**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**
**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

# UM ESTUDO DO *LIBER QUADRATORUM* (1225) DE LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250) E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

José dos Santos Guimarães Filho

Belém, PA
2018

**JOSÉ DOS SANTOS GUIMARÃES FILHO**

# UM ESTUDO DO *LIBER QUADRATORUM* (1225) DE LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250) E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica - IEMCI da UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sob orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma.

Belém, PA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

G963e Guimarães Filho, José dos Santos
UM ESTUDO DO LIBER QUADRATORUM (1225) DE LEONARDO FIBONACCI (1180 - 1250) E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA / José dos Santos Guimarães Filho. — 2018
111 f. : il. color

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg

1. História da matemática. 2. Leonardo Fibonacci. 3. Liber Quadratorum. 4. Ensino de Matemática. I. Brandemberg, João Cláudio , *orient.* II. Título

---

CDD 510.7

**JOSÉ DOS SANTOS GUIMARÃES FILHO**

# UM ESTUDO DO *LIBER QUADRATORUM* (1225) DE LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250) E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Exemplar correspondente a redação da dissertação para defesa apresentada por José dos Santos Guimarães Filho submetida à banca examinadora.

Banca examinadora:

____________________________________________________________

Presidente: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma – UFPA

____________________________________________________________

Membro Titular Externo: Prof. Dr. Miguel Chaquiam – UEPA

____________________________________________________________

Membro Titular Interno: Profª. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha – UFPA

____________________________________________________________

Suplente Interno: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – UFPA

Belém, PA
2018

# AGRADECIMENTOS

Para este momento dedico as primícias deste agradecimento ao Deus Criador e Mantenedor do universo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades, mesmos quando estas foram de caráter afetivo concedendo-me uma auxiliadora idônea. Assim, percebo que no processo acadêmico Deus estava ao meu lado, me conduzindo a cada pessoa necessitada de um amor ágape, oportunizando a mim, desta forma, ser um evangelista em meio a este ambiente tão plural de ideologias.

Agradeço a Universidade Federal do Pará (UFPA) pela confiança de levar este nome durante estes dois anos de estudos, bem como a CAPES, por prover os recursos financeiros durante este período. Agradeço de mesma forma, ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), pelo investimento em minha formação.

Estou extremamente agradecido, de igual forma, por ter sido acolhido no Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino da Matemática (GEHEM), pois mesmo sem me conhecerem compartilharam seus estudos e conhecimentos, conferindo a mim responsabilidades, as quais, foram cabais para o meu desenvolvimento e amadurecimento acadêmico, assim, gostaria de dizer: MUITO OBRIGADO!

Agradeço a banca examinadora pelas contribuições na qualificação deste relatório de pesquisa, e por serem sempre solícitos em minhas pesquisas, não apenas no momento da qualificação, no entanto, em todo o processo, pois cada um contribuiu de forma singular na construção deste estudo e de muitos outros, seja no grupo de pesquisa ou fora dele.

O meu muito Obrigado! Ao Professor Brandemberg, pois não fez contribuições apenas para este trabalho, mas para a minha vida. Este professor ao conduzir este estudo não se tornou apenas um orientador, porém um amigo, o qual estimo muito...

Agradeço a minha família por torcer em cada etapa, por chorar em cada derrota e por gritar em cada vitória!!!

De forma especial agradeço aos meus pais, pois sem sua educação e paciência não seria a pessoa que sou hoje...

A minha irmã, ciumenta e possessiva (para não perder o costume) e revisora deste texto, que está sempre me socorrendo nos momentos de dificuldades gramaticais...

A, primos e amigos, os quais se tornaram mais chegados que irmãos...

A, minha melhor amiga, parceira, cúmplice (até mesmo em meus devaneios), namorada, conselheira idônea, esposa, amor e mulher de minha vida... Obrigado por me ajudar a crescer, a me tornar um homem e quem sabe daqui a uns 7, 8, 9 ou 13 anos um pai (*rsrss*)... Obrigado por ficar me esperando em quanto estava digitando, por me acompanhar até a federal só para me apoiar (ou me obrigar por que você que teria algo a resolver na universidade), por ser o que eu mais precisava nos momentos mais complicados, por estar a alguns passos a frente só para que eu pudesse ficar mais confortável ou despreocupado, afim, de permitir que eu pudesse digitar com mais tranquilidade e qualidade, e isso, mesmo, nos momentos que eu não reconhecia tal atitude, ou seja, obrigado por ser o meu *google*!!!  TE AMO DEMAIS!!!

# RESUMO

Neste relatório de pesquisa evidenciamos o matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, o qual nos referimos como Leonardo Fibonacci, que contribuiu significativamente para a comunidade matemática de sua época, despertando atenção de pessoas importantes desse período como o rei Frederico II, e a seu convite Leonardo Fibonacci participa de um torneio matemático, o qual, teve como seguimento a construção de sua quarta obra (que temos conhecimento) o *Liber Quadratorum*. Desta forma nos ocorre o seguinte questionamento: quais são as potencialidades didático/pedagógicas que podem ser evidenciadas a partir dessas proposições e suas demonstrações que podem ser usadas em sala de aula para efetivar o ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos? Para responder este questionamento, objetivamos nesse relatório de pesquisa, analisar os problemas contidos no *Liber Quadratorum* de Leonardo Fibonacci, no qual visamos um maior entendimento dos conceitos, provendo um material em português e buscando possíveis potenciais didático/pedagógicos. Para tanto, buscamos materiais que subsidiassem o estudo e um texto base para a construção do material em português referente a doze proposições contidas no *Liber Quadratorum*, que versam sobre a relação de sequências de números ímpares consecutivos e números quadrados, para tanto, partimos de livro *The book of squares* de L. E. Sigler de 1987, como nossa referência principal e B. R. McClenon em seu trabalho intitulado *Leonardo of Pisa his Liber Quadratorum* de 1919 como nossa referência secundária. Fizemos um passeio pelo período vivenciado por este importante personagem, que foi professor e escreveu sobre a matemática, assim destacamos sua influência para o desenvolvimento e divulgação dos métodos algorítmicos da matemática árabe na Europa no início do século XIII, a partir de um diagrama modelo proposto por Chaquiam (2015, 2016), assim, foi construído uma base para que pudéssemos apontar as potencialidades didático/pedagógicas deste livro de Leonardo Fibonacci, considerando, principalmente, os argumentos reforçadores de Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004). Após as análises, foi possível responder ao nosso questionamento e pudemos apontar potencialidades como: construção de diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas, atividades de potenciação, principalmente de quadrados, atividades com raiz quadrada, entre outros descritos neste relatório. Desta forma, manumitir o *Liber Quadratorum* para fins explicitamente pedagógicos, vetorizando o ensino, pode em muito prestar grande auxilio ao educador matemático que queira traçar caminhos que vão ao encontro das necessidades do aluno.

**Palavras-Chave:** História da matemática. Leonardo Fibonacci. *Liber Quadratorum*. Ensino de Matemática.

# ABSTRACT

In this research report we show the Italian mathematician Leonardo de Pisa, better known as Fibonacci, who we refer to as Leonardo Fibonacci, who contributed significantly to the mathematical community of his time, attracting attention from important people of this period such as King Frederick II, and to his invitation Leonardo Fibonacci participates of a mathematical tournament, which, as a follow up the construction of his fourth work (that we have known) the Liber Quadratorum. In this way the following question occurs to us: what are the didactic / pedagogical potentialities that can be evidenced from these propositions and their demonstrations that can be used in the classroom to effect the teaching / learning of mathematical contents? In order to answer this question, we aim in this research report to analyze the problems contained in Leonardo Fibonacci 's Liber Quadratorum, in which we aim at a better understanding of the concepts, providing a material in Portuguese and searching for possible didactic / pedagogical potentials. To do so, we searched for materials that subsidized the study and a basic text for the construction of the material in Portuguese referring to twelve propositions contained in the Liber Quadratorum, which deal with the sequence of consecutive odd numbers and square numbers. The book of squares of LE Sigler of 1987, as our main reference and BR McClenon in his work titled Leonardo of Pisa his Liber Quadratorum of 1919 as our secondary reference. We took a tour of the period experienced by this important character, who was a teacher and wrote about mathematics, so we highlight its influence for the development and dissemination of algorithmic methods of Arab mathematics in Europe in the early thirteenth century, from a proposed model diagram by Chaquiam (2015, 2016), thus, a basis was built so that we could point out the didactic / pedagogical potentialities of this book by Leonardo Fibonacci, especially considering the reinforcing arguments of Miguel (1997) and Miguel and Miorim (2004). After the analysis, it was possible to respond to our questioning and we could point out potentialities such as: construction of several ways to find the Pythagorean triples, potentiation activities, mainly squares, activities with square root, among others described in this report. In this way, to maintain the Liber Quadratorum for explicitly pedagogical purposes, by vectorizing the teaching, can greatly assist the mathematical educator who wants to trace paths that meet the needs of the student.



**Key-Words:** History of mathematics. Leonardo Fibonacci. *Liber Quadratorum*. Mathematics Teaching.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# SUMÁRIO

## APRESENTAÇÃO

Em meio às adversidades da educação matemática, há inúmeros obstáculos a serem superados, em meio a esta tensão educacional, estudiosos da área reúnem esforços individuais e conjuntos para ir ao encontro destas necessidades educacionais. Assim, munidos de um *corpus teórico*, estes instituem tendências educacionais para o ensino/aprendizagem de matemática. Mediante a estas tendências tomam a História da Matemática como uma geratriz de materiais que devem ser adequados ao ensino, e partindo dessa composição, se constituir como uma área de pesquisa.

Como um vasto campo de pesquisa, a História se ramifica por três subáreas: história e epistemologia da matemática, história da educação matemática e história da matemática para o ensino. Desta forma, a História da Matemática se configura ao longo de sua própria história como componente importante na educação, compondo eixos em congressos de Educação Matemática por todo o globo em reuniões próprias, sejam estas locais, regionais, nacionais ou internacionais, bem como, sendo requisitada em documentos oficiais como os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

Os documentos oficiais apresentam argumentos favoráveis à inserção da História da Matemática no ensino, do mesmo modo que sugerem formas de utilização desta. Como, por exemplo, quando a BNCC infere possibilidades de desenvolvimento de projetos com o uso da História da Matemática visa o estudo de um determinado conteúdo e sua função social quando apresenta que,

> [...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2016, p. 254).

Desta forma, percebemos a importância do uso da história da matemática como um recurso didático (de ensino). Neste sentido, Mendes e Chaquiam (2016) expõem que os estudos sobre a possibilidade de abordagens didáticas que podem ser propostas para o ensino da matemática com base na história, atualmente, vem se ampliando.

Uma forma de se fazer essa abordagem se fundamenta no estudo de um determinado conteúdo matemático e seu contexto histórico, que envolve questões político-sociais e outros aspectos dos personagens envolvidos, bem como, de livros históricos de conteúdos de matemática. Possibilitando aos estudantes,

> Uma oportunidade enriquecedora de se inserir o máximo possível no contexto em que o matemático, o texto matemático escrito por ele, a comunidade que viveu, trabalhou e produziu tal matemática, em busca de estabelecer uma de multiplicidade explicativa para as noções matemáticas que precisará aprender (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 11).

Nesse sentido, buscamos em meio a tantos personagens na história da matemática, o matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, a quem nos referimos por Leonardo Fibonacci (1180-1250), para que possamos fazer alusão ao seu nome sem perder a denominação que lhe foi atribuída. Dessa forma, investigamos a vida e obra de Leonardo Fibonacci e o desenvolvimento de suas ideias matemáticas assim, caracterizamos o nosso estudo como história e epistemologia da matemática.

É importante evidenciar que, este tema foi destacado no Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM), da Universidade Federal do Pará (UFPA), pelo orientador desse trabalho, o que causou o interesse do tema desta pesquisa, assim como, as formas com as quais Leonardo Fibonacci aborda suas proposições e as demonstra.

Este brilhante matemático, do décimo segundo século, influência a Europa com suas obras de tal forma que, os europeus passam a utilizar os algarismos indo-arábicos a partir da publicação do seu *Liber Abaci* (1202). Utilizado como uma espécie de manual pelos europeus desta época.

Uma de suas obras, o *Liber Quadratorum* (1225), nos atraiu por seu conteúdo, pelas formas com as quais Leonardo Fibonacci demonstrava as proposições contidas neste livro e a sua interpretação de número.

Com o interesse de investigar melhor essas atribuições, buscamos trabalhos referentes ao *Liber Quadratorum* em bancos de dados, como a CAPES (plataforma sucupira), SCIELO (Scientific Electronic Library Online) e ERIC (Education Resources Information Center), como resultado encontramos trabalhos referentes a Leonardo Fibonacci, principalmente no que diz respeito ao *Liber Abaci*. Em contrapartida a essa gama de trabalhos referentes aos problemas contidos no *Liber Abaci*, não vimos à mesma disposição para o *Liber Quadratorum*.

Com estes resultados, nos questionamos se de fato este livro teria uma importância para sua época, ou mesmo se um estudo sobre ele seria de grande valia para nossos dias. Assim, pesquisamos em livros de História da Matemática quais seriam as referências que os autores tinham no que diz respeito a este livro de Leonardo Fibonacci.

Ao dar continuidade em nossa pesquisa, constatamos que muitos autores faziam referência ao *Liber Quadratorum*, no entanto, Aragão (2009) nos chamou a atenção quando se refere a este livro como a obra mais valiosa legada pela idade média. Desse modo, percebemos uma disparidade entre nossas conclusões em relação às pesquisas feitas nos bancos de dados e as pesquisas feitas em livros. Concluímos então, que embora não haja uma quantidade significativa de trabalhos a respeito do *Liber Quadratorum,* por motivos dos quais desconhecemos, este livro possui uma grande importância para estudos ligados à história da aritmética e da álgebra. Dessa forma, entendemos ser válido um trabalho que busca melhor apresentar este livro em língua portuguesa.

Munidos desta certeza, procuramos referências que nos apoiassem neste estudo, assim, buscamos em Miguel (1993), Miguel (1997), Miguel e Miorim (2004) e Miguel (2009), bem como em Mendes (2009a), Mendes (2009b), Mendes (2015) e Mendes e Chaquiam (2016), uma base teórica para nossa pesquisa que pudesse abarcar a retomada da obra deste matemático italiano para fins didáticos. A partir das leituras dos trabalhos desses pesquisadores, entre outros, nos foi possível perceber que o *Liber Quadratorum* tem um potencial histórico para o ensino/aprendizagem, pois pode ser enquadrado nas potencialidades descritas pelos autores. No entanto nos ocorre o seguinte questionamento: Quais são as potencialidades didático/pedagógicas que podem ser evidenciadas a partir dessas proposições e suas demonstrações que podem ser usadas em sala de aula para efetivar o ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos?

Para responder a este questionamento, objetivamos analisar os problemas contidos no *Liber Quadratorum* de Leonardo Fibonacci, visando um maior entendimento dos conceitos, provendo um material em português e buscar possíveis potenciais didático/pedagógicos. Este objetivo se desdobra em quadro, os quais direcionam os nossos procedimentos metodológicos, assim temos como finalidades:

- ✓ Possibilitar a interação com a história da humanidade e da matemática, permitindo uma capacidade de compreensão mais adequada das condições em que foi escrito o *Liber Quadratorum*;
- ✓ Construir um material em português para o estudo de doze proposições do *Liber Quadratorum*;
- ✓ Comentar os problemas e soluções (demonstrações) de doze proposições do *Liber Quadratorum*;
- ✓ Indicar as possíveis potencialidades didáticas que as proposições e soluções do *Liber Quadratorum* possam ter, bem como, as informações históricas que circundam este, a partir das propostas de Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004).

Assim, delineamos nosso estudo em quatro momentos:

*Primeiro Momento*

Para possibilitar uma interação com a história da humanidade e a história da matemática construindo o contexto em que foi escrito o *Liber Quadratorum*, buscamos vários materiais que pudessem nos dar pistas do período histórico em que viveu o matemático Leonardo Fibonacci, bem como, as condições de aprendizagem da época e seus interesses. Após reunir estes materiais, encontramos em Chaquiam (2015) e Chaquiam (2016) um modelo para suprir nosso primeiro objetivo. Desse modo, a partir de uma adaptação da proposta deste autor, encontramos uma forma de construir o contexto histórico de Leonardo Fibonacci e os influenciadores de sua obra.

*Segundo Momento*

Após compreender o contexto histórico e os possíveis matemáticos que influenciaram Leonardo Fibonacci, iniciamos a construção de um texto em português do *Liber Quadratorum* para melhor compreendê-lo. Para tanto, necessitávamos do livro para poder materializar suas proposições em português, no entanto não encontramos o original, assim buscamos traduções para outras línguas. Nessa busca encontramos dois textos bases em inglês – *The Book of Squares. An annotated traslation into modern english* de L. E. Sigler publicado em 1987 e *Leonardo of Pisa his Liber Quadratorum* de B. R. McClenon publicado em 1919.

Utilizamos Sigler (1987) como fonte principal e McClenon (1919) como fonte secundária para a construção de nosso material em português. Mesmo com estes referenciais especializados, para nosso estudo, percebemos a necessidade de um direcionamento adequado do inglês para o português. Deste modo, buscamos em Vinay e Darbelnet (2000), recursos teóricos para uma melhor fundamentação do nosso processo de tradução.

Para tanto, nos deparamos com dois métodos de tradução, que se desdobram em sete procedimentos. Como comentam Vinay e Darbelnet (2000),

> Em primeiro lugar os diferentes métodos ou procedimentos parecem ser incontáveis, mas eles podem ser condensados apenas em sete, cada um correspondendo a um grau mais alto de complexidade. Na prática, eles podem ser usados sozinhos ou combinados com um ou mais dos outros (VINAY e DARBELNET, 2000, p. 84).

Para melhor exemplificar, apresentamos a seguir um quadro que nos permite uma visualização completa da combinação desses procedimentos.

Quadro 1 – Métodos e procedimentos de tradução de Vinay e Darbelnet (2000).

| | | |
|---|---|---|
| **Traduções Diretas** | **Empréstimo** | Recupera-se os termos estrangeiros com a finalidade de introduzir a cultura da língua original na tradução. |
| | **Decalque** | Mantém a expressão da língua de partida, traduzindo cada um dos elementos. |
| | **Literal** | Baseia-se na tradução palavra por palavra, isto é, um método de transferência direta da língua original para a língua desejada com apropriação da gramática e do idioma. |
| **Traduções Obliquas** | **Transposição** | Troca à classe de uma palavra por outra sem mudar o significado da mensagem. |
| | **Modulação** | Há variação na forma da mensagem por meio de uma mudança de ponto de vista. |
| | **Equivalência** | As mensagens são equivalentes, mas não mantém a mesma natureza sintagmática. |
| | **Adaptação** | Uma nova situação é criada por inexistência de correspondência entre os dois idiomas. |

Fonte: Elaborado pelo autor, a partir de Otero-Garcia (2012).

Com este panorama e direcionados por Vinay e Darbelnet (2000) e como em Otero-Garcia (2012), julgamos ser mais apropriado para nossos objetivos um combinado do método de tradução direta, o qual, fizemos uso, principalmente, do procedimento literal, no qual, em determinados momentos, não forneciam o suporte necessário, assim, nos apropriamos do procedimento literal combinado com o procedimento transposição. Orientados desta forma, materializamos o nosso texto em português, o qual se tornou nosso principal material, para dar continuidade ao estudo.

*Terceiro Momento*

Neste momento com o material em português construído, analisamos as proposições, no sentido de verificar o que as proposições, bem como, suas soluções poderiam nos oferecer no que tangem a potencialidades didático/pedagógicas. A princípio, sem direcionar nossa atenção para as explicações e comentários de Sigler (1987) e McClenon (1919), com o intuito de, inicialmente não considerar suas influências em nossas explicações e comentários. É importante evidenciar que, embora a construção deste material em português abarque todas as vinte e quatro proposições, refinamos a tradução e estudamos de forma mais concisa as proposições de um a onze e a proposição dezessete, a qual impulsiona Leonardo Fibonacci a escrever o livro, pois, julgamos serem suficientes para apontar as potencialidades didático/pedagógicas, por sua importância na história da construção do livro.

Após selecionar as proposições, construir nossas próprias explicações, comentários e conclusões, comparamos com os materiais de McClenon (1919) e Sigler (1987), no qual salientamos os pontos comuns e divergentes, para uma melhor compreensão do que cada proposição pode oferecer, ou seja, o potencial que essas proposições conjuntamente com o contexto histórico pode oferecer para a efetivação do ensino/aprendizagem.

*Quarto Momento*

Munidos dos subsídios que julgamos necessários, tanto no que diz respeito aos estudos das proposições, quanto de uma base teórica para apontar potencialidades, delineamos o que, para nós, vem a ser potencial didático/pedagógico. Desta forma, passamos a ponderar as atribuições encontradas nas proposições com as potencialidades da história da matemática e nossa própria definição, o que possibilitou apontar potencialidades didático/metodológicas que o *Liber Quadratorum* possa ter.

Evidenciamos aqui, que estas possíveis potencialidades do *Liber Quadratorum* não serão avaliadas em termos empíricos além do próprio livro. Assim, apenas evocamos potenciais, que possam permitir a vetorização das proposições, bem como, o contexto histórico que o circunda, a luz do proposto por Miguel e Miorim (2004), desta forma encerramos nossos procedimentos metodológicos.

Essa organização nos oportunizou a construção de três capítulos, tendo estes as seguintes atribuições:

O capítulo 1 apresenta o contexto histórico em que nosso personagem Leonardo Fibonacci estava assim, fizemos conexões com personagens contemporâneos a este matemático, bem como, os possíveis influenciadores.

No capítulo 2 apresentamos um material em português do *Liber Quadratorum* referente a doze proposições deste, referenciados por Vinay e Darbelnet (2000), nos dando um controle estrito da fiabilidade desse material.

Posteriormente, no capítulo 3, materializamos a análise deste livro de Leonardo Fibonacci, reunindo nossos comentários e explicações com os comentários de McClenon (1919) e Sigler (1987), o que nos possibilitou apontar potenciais didático/pedagógico do texto estudado.

Por fim, apresentamos nossas considerações encerrando este relatório de pesquisa.

Podemos desta forma, evidenciar que, McClenon (1919), traz alguns comentários das proposições, no entanto, não apresenta a tradução na íntegra. Já Sigler (1987) apresenta uma tradução mais completa, bem como, seus comentários, mas não apresenta potenciais para o livro. Assim, com o intuito de contribuir para a comunidade acadêmica apresentamos neste relatório de pesquisa uma tradução, comentários e indicamos os potenciais didático/pedagógicos do *Liber Quadratorum*.

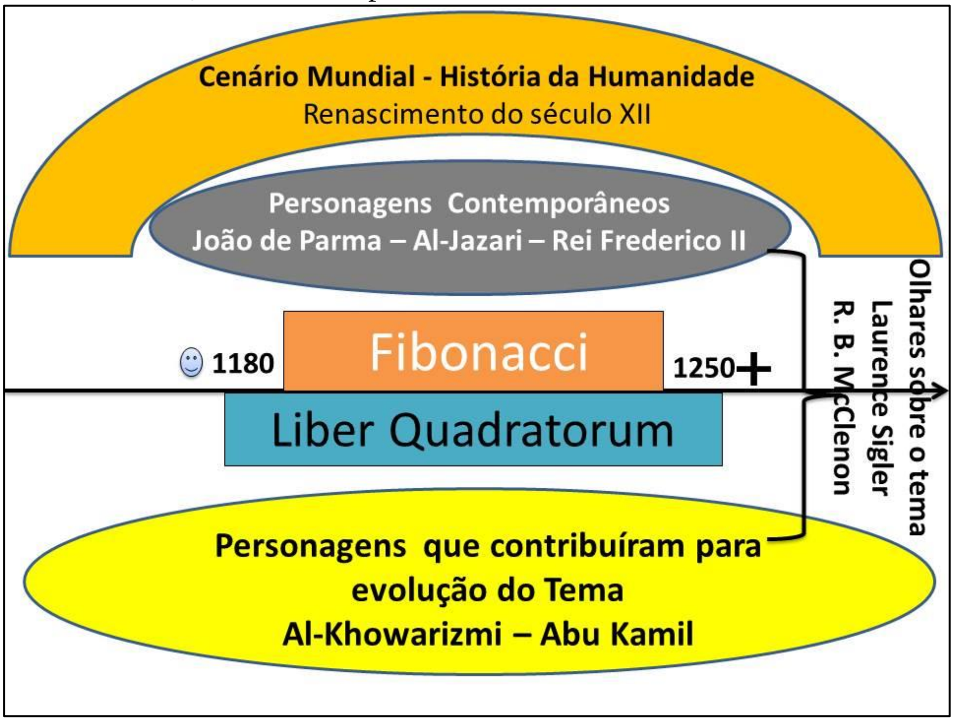
Desta forma, e com este direcionamento a seguir, iniciamos nossa apresentação sobre Leonardo Fibonacci e seu *Liber Quadratorum*. Apresentamos o contexto histórico e social em que este matemático estava inserido, assim como o momento de produção de sua obra.

# 1 LEONARDO FIBONACCI: contexto histórico e social da vida e obra.

Neste capítulo apresentamos o livro *Liber Quadratorum*, escrito em 1225, o qual associamos aos personagens Leonardo Fibonacci (1180 – 1250), Al-khowarizmi (708 – 850) e Abu Kamil (850 – ???), sendo considerado aqui como personagem principal Leonardo Fibonacci, o autor do citado livro. Com a finalidade de possibilitar a interação com a história da matemática e com a história da humanidade, nos permitindo uma capacidade de compreensão mais adequada das condições em que foi escrito o *Liber Quadratorum*, viabilizando um maior entendimento dos conceitos descritos neste livro.

Assim, este capítulo foi elaborado a partir do uso do diagrama modelo (figura 1) adequado ao contexto histórico e social do nosso personagem principal e de sua obra. Este diagrama modelo foi elaborado após o estudo preliminar do *Liber Quadratorum* e dos personagens envolvidos, baseado nas propostas indicado por Chaquiam (2015), publicado no livro *História da matemática em sala de aula: propostas para integração dos conteúdos matemáticos* e em Chaquiam (2016), publicado no livro *Histórias nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*.

Figura 1 – Diagrama ilustrando o cenário de desenvolvimento do *Liber Quadratorum*, por Leonardo Fibonacci.




Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Chaquiam (2016).

Em conformidade com o diagrama proposto, apresentamos de início, o cenário mundial no qual nosso personagem principal se insere. O período compreendido entre os séculos XII e XIII, com o intuito de nos situar na história da humanidade a partir dos traços biográficos de diversos personagens e os elementos que levaram Leonardo Fibonacci a escrever o *Liber Quadratorum*.

## 1.1 Renascimento do século XII

Julgamos importante neste momento à retomada do período histórico e social em que Leonardo Fibonacci estava inserido, com isso caracterizamos o cenário do nosso discurso sobre este personagem e sua obra (*Liber Quadratorum*). Boyer (1974) salienta algo interessante sobre a importância de delimitar o período de tempo no qual se desenvolveu um dado trabalho:

> O tempo e a história são, é claro, sem emendas, como o contínuo da matemática, e qualquer subdivisão é obra do homem: mas assim como um sistema de coordenadas é útil na geometria, também a subdivisão em períodos ou eras é conveniente para a história (BOYER, 1974, p. 180).

Assim, falamos inicialmente do cenário pré-renascentista ou renascimento do século XII em que Leonardo Fibonacci nasce (CASTILLO, 2007). Este cenário, segundo Sestito e Oliveira (2010), está compreendido na idade média central (séculos XI - XIII). O que vale ressaltar, que antes deste momento e após a queda do império romano em 476 a Europa passava por um extenso período de instabilidade.

Conforme Franco Júnior (2001), a formação do feudalismo usa material histórico do século IV – ainda em meio à crise do Império Romano (sentida de uma maneira mais forte no século III) – até o século IX, consolidando-se no período do século IX à XI, chegando à baixa idade média, quando a Europa passava por transformações e atingia o apogeu do sistema feudal.

Em meio a essas transformações, de cunho social, político, econômico e cultural, três chama a nossa atenção: a transformação na forma de produzir, o crescimento demográfico e o renascimento comercial (SESTITO e OLIVEIRA, 2010).

Naquele momento (século XIII) temos o aumento significativo na produção dos gêneros agrícolas, que se deve ao avanço tecnológico nessa área. Temos então o desenvolvimento do arado de ferro com rodas, dos moinhos hidráulicos e a utilização da atrelagem dos animais (bois e cavalos) pelo peito que representam essa evolução. Valendo ressaltar que Eves (2011), elucida que algumas civilizações anteriores tiveram seu desenvolvimento ou surgimento não só de demanda populacional, como de desenvolvimento de ferramentas dentre outras coisas, tendo como centelha uma revolução ou desenvolvimento agrícola.

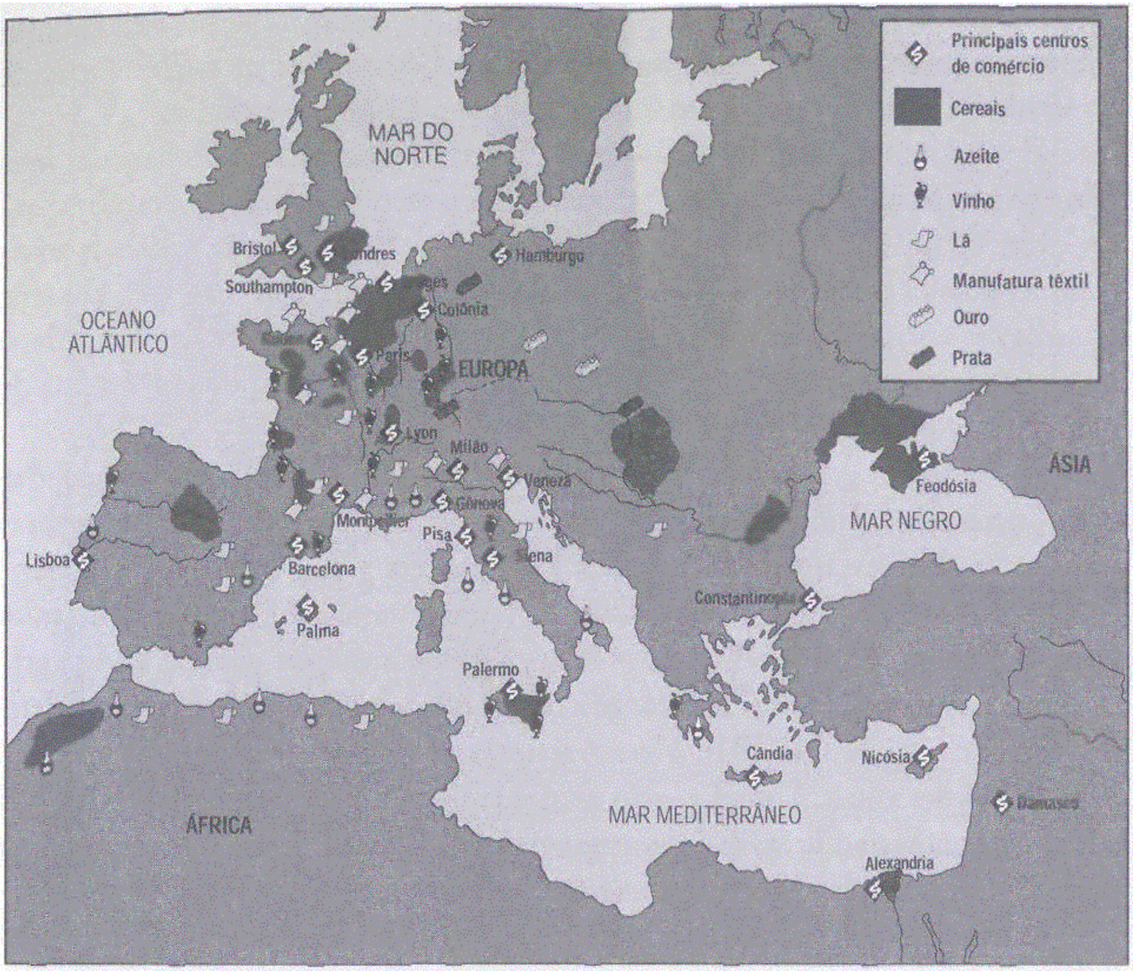
Com o aumento de alimentos e da amenização das cruzadas houve o aumento demográfico por consequência. Nesta ocasião, era vivenciada certa tranquilidade. Com alimentos suficientes e sem guerras, foi proporcionado um ambiente adequado para o aumento significativo da população Europeia. Surgindo assim novas cidades a partir dos burgos[1], o que aumentou as necessidades de transformações. Por decorrência temos o surgimento de novas profissões e o uso do dinheiro, principalmente moedas de ouro e prata que começaram a circular com maior intensidade. Nesse novo momento temos o surgimento de algumas figuras como os cambistas e os banqueiros para garantir as trocas de moedas e a segurança das fortunas dos prósperos burgueses, assim como o surgimento das corporações de ofício, que eram associações que reunião artesões de uma mesma profissão, servindo para defender os seus interesses trabalhistas e econômicos.

Nesse contexto de transformações e surgimento das cidades e da burguesia, temos o florescimento do comércio ou a retomada (renascimento) do comércio. Com o aumento da produção agrícola, da produção artesanal urbana e o contato com povos orientais o comércio ganha um expressivo impulso, desenvolvendo rotas locais e internacionais, tanto para o norte (Dantzig, Hamburgo e Londres) quanto para o sul (mar mediterrâneo – Barcelona, Genova e Veneza).

Nesse momento de aquecimento comercial polos comerciais italianos despontaram (figura 2), como: Veneza, Gênova, Pisa, Amalfi, Milão e Flandres (atual Bélgica e Holanda) e entre as mais famosas feiras estavam as de Champagne. Temos uma organização desses comerciantes que eram as HANSAS ou LIGAS (associação de comerciantes). Nas cidades citadas acima, destacavam-se as universidades, que a partir do século XII tornaram-se excelentes centros de ensino, pois as cidades foram transformando-se pausadamente em centros culturais cada vez menos ligados aos valores da Igreja.

[1] Conjunto de habitações fortificadas que serviam de residência para os burgueses.

Figura 2 – As principais produções medievais.




Fonte: Franco Júnior (2001).

Além desses eventos citados anteriormente, temos outros marcantes como quando o papa Inocêncio III incentivou os estudantes e professores a viajarem para a Grécia em 1205 e nessa mesma ocasião o rei Felipe Augusto da França funda um colégio para que os gregos de Bizancio pudessem aprender latim. No final do século XII já havia algumas traduções, como alguns tratados de Galeno e os aforismas de Hipócrates feito por Burgundio de Pisa, assim, como os Meteoros de Aristóteles, traduzido por Henrico Aristipo em ambos os casos as traduções foram feitas diretamente das obras originais. Já em meados do século XIII, havia várias traduções dos livros de Aristóteles, assim como de Euclides e Herón[2] (CASTILHO, 2007).

No período em questão, surge algo inusitado chamado de leitor silencioso ou leitura em silêncio que vinha a crescer, até então, dentro dos mosteiros, nessa ocasião, surgem pessoas como santo Agostinho que viu essa prática de leitura com santo

[2] A óptica e a catróptica de Euclides, assim como a pneumática de Herón.

Ambrósio que movia apenas os olhos, isso levava os leitores a ter uma leitura sem intervenções externas o que leva o leitor a tornar-se um ser que pensa. Vale ressaltar que a leitura passava a ter um maior apreço, isso, a partir do século XI, até chegar ao momento em que a leitura se torna um lazer e trabalho, se proliferando principalmente ao redor das universidades como os demais ofícios relacionados com o livro (CASTILHO, 2007).

É nesta ocasião que surgem alguns personagens que influenciaram diretamente ou indiretamente este período do renascimento e na produção de Leonardo Fibonacci. Entre estes personagens estão imperadores, reis, figuras religiosas, matemáticos, inventores, entre outros. Sendo Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) um dos destaques.

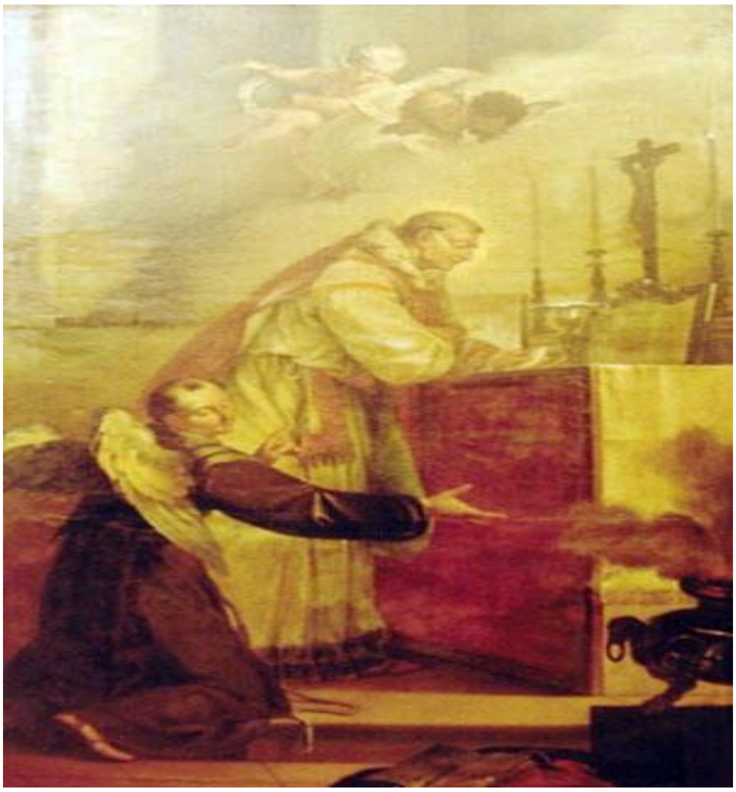
Assim, podemos enfatizar que, ao escolhermos o *Liber Quadratorum* como nosso objeto de estudo, fizemos, com que, Leonardo Fibonacci se constitua no personagem principal de nossa pesquisa. Como já observamos anteriormente, para melhor nos situarmos em tempo e espaço (o contexto de estudo), apresentamos outros personagens contemporâneos a Leonardo Fibonacci, dentre eles destacamos João de Parma (1208 – 1289), Al-Jazari (???? – 1206) e o rei Frederico II (1194 – 1250) imperador romano-germânico, os quais comentaremos a seguir.

## 1.2 Contemporâneos de Leonardo Fibonacci (1180 – 1250)

O primeiro desses é João Buralli, mais conhecido como João de Parma, nasceu na Itália na cidade medieval de Parma, em torno de 1208, perdendo seus pais Alberto Buralli e Antonia Bertani, ainda pequeno. Com a ausência dos pais foi confiado a um tio padre diretor de uma hospedaria em São Lázaro, nos arredores da cidade de Parma. O tio cuidou de sua educação e João frequentou escolas que o ajudaram em sua carreira. Depois de terminar os anos de estudo obteve o título de mestre e doutor em filosofia, posteriormente lecionou Lógica tornando-se conhecido por sua cultura e seu espírito religioso (Cadernos..., 2009).

João de Parma ingressou em 1223 na Ordem dos Frades Menores, devido a seus talentos e maturidade espiritual, em seguida foi encarregado pelo Ministro Geral, Frei Elias, pelo setor dos estudos e do ensino.

Figura 3 – Pintura representando João de Parma



Fonte: http://www.franciscanos.org.br/?p=31247

Em pouco tempo tornou-se muito conhecido como doutor em letras, teologia e música. Ensinou na Bolonha, em Nápoles e Paris. De acordo com o caderno de espiritualidade franciscana, foi eleito ministro geral em 1247 e morreu em 1289 na cidade de Camerino.

Viajando agora para o sul da Turquia, na Jazirat ibn Umar a atual Cizre, temos Al-Jazari cujo nome completo era Badi' al-Zaman Abu al-Izz Isma'il Ibn al-Razzaz al-Jazari, que foi um engenheiro muçulmano[3] que viveu nas intermediações dos séculos XII e XIII.

Sua vida não se delimitou apenas como engenheiro, mas como inventor, matemático, artesão entre outras coisas mais a qual sua vida foi dedicada. Hoje, Al-Jazari se torna muito conhecido por sua obra chamada em português de *o livro de conhecimento de dispositivos mecânicos geniais*.

[3] Todo indivíduo que adere ao Islão; uma religião monoteísta centrada na vida e nos ensinamentos de Maomé, os quais dão ênfase ao estudo do Alcorão.

Figura 4 – Pintura representativa feita de Al-Jazare

Fonte: http://www.edubilla.com/inventor/al-jazari/

Livro esse que traz engenhosidades até mesmo de cinquenta máquinas que em sua maioria eram hidráulicas. Este livro é concluído em 1206, e neste mesmo ano de conclusão Al-jazari morre (retirado do guia: construa sua própria exposição na escola).

O último dos quais anunciamos é o Imperador do Sacro Império Romano-germânico (imperador de Roma), que ficou conhecido como rei Frederico II, foi rei da Alemanha, da Sicília e de Jerusalém, nasceu em Jesi na Itália. Seu reino achou-se marcado pelas desavenças com o papado, o que causou a extinção da casa de Hohenstaufen[4] ou dinastia Staufer, que foi uma importante linhagem germânica que, durante os séculos XII e XIII, dominou o Sacro-Império Romano Germânico, (LOSSIO JUNIOR, 2006). Ainda segundo o autor, Frederico II possuía uma linhagem real, neto de Frederico I [5] e filho de Henrique VI de Hohenstaufen e Constança de Altavilla, herdeira do reino normando da Sicília filha do rei Rogério II.

[4] O nome deriva do castelo de Stauf.
[5] Também conhecido como Frederico Barba-roxa, Barbarossa ou Barbarruiva.

Figura 5 – Pintura ilustrando Rei Frederico II

Fonte: http://tiooda.com.br/index.php/nobreza/reis/2450-frederico-ii-da-germania-o-primeiro-homem-da-renascenca

Frederico II, aos três anos fica órfão de pai e posteriormente perdeu sua mãe Constança; ficando Frederico aos cuidados do papa Inocêncio III e sobre sua tutela recebe a coroação como rei da Alemanha em 1197 e da Sicília em 1199, em seguida em 1208 proclama sua maioridade com quatorze anos, do qual começa a exercer papel fundamental e efetivo nas relações políticas da região. Foi eleito pela Dieta de Frankfurt em 1212 e coroado imperador de Roma em Mainz pelo papa Honório III em 1220.

Após uma cruzada em Jerusalém, em 1228, a qual em vez de lutar, negociou com o sultão Al-Kamil e conquistou pacificamente Nazaré, Belém e Jerusalém, o que desagradou diretamente o papa em vigência, passando a ter desavenças com o papado. Como consequência, ficou conhecido como anticristo pelos seus opositores por adotar alguns costumes muçulmanos e paradoxalmente como rei dos padres devido a seu apoio a eleição do papa Inocêncio IV. Novas desavenças com o papado o levaram a deposição em 1245, dando fim a quase cinquenta anos de reinado refugiando-se para Apulia no sul de Itália até sua morte em 1250 (ARAÚJO, 2013).

Reorganizou o sistema administrativo, promoveu o comércio, a indústria e a agricultura. De acordo com Lossio Junior (2006), incentivava os estudos e as artes em geral fundando em Nápoles, a primeira universidade laica[6], e foi mestre da Escola Siciliana de Poesia, e reescreveu, também, um manual sobre a arte da falcoaria[7] (LOSSIO JUNIOR, 2006).

Foi um Poliglota, escritor e matemático e ainda segundo o autor, tentava, com isso, se aproximar de uma herança da Antiguidade Clássica; sendo considerado, por alguns autores, como um precursor do Renascimento (LOSSIO JUNIOR, 2006).

Desta forma, conseguiu reunir ao seu redor, uma elite de sábios: judeus, árabes e cristãos, o que transformou a corte em ponto de encontro das diversas correntes culturais da época.

Assim, a matemática de Leonardo Fibonacci, influenciada fortemente pela matemática árabe, se torna uma referencia, até mesmo para os trabalhos dos jovens matemáticos italianos do século XII, se expandindo com a publicação de seus trabalhos, que provavelmente João de Parma leu em especial o *Liber Abaci*, afinal este livro é um ponto de referência para os cálculos com os algarismos indo-arábicos que tomam conta da Europa e embora sua influência maciça tenha partido de Árabes e Indus, é bem provável que Leonardo Fibonacci tenha tido contato com os livros de Al-Jazari.

No entanto, sua influência, que direciona as atividades matemáticas na Europa, só se efetiva a partir do século XIII, como principal representante dessa escola. Estas características levam o matemático Leonardo Fibonacci a ser contratado como o primeiro professor público de cálculo a quem os governantes italianos destinaram pagamento como consultor de matemática, e este cargo provavelmente fora viabilizado pelo rei Frederico II.

Desta forma, entendemos, que o contexto de exportação agrícola, assim como, a necessidade de maior conhecimento mercantil, influenciou Leonardo Fibonacci em suas viagens e em sua busca pelo conhecimento, de mesmo modo o contexto que ele está inserido é influenciado direta ou indiretamente pelos personagens que nos referimos anteriormente, bem como às decisões do rei Federico II. Uma influência que resulta para nosso personagem principal a profusão de um conjunto de obras que acabaram por

[6] É um conceito que denota a ausência de envolvimento religioso em assuntos governamentais, bem como ausência de envolvimento do governo nos assuntos religiosos.
[7] Falcoaria ou cetraria é a arte de criar, treinar e cuidar de falcões e outras aves de rapina para a caça.

influenciar o seu mundo, de tal forma que percebemos suas consequências até em nossos dias.

Deslocando o foco para Leonardo Fibonacci[8], o autor Castillo (2007) salienta em seu livro que ele viveu, como ressaltamos anteriormente, nesse clima pré-renascentista, cresceu durante um período de grande desenvolvimento cultural. Em muitas das grandes cidades italianas, pedreiros, escultores e arquitetos estavam construindo grandes monumentos arquitetônicos (SERRÃO, 2014).

Nasceu em 1180[9] em Pisa na Itália, a qual segundo Eves (2011) era um centro comercial importante, no qual seu pai Guiglielmo Bonacci, era um secretário da República de Pisa ligado aos negócios mercantis (OLIVEIRA, 2013).

Figura 6 – O matemático Leonardo Fibonacci.

Fonte: http://berg.com.ua/profile/fibonacci/

Seu pai era um mercador italiano com interesse no norte da África, iniciou os seus negócios com assuntos de contabilidade mercantil, que despertou o interesse de Leonardo Fibonacci por matemática, que foi além das aplicações práticas, ou seja, foi para além das práticas comerciais de compra e venda de mercadorias.

---

[8] Fibonacci significa filho de Bonaccio, apelido que foi dado seiscentos anos mais tarde pelo Historiador Guillaume Libre.

[9] Há algumas divergências quanto ao ano de nascimento, no entanto adotamos para essa questão Castillo (2007).

> Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária (EVES, 2011, p. 292).

Nesse momento, segundo Devlin (2012), Leonardo Fibonacci estudou o ábaco a pedido de seu pai em um lugar cujo nome era escola do ábaco, pois considerava útil e apropriado o estudo para o filho, que provavelmente ajudaria em seus empreendimentos. Ali, ainda jovem, teve contato com comerciantes de diversas culturas da região mediterrânea, na qual aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas do ocidente (OLIVEIRA, 2013).

Castillo (2007) apresenta em seu trabalho que, Leonardo Fibonacci estudou sob a supervisão de um professor árabe (sem citar seu nome) e percorreu o Egito, Síria, Grécia e Sicília. Isso o levou a entrar em contato direto, segundo Eves (2011), com os procedimentos matemáticos orientais e árabes e passou a ser um sério defensor dos números indo-arábicos após conhecê-los nessas viagens, o motivando a dedicar-se ao estudo desses novos algarismos e a essa nova forma de calcular.

A motivação pelo estudo dos números indo-arábicos o levou a escrever um livro chamado de *Liber Abaci* (o livro do ábaco ou do cálculo) em 1202, logo depois de retornar a sua cidade natal, que foi reeditado em 1228. Essa obra, em conformidade com Garbi (2007), torna Leonardo Fibonacci o primeiro cristão a discorrer sobre álgebra. E segundo Boyer (1974), este livro traz uma característica na maneira de pensar medieval tanto islâmica quanto cristã, o livro ainda, segundo o autor, trata de uma maneira mais acentuada de números do que de geometria descrevendo as *nove cifras indianas*, assim como o símbolo zero[10]. Leonardo Fibonacci objetivava, com este livro, propor outro caminho para as realizações de cálculo além do ábaco.

> O livro contém não apenas as regras para cálculo com os numerais indo-árabes, mas também diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outro tipo de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos, entre eles o método da falsa posição e a resolução de equações quadráticas (SERRÃO, 2014, p. 70).

Eves (2011), nos mostra que o *Liber Abaci* é composto de quinze capítulos, os quais explicam a leitura e a escrita desses "novos numerais", como comentado

[10] Chamado de *zephirum* em árabe, é desta palavra que derivam as palavras "zero" e "cifra".

anteriormente. Abarca procedimentos de cálculo com frações e inteiros, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, tanto pelo método de falsa posição como por processos algébricos e não eram admitidos as raízes negativas e imaginárias. Desta forma, este livro passa a ser uma espécie de manual.

Após essa publicação, sua fama se expande pela a Europa e seus estudos contínuos o levam a publicação do seu segundo livro, o qual temos conhecimento. Intitulado de *Practica Geometriae* (Geometria Prática), descreve seus conhecimentos de geometria e trigonometria, escrito em 1220. Esta obra é dividida em oito capítulos e traz uma grande coleção de problemas geométricos e teoremas baseados nos Elementos de Euclides (OLIVEIRA, 2013). O livro foi dedicado ao astrônomo Imperial Dominicus Hispanus, o qual lhe apresentou ao Imperador Frederico II (OLIVEIRA, 2013). Este livro, segundo Eves (2011), tem uma abordagem hábil e foi escrito com um rigor Euclidiano.

A terceira publicação que temos conhecimento foi escrita no ano de 1225, um tratado intitulado *Flos* (Flor) em que há problemas indeterminados que lembram Diofanto (250 dC) e problemas determinados que lembram Euclides, os árabes e os chineses (BOYER, 1974). Boyer (1974) deixa claro que é evidente que este Pisano usou muitas e variadas fontes para este trabalho. Uma das equações que chama atenção, que está contida nesse livro, é a equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, pelo seu tratamento em combinações de algoritmos e lógica. Leonardo Fibonacci expõe uma atitude quase moderna, e ainda em conformidade com Boyer (1974), ao provar a inexistência de raiz no sentido Euclidiano como razão de inteiros, ou da forma $a + \sqrt{b}$, onde $a$ e $b$ são racionais, isso mostra que, nessa época, não se podia encontrar soluções exatas por meios algébricos, então, Leonardo Fibonacci encontrou aproximadamente a raiz positiva com uma fração sexagesimal com meia dúzia de casas: 1,3688081075, Boyer (1974) expõe que este foi um sucesso evidente, no entanto não se sabe como ele chegou a essa solução e essa foi a aproximação Europeia mas precisa de uma raiz irracional de uma equação algébrica conseguida até o momento; McClenon (1919) comenta que esta obra traz um rigor e elegância em suas provas e são merecedores de elogios.

Nesse período, é chamada a atenção do rei Frederico II pela repercussão causada pelas obras e conhecimento de Leonardo Fibonacci, enviando-lhe um convite para participar de um torneio matemático. Este torneio resulta em sua quarta obra o *Liber Quadratorum* publicado no mesmo ano do livro *Flos*. O livro em questão passa a ser o objeto de nosso estudo, assim, o descreveremos na seção posterior.

De acordo com Oliveira (2013), posteriormente a ser reeditado o livro *Liber Abaci*, é emitido um decreto da República de Pisa em 1240, que lhe deu o título de *Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo*[11] (sério e sábio mestre Leonardo Bigollo) pelo reconhecimento do grande avanço que ocasionou para a matemática.

No século XIX, uma estátua de Fibonacci foi erguida em Pisa. Hoje ela se encontra na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico em Piazza dei Miracoli (OLIVEIRA, 2013). Leonardo Fibonacci morre em 1250[12] provavelmente em Pisa. Tomando por base os autores citados, nada mais se pode explanar sobre a vida deste matemático.

## 1.3 *Liber Quadratorum*

Neste período (séculos XII e XIII) há vários câmbios entre o oriente e o ocidente, no entanto, um dos mais valiosos, de acordo com McClenon (1919), foi o conhecimento científico, de maneira singular a matemática árabe e hindu. Esta transferência de conhecimento é, segundo o autor, um dos fenômenos mais interessantes deste momento. É nessa ocasião que entra em cena Leonardo Fibonacci, como comentado anteriormente, com suas viagens.

Em relação a essas viagens, McClenon (1919), comenta que, diferentemente da maioria dos viajantes, Leonardo Fibonacci não se contentou em dar um simples olhar para o estranho lugar e novas paisagens que estavam conhecendo, mas ele estudou cuidadosamente os costumes do povo, e especialmente, procurou instrução no sistema aritmético que estava sendo encontrado de uma maneira tão vantajosa pelos comerciantes orientais como já foi anunciado.

Já se faz conhecido o resultado dos estudos desse matemático do século XIII. É notória sua originalidade em seus livros e seu domínio de instrução. Assim nos deteremos à elucidação de uma obra, em especial já citada, o *Liber Quadratotum*, que segundo Oliveira (2013) significa "livro dos quadrados" e abarca em seu conteúdo a teoria dos números que dentre outros, examina o método para encontrar as ternas pitagóricas.

Boyer (1974) e Eves (2011) concordam que este livro rico e original é sobre análise indeterminada, o que o levou a posição de matemático mais importante do

---

[11] Leonardo Bigollo era como ele assinava alguns de seus trabalhos, o qual, na língua toscana significa "viajante".

[12] Há também algumas divergências quanto ao ano de morte, no entanto adotamos da mesma forma para essa questão Castillo (2007) como referência.

campo entre Diofanto e Fermat. Vale ressaltar, que o *Liber Quadratorum* é dedicado em 1225 ao rei Frederico II, que ao longo de toda a sua carreira mostrou um vívido interesse e inteligência na arte e na ciência, e que tinha tomado conhecimento positivo do *Liber Abaci*. Este rei convida Leonardo Fibonacci para participar de um torneio matemático, o qual decorre o *Liber Quadratorum* o que justifica a dedicatória do livro (MCCLENON, 1919).

Nesse torneio foram propostos três problemas, dentre os quais o mais famoso é o primeiro, no qual Leonardo Fibonacci é desafiado a encontrar um número que quando somado ou subtraído cinco continua sendo um quadrado de um número racional, (CASTILLO 2007).

Em acordo com Boyer (1974), tanto a resposta $(\frac{41}{12})$ quanto à solução são encontrados no *Liber Qudratorum* na proposição dezessete. Ainda segundo Castillo (2007), o segundo problema do torneio é encontrar um número $x$ que cumpra a condição $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, utilizando as proposições do livro X dos Elementos de Euclides (este problema se encontra no livro *Flos*), e o terceiro problema proposto trata de três homens que se repartem ao acaso um capital. O primeiro fornece a um fundo comum a metade de sua porção, o segundo um terço e o terceiro um sexto. Depois fazem com um fundo três partes iguais, e cada qual toma para si uma. Quanto teve cada um na primeira repartição, se a quantidade final foi para o primeiro, a metade do capital inicial, para o segundo a terceira parte e para o terceiro a sexta parte? No qual, Leonardo Fibonacci mostra que $x = 33$, $y = 13$ e $z = 1$, isso se tomarmos a equação $x + y + z = c$, para esse problema.

Em relação ao Primeiro problema McClenon (1919) ressalta que,

> Deve ser dito que este problema tinha sido considerado por escritores árabes com cujas obras Leonardo foi, sem dúvida familiarizado; mas seus métodos são originais, e nossa admiração por eles não é diminuída pelo estudo cuidadoso do que havia sido feito por seus antecessores árabes (MCCENON, 1919, p. 3).

Conforme McClenon (1919), o *Liber Quadratorum* traz uma ótima organização, uma escrita rica de coleção de teoremas (proposições), a partir de equações de análise envolvendo indeterminados do segundo grau. Muitos dos teoremas são originais e no caso de muitos outros, as provas são um método usual utilizado, o qual raciocina sobre números gerais, que Leonardo Fibonacci representa por segmentos de linhas. Raramente se utiliza de símbolos algébricos, para que cada resultado de uma nova operação tem que ser representada por uma nova linha, a não ser que seja uma simples adição ou subtração. Leonardo Fibonacci havia estudado a "álgebra geométrica" dos gregos, na forma em que os árabes utilizavam. Apesar de não possuir a facilidade de nossos simbolismos, é maravilhosa a facilidade com a qual este matemático mostra ter em sua mente a relação entre duas linhas, e com que habilidade ele escolhe o caminho certo para trazê-lo para a meta que ele está buscando.

Leonardo Fibonacci inicia o *Liber Quadratorum* com uma introdução (figura 7) a respeito da relação da soma de números ímpares com os números quadrados, o que dá suporte para todas as suas proposições (SIGLER, 1987).

Figura 7 – Imagem da introdução do *Liber Quadratorum.*

Fonte: L. E. Sigler (1987)

O *Liber Quadratorum*, de acordo com Aragão (2009), é considerado a obra mais valiosa legada pela Idade Média, no campo da matemática. No entanto, não há como afirmar que o *Liber Quadratorum* é completamente original, quando se sabe tão pouco da história dos matemáticos em relevantes períodos de tempo, mesmo assim, é seu livro mais avançado e representa sua grande conquista como matemático. Da Aritmética de Diofanto ao trabalho de Fermat, esse é o principal livro de aritmética, hoje chamado de A Teoria dos Números (SIGLER, 1987). Graças a Leonardo Fibonacci, a matemática árabe impôs-se finalmente na Europa (ARAGÃO, 2009).

Os trabalhos de Leonardo Fibonacci, trazem uma forte influência dos matemáticos Al-Khwârizmî e Abû Kâmil entre outros mestres árabes, bem como, Euclides e de seus elementos (OLIVEIRA, 2013). Desta forma, apresentamos estes matemáticos e suas obras, que tiveram um papel importante na história da matemática e na vida de Leonardo Fibonacci, assim como, de seus trabalhos.

### 1.4 Personagens e obras que contribuíram para o desenvolvimento do *Liber Quadratorum*

Nesta seção apresentamos os personagens Al-khowarizmi (708 – 850) e Abu Kamil (850 – ???) que em nossa análise, a partir das leituras já mencionadas neste capítulo, contribuíram para os estudos de Leonardo Fibonacci e o conduziram para a composição de seus livros, em particular o *Liber Quadratorum*.

Antes de iniciarmos nosso discurso no que diz respeito à vida e obra desses matemáticos voltemos nosso olhar para o período de tempo que antecede Al-Khowarizmi.

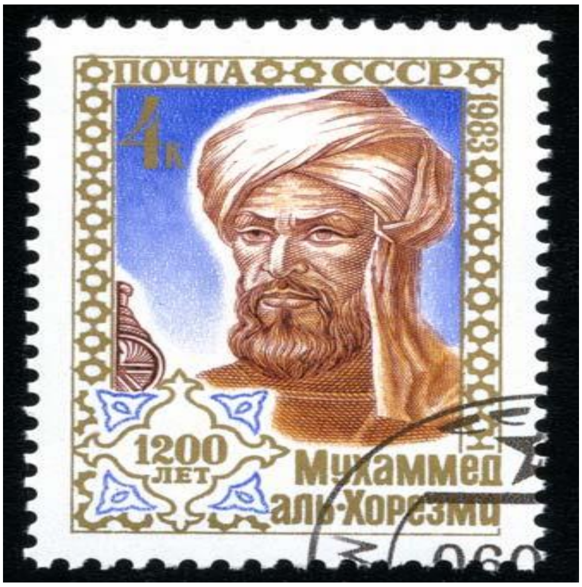
Este período torna-se obscuro para os avanços na matemática e para outras ciências, pois Maomé é engajado como um líder (militar e religioso) influente e torna-se mentor de várias guerras, que mesmo com sua morte no ano de 632, os seus seguidores permaneceram determinados na expansão islâmica atingindo Alexandria no ano de 641, com a destruição de sua biblioteca, que por muitos é considerado, nessa ocasião, como centro matemático do mundo. Com essa destruição e guerras que duraram mais de um século, com os árabes lutando entre si e com seus inimigos, não houveram muitas oportunidades para o desenvolvimento intelectual e cultural. Ainda assim, no ano de 750 esse calor de guerras esfriou e sobre o governo do califa Al-Mansur é estabelecido uma nova capital em Bagdá que posteriormente se transformaria em um novo centro matemático, uma nova Alexandria (BOYER, 1974).

Al-Mamum, que foi um dos califas que voltou o olhar para a cultura e o conhecimento, estabelece em Bagdá uma *Casa da Sabedoria (Bait al-hikma)*, que é comparável ao museu de Alexandria. Entre esses mestres que havia ali, estava

Mohammed Ibu-Musa Al-khowarizmi ou mais conhecido como Al-khowarizmi[13], o seu nome torna-se familiar na Europa Ocidental, assim como o de Euclides (BOYER, 1974). Este matemático e astrônomo era, na verdade, de acordo com Garbi (2007), um persa, nascido em Khwarezm (uma província Persa, hoje chamada Khiva), que viveu em Bagdá e nasce por volta de 780. Al-khowarizmi produz alguns materiais de astronomia e matemática, além de tabelas astronômicas, tratados do astrolábio e relógio do sol. Escreveu ainda, dois livros sobre aritmética e álgebra que, de acordo com Boyer (1974), tiveram um desempenho importante na História da Matemática e morre algum tempo antes de 850.

Al-khowarizmi é um dos responsáveis pela disseminação dos números indo-arábicos na Europa, no qual descreveu de maneira completa o sistema hindu em um livro do ano 825, sendo traduzido para o latim no século XII (EVES, 2011). Abordamos, porém, uma das obras mais conhecidas e talvez a de maior relevância para Leonardo Fibonacci chamado de *Hisab Al-jabr Wa'l Muqãbalah*[14], cujo nome advém a palavra álgebra sinônimo de ciência das equações, fazendo também com que a partir da segunda metade do século XIX o termo álgebra adquirisse um significado muito mais amplo.

Figura 8 - Selo postal de URSS, 1983, com a imagem de Al-Khowarizmi




Fonte: https://global.britannica.com/biography/al-Khwarizmi

[13] O seu nome dá origem a palavra algoritmo e a tradução do seu nome completo segundo Eves (2011) é Maomé, filho de Moisés de Khwarezm.

[14] *Al-Jabr*, significa, restauração ou completação referindo-se a transposição de termos subitraídos para o outro lado da equação e *Muqãbalah* refere-se a redução ou equilíbrio, isto é cancelamento de termos semelhantes em lados opostos na equação (BOYER, 1974).

O livro em questão leva Boyer (1974) a dizer que o título de pai da álgebra pertence muito mais a Al-khowarizmi do que a Diofanto, apesar de ser mais elementar e sem nem uma simbologia, expressado inteiramente em palavras, inclusive os números eram descritos em palavras, não fazendo uso de números negativos. Mesmo com essas limitações o autor afirma que *Al-Jabr* está mais próximo da álgebra elementar do que as obras de Diofanto, uma vez que este livro se ocupa de uma apresentação direta e elementar de resoluções de equações do primeiro e segundo grau (BRANDEMBERG, 2009).

Conforme Boyer (1974):

> A tradução latina da Álgebra de Al-Khowarizmi se inicia com uma breve explanação introdutória do principio posicional para números e daí passa a resolução, em seis capítulos curtos, dos seis tipos de equações formadas com as três espécies de quantidades: raízes, quadrados e números (isto é, x, $x^2$ e número) (BOYER, 1974, p. 167).

O primeiro capítulo do livro *Al-Jabr* possui apenas três parágrafos, expressa o caso de quadrados iguais a raízes, convém ressaltar que a raiz zero não era conhecida. O segundo capítulo abarca o caso de quadrados iguais a números. O terceiro capítulo, resolve os casos de raízes iguais a números, sempre com três ilustrações por capítulo para cobrir os casos em que o coeficiente do termo variável é igual a maior ou a menor que um. O quarto, quinto e sexto capítulos abrangem sucessivamente os três casos clássicos[15] de equações quadráticas com três termos, as raízes são dadas por regras culinárias para completar o quadrado, aplicadas a exemplos específicos. Os seis casos contidos no livro esgotam as possibilidades quanto a equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva (BOYER, 1974). Apresentaremos a seguir um quadro com esses casos (quadro 2) baseados em Rooney (2012).

Boyer (1974), ainda afirma que a apresentação de Al-Khowarizmi faz-se tão sistemática e completa que os leitores deste livro provavelmente não tiveram dificuldades para aprender as soluções, Garbi (2007) ainda afirma que, este matemático escrevia com grande preocupação em torna-se compreendido por seus leitores.

[15] (1) Quadrados e raízes iguais a números, (2) quadrados e números iguais a raízes, (3) raízes e números iguais a quadrados.

**Quadro 2** – Notação moderna dos casos contidos no livro *Al-jabr*.

| **Caso** | **Enunciado** | **Notação moderna** |
|---|---|---|
| 1º | Quadrados iguais a raízes | $ax^2 = bx$ |
| 2º | Quadrados iguais a um número | $ax^2 = c$ |
| 3º | Raízes iguais a um número | $bx = c$ |
| 4º | Quadrados e raízes iguais a um número | $ax^2 + bx = c$ |
| 5º | Quadrados e um número iguais a raízes | $ax^2 + c = bx$ |
| 6º | Raízes e um número iguais a quadrados | $bx + c = ax^2$ |

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Rooney (2012).

Dentre os legados, Al-Khowarizmi deixou um sucessor chamado de Abu Kamil Shoja Bem Aslam ou simplesmente Abu Kamil, nascido segundo Roque e Carvalho (2012), no Cairo em 850. Foi um matemático muçulmano, apelidado de “calculador egípcio”.

De acordo com Eves (2011), Abu Kamil escreveu no século X, seus trabalhos em álgebra. Um de seus trabalhos é um comentário sobre a álgebra de Al-Khowarizmi, no qual aprofundou os resultados “algébricos”, tanto tecnicamente quanto conceitualmente.

No entanto é somente em meados de 900 que Abu Kamil se mostra um legítimo sucessor de Al-Khowarizm, escrevendo o livro já citado (“Livro sobre a Álgebra”), no qual estuda aplicações deste campo da matemática a problemas geométricos. Este livro leva o Ocidente a tomar conhecimento inicial da Álgebra e em especial das progressões. Haja vista que, Leonardo Fibonacci viria a basear suas obras no referido livro de Abu-Kamil e nas obras de Al-Khowarizmi, vindo a se tornar principal introdutor da Álgebra na Europa com os seus livros.

Figura 9 – Estátua de Abu Kamil

Fonte: http://memim.com/abu-kamil-shuja-ibn-aslam.html

Como exposto ao longo deste capítulo, entendemos ser possível um olhar diferenciado das obras de Fibonacci, principalmente no que diz respeito ao *Liber Quadratorum*, assim como, para o renascimento do século XII. Isso permite imergir na história da matemática e na história da humanidade, nos dando a possibilidade de melhor compreensão das condições em que foi escrito o referido livro de Leonardo Fibonacci.

Entendemos assim, que temos o devido suporte tanto para introdução do tema em uma sala de aula quanto para apresentação e análise dos problemas contidos nessa obra, os quais estarão em capítulos posteriores. Assim, a seguir trazemos o material em português por nós construído do *Liber Quadratorum*.

# 2 APRESENTAÇÃO DE 12 PROPOSIÇÕES DO *LIBER QUADRATORUM* A PARTIR DA OBRA *THE BOOK OF SQUARES* DE L. E. SIGLER

Neste capítulo objetivamos construir um material em português para a análise das doze proposições que fazem parte deste capítulo, isso caracteriza a segunda etapa dos nossos procedimentos metodológicos. Desta forma, apresentamos as proposições traduzidas do livro *The Book of Squares* que tem como autor L. E. Sigler (1987), que se baseia em diversos materiais para sua obra, e trouxe as proposições ou problemas na mesma ordem que Leonardo Fibonacci apresenta em sua obra original, assim como comentários de cada proposição, é importante dizer que, este matemático italiano não traz numerações em suas proposições no original, sua forma de escrever é contínua. Logo, as numerações que trazemos fazem parte da tradução de Sigler (1987). É importante evidenciar também, que Leonardo Fibonacci faz uso de letras gerais para representar quantidades desconhecidas em sua obra.

Há outros autores que fazem traduções desta obra de Leonardo Fibonacci, como McClenon (1919), o qual apresenta vários teoremas e problemas, trazendo esta distinção das proposições em seu trabalho, que não são na mesma ordem do livro *The Book of Squares*.

Optamos então, por Sigler (1987), pois apresenta uma tradução[16] mais completa do *Liber Quadratorum* e mostra ser fidedigno na ordem e na maneira com a qual Leonardo Fibonacci demonstra ou explica suas proposições, no entanto, não faz parte deste nosso capítulo os comentários feitos por Sigler (1987). Somente as proposições, demonstrações e comentários de Leonardo Fibonacci.

Iniciamos com a introdução do *Liber Quadratorum* escrito pelo próprio Leonardo Fibonacci (figura 7), o qual inicia, com o seguinte pensamento:

> Eu pensei sobre a origem de todos os números quadrados e descobri que eles surgiram da sequência crescente de números impares, desta forma a unidade é um quadrado, e disso é feito o primeiro quadrado, chamado 1; para essa unidade é adicionado 3, formando o segundo quadrado chamado 4, com raiz 2; se para a soma é adicionado o terceiro número ímpar, chamado 5, o terceiro quadrado é criado, chamado 9, com raiz 3; e portanto as somas de números ímpares

[16] *The book of squares* é uma tradução do texto em latim preparado e publicado em 1862 por Baldassarre Boncompagni, que encontrou o manuscrito na biblioteca Ambrosian em Milão, o qual se encontrava perdido por muitos anos.

> consecutivos e a sequência de números quadrados sempre crescem juntas em ordem (FIBONACCI, 1225, apud, SIGLER, 1987, p. 4. Tradução nossa).

Este é o pensamento que oferece sustentação para todas as proposições de Leonardo Fibonacci nesta obra, permitindo passear em diversas maneiras de encontrar as ternas pitagóricas, bem como outros aspectos e regularidades que circundam os números quadrados. Leonardo Fibonacci toma essa simples relação (figura 7) e constrói uma quantidade impressionante de teorias matemáticas e resultados (SIGLER, 1987).

Assim, posteriormente a essa introdução, o autor parte para a apresentação e demonstração de suas vinte e quatro proposições, das quais apresentaremos apenas doze, como expomos anteriormente.

Faz-se necessário dizer que as proposições, explicações e demonstrações que apresentamos e que estão em itálico fazem parte da própria fala de Leonardo Fibonacci, desta forma, aparecerão vários pronomes e verbos na primeira pessoa do singular, já que optamos por fazer na maioria das vezes o procedimento literal do método de tradução direta. Optamos também, pelas notações ou simbolismos arcaicos que Leonardo Fibonacci dispunha na época para as demonstrações ou explicações, pois julgamos mais interessantes, no que diz respeito à História da Matemática em resgatar os simbolismos usados, no qual o autor utilizava um ponto na frente e outro atrás das letras para indicar um seguimento de reta, que ele entendia como um número.

Apresentamos em seguida às doze proposições, as quais estarão na mesma ordem que Leonardo Fibonacci traz em sua obra, iniciando com a primeira proposição e se manteve esta ordem até a décima primeira, encerrando com a décima sétima proposição, a qual faz parte de um dos problemas dados a Leonardo Fibonacci para ser resolvido no torneio de matemática promovido pelo Rei Frederico II.

## 2.1 Proposição 1: Encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado.

Leonardo Fibonacci: *Consequentemente, para encontrar dois números quadrados com a soma de um número quadrado, eu devo pegar qualquer quadrado ímpar e eu devo tê-lo como um dos dois quadrados mencionados; o outro eu devo encontrar em uma soma de todos os números ímpares da unidade até o quadrado ímpar em si. Por exemplo, eu devo tomar o 9 como um dos dois quadrados mencionados, o* *outro irá ser obtido na soma dos números ímpares que são menores que 9, nomeados 1, 3, 5 e 7, que tem como soma 16, que é um quadrado, que adicionado a 9 irá chegar a 25, que é um número quadrado. E se nós desejarmos uma demonstração geométrica, qualquer quantidade de números ímpares desde a unidade em ordem crescente são acrescentados, fazendo com que o fim seja quadrado; e deixemos .ab. ser 1, .bc. ser 3, .cd. ser 5, .de. ser 7, .ef. ser 9; e por. ef. ser 9, temos um número quadrado e .ae. 16, é um quadrado, criado da soma dos números ímpares .ab., .bc., .cd. e .de.., o número total .af. é da mesma forma quadrado; e portanto da soma de dois quadrados .ae. e .ef. é feito o quadrado .af..*

Figura 10 – Representação geométrica da proposição 1.


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*Também, alternativamente, eu devo tomar um quadrado, e deixar metade dele ser também, como 36 de qual a metade é 18; e eu devo pegar disso 1, e para isso devo adicionar 1, para chegar a 17 e 19, que são números ímpares consecutivos, com nenhum outro número ímpar entre eles; sua soma chega a 36, que é quadrado, e a adição dos números ímpares restantes de 1 até 15 chega a 64; a adição dos dois quadrados chega a 100, que é um quadrado, que é a soma dos números ímpares de 1 até 19. Assim também, eu devo pegar um número quadrado ímpar, do qual a terceira parte é inteira, como 81 do qual a terça parte é 27; e eu devo pegar este 27 junto com outros dois números ímpares dos quais o 27 é a média, chamados 25 e 29; e esses três números somam 81, que é quadrado; e a soma dos outros, que vai de 1 a 23, é 144, que tem raiz 12; adicionamos então o 144 a 81, disso surge a soma de números ímpares de 1 a 29, chamado 225, que é um número quadrado e a raiz disso é 15. De modo similar podem ser encontrados mais quatro números ímpares consecutivos, em que a soma forma um número quadrado e a soma dos menores números restantes abaixo da unidade forma também um quadrado; e os dois quadrados por si sempre se acrescentam para formar um número quadrado.*

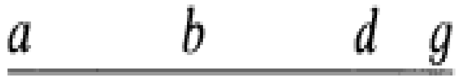
## 2.2 Proposição 2: Qualquer número quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das raízes.

[A diferença entre dois números quadrados consecutivos, é a soma de suas raízes.]

Leonardo Fibonacci: *Similarmente, eu encontrei que qualquer quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das raízes desses quadrados. Por exemplo, 121, do qual a raiz é 11, excede 100, do qual a raiz é 10, pela soma de 10 e 11, nomeados pela soma das próprias raízes. É por isso que um quadrado excede o segundo antes dele pela quantidade que é quatro vezes a raiz do quadrado que está entre eles, como 121, que excede 81 por quatro vezes 10; e portanto pode ser encontrado diferenças entre os quadrados pelas distâncias entre as próprias raízes. E quando raízes consecutivas adicionadas formam um número quadrado, então o quadrado de maior raiz é igual a soma dos dois quadrados, um que será aquele criado pelo quadruplo mencionado e o outro é aquele que tem raiz um menos do que a raiz quadruplicada. Portanto, se 9 é quadruplicado, então 36 é criado; portanto 100, do qual a raiz é 10, é igual a soma 64, que tem raíz 8, e 36, que era o quadruplo de 9. E é notado que fora do quadruplo de qualquer número um quadrado é obtido apenas se o número por ele mesmo for um quadrado, pois como Euclides mostrou, quando a proporção de um número para outro número é o mesmo que a proporção dos quadrados, então como o quadrado é feito da multiplicação, e por 4 ser um quadrado, o número que ele multiplica pode também ser um quadrado a fim de formar um quadrado. E, portanto de várias formas nós podemos encontrar três números quadrados para que então um sempre seja igual a soma dos outros dois.*

*Mas parece que todo quadrado excede seu quadrado precedente, como nós dissemos, por tanto quanto a soma das próprias raízes, que serão evidentes se nós colocarmos as raízes nos segmentos .ab. e .bg.. E desde que .ab. e .bg. sejam números consecutivos, um será maior que o outro por um. Deixemos então .bg. ser maior que .ab. por um, e subtraído da unidade .dg. de .bg., e então permanecerá .bd., igual a .ba.;*

Figura 11 – Representação geométrica da proposição 2.




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*e desde que .bg. seja um número dividido em duas partes, chamado .bd. e .dg.; .dg. o produto de .bd. por ele mesmo acrescentado ao produto de .dg. por ele mesmo acrescentado a duas vezes .bd. vezes .dg. será igual ao produto de .bg. com ele mesmo. Mas o produto de .bd. com ele mesmo é igual ao produto de .ab. com ele mesmo. Portanto, o quadrado do número .bg. excede aquele do número .ab. pela quantidade que é a soma de .gd. vezes ele mesmo e duas vezes .gd. vezes .bd.. Mas o produto de .dg. com ele mesmo é um, que se iguala e é o mesmo que a unidade .dg.; e duas vezes .dg. vezes .bd. torna duas vezes .bd., como .dg. é 1; portanto, duas vezes .bd. é .ad..; portanto, o quadrado do número .bg. excede o quadrado feito pelo número .ab. pela quantidade que é a soma das próprias raízes, que são .ab. e .bg.. Isso é o que tinha de ser demonstrado.*

*Alternativamente, desde que o número .bd. se iguale ao número .ba., o total .ad. será dividido em duas partes iguais pelo ponto .b.; e para .ad. é acrescentado a unidade .dg.; então o produto de .dg. por .ag., acrescentado ao quadrado da raiz .ab., igualará o quadrado feito pela raiz .bg.; é por isso que o quadrado do número .bg. excede o quadrado do número .ab. pelo que é o produto de .dg. vezes .ag.. Mas .dg. multiplicado por .ag. forma o número .ag., desde que .dg. seja 1. Portanto, o quadrado de .bg. excede o quadrado de .ab. pela soma das próprias raízes, cuja soma é o número .ag..*

*Similarmente, é demonstrado que qualquer quadrado excede qualquer quadrado menor pelo produto da diferença das raízes pela soma das raízes. Por exemplo, deixe .ag. e .gb. ser duas raízes de dois quadrados quaisquer, e deixe .gb. ser maior do que .ag. pelo número .db.. Pelo produto de .ag. com ele mesmo, mais o produto de .db. com .ab., igualar o produto de .gb. com ele mesmo, o quadrado de .gb. excede o quadrado de .ag. por tanto quanto a raiz de .gb. excede a raiz .ag. multiplicada pela soma de .gb. e .ag., nomeadas, pelo produto de .db. e .ab.. Isso é o que tem de ser demonstrado.*

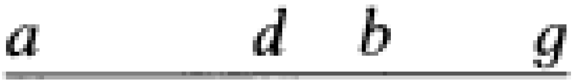
## 2.3 **Proposição 3:** Existe outra forma de encontrar dois quadrados que formem um número quadrado com sua soma.

[Existe outra forma de encontrar um número quadrado pela soma de dois quadrados]

Leonardo Fibonacci: *Há de fato outra forma de encontrar dois números quadrados que somados formam um número quadrado, e isso se encontra no livro X de Euclides. Juntando dois números quadrados, ambos pares ou ambos ímpares, .ab. e*

*.bg.; então a soma .ag. será par. Deixe .ab. ser maior que .bg., e .ag. é dividido em duas partes iguais por .d.. O número .ad. é então um número inteiro por ser metade do número .ag.. E se subtrai .ad. do número .ab.; restará o número inteiro .db.*

Figura 12 – Representação geométrica da proposição 3.




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*E pelo número .ag. ser dividido em duas partes iguais por .d., e em partes diferentes por .b., o produto de .ab. e .bg., mais o quadrado do número .db., será igual ao quadrado do número .dg.; mas aquele que é feito de .ab. vezes .bg. é um quadrado, como .ab. e .bg. são quadrados; aquele que é feito pelo número .db. vezes .db. é um quadrado, e portanto são encontrados dois números quadrados que formam com a soma um número quadrado, nomeado o número .dg.. Isso que tinha de ser feito.*

## 2.4 Proposição 4: Uma sequência de quadrados é produzido e ordenado por uma soma de números impares que corre de um a infinito.

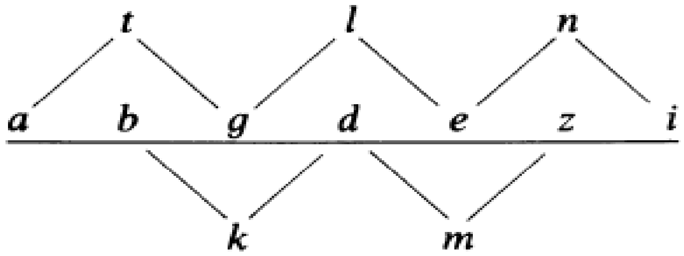
[Os números quadrados são formados em sequência pela soma de números impares consecutivos, iniciando em um até o infinito.]

Leonardo Fibonacci: *Eu gostaria de demonstrar como uma sequência de números quadrados é produzida de somas ordenadas de números ímpares que vão de 1 até o infinito.*

*Junto a isso, começando com a unidade .ab., qualquer quantidade de números consecutivos, .bg., .gd., .de., .ez., .zi.; se unem a .bg. com .ab. para formar o número .t.; similarmente se unem cada número com seu antecessor e com seu sucessor; e deixe .k. ser a soma dos números .bg. e .gd.; até mesmo juntar os números .gd. e .de. para fazer o número .l.; também os números .de. e .ez. para fazer o número .m.; e .n., nomeado, a soma de .ez. e .zi.. Eu digo primeiro que .t., .k., .l., .m., .n. são números ímpares consecutivos começando com a unidade. Certamente o número .zi. é tanto par quanto ímpar; se o número .zi. é par, então o número .ez. é ímpar; e se o número .zi. é ímpar, então o número .ez. é par; pois esses números certamente são consecutivos. Portanto, a* *soma dos números .ez. e .zi., nomeados .n., é ímpar. Similarmente, nós devemos mostrar que a soma dos números .de. e .ez., nomeados .m., é ímpar. Pelo mesmo método, os números .l., .k., .t. serão mostrados ser ímpar; eu digo, de fato, que .t., .k., .l., .m., .n. são números ímpares consecutivos. De fato, o número .n. é feito da adição de .ez. com .zi.; e da adição de .de. com .ez. é feito o número .m.. Portanto, como o número .zi. excede o número .de., o número .n. excede o número .m.. Na verdade, o número .zi. excede o número .ez. por um, o mesmo pelo qual o número .ez. excede o número .de.. Portanto, o número .zi. excede o número .de. por dois. Portanto, o número .n. excede o número .m. similarmente por dois; da mesma forma, será encontrado que o número .m. excede o número .l., e o número .l. o número .k., e o número .k. o número .t., e o número .t. a unidade .ab.. Portanto, a unidade e .t., .k., .l., .m., .n., são, como nós previmos, números ímpares consecutivos.*

*E, como eu mostrei acima, o quadrado que é feito pelo número .zi. excede o quadrado que é feito pelo número .ez. por um número que é a soma de .zi. e .ez.; esse é o número .n.. Similarmente, é mostrado que o quadrado feito pelo número .ez. excede o quadrado feito pelo número .de. pela soma dos números .de. e .ez.; esse é o número .m. E o quadrado feito pelo número .de. excede o quadrado feito pelo número .gd., o número .l.. E o quadrado feito pelo número .gd. excede o quadrado feito pelo número .bg. por .k.. E o quadrado do número .bg. excede o quadrado da unidade pelo número .t.; .t. é certamente 3, e .bg. é 2. Portanto, se para o quadrado da unidade, que é 1, for adicionado o número .t., pelo qual o quadrado de .bg. excede o quadrado da unidade, o quadrado do número .bg. é obtido; se para isso for acrescentado o número .k., o quadrado do número .gd. resultará; se para esse*

Figura 13 – Representação geométrica da proposição 4.




Fonte: L. E. Sigler (1987).

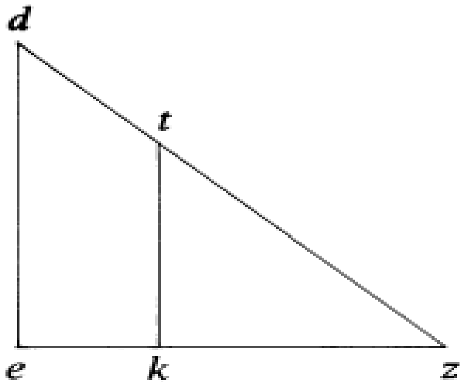
*quadrado for acrescentado o número .l., o quadrado do número .de. resultará; se para esse quadrado é acrescentado o número .m., o quadrado do número .ez. resultará; se* *para isso novamente for acrescentado o número .n., pelo qual o quadrado do número .zi. excede o quadrado do número .ez., claramente resultará no quadrado do número .zi.. Certamente os números .ab., .bg., .gd., .de., .ez., .zi. são consecutivos e seus quadrados surgem da soma de números ímpares consecutivos .ab., .t., .k., .l., .m., .n. como era para ser mostrado.*

## 2.5 Proposição 5: Encontre dois números de modo que a soma de seus quadrados faça um quadrado formado pela soma dos quadrados de dois outros números dados.

[Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados formem um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros]

Leonardo Fibonacci: *Deixe dois números .a. e .b. serem dados para que então a soma de seus quadrados forme um número quadrado .g.; deve-se encontrar dois outros números para que então a soma de seus quadrados seja igual ao número quadrado .g..*

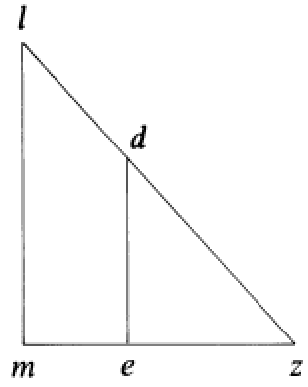
Figura 14 – Representação geométrica da proposição 5 (i).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*Deixe quaisquer outros dois números serem encontrados para que a soma de seus quadrados seja um número quadrado. Esses dois números são representados com segmentos .de. e .ez., e são colocados de modo que formem um ângulo reto, assim é nomeado o ângulo .dez.. Também, o segmento .dz. é localizado estando oposto aos lados .de. e .ez.. O número quadrado formado pelo segmento .dz. é igual ao número .g. ou não. Primeiro, se igual, então os dois outros números pelos quais a soma de seus* *quadrados seja igual a .g. são encontrados, um desses é igual ao segmento .de. e o outro ao segmento .ez.. Se não, o número quadrado feito pelo segmento .dz., que é o número .dz., não é igual ao número .g., ele será maior ou menor que .g.. Primeiro, se maior, o quadrado formado pelo número .dz. é maior que a raiz quadrada de .g.; portanto, a raiz do número .g. é tomada igual ao número .i., e é colocada sobre o comprimento .dz., e é denotada por .tz.. E do ponto .t. se faz .tk., perpendicular a .ez.; .tk. é portanto paralelo a .de.. Pelo triângulo .tkz. ser similar ao triângulo .dez., .zd é para .zt., como .de. é para .tk.. Mais a proporção de .zd para .zt. é conhecida; ambos os comprimentos são de fato conhecidos. Por causa disso, a proporção de .de. para .tk. será similarmente conhecida. E .de. é conhecido. Portanto, o segmento .tk. será conhecido. Similarmente, é mostrado que o segmento .zk. é conhecido com a proporção dele para .ze. assim como .zt. para .zd; são portanto conhecidos .tk. e .kz., que tem a soma de seus quadrados igual ao quadrado feito pelo segmento .tz.. Mas o quadrado do número .tz. é igual ao quadrado do número .i., e .i. é de fato a raiz quadrada do número .g.. Portanto, o quadrado de .tz. é igual ao número .g.; dois números .tk. e .kz. são então encontrados com a soma de seus quadrados igual ao número quadrado .g.. Alternativamente, deixe .dz. ser menor que .i. e estender a linha*

Figura 15 – Representação geométrica da proposição 5 (ii).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*.zd até .l. e colocar .zl. igual ao número .i.. Similarmente, .ze. é estendido e .lm. é conectado para que .lm. seja paralelo a .de.; portanto, o triângulo .dez. é similar ao triângulo .lmz., e a proporção .zd a .zl. é conhecida. Os dois números, .lm. e .mz. são encontrados e a soma de seus quadrados é igual ao número .g., com .lz. sendo igual a raiz. Isso é o que deve ser feito.*

*Mas para ter esses números, deixe .a. ser 5 e .b. ser 12. Então .g., que é a soma dos quadrados dos números .a. e .b., é 169, e sua raiz nomeada .i., é 13. Unindo os dois segmentos .de. e .ez. sobre o ângulo reto .dez.; e deixe o segmento .de. ser 15 e o segmento .ez. ser 8; consequentemente, .dz. será 17. Coloque junto a linha .dz. o segmento .zt. igual a .i.; .zt. é então 13, e .tk. é colocado paralelo a .de.; portanto, .zd é para .zt. assim como .de. é para .tk.. Multiplique portanto .zt. por .de., que é 13 por 15, e divida o produto por .dz., que é por 17, produzindo o número* $11\frac{8}{17}$ *para .tk.. Similarmente, se .zt. deverá ser multiplicado por .ze., e dividido por .zd,* $6\frac{2}{17}$ *é produzido para .kz., que tem a soma de seus quadrados igual ao número .g., que é o quadrado de .zt.. Da mesma forma, é mostrado que se o número .dz. é menor que .i. como na outra figura na qual nós devemos colocar 4 para .de. e 3 para .ez.. Portanto, .dz. é 5; e .zd se estende para .l., e .zl. é igual a .i. nomeado 13; e assim como .zd é para .zl., assim é .de. para .ml.. Portanto, multiplique .zl. por .de. e divida por .zd, produzindo* $10\frac{2}{5}$ *para .lm.. Similarmente, multiplique .zl. por .ze., divida por .zd, nomeado 39 por 5, produzindo* $7\frac{4}{5}$ *para .mz.. E assim é mostrado como isso pode ser feito em um número infinito de maneiras.*

## 2.6 Proposição 6: Um número é obtido, o qual é igual a soma de dois quadrados de duas, três ou quatro maneiras.

[Um número pode ser obtido pela soma de dois quadrados de duas, três ou quatro maneiras.]

Leonardo Fibonacci: *Tomando quatro números sem estarem em proporção geométrica, e se o primeiro é menor que o segundo e o terceiro menor que o quarto, e se a soma dos quadrados do primeiro e segundo é multiplicado pela soma dos quadrados do terceiro e quarto, e nenhuma dessas somas forma um quadrado, um número é obtido que é igual à soma de dois quadrados de duas formas; e se uma dessas somas é um quadrado, então o número obtido é uma soma dos quadrados de três formas; e se ambas as somas são quadrados, então o número obtido é uma soma de quadrados de quatro formas; e isso é entendido sem que os números tomados sejam frações.*

*Deixemos quatro números não proporcionais .a., .b., .g., .d., serem dados, e deixe .a. ser menor que .b. e .g. menor que .d.; e deixe a soma dos quadrados de .a. e .b. ser o número .e., e a soma dos quadrados de .g. e .d. ser .z., e .e. ser multiplicado por .z., produzindo o número .cf.; e deixe que nenhum desses números .e. e .z. seja um quadrado. Eu digo que esse número .cf. é igual a soma de dois quadrados, mesmo em duas formas. Primeiro, .a. é multiplicado por .g., e o número*

Figura 16 – Representação geométrica da proposição 6 (i).


Fonte: L. E. Sigler (1987).

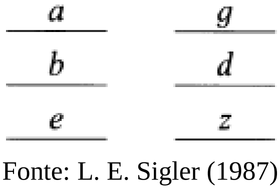
*.tk. é obtido; e de .b. vezes .d. é obtido .kl.; e de .a. vezes .d. é obtido .mn.; e de .b. vezes .g. é obtido .no.. E desde que os números .a., .b., .g., .d. não sejam proporcionais, e .a. seja menor que .b. e .g. menor que .d., os produtos acima mencionados sejam necessariamente desiguais, e .tk. seja menor que .kl.; deixe .kp. estar em .kl., para que .kp. seja igual a .tk.. Similarmente para os números .mn. e .no., deixe .no. ser maior que .mn., e .nq. igual a .mn.. Eu digo que*

Figura 17 – Representação geométrica da proposição 6 (ii).


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*o número .cf. é igual a soma dos quadrados feitos pelos números .tl e .qo., e pelos números .mo. e .pl., pois .e. vezes .z. produz .cf. e .e. é a soma de dois quadrados feitos por .a. e .b.. Portanto, .cf. resulta da multiplicação do quadrado do número .a. por .z., acrescentado ao quadrado do número .b. multiplicado por .z.. Deixe então .ci.*

Figura 18 – Representação geométrica da proposição 6 (iii).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*ser aquele que resulta da multiplicação de .a. com ele mesmo vezes .z., nomeado o quadrado de .a. vezes .z.; restará portanto .if. para o número que resulta de multiplicar*

Figura 19 – Representação geométrica da proposição 6 (iv).


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*o quadrado de .b. com .z.. Mas .z. é a soma dos quadrados dos números .g. e .d.. Consequentemente, o produto do quadrado de .a. com .z. é igual a soma dos dois produtos, nomeados o quadrado de .a. vezes o quadrado do número .g., e o quadrado de .a. vezes o quadrado do número .d.. Deixe, portanto, .ch. ser aquele que resulta da multiplicação do quadrado de .a. com o quadrado do número .g.; portanto, .hi. será aquele que resulta da multiplicação do quadrado do número .a. com o quadrado do número .d.. Novamente, deixe .ir. ser o produto do número .b. e ele mesmo com o quadrado do número .g.; restará, portanto, .rf., que é o produto do quadrado .b. com o quadrado do número .d.. Portanto, o número total de .cf. é dividido em quatro números que são .ch., .hi., .ir., .rf.; e cada um deles é um quadrado feito da multiplicação de um número quadrado com um número quadrado, tendo raízes que eu devo mostrar ser .tk., .kl., .mn., .no.; o primeiro, o número .ch., eu devo mostrar ser igual ao quadrado do número .tk.; certamente, .ch. é feito da multiplicação do quadrado do número .a. com o quadrado do número .g.. Mas, .tk. é o produto de .a. e .g.; consequentemente, o quadrado de .tk. é igual ao quadrado do produto de .a. e .g.. Similarmente, é mostrado que o quadrado do produto de .a. e .d. é igual ao quadrado do número .mn., que é igual ao número .hi.; e o quadrado de .kl. é o número .ir.; e o quadrado do número .no. é igual ao número .rf.. Isso se mantém, então, para mostrar que a soma de dois quadrados de números .tl e .qo., tanto quanto a soma dos quadrados dos números .mo. e .pl. são iguais a soma dos quatro quadrados dos números .tk., .kl., .mn., .no.. Eu devo mostrar primeiro a igualdade para a soma dos quadrados dos números .tl e .qo.. O quadrado do número .tl é de fato igual a soma de dois dos quatro quadrados mencionados, feitos pelos números .tk. e .kl. mais duas vezes o produto de .tk., e .lk. Consequentemente, permanece para se demonstrar que duas vezes o produto de .tk. e .kl. mais o quadrado do número .qo. seja igual a soma de dois quadrados restantes,* *nomeados aqueles feitos por .mn. e .no.. Primeiro eu devo demonstrar que .tk. vezes .kl. é igual a .mn. vezes .no..*

Figura 20 – Representação geométrica da proposição 6 (v).


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*De fato, .tk. resulta da multiplicação de .a. e .g., e .kl. resulta de .b. vezes .d.. Portando, .tk. vezes .kl. resulta de .a. vezes .g. multiplicado por .b. vezes .d.. Similarmente, o produto de .mn. e .no. surge de .a. vezes .d. multiplicado por .b. vezes .g.. Portanto, .mn. vezes .no. é .tk. vezes .kl.. Portanto, deve ser mostrado que duas vezes .mn. vezes .no. mais o quadrado do número .qo. é igual a soma dos quadrados dos números .mn. e .no.. Certamente .nq. é igual a .mn.; portanto, o quadrado do número .mn. é igual ao produto de .mn. e .nq.; para .mn. vezes .no. pelo que é .mn. vezes .qo.. Portanto, o produto de .mn. por .no. exceder o quadrado do número .mn. por tanto quanto .qo. vezes .mn., que é .qo. vezes .qn.. E pelo número .mn. ser igual ao número .qn. para um e outro é adicionado .qo.. Portanto, o total .no. será igual a soma dos números .mn. e .qo.. Portanto, o quadrado do número .no. é igual a soma dos dois produtos .on. vezes .nm. e .on. vezes .oq.. Portanto, o quadrado do número .no. excede o produto de .on. e .mn. por .qo. vezes .on.. Mas o produto de .mn. e .no. excede o quadrado do número .mn. por .nq. vezes .qo.. Mas o quadrado do número .no. excede o produto de .mn. e ;no pelo que é .no. vezes .oq.. Mas o produto de .no. e .qo. excede o produto de .oq. e .qn. pelo que é o número .qo. vezes ele mesmo. Portanto, a soma dos quadrados dos números .mn. e .no. excede duas vezes .mn. vezes .no., que é .tk. vezes .kl., pelo quadrado do número .qo.. Mas duas vezes o produto de .tk. e .kl. mais o quadrado do número .qo. é igual a soma  dos quadrados dos números .mn. e .no.. Portanto, a soma dos quadrados dos números .tl e .qo. é igual à soma dos quadrados dos números .tl, .kl., .mn., .no., que é o número .cf.. Isso que deveria ser mostrado.*

*Disso é mostrado, de fato, que quando dois números desiguais são dados, duas vezes o produto de um com o outro mais o quadrado da quantidade pela qual o maior número excede o menor número é igual a soma dos quadrados dos mesmos números. Portanto, duas vezes o produto de .tk. e .kl., que é duas vezes .mn. vezes .no., adicionados ao quadrado do número .pl. é igual à soma dos quadrados dos números*

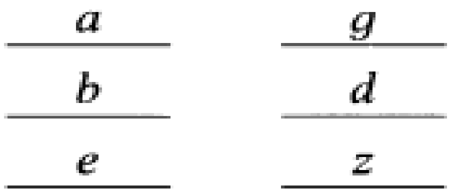
*.tk. e .kl.. Portanto, se os dois quadrados dos números .mn. e .no. e duas vezes o produto de .mn. vezes .no. e os três quadrados dos números .pl., .mn., .no., são acrescentados, a soma será igual à soma dos quatro quadrados dos números .tk., .kl., .mn., .no., que é o número .cf.. Mas duas vezes o produto .mn. vezes .no. mais a soma dos quadrados de .mn. e .no. são iguais ao quadrado do número .mo.. Portanto, a soma dos dois quadrados dos números .mo. e .pl. é igual ao número .cf., como tinha de ser mostrado. Mas deixe um dos números .e. e .z. serem um quadrado, e deixe isso primeiro ser .e.. Eu digo que é possível encontrar dois outros números para que a soma de seus quadrados seja igual a .cf., um que resulta da multiplicação de .e. com o quadrado do número .g., e os outros resultados da multiplicação de .e., com o quadrado de .d.. Por .e. ser um número quadrado, se ele é multiplicado por um número quadrado o produto será quadrado. Portanto, os quadrados dos números .g. e .d. multiplicados pelo quadrado .e. serão quadrados. Mas a soma dos quadrados dos números .g. e .d. é .z.; e .e. vezes .z. produz .cf., que tinha de ser mostrado.*

*Similarmente, se os números .e. e .z. são quadrados, haverá outros dois números quadrados que seriam acrescentados para formar o número .cf.; e esses resultam de multiplicar .z. vezes a soma dos quadrados dos números .a. e .b. e de multiplicar .e. vezes a soma dos quadrados dos números .g. e .d.. E, como eu disse, se um dos números .e. e .d. é quadrado, o número .cf. é igual a soma de dois diferentes quadrados de três formas, e se ambos são quadrados, é igual a soma de dois diferentes quadrados de quatro formas.*

## 2.7 Proposição 7: Encontre outra maneira pela qual um número quadrado é igual a soma de dois números quadrados.

Leonardo Fibonacci: *Tome quatro números proporcionais .a., .b., .g., .d. para que .a. seja para .b. assim como .g. é para .d.; e deixe .e. ser a soma dos quadrados de .a. e .b.,*

Figura 21 – Representação geométrica da proposição 7 (i).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

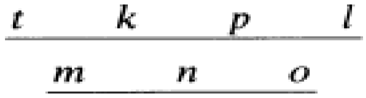
*e .z. da mesma forma com .g. e .d.. Tome .e. é multiplicado por .z., resultando em .cf..*

Figura 22 – Representação geométrica da proposição 7 (ii).


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*Consequentemente eu digo que .cf. é um quadrado igual à soma de dois quadrados, que é provado assim. Do produto de .a. vezes .g. resulta, de fato,*

Figura 23 – Representação geométrica da proposição 7 (iii).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*em .tk., e de .b. vezes .d. resulta .kl., e de .a. vezes .d. resulta .mn., e de .b. vezes .g. resulta .no.. Eu digo primeiro que o número .mn. é igual ao número .no.; pois os números .a., .b., .g., .d., são proporcionais na proporção de .a. para .b.. Portanto, o produto de .a. vezes .d. é igual ao produto de .b. vezes .g.; que é, o número .mn. igual ao número .no.. Mas os dois números restantes eu devo demonstrar serem desiguais, nomeados .kt. e .kl.. Portanto, .a. é para .b. assim como .g. é para .d.; portanto igualmente será .a. para .g. como .b. é para .d.. Portanto, se .b. é maior que .a., .d. será maior que .g.; e se .b. for menor que .a., então também .d. será menor que .g.. Portanto, ambos os números .a. e .g. são menores ou ambos são maiores que os números .b. e .d.; igualdade de fato não é possível, pois se eles forem iguais, os números .a., .b., .g., .d. não seriam distintos.*

*Deixemos, portanto, .a. e .g. serem números menores; portanto, aquele feito pelo seu produto, nomeado .tk., é menor que o produto feito de .d. e .b. que é então .kl.. E .a. é para .g. assim como o quadrado de .a. é para o produto de .a. e .g., que é, para o número .tk.. Novamente, .a. é para .g. assim como .b. é para .d.. Mas .b. é para .d. assim como o quadrado de .b. é para o produto de .b. e .d., que é o número .kl.. Por igualdade, portanto, .a. é para .g. assim como o quadrado de .b. é para o número .kl.. Mas assim como .a. é para .g., assim é o quadrado de .a. para o número .tk.. Portanto por adição e proporcionalidade, .a. é para .g. assim como a soma dos quadrados de .a. e .b. é para a soma dos dois números .tk. e .kl., que é o número .e. para o número .tl.*

*Similarmente, é mostrado que .a. é para .g. assim como .tl é para .z.. Portanto, .e. é para .tl assim como .tl é para .z.. Portanto, o número .tl é a média proporcional entre os números .e. e .z.. Portanto, o quadrado do número .tl é igual ao produto dos números .e. e .z.. Mas o produto dos números .e. e .z. é o número .cf.. Portanto, .cf. é um quadrado com raiz .tl. Na demonstração acima, o número .cf. foi mostrado de outra forma igual à soma dos quatro quadrados dos números .tk., .kl., .mn., .no.. Eu devo demonstrar, de fato, que o quadrado de .tl é igual à soma desses quatro quadrados da seguinte maneira. O quadrado do número .tl, de fato, é igual a soma de dois quadrados .tk. e .kl. mais duas vezes o produto de .tk. e .kl.. Mas nós demonstramos acima que o produto de .tk. e .kl. é igual ao produto de .mn. e .no.. Mas o produto de .mn. e .no. é feito de números iguais. Portanto, .mn. vezes .no. é .mn. vezes ele mesmo assim como .no. vezes ele mesmo. Portanto, duas vezes .tk. vezes .kl. é igual à soma dos quadrados de .tk., .kl., .mn., .no., que é o número .cf., como tinha de ser mostrado. E pelo número .tk. ser menor que o número .kl., tome do número .lk. o número .kp. igual ao número .tk.; e assim como nós dissemos acima, os números .mo. e .pl. são encontrados com a soma de seus quadrados igual ao número .cf..*

## 2.8 Proposição 8: Dois quadrados podem novamente ser encontrados cuja soma será o quadrado da soma dos quadrados de quaisquer dois números fornecidos.

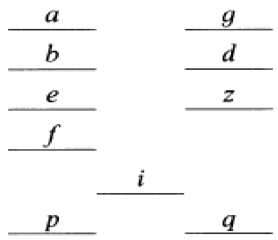
[Dois números quadrados pedem ser encontrados, cuja soma será o quadrado da soma de quaisquer dois outros números quadrados dados.]

Leonardo Fibonacci: *Por exemplo, deixem ser dados quaisquer dois números .a. e .b.. Deixe, entretanto, .b. ser o maior; e subtraia o quadrado do número .a. do quadrado do número .b. e a diferença será a raiz de um dos quadrados buscados. Em seguida, duas vezes o produto de .a. e .b. é tomado, que será da mesma forma a raiz do outro quadrado; aquilo foi provado na demonstração da proposição anterior. Portanto, eu coloco .g. para .d. na mesma proporção que .a. para .b.. Deixe .g. ser igual a .a. e .d. ser igual a .b.; e o produto de .a. com ele mesmo será igual ao produto de .a. com .g., e isso forma .tk.; e o produto de .b. com ele mesmo igual ao produto de .b. com .d., nomeado .kl.. Então se .tk., que é .kp., é subtraído de .kl., a diferença será .pl., que é uma das raízes. Da mesma forma, duas vezes o produto de .a. e .b. é igual a .a. vezes .d. mais .g. vezes .b., nomeado o número .mo., que é a outra raiz.*

## 2.9 Proposição 9: Encontre dois números que tem a soma dos seus quadrados iguais a um número não quadrado, se o qual é a soma de dois outros números quadrados dados.

Leonardo Fibonacci: *Deixe os dois números dados serem .g. e .d. e a soma de seus quadrados ser .z., que não é um quadrado. Eu desejo encontrar dois outros números que tem a soma de seus quadrados igual ao número .z..*

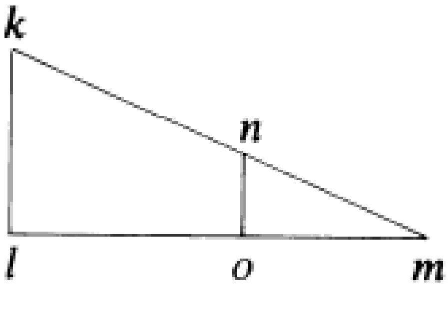
Figura 24 – Representação geométrica da proposição 9 (i).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*Tome dois números .a. e .b., que tem a soma de seus quadrados igual ao número quadrado .e. com a proporção de .a. para .b. não como de .g. para .d.. O número .i. resulta da multiplicação de .e. e .z.. Dois números .p. e .q. são tomados, que tem a soma de seus quadrados igual a .i. Deixe .p. e .q. serem representados pelos segmentos de linha .kl. e .lm., formando um ângulo reto, nomeado o ângulo .klm. conectado pelo segmento .km..*

Figura 25 – Representação geométrica da proposição 9 (ii).




Fonte: L. E. Sigler (1987).

*Portanto, .km. será a raiz do número .i.; e de .km. é tomado .mn., que é igual a raiz do número .z.; e .no. é formado então esse .no. forma um ângulo reto com .om.. A soma dos quadrados de .no. e .om. é igual ao número .z.. Consequentemente, o quadrado de .km. é igual ao número .i.; e o número .i. é o produto de .e. e .z.; portanto,* *se nós multiplicarmos a raiz do número .e. pela raiz do número .z., nós temos a raiz do número .i., que é .mk.. E desde que a raiz do número .e. seja conhecida, o quociente dessa mesma raiz por unidade é o quociente da raiz de .i., nomeada .mk., pela raiz de .z., que é .mn.. Deixe, portanto, .f. ser a raiz do número .e. por conta da unidade ser para o número .f. assim como .mn. é para .km., e .mn. é para .mk. assim como .no. é para .kl., e .om. é para .lm., segue-se que a unidade é para o número .f. assim como .no. é para .kl. e .mo. para .ml.. Portanto, se nós dividirmos .kl. pelo número .f., resultará no número .no.. Similarmente, se nós dividirmos .ml. por .f., resultará em .om.. Portanto, dois números .no. e .om. são encontrados que tem a soma de seus quadrados igual a um número não quadrado .mn., que é o número .z.; esse .z. é a soma dos quadrados dos números .g. e .d., que tinham de ser mostrados.*

*E aqui é mostrado com números. Deixe o número .g. ser 4, e o número .d. ser 5; portanto, a soma de seus quadrados, nomeado .z., é 41. Deixe o número escolhido .a. ser 3 e .b. ser 4, que faz a soma dos quadrados ser 25, nomeado o número .e.. Do produto de fato de .e. e .z., nomeados 25 e 41, surge 1025; e é possível encontrar dois pares de outros números que tem a soma de seus quadrados igual a 1025, um deles é 32 e 1, e outro é 31 e 8. Deixe, portanto, .kl. ser 32 ou 31 e .lm. ser 1 ou 8; e a raiz de 25, nomeada de número .f., e tomando os números .kl. e .lm. divididos por .f., nós devemos ter .no. e .om. respectivamente nomeados, se .kl. for 32 e .lm. for 1, então .no. será* $6\frac{2}{5}$ *e .om. será apenas* $\frac{1}{5}$*. Portanto, dois números são encontrados, nomeados* $6\frac{2}{5}$ *e* $\frac{1}{5}$*, com a soma de seus quadrados igual a 41, que é o número .z.. E se .kl. for 31 e .lm. for 8, .no. será* $6\frac{1}{5}$ *e .om. será* $1\frac{3}{5}$*, e portanto dois outros números são encontrados que tem a soma de seus quadrados da mesma forma 41. Isso que tinha de ser feito.*

## 2.10 Proposição 10: Encontre a soma dos quadrados dos números consecutivos da unidade até o ultimo.

[Encontre a soma dos quadrados dos números consecutivos, de forma crescente da unidade até o ultimo número.]

Leonardo Fibonacci: *Se, começando com a unidade, uma quantidade de números consecutivos, pares e ímpares, são tomados em ordem, então o produto do* *último número com seu sucessor multiplicado pela soma desses dois valore, é igual a seis vezes a soma dos quadrados de todos os números, nomeados da unidade ao último.*

*Começando com a unidade .ab., os números consecutivos pares e ímpares, .bg., .gd., .de., .ez. são tomados, e deixe .zi. ser o número seguinte ao número .ez. em ordem, que é ele mais um. Eu digo que o produto dos números .ez. e .zi. e .ei., que é .ez., .zi. e a soma dos dois, nomeado .ei., é igual a seis vezes a soma dos quadrados de todos os números .ab., .bg., .gd., .de., .ez.. O número .zt., igual ao número .ez., é subtraído do número .zi., deixando a*

Figura 26 – Representação geométrica da proposição 10.


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*diferença .ti. igual a um. Novamente, .kz., igual ao número .de., é subtraído de .zt., deixando a diferença .kt. igual a 1, pelo qual o número .ez. excede o úmero .de.. Certamente, o número .zt. é igual ao número .ez.. Portanto, o número .ki. será duas vezes um, nomeado 2. Portanto, o triplo produto dos números .ez., .zk. e .ek. é igual ao triplo produto dos números .ze., .ed, .dz.. Mas o triplo produto dos números .ez., .zk., .ek. mais o triplo produto dos números .ez., .zk., .ki. mais o triplo produto dos números .ez., .ki., .ei. são iguais ao produto dos números .ez., .zi., .ei.. Nós devemos demonstrar, de fato, que o produto de .ez., .zk. e .ki., mais o produto de .ez., .ki., .ei., são iguais a seis vezes o quadrado do número .ez.. Eu deixo, então, o número .ez. ser a raiz. Portanto, .zk. será a raiz menos um. Portanto, o total .ei. será igual a duas vezes a raiz mais um. O produto, de fato, desse quadrado menos a raiz pelo número .ki., nomeado 2, forma duas vezes o quadrado menos duas vezes a raiz. Portanto, o produto dos números .ez., .zk., .ki. é igual a duas vezes o quadrado do número .ez. menos duas vezes a raiz .ez.. Da mesma forma, de .ez. vezes .ki. resulta duas vezes a raiz, que multiplicada por duas vezes a raiz mais um, nomeada o número .ei., forma quatro vezes o quadrado mais duas vezes a raiz. Portanto, o triplo produto de .ez., .ki., .ei. é igual a quatro vezes o quadrado do número .ez. mais duas vezes a raiz .ez.. Portanto, o número acima mencionado duas vezes o quadrado menos duas vezes a raiz adicionado a quatro vezes o quadrado mais duas vezes a raiz alcança seis vezes o quadrado do número .ez.. Portanto, o triplo produto dos números .ez., .zi, .ei. é igual ao triplo produto dos* *números .ez., .zk., .ek. mais seis vezes o quadrado de .ez.. Mas o triplo produto dos números .ez., .zk., .ek. é igual ao triplo produto de .de., .ez., .dz.. Portanto, o triplo produto dos números .ez., .zi, .ei. é igual ao triplo produto dos números .de., .ez., .dz. mais seis vezes o quadrado de .ez.. Similarmente, é mostrado que o triplo produto de .de., .ez., .dz. é igual ao triplo produto de .gd., .de., .ge. mais seis vezes o quadrado do número .de.. Portanto, o triplo produto dos números .ez., .zi, .ei. é igual ao triplo produto dos números .gd., .de., .ge. mais seis vezes a soma dos quadrados dos números .de. e ,ez, É novamente mostrado que o triplo produto dos números .gd., .de., .ge. é igual ao triplo produto dos números .bg., .gd., .bd mais seis vezes o quadrado do número .gd.. Portanto, o produto triplo do número .ez., .zi., .ez., é igual ao produto triplo dos números .bg., .gd., .db. mais seis vezes a soma dos quadrados dos números .gd., .de., .ez..*

*Essas coisas acima mencionadas dispostas, isso é similarmente mostrado que o produto dos números .bg., .gd., .bd é igual a soma do triplo produto da unidade .ab., .bg., e .ag., e seis vezes o quadrado do número .bg.. Portanto, o triplo produto dos números .ez., .zi., .ei. é igual ao triplo produto da unidade .ab., a soma de .bg. e .ag., e seis vezes a soma dos quadrados dos números .bg., ;gd, .de., .ef. Mas o triplo produto da unidade .ab. e os números .bg. e .ag. é igual a seis vezes o quadrado de .ab.; para .bg. é 2 e .ag. é 3. Portanto, o triplo produto dos números .ez., .zi., .ei., é igual a seis vezes a soma dos quadrados da unidade .ab. e os números .bg., .gd., .de., .ez.. Isso que tinha de ser mostrado. Há de fato uma outra forma pela qual nós podemos descobrir a mesma coisa; isso é mostrado a seguir.*

## 2.11 Proposição 11: Encontre a soma dos quadrados dos números ímpares consecutivos, da unidade ao último.

Leonardo Fibonacci: *Se, começando com a unidade, uma quantidade de números ímpares consecutivos são tomados em ordem, então o produto do ultimo número e seu sucessor multiplicado pela soma desses dois valores é igual a doze vezes a soma de todos os quadrados dos números ímpares da unidade ao último número ímpar.*

*Começando com a unidade .ab., deixemos, de fato, .bg., .gd., .de., serem os números ímpares consecutivos e deixemos o número ímpar seguinte a .de. ser .ez.. Eu digo que o triplo produto dos números .de., .ez. e sua soma .dz. é igual a doze vezes a* *soma dos quadrados da unidade .ab. e os números ímpares .bg., .gd., .de.. O número .ei.,*

Figura 27 – Representação geométrica da proposição 11.


Fonte: L. E. Sigler (1987).

*na verdade, é tomado igual ao número .de. no segmento .ez.; portanto, .iz será dois. Eu devo mostrar primeiro que o triplo produto dos números .gd., .de., multiplicados pela soma desses dois valores, que é .ge., adicionados a doze vezes o quadrado do número .de., é igual ao triplo produto dos números .de., .ez., .dz.. Portanto, deixemos o número .de. ser a raiz; então o número .gd. será a raiz menos dois, e a soma .ge. será duas vezes a raiz menos dois. Portanto, da multiplicação de .gd. e .de. resulta o quadrado menos duas raízes que, quando multiplicadas por .ge., que é duas vezes a raiz menos dois, alcança duas vezes o cubo do número mais quatro vezes a raiz menos seis vezes o quadrado; para o qual se for adicionado doze vezes o quadrado da raiz .de., se tornará duas vezes o cubo mais seis vezes o quadrado mais quatro vezes a raiz. Novamente, por .de. ser uma raiz, o número .ei. será similarmente uma raiz. Portanto, o total .ez. será a raiz mais dois, que é .iz, e a soma .dz. será duas vezes a raiz mais dois. Na verdade, da multiplicação de .de. com .ez. resulta um quadrado mais duas vezes a raiz. E, de fato, fora da multiplicação pelo número .dz., que é duas vezes a raiz mais dois, resulta similarmente duas vezes o cubo mais seis vezes o quadrado mais quatro vezes a raiz. Portanto, é mostrado que o triplo produto dos números .gd., .de., .ge. mais doze vezes o quadrado do número .de. são iguais ao triplo produto dos números .de., .ez., .dz.. Pelo mesmo método é mostrado que o triplo produto dos números .bg., .gd., .bd mais doze vezes o quadrado do número .gd. é igual ao triplo produto dos números .gd., .de., .ge.. Portanto o triplo produto dos números .de., .ez., .dz. é igual ao produto dos números .bg., .gd., .bd mais doze vezes a soma dos quadrados dos números .gd. e .de.. Novamente, com as coisas ordenadamente acima mencionadas, o triplo produto dos números .bg., .gd., .bd será mostrado igual ao triplo produto da unidade .ab. e os números .bg. e .ag. mais doze vezes o quadrado do número .bg.. Mas o triplo produto da unidade e os números .bg. e .ag. é doze vezes o quadrado da unidade, .ab.; o número .bg. é três e também o número .ag. é quatro. Portanto, o triplo produto dos números*

*.de., .ez., .dz. é igual a doze vezes a soma de todos os quadrados dos números dados, nomeados a unidade .ab. e os números .bg., .gd., .de.. Isso que tinha de ser mostrado.*

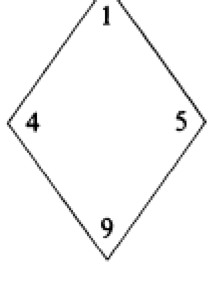
*Por um método similar, se começar com o número dois, números pares consecutivos são tomados em ordem, o triplo produto do último deles, o número seguinte a esse, multiplicado pela soma dos dois valores será igual a doze vezes a soma de todos os quadrados dos números pares dados. Pela mesma forma e método novamente, se consecutivos múltiplos de três são tomados em ordem ascendente começando com três, o triplo produto do último deles e o número seguinte a esse, multiplicado pela soma dos dois valores, é igual a dezoito vezes a soma de todos os quadrados dos números dados ascendentes por três. E então eles ascendem de dois em dois e são pares; então o último triplo produto é igual a doze vezes a soma de todos os quadrados dos números dados. E quando eles ascendem por unidades assim como com números consecutivos, então o triplo produto acima mencionado é igual a seis vezes a soma dos quadrados dos números dados. Nós demonstramos isso e é escrito acima. É entendido que a soma dos quadrados dos ascendentes múltiplos de quatro será quatro vezes o produto acima mencionado, e que a soma dos quadrados de ascendentes múltiplos de cinco será cinco vezes seis vezes o triplo produto mencionado, e então assim para o resto dos números.*

## 2.12 proposição 17: Encontre um número quadrado, o qual adicionado cinco ou subtraído cinco permaneça um número quadrado.

Leonardo Fibonacci[17]: *Eu desejo encontrar um número quadrado que aumentado ou diminuído por cinco alcança um número quadrado.*

*Tome um número congruente, o qual a quinta parte é um número quadrado; 720 será um, do*

Figura 28 – Representação geométrica da proposição 17.




Fonte: L. E. Sigler (1987).

[17] Para obter estes resultados Leonardo Fibonacci se utiliza das proposições de 12 à 16.

*qual a quinta parte é 144, pelo qual divide-se o mesmo 720 e os quadrados congruentes, do qual o primeiro é 961, o segundo é 1681, o terceiro de fato é 2401. A raiz do primeiro quadrado é 31, o segundo 41, terceiro 49. Há para o primeiro quadrado* $6\frac{97}{144}$, *com raiz* $2\frac{7}{12}$, *que resulta da divisão de 31 pela raiz de 144, que é 12, e há para o segundo, que é o quadrado solicitado,* $11\frac{97}{144}$, *com raiz* $3\frac{5}{12}$, *que resulta da divisão de 41 por 12, e há para o último quadrado* $16\frac{97}{144}$ *com raiz* $4\frac{1}{12}$.

Diante do que foi apresentado, podemos asseverar que este material pode nos dar suporte para a compreensão e análise dos problemas (proposições) propostos por Leonardo Fibonacci em seu *Liber Quadratorum*, assim, apresentamos nossos comentários no capítulo seguinte, bem como, os olhares de Sigler (1987) e McClenon (1919) no que diz respeito às proposições apresentadas, para melhor abarcar a compreensão destas.

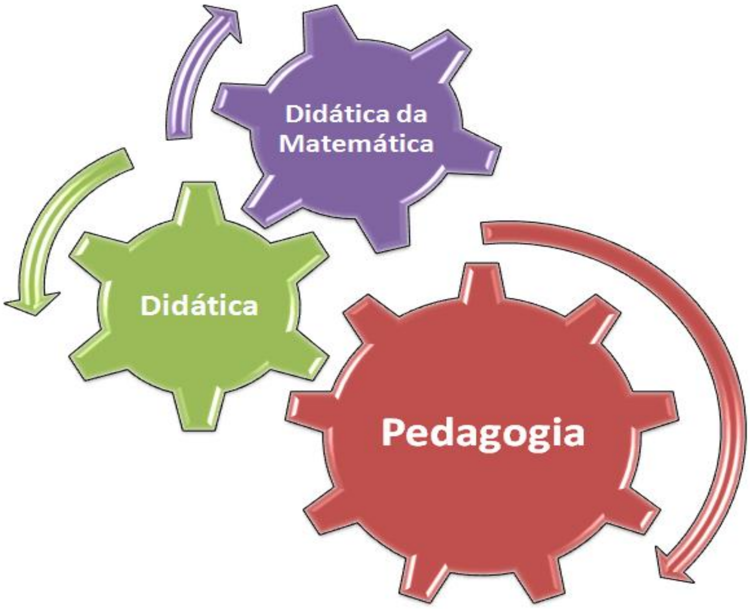
## 3. Comentando as proposições apresentadas e indicando potenciais didático/pedagógicos do *Liber Quadratorum*

Neste capítulo, estudamos a “álgebra geométrica” que Leonardo Fibonacci sustenta para apresentar suas explicações e demonstrações, que em sua maioria são indutivas, assim, objetivamos no presente capítulo comentar (analisar) os problemas e soluções contidos no *Liber Quadratorum*, para uma melhor compreensão destes problemas, a fim de apontar as possíveis potencialidades que a inserção das informações históricas que circundam este livro, assim como, das proposições que, contidas neste, podem trazer para potencialização e efetivação do ensino e da aprendizagem, possibilitando a redefinição do *Liber Quadratorum* para uma história reescrita na visão do educador matemático, aproximando de uma história pedagogicamente operacionalizada ou vetorizada no que tange a argumentação de Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004).

Desta forma, comentamos todas as doze proposições traduzidas no capítulo anterior (capítulo 2). Valendo ressaltar que, para que os nossos comentários fossem originais nos abstemos das leituras dos comentários propostos por Sigler (1987) e McClenon (1919) das proposições que foram apresentadas, desta forma, a seção seguinte (3.1), corresponde à consolidação de nossas análises, bem como, das principais inferências dos comentários de Sigler (1987) e McClenon (1919). É importante evidenciar, que apontamos potenciais didáticos, após os comentários de cada proposição do capítulo 2, pois entendemos que somente depois de compreender o que compõe cada proposição que nos foi permitido apontar potenciais do *Liber Quadratorum*, assim, com o intuito de passar este seguimento de construção para o leitor, colocamos os comentários na primeira seção deste capítulo e as potencialidades na segunda seção deste.

Após estas análises comentários e explicações, delineamos nas perspectivas de alguns autores e das nossas investigações do *Liber Quadratorum* as potencialidades deste livro de Leonardo Fibonacci. Para tanto, traçamos um caminho para apresentar a nossa compreensão de potencial didático, partindo de Libâneo (1990) com a pedagogia, convergindo para uma de suas áreas com a didática, convergindo mais um pouco para as disciplinas específicas da didática, o que nos oportunizou evidenciar a didática da matemática com Almouloud (2007), D’Amore (2007) e Pais (2011), como descrito na figura 29, nos dando um contexto e um suporte adequado para melhor definir potencial didático.

Figura 29 – Fluxograma do delineamento de potencial didático.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Mediante este caminho traçado, partimos para os argumentos reforçadores de Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004), tendo assim, o embasamento teórico que julgamos necessário para apontar potenciais didáticos do *Liber Quadratorum*. Assim, apresentamos os comentários das proposições a seguir, iniciando nosso caminho para as potencialidades didático/pedagógicas do livro de Leonardo Fibonacci.

## 3.1 Comentando as proposições que compõe o capítulo 2

*Comentário da proposição 1*: "Encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado."

Para esta proposição, Sigler (1987, p. 14) apresenta em notação moderna a seguinte identidade: $[2n^2 - 2n]^2 + (2n - 1)^2 = [2n^2 - 2n + 1]^2$, o qual faz um exemplo para a situação de Leonardo Fibonacci, ou seja, para $n = 2$ e outro exemplo para $n = 3$. Este autor ainda apresenta soluções para três números impares consecutivos, no entanto, não formula uma nova identidade, pois o seu desenvolvimento recai na identidade inicial, concluindo que para quatro números impares consecutivos acontecerá o mesmo.

Assim como Sigler (1987), McClenon (1919) apresenta esta proposição como uma solução para as ternas pitagóricas ou uma forma de obter triângulos racionais retos. Desta forma, McClenon (1919) apresenta outra forma de encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado, definindo outra identidade que segundo o autor, foi afirmado por Proclus (412 – 485)[18], a saber: $\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2$. Outro fato interessante é que McClenon (1919) apresenta em seu trabalho esta proposição como um problema.

Nós, compreendemos que Leonardo Fibonacci ao comentar que: *Para encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado, eu devo pegar qualquer quadrado ímpar e eu devo tê-lo como um dos dois quadrados mencionados; o outro eu encontro em uma soma de todos os números ímpares da unidade até o quadrado ímpar tomado.* Em notação moderna quer dizer:

Admitindo $2n + 1 = x^2$, logo temos, $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + x^2 = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Quando Leonardo Fibonacci propõe seu exemplo: *Por exemplo, eu devo tomar o 9 como um dos dois quadrados mencionados, o outro irá ser obtido na soma dos números ímpares que são menores que 9, nomeados 1, 3, 5 e 7, que tem como soma 16, que é um quadrado, que adicionado a 9 irá chegar a 25, que é um número quadrado. E se nós desejarmos uma demonstração geométrica, qualquer quantidade de números ímpares desde a unidade em ordem crescente são acrescentados, fazendo com que o fim seja quadrado; e deixemos .ab. ser 1, .bc. ser 3, .cd. ser 5, .de. ser 7, .ef. ser 9; e por .ef. ser 9, temos um número quadrado e .ae. 16, é um quadrado, criado da soma dos números ímpares .ab., .bc., .cd. e .de., o número total .af. é da mesma forma quadrado; e portanto da soma de dois quadrados .ae. e .ef. é feito o quadrado .af..*

Ele quis mostrar neste exemplo, inicialmente, que:

$$(1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 25$$

$$16 + 9 = 25$$

[18] Filósofo e matemático nascido em Constantinopla, embora mais filósofo que matemático seus escritos são de importância fundamental para o conhecimento histórico da geometria grega. Sua mais notável criação foi *Comentário sobre o Livro I de Os elementos de Euclides*, que se tornou a principal fonte escrita da afirmação de Pitágoras de Samos (580 – 497 a. C.) e de Tales de Mileto (624 – 548 a. C.) como matemáticos.

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

E de forma geométrica que, se temos um seguimento de reta, o qual Leonardo Fibonacci entende por um número, temos,

Figura 30 – Representação geométrica para o comentário da proposição 1.


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

Onde,

- $\overline{ab} = 1$;
- $\overline{bc} = 3$;
- $\overline{cd} = 5$;
- $\overline{de} = 7$;
- $\overline{ef} = 9$.

Desta forma, obtemos,

$$(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}) + \overline{ef} = \overline{af}$$

$$\overline{ae} + \overline{ef} = \overline{af}$$

Logo,

- $\overline{ae}$ é um número quadrado;
- $\overline{ef}$ é um número quadrado;
- $\overline{af}$ é um número quadrado.

É interessante que com esta ideia Leonardo Fibonacci amplia o seu pensamento, o que denominamos aqui de desdobramentos, e para esta proposição são apresentados dois.

*1º Desdobramento*: Se tomamos um número par que seja um quadrado e dividimos por dois e adicionarmos um e subtrairmos um, teremos dois números impares, desta forma se pegarmos o número 36, temos que,

$$36 \div 2 = 18$$

$$18 + 1 = \mathbf{19}$$

$$18 - 1 = \mathbf{17}$$

A soma destes dois números é igual ao número quadrado tomado $19 + 17 = 36$. Assim, se tomamos a soma dos números impares de 1 até 15 que é o número impar que antecede o menor número impar encontrado, que neste caso é o 17, temos que,

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) + 36 = 100$$
$$64 + 36 = 100$$
$$8^2 + 6^2 = 10^2$$

Com o proposto, temos dois números quadrados que somados formam um número quadrado.

*2º Desdobramento*: Se tomamos um número impar que seja um número quadrado e dividirmos por três, teremos um número impar. Se somarmos a este número impar encontrado, os números impares que é o seu sucessor e o seu antecessor resultará no número impar tomado. Assim, se tomamos como o número impar quadrado o 81 temos,

$$81 \div 3 = 27$$
$$24, \mathbf{25}, 26, \mathbf{27}, 28, \mathbf{29}, 30$$

Logo, $25 + 27 + 29 = 81$, e se tomamos uma soma dos números impares do 1 até o 23, que é o número impar que antecede o antecessor de 27 que é o resultado da divisão, mais 81, temos que,

$$(1 + 3 + 5 + \cdots + 23) + 81 = 225$$
$$144 + 81 = 225$$
$$12^2 + 9^2 = 15^2$$

Assim, $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 29 = 225$. E da mesma forma temos dois números quadrados que somados formam um número quadrado.

*Comentário da proposição 2*: "Qualquer número quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das raízes."

Sigler (1987) para esta proposição, inicia seu comentário elucidando que Leonardo Fibonacci faz referência ao livro VIII dos elementos de Euclides. Desta forma apresenta um modelo para esta proposição: $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 = (n + 1) + n$, onde $(n + 1)$ e $n$ são raízes de $(n + 1)^2$ e $n^2$. Assim, se a soma destas raízes formarem um número quadrado temos uma terna pitagórica, como se admitimos $n = 12$. Já

McClenon (19191), apenas apresenta uma possível forma de encontrar ternas pitagóricas, bem como, apresenta esta proposição como um teorema.

Percebemos nesta proposição que Leonardo Fibonacci ao dizer: *Eu encontrei que qualquer quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das raízes desses quadrados. Por exemplo, 121, do qual a raiz é 11, excede 100, do qual a raiz é 10, pela soma de 10 e 11, nomeados pela soma das próprias raízes. É por isso que um quadrado excede o segundo antes dele pela quantidade que é quatro vezes a raiz do quadrado que está entre eles, como 121, que excede 81 por quatro vezes 10; e, portanto pode ser encontradas diferenças entre os quadrados pelas distâncias entre as próprias raízes.* Ele quis mostrar que;

Se tomarmos $121 = 11^2$ e $100 = 10^2$, temos que $121 = 100 + 11 + 10$, ou seja, de $100$ até $121$ temos o intervalo de $21 = 11 + 10$, que é a soma das raízes quadradas de $100$ e de $121$. Leonardo Fibonacci apresenta uma explicação geométrica para esta proposição.

Desta forma, Leonardo Fibonacci ainda comenta que: *Mas parece que todo quadrado excede seu quadrado precedente, como nós dissemos, por tanto quanto a soma das próprias raízes, que serão evidentes se nós colocarmos as raízes nos segmentos .ab. e .bg.. E desde que* $.ab.$ *e* $.bg.$ *sejam números consecutivos, um será maior que o outro por um. Deixemos então* $.bg.$ *ser maior que* $.ab.$ *por um, e subtraído da unidade* $.dg.$ *de* $.bg.$*, e então permanecerá* $.bd.$*, igual a* $.ba.$*;[...].* Geometricamente, temos que:

Figura 31 – Representação geométrica para o comentário da proposição 2.


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

Onde;

- ✓ $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$ são consecutivos;
- ✓ $\overline{bg} - \overline{dg} = \overline{bd}$;
- ✓ $\overline{bd} = \overline{ab}$;
- ✓ $\overline{dg} = 1$.

Com estas questões preliminares, Leonardo Fibonacci apresenta a seguinte relação: $\overline{bg}^2 = \overline{bd} \times \overline{bd} + \overline{dg} \times \overline{dg} + 2\overline{bd} \times \overline{dg}$, onde $\overline{dg} \times \overline{dg} + 2\overline{bd} \times \overline{dg}$ compõe a diferença de um quadrado para outro. Exemplificando temos, se admitimos $\overline{ab} = 7$, $\overline{bg} = 8$ e $\overline{dg} = 1$, desta forma teremos,

$$\overline{bg}^2 = \overline{bd} \times \overline{bd} + \overline{dg} \times \overline{dg} + 2\overline{bd} \times \overline{dg}$$

$$8^2 = 7 \times 7 + 1 \times 1 + 2 \times 7 \times 1$$

$$8^2 = 49 + 15 = 64$$

Percebemos que $15 = 7 + 8$, no qual a soma das raízes é a diferença entre os quadrados como queríamos mostrar. Vale ressaltar que para esta proposição apresentamos dois desdobramentos.

*1º Desdobramento*: se escolhemos o maior quadrado de três números quadrados consecutivos, como $9^2, 10^2$ e $11^2$, teremos que, o maior quadrado será o menor quadrado mais o quadruplo da raiz do quadrado médio, assim, temos que $11^2 = 9^2 + (4 \times 10)$.

*2º Desdobramento*: Se admitimos um número quadrado impar como o $9$ e multiplicarmos por quatro, temos $36$, e tomando o quadrado do antecessor de $9$, temos $8^2 = 64$ e agora somando o quadruplo do quadrado impar escolhido mais o seu antecessor encontramos o quadrado do seu sucessor, logo, $36 + 64 = 100 = 10^2$.

*Comentário da proposição 3*: “Existe outra forma de encontrar um número quadrado pela soma de dois quadrados.”

Nesta proposição, Sigler (1987) inicia apresentando o seguinte modelo e afirmando que pode ser facilmente provado através de uma multiplicação: $\left[\frac{(m^2+n^2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(m^2-n^2)}{2}\right]^2 + m^2n^2$. Sigler (1987) continua comentando que esta proposição foi referenciada na proposição cinco do livro II dos elementos de Euclides, embora Leonardo Fibonacci tenha apontado o livro X de Euclides, sendo mais provável o preceito um da proposição vinte e nove desse livro.

Sigler (1987) ainda nos mostra que o modelo encontrado na proposição cinco do livro II, era usada pelos matemáticos babilônicos para resolver equações quadráticas, a saber: $\left[\frac{(x^2+y^2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(x^2-y^2)}{2}\right]^2 + xy$.

Percebemos que Leonardo Fibonacci ao comentar que: *Há de fato outra forma de encontrar dois quadrados que formem um número quadrado com sua soma, e isso se encontra no livro X de Euclides. Juntando dois números quadrados, ambos pares ou ambos ímpares,* $.ab.$ *e* $.bg.$*; então a soma* $.ag.$ *será par. Deixe* $.ab.$ *ser maior que* $.bg.$*, e* $.ag.$ *é dividido em duas partes iguais por .d.. O número* $.ad.$ *é então um número inteiro por ser metade do número* $.ag.$*. E se subtrai* $.ad.$ *do número* $.ab.$*; restará o número inteiro* $.db.$*.*

Figura 32 – Representação geométrica para o comentário da proposição 3.


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

*E pelo número* $.ag.$ *ser dividido em duas partes iguais por .d., e em partes diferentes por .b., o produto de* $.ab.$ *e* $.bg.$*, mais o quadrado do número* $.db.$*, será igual ao quadrado do número* $.dg.$*; mas aquele que é feito de* $.ab.$ *vezes* $.bg.$ *é um quadrado, como* $.ab.$ *e* $.bg.$ *são quadrados; aquele que é feito pelo número* $.db.$ *vezes* $.db.$ *é um quadrado, e portanto são encontrados dois quadrados com a soma de um número quadrado, nomeado o número* $.dg.$*. Isso que tinha de ser feito.*

Leonardo Fibonacci mostra que se tomamos este seguimento de reta como um número (figura 32), e admitindo $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$ sendo ambos números quadrados pares ou impares e $d$ como o ponto médio de $\overline{ag}$, temos que,

- $\overline{ab} > \overline{bg}$;
- $\frac{\overline{ag}}{2} = \overline{ad}$ ou $\overline{dg} \rightarrow \overline{ag}$ ser um número par;
- $\overline{ab} - \overline{ad} = \overline{db}$.

Desta forma Leonardo Fibonacci faz a seguinte relação, $\overline{ab} \times \overline{bg} + \overline{db}^2 = \overline{dg}^2$, o que implica em $\overline{ab} \times \overline{bg}$ ser um número quadrado, pois percebemos que Leonardo Fibonacci queria mostrado que a multiplicações de dois números quadrados forma um número quadrado, no entanto, não afirma tal situação, ou porque era um conhecimento comum da época ou porque da forma como foi apresentada já bastava para apresentar tal ideia.

Exemplificando esta proposição temos que se,

- $\overline{ab} = 16$;
- $\overline{bg} = 4$;
- $\overline{ad}$ ou $\overline{dg} = 10$;
- $\overline{db} = 6$.

E aplicando estes valores na relação que Leonardo Fibonacci cria, temos que,

$$\overline{ab} \times \overline{bg} + \overline{db}^2 = \overline{dg}^2$$
$$16 \times 4 + 6^2 = 10^2$$
$$64 + 36 = 10^2$$
$$100 = 10^2$$

Como $60 = 8^2$ e $36 = 6^2$, temos outra forma de encontrar dois números quadrados que somados formem um número quadrado. E nesta proposição Leonardo Fibonacci não apresenta desdobramentos, mas apresenta mais uma forma de encontra as ternas pitagóricas.

*Comentário da proposição 4*: "Uma sequência de números quadrados é produzido e ordenado por uma soma de números impares que corre de uma a infinito."

Nesta proposição tanto Sigler (1987, p. 17, 18) como McClenon (1919, p. 3) apresentam o mesmo modelo: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. No entanto, McClenon (1919) apresenta como um teorema compondo a sua primeira proposição. Sigler (1987) apresenta a letra *s* no lugar do *n* para este modelo apresentando o contraste do desenvolvimento de Leonardo Fibonacci com a notação moderna e suas generalizações.

Percebemos que embora Leonardo Fibonacci comece com esta ideia que já apresentamos ser a base para o desenvolvimento do seu livro, é apenas na quartar proposição que a demonstração é apresentada aos seus leitores.

Quando Leonardo Fibonacci comenta: *Eu gostaria de demonstrar como uma sequência de números quadrados é produzida de somas ordenadas de números impares que vão de um até o infinito.*

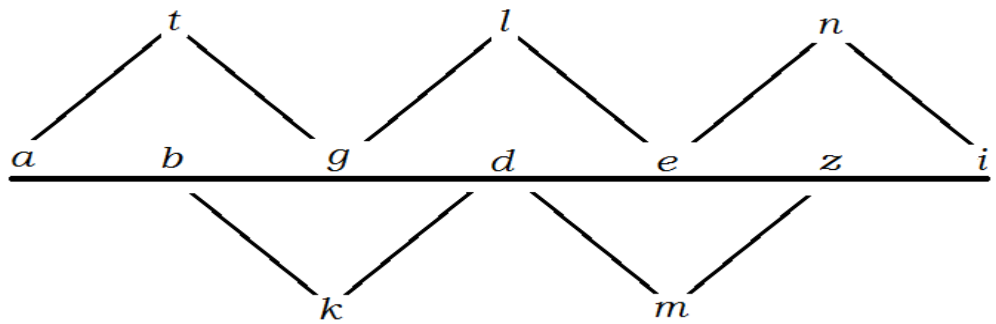
*Junto a isso, começando com a unidade .ab., qualquer quantidade de números consecutivos, .bg., .gd., .de., .ez., .zi.; se unem a .bg. com .ab. para formar o número .t.; similarmente se unem cada número com seu antecessor e com seu sucessor; e deixe .k.*

*ser a soma dos números .bg. e .gd.; até mesmo juntar os números .gd. e .de. para fazer o número .l.; também os números .de. e .ez. para fazer o número .m; e .n., nomeado, a soma de .ez. e .zi.. Eu digo primeiro que .t., .k., .l., .m, .n. são números ímpares consecutivos começando com a unidade.*

[...] *Certamente os números .ab.., .bg.., gd., .de.,.ez., .zi., são consecutivos e seus quadrados surgem da soma de números impares consecutivos .ab., .t., .k., .l., .m., .n.., como era para ser mostrado.*

Ele queria nos mostrar que quando temos a seguinte relação (figura 33) em um segmento de reta (relação entre números).

Figura 33 – Representação geométrica para o comentário da proposição 4.




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

E admitindo:

- $.ab. = 1$
- $.bg. = 2$
- $.gd. = 3$
- $.de. = 4$
- $.ez. = 5$
- $.zi. = 6$

Temos que,

- $.ab. = 1$
- $.t. = .ag. = .ab. + bg. = 3$
- $.k. = .bd. = .bg. + .gd. = 5$
- $.l. = .ge. = .gd. + .de. = 7$
- $.m. = .dz. = .de. + .ez. = 9$
- $.n. = .ei. = .ez. + .zi. = 11$

Desta forma teremos,

$.zi.^2 = .ab. + .t. + .k. + .l. + .m. + .n.$

$.ez.^2 = .ab. + .t. + .k. + .l. + .m.$

$.de.^2 = .ab. + .t. + .k. + .l.$

$.gd.^2 = .ab. + .t. + .k.$

$.bg.^2 = .ab. + .t.$

$.ab.^2 = .ab.$

Assim, podemos encontrar o quadrado de seis e de cinco como uma soma de números impares,

$$\begin{cases} 6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\ 6^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ 5^2 = 25 \end{cases}$$

Logo, temos uma sequência de números ímpares em uma soma formando números quadrados.

*Comentário da proposição 5*: "Encontre dois números de modo que a soma de seus quadrados faça um quadrado formado pela soma dos quadrados de outros dois outros números dados."

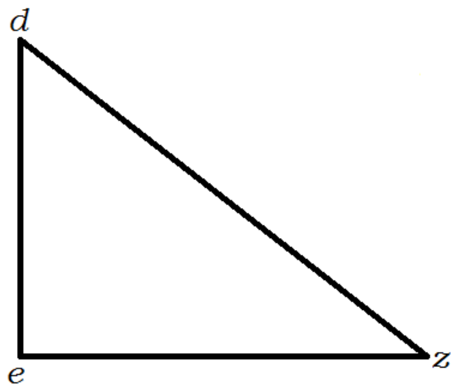
O modelo que definimos, está muito próximo do que Sigler (1987) apresenta em seus comentários, assim, não nos deteremos em seus comentários para esta proposição.

Percebemos que quando Leonardo Fibonacci comenta: *Deixe dois números .a. e .b. serem dados para que então a soma de seus quadrados forme um número quadrado .g.; deve-se encontrar dois outros números para que então a soma de seus quadrados seja igual ao número quadrado .g..*

*Deixe quaisquer outros dois números serem encontrados para que a soma de seus quadrados seja um número quadrado. Esses dois números são representados com segmentos .de. e .ez., e são colocados de modo que formem um ângulo reto, assim é nomeado o ângulo .dez.. Também, o segmento .dz. é localizado estando oposto aos lados .de. e .ez.. O número quadrado formado pelo segmento .dz. é igual ao número .g. ou não.*

Desta forma teremos três situações, desta forma seguiremos com a condição de ser igual, e para esta, Leonardo Fibonacci nos apresenta que: *Primeiro, se igual, então* *os dois outros números pelos quais a soma de seus quadrados seja igual a .g. são encontrados, um desses é igual ao segmento .de. e o outro ao segmento .ez..*

Figura 34 – Representação geométrica do comentário da proposição 5.1.




Fonte: Elaborado pelo autor a parte de Sigler (1987).

Assim, segundo Leonardo Fibonacci temos que,

- $.a.^2 + .b.^2 = .g.$
- $.g.$ é um número quadrado
- $.dez. =$ ⊾

Se $.dz.^2 = .g. \ \rightarrow \ .de.^2 + .ez.^2 = .g. = .dz.^2$

Seguindo esta proposição temos o comentário de Leonardo Fibonacci para a situação de não ser igual: *Se não, o número quadrado feito pelo segmento .dz., que é o número .dz., não é igual ao número .g., ele será maior ou menor que .g..*

Desta forma, se $.dz.^2 \ \neq \ .g. \ \rightarrow \ .dz.^2 > .g. \, ou \, .dz.^2 < \ .g.$

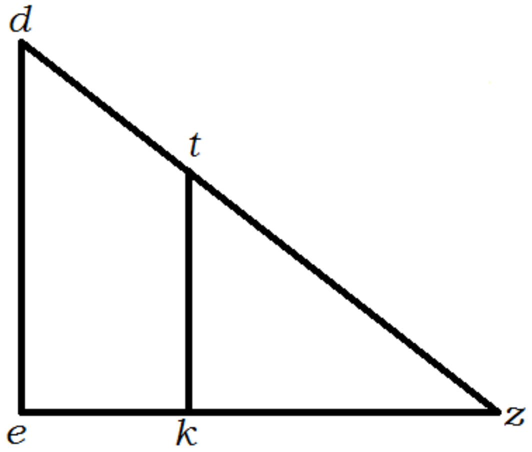
Vejamos para $.dz.^2 > .g.$, Leonardo Fibonacci comenta: *Primeiro, se maior, o quadrado formado pelo número .dz. é maior que a raiz quadrada de .g.; portanto, a raiz do número .g. é tomada igual ao número .i., e é colocada sobre o comprimento .dz., e é denotada por .tz.. E do ponto .t. se faz .tk., perpendicular a .ez.; .tk. é portanto paralelo a .de. Pelo triângulo .tkz. ser similar ao triângulo .dez., .zd é para .zt., como .de. é para .tk.. Mais a proporção de .zd para .zt. é conhecida; ambos os comprimentos são de fato conhecidos.*

*Similarmente, é mostrado que o segmento .zk. é conhecido com a proporção dele para .ze. assim como .zt. para .zd; são portanto conhecidos .tk. e .kz., que tem a soma de seus quadrados igual ao quadrado feito pelo segmento .tz.. Mas o quadrado do número .tz. é igual ao quadrado do número .i., e .i. é de fato a raiz quadrada do número*

*.g.. Portanto, o quadrado de .tz. é igual ao número .g.; dois números .tk. e .kz. são então encontrados com a soma de seus quadrados igual ao número quadrado .g.*

Desta forma para $.dz.^2 >. g.$, temos $.tz. = i$, assim, tomando o triangulo (figura 35) teremos as seguintes relações, onde $C$ denominamos como uma constante de proporcionalidade.

Figura 35 – Representação geométrica do comentário da proporção 5.2.

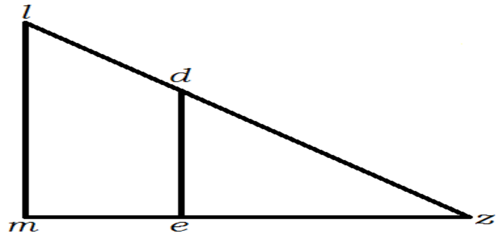



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $.g. = i^2$
- $\Delta\,.dez. \;\approx\; \Delta\,.tkz.$
- $\frac{.tz.}{.dz.} = C$
- $\frac{.tk.}{.de.} = C$
- $\frac{.kz.}{.ez.} = C$
- $.tk.^2 + .kz.^2 = .tz.^2 = .i.^2 = .g.$

E para $.dz.^2 < .g.$, temos $.lz. = i$ assim, tomando o triangulo (figura 36) teremos as seguintes relações, onde $C$ denominamos da mesmas forma como uma constante de proporcionalidade.

Figura 36 – Representação geométrica do comentário da proposição 5.3.




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $.g. = i.^2$
- $\Delta\,.dez. \approx \Delta\,.lmz.$
- $\frac{.dz.}{.lz.} = C$
- $\frac{.de.}{.lm.} = C$
- $\frac{.ez.}{.mz.} = C$
- $.lm.^2 + .mz.^2 = .lz.^2 = .i.^2 = .g.$

Desta forma Leonardo Fibonacci exemplifica sua proposição da seguinte forma, para:

- $.a. = 5$
- $.b. = 12$
- $.g. = 169$
- $.i. = 13$

Para tanto temos que,

$$.a.^2 + .b.^2 = .g.$$

$$5^2 + 12^2 = 169$$

$$25 + 144 = 169$$

$$169 = 13^2$$

E se temos $.dz.^2 > .g.$ e admitindo,

- $.de. = 15$
- $.ez. = 8$
- $.dz. = 17$
- $.tz. = 13$

Temos que,

$$.tk. = \frac{.zt. \times .de.}{.dz.} \qquad .kz. = \frac{.zt. \times .ez.}{.dz.}$$

$$.tk. = \frac{13 \times 15}{17} = \frac{195}{17} = 11\frac{8}{17} \qquad .kz. = \frac{13 \times 8}{17} = \frac{104}{17} = 6\frac{2}{17}$$

E desta forma temos que,

$$.tk.^2 + .kz.^2 = .tz.^2$$

$$\left(\frac{195}{17}\right)^2 + \left(\frac{104}{17}\right)^2 = 13^2$$

$$\frac{38025}{289} + \frac{10816}{289} = 13^2$$

$$\frac{48841}{289} = 169 = 13^2 = .g.$$

E se temos $.dz.^2 < .g.$ e admitindo,

- $.de. = 4$
- $.ez. = 3$
- $.dz. = 5$
- $.lz. = 13$

Temos que,

$$\boxed{.lm. = \frac{.zl. \times .de.}{.dz.}} \qquad \boxed{.mz. = \frac{.zl. \times .ez.}{.dz.}}$$

$$.lm. = \frac{13 \times 4}{5} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5} \qquad .kz. = \frac{13 \times 3}{5} = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$$

E desta forma temos que,

$$.lm.^2 + .mz.^2 = .lz.^2$$

$$\left(\frac{52}{5}\right)^2 + \left(\frac{39}{5}\right)^2 = 13^2$$

$$\frac{2704}{25} + \frac{1521}{25} = 13^2$$

$$\frac{4225}{25} = 169 = 13^2 = .g.$$

Logo temos que,

- Para $.dz.^2 = .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .de.^2 + .ez.^2$;
- Para $.dz.^2 > .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .tk.^2 + .kz.^2$;
- Para $.dz.^2 < .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .lm.^2 + .mz.^2$

Desta maneira Leonardo Fibonacci demonstra como podem ser encontrados infinitos valores para esta proposição, bem como, percebemos que basta encontrar uma constante de proporcionalidade e multiplica-la por qualquer valor para encontrar valores que obedeçam à relação proposta por Leonardo Fibonacci nesta proposição.

*Comentário da proposição 6*: “Um número é obtido, o qual é igual a soma de dois quadrados de duas, três ou quatro maneiras.”

Sigler (1987, p. 28) nos apresenta duas identidades definidas por Leonardo Fibonacci, as quais afirma que são equações, hoje chamadas *As identidades Lagrange*, o autor continua, obviamente Leonardo Fibonacci tem a principal reivindicação a elas, entretanto, foram usadas implicitamente por Diofanto e mencionadas por fontes arábicas.

Além disso, Sigler (1987) nos apresenta uma aplicação deste modelo descrita por Diofanto no livro III *Arithmetica* no problema 19, a saber:

$$65 = (13) \times (5) = (3^2 + 2^2) \times (2^2 + 1^2) = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$$

Ele continua a comentar,

> A fórmula por ela mesma está explicitamente indicada por Al-Khazin [A, p. 152] em aproximadamente 950 d.C., e ele na verdade discute seu uso por Diophantus no problema 19 do livro III. É claro, não é possível saber exatamente que fontes arábicas foram disponíveis para Leonardo. Leonardo usa a identidade para estabelecer o teorema e seu resultado em representar números como somas de quadrados (SIGLER, 1987, p. 28. Tradução nossa).

Segundo Sigler (1987) Leonardo Fibonacci utiliza os argumentos da álgebra geométrica para conseguir seus resultados.

Estas identidades são,

- $(a^2 + b^2) \times (g^2 + d^2) = [(a) \times (g) + (b) \times (d)]^2 + [(b) \times (g) - (a) \times (d)]^2$
- $(a^2 + b^2) \times (g^2 + d^2) = [(a) \times (d) + (b) \times (g)]^2 + [(b) \times (d) - (a) \times (g)]^2$

Em seu comentário, Sigler (1987) termina apresentando um exemplo numérico para esta proposição e a demonstração dessas identidades. Percebemos da mesma forma estas identidades em um dos momentos da explicação de Leonardo Fibonacci, as quais, apresentamos a seguir.

Para esta proposição Leonardo Fibonacci inicia sua fala da seguinte forma: *Tomando quatro números sem estarem em proporção geométrica, e se o primeiro é menor que o segundo e o terceiro menor que o quarto, e se a soma dos quadrados do primeiro e segundo é multiplicada pela soma dos quadrados do terceiro e quarto, e nenhuma dessas somas forma um quadrado, um número é obtido que é igual à soma de* *dois quadrados de duas formas; e se uma dessas somas é um quadrado, então o número obtido é uma soma dos quadrados de três formas; e se ambas as somas são quadrados, então o número obtido é uma soma de quadrados de quatro formas; e isso é entendido sem que os números tomados sejam frações.*

*Deixemos quatro números não proporcionais .a., .b., .g., .d., serem dados, e deixe .a. ser menor que .b. e .g. menor que .d.; e deixe a soma dos quadrados de .a. e .b. ser o número .e., e a soma dos quadrados de .g. e .d. ser .z., e .e. ser multiplicado por .z., produzindo o número .cf. [...].*

Desta forma Leonardo Fibonacci nos apresenta algumas condições para que sua proposição seja possível, assim, temos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{g}$ e $\bar{d}$. Com,

- $\bar{a} < \bar{b}$;
- $\bar{g} < \bar{d}$;
- $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \neq \frac{\bar{g}}{\bar{d}}$, não há proporcionalidade entre esses valores;
- $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{e}$;
- $\bar{g}^2 + \bar{d}^2 = \bar{z}$;
- $\bar{e} \times \bar{z} = \overline{cf}$, onde $\overline{cf}$ é um número qualquer.

Desta forma, Leonardo Fibonacci nos apresenta três conclusões:

*Primeira conclusão:*

Se,

- $\bar{a}^2 + \bar{b}^2$ Não forem um número quadrado, implicando em $\bar{e}$ ser um número não quadrado;
- $\bar{g}^2 + \bar{d}^2$ Não forem um número quadrado, implicando em $\bar{z}$ ser um número não quadrado.

Desta forma, temos que $\overline{cf}$ é formado pela soma de dois quadrados de duas formas.

*Segunda conclusão:*

Se,

- $\bar{a}^2 + \bar{b}^2$ For um número quadrado, implicando em $\bar{e}$ ser um número quadrado;

ou

- $\bar{g}^2 + \bar{d}^2$ For um número quadrado, implicando em $\bar{z}$ ser um número quadrado.

Para esta situação somente uma das somas será um número quadrado, desta forma, temos que $\overline{cf}$ será formado pela soma de três quadrados de três formas.

*Terceira conclusão:*

Se,

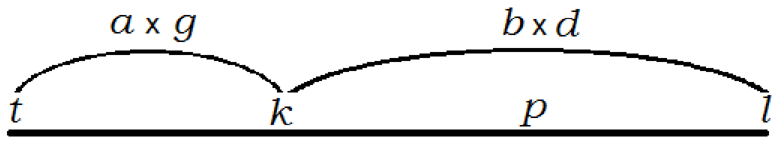
- $\bar{a}^2 + \bar{b}^2$ For um número quadrado, implicando em $\bar{e}$ ser um número quadrado;
- $\bar{g}^2 + \bar{d}^2$ For um número quadrado, implicando em $\bar{z}$ ser um número quadrado.

Para esta situação as duas somas são números quadrados, desta forma, temos que $\overline{cf}$ será formado pela soma de quatro quadrados de quatro formas.

Para demostrar essas conclusões Leonardo Fibonacci nos apresenta o seguinte,

- $\bar{a} \times \bar{g} = \overline{tk}$;
- $\bar{b} \times \bar{d} = \overline{kl}$;

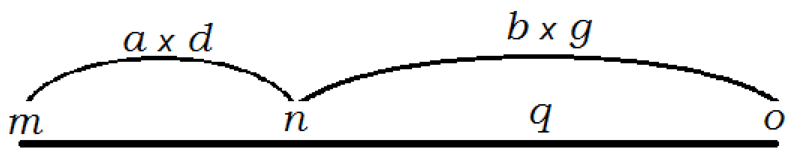
Figura 37 – Representação geométrica do comentário da proposição 6.




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $\bar{a} \times \bar{d} = \overline{mn}$;
- $\bar{b} \times \bar{g} = \overline{no}$;

Figura 38 – Representação geométrica do comentário da proposição 6.1.




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $\bar{a}, \bar{b}, \bar{g}$ e $\bar{d}$ Não são proporcionais;
- $\overline{tk} \neq \overline{kl} \neq \overline{mn} \neq \overline{no}$;
- $\overline{tk} < \overline{kl}$;
- $\overline{kp} \in \overline{kl}$;
- $\overline{kp} = \overline{tk}$;

- $\overline{no} > \overline{mn}$;
- $\overline{nq} = \overline{mn}$.

Desta forma, temos que, $\overline{cf} = \overline{tl}^2 + \overline{qo}^2$, onde,

- $\overline{tl}^2 = \left[(\bar{a} \times \bar{g}) + (\bar{b} \times \bar{d})\right]^2$;
- $\overline{qo}^2 = \left[(\bar{b} \times \bar{g}) - (\bar{a} \times \bar{d})\right]^2$.

Logo, $\overline{cf} = \left[\overline{(a} \times \bar{g}) + \overline{(b} \times \bar{d})\right]^2 + \left[(\bar{b} \times \bar{g}) - (\bar{a} \times \bar{d})\right]^2$, ou temos que $\overline{cf} = \overline{mo}^2 + \overline{pl}^2$, onde,

- $\overline{mo}^2 = \left[(\bar{a} \times \bar{d}) + (\bar{b} \times \bar{g})\right]^2$;
- $\overline{qo}^2 = \left[(\bar{b} \times \bar{d}) - (\bar{a} \times \bar{g})\right]^2$.

Logo, $\overline{cf} = \left[\overline{(a} \times \bar{d}) + \overline{(b} \times \bar{g})\right]^2 + \left[(\bar{b} \times \bar{d}) - (\bar{a} \times \bar{g})\right]^2$, assim temos que $\overline{cf}$ é formado da soma de dois quadrados de duas formas, que vale ressaltar ser as identidades apresentadas por Sigler (1987).

Continuando temos que, como $\overline{cf} = \bar{e} \times \bar{z} \rightarrow \bar{e} = \bar{a}^2 + \bar{b}^2$, temos

$$\overline{cf} = \bar{e} \times \bar{z}$$
$$\overline{cf} = (\bar{a}^2 + \bar{b}^2) \times \bar{z}$$
$$\overline{cf} = \bar{a}^2 \times \bar{z} + \bar{b}^2 \times \bar{z}$$

Ou, temos que, como $\overline{cf} = \bar{e} \times \bar{z} \rightarrow \bar{z} = \bar{g}^2 + \bar{d}^2$, temos

$$\overline{cf} = \bar{e} \times \bar{z}$$
$$\overline{cf} = \bar{e} \times (\bar{g}^2 + \bar{d}^2)$$
$$\overline{cf} = \bar{e} \times \bar{g}^2 + \bar{e} \times \bar{d}^2$$

Assim, se $\bar{e}$ ou $\bar{z}$ for um número quadrado, temos $\overline{cf}$ formado pela soma de três quadrados de três formas.

Seguindo temos que, se,

(I)

- $\overline{ci} = \bar{a}^2 + \bar{z} = \bar{a}^2 \times (\bar{g}^2 + \bar{d}^2) = \bar{a}^2 \times \bar{g}^2 + \bar{a}^2 \times \bar{d}^2$
- $\bar{a}^2 \times \bar{g}^2 = \overline{ch}$
- $\bar{a}^2 \times \bar{d}^2 = \overline{hi}$

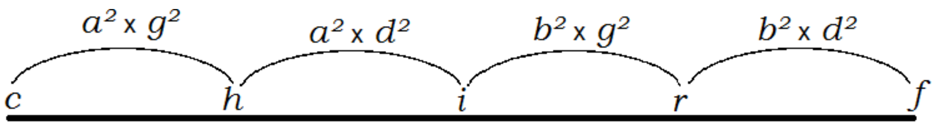
Assim, temos $\overline{c\imath} = \overline{ch} + \overline{h\imath}$.

(II)

- $\overline{\imath f} = \bar{b}^2 + \bar{z} = \bar{b}^2 \times \left(\bar{g}^2 + \bar{d}^2\right) = \bar{b}^2 \times \bar{g}^2 + \bar{b}^2 \times \bar{d}^2$
- $b^2 \times \bar{g}^2 = \overline{\imath r}$
- $\bar{b}^2 \times \bar{d}^2 = \overline{rf}$

Assim, temos $\overline{\imath f} = \overline{\imath r} + \overline{rf}$.

Figura 39 – Representação geométrica do comentário da proposição 6.2.




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

Com isso, $\overline{cf} = \overline{c\imath} + \overline{\imath f} = \overline{ch} + \overline{h\imath} + \overline{\imath r} + \overline{rf}$, e como, $\overline{ch}, \overline{h\imath}, \overline{\imath r}$ e $\overline{rf}$ são números quadrados, sendo,

- $\overline{ch} = \overline{tk}^2$;
- $\overline{h\imath} = \overline{mn}^2$;
- $\overline{\imath r} = \overline{no}^2$;
- $\overline{rf} = \overline{kl}^2$.

Assim, temos $\overline{cf}$ formado pela soma de quatro quadrados de quatro formas, como queria Leonardo Fibonacci mostrar.

Percebemos nesta proposição que Leonardo Fibonacci ao apresentar duas identidades para a sua demonstração observa uma regularidade que aqui tratamos como um **desdobramento**.

Assim, como $\overline{cf} = \overline{tl}^2 + \overline{qo}^2$ e $\overline{cf} = \overline{mo}^2 + \overline{pl}^2$, temos que,

- $\overline{tl}^2 = \overline{tk} + \overline{kl} + 2(\overline{tk} \times \overline{kl})$;
- $\overline{mn}^2 + \overline{no}^2 = 2\left(\overline{tk} \times \overline{kl}\right) + \overline{qo}^2$.

E já que,

(i) $\overline{tk} \times \overline{kl} = (\bar{a} \times \bar{g}) \times (\bar{b} \times \bar{d})$

(ii) $\overline{mn} \times \overline{no} = (\bar{a} \times \bar{d}) \times (\bar{b} \times \bar{g})$

Temos de (i) e (ii) pela propriedade associativa da multiplicação que $\overline{tk} \times \overline{kl} = \overline{mn} \times \overline{no}$, assim $\overline{mn}^2 + \overline{no}^2 = 2(\overline{mn} \times \overline{no}) + \overline{qo}^2$, onde $\overline{qo} = \overline{no} - \overline{mn}$.

Exemplificando temos os seguintes valores,

- $\bar{a} = 2;$
- $\bar{b} = 5;$
- $\bar{g} = 3;$
- $\bar{d} = 6.$

Com $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{6}$, e $\bar{e} = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2^2 + 5^2 = 29$, assim como $\bar{z} = \bar{g}^2 + \bar{d}^2 = 3^2 + 6^2 = 45$. Desta forma teremos que,

$$\overline{cf} = (\bar{a}^2 + \bar{b}^2) \times (\bar{g}^2 + \bar{d}^2) = \bar{e} \times \bar{z}$$

$$\overline{cf} = 29 \times 45 = 1305$$

Para a primeira condição temos que $\bar{e}$ e $\bar{z}$ não serão números quadrados, assim temos,

$$\overline{cf} = [(\bar{a} \times \bar{g}) + \overline{(b} \times \bar{d})]^2 + [(\bar{b} \times \bar{g}) - (\bar{a} \times \bar{d})]^2$$

$$\overline{cf} = [(2 \times 3) + (5 \times 6)]^2 + [(5 \times 3) - (2 \times 6)]^2$$

$$\overline{cf} = [6 + 30]^2 + [15 - 12]^2$$

$$\overline{cf} = 36^2 + 3^2$$

$$\overline{cf} = 1296 + 9$$

$$\overline{cf} = 1305$$

Desta forma $\overline{cf}$ foi obtido da soma de dois números quadrados de duas formas.

Para a segunda condição temos que $\bar{e}$ é um numero quadrado, assim temos que,

$$\overline{cf} = \bar{e} \times (\bar{g}^2 + \bar{d}^2) = \bar{e} \times \bar{g}^2 + \bar{e} \times \bar{d}^2$$

$$\overline{cf} = 29 \times 3^2 + 29 \times 6^2 = 29 \times 9 + 29 \times 36$$

$$\overline{cf} = 261 + 1044$$

$$\overline{cf} = 1305$$

Desta forma obtemos $\overline{cf}$ pela soma de três quadrados de três formas.

Para a terceira condição temos que $\bar{e}$ e $\bar{z}$ são números quadrados, assim temos que,

$$\overline{cf} = \overline{c\imath} + \overline{\imath f} = \overline{ch} + \overline{h\imath} + \overline{\imath r} + \overline{rf}$$

$$\overline{cf} = \overline{tk}^2 + \overline{mn}^2 + \overline{no}^2 + \overline{kl}^2$$

$$\overline{cf} = (\bar{a} \times \bar{g})^2 + (\bar{b} \times \bar{g})^2 + (\bar{a} \times \bar{d})^2 + (\bar{b} \times \bar{d})^2$$

$$\overline{cf} = (2 \times 3)^2 + (5 \times 3)^2 + (2 \times 6)^2 + (5 \times 6)^2$$

$$\overline{cf} = 6^2 + 15^2 + 12^2 + 30^2$$
$$\overline{cf} = 36 + 225 + 144 + 900$$
$$\overline{cf} = 1305$$

Desta forma obtemos $\overline{cf}$ pela soma de quatro quadrados de quatro formas.

*Comentário da proposição 7*: "Encontre outra maneira pela qual um número quadrado é igual a soma de dois números quadrados."

McClenon (1919, p. 5) apenas apresenta esta proposição como um comentário da *Proposição 6* e explica ser mais uma possiblidade de encontrar um triângulo retângulo. E Sigler (1987, p. 34) apresenta como equações da proposição anterior, que podem ser utilizadas em outra circunstância (com os valores proporcionais) para solucionar as ternas pitagóricas, bem como, as proposições 1, 3 e 5. O autor apresenta seu comentário a partir de seguimentos de retas, semelhante aos nossos comentários, no entanto, apresentamos com um pouco mais de detalhes.

Assim percebemos que Leonardo Fibonacci ao iniciar sua fala tomando como referência a proposição anterior nos diz: *Tome quatro números proporcionais .a., .b., .g., .d. para que .a. seja para .b. assim como .g. é para .d.; e deixe .e. ser a soma dos quadrados de .a. e .b., e .z. da mesma forma com .g. e .d.. E .e. é multiplicado por .z., resultando em .cf..*

*Consequentemente eu digo que .cf. é um quadrado igual à soma de dois quadrados, que é provado assim.*

Para esta proposição temos $\bar{a}, \bar{b}, \bar{g}$ e $\bar{d}$, com $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{g}}{\bar{d}}$, o seja, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{g}$ e $\bar{d}$ são proporcionais. Desta forma temos que,

- $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{e}$;
- $\bar{g}^2 + \bar{d}^2 = \bar{z}$;
- $\overline{cf} = \bar{e} + \bar{z}$.

Com $\overline{cf}$ sendo um número quadrado formado da soma de dois números quadrados. Leonardo Fibonacci demonstra da seguinte forma. Como temos,

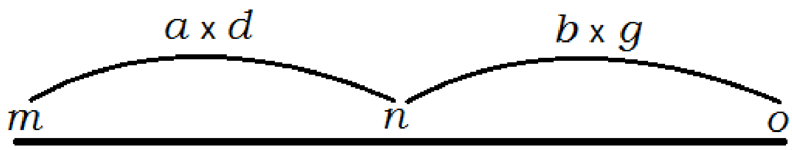
- $\bar{a} \times \bar{g} = \overline{tk}$;
- $\bar{b} \times \bar{d} = \overline{kl}$;

Figura 40 – Representação geométrica do comentário da proposição 7(i).


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $\bar{a} \times \bar{d} = \overline{mn}$;
- $\bar{b} \times \bar{g} = \overline{no}$.

Figura 41 – Representação geométrica do comentário da proposição 7(ii).




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

O que implica em dizer que, $\overline{mn} = \overline{no} \rightarrow \bar{a} \times \bar{d} = \bar{b} \times \bar{g} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{g}}{\bar{d}}$ e que, $\overline{tk} \neq \overline{kl} \rightarrow \bar{a}, \bar{g} > \bar{b}, \bar{d}$ ou $\bar{a}, \bar{g} < \bar{b}, \bar{d} \rightarrow \bar{a} \times \bar{g} \neq \bar{b} \times \bar{d} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \neq \frac{\bar{d}}{\bar{g}}$ ou $\frac{\bar{g}}{\bar{d}} \neq \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$. Assim, temos para $\bar{a}, \bar{g} < \bar{b}, \bar{d}$,

- $\overline{tk} < \overline{kl}$;
- $\frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{a}^2}{\bar{a} \times \bar{g}} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{a}^2}{\overline{tk}}$;

E como $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{g}}{\bar{d}}$, temos,

- $\frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \frac{\bar{b}^2}{\bar{b} \times \bar{d}} \rightarrow \frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \frac{\bar{b}^2}{\overline{kl}}$;
- $\frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{b}^2}{\bar{b} \times \bar{d}} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{b}^2}{\overline{kl}}$.

Da mesma forma que $\frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{a}^2}{\overline{tk}}$, temos que,

- $\frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}{\overline{tk} + \overline{kl}} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{e}}{\overline{tl}} \rightarrow \frac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}{(\bar{a} \times \bar{g}) + (\bar{b} \times \bar{d})}$;
- $\frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\overline{tl}}{\bar{z}}$;
- $\frac{\bar{e}}{\overline{tl}} = \frac{\overline{tl}}{\bar{z}} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{g}} = \frac{\bar{e}}{\overline{tl}}$.

Desta forma $\overline{tl}$ é a média proporcional entre $\bar{e}$ e $\bar{z}$, assim, $\overline{tl} = \sqrt{\bar{e} \times \bar{z}} = \sqrt{\overline{cf}}$. Como isso, $\overline{tl}^2 = \bar{e} \times \bar{z} = \overline{cf}$, logo, $\overline{cf}$ é um número quadrado com raiz igual a $\overline{tl}$.

Se $\overline{cf} = \overline{tl}^2 = \overline{tk}^2 + \overline{kl}^2 + \overline{mn}^2 + \overline{no}^2$, e para isso temos $\overline{tl}^2 = \overline{tk}^2 + \overline{kl}^2 + 2(\overline{tk} \times \overline{kl})$, com $\overline{tk} \times \overline{kl} = \overline{mn} \times \overline{no}$ e $\overline{mn} = \overline{no} \rightarrow \overline{mn} \times \overline{no} = \overline{mn}^2 = \overline{no}^2$, e desta forma temos que $\overline{tl}^2 = \overline{tk}^2 + \overline{kl}^2 + \overline{mn}^2 + \overline{no}^2$. E como $\overline{tk} < \overline{kl}$, com $\overline{kp} = \overline{kl} - \overline{pl}$ e $\overline{kp} = \overline{tk}$, temos que,

$$\overline{cf} = \overline{mo}^2 + \overline{pl}^2$$

$$\overline{cf} = (\overline{mn} + \overline{no})^2 + (\overline{kl} - \overline{tk})^2$$

$$\overline{cf} = \left[\left(\bar{a} \times \bar{d}\right) + \left(\bar{b} \times \bar{g}\right)\right]^2 + \left[\left(\bar{b} \times \bar{d}\right) - (\bar{a} \times \bar{g})\right]^2$$

Desta forma, temos o número quadrado $\overline{cf}$ como à soma de dois números quadrados, como Leonardo Fibonacci queria mostrar.

Exemplificando temos, para

- $\bar{a} = 2;$
- $\bar{b} = 4;$
- $\bar{g} = 6;$
- $\bar{d} = 12.$

Com $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$ e $\bar{e} = \left(\bar{a}^2 + \bar{b}^2\right) = (2^2 + 4^2) = 20$, assim como $\bar{z} = \left(\bar{g}^2 + \bar{d}^2\right) = (6^2 + 12^2) = 180$. Desta forma temos que,

$$\overline{cf} = \bar{e} \times \bar{z} = \overline{tk}^2 + \overline{kl}^2 + \overline{mn}^2 + \overline{no}^2 = \overline{tl}^2$$

$$\overline{cf} = 20 + 180 = 3600 = 60^2$$

E,

$$\overline{cf} = \overline{mo}^2 + \overline{pl}^2$$

$$\overline{cf} = (\overline{mn} + \overline{no})^2 + (\overline{kl} - \overline{tk})^2$$

$$\overline{cf} = \left[\left(\bar{a} \times \bar{d}\right) + \left(\bar{b} \times \bar{g}\right)\right]^2 + \left[\left(\bar{b} \times \bar{d}\right) - (\bar{a} \times \bar{g})\right]^2$$

$$\overline{cf} = [(2 \times 12) + (4 \times 6)]^2 + [(4 \times 12) - (2 \times 6)]^2$$

$$\overline{cf} = [24 + 12]^2 + [48 - 12]^2$$

$$\overline{cf} = 48^2 + 36^2$$

$$\overline{cf} = 2304 + 1296 = 3600$$

Como Leonardo Fibonacci queria mostrar.

*Comentário da proposição 8*: “Dois quadrados podem novamente ser encontrados cuja soma será o quadrado da soma dos quadrados de quaisquer dois números fornecidos.”

Para Sigler (1987, p. 35) embora conste como, uma proposição em seu livro, o autor apresenta mais como um desdobramento da *proposição 7* do que uma proposição propriamente dita, assim, demostra com a mesma identidade e com algumas condições colocadas por Leonardo Fibonacci.

McClenon (1919, p. 5) apresenta como um teorema e a firma que sua demonstração é simples sendo um corolário da *proposição 6* do presente trabalho.

Percebemos nesta proposição uma dependência da *proposição 7*, isso pode ser explicado pelo motivo de Leonardo Fibonacci não apresentar em seu livro no original uma separação como é colocado na presente dissertação. Desta forma Leonardo Fibonacci ao colocar em seu livro que: *Por exemplo, deixem ser dados quaisquer dois números .a e .b.. Deixe, entretanto, .b. ser o maior; e subtraia o quadrado do número .a. do quadrado do número .b. e a diferença será a raiz de um dos quadrados buscados. Em seguida, duas vezes o produto de .a. e .b. é tomado, que será da mesma forma que a raiz do outro quadrado; aquilo foi provado na demonstração precedida imediatamente.*

Leonardo Fibonacci queria mostrar que ao admitir $\bar{a}$ e $\bar{b}$ com $\bar{b} > \bar{a}$ e $R'$ e $R''$ sendo as raízes buscadas, onde $R'''$ será a raiz do quadrado da soma de quaisquer dois outros números quadrados dados, assim, temos,

- $\bar{b}^2 - \bar{a}^2 = R'$;
- $2(\bar{a} \times \bar{b}) = R''$

Para que essas duas identidades sejam verdadeiras temos que $\frac{\bar{g}}{\bar{d}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, onde $\bar{g} = \bar{a}$ e $\bar{d} = \bar{b}$, e tendo como referência a *proposição 7*, teremos que,

- $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{a}^2 = \bar{a} \times \bar{g} = \overline{tk}$;
- $\bar{b} \times \bar{b} = \bar{b}^2 = \bar{b} \times \bar{d} = \overline{kl}$.

Como $\overline{tk} = \overline{kp}$, temos que $\overline{kl} - \overline{tk} = \overline{pl} = \bar{b}^2 - \bar{a}^2$, que é a primeira raiz e $2(\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \bar{d}) + (\bar{g} \times \bar{b}) = \overline{mo}$ que é a segunda raiz, como Leonardo Fibonacci queria mostrar, temos $\overline{pl}^2 + \overline{mo}^2 = R'''$.

Exemplificando temos, $\bar{a} = 3$ e $\bar{b} = 4$, desta forma aplicando as identidades de Leonardo Fibonacci, teremos que,

*Primeira raiz*:

$$R' = \bar{b}^2 - \bar{a}^2$$

$$R' = 4^2 - 3^2$$

$$R' = 16 - 9$$

$$R' = 7$$

*Segunda raiz*:

$$R'' = 2(\bar{a} \times \bar{b})$$

$$R'' = 2(3 \times 4)$$

$$R'' = 2 \times 12$$

$$R'' = 24$$

Assim, teremos que,

$$R''' = R'^2 + R''^2$$

$$R''' = 7^2 + 24^2$$

$$R''' = 49 + 576$$

$$R''' = 625 = 25^2$$

Logo temos que $R'''$ é o quadrado da soma dos quadrados de $\bar{a}$ e de $\bar{b}$, como Leonardo Fibonacci queria mostrar.

*Comentário da proposição 9*: "Encontre dois números que tem a soma dos seus quadrados iguais a um número não quadrado, se o qual é a soma de dois outros números quadrados dados."

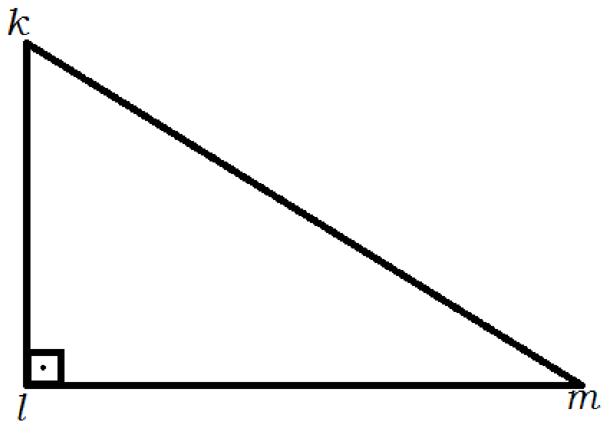
Nesta proposição se faz necessário nos remeter a *proposição 6*, pois percebemos ser uma continuidade em relação aos desdobramentos ou regularidades observadas por Leonardo Fibonacci a partir desta proposição. Desta forma, Leonardo Fibonacci inicia da seguinte forma: *Deixe os dois números dados serem .g. e .d. e a soma de seus quadrados ser .z., que não é um quadrado. Eu desejo encontrar dois outros números que tem a soma de seus quadrados igual ao número .z..*

*Tome dois números .a. e .b., que tem a soma de seus quadrados igual ao número quadrado .e. com a proporção de .a. para .b. não como .g. para .d.. O número .i. resulta da multiplicação de .e. e .z.. Dois números .p. e .q. são tomados, que tem a soma de seus quadrados igual a .i.. Deixe .p. e .q. serem representados pelos segmentos de linha .kl. e .lm., formando um ângulo reto, nomeado o ângulo .klm. conectado pelo segmento .km..*

*Portanto, .km. será a raiz do número .i.; e de .km. é tomado .mn., que é igual a raiz do número .z.; e .no.. é formado então esse .no. forma um ângulo reto com .om.. A soma dos quadrados de .no. e .om. é igual ao número .z..*

Desta forma Leonardo Fibonacci apresenta os números $\bar{a}$ e $\bar{g}$, onde a soma de seus quadrados forma o número $\bar{z}$ que não é um número quadrado, assim temos $\bar{g}^2 + \bar{d}^2 = \bar{z}$. Tomando agora outros dois números, os quais, a soma de seus quadrados forma um número quadrado, assim temos, $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{e}$, onde $\bar{e}$ é um número quadrado, com $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \neq \frac{\bar{g}}{\bar{d}}$, ou seja não há proporcionalidade entre esses valores. Tomando $\bar{\imath} = \bar{e} \times \bar{z}$, temos que,

Figura 42 – Representação geométrica da proposição 9 (i).

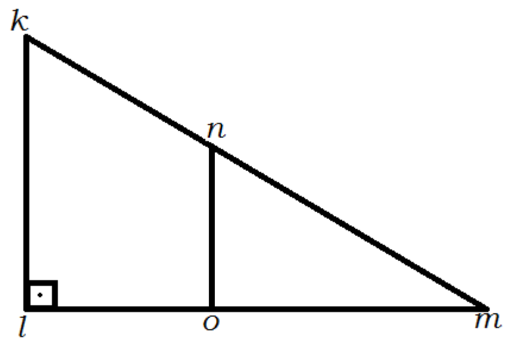



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $\bar{p} = \overline{kl}$;
- $\bar{q} = \overline{lm}$;
- $\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \bar{\imath}$

As identidades criadas por Leonardo Fibonacci ao longo de seu livro nos ajudam a encontrar soluções para diversos problemas, para encontrar $\bar{p}$ e $\bar{q}$ utilizamos as identidades da *proposição 6*, na qual, encontramos um número pela soma de dois quadrados de duas formas, assim temos a possiblidade de encontrar $\bar{p}$ e $\bar{q}$. Admitindo o triângulo acima, nos possibilita ter,

Figura 43 – Representação geométrica da proposição 9 (ii).




Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $\overline{km}^2 = \bar{\imath} = \bar{e} \times \bar{z}$;
- $\overline{mn}^2 = \bar{z}$

Assim, temos que $\overline{no}^2 + \overline{om}^2 = \bar{z}$, para tanto temos,

- $\bar{e} = \bar{f}^2$;
- $\frac{1}{\bar{f}} = \frac{\overline{mn}}{\overline{km}} = \frac{\overline{no}}{\overline{kl}} = \frac{\overline{om}}{\overline{lm}}$.

O que implica em dizer que $\frac{1}{\bar{f}} = \frac{\overline{no}}{\overline{kl}} = \frac{\overline{mo}}{\overline{ml}}$ e com isso, temos que,

- $\overline{no} = \frac{\overline{kl}}{\bar{f}}$;
- $\overline{om} = \frac{\overline{ml}}{\bar{f}}$

Desta forma, $\overline{no}^2 + \overline{om}^2 = \overline{mn}$, onde $\overline{mn} = \bar{z}$, assim teremos $\bar{g}^2 + \bar{d}^2 = \overline{no}^2 + \overline{om}^2 = \bar{z}$, como Leonardo Fibonacci queria mostrar.

Para esta proposição nossos comentários não divergiram dos comentários de Sigler (1987) e McClenon (1919), concordamos da mesma forma que $p$ e $q$ são encontrados a partir das identidades apresentadas por Leonardo Fibonacci na *proposição 6*.

Leonardo Fibonacci traz um exemplo para esta proposição, sem deixar claro como encontrou os valores correspondentes a $\bar{p}$ e $\bar{q}$. Desta forma, temos,

- $\bar{g} = 4$;
- $\bar{d} = 5$;
- $\bar{z} = \bar{g}^2 + \bar{d}^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$.

Temos também,

- $\bar{a} = 3$;
- $\bar{b} = 4$;
- $\bar{e} = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

Neste momento Leonardo Fibonacci apenas nomeia $\overline{kl} = 32$ ou $31$ e $\overline{lm} = 1$ ou $8$, no entanto, temos que,

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \bar{\imath}$$
$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \left[(\bar{a} \times \bar{g}) + \overline{(b} \times \bar{d})\right]^2 + \left[\left(\bar{b} \times \bar{g}\right) - (\bar{a} \times \bar{d})\right]^2$$
$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = [(3 \times 4) + (4 \times 5)]^2 + [(4 \times 4) - (3 \times 5)]^2$$
$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = [12 + 20]^2 + [16 - 15]^2$$
$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = 32^2 + 1^2$$

Ou,

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \bar{\iota}$$

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \left[(\bar{a} \times \bar{d}) + \overline{(b} \times \bar{g})\right]^2 + \left[\left(\bar{b} \times \bar{d}\right) - (\bar{a} \times \bar{g})\right]^2$$

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = [(3 \times 5) + (4 \times 4)]^2 + [(4 \times 5) - (3 \times 4)]^2$$

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = [15 + 16]^2 + [20 - 12]^2$$

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = 31^2 + 8^2$$

Desta forma, podemos concluir que de fato $\bar{k}l = 32$ ou $31$ e $\overline{lm} = 1$ ou $8$, assim podemos dar continuidade aplicando as seguintes identidades, como $\bar{f}^2 = e = 25$,

Para $\bar{k}l = 32$ e $\overline{lm} = 1$, temos que,

$$\overline{no} = \frac{\bar{k}l}{\bar{f}} = \frac{\bar{p}}{\bar{f}}$$

$$\overline{no} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$$

e

$$\overline{om} = \frac{\overline{lm}}{\bar{f}} = \frac{\bar{q}}{\bar{f}}$$

$$\overline{om} = \frac{1}{5}$$

Logo temos, $\bar{z} = \overline{no}^2 + \overline{om}^2 = \left(\frac{32}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1024}{25}\right) + \left(\frac{1}{25}\right) = 41.$

Para $\bar{k}l = 31$ e $\overline{lm} = 8$, temos que,

$$\overline{no} = \frac{\bar{k}l}{\bar{f}} = \frac{\bar{p}}{\bar{f}}$$

$$\overline{no} = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}$$

e

$$\overline{om} = \frac{\overline{lm}}{\bar{f}} = \frac{\bar{q}}{\bar{f}}$$

$$\overline{om} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

Logo temos, $\bar{z} = \overline{no}^2 + \overline{om}^2 = \left(\frac{31}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \left(\frac{961}{25}\right) + \left(\frac{64}{25}\right) = 41.$ Desta forma, temos a soma de dois números quadrados formando um número não quadrado formado pela soma de outros dois números quadrados, como Leonardo Fibonacci queria demonstrar.

*Comentário da proposição 10*: “Encontre a soma dos quadrados dos números consecutivos da unidade até o ultimo.”

Nesta proposição tanto Sigler (1987, p. 42) quanto McClenon (1919, p. 5) apresentam as mesmas identidades em notação mais atual,

$$6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n(n + 1(2n + 1).$$

Onde os dois autores concordam que Leonardo Fibonacci prova a partir da seguinte identidade,

$$n(n + 1)(2n + 1) = n(n - 1)(2n - 1) + 6n^2.$$

McClenon (1919) continua sua demonstração com notação mais atual, no entanto, Sigler (1987) parte para explicações a partir da álgebra geométrica utilizada por Leonardo Fibonacci, o que não diverge de nosso entendimento para esta proposição.

Desta forma, percebemos que Leonardo Fibonacci ao comentar que: *Se, começando com a unidade, uma quantidade de números consecutivos, pares e ímpares, são tomados em ordem, então o produto do último número com seu sucessor multiplicado pela soma desses dois valore, é igual a seis vezes a soma dos quadrados de todos os números, nomeados da unidade ao último.*

*Começando com a unidade .ab., os números consecutivos pares e ímpares, .bg., .gd., .de., .ez. são tomados, e deixe .zi. ser o número seguinte ao número .ez. em ordem, que é ele mais um. Eu digo que o produto dos números .ez. e .zi. e .ei., que é .ez., .zi. e a soma dos dois, nomeado .ei., é igual a seis vezes a soma dos quadrados de todos os números .ab., .bg., .gd., .de., .ez..*

Para a soma dos quadrados dos números consecutivos temos as seguintes relações (que ele mesmo apresenta),

$$n \times (n + 1) \times [n + (n + 1)] = 6 \times (1^2 + 2^2 + \cdots n^2).$$

Onde essa soma dos quadrados dos números consecutivos possa ser

$$S = \frac{n \times (n + 1) \times [n + (n + 1)]}{6}$$

Para comprovar esta primeira identidade, partimos do primeiro número, ou seja, o menor valor, que para esta situação é $\overline{ab}$, que para Leonardo Fibonacci é a unidade (1) e com os números consecutivos pares e impares temos, $\overline{bg}$, $\overline{gd}$, $\overline{de}$ e $\overline{ez}$, onde $\overline{zi}$ é o sucessor do ultimo valor, desta forma $\overline{zi} = \overline{ez} + 1$, assim temos que,

Figura 44 – Representação geométrica da proposição 10.


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

- $\overline{e\iota} = \overline{ez} + \overline{z\iota}$;
- $\overline{ez} \times \overline{z\iota} \times \overline{e\iota} = 6 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2)$, esta é a identidade apresentada por Leonardo Fibonacci no início de sua apresentação;
- $\overline{zt} = \overline{ez}$;
- $\overline{t\iota} = \overline{z\iota} - \overline{ez} = 1$;
- $\overline{kz} = \overline{de}$;
- $\overline{kt} = \overline{zt} - \overline{de} = 1$;
- $\overline{ez} = \overline{de} + 1$;
- $\overline{k\iota} = 2 \times 1 = 2$;
- $\overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{ek} = \overline{ze} \times \overline{de} \times \overline{dz}$;
- $\overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{ek} + \overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{k\iota} + \overline{ez} \times \overline{k\iota} \times \overline{e\iota} = \overline{ez} \times zi \times \overline{e\iota}$.

Com isso, Leonardo Fibonacci inicia a sua demonstração partindo da seguinte identidade, $\overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{k\iota} + \overline{ez} \times \overline{k\iota} \times \overline{e\iota} = 6 \times \overline{ez}^2$, para isso temos que,

- $\overline{zk} = \overline{ez} + 1$;
- $\overline{e\iota} = 2 \times \overline{(ez)} + 1$;
- $(\overline{ez}^2 - \overline{ez}) \times \overline{k\iota} = 2 \times (\overline{ez}^2) - 2 \times (\overline{ez})$.

Desta forma temos,

- $\overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{k\iota} = 2 \times (\overline{ez}^2) - 2 \times (\overline{ez})$;
- $\overline{ez} \times \overline{k\iota} = 2 \times (\overline{ez}) \times 2 \times (\overline{ez} + 1)$;
- $\overline{e\iota} = 4 \times (\overline{ez}^2) + 2(\overline{ez})$.

Assim,

$$\overline{ez} \times \overline{z\iota} \times \overline{e\iota} = \overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{ek} + 6 \times (\overline{ez}^2)$$

$$\overline{ez} \times \overline{zk} \times \overline{ek} = \overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz}$$

$$\overline{ez} \times \overline{z\iota} \times \overline{e\iota} = \overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} + 6 \times (\overline{ez}^2)$$

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = \overline{gd} \times \overline{de} \times \overline{ge} + 6 \times (\overline{de}^2)$$

$$\overline{ez} \times \overline{z\iota} \times \overline{e\iota} = \overline{gd} \times \overline{de} \times \overline{ge} + 6 \times (\overline{de}^2 + \overline{ez}^2)$$

$$\overline{gd} \times \overline{de} \times \overline{ge} = \overline{bg} \times \overline{gd} \times \overline{bd} + 6 \times (\overline{gd}^2)$$

$$\overline{ez} \times \overline{z\iota} \times \overline{e\iota} = \overline{bg} \times \overline{gd} \times \overline{bd} + 6 \times \left(\overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2\right)$$

$$\overline{bg} \times \overline{gd} \times \overline{bd} = \overline{ab} \times \overline{bg} \times \overline{ag} + 6 \times (\overline{bg}^2)$$

$$\overline{ez} \times \overline{zi} \times \overline{ei} = \overline{ab} \times (\overline{bg} + \overline{ag}) \times 6(\overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2)$$

Como, $\overline{ab} \times \overline{bg} \times \overline{ag} = 6 \times \left(\overline{ab}^2\right)$, onde $\overline{bg} = 2$ e $\overline{ag} = 3$ temos,

$$\overline{ez} \times \overline{zi} \times \overline{ei} = 6 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2)$$

Como Leonardo Fibonacci queria mostrar. E desta forma,

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2\right) = \frac{\overline{ez} \times \overline{zi} \times \overline{ei}}{6}$$

Exemplificando temos,

- $\overline{ab} = 1;$
- $\overline{bg} = 2;$
- $\overline{gd} = 3;$
- $\overline{de} = 4;$
- $\overline{ez} = 5;$
- $\overline{zi} = \overline{ez} + 1 = 5 + 1 = 6;$
- $\overline{ei} = \overline{ez} + \overline{zi} = 5 + 6 = 11.$

Assim,

$$\overline{ez} \times \overline{zi} \times \overline{ei} = 6 \times \left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2\right)$$

$$6 \times 5 \times 11 = 6 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

$$330 = 6 \times 55$$

$$330 = 330$$

Desta forma,

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2\right) = \frac{\overline{ez} \times \overline{zi} \times \overline{ei}}{6}$$

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ez}^2\right) = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = \frac{330}{6} = 55$$

Assim, temos como encontrar a soma de quadrados de números consecutivos da unidade ao ultimo valor.

*Comentário da proposição 11*: “Encontre a soma dos quadrados dos números ímpares consecutivos, da unidade ao último.”

McClenon (1919, p. 5) apresenta esta proposição como um teorema sem apresentar sua demonstração, apenas menciona que sua prova é semelhante ao da *proposição 10*, no entanto, Sigler (1987, p. 46) já faz uma demonstração, tanto com uma notação mais atual quanto pela álgebra geométrica de Leonardo Fibonacci semelhante a que apresentaremos a seguir.

Leonardo Fibonacci faz o seguinte comentário: *Se, começando com a unidade, uma quantidade de números ímpares consecutivos são tomados em ordem, então o produto do ultimo número e seu sucessor multiplicado pela soma desses dois valores é igual a doze vezes a soma de todos os quadrados dos números ímpares da unidade ao último número ímpar.*

*Começando com a unidade .ab., deixemos, de fato, .bg., .gd., .de., serem os números ímpares consecutivos e deixemos o número ímpar seguinte a .de. ser .ez.. Eu digo que o triplo produto dos números .de., .ez. e sua soma .dz. é igual a doze vezes a soma dos quadrados da unidade .ab. e os números ímpares .bg., .gd., .de..*

Leonardo Fibonacci queria mostrar que, se temos a seguinte soma:

$$1^1 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Admitindo todos os valores desta soma números impares, temos que,

$$n \times (n+2) \times [n + (n+2)] = 12 \times (1^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Desta forma, a soma ($S$) dos números impares será: $S = \frac{n \times (n+2) \times [n+(n+2)]}{12}$.

Para tanto, partimos de primeiro número impar, ou seja, da unidade (1), que pela álgebra geométrica Leonardo Fibonacci chama de $\overline{ab}$ e com os números impares consecutivos $\overline{bg}, \overline{gd}$ e $\overline{de}$, onde $\overline{ez}$ é o sucessor do número $\overline{de}$, ou seja, $\overline{ez} = \overline{de} + 2$, com $\overline{dz} = \overline{de} + \overline{ez}$, assim, Leonardo Fibonacci conclui que, se temos a descrição geométrica apresentada (figura 45),

Figura 45 – Representação geométrica do comentário da proposição 11


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Sigler (1987).

Isso nos dá a seguinte identidade,

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 12 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

Assim,

- $\overline{de} = \overline{ei}$;
- $\overline{iz} = 2$

Para mostrar a validade dessa identidade, Leonardo Fibonacci parte da seguinte ideia,

$$\overline{gd} \times \overline{de} \times \overline{ge} + 12 \times \left(\overline{de}^2\right) = \overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz}$$

Onde,

- $\overline{de}$ sendo a raiz;
- $\overline{gd} = \overline{de} - 2$;
- $\overline{ge} = 2 \times \left(\overline{de}\right) - 2$

Assim, de $\overline{gd} \times \overline{de} = \overline{de}^2 - 2 \times \overline{de}$, e quando

$$\left(\overline{de}^2 - 2 \times \overline{de}\right) \times \overline{ge} = 2 \times \overline{de}^3 + 4 \times \overline{de} - 6 \times \overline{de}^2$$

E se adicionamos $12 \times \overline{de}^2$ de ambos os lados, teremos o seguinte resultado,

$$2 \times \overline{de}^3 + 6 \times \overline{de}^2 + 4 \times \overline{de}.$$

Como $\overline{de}$ é uma raiz, $\overline{ei}$ também será raiz. Portanto $\overline{ez} = \overline{de} + 2$ ou $\overline{ez} = \overline{ei} + 2$, assim, $\overline{iz} = 2$, logo $\overline{dz} = 2 \times \overline{de} + 2$. E $\overline{de} \times \overline{ez} = \overline{de}^2 + 2 \times \overline{de}$, desta forma, se

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 2 \times \overline{de}^3 + 6 \times \overline{de}^2 + 4 \times \overline{de}$$

Temos que,

$$\overline{bg} \times \overline{gd} \times \overline{bd} + 12 \times \overline{gd} = \overline{gd} \times \overline{de} \times \overline{ge}$$

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = \overline{bg} \times \overline{gd} \times \overline{bd} + 12 \times (\overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

$$\overline{bg} \times \overline{gd} \times \overline{bd} = \overline{ab} \times \overline{bg} \times \overline{ag} + 12 \times \overline{bg}^2$$

$$\overline{ab} \times \overline{bg} \times \overline{ag} = 12 \times \overline{ab}^2$$

Como $\overline{bg} = 3$ e $\overline{ag} = 4$, temos que $\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 12 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$, como Leonardo Fibonacci queria mostrar.

Exemplificando temos,

- $\overline{ab} = 1$;
- $\overline{bg} = 3$;
- $\overline{gd} = 5$;
- $\overline{de} = 7$;
- $\overline{ez} = \overline{de} + 2 = 7 + 2 = 9$;
- $\overline{dz} = \overline{de} + \overline{ez} = 7 + 9 = 16$.

Da identidade de Leonardo Fibonacci, temos

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 12 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

$$7 \times 9 \times 16 = 12 \times (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2)$$

$$1008 = 12 \times 84$$

$$1008 = 1008$$

Logo,

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2\right) = \frac{\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz}}{12}$$

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2\right) = \frac{7 \times 9 \times 16}{12}$$

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2\right) = \frac{1008}{12}$$

$$\left(\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2\right) = 84$$

É interessante notar que para esta proposição Leonardo Fibonacci apresenta o seguinte **desdobramento**, para o qual, há um comentário de Sigler (1987) que é bem próximo ao que Leonardo Fibonacci apresenta.

McClenon (1919, p. 6) apresenta o mesmo como um teorema posterior, no qual, afirma que Leonardo Fibonacci quase descobriu um resultado geral,

$$a^2 + (a+d)^2 + (a+2d^2) + \cdots + [a+(n-1)d]^2 = \frac{6na^2 + 6n(n-1)ad + n(n-1)(2n-1)d^2}{6}$$

e para este método não há necessidade de mudanças.

Percebemos que Leonardo Fibonacci encontrou uma regularidade para soma de quadrados de números consecutivos para intervalos de 1, 2, 3, 4 e 5, tomando a identidade da *proposição 10* e multiplicando o número 6 (seis) da identidade pelo intervalo dos números consecutivos em progressão aritmética.

Exemplificando temos, para intervalos de 1 que a identidade será:

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 6 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

Para intervalos de 2 que a identidade será:

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 12 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

Para intervalos de 3 que a identidade será:

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 18 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

Para intervalos de 4 que a identidade será:

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 24 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2)$$

Para intervalos de 5 que a identidade será:

$$\overline{de} \times \overline{ez} \times \overline{dz} = 30 \times (\overline{ab}^2 + \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2 + \overline{de}^2).$$

*Comentário da proposição 17*: "Encontre um número quadrado, o qual adicionado cinco ou subtraído cinco permaneça um número quadrado."

O comentário de McClenon (1919) não diverge do que Leonardo Fibonacci apresenta em seu livro, no entanto, Sigler (1987, p. 78) apresenta um extenso comentário que exibe teóricos que se utilizaram das identidades ou das ideias de Leonardo Fibonacci, a saber, Luca Pacioli (1447 – 1517) em seu trabalho *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Propornalità* (Coleção de Conhecimentos de Aritmética, Geometria, Proporção e Proporcionalidade), bem como, possíveis aplicações como para curvas elípticas.

Notamos que Leonardo Fibonacci inicia admitindo um número "congruente", que é definido pelo próprio Leonardo Fibonacci em proposições anteriores, a saber, as proposições 12, 14, 15 e 16. Assim esta proposição irá admitir valores já encontrados anteriormente, vale ressaltar que o número congruente aqui referido não é o mesmo definido por Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Desta forma temos o número 720 que é um número congruente[19] onde sua quinta parte é o número quadrado 144. Desta forma temos o primeiro valor congruente $961 = 31^2$, o segundo número congruente $1681 = 41^2$ e o terceiro número congruente $2401 = 49^2$. Leonardo Fibonacci para esta proposição necessita de três valores para serem somados e subtraídos por cinco. Desta forma, temos que,

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

e

$$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

Logo, temos um número quadrado que subtraído ou adicionado cinco permanece um número quadrado, como Leonardo Fibonacci queria mostrar.

É importante evidenciar que este problema foi proposto no torneio de matemática que Leonardo Fibonacci participou a convite do rei Frederico II (como comentado no capítulo 1), assim, este problema leva o matemático a escrever o *Liber Quadratorum*, o qual apresenta uma sequência de proposições em um texto corrido sem separar as proposições, como o fazemos, com a finalidade de provar sua ideia inicial

---

[19] O número "congruente" é obtido como $C = 4mn(n+m)(n-m)$ (proposição 16 de Sigler (1987)), onde $m = 4$; e $n = 5 \to n + m = 9$ e $n - m = 1$. E as raízes são obtidas da relação $\frac{1}{2}\left[2\frac{m}{n}(n+m) \pm 2\frac{n}{m}(n-m)\right] = 31, 41, 49, 41$ (proposição 14 de Sigler (1987)).

(em relação à soma de números impares e quadrados) e ter os devidos subsídios para provar esta proposição 17.

As apresentações presentes permitem um olhar mais completo no que diz respeito ao livro de Leonardo Fibonacci, ou seja, com as colocações anteriores, dos assuntos, contexto histórico que foi escrito, o autor e suas condições e influências, e após esta apresentação detalhada destas doze proposições iniciais; temos um maior *background* de observar suas potencialidades, das quais indicamos na seção seguinte.

## 3.2 Indicando o potencial didático/pedagógico do *Liber Quadratorum*

Percebemos com o exposto, que estes problemas são ricos, possuidores de potenciais para o ensino e para a aprendizagem da matemática. No qual Possibilita propostas para a efetivação das habilidades exigidas pelo currículo de matemática. Assim, entendemos que a exploração "criativa" dos textos matemáticos históricos pode trazer contribuições para o encaminhamento conceitual e didático de noções das componentes curriculares (LOPES, 2017).

Desta forma, examinar situações específicas com um aprofundamento consistente, como no *Liber Quadratorum*, pode viabilizar respostas mais satisfatórias para o ensino. Assim, temos a oportunidade de suprir competências levantadas na BNCC[20] referente à matemática, a exemplo disto, temos a competência de número nove, que diz respeito a levar o aluno a reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, construção, esta, referente às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, que contribuíram para solucionar problemas científicos e tecnológicos, dando ênfase as descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2016).

Desta forma, queremos nesta seção elencar possíveis potenciais didáticos a serem explorados no *Liber Quadratorum*. Para tal, faz-se necessário delinear o que vem a ser potencial didático para nós. Com isso, caracterizamos neste trabalho primeiramente a didática como um ramo de estudo próprio da pedagogia, que equivale a uma ciência da e para a educação, que estuda a educação, a instrução e o ensino. Para tanto, nos apoiamos em Libâneo (1990), que traz considerações que julgamos

[20] Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

importantes para este momento de construção do saber. Libâneo (1990) salienta, ainda que a pedagogia se constitui em:

> [...] um campo que investiga a natureza das finalidades da educação numa determinada sociedade, bem como os meios apropriados para a formação dos indivíduos, tendo em vista prepara-los para as tarefas da vida social. Uma vez que a prática educativa é o processo pelo qual são assimilados conhecimentos e experiências acumulados pela prática social da humanidade, e criando um conjunto de condições metodológicas e organizativas para viabiliza-lo (LIBÂNEO, 1990, p. 24).

Neste sentido, percebemos que a didática investiga os fundamentos, condições e modos de instrução do ensino. O didático articulado a pedagogia difundem processos e procedimentos na investigação das matérias específicas da ciência, que servem de base para o ensino e a aprendizagem de situações concretas da prática docente (LIBÂNEO, 1990).

Adentrando nas matérias mais específicas da didática, mencionadas por Libâneo (1990) anteriormente, temos em Pais (2011), Almouloud (2007) e D'Amore (2007) a didática da matemática, a qual compõe um campo da didática. Apresentamos, dentre estes autores, Pais (2007), com o seguinte pensamento, no tocante a didática da matemática,

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica ( PAIS, 2007, p. 11).

Em conformidade com a definição de Pais (2007), os demais autores admitem que a didática da matemática não é mencionada apenas como uma tendência da Educação Matemática, outrossim como uma ciência que estuda o fenômeno do ensino/aprendizagem da matemática, via transposição do saber.

A Construção do pensamento de didática nos possibilita delinear e elencar as possíveis potencialidades didático/pedagógicas encontradas no *Liber Quadratorum*, pois esperamos contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais das ternas pitagóricas, dos números quadrados ou até mesmo contribuir para a academia na teoria dos números, já que segundo Mcclenon (1919), Leonardo Fibonacci está no ranking como o maior gênio deste campo.

Neste sentido utilizar didaticamente ou pedagogicamente as informações históricas, tendo em vista o ensino de matemática, será o caminho traçado por nós nesta seção.

Nesta perspectiva, entendemos potencial didático, como as qualidades ou fatores positivos que viabilizem a prática docente, ou seja, todas as informações históricas que podem passar por uma transposição didática, com a função de operacionalizar o ensino, torna-se para nós um potencial didático, seja no campo epistemológico ou ético de Miguel e Miorim (2004). A transposição didática aqui mencionada refere-se ao que Mendes e Chaquiam (2016) apontam como constituição do saber escolar ou acadêmico, já que a educação escolar ou acadêmica não se limita apenas em fazer uma seleção de saberes que estão disponíveis na cultura em algum momento histórico, no entanto em transforma-los em saberes possíveis de serem ensinados e aprendidos (MENDES e CHAQUIAM, 2016).

Concordamos da mesma forma com os autores quando mencionam o termo transposição didática em relação à transposição do saber, a reorganização, a mediação ou a reestruturação dos saberes historicamente constituído tipicamente escolar ou acadêmico.

Deste modo, Mendes (2016, p. 21) definem a transposição didática como o processo que faz com que os objetos do saber matemático erudito se transformem em saberes a ensinar, inscritos no projeto de ensino, e depois em saberes de ensino. E os autores concluem que:

> As informações históricas, portanto, passam a ser tomadas como o saberes já estabelecidos socialmente, que podem ser tomados como matéria-prima a ser vetorizada com a finalidade de transformar o conhecimento a ser aprendido em algo mais próximo do aprendiz. Trata-se, na verdade, de uma reinvenção matemática que deveria ser melhor apropriada aos objetivos de trabalho do professor e do nível de aprofundamento que precisa ser dado ao aprendiz, ou seja, ao aluno (MENDES, 2016, p. 22).

Concordamos de igual forma com Pais (2011), quando evidencia a transposição como um fenômeno, o qual é caracterizado pelo fluxo cognitivo relativo à evolução do conhecimento, estando esta no domínio mais específico da aprendizagem. E com D’Amore (2007), quando apresenta a transposição no sentido de extrair um elemento do saber de seu contexto para recontextualizá-lo, produzindo objetos novos, que permitam a transferência dos saberes aprendidos no processo (D'AMORE, 2007).

Dando seguimento ao nosso esforço por evocar as potencialidades, encontramos em Miguel (1993, 1997) e Miguel e Miorim (2004) argumentos favoráveis ou que reforcem as potencialidades do uso da História da Matemática no ensino. A esse respeito, Miguel (1997), destaca alguns argumentos que entendemos como áreas de atuação das propostas operacionalizadas ou vetorizadas, que utilizam as informações históricas voltadas para o ensino de matemática, ou seja, a história construída do ponto de vista do educador matemático. Assim, Miguel (1997) nos apresenta argumentos, dos quais destacamos apenas alguns:

- A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática;
- A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da matemática;
- A história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
- A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica;
- A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática.

É importante evidenciar que o autor em publicações posteriores constrói esses argumentos em duas categorias diferentes e não excludentes, a epistemológica e a ética, bem como, argumentos questionadores do uso da história da matemática, os quais não traremos neste relatório de pesquisa. Para estas categorias, o autor considerou o modo como se concebeu a natureza dos elementos considerados determinantes ou condicionadores da aprendizagem matemática, bem como da natureza das atitudes e dos valores que se deseja promover nos estudantes com base em suas análises de trabalhos que carregam em suas pesquisas e propostas, viabilizar o ensino baseado na história.

Após a construção do que vem a ser potencial didático neste trabalho, temos a segurança ou os subsídios necessários para elencar as possíveis potencialidades didáticas do *Liber Quadratorum*, apoiados nos argumentos salientados por Miguel (1997). Assim, encontramos as seguintes potencialidades a serem exploradas neste livro do décimo terceiro século de Leonardo Fibonacci:

- Construção de diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas – podemos evidenciar esta potencialidade nas proposições 1, 3, 5 e 7, pois apresentam as ideias de encontrar quadrados que formam quadrados com suas somas, nos dando a oportunidade de inferir seja em qual for das proposições mencionadas lados de triângulos retângulos ptitagóricos;

- Atividades de potenciação principalmente de quadrados – esta potencialidade, pode ser evidenciada em todas as proposições, pois todas as apresentadas na seção anterior trazem diversos padrões envolvendo potenciação de expoente dois em relação as operações;
- Atividades com raiz quadrada – para esta potencialidade, observamos nas proposições 2 e 17, algumas atividades em que as raízes são o objetivo do problema ou o meio pelo qual as soluções são dadas;
- A utilização da história da humanidade – podemos perceber esta potencialidade nas investigações históricas que circundam o *Liber Quadratorum* como descrito no capítulo 1;
- A investigação da vida e obra de Leonardo Fibonacci – podemos observar que esta potencialidade também transcende a obra de Leonardo Fibonacci, pois passa a ser válida para qualquer uma de suas obras, bem como para investigação deste matemático e suas diversas contribuições para a comunidade matemática;
- Investigação das representações numéricas – podemos perceber que esta potencialidade pode ser observada em quase todas as proposições discutidas, pois Leonardo Fibonacci apresenta em sua obra uma forma peculiar da representação de número por seguimentos de retas, como nas proposições 4 e 5;
- A evolução da linguagem algébrica – podemos evidenciar que a divulgação da aritmética árabe como descrito no capítulo 1, permite Leonardo Fibonacci apresentar outra linguagem algébrica para a Europa, introduzindo os algarismos indo-arábicos e suas regras para calcular, bem como, a álgebra geométrica que sustenta as suas soluções.

Entendemos, que estas potencialidades, por nos elencadas, coadunam com os argumentos que destacamos aqui, bem como, pertencentes às duas categorias de argumentos, tanto a epistemológica quanto a ética, comentadas anteriormente.

Por conseguinte, o educador matemático terá a oportunidade e os mecanismos necessários para propor situações que possam conduzir os alunos a (re) descoberta do conhecimento através do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigados, através de relações ou investigações, para que com esta perspectiva metodológica, possam ter os meios para aprenderem o *quê* e o *porquê* fazem ou sabem desta ou daquela maneira, para que desta forma o aluno tenha oportunidade de construir sua aprendizagem por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios (MENDES, 2009b).

Enfatizamos que, para a História da Matemática ser considerada como um recurso didático para o ensino é importante que as abordagens históricas utilizadas em sala de aula estejam vinculadas ao conteúdo matemático a serem estudados, na procura de encontrar justificativas, fatos interessantes, os porquês e os para quês, necessários para suprir a curiosidade dos alunos. Nesse direcionamento, as potencialidades do *Liber Quadratorum* podem ser utilizadas como uma aliada pedagógica no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Consideramos que as potencialidades do *Liber Quadratorum* partilham das propostas de Miguel e Miorim (2004), no que tange para uma história pedagogicamente vetorizada, a qual desponta de uma concepção orgânica da participação da história na produção do saber e da formação docente (figura 46), a qual é definida e sustentada por uma forma particular de problematização da educação matemática escolar, ou seja, da concepção do modo como a cultura matemática e a educação matemática se constituem e se transformam como praticas sociais escolares (MIGUEL e MIORIM, 2004).

Figura 46 – Concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente.


Fonte: Elaborado pelo autor, a partir de Miguel e Miorim (2004).

Essa problematização passa a ter três características, *multidimensional*, pois, pode incidir em várias dimensões da cultura e da educação matemática, como a epistemologia, a lógica, a antropologia e etc. A seguinte característica é a *interativo-dialógica*, haja vista que, esta problematização promove a realização e a discursão de atividades que estimulam a interação e o diálogo entre: aluno-aluno e aluno-professor, bem como, do professor e as diferentes práticas sociais que possam ter participado da produção, apropriação e das transformações da história dos temas matemáticos que podem vim a ser estudados. E por fim esta problematização é *investigativa*, pois, promove a iniciação do futuro professor de matemática nos diferentes campos das práticas sociais de pesquisa em história da matemática, isto é, na história da educação matemática, na história e epistemologia da matemática e na história para o ensino de matemática (MIGUEL e MIORIM, 2004).

Com essas características, a problematização passa a assumir quatro papéis: *interdisciplinar*, *didático metodológico*, *psicológico motivacional* e *político-crítico*. Assim, o uso das informações históricas pode ser vetorizado, ou seja, elas podem ser reorganizadas do ponto de vista do professor, como já comentamos.

Entendemos assim, que o *Liber Quadratorum* tem um grande potencial para esta vetorização ou para a composição orgânica da participação da história na produção do saber, já que, as potencialidades deste livro, elencadas aqui, perpassam por estes papéis apontados por Miguel e Miorim (2004), assim como, as características da problematização da educação matemática.

Desta forma, a partir da tradução e dos comentários das proposições deste livro de Leonardo Fibonacci e das potencialidades que este possui que coadunam para uma possiblidade real da vetorização das proposições que compõe o *Liber Quadratorum*, apresentamos nossas considerações, a seguir, bem como, as nossas expectativas futuras no que diz respeito às propostas para continuação ou ampliação desta pesquisa.

# Considerações Finais

Percebemos que o uso didático/pedagógico das informações históricas pode, em muito, contribuir para o ensino e para a aprendizagem de matemática, afinal, há vários argumentos para confirmar as potencialidades da história da matemática. No entanto, há argumentos, como mostram Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004), que questionam essas potencialidades da história da matemática voltada para educação/ensino.

Desta forma, temos que ser prudentes no que diz respeito ao uso das informações históricas, com o intuito de assumirmos uma posição intermediária em meio a esses argumentos, pois os dois extremos apresentam perigos para o ensino, ou seja, não podemos assumir um papel de colocarmos a história da matemática como uma solução para tudo e todos ou em uma posição que não pode em nada contribuir.

Assim, assumindo essa posição intermediária nas investigações e análises feitas a partir do estudo do *Liber Quadratorum* e da biografia de Leonardo Fibonacci, percebemos quão magnífico foi este matemático italiano, que mesmo sem recursos algébricos e linguísticos que temos disponíveis hoje, conseguiu demonstrar suas ideias de uma forma tão esclarecedora e singular. Embora tenha baseado suas demonstrações em estudiosos passados, conseguiu imprimir suas digitais em cada problema proposto e demonstrado, utiliza a álgebra geométrica aprendida no oriente e fundamenta-se da concepção de número como um seguimento de reta, na qual mantém viva em seu livro a matemática construída pela sociedade oriental e difundida culturalmente, no entanto, reorganizando estes conhecimentos para as suas necessidades e objetivos.

Portanto, constatamos que ao suprir a necessidade de localizar este matemático, bem como, sua obra em tempo e espaço para uma melhor compreensão das circunstâncias que o envolviam e as necessidades da época, as quais, o influenciaram em suas tomadas de decisões possibilitando, assim, escrever este livro dos quadrados, viabilizamos a interação com a história da matemática e com a história da humanidade, o que permitiu uma capacidade de compreensão mais adequada das condições em que foi escrito o *Liber Quadratorum* (1225) e o período de tempo em que viveu este matemático.

Leonardo Fibonacci não foi apenas um observador passivo, neste movimento descrito por nos no *capítulo 1*, assim concordamos com Mendes (2009b), reconhecendo que este personagem adicionou suas impressões ao conhecimento experienciado por ele em suas viagens e estudos. Concluindo-se daí, que o conhecimento traz consigo um fator subjetivo ligado ao contexto sócio-cultural de quem o produz (MENDES, 2009a, p. 70).

Deste modo, passamos a ter esclarecimentos que nos permitiu fazer inferências no que diz respeito às influências que este matemático teve. Logo, temos a segurança para apresentar as obras de Al-Khowarizmi e Abu Kamil, como materiais para os estudos de Leonardo Fibonacci, desta forma influenciou na escrita da obra em questão. Vemos da mesma forma os Elementos de Euclides sendo uma de suas bases para as suas demonstrações e ideias.

Após estas inferências, podemos nos posicionar de uma forma mais adequada para construir um material em português, para o estudo das doze proposições, que configuram o segundo degrau dos procedimentos de nossa pesquisa. Posteriormente a essa construção e estudos mais aprofundados do livro *The Book of Squares* de Sigler (1987), podemos ter mais certeza de suas referências.

Com o material em português já construído, foi possível considerar os seguintes argumentos, o *Liber Quadratorum* trata essencialmente da relação entre números quadrados e soma de sequências de números impares, simbolicamente $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. Assim, Leonardo Fibonacci partindo desta relação, que hoje consideramos elementar, apresenta aplicações teóricas do conteúdo, obtendo novos resultados e desta forma, resolve uma gama de problemas com o uso desta relação, construindo os subsídios necessários para a solução (demonstração) da proposição dezessete que desencadeia as demais proposições (de 18 a 24).

Alguns problemas tratam da obtenção de quantidades indeterminadas, nos termos de Diofanto (250 dC), no entanto, utilizando métodos elaborados por ele próprio e influênciados por uma formação com a obtenção de conhecimento da matemática árabe, define e molda a sua maneira as demonstrações de suas proposições. Proposições estas, que Leonardo Fibonacci propõe a partir da consulta de vários materiais, como os elementos de Euclides e os livros de Al-khowarismi e Abu Kamil, já comentados. Hoje, percebemos que muitos de seus problemas já eram conhecidos de outros estudiosos anteriores, dessa maneira, muitos problemas propostos neste livro não eram, essencialmente originais, no entanto, suas demonstrações sim.

Com este material em português, desfrutamos da possiblidade de comentar os problemas e soluções contidos no *Liber Quadratorum*, assim, passamos a ter uma melhor compreensão destes problemas.

Deste modo, nos foi permitido evidenciar as potencialidades que a inserção das informações históricas que circundam este livro, assim como, das proposições contidas neste e suas demonstrações, podem trazer para a potencialização e efetivação do ensino e da aprendizagem, sejam estes em âmbito acadêmico ou escolar.

Temos, desta forma, um material possível de ser pedagogicamente vetorizado, ou seja, com os resultados que aqui foram mostrados em cada capítulo, constituindo este relatório de pesquisa, podemos afirmar que tanto a história entorno deste livro, seja da humanidade da matemática ou do autor, como seu conteúdo, podem ser reorganizados na visão do professor nos parâmetros de Miguel (1993) e Miguel e Miorim (2004), nos permitindo uma transposição do saber, isto é, reorganizando um saber *a* ensinar para um saber *para* ensinar, em outras palavras de um saber objeto de estudo para um saber ferramenta de ensino/aprendizagem (HOFSTETTER e SCHNEUWLY, 2017).

Com nossos procedimentos metodológicos, concretizados, alcançamos um estudo em certa medida aprofundado do *Liber Quadratorum*, nos proporcionando um melhor entendimento deste, com a construção de um material em português, que possibilitou evidenciar os potenciais didático/pedagógicos que o *Liber Quadratorum* possui.

Podemos assim, rememorar e responder nossa questão inicial e condutora desta pesquisa – *Quais são as potencialidades didático/pedagógicas que podem ser evidenciadas a partir dessas proposições e suas demonstrações que podem ser usadas em sala de aula para efetivar o ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos?*

Para melhor responder a questão geratriz deste estudo, recordemos, que as proposições de um a onze tem caráter mais elementar que constituem suas ideias iniciais e seus desdobramentos e as proposição de doze a dezesseis possuem caráter mais elaborado, as quais fundamentam a proposição dezessete que se caracteriza como a motivação para a escrita do *Liber Quadratorum;* como apresentamos nos capítulos 1e 2.

Assim, com o conhecimento dos conceitos e técnicas de resoluções envolvidas nas proposições que elencamos, podemos indicar o potencial didático/pedagógico do texto para o ensino de conteúdos matemáticos, hora apresentados no capítulo 3, como exemplos temos: potenciação com índice dois, diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas, raiz quadrada e sequências numéricas; em sala de aula.

Direcionamos nossa atenção neste momento para o capítulo 3, o qual estuda as proposições e suas demonstrações, visando apresentar as potencialidades que o *Liber Quadratorum* proporciona, assim, temos na *proposição 1* (encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado), uma forma de encontrar as ternas pitagóricas, quando Leonardo Fibonacci nos apresenta que ao somar os números impares consecutivos até o impar quadrado, logo podemos encontrar dois números quadrados formando um número quadrado, simbolicamente: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2x + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Ressaltamos que os dois desdobramentos desta proposição apresentam outra forma de encontrar dois quadrados que somados formam um número quadrado. Assim, apenas com a *proposição 1,* podemos perceber esta potencialidade aqui mencionada.

Da mesma forma observamos a potencialidade de atividades com potenciação de índice dois na *proposição 2* (qualquer número quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das suas raízes), na qual Leonardo Fibonacci caminha nas diferenças entre potencias de índices dois, bem como, em seus desdobramentos. Percebemos de igual forma o potencial de construção da linguagem algébrica por todo o livro, na qual sua linguagem algébrica se mistura harmoniosamente com a geometria, para que Leonardo Fibonacci se faça entender. Outro potencial interessante, e que transcende o livro dos quadrados de Leonardo Fibonacci, é o contexto histórico e a construção do livro, que possibilita o aprendiz a perceber que a matemática é uma criação humana e apresenta obstáculos até para matemáticos de nomes inscritos na história.

Neste sentido, manumitir o *Liber Quadratorum*, para fins explicitamente pedagógicos articulados, com as demais variáveis que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, que pode assumir um papel pedagogicamente vetorizado, se contrapondo a uma tendência tecnicista e aparentemente neutra do ensino/aprendizagem da utilização da história da matemática, que pode em muito prestar grande auxilio para o educador matemático que queira traçar caminhos que vão ao encontro das necessidades do aluno. Em relação a estas necessidades, podemos apresentar este relatório de pesquisa, também, como uma contribuição para suprir a ausência da literatura adequada para forma didática, pois esta ausência de literatura é evidenciada por Miguel (1997) em seus argumentos questionadores das potencialidades da História da Matemática, assim, podemos contribuir para reforçar o uso da História da Matemática como uma ferramenta para a adequação do ensino/aprendizagem.

Esperamos com este estudo, que as investigações do *Liber Quadratorum* não se encerrem aqui, mas que oportunize diversos desdobramentos no âmbito acadêmico e escolar, pois há ainda muitos questionamentos a serem feitos acerca deste livro, como –

Quais as potencialidades conceituais que podem ser destacadas na obra pesquisada para contribuir no ensino de matemática na educação básica? Como essas potencialidades conceituais e didáticas podem ser exploradas pelo professor nas aulas de matemática, na educação básica, no nível médio de ensino, ou na academia? Ou uma proposta para a vetorização, a luz de Miguel (1993) e Miguel e Miorim (2004), das proposições contidas neste livro e das histórias que estão relacionados com o *Liber Quadratorum*.

Assim, ao encerrarmos com este relatório de pesquisa, um estudo, damos início aqui a um novo horizonte para futuros estudos nas múltiplas áreas da História da Matemática.

*Fabulam non est terminus hic!*

# Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARAGÃO, M. J. **História da Matemática**. Rio de janeiro, 2009.

ARAÚJO, F. A. **Argumentos para a Legitimação do Sacro Império Romano-Germânico em Marsílio de Pádua (1280-1343)**. Universidade Federal do Paraná – Curitiba, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1974.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma Análise Histórico-Epistemológica do conceito de Grupo**. Natal, 2009.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base.** Brasília, 2016.

CASTILLO, R. M. **Fibonacci: El Primer Matemático Medieval**. 2ª ed. Coleção – La matemática em sus personajes. Espaha: Nivola, 2007.

CHAQUIAM, M. **História da Matemática em Sala de Aula: Proposta para Integração aos Conteúdos Matemáticos**. SBHM – 2015.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** (tradução Maria Cristina Bonomi), SP: Ed. Livraria da Física, 2007.

DEVLIN, K. **The Man of Numbers: Fibonacci's arithmetic revolution**. Volume 59, Number 5. Book Review. May, 2012

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5ª ed. – Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRANCO JÚNIOR, H. **A Idade Média: nascimento do ocidente**. 2ª ed. rev. e ampl. São Paulo, SP: Brasiliense, 2001.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 2ª ed. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2007.

HOFSTETTER, R. e SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTERTTER, R. e VALENTE, W. R. **Saberes em (trans)formação: tema central da formação dos professores.** 1. ed. SP: Editora Livraria da Física, 2017. p. 113 – 172.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1990.

LOPES, G. L. O. **A Criatividade Matemática de John Wallis na Obra Arithmetica Infinitorum: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática**. (Tese de Doutorado). Natal, 2017.

LOSSIO JÚNIOR, W. O. **As Relações Culturais e as Viagens Entre e o Ocidente Europeu e o Oriente Mongol: o exemplo de marco polo**. UFPR. Curitiba, 2006.

MCCLENON, R. B. Leonardo of Pisa his Liber Quadratorum. **The American Mathematical Monthly**, Vol. 26, No. 1. Jan., 1919. p. 1 – 8 .

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009a.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino de Trigonometria. In: MIGUEL, A.; [et al]. **História da matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2009b. p. 105 – 178.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino.** São Paulo, SP: Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A. História da matemática e reinvenção didática em sala de aula. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, Antonio; **Três Estudos Sobre História e Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. **As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: argumentos reforçadores e questionadores.** Zetetiké, Campinas, v. 5, n. 8, p.73-105, jul./dez. 1997. p. 73 – 105.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 198p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MIGUEL, A.; [et al]. **História da matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2009.

OLIVEIRA, J. J. **Sequências de Fibonacci: possibilidades de aplicações no ensino básico**. UFBA. Salvador, BA, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C. **Sobre uma generalização da integral definida: tradução do primeiro trabalho de henri lebesgue sobre sua nova integral.** Vol. 12, n° 25, p. 65-71, RBHM, 2012.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influencia francesa.** 3. ed. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2011.

ROONEY, A. **A História da Matemática: Desde a Criação das Pirâmides até a Exploração do Infinito.** São Paulo, SP: Makron Books, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SERRÃO, M. M. **Problemas Matemáticos da Antiguidade como Estratégia para o Ensino de Matemática na Educação Básica**. (dissertação de mestrado). Belém, PA: 2014.

SESTITO, E. A. B.; OLIVEIRA, T. **As Transformações do Pensamento na Baixa Idade Média e as Mudanças na Arte**. Londrina, 2010.

SIGLER, L. E. **The Book of Squares.** An annotated traslation into modern english. Academic Press, USA: 1987.

VINAY, J. P.; DARBELNET, J. A Methodology for Translation. Trans. By Juan C. Sager e M.-J. Hamel. In: VENUTI, Lawrence (Ed.) **The Translation Studies Reader.** London/New York: Routledge, 2000, p. 84-93.

**Cadernos de Espiritualidade Franciscana**. Editorial Franciscana – Braga, 2009.

**Guia: construa sua própria exposição na escola**. 1001 Inventions. Brasil, **______**.