até o que possa produzi-lo (CHEVALLARD,1999).

3 A RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU NO SÉCULO XVIII/XIX

Aqui tomamos os Elementos de Álgebra, de 1810, escrito pelo Barão de Reynaud como uma obra representativa do ensino da matemática na França que influenciou, por sua vez, o ensino da matemática nas escolas brasileiras, como veremos as seguir.

Em sua obra, Reynaud apresenta a Álgebra como extensão da Aritmética, em particular, as equações como traduções de situações que foram se tornando cada vez mais complexas e isso levou à invenção de sinais particulares e ao uso de letras para representar as quantidades desconhecidas, por exemplo, que necessitavam ser representadas de forma mais resumida para tornar possíveis e facilitar os cálculos. A seguir, um exemplo, de como podia tornar-se complexa a representação de um problema e sua resolução.

Figura 6 – Resolução de um problema pela álgebra retórica.

181. *Partager 700 en deux parties, dont la seconde soit égale à la première, plus 20.* Si la 1re partie était connue, il suffirait de lui ajouter 20 pour obtenir la 2e. La 1re partie est donc un certain nombre inconnu ; et la 2e est ce même nombre inconnu, plus 20 ; la somme de ces deux parties est donc composée, du nombre inconnu (valeur de la 1re partie), et du nombre inconnu plus 20 (valeur de la 2e partie), c'est-à-dire, de 2 fois le nombre inconnu, plus 20 ; mais cette somme doit former le nombre à partager 700 ; on a donc.....

(*A*)........ 2 *fois le nombre inconnu, plus* 20 égale 700.

Puisque 700 est composé de 20 et de 2 fois le nombre inconnu ; si de la somme 700, on ôte 20, le reste 680 sera égal à deux fois le nombre inconnu ; on a donc....

(*B*)............... 2 *fois le nombre inconnu* égale 680.

680 exprimant le double du nombre inconnu, sa moitié 340 sera la valeur du nombre inconnu. L'égalité (*A*) donne donc....

(*a*)....................... *le nombre inconnu* égale 340.

La 1re partie sera donc 340 ; et la 2e, composée de la 1re plus 20, sera 340 plus 20, ou 360. Ces deux parties satisfont à toutes les conditions du problème ; car leur somme, 340 plus 360, est le nombre à partager 700, et la 2e partie 360, surpasse de 20 la 1re partie 340.

Fonte: Reynaud, 1810, p. 98.

O autor sugere que a linguagem algébrica surgiu por uma necessidade da prática de resolução de problemas, à medida que os problemas se tornavam mais complexos, cresciam também as dificuldades nas numerosas operações a realizar, e, consequentemente, mais raciocínios, tornando demasiadamente complexa sua resolução, não pela dificuldade de raciocínio, mas pela complicação (inconveniência da linguagem) para produzir uma representação para um grande número deles.

Uma preocupação marcante do autor é percebida ao apresentar um curso introdutório ao cálculo com equações, que detalha as operações aritméticas e algébricas. Seu objetivo declarado é esclarecer pontos que presumidamente causam dificuldades durante o estudo das equações. Ele introduz as regras para efetuar as quatro operações da aritmética que, segundo ele, são suficientes para resolver qualquer problema. Isso está claro no trecho a seguir:

> Na verdade, para resolver um problema, deve-se sempre executar operações sobre as quantidades conhecidas e desconhecidas; o resultado deve ser igual a uma certa combinação destas quantidades; é esta igualdade que estabelece uma relação imediata entre as quantidades conhecidas e desconhecidas, relação sem as qual seria impossível descobrir os valores desconhecidos. Ora, vimos na aritmética, que todas as operações que podem ser feitas sobre as quantidades são reduzidas a quatro, adição, subtração, multiplicação e divisão; não podemos ser guiados indicam apenas estas quatro operações, e o resultado é uma igualdade (REYNAUD, 1810, p. 100).[28]

Além das regras aritméticas, o autor se ocupa de explicar o cálculo envolvendo quantidades positivas e negativas, e o faz submetendo estas quantidades às quatro operações fundamentais da Aritmética, para então, deduzir as regras para as quantidades algébricas. A distinção feita entre as operações aritméticas e as operações algébricas, toma a segunda como generalização da primeira, e, isso para Reynaud, justifica o porquê da Álgebra ser chamada, pelos antigos, de Aritmética Universal.

---

[28] En effet, pour résoudre un problème quelconque, il s'agit toujours d'effectuer certaines opérations sur des quantités connues et inconnues; le résultat doit être égal à une certaine combinaison de ces quantités; c'est cette égalité qui établit une relation immédiate entre les quantités connues et inconnues, relation sans laquelle il serait impossible de découvrir les valeurs des inconnues. Or nous avons vu en Arithmétique, que toutes les opérations que l'on peut faire sur les quantités se réduisent à quatre, l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division; on ne peut donc être conduit qu'à indiquer ces quatre opérations, et la résultat, qui est une égalité. (REYNAUD, 1810, p.100).

Reynaud distingue as equações das identidades e para tornar mais claro, ele adota símbolos diferentes para cada tipo. Por exemplo, a igualdade x *plus* 2 égale 5, ou $x + 2 = 5$ é uma equação que indica que a soma $(x + 2)$ é igual a 5. Portanto o único valor que x pode assumir é 3; nenhum outro valor torna os dois membros iguais. Enquanto as identidades são igualdades que independem do valor particular atribuído à incógnita, como mostra o exemplo a seguir

$$(x + 2) ⨎ (\mathrm{x} + 2)$$

Isto quer dizer que $x + 2$ é *identicamente igual* a $x + 2$.

Deixa claro assim que uma equação é uma igualdade que subsiste apenas para valores particulares da incógnita e que, portanto a incógnita é dada por número determinado.

A noção de equação vai sendo encaminhada paulatinamente no trabalho de Reynaud. Em um dado trecho de seu texto encontramos a afirmação de que "[...] toda igualdade, escrita com ajuda de sinais algébricos, se chama EQUAÇÃO. (REYNAUD, 1810, p.102, tradução nossa). Isso quer dizer que uma equação é constituída de dois membros, à esquerda tem-se o primeiro membro e à direita, o segundo membro da equação.

Seguindo, Reynaud (1810) encaminha a resolução de uma equação por meio de transformações que não perturbem a igualdade, e, cujo objetivo de isolar a incógnita em um dos membros e no outro membro um número conhecido que representará o valor da incógnita.

A importância em manter a igualdade após as transformações é, no mínimo, para garantir que a transformação leva de uma equação à outra equação, sempre que possível menos complexa que a anterior. No entanto, é preciso garantir que o valor de x permanecerá o mesmo após as transformações efetuadas de modo que se possa afirmar que o valor de x encontrado na equação mais simples, resultante das transformações da equação original, poderá ser considerado como solução da equação original.

Para garantir isso, Reynaud recorre ao pensamento analítico que domina as atividades da aritmética para justificar as transformações. Isso é demonstrado por meio de exemplos, como a resolução da seguinte equação:

$$\mathrm{x} + 3 = 5 \tag{1}$$

O procedimento é descrito com o princípio da subtração aritmética, que neste caso funciona assim: a equação expressa uma igualdade entre a soma de dois números, x com três, e cinco, de onde se pode deduzir que se subtrairmos de cinco o número três (que é um dos dois) números, obteremos (o outro número) 2, que o valor da incógnita x, portanto $x = 2$. Feito isso, passa-se a verificação, que consiste em substituir na equação o valor encontrado

$$x = 2 \quad \text{faz com que} \quad x + 3 = 2 + 3 = 5.$$

Assim, para resolver a equação

$$x - 3 = 5 \tag{2}$$

usa-se o princípio da adição, pelo qual, se deve descobrir um número que diminuído em três, produz cinco como resto. E assim, encontra-se o valor de x, que é 5 somado com 3 que é igual a 8. Esta descrição revela a técnica que isola o termo com a incógnita.

Com esses dois princípios, o da adição e da subtração, o autor afirma que se demonstra como fazer um termo trocar de membro na equação; “é suficiente apagar o termo no membro onde este se encontra e escrevê-lo no outro, com o sinal contrário” (REYNAUD, 1810, p. 149), isto é, se um termo possui o sinal –, passará a ter o sinal +, e, vice-versa. Esse procedimento é então estendido para passar vários termos de um membro ao outro.

Analogamente, o princípio da divisão é usado nas equações cuja incógnita está combinada como no exemplo a seguir. Se, temos uma equação do tipo

$$2x = 6 \tag{3}$$

sua solução está em submetê-la ao princípio da divisão, pelo qual devemos procurar um número x cujo dobro seja igual a seis. Diz-se então, que efetuar uma divisão é suficiente para encontrar sua solução, pois basta dividir o produto seis por um dos fatores no primeiro membro, o dois, que dará o outro; o quociente 3, então, será o valor da incógnita x.

O procedimento para separar a incógnita do coeficiente que a multiplica é descrito assim: deve-se suprimi-lo no primeiro membro e dividir o outro membro por este coeficiente, assim obteremos a incógnita que será igual ao segundo membro da equação primitiva dividido pelo coeficiente de x.

Isto pode ser demonstrado de forma geral, de acordo com Reynaud, pois tendo o termo da incógnita no primeiro membro da equação, e se dividirmos ambos os membros desta equação pelo coeficiente, os quocientes serão iguais; o primeiro será x, multiplicado e dividido pelo seu coeficiente, que dá x, e o outro quociente será o segundo membro da equação primitiva dividido pelo coeficiente de x.

A seguir, trazemos o exemplo de Reynaud (1810, p.150) em que será demonstrado o princípio da multiplicação:

$$x : 3 = 4 \tag{4}$$

Ao multiplicar os dois lados da equação por 3, obtemos em um, o produto $3 \times \frac{x}{3}$, ou seja, x, e no outro, 3×4, e essas duas quantidades são iguais. Teremos, então, $x = 3 \times 4$ ou $x = 12$, nesse caso, o procedimento para separar a incógnita do seu divisor consiste em suprimi-lo no primeiro membro e multiplicar o segundo membro por ele. A incógnita é igual ao segundo membro da equação primitiva multiplicada pelo divisor de x.

Reynaud afirma que as regras dadas anteriormente definem o método para separar a incógnita de quantidades com as quais esteja combinada por meio de uma adição, subtração, multiplicação ou divisão. Com estas regras é fácil de deduzir a resolução de uma equação.

Por exemplo, para resolver a equação

$$3\mathrm{x} - 4 = 2\mathrm{x} + 7 \tag{5}$$

deve-se passar $2x$ do segundo para o primeiro membro, e o 4, do primeiro para o segundo membro, trocando os sinais destes termos, teremos

$$3\mathrm{x} - 2\mathrm{x} = 7 + 4; \quad \text{ou} \quad \mathrm{x} = 11$$

O próximo passo é fazer a verificação do valor de x na equação proposta. Isto ocorre quando ao substituir o valor de x na equação a igualdade entre os membros for mantida:

Substituindo no 1º membro:

$$3\mathrm{x} - 4 = 3 \cdot 11 - 4 = 33 - 4 = 29$$

Substituindo no 2º membro:

$$2\mathrm{x} + 7 = 2 \cdot 11 + 7 = 22 + 7 = 29$$

Portanto, o valor encontrado para x, onze, é o correto, pois torna os dois membros da equação idênticos.

A verificação de uma incógnita como solução de uma equação desse tipo é a forma de reconhecer ou de identificar se o valor encontrado para a incógnita satisfaz a equação proposta, pois a igualdade entre os dois será satisfeita apenas quando a incógnita for substituída pelo valor correto. Assim, a verificação é feita com o valor encontrado e efetuando sobre ele todas as operações indicadas, o que deve reduzir os membros ao mesmo número. Em caso negativo, deve-se retomar os cálculos a fim de descobrir o erro.

Além das regras enunciadas por Reynaud, outras recomendações sobre a resolução das equações são citadas, como o duplo sentido de leitura da igualdade, quando autor afirma que, sendo os dois membros iguais, podem ser tomado um pelo outro.

3.1 ANÁLISE DAS PRAXEOLOGIAS

3.1.1 O tipo de tarefa

O tipo de tarefa da praxeologia que estamos tratando é a resolução da equação de primeiro grau que pode ser assim anunciada: Resolver a equação. Assim, dada uma equação do primeiro grau, pede-se encontrar o valor particular da incógnita que verifica a igualdade.

3.1.2 A técnica

A técnica para resolver esta tarefa consiste em separar as quantidades desconhecidas das conhecidas, realizando transformações na equação guiadas pela inversão das operações, segundo os princípios das quatro operações aritméticas, quando da troca de um termo de um membro para outro, sempre seguindo o objetivo de encontrar a equação resultante mais simples que permita definitivamente isolar a quantidade desconhecida em um membro e uma quantidade conhecida no outro membro da equação.

Assim, mesmo que as equações $3x - 4 = 2x + 7$ como $2x + 7 = 3x - 4$, conduzam à mesma solução, assume-se que a incógnita deve sempre ser isolada no primeiro membro, e a justificativa podemos encontrar no seguinte trecho:

> Os dois membros de uma equação sendo quantidades iguais, podemos tomá-los um pelo outro, e considerar como primeiro membro aquele que contem x. isto é mais natural,pois na equação x = 2, vemos que a incógnita x tem 2 como valor; enquanto que colocando 2 = x, parece que 2 é um número desconhecido x, o que é ridículo (REYNAUD, 1810, p. 149).[29]

Embora o autor chame atenção para o fato de a igualdade funcionar do mesmo modo nos dois sentidos, prescreve que a incógnita fique no primeiro membro para dando um sentido único para a leitura da igualdade. Mas esta ação é apenas um exemplo de protosaber agindo na prática da resolução da equação. É uma ação incorporada à prática e justificada pela própria prática.

Assim, na resolução da equação (1), acima, onde se obtém 5 da adição de x com 3, é subtraído 3 de 5, obtendo-se 2. Na equação (2), acima, o segundo, em que uma quantidade x menos 3 dá 5, inverte-se a operação, 5 é somado a 3 para chegar ao valor 8 procurado.

De maneira análoga, os princípios da multiplicação e da divisão são utilizados para passar os termos combinados com ela para o segundo membro. Como foi visto na resolução das equações “c” e “d”.

3.1.2 A tecnologia

A equação é encarada como a tradução de condições existentes entre as quantidades numéricas conhecidas e desconhecidas, ou seja, a incógnita representa um número que pertence a um determinado domínio. Isso pode ser depreendido do seguinte extrato de texto:

> A resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, pode deduzir-se imediatamente, apenas com os princípios estabelecidos nas quatro regras da aritmética. Na verdade, x designa um número abstrato. . . (REYNAUD, 1810, p. 146).[30]

---

[29] Les deux membres d'une équation étant des quantités égales, on peut prendre l'un pour l'autre, et considérer comme premier membre celui qui renferme x. Cela est plus naturel, car dans l'équation $x = 2$, on oit que l'inconnue x a a pour valeur; tandis qu'en posant $2 = x$, il semble que 2 est un nombre inconnu x, ce qui est ridicule. (REYNAUD, 1810, p. 149)

[30] La résolution des équations du premier degré à une seule inconnue, peut immédiatement se déduire des seuls principes établis dans les quatre règles de l'arithmétique. En effet, x désignant un nombre abstrait. . .(REYNAUD, 1810, p.146)

Partindo desse pressuposto, a resolução da equação é encaminhada por meio dos princípios operatórios evidentes da aritmética. Esses princípios evidentes permitem a construção da técnica, como um algoritmo, por meio de suas traduções como operações inversas. O seguinte extrato de texto corrobora com nossa compreensão:

> As transformações requeridas para resolver as equações são baseadas neste princípio claro. Quando fazemos as mesmas operações sobre duas quantidades iguais, os resultados são iguais. Deduzimos; 1° que se às duas quantidades iguais, adicionamos a mesma quantidade, as somas são iguais; 2° que se de duas quantidades iguais subtraímos uma mesma quantidade, os restos são iguais; 3° que se multiplicamos duas quantidades iguais pela mesma quantidade, os produtos são iguais; 4° que divide duas quantidades iguais pela mesma quantidade, os quocientes são iguais. Como os dois membros de uma equação são duas partes iguais, os princípios acima se aplicam a eles, e as alterações que resultam não afetam o valor do desconhecido. Estes princípios são suficientes para resolver equações; começamos com as equações...(REYNAUD, 1810, p. 148).31

Em resumo, os princípios evidentes que refere Reynauld que constituem a tecnologia da praxeologia podem ser assim compreendidos:

(P1) Se C é a soma das parcelas A e B, isto é, $C = A + B$, então evidentemente A é o resto entre o minuendo (soma) C e o subtraendo (parcela) B, isto é, $A = C - B$. Em resumo:Parcela se torna subtraendo;

(P2) Se A é o resto entre o minuendo C e o subtraendo B, isto é, $A = C - B$, então evidentemente que o minuendo C é a soma entre as parcelas A (antes resto) e B (subtraendo), isto é $C = A + B$. Em resumo, subtraendo se torna parcela da soma;

(P3) Se C é o produto dos fatores A e B, isto é, $C = A \times B$, então é evidente que B é o quociente entre o dividendo C(produto) e o divisor A (antes fator) $B = C : A$. Em resumo, o fator se torna divisor;

---

[31] Les transformations qu'exigé la résolution des équations, sont fondées sur ce principe évident. Lorsqu'on fait les mêmes opérations sur deux quantités égales, les résultats sont égaux. On en déduit; 1° que si à deux quantités égales on ajoute une même quantité, les sommes sont égales; 2° que si de deux quantités égales on retranche une même quantité, les restes sont égaux; 3° qu'en multipliant deux quantités égales par une même quantité, les produits sont égaux; 4° qu'en divisant deux quantités égales par une même quantité, les quotiens sont égaux. Comme les deux membres d'une équation sont deux quantités égales, les principes précèdent s'y appliquent, et les transformations qui en résultent n'altèrent pas la valeur de l'inconnue. Ces principes suffisent pour résoudre les équations; nous commencerons par les équations...(REYNAUD, 1810, p. 148).

(P4) Se B é o quociente do dividendo C pelo divisor A, então, é evidente que o dividendo C é o produto dos fatores A e B, isto é, $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Em resumo o divisor se torna fator.

A teoria que sustenta essa tecnologia se encerra nas operações entre quantidades consideradas generalizadas com base na evidência cultural empírica naturalizada da contagem; Em sentido amplo, a teoria é aritmética generalizada, pois as estruturas algébricas que caracterizam a Álgebra moderna ainda engatinhavam.

3.2 ALCANCE DA TÉCNICA

A tecnologia acima exposta sustenta a técnica de modo naturalizado pela aritmética permitindo funcionar como regras naturais para o cálculo algébrico que se mostrava de largo alcance como evidência Reynaud para a resolução de equações do primeiro grau, pela consequente sistematização algébrica dos procedimentos aritméticos.

Em geral, para fazer desaparecer os denominadores termos de uma equação, é suficiente multiplicar cada membro pelo menor denominador; os novos numeradores são exatamente divisíveis pelos denominadores; efetuando as divisões, a equação proposta será transformada em outra em que os termos são inteiros.

Aplicamos esta regra à equação

$$\frac{2x-5}{3(x-1)}+\frac{5}{2}+\frac{5}{x-2}=\frac{5(4-3x)}{4(x-1)}-\frac{4}{15}+\frac{5}{x-2}$$

Subtraindo de cada membro $\frac{+5}{(x-2)}$; os restos serão iguais, e teremos

$$\frac{2x-5}{3(x-1)}+\frac{5}{2}=\frac{5(4-3x)}{4(x-1)}-\frac{4}{15}$$

Com um pouco de atenção, vemos que a menor quantidade divisível pelos denominadores é o menor denominador comum $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot (x-1)$; multiplicando cada membro pelo denominador, teremos

$$\frac{(2x-5)\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot (x-1)}{3(x-1)}+\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot (x-1)}{2}=\frac{5(4-3x)\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5(x-1)}{4(x-1)}-\frac{4\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5(x-1)}{15}$$

Suprimindo os fatores comuns aos dois termos de cada membro de cada fração, resultará:

$$(2x-5).2.2.5 \ + \ 5.2.3.5(x-1) \ = \ 5\,(4-3x).3.5-4.2.2.(x-1)$$

$$(2x-5)\,.20 \ + \ 150(x-1) = \ 75\,.(4-3x) - 16(x-1)$$

$$40x \ -80 \ - \ 100 \ - \ 150x \ -150 \ = \ 300 - \ 225x \ -16x+16$$

$$40x \ +150x+225x \ +16x \ = \ 300+16+80+100+150$$

$$431x = 556$$

$$x = 556:431$$

3.3 ANÁLISES COMPLEMENTARES SOBRE A PRAXEOLOGIA DO SÉCULO XIX

Como se pode notar, a técnica adotada por Reynaud para a resolução de equações do primeiro grau apresenta largo alcance de modo a não ficar restrita apenas as equações dos tipos que permitem ser identificadas como equações do primeiro grau. Os princípios da aritmética são estendidos de modo natural e ganham generalidade com os cálculos algébricos onde operam com as letras como se operam com os números. É esse aspecto que permite enfrentar diferentes equações que, a priori, não se pode afirmar que se trata de uma equação do primeiro grau, como foi demonstrado acima.

Essa técnica, por outro lado, embora habite um ambiente mais refinado quanto ao conhecimento matemático, ratifica o método da inversão descrito anteriormente pelos matemáticos hindus, com a técnica dotada de uma racionalidade que permite um fazer inteligível, com alcance relativamente largo o suficiente para permitir construir organizações praxeológicas de complexidade crescente para o ensino escolar. Talvez por isso, essa técnica ainda se faça presente nos livros escolares atuais do ensino brasileiro.

No entanto, sabemos hoje, que tal tecnologia/técnica não permitirá resolver analiticamente qualquer equação polinomial e tampouco estabelecer uma relação entre o grau da equação e o número de raízes da equação.

Na equação $x^5-32=0$, por exemplo, é possível deduzir, quase imediatamente, após isolar a incógnita e realizar a operação inversa, que $x=2$. Entretanto, tal técnica não encontra, e nem aponta, a existência de outras raízes. A equação $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ tem solução $x=1$, mas não apenas, também são soluções suas $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$ e $x = -3$, porém, estas soluções não podem ser encontradas pelo método analítico da inversão. Essa limitação matemática foi superada com o desenvolvimento teórico da álgebra o longo dos séculos, que teve como uma de suas consequências, o teorema fundamental da álgebra.

4 RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU NA MATEMÁTICA MODERNA

Consideraremos, neste capítulo, a organização didático-matemática relativa às equações do primeiro grau a uma variável que consta no livro de Bóscolo e Castrucci, intitulado *Curso Moderno de Matemática para o Ciclo Ginasial*, destinado ao segundo ano do ciclo ginasial, equivalente ao atual 7º ano do Ensino Fundamental atual. Essa obra é tomada como representativa das obras que tem como base o programa da matemática moderna, que teve lugar na década de 1970 o ponto mais alto de sua implantação nas escolas brasileiras. A representatividade da obra escolhida deve-se ao fato de que contém uma organização baseada no movimento da matemática moderna no Brasil, do qual o autor foi protagonista, como afirma Villela (2009).

As obras baseadas na matemática moderna são tomadas como pertinente a este trabalho, considerando que suas organizações didáticas se colocam como representantes de organizações didáticas construídas. Isto é, não são produto da cultura escolar. Essa característica atende a uma intencionalidade didática que encaminharia a atividade matemática escolar muito próxima da atividade regrada da matemática, permitindo objetivamente identificar e corrigir os erros dos alunos, ao mesmo tempo em que dotava as tarefas escolares de unidade que seria alcançada por meio da inteligibilidade teórica matemática.

4.1 A ORGANIZAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU A UMA VARIÁVEL

O estudo da noção de equação do primeiro grau com uma variável é feito por Bóscolo e Castrucci (1970) ao longo de todo capítulo 8, intitulado *Equações do 1º grau com uma variável*. Iniciando com as igualdades numéricas e suas propriedades. A definição de equação dada pelo autor diz que: As sentenças abertas que exprimem a relação de igualdade entre duas expressões numéricas, são chamadas equações (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p.113).

Em sentido amplo, dessa definição dada pelos autores, podemos entender que as equações são expressões que declaram algo que pode ser classificado como verdadeiro ou falso. Nesse sentido, assumida uma igualdade, busca-se por meio da relação de equivalência, realizar transformações na equação que permitam encontrar uma equação conhecida que leve a afirmar ou negar a equação original.

São apresentadas, então, as propriedades que conferem às igualdades a condição de relação de equivalência, isto é, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, e ainda, Bóscolo e Castrucci (1970) enunciam e exemplificam outras duas propriedades da igualdade que serão importantes, mais adiante, quando da resolução das equações.

PROPRIEDADE ADITIVA DA IGUALDADE**:**

Se a = b, então a + c = b + c, qualquer que seja o número c.

Adicionando um mesmo número aos dois membros de uma igualdade,

$$3 + 5 = 7 + 1$$

$$3 + 5 + 2\,(= 10) \quad \text{e} \quad 7 + 1 + 2\,(= 10)$$

$$3 + 5 + 2 = 7 + 1 + 2$$

PROPRIEDADE MULTIPLICATIVA DA IGUALDADE:

Se a = b, então a . c = b . c, qualquer que seja o número c.

Multiplicando por um mesmo número os dois membros de uma igualdade:

$$5 = 5$$

$$5 \cdot 3\,(= 15) \quad \text{e} \quad 5 \cdot 3\,(= 15)$$

$$5 \cdot 3 = 5 \cdot 3$$

Antes de abordarem propriamente a resolução de equações, os autores optam por definir, primeiramente, as sentenças. Bóscolo e Castrucci (1970) definem as sentenças como expressões que possuem sentido completo e sobre as quais se pode dizer se são verdadeiras ou falsas. Fazem uma abordagem relativamente ampla das expressões e sentenças, isto pode ser verificado no trecho contido na figura 6. Ademais, as *sentenças numéricas* - figura 7 – são caracterizadas pelos autores por se referirem a números e pela possibilidade de serem expressas de modo sucinto e com simbolismo próprio:

Figura 7– Definições e exemplos das expressões e sentenças.

2. EXPRESSÕES E SENTENÇAS

Consideremos as seguintes *expressões* do pensamento:

1. "A Lua";
2. "Sete";
3. "Domingo";
4. "A diferença entre dez e quatro";

1'. "A Lua é o satélite natural da Terra";
2'. "Sete é maior do que cinco";
3'. "Domingo fomos à missa";
4'. "A diferença entre dez e quatro é igual a três".

Como se vê, há uma diferença fundamental entre as quatro primeiras e as quatro últimas expressões; as quatro últimas exprimem um pensamento que tem sentido completo, o que não acontece com as quatro primeiras.

"Expressões do pensamento que têm sentido completo, chamam-se sentenças"*

Consideraremos sòmente *sentenças declarativas* (afirmativas ou negativas), isto é, não examinaremos sentenças interrogativas, imperativas, optativas, etc.

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 116.

É importante notar que, nesse sentido, a incógnita passa assumir o status de variável, ou seja, o valor desconhecido é um valor situado em um campo numérico e, portanto não guarda nenhuma relação com grandezas concretas. De outro modo, a equação é um problema de natureza numérica que independe de problemas sobre contextos concretos.

No entanto, acreditamos que a ênfase dada às sentenças numéricas enquanto forma de estabelecer relações entre números e à possibilidade de tradução entre sentenças escritas em linguagem corrente para a linguagem simbólica, revela uma das importâncias do estudo das equações e suas técnicas de resolução para a resolução de problemas.

De outro modo, a importância das equações se põe por se constituírem em modelos matemáticos úteis, senão indispensáveis, para as praxeologias com matemática presente nas práticas sociais com matemática (CHEVALLARD, 2005) e, em particular, nas atividades da matemática escolar.

4.1.1 Resolução da equação do primeiro grau

Bóscolo e Castrucci (1970) caracterizaram a equação como uma igualdade entre duas expressões numéricas cujo valor lógico não pode ser atribuído sem que se determine o valor da variável. Então, definem que: “Resolver uma equação é determinar o seu Conjunto-Verdade” (p.125).

E acrescentam que, no caso das equações, o *Conjunto-Verdade* também pode ser chamado *Conjunto-Solução (S)* (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p. 125).

Assim, resolver a equação é determinar o valor da sua *raiz*, dentre o conjunto de todos os valores possíveis que a variável pode assumir, que torna verdadeira à igualdade expressa pela equação.

Para verificar se um dado valor da variável é a raiz, Bóscolo e Castrucci (1970) afirmam que: [ ] basta substituir, na equação, a variável pela raiz e simplificar a expressão (numérica) resultante em cada membro, até poder dizer, com segurança, se a sentença é *V* ou *F*.” (BÓSCOLO; CASTRUCCI,1970, p. 126)

Antes de abordar o processo geral de resolução da equação, Bóscolo e Castrucci (1970, p. 127) apresentam as noções de equações equivalentes e de equação elementar como a inteligibilidade desse processo.

Assim, as definições dadas encaminham para os papéis que se deseja atribuir às equações equivalentes e equação elementar no processo de resolução das equações. O extrato de texto a seguir mostra essas noções.

Figura 8: Definição de equações equivalentes e exemplos.

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Duas equações são equivalentes, *num determinado Conjunto-Universo, quando têm o mesmo Conjunto-Solução.*

Assim, por exemplo, as equações:

$$x + 4 = 7\ ,\ U = N \quad e \quad 2 . x = 6\ ,\ U = N$$

são *equivalentes,* pois ambas têm $S = \{3\}$;

$$x - 1 = -9\ ,\ U = Z \quad e \quad \frac{x}{4} = -2,\ U = Z$$

são *equivalentes,* pois ambas têm $S = \{-8\}$.

Observação

Chamaremos de *elementar* tôda equação da forma $x = 2$, $x = -7$, $x = \frac{3}{8}$, $x = -1{,}9$, $x = x$, . . . As equações elementares são *as mais simples* das equações e têm resolução imediata, como já vimos.

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 127.

Os papéis dessas noções nos parecem dizer que a resolução de uma equação se dá por meio de transformações dessa equação às equações mais simples, sucessivamente, até encontrar uma equação elementar. Esta equação permitirá, até por breve observação, afirmar a veracidade ou não da igualdade original. O extrato de texto a seguir mostra essas noções.

Essa nossa compreensão é confirmada quando os autores apresentam a técnica de resolução de uma equação, que denominam *processo geral de resolução* que para eles consiste em:

> A equação, cujo conjunto S pretendemos determinar, é transformada em equações equivalentes cada vez mais simples, até obter-se uma equação elementar, de resolução imediata. Como a equação dada e equação elementar em que foi transformada são equivalentes, o Conjunto-Solução desta última será o Conjunto-Solução da equação proposta (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p. 127).

Este processo é apresentado como um conjunto de “operações” que devem ser realizadas para transformar uma equação dada em outra equação equivalente e mais simples que a anterior. Os autores afirmam ainda que a realização dessas operações pode ser requisitada de forma isolada ou combinadas. As operações são, então, apresentadas e exemplificadas.

4.1.2 Operações de transformação das equações em equações equivalentes

Encontramos aqui, de acordo com Bóscolo e Castrucci (1970) o conjunto de três operações que juntas constituem o processo geral de resolução que podem ser aplicado na resolução da equação do primeiro grau com o objetivo de chegar a uma equação do tipo elementar, obtendo assim, o conjunto-solução da equação.

A primeira é a que possibilita a *Simplificação de cada uma das expressões que constituem os dois membros da equação.* Essa simplificação era obtida realizando-se as operações indicadas entre os termos semelhantes em cada membro, como também era realizada a aplicação das propriedades como regras explícitas para guiar e justificar cada passagem da resolução. O extrato do texto ilustra a intenção aqui mencionada:

Figura 9 – Primeiro tipo de transformação utilizado para obter equações equivalentes

I. *Simplificação de cada uma das expressões que constituem os dois membros da equação.*

Vejamos alguns exemplos em que cada equação equivalente obtida é acompanhada do nome da *operação* ou da *propriedade* que permitiu escrevê-la a partir da equação anterior.

Resolver:

$3x - 2x = -9 + 4, U = Z$

$(3 - 2) . x = -9 + 4$ — distributiva da multiplicação —

$1 . x = -5$ — adição —

$x = -5$ — el. neutro da multiplicação —

$S = \{-5\}$

Verificação:

$3 . (-5) - 2 . (-5) = -9 + 4$

$-15 + 10 = -9 + 4$

$-5 = -5$ (V)

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 128.

Notemos que, essa técnica de realizar as transformações das expressões, objetiva a redução dos termos semelhantes tanto no primeiro membro da equação quanto no segundo. Os termos na variável x, do ponto de vista do fazer inteligível matemático, exigem que se use a propriedade distributiva, como regra a ser seguida, para serem reduzidos. No segundo membro é realizada a operação indicada. Após estas operações obtém-se a equação elementar $x = -5$ de onde se tem o valor da raiz.

Cada transformação feita na equação é justificada pelo uso das propriedades da adição e da multiplicação no conjunto $\mathbb{Q}$, como regras a serem seguidas, de modo a garantir a igualdade. Essa propriedade foram objetos de estudados no capítulo anterior ao das equações.

Então, procede-se a verificação da solução substituindo o valor encontrado na resolução da equação, que leva a ratificação da verdade da igualdade, e, portanto, do valor -5 como raiz da equação.

A segunda operação de transformação em equação equivalente é apresentada com o uso da propriedade aditiva da igualdade, mostrada no início do capítulo pelos autores, com a diferença de que agora incluem exemplos do seu modo de uso na resolução dessa equação. Assim, esta operação é descrita como segue:

Figura 10 – Segundo tipo de transformação utilizada para obter equações equivalentes

II. ▪ *Aplicação oportuna da Propriedade Aditiva da Igualdade.*

Consiste em *adicionar* aos dois membros da equação o *oposto* de um de seus têrmos e simplificar depois a equação equivalente obtida.

Resolver:

$$x + 7 = -\frac{1}{3}, \qquad U = Q$$

$$(x + 7) - 7 = -\frac{1}{3} - 7 \qquad \text{— aditiva da igualdade —}$$

$$x + (+7 - 7) = -\frac{1}{3} - 7 \qquad \text{— associativa da adição —}$$

$$x + 0 = -\frac{22}{3} \qquad \text{— adição —}$$

$$x = -\frac{22}{3} \qquad \text{— elemento neutro da adição —}$$

$$\therefore\ S = \left\{ -\frac{22}{3} \right\}$$

Verificação:

$$-\frac{22}{3} + 7 = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \quad (V)$$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p.129.

Os autores destacam que a recíproca dessa propriedade pode ser entendida como uma técnica familiar na escola como “lei do cancelamento”, mas que surge como consequência da aplicação dessa propriedade, que é assim descrita: “Cancelando termos iguais, um em cada membro, uma dada equação transforma-se em outra equivalente” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p. 133). Na figura 10, temos dois exemplos de como isto funciona na prática, ou seja, como cancelar termos da equação, durante a resolução de uma equação:

Figura 11 – Exemplo de equações equivalentes obtidas pelo cancelamento de termos.

Assim, são equivalentes as equações:

$$6x + 1 - \cancel{4} = 3x - \cancel{4} \quad \text{e} \quad 6x + 1 = 3x \;;$$

$$9x - \frac{2}{3} + \cancel{8} = 5 + \cancel{8} \quad \text{e} \quad 9x - \frac{2}{3} = 5$$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 131.

A terceira operação apresentada é a propriedade multiplicativa da igualdade, mas agora atendendo ao propósito da resolução de equações. Na figura, abaixo, descreve-se sua aplicação.

Figura 12 – Terceiro tipo de transformação utilizada para obter equações equivalentes.

III. *Aplicação oportuna da Propriedade Multiplicativa da Igualdade.*

Consiste em *multiplicar* os dois membros da equação por um *número diferente de zero* ou que *não se anule* para particulares valores da variável (se estiver representado por um numeral literal).

De modo geral, o número em questão é o *recíproco* de um dos fatôres que figuram na equação.

Resolver:

$$4x = -7 \;,\; U = Q$$

$$\frac{1}{4} \cdot (4x) = \frac{1}{4} \cdot (-7) \qquad \text{— multiplicativa da igualdade —}$$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 4\right) \cdot x = \frac{1}{4} \cdot (-7) \qquad \text{— associativa da multiplicação —}$$

$$1 \cdot x = -\frac{7}{4} \qquad \text{— multiplicação —}$$

$$x = -\frac{7}{4} \qquad \text{— el. neutro da multiplicação —}$$

$$\therefore\; S = \left\{ -\frac{7}{4} \right\}$$

Verificação:

$$4 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = -7$$

$$-7 = 7 \quad (V)$$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 131.

A respeito dessa propriedade, os autores fazem dois destaques: o primeiro é sobre as equações equivalentes obtidas quando se multiplicam ambos os membros por – 1: o produto em questão, de modo específico, obtém-se uma equação com todos os termos com o sinal trocado, os termos da nova equação são os simétricos dos termos da equação dada.

Figura 13 – Consequência do uso da propriedade multiplicativa da igualdade, quando o fator que multiplica a equação é – 1.

Assim, dada a equação:

$$5x - 3 = \frac{2}{5} - 7x + 1$$

multiplicando-se os dois membros por -1 resulta a equação equivalente:

$$-5x + 3 = -\frac{2}{5} + 7x - 1$$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 1

A segunda transformação decorre da propriedade simétrica da igualdade, pela qual se obtém uma equação equivalente trocando-se o primeiro membro com o segundo.

4.1.3 Regras práticas para resolver a equação do primeiro grau

A técnica geral empregada em seus passos detalhados, acompanhados de suas justificativas explicitando as propriedades, como regras a serem seguidas, pode tornar o processo de resolução longo e até cansativo. Isso é referido por Bóscolo e Castrucci (1970) e foi visto pelos exemplos resolvidos ao longo do capítulo.

Entretanto, as regras a seguir, deduzidas como regras práticas, são apresentadas alternativamente para resolver uma equação de modo mais rápido.

A **primeira regra** diz o seguinte: “Uma dada equação transforma-se numa equação equivalente, quando se transporta um seu têrmo de um membro para outro, com sinal trocado” (Bóscolo, Castrucci, p.135).

Isto quer dizer que tendo aplicado a propriedade aditiva de modo oportuno, elimina-se um termo em um dos membros da equação, e seu oposto aparece no outro membro.

Figura 14 – Consequência da propriedade aditiva da igualdade, exemplos.

Paremos aqui e observemos as equações equivalentes:

$$x + 3 = 5 \quad \text{e} \quad x = 5 - 3$$

Tudo se passou como se o têrmo "+ 3" tivesse sido *transportado* do 1.º membro para o 2.º, com a *troca do sinal* "+" pelo sinal "—".

O mesmo acontece com o têrmo "— x" na equação:

$$2x = 9 - x$$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 130.

A segunda regra é anunciada segundo a regra de redução de frações a um mesmo denominador. Isso deve se dar, em nossa compreensão, pela suposta familiaridade do aluno com essa prática, supostamente já incorporada por eles. O enunciado desta regra está transcrito a seguir:

> Uma dada equação com denominadores transforma-se numa equação equivalente, quando os denominadores são eliminados depois de dividir-se o m.m.c. dos denominadores pelo denominador de cada termo e multiplicar-se o quociente obtido pelo respectivo numerador. (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p. 135).

Figura 155 – Consequência da propriedade multiplicativa da igualdade

Observemos as equações equivalentes:

$$\frac{1}{2} \cdot x = -\frac{3}{7} \quad \text{e} \quad 7x = -6$$

Tudo se passou como se os denominadores que figuram na equação tivessem sido *eliminados*, *dividindo-se*, para cada têrmo, o m.m.c., *14*, pelo denominador e *multiplicando-se* o quociente obtido pelo numerador.

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 137.

É importante destacar que os denominadores podem ser eliminados aplicando a propriedade multiplicativa da igualdade, usando-se como fator multiplicador de ambos os lados da equação o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, ou, de modo mais direto, pelo produto dos denominadores.

Uma vez anunciada a regras de redução de uma equação à uma equação elementar por operações que mantém a equivalência inicial, ou seja, a igualdade, os autores institucionalizam a técnica e as formas das equações do primeiro grau.

4.2 A RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA VARIÁVEL DA FORMA $AX + B = C$

Bóscolo e Castrucci (1970) afirmam que as equações resolvidas anteriormente podem ser transformadas em equações equivalentes da forma:

$$ax + b = c$$

em que a e b são números determinados, chamados *coeficientes* da equação, e a variável x com expoente iguala 1. Por exemplo, na equação $2x + 7 = b$, 2 e 7 são os coeficientes de a e b, respectivamente.

Assim, levando em consideração todas as propriedades e operações anteriormente mencionadas, definem que as equações que podem ser escritas na forma ax + b = o são chamadas *equações do primeiro grau com uma variável*.

Dito isto, Bóscolo e Castrucci (1970, p.139) apresentam a ***regra prática geral*** para resolver as equações do primeiro grau:

1. Eliminam-se *os parênteses*;
2. Eliminam-se *os denominadores;*
3. Separam-se os termos, deixando num dos membros os termos que contêm a variável e somente eles;
4. Dividem-se (caso ainda não se tenha obtido uma equação elementar) ambos os membros pelo coeficiente da variável, se tal coeficiente não for zero, obtendo-se assim uma equação elementar equivalente, de resolução imediata.

Além destas regras, os autores destacam que na resolução de equações, a redução de termos, que até então era realizada usando propriedade distributiva como regra a ser seguida, deve passar a ser feita diretamente. Assim, a propriedade distributiva é a tecnologia utilizada para justificar e explicar a *técnica* pela qual "conserva-se a variável e adicionam-se os coeficientes" (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p.140).

Isto quer dizer que, na prática, a redução de termos funciona daqui em diante, como no exemplo da figura 16:

Figura 16 – Exemplo do uso da regra para reduzir termos da variável.

Exemplos:

$2x - 7x + 11x = 6x$, em que $6 = 2 - 7 + 11$;

$-12a + 9a - a = -4a$, em que $-4 = -12 + 9 - 1$; ...

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p.140.

O último tópico do capítulo de equações é reservado ao estudo qualitativo das equações, onde são abordadas as equações sem solução e as identidades.

4.3 EQUAÇÕES SEM SOLUÇÃO E IDENTIDADES

Os autores descrevem uma equação sem solução como aquelas "[ ] que não são verdadeiras para nenhum valor da variável no Conjunto-Universo escolhido, isto é, (...), $S = \emptyset$" (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p.146).

Essa afirmação está em acordo com a tecnologia da definição de uma equação como sentença aberta definida sobre um dado campo numérico.

Assim, os casos de equações sem solução são divididos em dois grupos pelos autores:

O primeiro caso é quando a solução encontrada resolvendo-se a equação, não pertence ao conjunto universo escolhido. Como no exemplo dado a seguir:

Figura 17 – Exemplo de equação cuja solução não pertence ao Conjunto-Universo em questão.

Exemplo.

Resolver: $7x + 3 = 2x - 5$, $U = Z$

Temos: $7x - 2x = -5 - 3$

$5x = -8$

$x = -\frac{8}{5}$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p. 147.

Quando se observa o conjunto-universo no qual o exemplo está sendo resolvido, no caso o $\mathbb{Z}$, verifica-se que o valor encontrado não pode ser admitido como solução. Portanto, embora exista um valor que verifique a igualdade, existe uma restrição causada pela escolha do conjunto-universo, no conjunto dos racionais a equação teria solução. É importante notar, que na resolução de problemas, o conjunto-universo é dado segundo o contexto da situação, a equação que traduz o problema pode ser resolvida, porém sua solução pode não ser válida para o problema.

Desse modo, para realizar uma tarefa do tipo resolver uma equação do primeiro grau, por exemplo, é imprescindível, a indicação do conjunto-universo a que pertence sua solução.

O segundo caso é quando a equação elementar apresentar coeficiente da variável nulo, como abaixo:

Figura 18 – Exemplo resolução que leva a uma equação elementar com o coeficiente da variável nula.

Resolver: $5x - 8 = 3x + 12 + 2x \ , \ U = Q$

Temos: $5x - 3x - 2x = + 12 + 8$

$0 \ . \ x = 20$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p.147

As equações que tem equação elementar desse tipo,não possuem solução, pois “não existe no conjunto $\mathbb{Q}$, supondo que este é o conjunto-universo da variável, nenhum valor de x para o qual a equação $0 \cdot x = 20$ e, portanto, para a equação dada, $5x - 8 = 3x + 12 + 2x$, seja verdadeira.”

Pode acontecer de a equação elementar apresentar coeficiente da variável nulo e ter solução, nesse caso, mais de uma solução. Isso acontece quando a igualdade representa uma identidade, isto significa que qualquer que seja o valor da variável, a sentença será verdadeira.

Figura 19 – Exemplo de resolução de uma equação que representa uma identidade.

Exemplo.

Resolver: $2x - 1 = 2\ (x + 3) - 7 \ , \ U = Z$

Temos: $2x - 1 = 2x + 6 - 7$

$2x - 2x = + 6 - 7 + 1$

$0 \ . \ x = 0$

Fonte: BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1970, p.148.

Tendo em vista os existem duas possibilidades para as equações elementares com coeficientes da variável nulos, os autores as destacam.

4.3.1 Coeficiente Zero

Os autores destacam as equações que apresentam coeficientes da variável nulos para institucionalizar que:

> 1º caso: o 2º membro também é igual a zero ($0 \cdot x = 0$). Neste caso, a equação dada é uma identidade.
> 2º caso: o 2º membro é diferente de zero ($0 \cdot x = 20$, p. ex). Agora, a equação dada não tem solução. (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p. 149).

Os autores afirmam que de modo geral uma equação do primeiro grau apresenta uma única raiz, entretanto, podem existir equações sem solução. Já as identidades possuem tantas raízes quantos forem os elementos do seu conjunto-universo.

4.4 ANÁLISES COMPLEMENTARES SOBRE A PRAXEOLOGIA DA MATEMÁTICA MODERNA

Nessa organização, posta pela matemática moderna, a técnica de resolução de uma equação do primeiro grau encontra-se bem definida. Há regras explícitas a serem seguidas. Estas regras são determinadas pelas propriedades do campo numérico em que está definida a equação.

Para um dado campo numérico **A**, as propriedades operatórias de adição e multiplicação que podem ser verificadas são:

a) **Fechamento**:

A soma $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \in \mathbf{A}$ ou o produto $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in \mathbf{A}$

b) **Associativa**:

Para todo a, b, c ϵ **A,**

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \text{ ou } (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

c) **Comutativa:** Para todo a, b ϵ **A**

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ ou } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

d) **Elemento Neutro:**

Existe um elemento $\mathbf{0} \in \mathbf{A}$ que é neutro em relação a adição, ou seja, de tal modo que $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$.

ou

Existe um elemento unidade $\mathbf{1} \in \mathbf{A}$ que é neutro em relação a multiplicação, ou seja, de tal modo que $\mathbf{1.a} = \mathbf{a}$ para todo $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$.

e) Elemento Inverso:

Para todo $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, existe um único $(-\,\mathbf{a}) \in \mathbf{A}$, chamado oposto, que neutraliza esse elemento a, ou seja, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + (\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Ou

Para todo $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, existe um único $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} \in \mathbf{A}$, chamado recíproco, que neutraliza esse elemento a, ou seja, $\boldsymbol{a} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$.

f) Distributiva:

Para todo a, b, c є **A,** $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$

Assim, as propriedades que são satisfeitas em relação às operações de adição e ou multiplicação, para o campo numérico em que está definida a equação, funcionam como regras a serem seguidas nas operações com os termos da equação.

Além das regras decorrentes das propriedades acima citadas, duas outras propriedades numéricas se tornam regras indispensáveis para a resolução, do ponto de vista tecnológico, embora não sejam do ponto de vista da práxis, pois são intuitivas.

g) Propriedade aditiva da igualdade

Se a = b, então $\mathrm{a} + \mathrm{c} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$*, qualquer que seja o número c.*

h) Propriedade multiplicativa da igualdade:

Se a = b, então $\mathrm{a} \cdot \mathrm{c} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{c}$*, qualquer que seja o número c.*

Para os números racionais e para is números reais são satisfeitas todas as propriedades aqui citadas, de modo que se pode enfrentar qualquer equação tendo essas propriedades como regras. Em geral, as equações numéricas são resolvidas como se estivessem definidas no conjunto dos números racionais ou reais.

O conhecimento das propriedades como regras práticas são indispensáveis para a resolução da equação. Isto assegura o objetivo da técnica que é encontrar um caminho de equações equivalentes que permita encontrar a equação equivalente mais simples chamada de equação elementar.

4.4.1 A tarefa

Na organização presente a tarefa é resolver a equação do primeiro grau a uma variável, de acordo com as regras do conjunto dos números racionais.

4.4.2 A técnica

A técnica para a referida tarefa, em termos práticos foi assim anunciada por Bóscolo e Castrucci (1970, p.139):

> 1 – Eliminam-se *os parênteses*;
>
> 2 – Eliminam-se *os denominadores;*
>
> 3 – Separam-se os termos, deixando num dos membros os termos que contêm a variável e somente eles;
>
> 4 – Dividem-se (caso ainda não se tenha obtido uma equação elementar) ambos os membros pelo coeficiente da variável, se tal coeficiente não for zero, obtendo-se assim uma equação elementar equivalente, de resolução imediata.

Esse procedimento prático encerra a técnica de resolução da equação, mas não determina a priori que regra ou sequência de regras deve ser usada. Tudo funciona como um jogo cujo objetivo é encontrar a equação elementar usando as regras. Assim, uma pessoa pode chegar a uma equação elementar em números diferentes de passos, dependendo da sequência de regras que usa.

4.4.3 Aspectos tecnológico-teóricos

A técnica em sua totalidade é sustentada pela tecnologia das propriedades das operações numéricas sob a compreensão das estruturas algébricas, como as estruturas de Anéis e Corpos, sob a luz da teoria da Álgebra Moderna. Essa teoria somente chega às universidades como objeto de ensino nos cursos de formações de professores de matemática, no Brasil, nos meados do século XX.

Este é um aspecto positivo para o ensino de uma organização matemática baseada nessa tecnologia, pois aponta objetivamente como se faz e porque se faz tal procedimento. Isso permite encontrar possíveis erros cometidos e encaminhar uma terapêutica para eliminar esse tipo de erro. Mas, é bom destacar, nem todo erro ou insucesso do aluno estará na aplicação de uma regra.

Entretanto, pela suposta complexidade da teoria das estruturas algébricas, da resolução de uma equação como jogo e das propriedades que, por naturalização das práticas, pareciam óbvias e desnecessárias, a eliminação dessas organizações tenha ocorrido no ensino atual. Mas, é preciso considerar que ignorar as regras, como tais, torna a resolução de equações como uma prática que se aprende na prática com a prática, vendo e fazendo o que viu fazer. Isso leva à pedagogia de mimetização em lugar de levar à pedagogia do questionamento. Para que faço e porque faço assim tal resolução.

Mas, podemos dizer que a pedagogia de mimetização venceu, pois o que observamos, nas organizações atuais da resolução de equações do primeiro grau, são apenas traços da tecnologia que subsidiava a organização da matemática moderna, em geral, por meio de citações de propriedades, como objetos paramatemáticos, ou seja, são até usados, mas não se constituem em objetos de ensino.

5 ORGANIZAÇÃO DE LIVRO DIDÁTICO ATUAL

Aqui, consideramos a organização didático-matemática sobre as equações do primeiro grau a uma variável que se encontra no livro de Dante (2012), coleção Teláris, aprovado pelo PNLD para o 7º ano, como representativa das praxeologias matemáticas sobre esse objeto de ensino, que vive nas escolas brasileiras e, em particular, nas escolas públicas do Estado. A coleção em questão foi a quarta mais distribuída no Brasil em 2017, de acordo com dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE. Nosso objetivo aqui é por em evidência os elementos técnicos e ou tecnológicos das praxeologias tomando como referência o modelo praxeológico de Chevallard (1999) em que se destacam os seguintes elementos: a tarefa; a técnica; a tecnologia; e teoria.

É importante lembrar que a diferença entre técnica e tecnologia é funcional, de modo que uma técnica de uma praxeologia pode assumir o papel de tecnologia em outra praxiologia e, não menos importante, que a tecnologia esteja integrada na técnica dando o caráter auto-tecnológico à praxeologia.

Além disso, de modo geral, a tecnologia e teoria não necessariamente se fazem presente explicitamente na praxeologia e tampouco que se pode afirmar que elas existam como objetos matemáticos, de modo que todo elemento anunciado como técnico/tecnológico/teórico e não explicitado como tais decorre de interpretação analítica e, portanto não são aspectos descritivos dessa praxeologia.

5.1 A ORGANIZAÇÃO SOBRE A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU A UMA VARIÁVEL

No livro de Dante (2012), a noção de equação é tratada no quarto capítulo, intitulado *Equações do 1º grau com uma incógnita*. A noção de equação é introduzida a partir de sentenças matemáticas que são apresentadas por meio de exemplos, mais precisamente, como formulações de dois problemas aritméticos tomados de forma generalizada.

Seguindo a ideia de generalizar situações da aritmética o autor busca mostrar as expressões algébricas como tradução da “linguagem usual” para (um suposta) linguagem matemática. Isto está evidenciado no seguinte quadro que mostra situações que podem ser representadas por *expressões que contém números e letras* que o autor denomina de *expressões algébricas*.

Figura 20 – Quadro com exemplos de expressões na linguagem usual e suas correspondentes em linguagem algébrica.

Observe, nos exemplos da tabela abaixo, como passamos da linguagem usual para uma expressão algébrica:

Linguagem usual	Expressão algébrica
O dobro de um número	$2x$
O triplo de um número mais cinco	$3n + 5$
O dobro de um número mais quatro	$2y + 4$
Um número mais cinco	$w + 5$
O quádruplo de um número menos um	$4z - 1$
O quadrado de um número mais um	$y^2 + 1$

Fonte: DANTE, 2012, p. 118.

Na sequência, refere sem definir, expressões equivalentes por meio de exemplos, em que é assumido, sem afirmar, que os alunos já sabem operar coma as expressões, como mostra o seguinte extrato de texto da figura 20.

Figura 21 – Explicação sobre equivalência entre expressões.

Genericamente, podemos dizer que 3 vezes um número mais 4 vezes esse número $(3x + 4x)$ é o mesmo que 7 vezes o número $(7x)$.

Dizemos que as expressões algébricas $3x + 4x$ e $7x$ são *equivalentes* e podemos, sempre que quisermos, substituir uma delas pela outra.

Fonte: DANTE, 2012, p. 119.

Aqui o autor poderia recorrer a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais para assegurar que $3x + 4x = (3 + 4)\,x = 7x$, mas prefere a visão minimalista da equivalência como igualdade naturalizada, tal como, 3 bananas + 4 bananas é igual a 7 bananas.

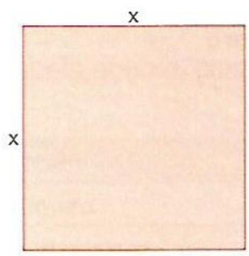
A noção de expressões algébricas supõe que elas podem ser escritas de modos diferentes, mas duas expressões algébricas somente podem ser ditas equivalentes se assumem numericamente um mesmo conjunto de valores. Isto supões, nesse contexto de ensino, que as expressões algébricas são expressões que envolvem operações matemáticas com números e letras e não expressões que contém números e letras, como afirma o autor.

O exposto pelo autor, enquanto preliminar, encaminha uma aprendizagem da matemática como um saber prático, que se aprende sem ensino, pois a intenção não se faz presente, mas por meio de imitação de práticas com objetos que são apresentados por “mostração”, por exemplos. Aprende-se do mesmo modo que se aprende uma prática ordinária do mundo objetivo, ou seja, em que se vai conhecendo por vivências em situações práticas.

A noção de expressão algébrica a que estamos referindo é evidenciada pelo autor quando usa a situação a seguir para exemplificar o valor numérico de uma expressão algébrica por meio de uma noção da geometria. Nela, o autor destaca as operações entre letras e números para operar em seguida a partir da atribuição de um valor numérico para a letra.

Figura 22 – Exemplo de situação ligada à qual se pode relacionar uma expressão algébrica.

O perímetro do quadrado abaixo é dado por $x + x + x + x$ ou $4x$.



Se $x = 2$ cm, o perímetro é $4 \cdot 2 = 8$ cm.

Se $x = 3{,}5$ cm, o perímetro é $4 \cdot 3{,}5 = 14$ cm.

Dizemos que o *valor numérico* da expressão algébrica $4x$ é igual a 8 quando $x = 2$. E é 14 quando $x = 3{,}5$.

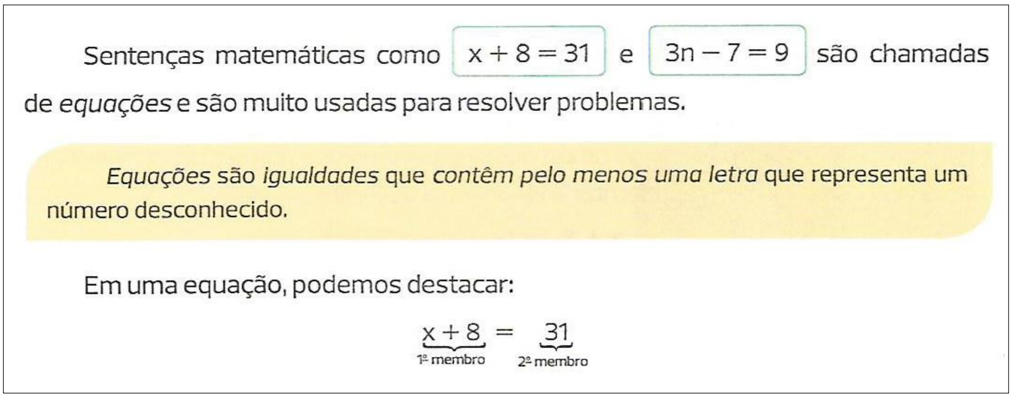
Fonte: DANTE, 2012, p. 120.

A noção de expressão algébrica e de expressões algébricas equivalentes são tomadas assim como noções naturalizadas, sem questionamentos, e, portanto, apresentadas aos alunos como objetos que podem vir a serem manipuladas em práticas ainda a serem apresentadas.

A noção de resolução de equações é antecedida por um item denominado *procura-se elemento desconhecido* que aborda charadas em que se precisa descobrir ou adivinhar as respostas. A intenção é mostrar a necessidade do uso das letras para representar números desconhecidos e isso nos leva ao próximo item onde são introduzidos os termos *equação, incógnita e solução ou raiz*.

O autor define equação da seguinte maneira:

Figura 23– Definição de equações.



Sentenças matemáticas como $\boxed{x + 8 = 31}$ e $\boxed{3n - 7 = 9}$ são chamadas de *equações* e são muito usadas para resolver problemas.

Equações são *igualdades* que *contêm pelo menos uma letra* que representa um número desconhecido.

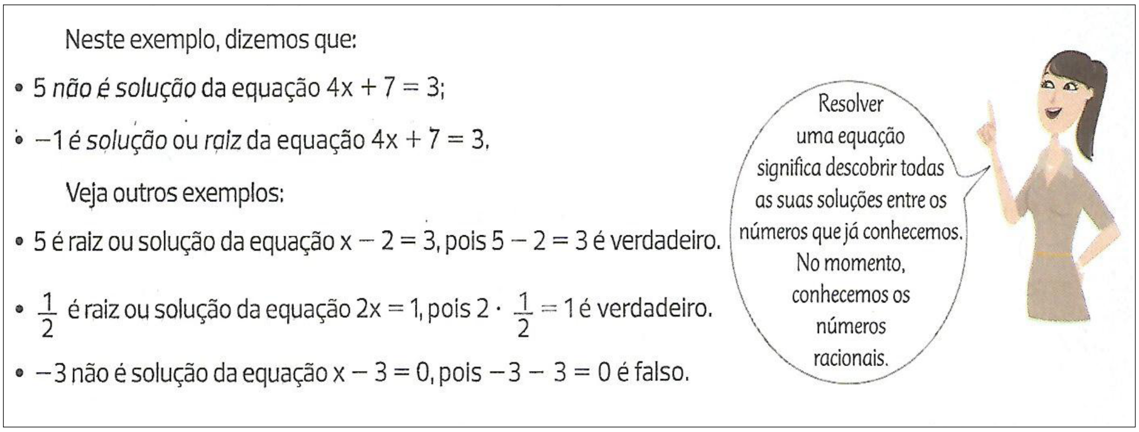
Em uma equação, podemos destacar:

$$\underbrace{x + 8}_{1^{\underline{o}}\ \text{membro}} = \underbrace{31}_{2^{\underline{o}}\ \text{membro}}$$

Fonte: DANTE, 2012, p. 124.

E apresenta a incógnita como aquilo *que é desconhecido, o que se procura saber.* A solução ou raiz é o valor encontrado para a incógnita após sua resolução.

Figura 24 – Definições da raiz ou solução da equação, e da sua resolução.



Neste exemplo, dizemos que:

- 5 *não é solução* da equação $4x + 7 = 3$;
- -1 é *solução* ou *raiz* da equação $4x + 7 = 3$.

Veja outros exemplos:

- 5 é raiz ou solução da equação $x - 2 = 3$, pois $5 - 2 = 3$ é verdadeiro.
- $\frac{1}{2}$ é raiz ou solução da equação $2x = 1$, pois $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ é verdadeiro.
- -3 não é solução da equação $x - 3 = 0$, pois $-3 - 3 = 0$ é falso.

Figura: DANTE, 2012, p.125

Uma vez apresentadas as noções generalistas o autor encaminha as técnicas de solução das equações do primeiro grau. Em particular, identificamos as que seguem.

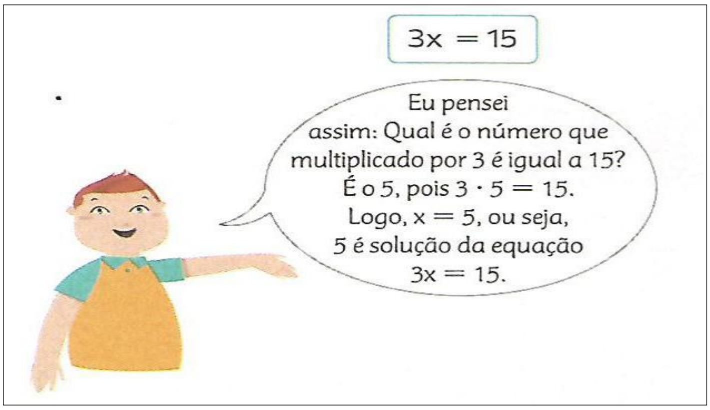
5.2 AS TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Ao longo do capítulo em que trata das equações, Dante (2012) apresenta quatro técnicas diferentes para a resolução da equação do primeiro grau com uma incógnita. Cada uma dessas técnicas será analisadas a seguir.

5.2.1 A Técnica da Resolução Mental

A primeira técnica de solução apresentada é a do cálculo mental de equações. Essa técnica exige experiência aritmética com boa memória sobre a tabuada de operações e, portanto, uma técnica limitada as equações mais simples em que se permita chegar ao valor da incógnita realizando operações indicadas pelo cálculo mental. A figura abaixo mostra isso:

Figura 25 – Exemplo da técnica do cálculo mental para resolver uma equação.



Fonte: DANTE, 2012, p. 122.

Essa técnica é limitada também por não dispor de dispositivos que auxiliem a memória para enfrentar situações mais complexas, mesmo para os que contam com boa experiência aritmética. O uso de registros algébricos e as operações entre eles como se fossem números constituem o dispositivo auxiliar que torna isso possível.

5.2.2 A Técnica das Operações Inversas

Antes de apresentar a técnica o autor busca definir uma equação do primeiro grau a partir dos registros algébricos do seguinte modo.

Figura 26 – Definição de equação do primeiro grau com incógnita.

Uma equação é do 1º grau com uma incógnita (**x**) quando pode ser escrita na forma $ax = b$, com $a \neq 0$.

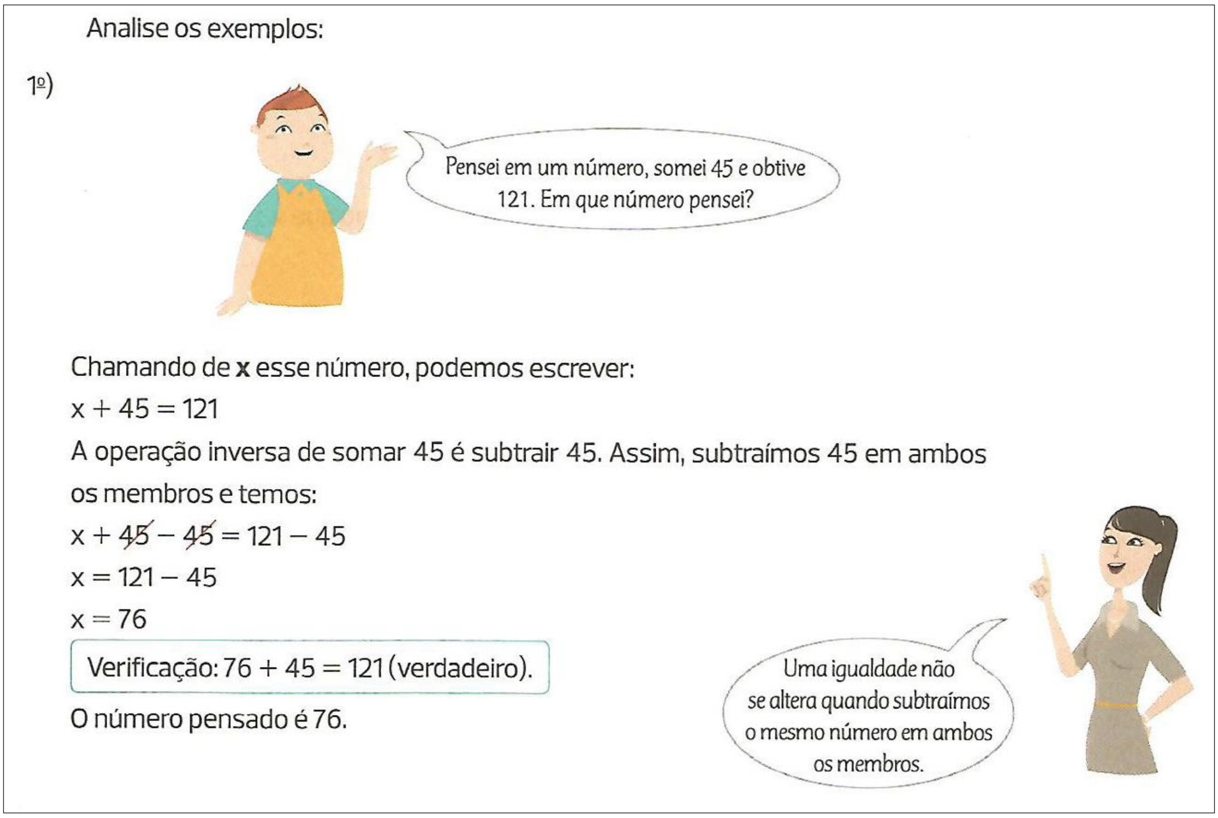
Fonte: DANTE, 2012, p. 127

As equações que podem ser reduzidas, de algum modo reconhecido como válido, para uma equação desse tipo é classificada então como uma equação do primeiro grau.

Um modo naturalizado da aritmética e usado no ensino e aprendizagem da tabuada, relacionando as operações de subtração com a adição e da divisão com a multiplicação, como operações são inversas da outra, e que é estendida para radiciação como inversa da potenciação, etc., é tradicionalmente assumido, tendo em conta a equação ser vista como um problema da aritmética generalizada.

O autor não recompõe essas noções. Assume a noção de operação inversa como naturalizada e a relaciona com um suposto fazer matemático formal que permite levar uma equação a forma reduzida, mas nenhuma regra é explicitada. O modo de aprender é seguir fazendo o que viu o professor fazer. A figura abaixo ilustra o que estamos afirmando.

Figura 27 – Exemplo da resolução de uma equação por inversão das operações.


Analise os exemplos:

1º)

Chamando de **x** esse número, podemos escrever:

$x + 45 = 121$

A operação inversa de somar 45 é subtrair 45. Assim, subtraímos 45 em ambos os membros e temos:

$x + \cancel{45} - \cancel{45} = 121 - 45$

$x = 121 - 45$

$x = 76$

$\boxed{\text{Verificação: } 76 + 45 = 121 \text{ (verdadeiro).}}$

O número pensado é 76.

Fonte: DANTE, 2012, p. 127

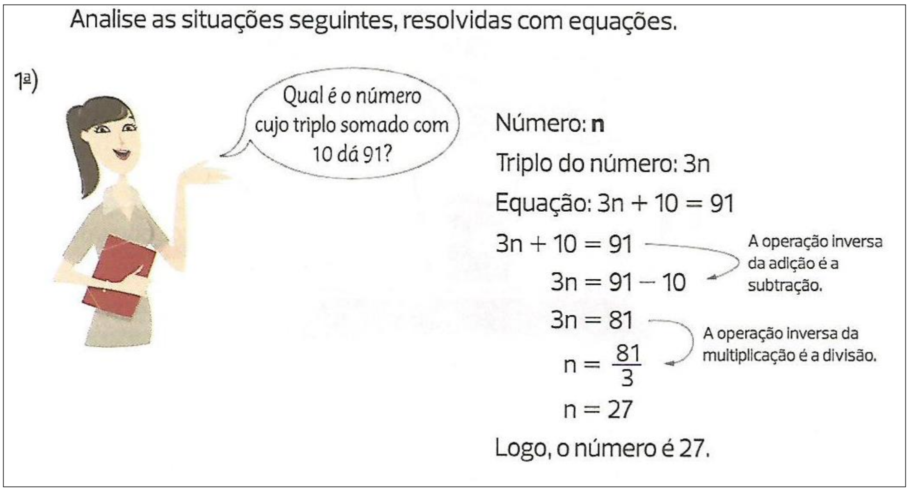
Seria necessário destacar com toda ênfase possível, como uma regra escrita, que a técnica da inversão de operações é empregada com a intenção de levar uma equação à forma reduzida. Para isso é preciso isolar o x em um lado da igualdade, que culturalmente escolhemos o lado esquerdo, e passar os termos numéricos para o lado direito.

No caso específico da figura 26, passa-se o 45 para o lado direito da igualdade com a operação inversa com ele, isto é, subtraindo. Disto resulta $x = 121 - 45$. Fazendo os cálculos, resulta que $x = 76$. Esse valor é a solução da equação.

O autor prefere usar o procedimento que combina a inversão da operação como uma regra que se aplica às igualdades, pela qual, como se lê na figura, é possível adicionar/subtrair um número qualquer a ambos os membros da equação sem alterar a igualdade.

Mas, em *outros exemplos de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita com o uso das operações inversas*, a técnica apresentada ignora o formal e se apresenta como nós a compreendemos. O extrato de texto da figura 27 exemplifica o que afirmamos.

Figura 28 – Resolução de um exemplo.


Analise as situações seguintes, resolvidas com equações.

1ª)

Número: **n**

Triplo do número: 3n

Equação: $3n + 10 = 91$

$3n + 10 = 91$

$3n = 91 - 10$

A operação inversa da adição é a subtração.

$3n = 81$

$n = \frac{81}{3}$

A operação inversa da multiplicação é a divisão.

$n = 27$

Logo, o número é 27.

Fonte: DANTE, 2012, p. 129.

Sob essa forma, a resolução ficou mais econômica, com menos operações, como se fossem omitidas as operações intermediárias e restando apenas o efeito causado por essas operações em ambos os membros da equação.

O autor não mostra esse modo de fazer como um trabalho sobre a técnica com o propósito de otimizar o procedimento pela redução dos cálculos, e, consequentemente a redução dos passos necessários para chegar a solução.

Embora apresente fragmentos formais de elementos tecnológicos que permitiriam o trabalho sobre a técnica, o modo naturalizado em que esses elementos são apresentados não lhes permitem usá-los como regras para realizar as tarefas que podem tornar claro e inteligível a pratica de resolução da equação e a otimização desse processo para o encontro de uma regra prática.

Essa escolha de usar elementos tradicionais como tecnológicos continua no texto como a técnica seguir.

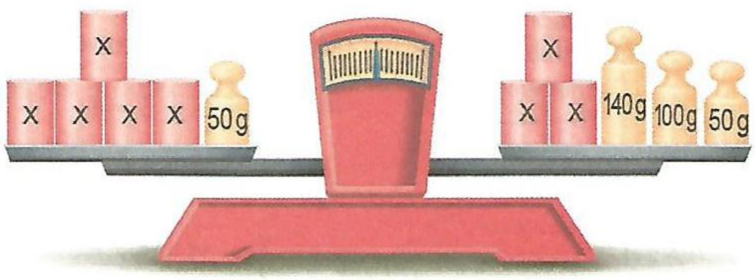
5.2.3 A Técnica do Equilíbrio

Essa técnica é baseada na ideia de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Uma equação, segundo o autor, pode ser vista como uma balança de dois pratos em equilíbrio. O equilíbrio da balança funciona como metáfora para a igualdade da equação e, assim, as operações realizadas em ambos os membros de uma equação mantendo a igualdade, são comparadas às ações sobre os pratos da balança para manter o equilíbrio.

O extrato do texto mostra a figura de uma balança de dois pratos e a equação que lhe corresponde.

Figura 29 – Equação que traduz uma situação desenhada com uma balança de dois pratos, em equilíbrio.

Observe abaixo a balança de pratos equilibrada e considere todas as latinhas com o mesmo "peso", que vamos representar por **x**. Qual é o "peso" de cada latinha, ou seja, qual é o valor de **x**?

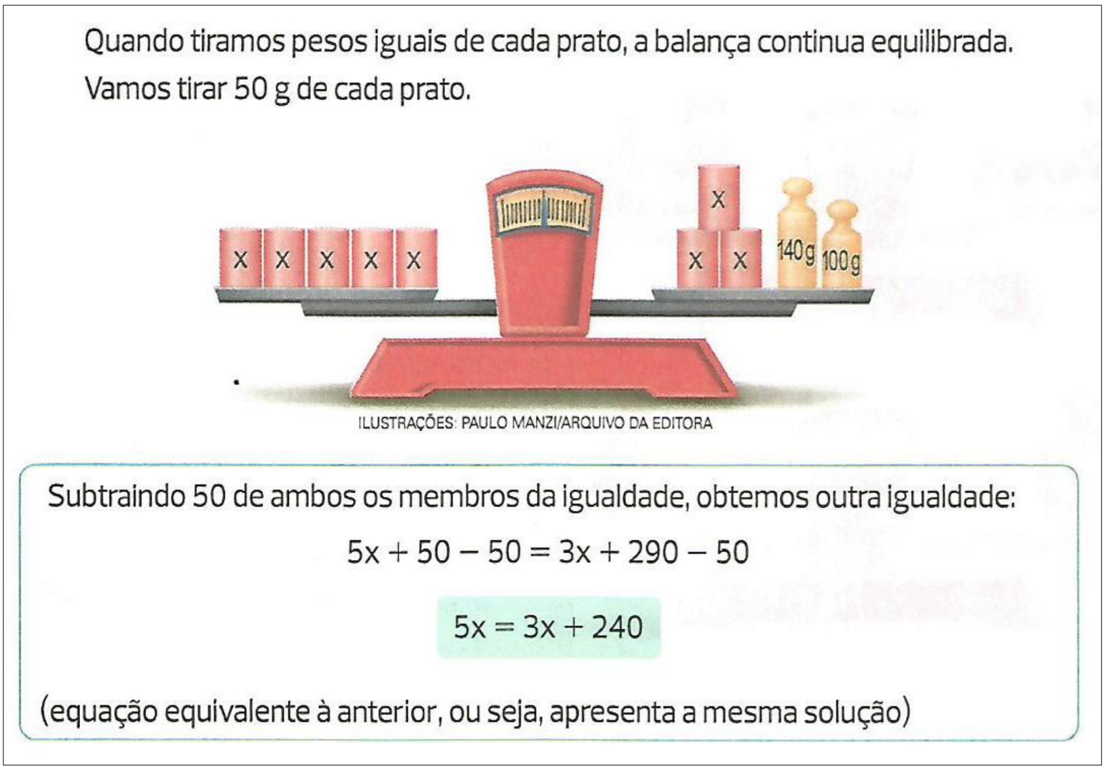


Equação correspondente:
$5x + 50 = 3x + 290$

Fonte: Dante, 2012. p. 130.

A resolução é iniciada comparando-se a retirada dos pesos com a operação de subtração entre os termos, o que, nesta técnica, é a justificativa usada para explicar a obtenção das equações equivalentes necessárias para resolver a equação. Na sequência, esse procedimento é realizado para resolver a equação encontrada na figura 28, usando a ideia de equilíbrio da balança e o ato de retirar pesos, como metáfora, como garantia de que a igualdade será conservada na equação, é o que podemos observar pela figura 29:

Figura 30 – Procedimento de resolução pela técnica da balança.

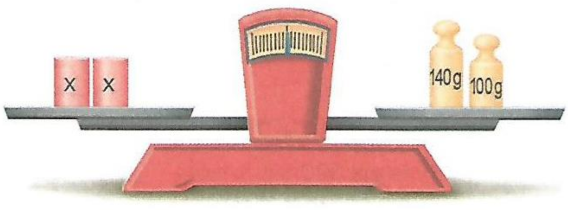


Fonte: DANTE, 2012, p. 131

O procedimento é repetido mais uma vez, retirando-se pesos iguais dos pratos da balança e os termos que contém x da equação. A resolução é feita simultaneamente pela balança e pela equação como as figuras mostram até esta fase:

Figura 31 – Continuação da resolução da equação pela técnica da balança.

Tirando três latinhas de cada prato, a balança continua equilibrada.



Subtraindo 3x de ambos os membros da igualdade, temos uma nova igualdade:

$$5x = 3x + 240$$
$$5x - 3x = 3x + 240 - 3x$$
$$2x = 240$$

(equação equivalente à anterior)

Fonte: DANTE, 2012, p. 131.

A partir daqui, a balança precisa ser abandonada, pois essa metáfora não explica as demais regras como a divisão em ambos os membros, por exemplo. A resolução da equação é então encaminhada, em continuação, traduzindo a situação da balança em linguagem matemática para ser enfrentada por uma das técnicas até então apresentadas: a técnica do cálculo mental e a técnica da operação inversa como pode ser demonstrado pelo seguinte extrato de texto:

Figura 32 – Sequência da resolução da equação, na linguagem algébrica.

Se duas latinhas de mesmo "peso", juntas, pesam 240 g, cada uma pesa $240 : 2 = 120$ g.

Assim, o "peso" de cada latinha é de 120 g.

Se $2x = 240$, pela operação inversa, obtemos **x**:

$x = 240 : 2$ ou $x = \frac{240}{2}$

$$x = 120$$

ou

Se $2x = 240$, dividindo ambos os membros por 2, temos:

$$\frac{2x}{2} = \frac{240}{2}$$

$$x = 120$$

Fonte: DANTE, 2012, p. 131

Como se pode notar a técnica da balança não se justifica a medida que de imediato se mostra ineficaz, pois não é capaz de resolver qualquer equação do primeiro grau.

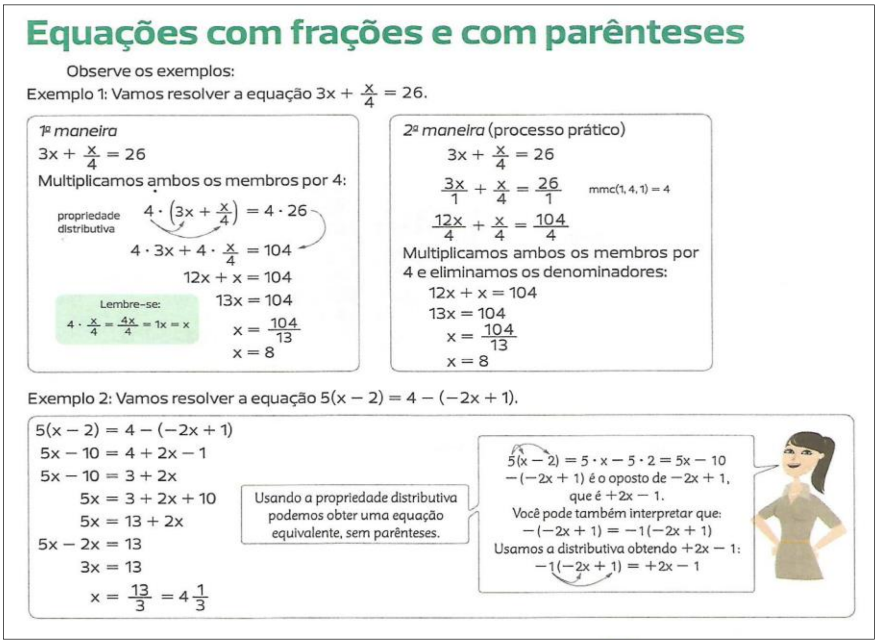
Aliás, se é possível a partir de uma situação de equilíbrio da balança traduzir em uma equação, fica também claro que nem sempre é possível traduzir uma equação em uma situação de balança em equilíbrio. A técnica da balança constitui assim é uma falácia didática e portanto devia ser banida da sala de aula. Essa técnica é limitada para as equações tratadas a seguir pelo o autor.

5.2.4 A Técnica para Resolução de Equações com Frações e Parênteses

Parece que faltaram elementos tecnológicos culturais para encaminhar outras técnicas para resoluções de equações que envolvem frações e parênteses. Assim, o autor recai na máxima escolar de "façam o que me viram fazendo", ou seja, a resolução é apresentada como uma prática naturalizada da escola.

Tudo é apresentado por meio de exemplos, invocando elementos tecnológicos de responsabilidade da matemática que asseguram o emprego de uma propriedade ou noção matemática, embora a prática de resolução de equações do tipo apresentado pelo autor possa se tornar inteligível pela evocação das propriedades e princípios com o propósito de reduzir a equação. O extrato a seguir mostra o que estamos dizendo.

Figura 33 – Funcionamento da técnica para equações que apresentam frações e parênteses.



Equações com frações e com parênteses

Observe os exemplos:

Exemplo 1: Vamos resolver a equação $3x + \frac{x}{4} = 26$.

1ª maneira

$3x + \frac{x}{4} = 26$

Multiplicamos ambos os membros por 4:

propriedade distributiva

$4 \cdot \left(3x + \frac{x}{4}\right) = 4 \cdot 26$

$4 \cdot 3x + 4 \cdot \frac{x}{4} = 104$

$12x + x = 104$

$13x = 104$

$x = \frac{104}{13}$

$x = 8$

Lembre-se:

$4 \cdot \frac{x}{4} = \frac{4x}{4} = 1x = x$

2ª maneira (processo prático)

$3x + \frac{x}{4} = 26$

$\frac{3x}{1} + \frac{x}{4} = \frac{26}{1}$ mmc(1, 4, 1) = 4

$\frac{12x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{104}{4}$

Multiplicamos ambos os membros por 4 e eliminamos os denominadores:

$12x + x = 104$

$13x = 104$

$x = \frac{104}{13}$

$x = 8$

Exemplo 2: Vamos resolver a equação $5(x - 2) = 4 - (-2x + 1)$.

$5(x - 2) = 4 - (-2x + 1)$

$5x - 10 = 4 + 2x - 1$

$5x - 10 = 3 + 2x$

$5x = 3 + 2x + 10$

$5x = 13 + 2x$

$5x - 2x = 13$

$3x = 13$

$x = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

Usando a propriedade distributiva podemos obter uma equação equivalente, sem parênteses.

$5(x - 2) = 5 \cdot x - 5 \cdot 2 = 5x - 10$

$-(-2x + 1)$ é o oposto de $-2x + 1$, que é $+2x - 1$.

Você pode também interpretar que:

$-(-2x + 1) = -1(-2x + 1)$

Usamos a distributiva obtendo $+2x - 1$:

$-1(-2x + 1) = +2x - 1$

Fonte: DANTE, 2012, p. 133

A propriedade distributiva e a noção de equivalência estão à distância, como que dando aval às operações desenvolvidas, quando elas deveriam estar conscientemente presentes como regras a serem seguidas. Isso é que assegura que a solução encontrada é solução da equação original.

5.3 ANÁLISES COMPLEMENTARES SOBRE A PRAXEOLOGIA ATUAL

A organização didático-matemática de Dante apresenta basicamente quatro tipos de praxeologias em que destacamos quatro técnicas. As praxeologias e suas técnicas podem ser assim resumidas:

Quadro 2: Resumo das praxeologias encontradas em Dante (2012)

	1ª Praxeologia	2ª Praxeologia	3ª Praxeologia:	4ª Praxeologia
Tarefa	Resolver a equação do primeiro grau.	Resolver a Equação	Resolver a Equação	Resolver a Equação com frações ou Parênteses
Técnica	Cálculo Mental	Reduzir a equação à forma mais simples usando operações inversas.	Reduzir a equação à forma mais simples mantendo a Balança em Equilíbrio.	Eliminar parênteses e denominadores de modo a encontrar a forma reduzida.
Tecnologia	Operações Aritméticas	Práticas culturais da Aritmética com traços das propriedades naturalizadas dos números racionais evidenciados pelos princípios da adição e multiplicação que não alteram a igualdade e, sem mencionar, a propriedade do elemento inverso (oposto e recíproco de um número).	Cultura Escolar	Praticas culturais da Aritmética com traços das propriedades naturalizadas dos números racionais evidenciados pelos princípios da adição, multiplicação que não alteram a igualdade e a propriedade distributiva.
Teoria	Traços da Aritmética generalizada	Traços da Aritmética generalizada naturalizada.	Traços da Aritmética Generalizada.	Aritmética generalizada.

Ainda, a noção de equação do primeiro grau é apresentada como uma ferramenta para resolver problemas, embora elas sejam introduzidas como formulações ou modelos matemáticos de problema por meio de expressões algébricas que permitam encontrar a solução do problema. Um indício de que, a razão de ser do estudo da equação é dada pela sua potencialidade para representar e mediar a solução de problemas.

Essa intenção parece que age de forma subliminar já que sequência são encaminhados 22 problemas a serem resolvidos.

Talvez por essa intenção didática, o estudo das equações é encaminhado a partir de supostas práticas da cultura escolar, como bem evidencia a técnica da balança, distanciando as praxeologias escolares das praxeologias matemáticas de resolução de equações.

Esse fazer escolar cultural contribui para evidenciar a prática de resolução de uma equação como uma prática complexa e, portanto, de difícil ensino e aprendizagem, pois as práticas ganham características dos saberes práticos que são aprendidos, mas não ensinados. Somente os atos repetitivos pelo enfretamento de diferentes situações permitem o seu aprendizado.

6 UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA A RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Neste capítulo fazemos a apresentação do modelo epistemológico de referência a partir de elementos teóricos da Álgebra Moderna. Mais precisamente, o conjunto dos inteiros módulo n, Z_n, que munido das operações de adição e multiplicação adquire estrutura de corpo, tal como os números reais, com o diferencial de as “propriedades” poderem ser vistas como indispensáveis para resolver equações do primeiro grau.

A noção de equação é uma noção paramatemática que pode estar associada à resolução de problemas, mas também pode ter um enfoque do ponto de vista estrutural, dependendo do nível de estudo. Quando aparece ligada à resolução de problemas, por exemplo, funciona como ferramenta. Espera-se, então, que o aluno reconheça as ocasiões em que um determinado problema deve ser resolvido pela associação a uma equação e o tipo de equação que deve associar à sua resolução.

Na escola, a noção de equação do primeiro grau é apresentada como ferramenta para a resolução de problemas, assim, resolver um problema, é, grande parte das vezes, resolver a equação que o traduz. A técnica que resolve esta tarefa é baseada em práticas do cálculo algébrico adquiridas pelo aluno, como é o caso, por exemplo, da redução de termos semelhantes (denominada *al-muqabala* por *al-khwarizmi*).

A necessidade de construir um modelo de referência a partir de uma estrutura algébrica é tornar as regras operatórias explícitas em relação às operações definidas para os elementos dessa estrutura, pois quando assumimos os reais como estrutura, as regras funcionam de modo naturalizado e, portanto, permanecem ocultas. Esse aspecto é corroborado pela naturalização das operações aritméticas nas escolas por meio do tratamento de problemas concretos a partir de certa lógica prática.

Nesse sentido, Queysanne e Delachet (1964) nos mostram que a suposta naturalidade com que se realizam as operações com os reais pode ser questionada a partir de novas estruturas. Estas permitem perceber, em contraste com as já existentes, que:

> Os resultados clássicos da álgebra elementar que são considerados como “evidentes por si” (comutatividade do produto, a nulidade do produto que acarreta a de um dos fatores ser nulo), não se encontram, pois na “natureza das coisas”, mas provêm das propriedades do corpo dos reais e podem sofrer profundas modificações se estivermos em outro domínio (p. 33).

De outro modo, dizer que as regras algébricas usadas nas resoluções das equações são evidentes por si é dizer que são suficientemente naturais que não permitem ser vistas como tais. Nesse sentido, a aprendizagem de resolução de equações se daria como a aprendizagem dos saberes práticos ou empíricos, em tanto que seu sincretismo os conduz precisamente à aquisição global e pessoal, por meios intuitivos da familiaridade mimética, sem que se saibam precisamente quando foi aprendido nem exatamente o que se aprendeu. (CHEVALLARD, 2005, p.68)

É com esse pensar então que recorremos à estrutura de anéis e corpos que podem ser obtidas a partir das classes de congruência módulo n. Nelas podemos notar, sem dúvida, a desnaturalização das propriedades algébricas dos corpos e anéis que são usadas como regras algébricas para resolução das equações sobre o corpo dos reais, tais como elemento neutro ou o elemento simétrico que não são evidentes por si mesmo nesse corpo.

Motivados por Queysanne e Delachet (1964), postulamos assim que sob certas condições podemos estudar a resolução de equações algébricas do primeiro grau a partir das propriedades operatórias da estrutura de anéis e corpos, quebrando a inércia do pensamento operatório naturalizado induzido pela aritmética.

Para mostrar isso, torna-se necessário considerar a infraestrutura matemática necessária ao *topos* do professor, mas que será silenciosa em sala de aula, e, portanto ao topos dos alunos, frente aos possíveis sistemas de tarefas decorrentes do MER que essa infraestrutura matemática pode sustentar.

6.1 INFRAESTRUTURA MATEMÁTICA SILENCIOSA NA ESCOLA

6.1.1 Congruências módulo *n*, sendo *n* um inteiro natural não nulo

Dizemos que o inteiro *a* é côngruo ao inteiro *b,* módulo *n,* que se escreve por $a \equiv b \pmod{n}$, se $(a - b)$ é divisível por *n*.

Partindo dessa definição, podemos afirmar que $18 \equiv -4$ (mod. 11), pois 18 – (– 4) = 22 que é divisível por 11. Por outro lado, $18 \not\equiv -2$ (mod. 11), isto é, 18 e – 2 não são côngruos módulo 11, pois 18 – (– 2) = 20 que não é múltiplo de 11.

Essa noção pode ser interpretada de um modo útil do seguinte modo: $a \equiv b \pmod{n}$ se *a* e *b* têm o mesmo resto de divisão por *n,* isto é, se $a - kn = r = b - pn$, para alguns inteiros *k e p em* $\mathbb{Z}$. Mais precisamente, podemos dizer que:

Teorema 1: Dois números inteiros *a* e *b* são congruentes módulo *n* se, somente se, *a, b* tem o mesmo resto quando divididos por *n*. (MONTEIRO,1969,p.146)

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ \ n)$, logo, $a - b = qn$ com $q \in \mathbb{Z}$, e seja r o resto da divisão euclidiana de b por n, logo, $b = q'n + r$, onde $0 \leq r$ <n; neste caso, temos $a = qn + b = \left(q + q'\right)n + r$, e como q e r são únicos, r é o resto da divisão euclidiana de a por n. Reciprocamente, de $a = q_1 n + r$, e $b = q_2 n + r$, onde $0 \leq r$ <n, resulta $a - b = (q_1 + q_2)n$, logo $a \equiv b \bmod n$.

6.1.2 Relação de equivalência e classes de equivalência

A noção de congruência módulo *n* define a relação de equivalência como uma relação *R* em $\mathbb{Z}$ que:

(E_1): É ***reflexiva***, que escrevemos aRa para todo a em $\mathbb{Z}$, que quer dizer que todo inteiro é côngruo a si mesmo, para todo inteiro natural não nulo *n*, já que $a - kn = r$ *leva para* $a - a = 0$ *que* é divisível por n.

(E_2): É ***simétrica,*** que escrevemos se aRb, então bRa, quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{Z}$, que quer dizer que se $a - kn = r = b - pn$ *então* $b - pn = r = a - kn$.

(E_3): É ***transitiva,*** que escrevemos se aRb e bRc, então aRc, quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{Z}$, e isto quer dizer que se $a - kn = r = b - pn$ *e* $b - pn = r = c - sn$ então $a - kn = r = c - sn$.

Essas propriedades, que em geral podem ser independentes, quando satisfeitas simultaneamente para uma dada relação R definida entre dois conjuntos não vazios, definem uma *relação de equivalência.* Esta noção é importante por nos levar ao encontro das *classes de equivalências*.

Dado um elemento *a* de $\mathbb{Z}$, o conjunto de todos os elementos *b* tais que *aRb,* constituem uma classe de equivalência. Esta noção nos leva ao encontro da relação *R* de congruência módulo *n* como determinadora de uma partição de $\mathbb{Z}$ por meio de suas classes de equivalência.

Essa afirmação decorre do teorema 1, pois podemos observar que dois números tomados em uma mesma classe serão côngruos módulo n, porém, dois números de duas classes diferentes, não o serão, já que todo inteiro *a* é congruente módulo *n* a um, e somente um, dos inteiros 0, 1, 2, 3,..., n–1, que são os restos r possíveis da divisão euclidiana de um inteiro por *n*, e que $r \equiv a \ (\mathrm{mod}\ n)$, já que $a - r = kn$, e se $a - r' = kn$, então $r = r'$.

Assim, é uma consequência da relação de congruência como relação de equivalência que nos conduz à partição do conjunto $\mathbb{Z}$. A esse respeito Queysanne e Delachet (1964), consideram a seguinte sequência:

$$(1) \qquad \ldots -(k+1)n, -kn, \ldots , -2n, -n, \ldots , 0, n, \ldots , kn, (k+1)n, \ldots$$

Qualquer que seja o número inteiro, ele pertencerá a (1) ou estará compreendido entre dois termos consecutivos de (1) e, por conseguinte, haverá um inteiro h e um natural r (chamado resto da divisão de p por n) que permitirá escrevermos:

$$p = hn + r \qquad 0 \leq r < n$$

Todos os inteiros p que conduzem ao mesmo resto r pela relação de congruência módulo n podem ser são agrupados em um mesmo conjunto que será designado por $\bar{r}$.

Assim, cada inteiro pode ser escrito em função de n e de r, e dispostos em n classes:

os números	$p = hn$	(h inteiro)	designados por	$\bar{0}$
--	$p = hn + 1$	--	--	$\bar{1}$
-------	-------	-------	-------	-------
-------	-------	-------	-------	-------
--	$p = hn + n - 1$	--	--	$\overline{n-1}$

Essas classes são denominadas classes residuais módulo n ou classes de congruências módulo n.

Assim, para cada $a \in \mathbb{Z}$ escrevemos

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a \pmod{n}\}$$

para representar a classe de equivalência determinada por a segundo a relação de congruência módulo n; dizemos neste caso que $\bar{a}$ é a classe de equivalência módulo n determinada pelo inteiro a.

6.1.2 O Conjunto Quociente

O conjunto de todas as classes de equivalência módulo n é denominado de conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de congruência módulo n e é indicada por $\mathbb{Z}_n$.

Esta noção se mostra importante para nossos propósitos a partir do seguinte teorema:

Teorema 2: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio E, então o conjunto quociente E/R é uma partição de E.(MONTEIRO, 1969,p.43)

Assim, duas classes $\bar{a}$ e $\bar{b}$ serão iguais se, somente se, $a \equiv b\ (\text{mód}.\,n)$. Em decorrência do teorema 1 deduz-se que as classes de restos $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$ são disjuntas duas a duas. Outra consequência que segue, é que, se $\bar{a}$ é uma classe de restos módulo n, então existe um inteiro r, com $0 \leq r \leq n-1$, tal que $\bar{a} = \bar{r}$, portanto, temos

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Tomemos como exemplo o caso em que $n = 2$. Temos apenas duas classes de restos módulo 2: a primeira formada por todos os inteiros pares (resto 0), e a segunda, por todos os inteiros ímpares (resto 1):

$$\bar{0} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, \dots\}$$

Temos $\bar{0} \cap \bar{1} = \emptyset$, $\bar{0} \cup \bar{1} = \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Tomemos agora o exemplo 15 apresentado por Monteiro (1969, p.148) com n= 5. Nesse caso, teremos cinco classes de restos, formadas pelos restos da divisão de um inteiro por 5, que assumem os valores 0, 1, 2, 3 e 4, temos então,

$$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

Onde $i \cap j = \emptyset$ se $i \neq j\ (0 \leq i, j \leq 4)$ e $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4}$, além disso, $i\ (0 \leq i \leq 4)$ é o conjunto de todos os inteiros x que tem i para resto quando divididos por 5.

6.1.3 Anel de Integridade e Corpo

Consideremos partição de $\mathbb{Z}$ dada pelo seguinte conjunto quociente

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

E as seguintes condições (MONTEIRO,1969,p.146) que tratam da adição e da multiplicação de congruências

CA quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c, se $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}$ (mód. n), então $\mathrm{a}+\mathrm{c} \equiv \mathrm{b}+\mathrm{c}$ (mód. n). Por hipótese, temos um número inteiro q, tal que $\mathrm{a}-\mathrm{b}=\mathrm{qn}$ e então $(\mathrm{a}+\mathrm{c})-(\mathrm{b}+\mathrm{c})=\mathrm{a}-\mathrm{b}=\mathrm{qn}$; portanto $\mathrm{a}+\mathrm{c} \equiv \mathrm{b}+\mathrm{c}\ (\mathrm{mod.\,n})$.

CM: Quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c, se $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}$ (mod. n), então $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bc}$ (mod. n). Com efeito, por hipótese, existe um inteiro q tal que $\mathrm{a}-\mathrm{b}=\mathrm{qn}$, e então, $\mathrm{ac}-\mathrm{bc}=(\mathrm{a}-\mathrm{b})\mathrm{c}=(\mathrm{qn})\mathrm{c}=(\mathrm{qc})\mathrm{n}$; portanto, $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bc}$ (mod. n).

Proposição 1- Se a, b e c são números inteiros quaisquer e se $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}$ (mód. n) e $\mathrm{c} \equiv \mathrm{d}$ (mod. n), então $\mathrm{a}+\mathrm{c} \equiv \mathrm{b}+\mathrm{d}$ (mod. n) e $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bd}$ (mod. n) – princípios da soma e do produto de congruências módulo n. (MONTEIRO, 1969, p.146)

Assim, dados dois elementos quaisquer de $\mathbb{Z}_n$, $\bar{a}$ e $\bar{b}$, podemos definir uma soma e um produto, tal que:

$$\bar{\mathrm{a}}+\bar{\mathrm{b}}=\overline{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \quad \text{e} \quad \bar{\mathrm{a}}.\bar{\mathrm{b}}=\overline{\mathrm{ab}}$$

A soma $\bar{\mathrm{a}}+\bar{\mathrm{b}}$ e produto $\bar{\mathrm{a}}.\bar{\mathrm{b}}$ não dependem dos representantes a e b, pois pela proposição 1, que contém os princípios da soma e da multiplicação das congruências, segue que se $\bar{\mathrm{a}}=\bar{\mathrm{c}}$ e $\bar{\mathrm{b}}=\bar{\mathrm{d}}$, então, $a+b \equiv c+d$ (mod. n) e $ab \equiv cd$ (mod. n), portanto, as igualdades

$$\overline{\mathrm{a}+\mathrm{b}}=\overline{\mathrm{c}+\mathrm{d}} \quad \text{e} \quad \overline{\mathrm{ab}}=\overline{\mathrm{cd}}$$

definem as operação de adição de multiplicação sobre $\mathbb{Z}_n$.

Segundo Monteiro (1969, p. 181), para determinar a soma de duas classes $\bar{\mathrm{a}}+\bar{\mathrm{b}}$ é suficiente somar os números inteiros a e b e determinar o resto r da divisão euclidiana de $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ por n; a classe de restos módulo n determinada por r é a soma $\bar{\mathrm{a}}+\bar{\mathrm{b}}$. Analogamente, para a multiplicação, se o resto da divisão euclidiana de ab por n é s então, $\bar{\mathrm{a}}.\bar{\mathrm{b}}=\mathrm{s}$. Em decorrência disso, a soma $\bar{\mathrm{a}}+\bar{\mathrm{b}}$ e o produto $\bar{\mathrm{a}}.\bar{\mathrm{b}}$ estão definidos módulo n.

As operações definidas acima podem ser representadas em tábuas onde seus elementos são dispostos (linha e coluna fundamentais) de modo a evidenciar todos os resultados possíveis de uma operação.

Para mostrar como funcionam essas tábuas, tomamos $n = 6$, que nos fornece $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

A partir das definições das operações de adição e multiplicação em Z_n, a estrutura ($Z_{n,}$ +, x) é um anel comutativo com elemento unidade. Mais, precisamente, segundo Monteiro (1969), podemos assim anunciar.

Teorema X, As operações de adição e de multiplicação definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sobre o conjunto Z_n.

Esse teorema quer dizer que :

A1: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

A2: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

A3: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a}$

A4: $\bar{a} + (\overline{-a}) = \bar{0}$

M1: $\bar{a}(\bar{b})\bar{c} = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$

M2: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

M3: $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{a}$

D: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$

Além disso, se *n* é um inteiro primo essa estrutura ganha o mais uma propriedade que a leva a ser definida como um anel de integridade, como assim afirma Monteiro (1969,p.183) por meio do seguinte teorema.

Teorema: O anel $\mathbb{Z}_n$ dos inteiros módulo n é um anel de integridade se e somente se n é um número primo.

Isto quer dizer que se n é primo, valem todos os axiomas anteriores e adicionalmente o axioma seguinte: M4: $\bar{a} \cdot \overline{a^{-1}} = \bar{1}$ $(\bar{a} \neq \bar{0})$

Adicionalmente, observando que $\mathbb{Z}_n$ é finito e é um anel de integridade, podemos concluir que $\mathbb{Z}_n$ é um corpo. Nossa conclusão decorre do afirmado por Monteiro (1969, p.183) no seguinte teorema:

Teorema: Todo anel de integridade finito é um corpo.

Isso quer dizer que $\mathbb{Z}_n$, do ponto de vista das operações nele definidas, adição e multiplicação, se comporta como o corpo dos números reais. No entanto, é bom notar, há uma desnaturalização das propriedades das operações.

Essa infraestrutura Matemática, aqui exposta, permite encaminhar sistemas de tarefas sobre as equações de primeiro grau, mas não somente a elas, que fazem revelar o fazer inteligível da resolução das equações que independem de criações didáticas sustentadas por práticas culturais da escola.

6.2 O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA

Assumimos como modelo o conjunto $\mathbb{Z}_p$ como o conjunto universo e os axiomas A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4 E D como regras operatórias para a resolução das equações, como exemplificamos abaixo.

Utilizando $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ e as tábuas das operações para este conjunto, mostraremos como a resolução de equações do primeiro grau pode ser efetuada utilizando as regras descritas pelos axiomas já apresentados. A seguir, observam-se na tábua os 49 produtos possíveis em $\mathbb{Z}_7$, onde também pode ser notado o fechamento das operações adição e multiplicação. De modo que para uma equação do primeiro grau determinada, na variável x, x pertencerá ao universo $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

TÁBUA PARA ADIÇÃO

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

TÁBUA PARA MULTIPLICAÇÃO

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

A tabela A dispõe a adição entre os elementos de ($\mathbb{Z}/7$), onde é possível visualizar que o elemento neutro para esta operação é 0 e que para cada elemento existe um elemento oposto, de tal maneira que a soma de um elemento com o seu oposto produz o elemento neutro. Bem como, se pode observar a comutatividade. Assim, temos, por exemplo, que:

a) O elemento oposto de $\bar{3}$ é $\bar{4}$, pois $\bar{3}+\bar{4}= \bar{0}$. E também que, pela comutatividade, $\bar{4}+\bar{3}=\bar{0}$, ou seja, o oposto de $\bar{4}$ é $\bar{3}$. Em resumo, $\bar{3}+\bar{4}=\bar{4}+\bar{3}=\bar{0}$.

b) O elemento oposto de $\bar{6}$ é o $\bar{1}$, pois $\bar{6}+\bar{1}= \bar{0}$. E ainda que, $\bar{1}+\bar{6}= \bar{0}$, ou seja, o oposto de 1 é o 6, portanto, $\bar{6}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{6}=\bar{0}$.

c) Para uma soma ordinária entre dois elementos, que não sejam opostos entre si, a soma será sempre diferente de zero, assim, $\bar{5} + \bar{3}=\bar{3}+\bar{5}= \bar{1}$.

d) A adição de três ou mais termos funciona com as mesmas regras, bastando para isso associá-las duas a duas, como a seguir: $\bar{3}+\bar{6}+\bar{2}=(\bar{3}+\bar{6})+\bar{2}= \bar{2}+\bar{2}=\bar{4}$, ou ainda, $\bar{3}+(\bar{6}+\bar{2})=\bar{3}+\bar{1}=\bar{4}$.

Com estas regras definidas, e tomando p = 7 podemos pensar na resolução de equações, nesse conjunto, tal que as regras para adição possam ser deduzidas diretamente das tábuas de adição e multiplicação.

Resolver uma tarefa do tipo, “encontrar o valor de x na equação $\overline{2} \cdot x + \overline{6} = \overline{0}$”, exige isolar a variável com auxílio das propriedades da igualdade, e, a utilização da tabela e a algumas das regras contidas nas tábuas de adição e de multiplicação.
$\overline{2} \cdot x + \overline{6} = \overline{0}$ (Para anular o $\overline{6}$ deve-se adicionar a ele $\overline{1}$, mas pela propriedade aditiva, para manter a igualdade devemos somá-lo aos dois membros, então escrevemos):

$(\overline{2} \cdot x + \overline{6}) + \overline{1} = \overline{0} + \overline{1}$	(Associamos as parcelas que queremos somar primeiro):
$\overline{2} \cdot x + (\overline{6} + \overline{1}) = \overline{0} + \overline{1}$	(Buscamos na tábua o resultado das adições):
$\overline{2} \cdot x + \overline{0} = \overline{1}$	(Pode-se discutir o fechamento da multiplicação para $\overline{2} \cdot x$ e em seguida dar o resultado para a sua adição com o elemento neutro).
$\overline{2} \cdot x = \overline{1}$	(Para isolar *x*, buscamos na tábua, um produto que resulte no elemento unidade, sendo um dos fatores o $\overline{2}$):
$(\overline{2} \cdot x) \cdot \overline{4} = \overline{1} \cdot \overline{4}$	(Multiplicamos esse fator em ambos os membros da equação e efetuamos $\overline{1} \cdot \overline{4}$ utilizando a tábua);
$(x \cdot \overline{2}) \cdot \overline{4} = \overline{4}$ $x \cdot (\overline{2} \cdot \overline{4}) = \overline{4}$	(Associamos os fatores de modo conveniente e efetuamos $\overline{2} \cdot \overline{4}$ utilizando a tábua);
$x \cdot \overline{1} = \overline{4}$ $x = \overline{4}$	(Por fim, o produto $x \cdot \overline{1}$, pelo qual obtemos o valor de x, no segundo membro que é $\overline{4}$).

O modelo ora apresentado permite encaminhar nosso objetivo, ou seja, o de mostrar a resolução de equações do primeiro grau como um fazer orientado por regras matemáticas como toda atividade matemática requer.

Considerando o largo alcance do modelo epistemológico, diferentes organizações matemáticas para resolução de equações pode ser construídas para atender diferentes condições impostas em diferentes posições da escola. Tal tarefa de transposição didática constitui o natural desafio a emergente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a suposta falta de unidade e a presença de fazeres miméticos no estudo das resoluções de equações do primeiro grau nas escolas básicas, estamos interessados em responder a seguinte questão:

Como conceber um MER para a resolução de equações do primeiro grau a uma variável que permita construções de novas organizações praxeológicas, considerando o equilíbrio entre os saberes práticos, inclusive procedimentais, que agem no ensino desse objeto e que não fiquem tão distante dos saberes matemáticos?

O enfrentamento do problema foi de consideravel complexidade e enfrentado por um percurso de estudos e investigações restrito a a de concepção do projeto que é de encaminhar um MER e sua tradução inicial para escola por meio de tarefas que vivam na escola.

O PEI foi encaminhado pelas seguintes questões, imbricadas entre si:

Q_1: Houve mudanças de técnicas ao longo do tempo?;

Q_2: Existem invariantes nas técnicas que viveram e vivem no ensino das escolas?

Q_3: O desenvolvimento do saber matemático influenciou mudanças de tecnologia e técnicas?

Em busca de responder essas questões, não necessariamente na ordem posta, o percurso de investigação nos levou ao encontro de quatro praxiologias utilizadas para resolver equações do primeiro grau.

Cronologicamente, encontramos as práticas da álgebra primitiva hindu de Datta e Singh (1932), a da organização francesa de Reynaud (1810) com base na álgebra clássica, a da organização brasileira de Bóscolo e Castrucci(1970) sob a luz da reforma da matemática moderna e finalmente do livro didático oficial recente de Dante (2012).

Assim, as análises realizadas apontam que as praxeologias hindus são construídas segundo tipos de equações em acordo com tipos de problemas práticos. Praxeologias auto-tecnológicas em que há uma técnica para cada tipo de equação e de onde se extrai pelo menos os seguintes elementos técnicos e tecnológicos:

- A noção de termos semelhantes, no mínimo, considerando as potências de uma incógnita.
- Operações algébricas: Entendidas como as operações de adição, subtração, multiplicação, potenciação, por exemplo, de termos envolvendo quantidades conhecidas (números) e desconhecidas (letras), entre si.
- Redução de termos semelhantes: Entendida como aqui como a diferença entre termos semelhantes.
- Operações inversas: Entendida como o que adiciona de um lado deverá ser subtraído, e o que estiver multiplicado deverá ser dividido, etc.

Esses elementos são recorridos para derivar as fórmulas as regras como foi demonstrado.

A técnica usada na França, no século XVIII/XIX adotada por Reynaud (1810) para a resolução de equações do primeiro grau não acontece por meio de tipos de problemas e apresenta largo alcance de modo a não ficar restrita apenas às equações dos tipos que permitem ser identificadas como equações do primeiro grau.

Apresenta tecnologia matemática explicita da álgebra clássica, mas que ratifica a técnica usada pelos matemáticos hindus. Como uma técnica dotada de uma racionalidade que permite um fazer inteligível, com alcance relativamente largo o suficiente para permitir construir organizações praxeológicas de complexidade crescente para o ensino escolar. Talvez por isso, essa técnica ainda se faça presente nos livros escolares.

A organização praxeológica de Bóscolo e Castrucci (1970), sob a luz da matemática moderna, apresenta a técnica de resolução de uma equação do primeiro grau regras explícitas a serem seguidas sob a luz de uma tecnologia também explicita. Estas regras são determinadas pelas propriedades das operações numéricas do campo dos racionais ou reais, como mostrado nas análises.

O conhecimento das propriedades como regras práticas são indispensáveis para a resolução da equação. Isto assegura o objetivo da técnica que é encontrar um caminho de equações equivalentes que permita encontrar a equação equivalente mais simples chamada de equação elementar.

Essa é a TÉCNICA da TAREFA de resolução da equação do primeiro grau, que em termos práticos foi assim anunciada.

1) Eliminam-se *os parênteses*;
2) Eliminam-se *os denominadores;*
3) Separam-se os termos, deixando num dos membros os termos que contêm a variável e somente eles;
4) Dividem-se (caso ainda não se tenha obtido uma equação elementar) ambos os membros pelo coeficiente da variável, se tal coeficiente não for zero, obtendo-se assim uma equação elementar equivalente, de resolução imediata.

Esse procedimento prático encerra a técnica de resolução da equação, mas não determina a prior que regra ou sequência de regras deve ser usada, como as demais técnicas aqui analisadas. Mas, apresentando claramente a resolução como um jogo cujo objetivo é encontrar a equação elementar usando as propriedades como regras serem seguidas.

A clareza da tecnologia faz a técnica apresentar largo alcance para o enfrentamento do gênero de tarefas de Resolução de Equações. Os seus elementos técnicos e tecnológicos ratificam as técnicas usadas por Hindus e pelos matemáticos ocidentais até o século XX.

A organização didático-matemática de Dante (2014) apresenta basicamente quatro tipos de praxeologias. As técnicas e tecnologias referentes a cada uma delas podem ser assim resumidas:

Primeira Praxeologia:

Tarefa: Resolver a equação do primeiro grau.

Técnica: Cálculo Mental

Tecnologia: Operações Aritméticas

Segunda Praxeologia:

Técnica: Reduzir a equação a forma mais simples usando operações inversas.

Tecnologia: Práticas culturais da Aritmética com traços das propriedades naturalizadas dos números racionais evidenciados pelos princípios da adição e multiplicação que não alteram a igualdade e, sem mencionar, a propriedade do elemento inverso (oposto e recíproco de um número).

Terceira Praxeologia:

Tipo de Tarefas: Resolver a Equação

Técnica: Reduzir a equação à forma mais simples mantendo a Balança em Equilíbrio.
Tecnologia: Práticas da cultura escolar

Quarta Praxeologia:
Tipo de Tarefas: Resolver a Equação com frações ou Parênteses
Técnica: eliminar parênteses e denominadores de modo a encontrar a forma reduzida.
Tecnologia: Práticas culturais da Aritmética com traços das propriedades naturalizadas dos números racionais evidenciados pelos princípios da adição, multiplicação que não alteram a igualdade e a propriedade distributiva.
Teoria: Aritmética generalizada.

O estudo das equações é encaminhado a partir de práticas da cultura escolar, como bem evidencia a técnica da balança, distanciando-se das praxeologias escolares anteriormente investigadas, sem relações aparentes entre si, e, com discurso matemático mantido distante por meio de menções explicitas, como as que indicam a propriedade associativa para eliminação de parênteses, mas predominando o silêncio sobre as demais propriedades.

Esse fazer escolar cultural contribui para encaminhar a prática de resolução de uma equação como uma prática complexa, e, portanto, de difícil aprendizagem pelo ensino, ou seja, como uma prática ordinária que é aprendida sem ser ensinada. Somente os atos repetitivos pelo enfretamento de diferentes situações permitem o seu aprendizado, vendo e fazendo o que viu o professor fazer.

Podemos dizer que durante séculos a resolução de equação do primeiro grau foi realizada como uma prática aritmética, em que as técnicas de resolução vinham acompanhadas dos problemas e gradativamente foi sendo abstraída chegando aos modelos gerais de resolução por tipos de equações. Basicamente, as técnicas hindus, de Reynaud e de Bóscolo e Castrucci guardam elementos técnicos muitos próximos, poderíamos até dizer que a segunda é uma evolução da primeira e a terceira da segunda.

Quanto às técnicas apresentadas por Dante, podemos dizer que está próxima de Reynaud, mas do ponto de vista tecnológico está muito distante da álgebra clássica usada por Reynaud e da Álgebra Moderna usada por Castrucci, como evidencia a técnica do equilíbrio da balança.

Em geral, podemos dizer que com o passar do tempo, a criação de um simbolismo algébrico próprio, permitiu sistematizar a representação de equações e sua resolução. Quando observamos a técnica dos hindus em relação à técnica do século XIX, percebe-se um grande salto no simbolismo. O discurso tecnológico de ambas encontra-se apoiado nas operações aritméticas, observando-se um avanço em relação à teoria. O aumento em seu poder de generalização com os cálculos algébricos permitiram calcular com letras como se estas fossem números dando uma justificativa para a técnica da inversão.

A consolidação da Álgebra Moderna permitiu construir um discurso tecnológico-teórico que explica e justifica as práticas de resolução de equações revelando ainda, maior alcance da técnica. A matemática moderna vem, portanto, ratificar a prática da resolução de equações do primeiro grau. O insucesso da introdução dessa proposta de organização da matemática escolar talvez tenha sido causado pelo seu abuso de formalismo, gerando um distanciamento excessivo entre os saberes a ensinar e o saberes práticos da escola que podem ter causado estranhamentos aos professores.

A organização encontrada no livro didático mais atual, considerado aqui, nos mostrou que existem diferentes praxeologias vivendo na escola, e estas, se apresentam fragmentadas, de modo que tanto a inversão das operações e a transformação em equações equivalentes são utilizadas para resolver equações de modo combinado ou isolado. Não há um modelo de resolução geral, mas algumas práticas que são colocadas a disposição, baseadas em modelos concretos como o da balança de dois pratos. A Aritmética generalizada, representada por cálculos algébricos e o uso de propriedades da igualdade de modo naturalizado, ocultam os elementos tecnológicos que poderiam fornecer uma razão de ser assim a prática da resolução da equação. Alguns desses elementos foram completamente excluídos da organização didática, como o estudo dos diferentes tipos de igualdade, que era o que possibilitava diferenciar as identidades e discutir a solução da equação, por exemplo. Porém, todas essas noções que envolviam o estudo qualitativo das equações, foram perdidas, não restando nenhum vestígio no livro de Dante, que trata unicamente das técnicas para calcular as raízes, sem discuti-las.

As análises respondem às questões postas de forma imbricadas, ou seja, houve mudanças ao longo do tempo, mas elementos técnicos foram preservados também, de modo que nos permitem afirmar que temos basicamente uma mesma técnica em evolução, embora as técnicas atuais como as apresentadas por Dante mostrem uma involução técnico-tecnológica.

Portanto, as análises nos encaminham para a concepção de um modelo que preservasse as práticas com fundamentos matemáticos, o que exclui a balança, e aproxime da prática ratificada ao longo do tempo, como descrita no livro de Bóscolo e Castrucci (1970), mas com discurso tecnológico capaz de desnaturalizar as operações e, com isso, suas propriedades para que permitam serem vistas como ferramentas para a resolução de equações do primeiro grau.

O modelo proposto deve ser então encaminhado com as propriedades das operações que antes eram vistas sem sentido – elemento neutro, comutatividade, por exemplo- como regras que guiam os procedimentos da resolução da equação. Esse pensar nos encaminhou para o estudo da álgebra moderna, mais precisamente, para o encontro com o corpo dos inteiros módulo p.

Essa tecnologia demonstra claramente seu poder de desnaturalização das operações e, em consequência, de suas propriedades, como mostra o capítulo 6. Nesse modelo, não usual, o aluno é "obrigado" a usar as propriedades como regras para a resolução de equações.

Finalmente, é preciso destacar que tal modelo pode ser usado para o estudo de equações em diferentes estruturas algébricas para além dos campos numérico, Assim, em perspectiva futuras de continuação dessa investigação, torna-se imperioso investigar a potencialidade desse modelo a partir da construção de novas organizações didático-matemáticas para e no ensino da resolução das equações algébricas.

REFERÊNCIAS

ARYABHATA I. **Aryabhatya**. (499). Editado com o comentário, entitulado *Bhatadipikd,* de Paramesvara (1430) por H. Kern (Leiden, 1875).

Bakhshali Manuscript. A Study in Medieval Mathematics, Parts I, II and III editado por G. R. Kaye, Calcutta, 1927, 1933.

BHASKARA II. **Bîjaganita** (1150). Editado por Sudhakara Dvivedi (Benares) e revisado por Muralidhara Jha (Benares, 1927); com o comentário, entitulado *Navânkura,* de Krsna *(c.* 1600) *por* D. Apte (Anandasrama Sanskrit Series, Poona, 1930). Tradução para o Inglês por H. T. Colebrooke *(Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara,* London, 1817).

BOSCOLO, B.; CASTRUCCI, A. **Curso Moderno de Matemática para o ciclo ginasial**. Volume 2. Ed. FTD, São Paulo. 1970.

BRAHMAGUPTA. **Brahma-sphuta-siddhdnta** (628). Editado com notas explicativas por Sudhakara Dvivedi, Benares, 1902. Capítulos xii e xiii do trabalho que trata respectivamente de aritmética e álgebra que foi traduzido para o inglês por H. T. Colebrooke *(Algebra with Arithmetic and Mensuration* etc.). Commentários de Prthudakasvami (86o). Manuscrito incompleto.

BRASIL. SECRETARIA DE ENSINO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais**. MEC, 1998.

CHEVALLARD, Y. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique.* **Recherches en Didactique des Mathématiques***,* vol. 19, nº 2, pp. 221-266. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La transposión didática**: del saber sabio al saber ensenado. Buenos Aires: Aique, 2005.

CHEVALLARD, Y.*La TAD face au professeur de mathématiques.* UMR ADEF. Toulouse - França, 2009.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2012.

DATTA, Bibhutibhusan; SINGH, Avadesh Narayan. **History of Hindu Mathematics a source book**. Part I and II. (1935, 1938).

GARCÍA, F. J. La **modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a las relaciones funcionales.** Doctoral dissertation. Universidad de Jaén. 2005.

MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. **Elementos de álgebra**. Livro Técnico e Científico, 1978.

NARAYANA. **Bijaganita** (1350). Manuscrito incompleto.

PNLD 2017 – Mais distribuídos PNLD 2017 – Anos Finais Disponível em: file:///C:/Users/SAMSUNG/Downloads/pnld%202017_mais%20distribudos%20pnld%202017%20-%20anos%20finais.pdf. Acessado em: 04/07/2017.

QUEYSANNE, M; DELACHET, A. **A álgebra moderna**. São Paulo: Difusão europeia do livro, 1964.

REYNAUD, A. A. L. **Eléments d'algèbre précédés de l'introduction**. troisième édition: PARIS, 1810.

SRÎPATI. **Siddhânta-sekhara** (1039). Editado por Babua Misra, Calcuta, Vol. I (1932), containing capítulos i-xii texto, com o comentário de Makkibhatta (1377) nos capítulos i-iv.

VILLELA, Lucia Maria Aversa. **GRUEMA: uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil**. 2009. Tese de Doutorado.