UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

MARCEL DE ALMEIDA BARBOSA

O SENTIDO DAS REGRAS NO ENSINO DE FRAÇÕES

BELÉM-PA
2020

MARCEL DE ALMEIDA BARBOSA

O SENTIDO DAS REGRAS NO ENSINO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre na área de concentração: Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

BELÉM – PA
2020

MARCEL DE ALMEIDA BARBOSA

O SENTIDO DAS REGRAS NO ENSINO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Defesa em: 28 de fevereiro de 2020.

Banca Examinadora

____
Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira (Orientadora) – IEMCI / UFPA

____
Prof. Dr. Marcelo de Sousa Oliveira (Membro Externo) – UNIFESSPA

____
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma (Membro Interno) – IEMCI / UFPA

BELÉM – PA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278s de Almeida Barbosa, Marcel
O sentido das regras no ensino de frações / Marcel de Almeida Barbosa. — 2020.
85 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Filosofia de Wittgenstein. 2. Linguagem Matemática. 3. Ensino de Matemática nos Anos Iniciais. 4. Operações com Frações. 5. Uso de Regras. I. Título.

CDD 370.71

Agradeço

A Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, por acreditarem que a Educação transforma vidas, e por sempre defenderem a minha profissão, sobretudo, nesses momentos tenebrosos em que o país se encontra.

À Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira, minha orientadora, por mais uma grata experiência em ser seu orientando, por confiar no projeto e caminhar junto desde o início.

Aos professores do PPGECM/IEMCI que contribuíram para a minha formação enquanto professor-pesquisador.

Aos professores membros da banca de qualificação: Profa. Ma. Rouziclayde Barata, Prof. Dr. Marcelo Oliveira e Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg pelas contribuições excelentes na pesquisa, bem como aos professores que fizeram parte da banca de defesa, Prof. Dr. Marcelo Oliveira e Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pela concessão da bolsa de mestrado, de abril/2019 a fevereiro/2020.

Ao Ronielson Santos pela amizade e parceria acadêmica.

À Profa. Maria Elina Barbosa dos Santos, diretora escolar, pelo apoio em diversos momentos da minha experiência docente na Regional do Carás (Afuá-Pará)

Aos colegas do GELIM com as valorosas contribuições sobre a Filosofia do Wittgenstein que muito ajudaram na construção do meu texto.

Aos professores participantes por contribuírem para esta pesquisa acadêmica.

Aos amigos dessa experiência ímpar: Élida Peres, Jaqueline Valerio, Joana Chaves, Milton Júnior e Renan Ferreira, cada um contribuiu de forma única e foram importantes nesse caminhar.

Aos meus alunos, com os quais muito aprendi e que, de certa forma, foram impulsionadores para chegar ao Mestrado.

RESUMO

A pesquisa teve como objetivo discutir como os professores aplicam as regras matemáticas para o conceito de fração, baseada principalmente nos conceitos wittgensteinianos, de seguir regras, com foco nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações. De acordo com a Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, seguir regras é uma práxis, o que constitui a regra é o uso coletivo dela, a prática constante. A metodologia teve abordagem qualitativa, a partir da coleta de dados por meio de questionário, bem como amparo em dados bibliográficos. As pesquisas em educação matemática, conforme veremos, apontam que os alunos têm muitas dificuldades em lidar tanto com o conceito de fração como também com as operações envolvendo este conceito, bem como que o seu ensino é voltado ao uso mecanizado de regras. Como a linguagem matemática é regida por regras, é possível de professor é ensiná-las, não por meio de dúvidas, e sim a partir de certezas. (WITTGENSTEIN, 1996). A pesquisa evidenciou que os professores participantes, que ensinam matemática nos anos iniciais, apresentam dúvidas quanto à aplicação de regras matemáticas, tal como as regras envolvendo as operações com frações, bem como erros conceituais que podem corroborar para um ensino com déficits no decorrer da Educação Básica.

Palavras-chave: Filosofia de Wittgenstein. Linguagem Matemática. Ensino de Matemática nos Anos Iniciais. Operações com Frações. Uso de Regras.

ABSTRACT

The research aimed to discuss how teachers apply mathematical rules to the concept of fraction, based principally on wittgensteinian concepts, to follow rules, focusing on operations of addition, subtraction, multiplication and division of fractions. According to Wittgenstein's Philosophy of Language, following rules is a praxis, what constitutes the rule is its collective use, constant practice. The methodology had a qualitative approach, from the data collection through a questionnaire, as well as support in bibliographic data. Research in mathematics education, as we will see, points out that students have many difficulties in dealing with both the concept of fraction as well as with operations involving this concept, as well as that their teaching is geared to the mechanized use of rules. As the mathematical language is governed by rules, it is possible for a teacher to teach them, not through doubts, but through certainties. (WITTGENSTEIN, 1996). The research showed that the participating teachers, who teach mathematics in the early years, have doubts about the application of mathematical rules, such as the rules involving the operations with fractions, as well as conceptual errors that can corroborate for teaching with deficits in the basic education.

Keys-word: Wittgenstein’s Philosophy. Mathematical Language. Teaching mathematics in the early years. Operations with fractions. Use of Rules.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática possui linhas de estudos e pesquisas que visam melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática, seja no ensino básico, seja no ensino superior. Dentre elas, a linguagem matemática direciona os estudos para pesquisar os possíveis problemas na compreensão da linguagem que podem interferir no processo educativo dessa área do saber. De acordo com Danyluk (1998), dentre os vários tipos de linguagem presentes no horizonte da existência humana, encontra-se a linguagem matemática expressa pelo discurso matemático.

Para Silveira (2015), ensinar o aluno a ler nessa linguagem é como ensinar uma língua estrangeira, pois, ele tem dificuldades de interpretar expressões simbólicas, bem como as regras matemáticas que regem ora o texto em linguagem natural, ora em linguagem matemática.

A presente pesquisa baseia-se nas reflexões de Ludwig Wittgenstein, filósofo da linguagem e da matemática, principalmente a partir da obra *Investigações Filosóficas,* na qual o significado da palavra está no uso, na multiplicidade de funções que envolve no discurso, a palavra tem significado a partir dos jogos de linguagem os quais se entrelaçam a partir da forma de vida. Wittgenstein ressalta que o ensino da linguagem não é uma explicação, mas sim um treinamento, uma repetição.

O filósofo preocupou-se em analisar as regras da gramática, pois são elas que determinam o significado das palavras. Por não oferecermos a devida atenção às regras do jogo, pode haver confusões linguísticas. Seguir regras, para o filósofo, seja no uso das palavras, seja na matemática, assemelha-se a seguir uma ordem. O autor afirma que a regra é constituída pelo uso coletivo, pela prática constante dela.

De acordo com Wittgenstein, o professor não pode ensinar por meio da dúvida, e sim a partir de certezas. Quando ensinamos a criança a contar, não podemos querer que, por si só, descubra que, depois de dezenove, vem vinte. Os números são invenções humanas e a técnica de contagem tem que ser ensinada pelo professor. O aluno aprenderá a contar após um certo hábito com a contagem, assim poderá aprender as operações com números, mas para que isso aconteça deve ser iniciado na aprendizagem da gramática que rege os textos matemáticos (SILVEIRA, 2017).

Wittgenstein defende que “a criança aprende, acreditando no adulto” (DC, § 160) e que ela “acredita nos professores e nos livros didáticos” (DC, § 263). Nesse caso, entendemos ser de fundamental importância que o uso de regras no ensino de matemática seja feito com cautela, na acepção que faça sentido ao aluno, seja com a fala do professor, seja na escrita do livro didático. Não ter cautela no uso de algumas expressões pode trazer implicações prejudiciais para a aprendizagem, tais como: No algoritmo da subtração, quando o professor diz que "empresta um"; Na equação polinomial, ao dizer "o número que está multiplicando, passa para o outro lado dividindo"; Na operação de multiplicação com fração, "multiplicamos o numerador com numerador e denominador com denominador".

Para muitos pesquisadores, é imprescindível o ensino de regras para a construção do conceito matemático. De acordo com Silveira (2005, p. 15), "o conceito é uma regra que se fundamenta no jogo de linguagem e se corresponde com seu significado". Para Machado (1990), na aprendizagem de qualquer assunto, seria necessária uma abordagem inicial, limitada ao âmbito da técnica operatória, visto que as regras precisam ser bem conhecidas antes de se poder pensar em agir ou jogar. No caso do processo de produção do conhecimento, na aprendizagem da língua ou da matemática, a técnica alimenta o significado, que alimenta a técnica, e assim por diante.

Assim, Gómez-Granell (1995) enfatiza que, além de se buscar o domínio de uma série de regras e convenções acerca de números de mais de um algarismo, de algoritmos das operações, medidas de diferentes magnitudes, operações com parênteses, simplificação de frações, procura do mínimo comum, bem como a resolução de equações etc., é necessário um conhecimento conceitual para aprender e ensinar.

Os professores que ensinam Matemática precisam explicar os significados dos termos, dos símbolos, as regras, para que façam sentido aos alunos desde os anos iniciais do ensino fundamental, pois é frequente o professor apenas falar e não "ouvir" as inquietações diante do mundo da Matemática. A exemplo disso, Danyluk (1998), em sua obra oriunda das pesquisas feitas no mestrado e doutorado, disserta que a professora nas aulas de matemática não dialogava com os alunos acerca daquilo que estavam fazendo, nem sobre o significado do que estava no quadro-negro, logo não se estabelecia entre a educadora e os discentes o diálogo no qual a inteligibilidade de ambos sobre o significado da matemática pudesse aparecer.

Silveira (2015a) aponta que o ensino de matemática precisa estar com ênfase na linguagem propicia a comunicação entre aluno e professor. Nesse sentido, é preciso que a linguagem do professor esclareça os significados dos símbolos matemáticos, além das regras que governam o texto matemático.

Minha experiência docente na educação básica, nas discussões no grupo de estudos e pesquisas em linguagem matemática (GELIM/IEMCI/UFPA), bem como a vivência no estágio docente na turma de graduação em Licenciatura Integrada da UFPA, minhas inquietações floresceram e culminaram neste estudo acerca das regras no ensino de frações.

Nesta pesquisa de mestrado, delimitada para as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com fração, e percebemos que a produção científica acerca do objeto é bem ampla e discutida na comunidade acadêmica. O uso de regras matemáticas como parte integrante do conhecimento matemático já vem sendo discutido em pesquisas, tais como: LACERDA, 2010; MEIRA, 2012; SILVA, 2011.

No entanto, o que não encontramos com notoriedade são pesquisas voltadas ao uso de regras matemáticas com a temática das operações com fração, pois algumas pesquisas propugnam que o uso de regras nas aulas de matemática propicia um ensino que não contribui de forma propositiva no processo educativo da matemática. Vejamos a seguir algumas destas pesquisas que discutem as operações com fração:

Gois (2015) investigou acerca da compreensão do significado de frações equivalentes e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações (parte-todo), tendo como sujeitos da pesquisa alunos de três turmas de 7º ano de uma escola paulistana pertencente à rede privada. A proposta foi motivada por uma constatação da enorme dificuldade de aprendizagem e compreensão dos números racionais apresentada por alunos de diversas séries do ensino fundamental. A autora destaca que a aprendizagem dos números racionais é de fundamental importância para o desenvolvimento do conteúdo curricular da matemática no referido nível de ensino.

Dessa maneira, para Gois, a dificuldade de aprendizagem tem argumentos em Brolezzi (1996), quando afirma que o ensino elementar de matemática não consegue construir na mente dos alunos um conceito de número racional que permita sua utilização mais tarde. As operações com racionais quando muito mecanizadas em torno de algumas *regrinhas básicas*, pode, muitas vezes, ser confundidas umas com as outras. Além disso, ressalta o ensino baseado em *regras* como um “tratamento intensivo", que não procura proporcionar a assimilação do conceito dos números racionais, fazendo com que os alunos atribuam significado a esse conhecimento.

A pesquisa teve como fundamentação as ideias didáticas e atividades de Baldin e Malagutti (2006), os quais primam pela filosofia do currículo de matemática em Singapura. De acordo com Baldin (2013), esta filosofia apresenta como principais características os seguintes aspectos: Utiliza a abordagem de aprendizagem: concreto, pictórico e abstrato; Encoraja o processo de pensamento ativo, comunicação de ideias matemáticas e resolução de problemas; Desenvolve fundamentos que os alunos necessitarão para a matemática mais avançada; Enfatiza a matemática mental e a abordagem por modelo pictórico.

Após a aplicação das atividades com os sujeitos da pesquisa, a autora conclui que a utilização do estojo de fração e as representações pictóricas facilitaram a compreensão do significado parte-todo das frações e das operações básicas, permitindo que os alunos atribuíssem significado a esses conceitos. Assim, destaca que:

> O trabalho através de situações de aprendizagem e da utilização de recursos para ajudar na abstração dos conceitos criou os "espaços de pensamentos" que supomos. Apesar de não ser um trabalho fácil, por demandar um bom tempo em sua preparação e aplicação, acreditamos que conseguimos contribuir de alguma forma na aprendizagem desses alunos (GOIS, 2015, p. 84).

Jesus (2013), em sua pesquisa, apresenta uma proposta de ensino de frações pautada na experimentação do aluno, a qual seja significativa e coerente com a etapa do desenvolvimento cognitivo dos alunos do 6º ano do ensino fundamental. Para evitar que *regras* e *fórmulas* sejam decoradas sem a devida compreensão, são feitas atividades em que o aluno participa diretamente do processo de construção das técnicas operacionais envolvidas na equivalência e nas operações de adição e subtração de frações. Visto que essas construções só seriam possíveis diante de uma base bem consolidada, ocorrem, também, atividades de identificação de frações. A pesquisa destaca ainda que aulas conduzidas desta maneira podem auxiliar na efetiva aprendizagem de frações.

A pesquisa fundamenta-se no material de Gimenez e Bairral (2005), que discute acerca de frações no currículo do ensino fundamental por meio de conceituação, jogos e atividades lúdicas. A partir desta referência, surgiu o desejo de desenvolver o trabalho no âmbito das frações, a fim de propor ao professor uma sequência de aulas diferenciadas dos livros didáticos. Jesus (2013) destaca que o conteúdo de Frações é amplamente discutido por muitos pesquisadores matemáticos, dos quais comunga com "as ideias de Lopes (2008), defensor de um ensino de frações sem a prescrição de *regras* e *macetes* para realizar operações".

Na finalização da pesquisa, a autora ressalta que o conteúdo é de difícil assimilação, assim propôs atividades que visassem diminuir a distância entre o concreto e a abstração, proporcionando momentos de construção e observação, que seriam fundamentais para a compreensão do conteúdo. Assim, trabalhou com os alunos a identificação de frações e as operações por meio de representação circular e retangular, o que pode despertar para uma aprendizagem significativa e que reduza os déficits de aprendizagem, já que fração é um conteúdo que possui um processo de construção tão substancioso.

Já no estudo de Costa (2014), o autor abordou a dificuldade de os alunos aprenderem matemática, sobretudo, as operações com frações. Destaca que essas dificuldades estão relacionadas à falta de conhecimento básico da matemática - números e operações - assim os alunos não têm noção do campo numérico em que trabalham, tampouco das operações. A pesquisa foi realiza numa escola estadual amapaense, onde houve aplicação de uma atividade na qual foi possível confirmar a hipótese levantada, referente às dificuldades na aprendizagem, juntos aos alunos do ensino médio. O objeto de pesquisa foram as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. O autor direcionou seu trabalho final aos professores do 6º ano do ensino fundamental visando usá-lo como guia didático, além da possibilidade de revisão no ensino médio.

O autor concluiu que a maioria dos professores, quando trabalham frações, dedicam-se a ensinar procedimentos mecânicos, oriundos, sobremaneira, de sua aprendizagem quando estudante. Ademais, destaca que, frente às transformações tecnológicas tão presentes na sociedade atual, o professor hoje deve acompanhá-las para que sua aula seja dinâmica, mais atrativa, haja vista o uso mecânico de procedimentos já não terem o mesmo efeito. Os alunos não aprendem como antigamente, dificilmente se concentram em uma coisa só, e quando um procedimento envolve vários passos, Costa é enfático: nem adianta, não aprendem!

Costa (2014) ressalta que os livros didáticos utilizados nas escolas ainda precisam de pequenos ajustes, embora já mostrem muitos avanços. Não é mais aceitável executar certos passos sem saber o porquê. Acerca disso, relata que os livros didáticos no ensino fundamental dedicam pouco capítulos ao ensino de frações.

Muito devido à limitada constância das frações no contexto sociocultural do aluno em relação a outra forma de número fracionário: as representações decimais.

Por sua vez, a pesquisa de Moriel Júnior (2014) teve como objetivo caracterizar o conhecimento especializado para ensinar divisão de frações mobilizado por professores e licenciandos em matemática em um contexto de formação. Os sujeitos da pesquisa foram dois licenciandos em matemática e dois professores de matemática, selecionados dentre cinquenta e quatro participantes de uma oficina sobre divisão de frações oferecida quatro vezes entre 2013 e 2014. O modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MSTK) foi utilizado como ferramenta metodológica para exploração analítica dos conhecimentos mobilizados pelos sujeitos durante as oficinas, bem como nas entrevistas realizadas para explorar os indícios de conhecimento.

O MSTK é um modelo teórico sobre o conhecimento profissional específico de professores de matemática. Alicerçado de acordo com Schoenfeld (2010), o conhecimento do indivíduo é a informação que ele tem disponível para usar para resolver problemas, alcançar metas ou realizar qualquer tarefa. Podemos notar que, conforme esta definição, o conhecimento não precisa ser necessariamente correto. O modelo teórico possui dois domínios: o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico.

O autor, por meio do encaminhamento metodológico, identificou um panorama de conhecimentos especializados para ensinar divisão, mostrando inclusive quando, como e com qual finalidade eles foram mobilizados. As relações identificadas entre eles representam um avanço no sentido de uma visão integradora deste conjunto, pois foi possível discutir ou relatar propostas de ensino, tais como: abordagem com problemas elementares, problemas exclusivamente aritméticos, problemas geométricos, problemas aritméticos e geométricos, problemas contextualizados, com recursos didáticos.

De acordo com a análise destas pesquisas que foram selecionadas no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, podemos perceber que nenhuma delas discute problemas de linguagem no ensino de frações. Diante do exposto, a pesquisa de mestrado aqui proposta compreende a investigação da seguinte **questão problema**: *Como os professores dos anos iniciais dão sentido às regras no ensino de frações?* Os sujeitos selecionados foram dois professores regentes da rede pública da cidade de Belém, todos com formação em Pedagogia. O **objetivo geral** da pesquisa visou: *Discutir como os professores aplicam as regras matemáticas para o conceito de fração*; os **objetivos específicos** direcionaram-se a: *Avaliar o conhecimento matemático dos professores sobre o uso de regras nas operações com frações; Mostrar como os conceitos wittgensteinianos podem favorecer (ou contribuir) no ensino de matemática.*

Para tanto, a pesquisa está organizada em quatro capítulos. O capítulo I é o marco referencial da pesquisa, momento que aborda a Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, explicando alguns conceitos importantes, tais como jogos de linguagem, semelhanças de família, gesto ostensivo, *ver-como*, seguir regras. O capítulo II mostra o objeto de pesquisa, o que diz o documento curricular que norteia o ensino fundamental e apresenta como a regra vem constituindo-se ao longo da história até a nossa aritmética usual no âmbito dos números racionais. O capítulo III traz o percurso metodológico, apresentando o delineamento da pesquisa, o lócus e os sujeitos envolvidos na coleta de dados. Por fim, temos o capítulo IV, que constitui a análise do material empírico de acordo com o referencial escolhido.

CAPÍTULO I: MARCO REFERENCIAL DA PESQUISA

Neste capítulo, teceremos considerações acerca da Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, com base na obra *Investigações Filosóficas,* explicitando os conceitos de jogos de linguagem, semelhanças de família, *ver-como*, gesto ostensivo e seguir regras. A escolha por Wittgenstein como base filosófica para nortear esta pesquisa se deu porque o filósofo ressalta que o ensino da linguagem ocorre por meio dos jogos de linguagem, os quais seguem regras, assim como a linguagem matemática. Logo, os conceitos wittgensteinianos mostram caminhos propositivos para o processo educativo da matemática.

1.1 Filosofia da Linguagem de Wittgenstein

Em 1889, nascia em Viena, Ludwig Josef Johann Wittgenstein, filósofo da linguagem e da matemática, autor de obras importantes como *Tractatus Logico-Philosophicus* (TLP); *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (OFM); *Da Certeza* (DC) e *Investigações Filosóficas* (IF)[1]. É considerado como um dos principais filósofos do século XX, pois foi responsável pela virada linguística da filosofia e permitiu que a linguagem tivesse papel importante nas discussões filosóficas. De acordo com Meira (2012), a linguagem passa a ter, então, uma função diferente, não mais de mero instrumento a serviço do homem. Ela passa a ser verdadeira condição de possibilidade para que o sujeito compreenda os objetos do pensamento, já que só tem acesso a eles pela linguagem.

Os comentadores de sua obra a dividem em duas fases de pensamento (HINTIKKA; HINTIKKA, 1994). A primeira fase quando escreve o *Tractatus Logico-Philosophicus*, em que adotou uma concepção referencial da linguagem a qual tinha como função descrever, nomear objetos, e na qual o significado da palavra é o próprio objeto de referência, isto é, há uma relação biunívoca entre o nome e o objeto. A concepção adotada pelo filósofo é pautada pela forma lógica, ou seja, uma proposição tem sentido caso o nome que representa o objeto, na realidade, descrevesse-o tal como ele é.

---

[1] O filósofo escreve por aforismos – assim indicados por § - de acordo com ele, são pensamentos, sedimento de investigações filosóficas. Redigiu todos esses pensamentos como anotações, em breves parágrafos, às vezes, como longos encadeamentos sobre o mesmo objeto; às vezes, saltando em rápida alternância de um domínio para outro. (WITTGENSTEIN, 1996)

De acordo com Glock (1996), nesta fase, o significado de uma proposição "p" não é seu valor de verdade, mas o fato que a ele corresponde na realidade – o fato de que "p", se a proposição é verdadeira, e o fato de que "~p", se a proposição é falsa. As proposições se distinguem dos nomes, são bipolares, podem ser verdadeiras ou falsas – o que equivale justamente a dizer que possuem um sentido. Em suma, o sentido de uma proposição elementar é determinado pelos significados de seus "constituintes" simples: os nomes, ou seja, o significado de um nome é o objeto que ele "representa".

Wittgenstein anuncia esta concepção no início do livro *Investigações Filosóficas,* fazendo referências ao pensamento de Santo Agostinho:

> Se os adultos nomeassem algum objeto e, ao fazê-lo, se voltassem para ele, eu percebia isto e compreendia que o objeto fora designado pelos sons que eles pronunciavam, pois eles queriam indicá-lo. Mas deduzi isto dos seus gestos, a linguagem natural de todos os povos, e da linguagem que, por meio da mímica e dos jogos com os olhos, por meio dos movimentos dos membros e do som da voz, indica as sensações da alma, quando esta deseja algo, ou se detém, ou recusa ou foge. Assim, aprendi pouco a pouco a compreender quais coisas eram designadas pelas palavras que eu ouvia pronunciar repetidamente nos mesmos lugares determinados em frases diferentes. E quando habituaria minha boca a esses signos, dava expressão aos meus desejos (WITTGENSTEIN, IF, § 1).

A criança ouvinte aprende as primeiras palavras cujos significados, *a priori*, são dados apenas por um aspecto. A palavra manga significa fruta e uma parte da vestimenta do sujeito. Gato para essa criança é um animal de estimação, mas pode significar uma ligação clandestina de energia elétrica.

Uma criança surda, ao reconhecer os primeiros sinais em LIBRAS (Língua Brasileira de Sinais), por exemplo, estende o braço esquerdo e com a mão direita (sentido perpendicular) desliza sobre o braço, num primeiro momento o significado é branca (cor), e o sinal relativo acostumar (verbo). Ao abrir e fechar a mão em frente à boca, o sinal também tem dois significados, ora a fruta laranja, ora sábado.

Nesse sentido, Hebeche afirma que:

> […] tais formas primitivas da linguagem emprega a criança, quando aprende a falar. O ensino da linguagem não é aqui uma explicação, mas um treinamento. Com isso, Wittgenstein está afastando a noção de que se possa explicar o significado das palavras, pois antes de explicar está o agir, o funcionamento das palavras na linguagem não depende de explicações, como se pudesse aprender o significado de nadar ou pescar apenas lendo manuais de instrução (HEBECHE, 2016, p. 31).

Nessa perspectiva, o filósofo, já em sua segunda fase, com a obra *Investigações Filosóficas*, não considera suas reflexões de outrora como erradas, porém enfatiza que não são suficientes para explicar os problemas da linguagem. Nesta fase, o significado da palavra está no uso, na multiplicidade de funções que a palavra pode carregar na linguagem. Glock (1996, p.360) ressalta que Wittgenstein nos dá um conselho metodológico: “Não pergunte pelo significado, pergunte pelo uso!” Para ilustrar, temos o exemplo das alavancas de uma locomotiva, elas têm aparências semelhantes, porém funções diferentes (uma pode abrir a bomba, a outra pode frear, uma terceira pode regular a abertura de uma válvula etc.), o que vai determinar sua função é o movimento que o maquinista realizará.

A significação de uma palavra acontece no uso na linguagem (IF, § 43). O sentido se dá no contexto de aplicação, ou seja, do jogo de linguagem em que está inserida, como no exemplo: para o conceito de fração, tem-se o significado de quociente (uma maçã para dividir entre duas crianças) e significado de multiplicador (1000mL de açaí e João consumiu $\frac{1}{4}$), usos diferentes, significados diferentes, porém têm o mesmo sentido: escrever a situação em números fracionários.

De acordo com Luna (2009), nas *Investigações Filosóficas,* as definições de sentido e significados possuem uma certa distinção, o autor explica que o significado de um termo ou de uma frase é o seu uso, o seu emprego, a sua aplicação como habitualmente ou costumeiramente fazem aqueles que constituem o grupo social praticante daquele termo, ou daquela frase ou daquele jogo de linguagem. Já o sentido refere-se ao que uma palavra, uma frase ou um jogo de linguagem querem comunicar, o que querem dizer, isto é, que finalidade querem alcançar. Em linhas gerais, o sentido é mais fluído, mutável, dinâmico, variado etc., e o significado é mais estático, regular, propenso a uma constância maior.

Para Wittgenstein, “todo signo sozinho parece morto. O que lhe dá vida? No uso, ele vive” (IF, § 342). Os sentidos atribuídos a uma expressão linguística ou palavra, bem como com sua lógica de funcionamento ou técnicas de uso dependem do contexto no qual estão envolvidos, isto é, dos hábitos e costumes que temos ou empregamos, não em relação figurativa em meios às proposições e fatos (SILVEIRA; MEIRA; SILVA, 2014). O filósofo ressalta ainda que o ensino da linguagem não é uma explicação, mas sim um treinamento, uma repetição.

Desse modo, Wittgenstein diz que, ao explicar o significado de algumas palavras para alguém falante da língua francesa, é mais fácil explicá-las pelos correspondentes em francês, assim, “para quem, entretanto, ainda não possui esses *conceitos*, ensinarei a usar as palavras por *exemplos* e *exercícios*. – E, nesse caso, compartilho com ele não menos do que eu mesmo sei" (IF, § 208). Gonçalves (2013) relata que, para Wittgenstein, na aquisição de uma língua, não há outra maneira de aprendê-la senão sendo justamente adestrado ou treinado, sem questionamentos e sem pedir justificativas, a observar e a seguir determinadas regras.

Ele esclarece esse ponto quando diz que

> Uma parte importante desse treinamento consistirá no fato de que quem ensina mostra os objetos, chama atenção para eles, pronunciando então uma palavra, por exemplo, a palavra "lajota", exibindo essa forma. Não quero chamar isto de "elucidação ostensiva" ou "definição ostensiva", pois na verdade a criança ainda não pode perguntar sobre a denominação. Quero chamar de "ensino ostensivo das palavras" (IF, § 6).

Para Oliveira e Silveira (2017, p. 99), "o gesto de apontar para um objeto enquanto se pronuncia uma palavra (ostensão), nesta concepção, é o recurso pelo qual se processa o aprendizado da linguagem". O gesto ostensivo é imbricado por dois conceitos importantes, ensino ostensivo e definição ostensiva.

Wittgenstein ressalta que, a *priori*, a definição ostensiva encontra-se fora do jogo primitivo, a criança não pergunta pelo significado das palavras, o qual será introduzido posteriormente, pois a palavra é ensinada sempre fazendo uma correspondência entre o nome e o objeto, e, normalmente, o adulto (ou professor) utiliza-se do gesto ostensivo para chamar atenção da criança enquanto fala a palavra "lajota", por exemplo. Logo, o ensino ostensivo da linguagem é um treinamento, uma repetição.

Wittgenstein nos dá um exemplo pertinente a respeito da importância do treino, com o qual uma pessoa recebe gêneros literários e lê sílaba por sílaba, palavra por palavra, frase por frase e, a partir de então, começa a ler livros, cartas, jornais e consequentemente aprende a ler em sua língua materna. Considerado, assim, como uma máquina de leitura, lendo em voz alta e corretamente, às vezes, sem prestar atenção no que lê. Aqui não prestar atenção é no sentido de que a compreensão da leitura não é um processo mecânico.

Assim, as pessoas tornam-se como máquinas de leitura, são treinados para essa finalidade. O treinador diz que alguns já podem ler, e que outros ainda não. Tomemos o caso de um aluno que não passado pelo treinamento: se lhe mostramos uma palavra escrita, ele poderá às vezes proferir sons quaisquer, e aqui e ali acontecerá então, "por acaso", de serem mais ou menos os certos. Mas no caso da máquina viva de leitura, “ler” significa reagir de tal ou tal modo a signos escritos (IF, § 157).

Por outro lado, “a definição ostensiva concerne à elucidação do uso – a significação – da palavra, quando já é claro qual papel a palavra deve desempenhar na linguagem” (IF, § 30). A criança pode ser capaz de perguntar pelo significado, por exemplo, o porquê de chamarmos a cadeira de cadeira. Outro exemplo pertinente acerca da definição é:

> Quando o professor aponta para o símbolo do ângulo reto no interior de um triângulo retângulo desenhado no quadro e diz: “isto é um ângulo reto”, é preciso que o aluno conheça a condição lógica da entidade definida para saber identificar o aspecto apontado pelo professor no desenho, já que o símbolo apontado apenas explica o que é o ângulo reto, não é um objeto que é o significado de ângulo reto (OLIVEIRA e SILVEIRA, 2017, p. 101).

A exemplo disso, podemos citar a expressão linguística usual do paraense quando uma pessoa não quer sair sem guarda-chuva ou outro protetor para não se molhar enquanto chuvisca: Tu não és nem tapioca! Em nosso jogo de linguagem, a pessoa pode se molhar com a água da chuva, no entanto, não se dissolverá, assim como acontece com a tapioca, em contato com água. Tapioca é o amido da mandioca e pode ser consumido igual a uma panqueca. Isto foi explicado para uma colega haitiana da minha turma de mestrado. Ela passou a compreender o uso na medida que usávamos com certa frequência, uma vez que não fazia parte do jogo de linguagem em qual estava inserida outrora.

Wittgenstein apresenta a ideia dos jogos de linguagem. É na prática que a criança aprende a usar as palavras e expressões da sua língua materna, é a partir desses jogos que a criança aprende o primeiro significado das palavras, ou seja, a linguagem primitiva estabelecida entre a criança e um adulto também é considerada jogos de linguagem, pois ela está inserida em um determinado contexto.

Para esse uso da linguagem, Wittgenstein (1996, p. 166) afirma que “não se exige isso de um aluno: conceber a palavra, fora de um contexto, desse ou daquele modo, ou relatar de que maneira a concebeu”, ou seja, na linguagem primitiva, não é necessário justificar seu ensino à criança, pois se consegue estabelecer uma comunicação.

Wittgenstein sugere que pensemos “nos vários usos de palavras que se faz nas brincadeiras de roda, chamarei a totalidade: da linguagem e das atividades com ela entrelaçadas, de 'jogo de linguagem'" (IF, § 7). Assim, ele exemplifica essa linguagem primitiva num jogo de linguagem entre o construtor A e um ajudante B:

> A executa a construção de um edifício com pedras apropriadas; estão à mão cubos, colunas, lajotas e vigas. B passa-lhe as pedras, e na sequência em que A precisa delas. Para esta finalidade, servem-se de uma linguagem constituída das palavras "cubos", "colunas", "lajotas", "vigas". A grita essas palavras; B traz as pedras que aprendeu a trazer ao ouvir esse chamado (IF, § 2).

Assim, para Wittgenstein, a palavra tem significado através de jogos de linguagem nos quais ela esteja sendo usada, denominados por ele como o conjunto da linguagem e das atividades com as quais estão interligados e se entrelaçam a partir da forma de vida. A seguir temos alguns exemplos de tais jogos:

> Comandar, e agir segundo comandos;
> Descrever um objeto conforme a aparência ou conforme medidas;
> Produzir um objeto segundo uma descrição (desenho);
> Relatar um acontecimento;
> Conjecturar sobre o acontecimento;
> Expor uma hipótese e prová-la;
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas;
> Inventar uma história, ler;
> Representar teatro;
> Cantar uma cantiga de roda;
> Resolver enigmas;
> Fazer uma anedota, contar;
> Resolver um exemplo de cálculo aplicado;
> Traduzir de uma língua para outra;
> Pedir, agradecer, maldizer, saudar, orar (IF,§23).

Glock (1998) esclarece que Wittgenstein fazia uso do termo *forma de vida* para o entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem, assim como salientava que o termo se refere a uma formação cultural ou social, à totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem, isto é: as palavras e/ou expressões precisam fazer sentido para todos os sujeitos envolvidos nos jogos de linguagem.

Costa (2005) exemplifica a *forma de vida* utilizando o excerto do Blue Book escrito por Wittgenstein, a qual dentro dos jogos de linguagem tem como função importante dar significado às palavras e expressões.

> Se uma palavra da língua de nossa tribo é corretamente traduzida em uma palavra da língua portuguesa, iss9o depende do papel que a palavra desempenha na totalidade da vida da tribo, das ocasiões nas quais usada, as expressões de emoção que geralmente a acompanham, a ideia que ela costuma despertar ou que incita o dizer, etc., etc. (WITTGENSTEIN, 1975, p. 55).

Wittgenstein ressalta que a palavra ganha significado no jogo de linguagem ao qual esteja entrelaçada, ou seja, é a partir do seu uso nos diferentes contextos de aplicação, nas diversas formas de vida. No exemplo abaixo, podemos observar alguns significados da palavra *luz* em jogos de linguagem distintos.

i) Maria deu à *luz*;

ii) A *luz* do poste está acesa;

iii) O professor deu uma *luz* para resolver o cálculo matemático.

Notamos aí que a palavra *luz* foi usada de forma diferente, em contextos de aplicação distintos. Logo, podemos observar que não há um único significado da palavra que possibilite colocá-la em todo e qualquer jogo de linguagem, mas, sim, é importante observar que vemos a palavra de ângulos diferentes, ora significa vida, ora objeto que ilumina, ora ajuda, auxílio. A palavra não muda de conceito a cada novo contexto de aplicação, ela é vista de aspectos diferentes, pois não há um conceito único que a classifique, não há uma essência, pois pode haver outros novos usos para a palavra *luz*, o que Wittgenstein denomina como *semelhanças de família*. O conceito elucida que não há uma definição precisa entre os usos da mesma palavra, ora as semelhanças aparecem, ora desaparecem.

Wittgenstein exemplifica *semelhanças de família* com o termo “jogos”:

> Considere, por exemplo, os processos que chamamos de “jogos”. Quero dizer, jogos de tabuleiro, de carta, com bola, de combate, e assim por diante. O que todos eles têm em comum? – Não diga: “Tem que haver para eles algo em comum, senão eles não se chamariam ‘jogos’” – mas veja se todas as coisas são comuns para eles. – Pois se você os examina, não vai ver, na realidade, algo que todos têm em comum, mas semelhanças, parentescos, e, na realidade toda uma série dessas coisas. [...] Passe agora para os jogos de carta: aqui você encontra muitas correspondências com aquela primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem e outros surgem (IF, § 66).

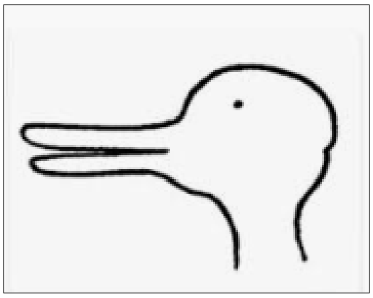
Dessa maneira, Silva (2011) expõe que Wittgenstein usa a expressão *semelhanças de família* para designar a semelhança entre os usos de palavras ou conceitos, não por sua posse comum de um conjunto de característica essenciais ou definidoras, mas por uma relação geral de similaridade entre os diferentes usos. O filósofo conclui:

> eu não poderia caracterizar melhor essas semelhanças do que pela expressão semelhanças de família, pois assim se sobrepõem e se cruzam as distintas semelhanças que têm lugar entre os membros de uma família: altura, traços faciais, cor dos olhos, andar, temperamento etc. (IF, § 67).

Dentre os conceitos de *jogos de linguagem, formas de vida, semelhanças de família* já apresentados da segunda fase da filosofia da linguagem de Wittgenstein, veremos outros conceitos abordados pelo filósofo tais como *ver-como* e *cegueira para o aspecto* que, também, são de suma importância para esta pesquisa.

Wittgenstein apresenta como aporte inicial para trabalhar o conceito de *ver-como* usando o exemplo da figura de Joseph Jastrow, o famoso pato-lebre. Observando, minuciosamente, é possível ver ora um pato, ora uma lebre, porém a figura é a mesma.

Figura 1 – Pato-Lebre de Jastrow



Fonte: Wittgenstein (1996)

O filósofo ressalta que o sujeito poderá dizer, observando a figura, que vê ora um pato, ora uma lebre, se ele já tiver compreendido os conceitos de pato e de lebre, se ele tiver a vivência da significação desses conceitos, ou seja, se ele domina uma técnica. Para o filósofo, dominar uma técnica é uma habilidade. Assim, o aprendiz deve ser treinado para identificar, por exemplo, quando uma palavra ora tem função de verbo, ora função de substantivo numa oração: João *mente* para sua mãe; A *mente* humana é surpreendente.

A esse respeito, Gottschalk explica que:

> Ver imediatamente na figura um coelho implica em já dominarmos uma série de técnicas de apresentação do simples. Já nos apresentaram coelhos, sabemos que se trata de um animal, que come cenouras, tem orelhas grandes, comparamos vários coelhos, entre si etc. São esses diversos empregos da palavra “coelho” que nos permitem atribuir significado aos traços empíricos diante de nossos olhos e atribuir significado à figura. *Ver* a mesma figura *como* pato, também pressupõe que se tenha de antemão o conceito de pato, e que se possa lançar mão de determinadas técnicas de comparação, para que se atribua aos mesmos traços empíricos o significado de pato (GOTTSCHALK, 2006, p. 75-76).

Coadunando com a fala da autora, Wittgenstein (IF, parte II, IX) salienta que “observar não produz o observado (esta é uma constatação conceitual)”. Quando o sujeito não consegue visualizar que a figura ora é pato, ora é coelho, o filósofo discute acerca da expressão revelação do aspecto, “observo um rosto e noto de repente sua semelhança com um outro. Eu vejo que não mudou; e, no entanto, o vejo diferente. Chamo esta experiência de “notar um aspecto”” (IF, parte II, XI).

Ou seja, se este não conseguiu identificar determinadas características da figura, logo não conseguiu revelar o aspecto concernente à figura, o que corrobora para uma dificuldade de compreender o objeto como um todo. Como bem ressalta Hebeche (2002), a cegueira para o aspecto faria com que se visse a figura pato-lebre, por exemplo, sempre de modo unilateral e, então, poderia dizer *agora vejo a lebre* ou *agora vejo o pato*.

Isso pode ocorrer quando o sujeito não tem a vivência da significação, por exemplo, este é convidado a apreciar uma exposição de arte, e não consegue perceber as características, os traçados da escola barroca, renascentista, contemporânea etc. No entanto, o artista/especialista poderá dizer que um determinado traçado pertence à determinada escola ou a outra, pois ele domina a técnica, tem a vivência na área correlata.

Em linhas gerais, Wittgenstein (IF, parte II, XI) ressalta que “a cegueira para o aspecto será aparentada com a ausência do “ouvido musical””. Hebeche (2002, p. 109) sintetiza a fala do filósofo, “o cego não é aquele que nada vê, mas aquele que deixa escapar o modo “imponderável” de certos âmbitos da linguagem, isto é, passar em branco aquilo que parece escapar às regras.” Logo, o sujeito não tem o domínio de *ouvir-como*, de identificar pelas notas musicais um clássico de Beethoven, Mozart, por exemplo.

1.2 Seguir Regras em Wittgenstein

As regras estão na nossa vida cotidiana: regras de trânsito, regras de comportamento, regras de um jogo de tabuleiro etc. As ações do sujeito devem estar conforme as regras estabelecidas pela sociedade e não podem ser negligenciadas. Por exemplo: caso infrinja uma regra de trânsito, poderá ser multado; ao desobedecer a uma regra de etiqueta, o sujeito será visto como mal-educado, indelicado; se não seguir a regra do jogo, não se está a jogar. As regras são padrões de correção para que o sujeito em sociedade saiba o que é correto ou não em uma determinada situação, porém as regras podem ser refutáveis, questionáveis, até anuláveis, todavia, em sociedade, nunca podem ser suprimíveis.

Nas *Investigações Filosóficas*, obra fundamental para esta pesquisa, Wittgenstein debruçou-se a estudar sobre “regras”. “A linguagem é uma atividade guiada por regras e o caráter apriorístico da lógica, da matemática e da filosofia provém dessas regras” (GLOCK, 1998, p. 312).

Wittgenstein preocupou-se em analisar as regras da gramática, pois são elas que determinam o significado das palavras. Quando não se dá o devido cuidado ao jogo de linguagem no qual estão inseridas as regras gramaticais desse jogo, pode haver confusões linguísticas. Ele diz que não “deve-se cortar o galho no qual está sentado” (IF, § 55), isso equivale a rejeitar as regras gramaticais. Assim, o filósofo afirma:

> Nossa consideração é, por isso, gramatical. E esta consideração traz luz para o nosso problema, afastando os mal-entendidos. Mal-entendidos que concernem ao uso das palavras; provocados, entre outras coisas, por certas analogias entre as formas de expressão em diferentes domínios da nossa linguagem. Muitos deles são afastados ao se substituir uma forma de expressão por outra; isto pode chamar de “análise” de nossas formas de expressão, pois esse processo assemelha-se muitas vezes a uma decomposição (WITTGENSTEIN, IF, § 90).

Ainda nesse sentido, Wittgenstein (IF, § 5) defende que “dissipa-se a névoa quando estudamos os fenômenos da linguagem em espécies primitivas do seu emprego, nos quais podem-se abranger claramente a finalidade e o funcionamento das palavras”.

Retomemos a fala de Wittgenstein quando diz que todo signo sozinho parece morto. O que lhe dá vida? No uso, ele vive. A gramática da palavra xadrez, por exemplo, implicitamente possui regras para se jogar com as peças constituintes do jogo. A peça “cavalo” no jogo é a única que pode “saltar” sobre as demais peças, andar duas casas consecutivas e depois mais uma casa (no sentido perpendicular), assim tendo um movimento semelhante à letra L. Porém, se pegarmos a mesma peça e levarmos para um outro jogo de tabuleiro, ela não terá as mesmas regras de outrora. Ou seja, o filósofo quer dizer que a peça do xadrez não carrega consigo suas possíveis aplicações, o seu significado é dado a partir do contexto de aplicação, o qual esteja inserido.

O *seguir regras* para Wittgenstein, seja no uso das palavras, seja na Matemática, assemelha-se a seguir uma ordem. “O ato de fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez são hábitos, costumes, instituições”. (IF, § 199). Sendo uma instituição, não é concebível que somente uma única pessoa tenha seguido a regra, haja vista a regra ser constituída pelo uso coletivo, pela prática constante dela.

Nas *Investigações Filosóficas*, seguir uma regra é uma práxis. Acreditar seguir a regra não é seguir a regra. E daí não podemos seguir a regra “privadamente”, porque, senão, acreditar seguir a regra seria o mesmo que seguir a regra (IF, § 202). A regra precisa ser compreendida, e compreensão - na acepção do filósofo - é dominar uma técnica, é uma habilidade, é na prática que ela se constitui. Quando o sujeito segue a regra privadamente, não há uma prática, pois o que determina se a aplicação da regra está correta ou incorreta são os critérios, há critérios públicos para correção, sendo o costume (prática, hábito) o pano de fundo de seguir a regra; caso seja removido, a regra não existirá.

Krippke (*apud* Silva, 2010), na tentativa de refutar ceticamente o que seria “seguir uma regra”, afirma que, se retirássemos das regras todo o seu poder compulsivo, haveria entre a regra e sua aplicação um fosso verdadeiramente intransponível e, na tentativa de fechá-lo, seria necessária a interpretação da regra, a qual daria suporte a outra interpretação e assim sucessivamente.

Wittgenstein esclarece que “cada interpretação, juntamente com o interpretado, paira no ar; ela não pode servir de apoio a este” (IF, § 19). Dessa maneira, o abismo ou fosso entre uma regra e sua aplicação é transporto por nossas práticas, na medida em que a atividade de seguir uma regra é essencialmente uma prática (GLOCK, 1998).

Acerca disso, o filósofo explica que:

> É comunicada àquele que aprende e sua aplicação é exercitada. […] Aprende-se o jogo observando como os outros jogam. Mas dizem que se joga segundo esta ou aquela regra, porque um observador pode ler essas regras nas práxis do jogo, como uma lei natural que as jogadas seguem. Mas como o observador distingue, nesse caso, entre um erro de quem joga e uma jogada certa? Há para isso indícios no comportamento dos jogadores. Pense no comportamento característico daquele que comete um lapso. Seria possível reconhecer que alguém faça isso, mesmo que não compreenda sua linguagem (WITTGENSTEIN, IF, § 54).

Em um transporte público no Brasil, como o ônibus, é preciso “puxar” a corda para sinalizar o significado de queremos descer na próxima parada, assim como em outros países basta apertar um botão e, em outros, o motorista para em todas as paradas automaticamente. Neste caso, para a correta aplicação da regra, seria necessária uma interpretação?! Não! É importante ressaltar que o ato de “puxar” a corda não é uma regra privada, a qual somente uma pessoa o faz. Esta regra é pública e comumente praticada por muitas pessoas nas grandes cidades.

A este caso de regra, o indivíduo pode dizer: “fui treinado para reagir de uma determinada maneira a este signo e agora reajo assim” (IF, § 198). O indivíduo foi ensinado por alguém e/ou observou a ação de outros passageiros na medida que houve um costume, um hábito da regra. Em outras palavras, dentro dos jogos de linguagem primários, o sujeito seguiu a regra cegamente.

Recorremos ao exemplo dado por Dall’Agnol (2003) para ainda falarmos sobre a interpretação dada à regra:

Um professor escreveu na lousa a série numérica: 1, 4, 9, 16 e pediu a dois alunos que indicassem o próximo número da série. O aluno 1 interpretou a regra a partir do conhecimento de potenciação:

$$1 = 1^2$$

$$4 = 2^2$$

$$9 = 3^2$$

$$16 = 4^2$$

$$25 = 5^2$$

Logo, a sequência seria 1, 4, 9, 16, 25.

O aluno 2 deu outra explicação a partir dos números primos (3, 5, 7, 11), onde soma-se o número primo com o valor anterior da sequência:

$$1$$

$$4 = 1 + \mathbf{3}$$

$$9 = 4 + \mathbf{5}$$

$$16 = 9 + \mathbf{7}$$

$$27 = 16 + \mathbf{11}$$

Neste exemplo, vimos que, dada a regra pelo professor para que ambos os estudantes completassem o próximo número da série, houve a necessidade de uma interpretação. Porém, a interpretação não foi suficiente para a correta aplicação da regra, uma vez que ambos tiveram respostas distintas. Para Wittgenstein (IF, § 198), “as interpretações não determinam sozinhas a significação” e a interpretação “se manifesta, em cada caso de seu emprego, naquilo que chamamos de seguir regra” (IF, § 201).

Destes trechos, entendemos que, para a compreensão concernente à regra dada pelo professor, era imprescindível informar em qual elemento do contexto matemático o problema estava inserido. Uma vez indicado o elemento importante do contexto, por exemplo, de que a aula se deu a partir do conceito de potenciação, logo, saberíamos identificar qual aluno seguiu corretamente a regra.

A partir dos exemplos expostos, retornamos para dar uma solução ao problema que Krippke levantou na necessidade de uma interpretação para justificar cada passo da regra. Por meio do exemplo anterior, a justificativa não tem sentido, pois “todo agir segundo a regra é uma interpretação” (IF, § 201). Portanto, o filósofo esclarece que a obtenção da real interpretação se dá a partir do contexto, pois é lá que os sujeitos praticam a regra, é no uso que ela adquire sentido. “Apenas indiquei que alguém somente se orienta por um indicador de direção na medida em que haja um uso contínuo, um hábito” (IF, § 198), e esclarece que “uma regra se apresenta como um indicador de direção” (IF, § 85).

Silveira (2015a) chama atenção que seguir uma regra é uma capacidade técnica, contudo a regra não é mecânica porque ela não contém todos os casos de sua aplicação, que se encontram dentro da gramática da nossa linguagem. A regra não é apreendida de uma só vez, ela surge de uma prática constante. Dessa forma, Wittgenstein (1996) sustenta a fala da autora quando diz que uma regra se apresenta como um indicador de direção e que este não deixa subsistir nenhuma dúvida. Porém, algumas vezes deixa dúvidas, outras não. E que isto já não é uma proposição filosófica, mas uma proposição empírica. Logo, o sujeito pode saber aplicar a regra num contexto, mas pode ter dúvidas de como aplicá-lo em um novo.

Na perspectiva da Educação Matemática, em uma sala de aula, há três elementos importantes: o professor, o aluno e a matemática. Ao falarmos de regras, uma pergunta surge: Quando mudamos de um contexto (matemático) para outro contexto, tal como a divisão entre números naturais e divisão entre números decimais, mudam-se as regras matemáticas? A seguir discutiremos como as regras comportam-se no ensino e na aprendizagem da Matemática.

1.3 Seguir regras em Matemática

A Matemática foi e é fundamental para o desenvolvimento da sociedade. É necessário que todos possam aprendê-la e compreendê-la, porém, para alguns, estar imerso no mundo da Matemática - onde há uma carga significativa de símbolos, regras, abstrações - torna-se algo inacessível, transformando-a em uma ciência elitista, de destaque, na qual apenas mentes brilhantes têm habilidades de demonstrar teoremas matemáticos; resolver cálculos, dos aritméticos aos diferencias e integrais.

A Educação Matemática debruça-se no intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem desta disciplina, seja na educação básica ou na educação superior, estudando metodologias para atenuar as dificuldades pelo fato de possuir uma simbologia própria que dificulta o aprendizado do aluno em um primeiro contato, como afirma Silveira (2008, p. 5): “ensinar o aluno a ler um texto escrito nessa linguagem é como ensinar uma língua estrangeira”.

O texto matemático pode ser escrito tanto em linguagem matemática com símbolos, gráficos e expressões algébricas, quanto em linguagem natural, com expressões do vocabulário matemático, por isso a necessidade de uma tradução dessa linguagem para a linguagem natural do aluno para que estes códigos façam sentido (SILVEIRA; SILVA, 2016).

No contexto da matemática algumas palavras têm sentido específico e esse sentido matemático das palavras deve ser explorado pelo professor para evitar mal-entendidos em situações de ensino. Por exemplo, na frase “João fez o caminho *inverso* de Maria”, a palavra “inverso” poderia ser substituída pela palavra “oposto” sem prejuízo para o sentido da frase, mas, no contexto da matemática, o sentido das palavras é totalmente distinto: o *inverso* de 5 é $\frac{1}{5}$, enquanto o *oposto* de 5 é - 5

Quando temos em um texto matemático escrito em linguagem natural o seguinte enunciado: “Multiplique as sentenças matemáticas a seguir”. A palavra *multiplique* subentende o conceito da operação de multiplicação, que obedece a regras e informa ao aluno, sem que este precise interpretar, qual regra deve ser utilizada. Ou o enunciado: “Os resultados do último sorteio da mega sena foram os números 04, 10, 26, 37, 47 e 57. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?” Aqui temos a palavra-chave “maneiras distintas”, mas que não define muito bem qual caminho, a regra que devemos seguir para encontrar a resposta do problema.

Nessa perspectiva, os professores que ensinam Matemática precisam explicar os significados dos termos, dos símbolos, as regras, para que façam sentido aos alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pois é frequente o professor apenas falar e não “ouvir” as inquietações dos alunos diante do mundo da Matemática. A esse respeito, Danyluk (1998), em sua obra oriunda das pesquisas feitas no mestrado e doutorado, disserta que a professora nas aulas de matemática não dialogava com os alunos sobre aquilo que estavam fazendo, nem sobre o significado do que estava no quadro-negro, logo não se estabelecia entre ela e os aprendizes o diálogo no qual a inteligibilidade de ambos sobre o significado da matemática pudesse aparecer.

Para Silveira (2015a), o ensino de matemática com ênfase na linguagem propicia a comunicação entre aluno e professor. Nesse sentido, é preciso que a linguagem do educador esclareça os significados dos símbolos matemáticos, bem como as regras que governam o texto matemático.

A educadora matemática ressalta ainda que os *jogos de linguagem,* principal conceito da obra de Wittgenstein, podem auxiliar a elucidar os problemas de ordem linguística que permeia a linguagem codificada da matemática. Para tanto, professor e aluno devem participar do mesmo universo discursivo, para que as palavras pronunciadas tenham um mesmo significado, tenham uma *forma de vida* (SILVEIRA, 2017).

No processo educativo da matemática, sobretudo nos anos iniciais do ensino fundamental, alguns professores privilegiam o ensino da matemática pautados em mostrar sua utilidade no contexto social, enquanto as regras matemáticas ficam num segundo plano. Afirmam estes que o ensino baseado no uso de regras é feito de forma mecanizada e sem sentido para o aluno. Ressalte-se que o professor deve ensinar o aluno como aplicar uma regra, uma vez que seguir uma regra é uma práxis, logo ela faz parte do jogo de linguagem da matemática.

A seguir, temos dois exemplos de divisão, onde mostraremos o algoritmo em cada caso. De acordo com Leão (1972), o algoritmo é um processo formal de cálculo, *seguindo regras* especiais, formando uma cadeia de operações em que cada uma depende do resultado anterior.

No primeiro exemplo, vamos dividir dois números naturais cujo quociente é um número natural, favorecendo a habilidade (EF05MA08)[2] da BNCC (BRASIL, 2017).

---

[2] A sigla na BNCC corresponde ao conteúdo abordado em Matemática da seguinte forma: o primeiro par de letras indica Ensino Fundamental; o primeiro par de números indica o ano escolar (do 01 ao 09) a que se refere a habilidade; o segundo par de letras indica o conteúdo do currículo MA = Matemática; o último par de números indica a posição da habilidade.

UM C D U

2 4 6 9 | 3
- 2 4 | 8
0 | C

Não é possível dividir 2 unidades de milhar (UM) por 3 e obter unidade de milhar (UM), então, vamos dividir 24 centenas (C) por 3 para obter 8 centenas (C).

UM C D U

2 4 6 9 | 3
- 2 4 | 8 2
0 6 | C D
- 0 6
0

Vamos dividir 6 dezenas (D) por 3 para obter 2 dezenas (D).

UM C D U

2 4 6 9 | 3
- 2 4 | 8 2 3
0 6 | C D U
- 0 6
0 9
- 0 9
0

Vamos dividir 9 unidades (U) por 3 para obter 3 unidades (U).

O segundo exemplo mostra a divisão de um número da forma decimal por um número natural, o qual favorece a habilidade (EF05MA08)[3] da BNCC (BRASIL, 2017).

D U d c

2 1 , 3 6 | 3
- 2 1 | 7
0 | U

Não é possível dividir 2 dezenas por 3, e obter dezenas (D), então, vamos dividir 21 unidades (U) por 3 para obter 7 unidades (U), com resto zero.

D U d c

2 1 , 3 6 | 3

[3] A sigla na BNCC corresponde ao conteúdo abordado em Matemática da seguinte forma: o primeiro par de letras indica Ensino Fundamental; o primeiro par de números indica o ano escolar (do 01 ao 09) a que se refere a habilidade; o segundo par de letras indica o conteúdo do currículo MA = Matemática; o último par de números indica a posição da habilidade

- 2 1	7 , 1
0 3	U d
- 0 3	
0	

Dividimos 3 décimos (d) por 3, e obtivemos 1 décimo (d), com resto zero.

D U d c	
2 1 , 3 6	3
- 2 1	7 , 1 2
0 3	U d c
- 0 3	
0 6	
- 0 6	
0	

Dividimos 3 centésimos (c) por 3, e obtivemos 2 centésimos (c), com resto zero.

Embora, a partir destes exemplos, possamos aplicar a mesma regra matemática em contextos matemáticos distintos - ora definidos numa divisão entre números naturais, ora definidos numa divisão na forma decimal por um natural - há casos em que a regra é interpretada equivocadamente na concepção do aluno, como ressalta Silveira (2015a, p. 158): “no processo de aplicação de regra, o aluno se depara com contextos diferentes e a regra que deveria ser a mesma passa por transformações e é por ele modificada”.

Com fundamento na fala da educadora matemática, é percebível que, na prática docente, há alunos que transgridem a regra ao serem ensinados que na multiplicação entre frações, multiplicamos numeradores e denominadores entre si, desta forma: $\frac{1}{5}\text{x}\frac{3}{4} = \frac{3}{20}$.

Já no exemplo de multiplicação de um número inteiro por uma fração $5\text{x}\frac{3}{4}$, o aluno, numa situação hipotética, daria como solução a seguinte resposta dentre outras possibilidades: $5\text{x}\frac{3}{4} = \frac{5\text{x}4+3}{4} = \frac{20+3}{4} = \frac{23}{4}$. O aluno não percebe que é preciso completar a fração $\frac{5}{1}$ para, então, efetuar corretamente a operação, pois se deparou com um contexto de aplicação da regra distinto, pelo menos para ele, da situação apresentada pelo professor, o que implicou em uma modificação da regra.

Outro aspecto concernente, ao exemplo acima, é a possível incapacidade de o aluno *ver* o número 5 *como* a fração $\frac{1}{5}$, ou seja, se trata de uma cegueira para o aspecto fracionário dos números inteiros, que se estabelece por falta de treinamento, em decorrência da não vivência, do não ensino de lições como “agora veja 5 como $\frac{1}{5}$”.

Casos como este acontecem também em outro nível de ensino. É comum o aluno dos anos finais do ensino fundamental cometer equívocos na aplicação de regras, pois aprende a resolver o produto notável $(x+y)^2 \text{ como } x^2+2xy+y^2$. No entanto, ao se deparar com outro produto notável, $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$, este resolve pensando ser apenas uma simplificação da radiciação, onde:$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, para todo $x \geq 0$. Logo, para este aluno: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 = x+y$.

O aluno normalmente não consegue perceber (sozinho) que há uma relação entre os dois contextos e que poderá usar a mesma regra. É importante que o professor mostre a ele que uma regra pode ser aplicada em diferentes contextos, explorando vários exemplos para que possa compreender o conceito matemático.

Silveira (2015a) também apresenta situações em que o aluno cria regras a partir de um conteúdo já aprendido. Ele sabe que 2 + 3 = 5 e, desse pressuposto, conclui que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$. O aluno faz analogias, e estas suscitam erros. Ele estabelece critérios para fazer julgamento através do que percebe e do que vê.

A Matemática possui regras próprias. Ao interpretar a regra, é necessário que o aluno o faça conforme a lógica matemática e não com sua própria lógica. Por este motivo, o professor que ensina matemática deve pautar-se no diálogo, ouvir o aluno, dar oportunidades para que ele verbalize. Momento este em que o docente poderá saber se o aluno compreendeu o conceito matemático ou não.

O aluno convidado a ir ao quadro resolver exercícios e a turma analisar conjuntamente se a aplicação da regra está correta ou não, bem como o professor acompanhar a resolução de lista de exercícios no caderno do aluno, são exemplos de momentos nos quais o professor terá a oportunidade de perceber se a explicação está sendo coerente e se a linguagem utilizada é adequada para o nível da turma. Para Silveira (2015a, p. 158), “o professor precisa conhecer como o aluno lida com as regras matemáticas quando cria a sua demonstração e para que, por meio do diálogo, professor e aluno participem do mesmo universo discursivo”.

Para ilustrar, vejamos um exemplo análogo a de Silveira (2014), no qual o professor, ao ensinar classe e ordem dos numerais, tem como exemplo o 425 e explica à turma: o cinco é unidade, o dois é dezena e o quatro é centena. Ao escrever no quadro o 254 e ouvir a reposta da turma: o cinco é unidade, o dois é dezena e o quatro é centena, é neste momento que ele percebe que houve uma falha na comunicação ao ensinar. Tanto o professor quanto o aluno precisam estar de acordo com a lógica da matemática, seguir a gramática da matemática.

Outro aspecto do uso da regra é quando o aluno interpreta e aplica a regra num determinado conteúdo de outro já estudado, no intuito de construir o sentido coerente para aplicação correta da regra nesse novo contexto. No entanto, ele acaba transgredindo a regra, o que ocorre porque tenta fazer analogias com as regras já estudadas as quais apresentam semelhanças. Esse (re)interpretar da regra em um novo contexto matemático, ao menos, indica que o aluno tem domínio de sua aplicação.

A exemplo disso, temos as funções $f(x) = ln(x)$ e $f(x) = ln(x^3 + 2x^2)$. O aluno, no exercício de calcular as regras de derivadas, pode fazer analogia do resultado da primeira com $f'(x) = \frac{1}{x}$ com a segunda e dar como resposta $f'(x) = \frac{1}{x^3+2x^2}$. Todavia, ele não percebe que, no segundo caso, a regra de derivada é outra, uma vez que temos uma função composta e utilizamos a regra da cadeia, portanto, a resposta seria $f'(x) = \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2}$.

De acordo com o exemplo, Silveira (2015a) aponta que o aluno compreende que existe uma semelhança sintática e uma correspondência teórica entre os dois termos. Porém, o aluno pode não seguir a regra corretamente, modificando e causando prejuízo ao conceito idealizado pela exigência teórica, ao fazer conexões com outros conceitos.

Wittgenstein não se preocupou em fazer teoria, no entanto, pesquisadores da educação matemática refletem sobre problemas de ensino da matemática, aliando questões da Filosofia da Linguagem às práticas do contexto escolar. Para o autor, traduzir de uma língua para outra é um jogo de linguagem assim como comandar e agir segundo comandos.

A Matemática é governada por regras, o seu ensino deve priorizar que o aluno se familiarize com as regras implícitas e assim compreenda os seus conceitos, como afirma Silveira (2015a, p. 157): "a regra matemática, quando interpretada, possibilita a compreensão do conceito que está subjacente à regra. Construir um conceito é, dessa forma, interpretar uma regra".

Para haver essa compreensão do conceito matemático, é imprescindível que a comunicação entre professor e aluno seja estabelecida, pois a comunicação das regras matemáticas dá-se a partir da linguagem natural do aluno (surdo ou ouvinte) que possui regras gramaticais tais como as da linguagem matemática.

A linguagem natural pode ser uma barreira comunicativa das regras matemáticas, haja vista a linguagem natural ter característica polissêmica. A palavra, dependendo do contexto no qual esteja inserida, possui um significado diferente e pode não corresponder ao significado apropriado da linguagem matemática, caracterizada como monossêmica.

Meira (2012) aponta que

> […] uma expressão verbalizada pelo professor de matemática pode não possuir o mesmo significado para o aluno e isso em algumas circunstâncias pode levá-lo a interpretar a regra de modo equivocado, isto é, interpretar de forma que não esteja em acordo com a lógica da matemática. Assim, a expressão anunciada pelo professor, naquele momento, pode não fazer parte do jogo de linguagem do aluno, isto é, do 'universo discursivo' em que ele esteja operando e desse modo possibilita-lhe diversas interpretações (MEIRA, 2012, p. 43).

Desse modo, o texto matemático pode ser escrito tanto em linguagem simbólica - a qual se constitui de códigos, gráficos, expressões algébricas, e pode dizer muito com poucos símbolos, por exemplo: $(A \cup B) = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ - quanto em linguagem natural, em que há termos do vocabulário carregados de expressões matemáticas, como: *Determine a medida da apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 6 cm*.

O professor ao introduzir as quatro operações, por exemplo, tal como quando aborda a multiplicação ao referir-se aos termos multiplicando, multiplicado e produto, dá sentido para que o conceito da operação seja entendido pelo aluno. Para Wittgenstein, de acordo com Silveira (2005, p. 15), "o conceito é uma regra que se fundamenta no jogo de linguagem e se corresponde com o seu significado". O termo *produto*, em linguagem natural, tem um significado, por exemplo, daquilo que é comprado num supermercado. Mas, em linguagem matemática, significa o resultado da multiplicação. Na divisão, as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto também precisam ser entendidas para que o aluno compreenda o conceito de operação.

Para quem atua no ensino de matemática, é inegável que os assuntos iniciais se deem a partir do momento que o professor aponta para o quadro e, por exemplo, afirma: *Observe que a medida do lado desse triângulo retângulo é a hipotenusa… Esta fração é equivalente a fração... Veja que as figuras (cilindro, cone e esferas) são denominadas como corpos redondos...* Nesse contexto, Wittgenstein nos ajuda a explicar o gesto ostensivo utilizado pelo professor de matemática para mostrar elementos matemáticos no quadro.

Ressaltamos que o gesto ostensivo é um importante recurso no ensino. Quando o professor usa de forma propositiva, pode contribuir para o aprendizado, é o que acontece ao explicar que, para obter uma fração equivalente a outra, é preciso simplificar numerador e denominador para obter valores menores que a fração original. Por exemplo, no ato de mostrar que as frações $\frac{30}{70} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ são equivalentes, o uso do recurso serve para fazer a relação interna entre as representações.

No entanto, Silveira (2017) exemplifica que o mau uso do gesto ostensivo pode tornar-se um problema no processo educativo, quando utilizado com as características de apenas mostrar os catetos de um triângulo retângulo pelas letras a, b e c, onde *a* é hipotenusa, *b* e *c* os catetos. Pois, ao trocarmos as letras por x, y e z, o aluno não conseguirá identificar qual lado é a hipotenusa e catetos. A autora diz que isso pode prejudicar a aprendizagem do aluno se for ensinado por meio do gesto ostensivo a fim de somente mostrar os elementos do triângulo retângulo. Então, ressalta que é importante explicar o conceito do que é cateto e do que é hipotenusa.

Muitas vezes, o professor que se utiliza do *ato de mostrar* em matemática, sem ter o cuidado de deixar claro ao aluno o significado no universo matemático, tem dúvidas ao explicar termos, conceitos que são concernentes à atividade de ensino. A exemplo, ao aluno pode ser ensinado que o lado *c* do triângulo retângulo sempre será o cateto adjacente. Ou que, para realizar a divisão de um número decimal por um número inteiro, é recomendado sempre eliminar a vírgula (se tiver uma casa decimal após a vírgula) e acrescentar um zero ao divisor.

Para Silveira,

> De acordo com o filósofo austríaco, o professor não pode ensinar por meio da dúvida, e sim, partir de certezas. Quando ensinamos a criança a contar,

> não podemos querer que por si só descubra que depois de dezenove vem vinte. Os números são invenções humanas e a técnica de contagem tem que ser ensinada pelo professor. O aluno aprenderá a contar após um certo hábito com a contagem, assim poderá aprender as operações com números, mas para que isso aconteça deve ser iniciado na aprendizagem da gramática que rege os textos matemáticos (SILVEIRA, 2017, p. 54).

Wittgenstein diz que “a criança aprende, acreditando no adulto” (DC, § 160) e que ela “acredita nos professores e nos livros escolares” (DC, § 263). Nesse caso, entendemos que é de fundamental importância que o uso de regras no ensino de matemática seja feito com cautela, na acepção que tenha sentido ao aluno, seja na fala do professor, seja na escrita do livro didático. Não ter cautela no uso de algumas expressões pode trazer implicações prejudiciais para a aprendizagem, tais como: No algoritmo da subtração, quando o professor diz que “empresta um”; Na equação polinomial, ao dizer “o número que está multiplicando, passa para o outro lado dividindo”; Na operação de multiplicação com fração, “multiplicamos o numerador com numerador e denominador com denominador”.

Nesse sentido, Meira evidencia que

> os alunos aplicam as regras dos algoritmos e processos de resolução sem se darem conta de que não a compreenderam, apenas, reproduzem mecanicamente, porém, isso não significa que a compreensão seja algo mecânico (MEIRA, 2012, p. 44).

Lembremos que, para Wittgenstein compreender é uma habilidade, é dominar uma técnica. Na docência, percebemos que somente o ato de resolver exemplos no quadro de cada tópico de um conteúdo não é condição suficiente para que o aluno compreenda o assunto. Aquele que resolve a lista de exercício em sala de aula, e refaz em casa, normalmente é o aluno que terá um melhor desempenho nas atividades avaliativas, uma vez que segue as regras matemáticas daquele conteúdo estudado.

Silveira (2015a) afirma que o processo de aplicação de regras não é mecânico, pois é preciso interpretação; é no uso que adquire sentido. O aluno interpreta a regra, projeta sentidos durante a sua aplicação e a compreende.

Na operação de subtração com o algoritmo do “empréstimo”, a regra é sempre emprestar “um” do algarismo da maior ordem (unidade, dezena e centena). Como exemplo, efetuaremos 563 – 176:

C	D	U
$\cancel{5}^{4}$	$\cancel{6}^{\cancel{5}15}$	$\cancel{3}^{13}$
1	7	6
3	8	7

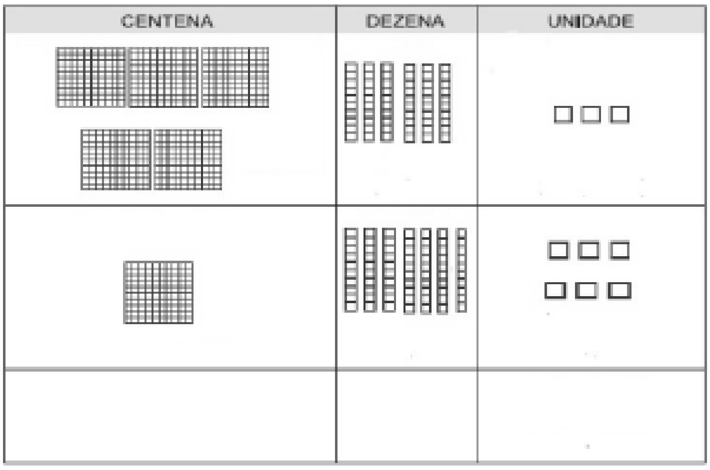
5	6	3		Minuendo
<u>1</u>	<u>7</u>	<u>6</u>	-	Subtraendo
3	8	7		Resto

Para resolver a operação, começamos da direita para a esquerda. Contudo, nesta subtração, deveríamos subtrair 6 de 3, o que não é possível, portanto, deve-se recorrer ao empréstimo do algarismo ao lado, no caso o 6. Assim, o 6 passa a valer 5 e empresta 1 ao 3, que passa a valer 13, e assim inicia a subtração. Em seguida, deveríamos subtrair 7 de 5, o que não é possível também, logo deve-se emprestar do 5. Dessa forma, o 5 passa a valer 4 e empresta 1 ao 5, que passa a valer 15. Por fim, é possível subtrair 1 de 4 e chega-se ao resultado 387.

A explicação acima é comumente usada nas aulas de matemática para ensinar a subtração por meio do algoritmo, regra do recurso à ordem superior, denominada como *método do empréstimo*. O que reforça a fala de alguns pesquisadores de que o ensino é tradicional com uso de regras memorizadas, mecânicas, que não contribuem para uma aprendizagem significativa, e necessita trabalhar a partir de elementos do cotidiano do aluno para que este conteúdo tenha sentido.

No entanto, ao ensinar a regra ao aluno mostrando o que acontece a cada passo que “emprestamos”, damos sentido ao conceito da operação. Tal como veremos na explicação a seguir com auxílio do Material Dourado no exemplo de 563 – 176.

Figura 2 – I Etapa processo algoritmo da subtração

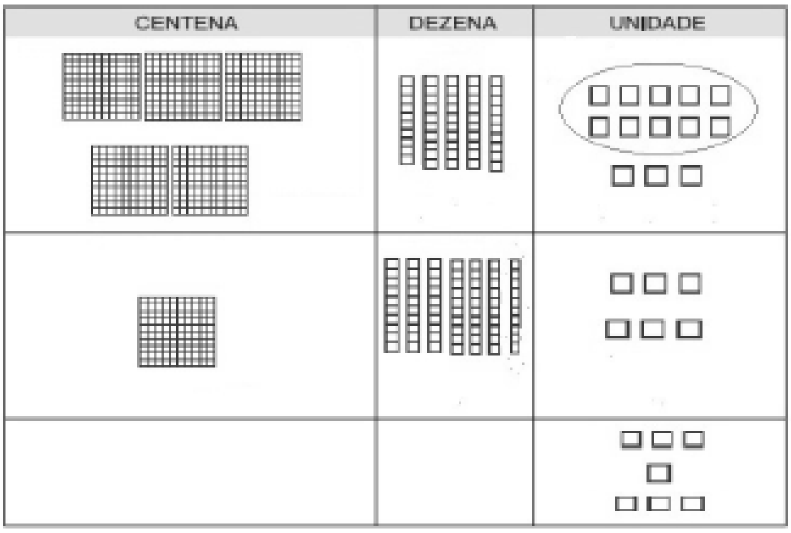


Fonte: Autoria propria (2019)

O professor ao explicar ao aluno que o "empresta um" significa que os agrupamentos de uma ordem se transformam em agrupamentos de outra, o agrupamento de dez cubinhos se transforma em uma barra; agrupamento de dez barras de transforma em uma placa, por exemplo.

Analisando o exemplo em questão, não podemos "tirar" 6 unidades de 3 unidades, então transforma 1 dezena em 10 unidades. Somando-se estas 10 unidades com as 3 unidades existentes, perfaz-se um total de 13 unidades. Portanto, é possível subtrair 6 unidades de 13 unidades, o que resulta em 7 unidades.

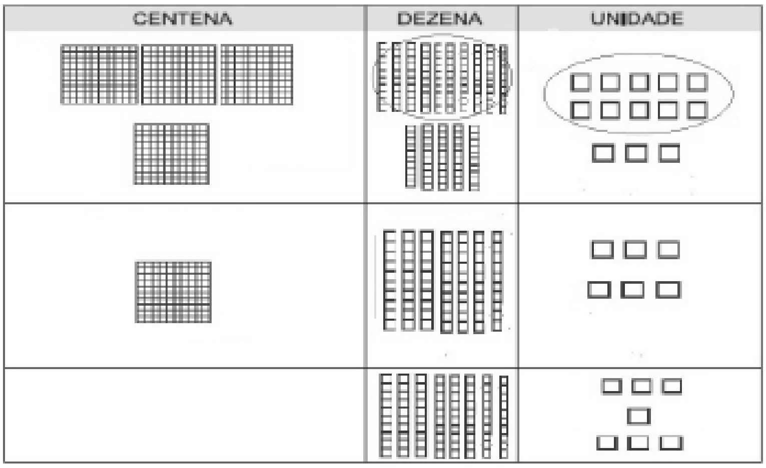
Figura 3 – II Etapa processo algoritmo da subtração



Fonte: Autoria própria (2019)

Assim, não podemos “tirar” 7 dezenas de 5 dezenas, então transforma 1 centena em 10 dezenas. Somando-se estas 10 dezenas com 5 dezenas existentes, temos 15 dezenas. Logo, o resultado será 8 dezenas.

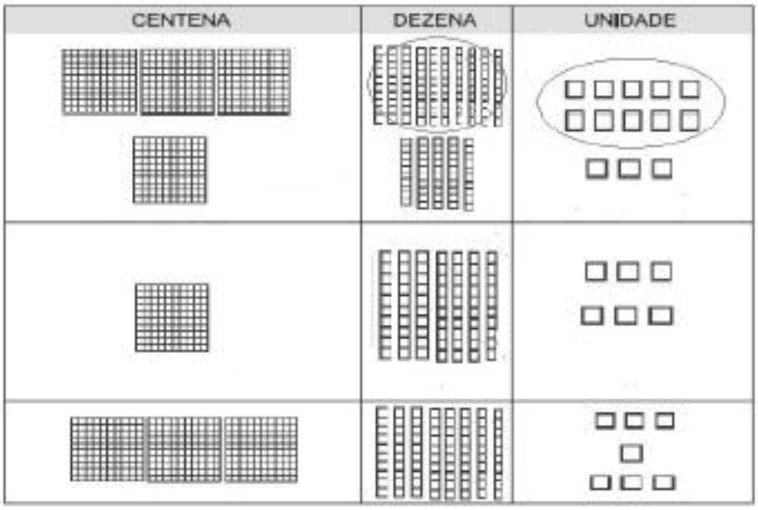
Figura 4 – III Etapa processo algoritmo da subtração



Fonte: Autoria própria (2019)

Na última etapa, podemos subtrair 1 centena de 4 centenas, que resulta em 3 centenas.

Figura 5 – IV Etapa processo algoritmo da subtração



Fonte: Autoria própria (2019)

Machado (1990), em relação ao tratamento da matemática, esclarece que:

> Com relação à expectativa de que, na aprendizagem de qualquer assunto seria necessária uma abordagem inicial, limitada ao âmbito da técnica operatória. […] as regras precisam ser bem conhecidas antes de se poder pensar em agir ou jogar. […] no caso do processo de produção do conhecimento, na aprendizagem da Língua [materna] ou da Matemática, a técnica alimenta o significado que alimenta a técnica… e assim por diante (MACHADO, 1990, p. 115-116).

No mesmo sentido, Gómez-Granell (1995) aponta que

> […] as regras de escrita de números de mais de um algarismo, os algoritmos das operações, a medida de diferentes magnitudes, as operações com parênteses, a simplificação de frações, a procura do mínimo múltiplo comum, a resolução de equações, a resolução de integrais, etc., além de um conhecimento conceitual, o domínio de uma série de regras e convenções que também é necessário aprender e ensinar (GÓMEZ-GRANELL, 1995, p. 274).

A partir dos excertos, vemos a importância do uso de regras, levando em consideração que a regra tenha sentido ao aluno e que este construa o conceito que está implícito na regra. Portanto, o que dá sentido a um código ou a uma regra é o uso que fazemos destes. Para Wittgenstein, “compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa dominar uma técnica” (IF, § 199). Por exemplo, para jogar xadrez, é necessário aprender regras, é importante saber o uso de cada peça. Caso o jogador se utilize de outras regras, não está jogando xadrez.

No entanto, vemos em algumas pesquisas acadêmicas, como a de Machado (2007), a proposição de que é necessário reconfigurar o ensino de matemática, a exemplo da operação com fração, utilizando-se da resolução de problemas para que o aluno tenha sucesso no entendimento do assunto e não fique escravo de regras memorizadas, sem sentido para ele.

Gómez-Granell (1995) apresenta um exemplo pertinente para esclarecer que, no ensino de matemática, há aqueles que defendem uma concepção formalista da matemática e outros que defendem que há necessidade de algum significado extra aos símbolos, algo vinculado à realidade do estudante.

A autora toma como exemplo a expressão (a.b) = (b.a), que se refere à lei da comutatividade da multiplicação. Se transitar ou no nível algébrico ou no nível numérico (4 x 5 = 5 x 4 assim como 3 x 6 = 6 x 3), a regra se confirma. No entanto, ela salienta que, em uma situação específica com um determinado significado semântico, a regra deixa de ser cumprida: a expressão “4 caramelos custam 6 pesetas cada um” não é equivalente à expressão “6 caramelos custam 4 pesetas cada um”. Dessa forma, o professor que tenta contextualizar a matemática sempre justificando suas regras na empiria pode causar confusões gramaticais para este aluno.

No ensino de regras matemáticas, há dois tipos de proposições que devem ser explicitadas: a proposição matemática ou gramatical (normativa, expressa norma, regra a ser seguida) e a proposição empírica (descreve fatos da realidade).

Uma proposição gramatical 7 + 5 = 12 não é nem verdadeira nem falsa, ela serve como padrão de correção de que 7 + 5 = 10 não está de acordo com a regra gramatical, pois o cálculo está errado. “Se o verdadeiro é o que é fundamentado, então o fundamento não é verdadeiro nem falso” (DC, § 205). “O que estou querendo dizer é que a matemática é normativa” (OFM, § 61).

Na obra *Da Certeza* (1969), Wittgenstein faz uma analogia das proposições gramaticais como proposições dobradiças:

> Isto é, as perguntas que formulamos e as nossas dúvidas dependem de o facto de certas proposições estarem isentas de dúvida serem como que dobradiças em volta das quais as dúvidas giram (DC, § 341);
> Isto é, pertence à lógica das nossas investigações científicas que certas coisas de facto não sejam postas em dúvidas (DC, § 342);
> Mas a situação não se assemelha a isto: Não podemos investigar tudo e por isso somos forçados a contentar-nos com suposições. Se queremos que a porta se abra, é preciso que as dobradiças lá estejam (DC, § 343).

As proposições dobradiças são isentas de qualquer anomalia, de qualquer fator externo que porventura torne-a dubitável, não há a possibilidade de torná-las justificáveis ou falsificáveis a partir da empiria, pois são normas e não descrevem fatos da realidade, da experiência, sendo estas características das proposições empíricas. Para Glock (1998, p. 194), “a proposição gramatical não consiste em enunciar como estão as coisas, mas antes em expressar uma regra de forma exata, elas devem ser diferenciadas de enunciados empíricos.”

As proposições empíricas têm a função descritiva e baseiam-se na verificação na empiria. Quando uma criança diz a outra “sou mais alto que tu” ou “João é filho de José”, estamos diante de proposições que necessitam de verificação para serem validadas. Logo, para validar a primeira, poderíamos usar uma fita métrica; já na segunda assertiva, a partir de um documento oficial para comprovar a filiação paternal.

Desse modo, não validamos que 7 + 5 é igual a 12 pelo fato de que 7 laranjas mais 5 laranjas perfazem 12 laranjas; assim como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ não é validado pelo cálculo de maçãs, onde meia maçã mais meia maçã será uma maçã inteira. Mas, sim, é pela regra matemática $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ que podemos validar a proposição com maçãs.

Ademais, Wittgenstein explica sobre a “aritmética das maçãs”:

> Devemos ter cuidado ao pensar que “4 maçãs + 4 maçãs = 8 maçãs” é a equação concreta e 4 + 4 = 8 é a proposição abstrata, da qual a primeira é apenas um caso especial, de modo que a aritmética das maçãs, embora muito menos geral que a aritmética verdadeiramente geral, é válida em seu domínio restrito (para as maçãs). Não existe nenhuma “aritmética das maçãs”

> porque a equação 4 maçãs + 4 maçãs = 8 maçãs não é uma proposição a respeito de maçãs. Podemos dizer que, nessa equação, a palavra “maçãs” não tem nenhuma referência (WITTGENSTEIN, 2010, p. 243).

Em uma divisão de 10 bombons entre 2 crianças, não necessariamente pensemos em uma divisão exata, pois, se uma das crianças quiser seguir a regra de que merece mais bombons, não haverá problema. Neste sentido, Gottschalk (2008, p. 81) explica que “atividade [proposição] matemática distingue-se radicalmente dos procedimentos empíricos: o cálculo não é um experimento, não é preditivo e tampouco a prova matemática se baseia em evidências empíricas”; Portanto, a atividade matemática 6 dividido por 3 deve ser igual a 2, pois é uma norma. Para Wittgenstein a matemática é uma atividade normativa, assim as regras se transformam em norma.

Gómez-Granell (1995) coaduna com o esclarecimento de Gottschalk quando diz que:

> Poderíamos dizer, resumindo, que os símbolos matemáticos possuem dois significados. Um deles, estritamente formal, que obedece a regras internas do próprio sistema e se caracteriza pela sua autonomia do real, pois a validade das suas declarações não está determinada pelo exterior (constatação empírica). E o outro significado, que poderíamos chamar de “referencial”, que permite associar os símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para, entre outras coisas, resolver problemas. Isto é, o problema reside no fato de que, embora as expressões matemáticas façam, por um lado, referência a situações em que aparecem relações quantitativas - portanto, podendo ser matematizada - por outro lado, para que tais expressões pertençam ao domínio da matemática devem ser totalmente autônomas em relação aos contextos e situações específicas de referência (GÓMEZ-GRANELL, 1995, p. 264).

Silva (2011) desmistifica em sua pesquisa que uma proposição só teria sentido, só significaria algo, se descrevesse algo no mundo. Assim, caso as proposições não “apontassem” para nada no mundo, estas consistiriam em termos sem referências e, logo, sem sentido. Sendo assim, o professor que ensina matemática deve deixar claro para o aluno que as proposições empíricas não podem determinar como seguir regras, e sim que as proposições matemáticas determinam como agir em suas possíveis aplicações.

Nessa perspectiva, Wittgenstein deixa indícios de que há uma linha tênue entre as proposições gramaticais e as proposições empíricas a depender do contexto e salienta que a demarcação entre as proposições não é de fácil elucidação. O filósofo defende que não podemos fazer diferenciação pela forma, e sim pelo uso que tem na linguagem:

> Poderia imaginar-se que algumas proposições, com a forma de proposições empíricas, se tornavam rígidas e funcionavam como canais para as proposições empíricas que não endureciam e eram fluidas, e que esta relação se alterava com o tempo, de modo que as proposições fluidas se tornavam rígidas e vice-versa (DC, § 96);
> Isto é certo: a mesma proposição pode ser tratada uma vez como coisa a verificar pela experiência, outra vez como regra de verificação (DC, § 98).

Para uma melhor compreensão dessa linha tênue, recorremos à explicação de Gottschalk (2007), a qual esclarece quando a proposição ora é gramatical, ora é empírica: Uma mesma afirmação, como "isto é branco", pode ter ora uma função descritiva, ora uma função normativa, dependendo do contexto de enunciação. Se for uma resposta à pergunta "o que é branco?", estará sendo empregada normativamente, enquanto, em um outro contexto, pode estar sendo empregada simplesmente para descrever a cor de um determinado objeto. O que é importante ressaltar nesta distinção que Wittgenstein faz em relação aos diferentes usos possíveis de uma mesma proposição, é que a função exercida se mostra no próprio uso da proposição. São as circunstâncias que esclarecem o tipo de função que exercerão.

CAPÍTULO II: FRAÇÕES

Neste capítulo, abordaremos acerca do objeto de pesquisa: as operações com frações. Inicialmente, fazemos uma breve explanação a respeito do conteúdo, a partir do documento curricular oficial do Pará, quais habilidades são necessárias para ensinar as operações no conjunto dos números racionais; em seguida, apresentamos o conjunto do números racionais a fim de mostrar como a regra vem constituindo-se ao longo da história até a nossa aritmética usual.

2.1 Documento oficial para o ensino de Matemática

O Documento Curricular do Pará, última versão entregue ao Conselho Estadual de Educação em 2018, é o documento normatizador do currículo para Educação Infantil e Ensino Fundamental usado pelas escolas das redes de ensino do estado do Pará e tem como base, sobretudo, o que rege a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017, para diversas disciplinas.

De acordo com a BNCC, a área de Matemática:

> não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 2017, p. 263).

Umas das competências específicas da Matemática para o Ensino Fundamental é:

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (BRASIL, 2017, p. 265).

No que tange ao Documento Curricular, é explicitado um cuidado em relação à Linguagem Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, ressaltando que pesquisas mostram a incompreensão desta pelos alunos. Fator preponderante é o fato de esta disciplina possuir uma linguagem própria e, pode-se dizer muito e com precisão, utilizando-se de pouca simbologia. Esta, por sua vez, segue regras matemáticas.

Dessa forma, no que se refere à simbologia que é apresentada ora em livros didáticos, ora no quadro negro, é importante que o professor que ensina matemática explique as regras que estão implícitas a fim de que o aluno compreenda a linguagem simbólica do texto matemático. Ressalte-se que um texto matemático pode ser escrito tanto em linguagem simbólica quanto em linguagem natural.

> Ao longo dos anos, muitas discussões e pesquisas têm sido desenvolvidas na área de educação matemática para tentar resolver as dificuldades sentidas por professores e alunos […] nessas pesquisas diz respeito à incompreensão da linguagem matemática pelos alunos. […] a Matemática tem uma linguagem diferenciada e própria, é como se aprendêssemos a nos comunicar em outra língua (PARÁ, 2018, p. 485-486).

No que concerne ao objeto de pesquisa, no documento curricular oficial, em âmbito nacional, a Fração está incluída na temática *operações com números racionais*, divididas em conteúdos programáticos: Números; Álgebra; Geometria, Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística. Nosso objeto de estudo encontra-se na unidade temática *Números*. Já o documento curricular, em âmbito estadual, reformula estas unidades e apresenta-as à comunidade escolar denominando-as por *eixos* temáticos: Espaço e Tempo; Linguagem e suas Formas Comunicativas; Valores à Vida Social; Cultura e Identidade – o conteúdo aqui analisado está alocado no eixo *Valores à Vida Social*.

A seguir temos um recorte do documento curricular estadual que direciona as habilidades para estudar os números racionais:

> (EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
>
> (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo e algoritmos (PARÁ, 2018, p. 506).

Consoante o documento citado, a habilidade com as operações com números racionais começa no 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, porém professores que atuam com o público-alvo não possuem formação específica na área, de acordo com a coleta de dados realizada para esta pesquisa.

2.2 Sobre os números racionais

Boyer (1974) relata que os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas, com o advento de culturas avançadas durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas têm uma notação especial para frações unitárias. Um número inteiro era indicado colocando-se sobre a notação um sinal *oval alongado*, por exemplo, a fração $\frac{1}{8}$ era representado por  e a fração $\frac{1}{20}$ por .

Os egípcios consideravam a fração racional através da forma $\frac{m}{n}$ não como uma "coisa" elementar, e sim como parte de um processo incompleto. A exemplo disso, temos que a fração $\frac{2}{3}$ obtida a partir da forma $\frac{n}{n+1}$ era considerada o complemento de uma fração unitária. Para o cálculo de uma fração irredutível como $\frac{3}{5}$, havia a necessidade de os egípcios somarem três frações unitárias ($\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{15}$) para obter êxito no resultado.

Se quisessem reduzir frações própria à soma de frações unitárias, utilizavam o Papiro de Rhind, tendo uma tabela fornecendo a forma $\frac{2}{n}$ como soma de frações unitárias para todos os valores ímpares de *n* compreendidos entre 5 a 101. Vejamos, a seguir, a fórmula utilizada para tal cálculo:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

A partir desta fórmula, é possível calcular as frações:

a) $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
b) $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$
c) $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$

Para a operação de subtração de um número fracionário de uma unidade, os egípcios escolhiam um número adequado denominado *o método do número vermelho*, com o objetivo de se trabalhar com várias frações e, ao escolher um número vermelho, eles determinavam o mínimo múltiplo comum entre os denominadores. Assim, os problemas 21, 22 e 23 do Papiro mostram como os egípcios calculavam a subtração a partir da seguinte ideia: Qual a quantidade que falta à fração para completar uma unidade?

Vejamos a resolução dada ao problema 21: Qual a quantidade que falta à $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\right)$ para completar uma unidade?

Para tanto, Ahmes escolheu o número 15 como número vermelho, a fim de simplificar e poder aplicar o método.

i) $\frac{2}{3}$ de 15 é 10

ii) $\frac{1}{15}$ de 15 é 1

Assim, temos que $\frac{2}{3}$ de 15 mais $\frac{1}{15}$ de 15 é igual a 11. Como 15, que é número vermelho, ultrapassa 11 em 4 unidades, logo o número de partes de 15 dá um total de 4, ou seja, divide-se 4 por 15.

Vejamos:

1	15
$\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	3
$\frac{1}{15}$	1
----------	----------
$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$	4

Logo, a quantidade que falta para completar a unidade é $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$.

Em nossa aritmética usual, o método utilizado pelos egípcios seria da seguinte forma para determinar quanto falta para completar a unidade.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+x=1$$

$$x=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{15}$$

$$x=\frac{4}{15} \text{ ou } x=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$$

Em relação às operações com números, no Egito, a operação aritmética fundamental era a operação de adição; já as operações de multiplicação e divisão eram efetuadas por sucessivas "duplações". Boyer faz uma breve explicação acerca deste procedimento. Ao multiplicar 69 por 19, temos que:

i) Somar o 69 por si para obter 138;

ii) Com o último resultado, somar por si para obter 276;

iii) Novamente, com o último resultado, somar por si e obter 552;

iv) Mais uma vez, somar 552 por si e encontrar resultado 1104, isto é, dezesseis vezes 69.

v) Como 19 = 16 + 2 + 1, o resultado desta multiplicação resulta em

$$69.19 = (69.16) + (69.2) + (69.1)$$
$$69.19 = 1104 + 138 + 69$$
$$69.19 = 1311$$

Os egípcios trabalhavam com a multiplicação com fração unitária pela duplação. No problema 13 do Papiro de Ahmes é proposta a multiplicação entre $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$ e $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ a qual tem como resultado $\frac{1}{8}$.

Efetuando a multiplicação, temos que:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{112}\right) x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{112}\right) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{224}\right) + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{448}\right) = \frac{1}{8}.$$

Segundo Boyer, para se trabalhar com a divisão com fração, o problema 70 do Papiro de Ahmes sugere realizar a divisão de 100 por $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, assim o resultado que se obtinha era $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$. O cálculo realizado era feito mediante a técnica da *duplação* do divisor, neste caso, primeiro obtém-se, depois $31 + \frac{1}{2}$ e, na sequência 63, que é oito vezes o divisor. Porém, como $\frac{2}{3}$ do divisor dá $5 + \frac{1}{4}$, o divisor quando multiplicado por $8 + 4 + \frac{2}{3}$ dará $99\frac{3}{4}$, faltando apenas $\frac{1}{4}$ para o produto 100 que se deseja obter. Para o autor, um ajuste inteligente foi necessário, como oito vezes o divisor dá 63, resulta que o divisor quando multiplicado por $\frac{2}{63}$

resultará $\frac{1}{4}$. Da tabela para $\frac{2}{n}$, sabe-se que $\frac{2}{63}$ é $\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$, portanto o quociente procurado é $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$.

Para Iezzi e Murakami (1979), em sua obra mais importante: *Fundamentos da Matemática Elementar*, o conjunto dos números racionais é denominado como conjuntos dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Na fração $\frac{a}{b}$, *a* é o numerador e *b* o denominador. Se *a* e *b* são primos entre si, isto é, se mdc (a,b) = 1, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

Assim, tem-se as seguintes operações:

i) adição: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, de modo análogo à subtração de frações, a regra satisfaz os cálculos com denominadores iguais ou não, tal como:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ax\mathbf{d}}{bx\mathbf{d}}+\frac{cx\mathbf{b}}{dx\mathbf{b}}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

ii) multiplicação: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Os autores ressaltam que a adição [A] e a multiplicação [M] de racionais apresentam algumas propriedades importantes, tais como:

[A1] $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$

[A2] $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

[A3] $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$

[A4] $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$

[M1] $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$

[M2] $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$

[M3] $\frac{a}{b}.1=\frac{a}{b}$

[M4] $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$

onde $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ são racionais quaisquer, portanto, são válidas as mesmas propriedades formais vistas para os números inteiros. Além dessas, tem-se a seguinte:

[M5] $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = 1$.

Pode-se definir a operação de divisão, estabelecendo que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$ para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos, tal como:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \text{x} \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \text{x} \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \text{x} \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{d}$$

CAPÍTULO III: PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos o percurso metodológico utilizado na pesquisa, descrevendo os procedimentos de coleta e análise do material empírico, bem como explicitando o *lócus* da pesquisa, os sujeitos participantes que contribuíram para a interpretação do material empírico, de acordo com a compreensão teórica produzida sobre o objeto de pesquisa.

3.1 Delineamento da pesquisa

A pesquisa desenvolveu-se a partir de uma abordagem qualitativa, pois, de acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 31), este tipo de abordagem não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, e o conhecimento do pesquisador é parcial e limitado.

Para atingir o objetivo primordial da questão problema, foi necessário seguir os procedimentos metodológicos que auxiliaram na organização do trabalho. Gerhardt e Silveira (2009) explicam que os procedimentos possibilitam uma aproximação e um entendimento da realidade a investigar, como um processo permanente inacabado que ocorre através de aproximações sucessivas da realidade, fornecendo subsídios para uma intervenção no real. A princípio, foi realizado o levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos que permitiram conhecer melhor o que já se estudou sobre o assunto na área de linguagem matemática, tais como: artigos científicos, Teses e Dissertações.

Para ter uma melhor compreensão do conhecimento matemático dos professores que o ensinam, o instrumento de coleta de informação, como o questionário (Apêndice A), foi fundamental, pois houve a possibilidade de aqueles exporem como ensinam o conteúdo aos alunos, quais suas habilidades e estratégias em relação ao objeto matemático pesquisado. Além disso colaborou para se obter informações acerca da formação acadêmica e da experiência docente a fim de identificar também o perfil do professor que ensina matemática.

Para Fiorentini e Lorenzato (2012), o questionário é um dos instrumentos de coleta de informações mais tradicionais que exige do pesquisador conhecimento prévio sobre o tema e do nível de conhecimento da população pesquisada.

A partir da coleta de dados - bibliográfica, questionário - foi possível analisar com maior precisão o contexto da pesquisa, ressaltando-se que no questionário utilizamos a escala Likert[4]. Cunha et al (2011) explicam que este tipo de escala está baseado no princípio de que a atitude geral do entrevistado remete às crenças sobre o objeto a ser investigado, assim a questão é constituída por afirmações relacionadas com o objeto pesquisado, ou seja, são afirmações assertivas sobre o assunto. Os entrevistados não respondem apenas se concordam ou não com as afirmações, mas também informam qual o seu grau de concordância ou discordância sobre o assunto.

Segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 81), "a análise dos dados objetiva organizar os dados de forma que fique possível o fornecimento de respostas para o problema proposto". De acordo com o entendimento de Fiorentini e Lorenzato (2012), a análise das informações é a fase fundamental da pesquisa e dela depende a obtenção de resultados consistentes e de repostas convincentes às questões formuladas no início da investigação.

Para este trabalho, elegemos a análise dos escritos dos professores que ensinam matemática. Fiorentini e Lorenzato (2012) compreendem que a análise dos escritos dos professores deve ter por objetivo investigar seus conhecimentos profissionais, concepções etc.

Ante o exposto acerca dos procedimentos metodológicos da pesquisa desenvolvida, é importante frisar que os sujeitos envolvidos tiveram seus nomes preservados sob os princípios éticos de pesquisa e foram amparados pelo Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE - (Apêndice B).

De acordo com Souza et al. (2013), o TCLE é um documento de caráter explicativo, no qual são abordadas todas as questões relativas ao estudo clínico que possam estar relacionadas à decisão do sujeito da pesquisa e, assim, garantir sua participação voluntária. Para garantir sua participação voluntária, o sujeito da pesquisa não deverá ser pressionado ou coagido.

3.2 Lócus e sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola da rede pública do município de Belém, a qual atende alunos da educação infantil e dos anos finais do ensino fundamental. Os sujeitos da pesquisa foram professores efetivos da rede, dos quais cinco são

[4] É um tipo de escala de reposta psicométrica usada habitualmente em questionários.

atuantes em turmas dos anos iniciais. *A priori*, tive a oportunidade de conversar com estes professores acerca da pesquisa de dissertação, os quais foram unânimes em pontuar certa dificuldade ao ensinar o conteúdo de Frações. Além disso, após uma breve explanação sobre a temática, gostaram da proposta da pesquisa em analisar o referido conteúdo pela lente teórica da Linguagem Matemática.

No início da pesquisa, cinco professores do 4º e 5º anos se propuseram a participar respondendo ao questionário, no entanto, somente dois deles efetivamente contribuíram com material empírico para análise inicial. Acredito que o porquê da não participação dos demais professores seja a fragilidade em ser exposto a uma análise do seu conhecimento científico, até mesmo pela questão apresentada pelo grupo no que diz respeito à dificuldade em ensinar matemática.

O questionário possui duas seções de perguntas: no primeiro momento são perguntas fechadas para conhecer o perfil profissional do professor e sua afinidade com a Matemática; no segundo foram feitas perguntas abertas que possibilitaram ao professor descrever sua explicação de como aplicam as regras referentes ao objeto de pesquisa.

De acordo com o TCLE assinado pelos professores, seus nomes nesta pesquisa são confidenciais e, a partir deste momento, são identificados por nomes fictícios: João e Maria. Sendo assim, vejamos um breve resumo das respostas de cada professor participante no que concerne ao perfil profissional (Quadro 1) e, posteriormente, à experiência no ensino das frações (Quadro 2).

QUADRO 1: Perfil profissional dos professores

	Professor João	**Professora Maria**
Graduação	Pedagogia	Pedagogia
Especialização	Educação Especial e Inclusiva	-----
Tempo de Serviço (anos)	06	24
Turma em que atua (2019)	4º ano	5º ano

Fonte: Autoria própria (2019)

Os dois professores participantes são egressos de curso de graduação voltado para a educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. Em conversa informal, os docentes deram informações para além do questionário, assim temos que João possui experiência docente em outros municípios do estado, bem como em coordenação pedagógica. A professora Maria tem formação no curso de Magistério, além da graduação. Sua trajetória profissional perpassa como professora alfabetizadora e, recentemente, como educadora dos anos iniciais.

QUADRO 2: Experiência no ensino de Frações

	Prof. João	**Prof.ª Maria**
Gosta de ensinar este conteúdo	2	4
Conheço bem o conteúdo a desenvolver	3	3
Tenho dúvidas em relação ao conteúdo	3	5
Considero importante ensinar as regras das operações	5	5
A aplicação de regras é mecânica	1	5
Utilizo somente o livro didático nas aulas	1	1

Fonte: Autoria própria (2019)

As respostas dos professores deram-se a partir da escola Likert, a qual atribui uma pontuação de 1 a 5 para o grau de concordância ou discordância em relação ao tipo de afirmação realizada na parte I do questionário. Assim, temos a seguir o significado de cada pontuação:

QUADRO 3: Escala Likert

Grau de concordância ou discordância	**Pontuação**
Discorda totalmente	1
Discorda	2
Indeciso	3
Concorda	4
Concorda totalmente	5

Fonte: Adaptado (PALLA et al, 2004)

De acordo com os dados iniciais, no que tange à experiência dos professores no ensino de frações para os anos iniciais, percebe-se que, independentemente do tempo de experiências na docência com o público-alvo, algumas das afirmações respondidas ganham importante destaque, por exemplo: Tenho dúvidas em relação ao conteúdo. Posteriormente, veremos nas análises algumas dificuldades em relação às repostas dadas pelos professores quando aplicam as regras nas operações com frações. Estas dificuldades podem corroborar para um processo educativo com erros conceituais, uma vez que este conteúdo é basilar para outros contextos matemáticos.

Frente ao exposto, analisaremos a parte II do questionário, seguindo a filosofia da linguagem de Wittgenstein, sobre o conhecimento matemático dos professores acerca do objeto de estudo, objetivando responder à pergunta de pesquisa: Como os professores dão sentido às regras no ensino de frações?

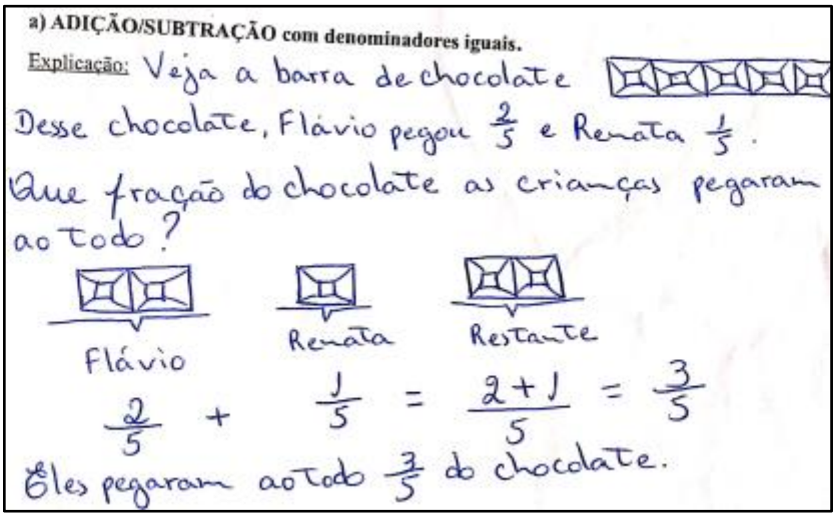
CAPÍTULO IV: ANÁLISE DO MATERIAL EMPÍRICO

Neste capítulo, temos a análise de acordo com o referencial eleito nesta pesquisa. Assim, a segunda parte do questionário deu-se a partir de perguntas abertas, momento em que os professores expuseram seu conhecimento sobre o conteúdo matemático abarcando as quatro operações com frações: adição/subtração com denominadores iguais; adição/subtração com denominadores diferentes; multiplicação e divisão de frações. Os professores descreveram suas explicações para cada operação com fração.

4.1 Adição/subtração com denominadores iguais

O professor João utilizou-se de um exemplo para explicar a regra matemática de forma intuitiva, usando elementos do cotidiano para dar sentido à regra.

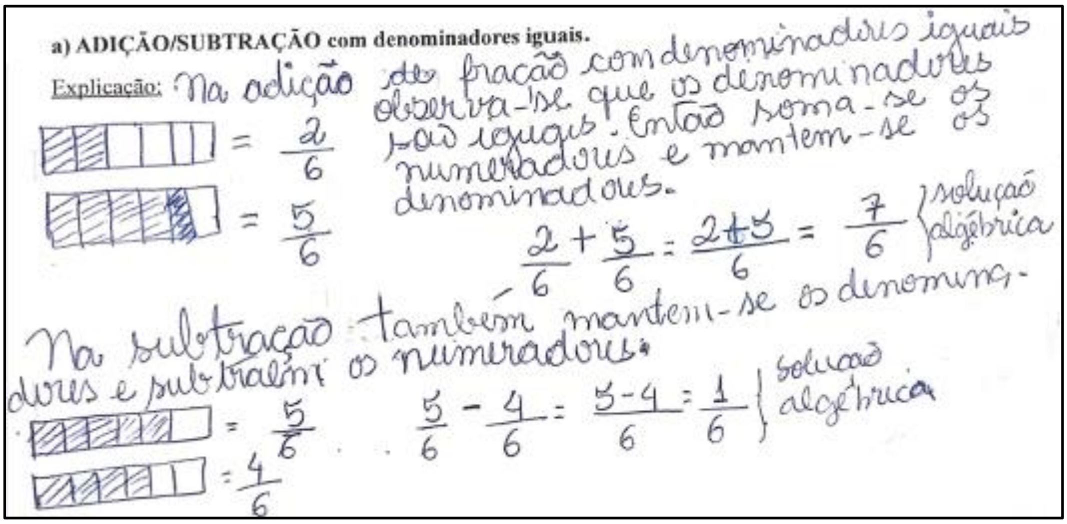
Figura 6 – Exemplo 1: Adição/subtração com denominadores iguais



Fonte: Professor João (2019)

A professora Maria descreveu o processo da regra matemática utilizando-se de uma representação geométrica para mostrar os termos da fração. No entanto, ao resolver o cálculo adição/subtração, não fez uso do recurso geométrico inicial a fim de que o aluno entendesse o que está sendo calculado

Figura 7 – Exemplo 2: Adição/subtração com denominadores iguais


a) ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO com denominadores iguais.

Explicação: Na adição de fração com denominadores iguais observa-se que os denominadores são iguais. Então soma-se os numeradores e mantem-se os denominadores.

$= \frac{2}{6}$

$= \frac{5}{6}$

$\frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2+5}{6} = \frac{7}{6}$ } solução algébrica

Na subtração também mantem-se os denominadores e subtraem os numeradores.

$= \frac{5}{6}$

$= \frac{4}{6}$

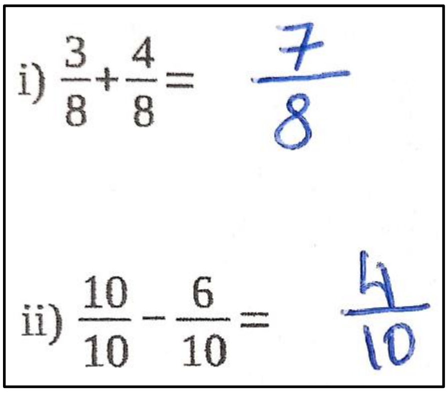
$\frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$ } solução algébrica

Fonte: Professora Maria (2019)

Em suma, os dois professores resolveram as questões propostas de maneira semelhante, conservando o denominador e adicionando/subtraindo o numerador, porém não explicaram o porquê da regra.

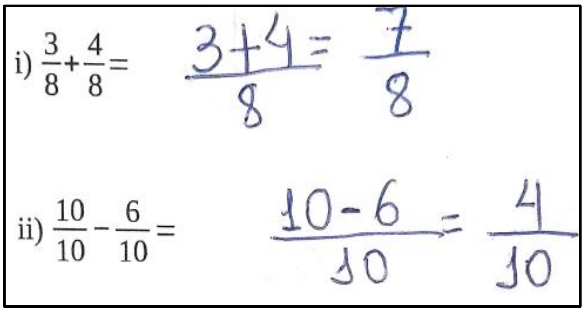
No entanto, é importante observar que o professor João recorreu a um exemplo empírico para tentar ensinar uma regra matemática, diante o exposto é imprescendível esclarecer que de acordo com a filosofia de Wittgenstein as proposições empíricas não determinam como seguir regras, mas, sim, as proposições matemáticas que indicam como agir em suas possíveis aplicações. Pois, é possível que o ensino de regras a partir de casos empíricos possa suscitar modificações da regra ao aplicá-la em outros contextos matemáticos. Já, a professora Maria mesmo de maneira superficial - ora denominando a resposta dos exemplos de “solução algébrica”, o que evidencia falta de conhecimento teórico – procurou evidenciar a regra operacional, e apresentou exemplos para dar sentido à regra escrita por ela.

Figura 8 – Exemplo 3: Adição/subtração com denominadores iguais



Fonte: Professor João (2019)

Figura 9 – Exemplo 4: Adição/Subtração com denominadores iguais

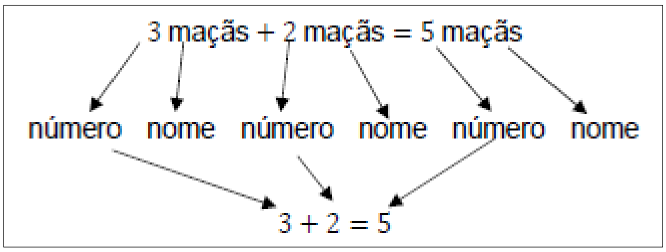


Fonte: Professora Maria (2019)

Na pesquisa de Silva et al. (2018), a partir da perspectiva da filosofia da linguagem de Wittgenstein, os autores sugerem que o professor explique que o numerador é o quantificador da fração e o denominador é quem identifica a fração. A exemplo, $\frac{2}{5}$, dois é o quantificador, tem uma função numérica, e o quinto é quem identifica a fração, logo tem a função de nome. Pois, por meio de análise linguística, pode-se dizer que, assim como as pessoas pertençam à família Azevedo, Bastos, Camões, os denominadores também pertencem à família dos meios, dos terços, dos quartos etc.

Desta forma, fazendo a analogia do enunciado:

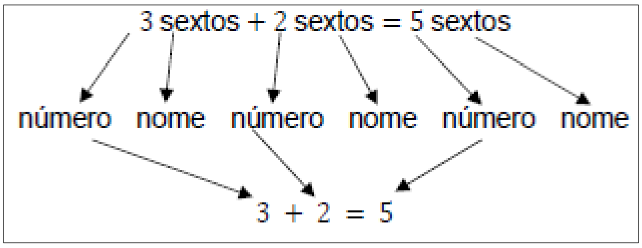
Figura 10 – Representação da operação de adição 1



Fonte: Silva et al. (2018)

Com o enunciado da soma de frações, excluindo-se os nomes e trabalhando somente com os números (3 + 2 = 5), pode-se dizer que a adição de $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$ pode ser escrita da forma:

Figura 11 – Representação da operação de adição 2

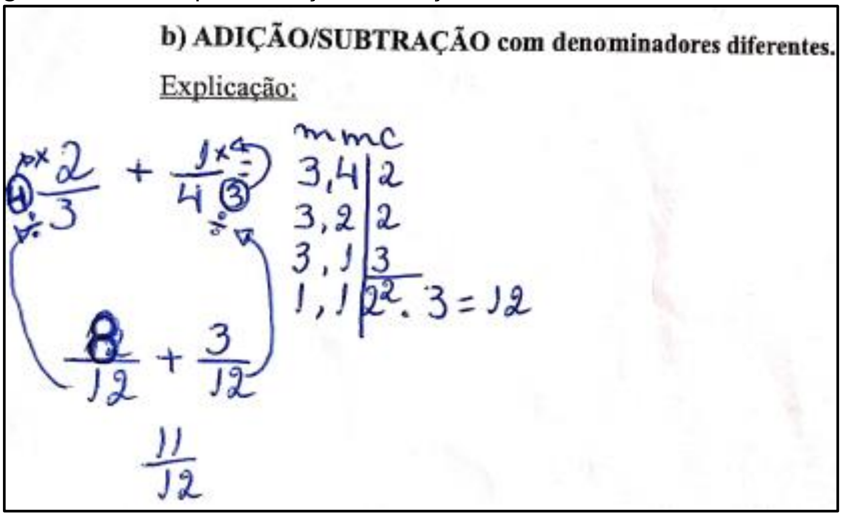


Fonte: Silva et al. (2018)

4.2 Adição/subtração com denominadores diferentes

O professor João usou o recurso de calcular, primeiramente o MMC (mínimo múltiplo comum), visando determinar o denominador comum para, em seguida, calcular fazendo uso da regra: de dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador da fração no intuito de encontrar a fração equivalente com o mesmo denominador. O professor resolveu as questões propostas usando a técnica de calcular primeiramente o MMC para, então, dar prosseguimento ao cálculo de frações.

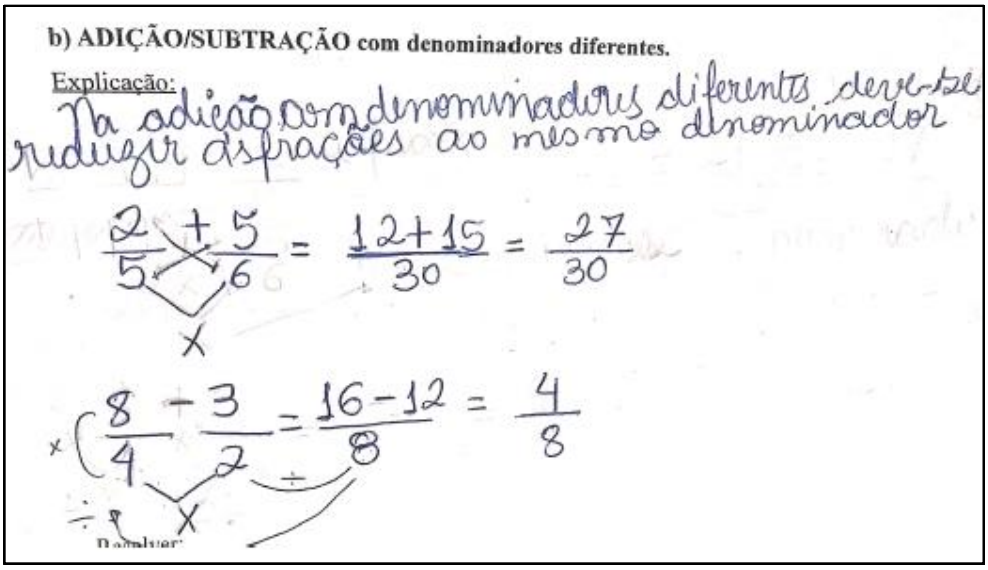
Figura 12 – Exemplo 1: Adição/subtração com denominadores diferentes



Fonte: Professor João (2019)

A professora Maria definiu que há a necessidade de “reduzir as frações ao mesmo denominador”. Porém, ao trabalhar a regra matemática, usou um artifício para solucionar o problema: primeiro multiplica-se entre si os denominadores; posteriormente, de forma “cruzada”, multiplica-se o denominador de uma fração com o numerador da outra fração; assim pode-se somar ou subtrair os denominadores e permanecer o denominador. A professora procedeu a resolução das questões propostas fazendo uso da mesma técnica de resolução do exemplo fornecido na explicação.

Figura 13 - Exemplo 2: Adição/subtração com denominadores diferentes

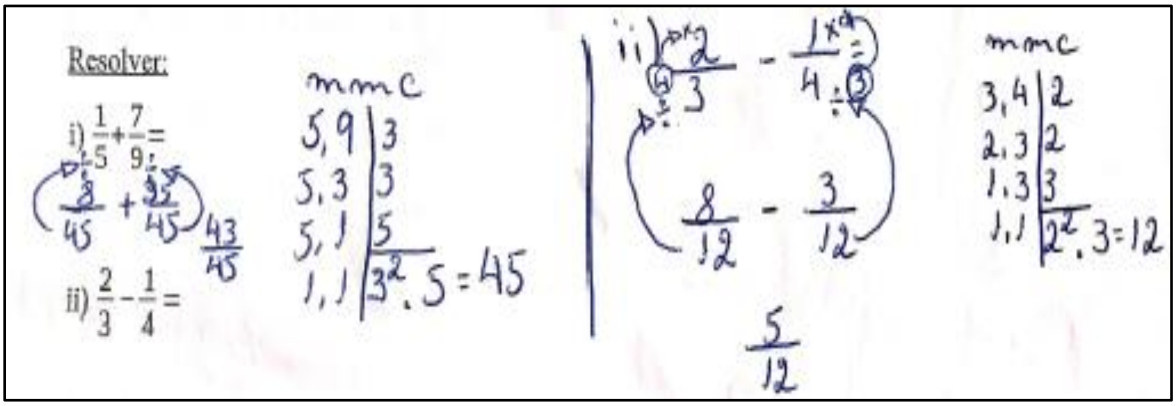


Fonte: Professora Maria (2019)

Ainda neste caso, os professores não explicaram o sentido da regra. É importante que, a cada passo da resolução, o professor possa dar sentido para o aluno entender a regra ora utilizada. Silveira (2015a) explicita que a regra terá sentido se ela for interpretada conforme as exigências conceituais da matemática e, para que isso ocorra, é necessário que o professor e o aluno entrem no mesmo universo discursivo.

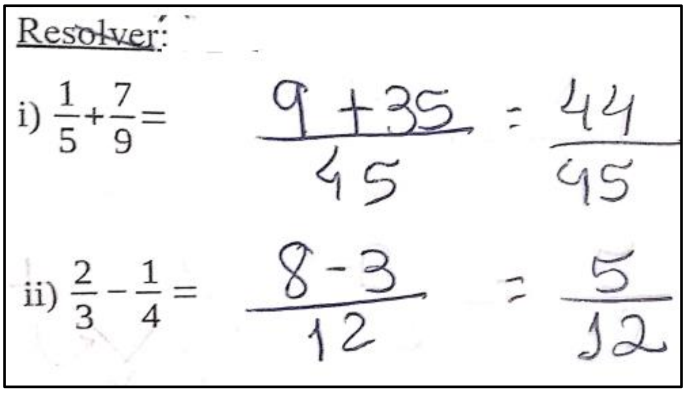
Assim, cada professor resolve a atividade proposta seguindo a regra estabelecida:

Figura 14 – Exemplo 3: Adição/subtração com denominadores diferentes



Fonte: Professor João (2019)

Figura 15 – Exemplo 4: Adição/subtração com denominadores diferentes



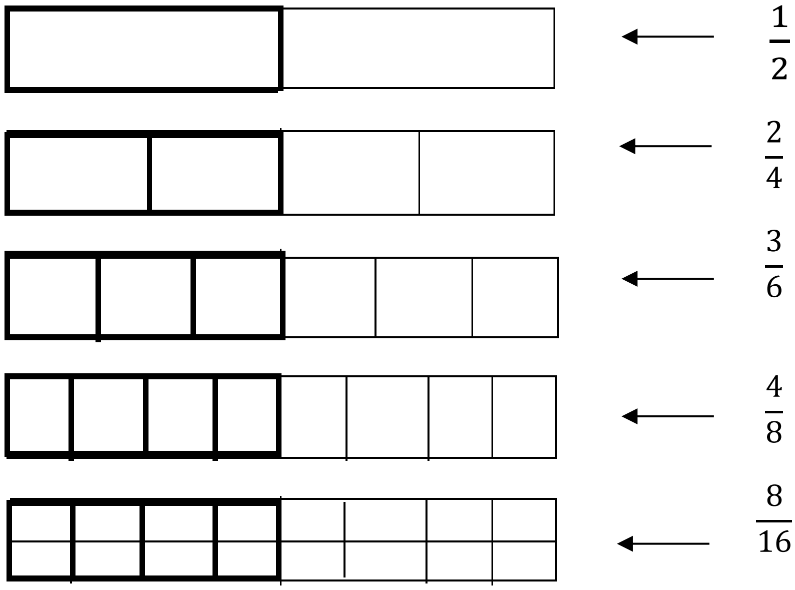
Fonte: Professora Maria (2019)

Bacquet ressalta que:

> Se resolvermos muitos exercícios parecidos com os alunos, alguns acabarão por dar as "boas" respostas, mas esse adestramento não funcionará. É por esta razão que me parece preferível insistir sobre a extensão e a importância do que se deve ser trabalhado sobre frações: compará-las entre elas, verificar se elas têm o mesmo numerador ou mesmo denominador ou nem um nem outro, achar aquelas que são inferiores (ou superiores) a 1, ordená-las, achar frações iguais, etc. (BACQUET, 2001, p. 99).

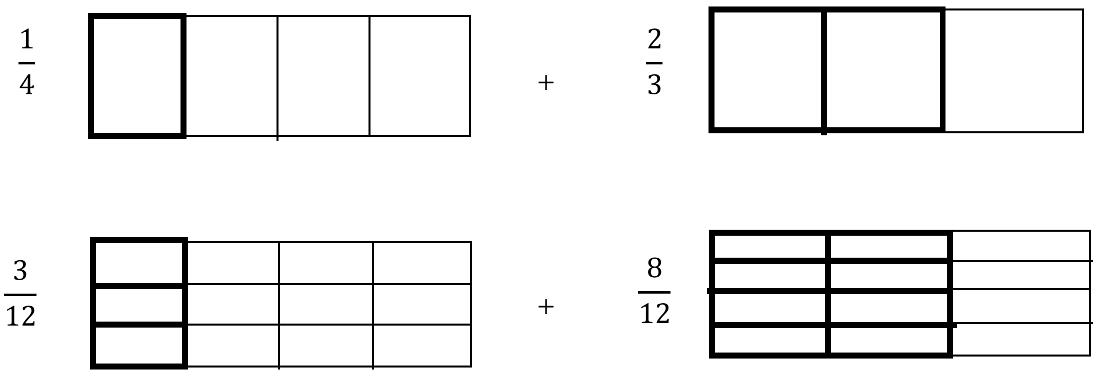
A educadora francesa ressalta que o adestramento é a forma mecânica de resolver adição/subtração de frações com mesmo denominador, sem levar o aluno a entender o porquê da regra. Portanto, indica que é possível explicar por meio de "frações iguais", o que denominamos por equivalência de frações. Esclarecemos que o conceito de adestramento utilizado por Bacquet é diferente do conceito trabalhado por Wittgenstein, pois, nesta fase, o aluno já possui conhecimentos, ou deveria, acerca de frações que antecedem para adentrar às operações, logo já tem condições de perguntar por que se resolve desta ou daquela maneira.

Desta maneira, vamos explicitar o uso de frações equivalentes na tentativa de explicar a regra, que, por ora, pode ser explorado em sala de aula tal como:



Verificamos que as frações representam a mesma quantidade, logo temos que $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8},\frac{8}{16}$ são frações equivalentes. Logo, o professor não precisa trabalhar com o algoritmo do MMC, num primeiro momento, para explicar a regra de adição/subtração com denominadores diferentes.

Já para a situação apresentada pela professora Maria, vejamos que pode ser resolvida da seguinte forma:



Logo,

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$$

A partir da explanação acima, é importante que o professor faça outros exercícios semelhantes no intuito de o aluno compreender a regra que está sendo utilizada. Como afirma Silveira (2015a), é no uso que a regra adquire sentido; assim, quando o aluno tiver o domínio da técnica, não precisará mais do auxílio da representação geométrica para resolver exercícios similares, sobretudo em outros contextos matemáticos, tal como resolver equação algébrica, onde o resultado seja uma soma de frações com denominadores diferentes. Contudo, ela não apresenta uma justificativa para o uso da regra de maneira que o aluno não consegue interpretar a regra, tampouco a compreenderá. A regra usada fundamenta-se também no conceito de frações equivalentes e podemos justificá-la algebricamente, por exemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\text{x}\mathbf{d}}{b\text{x}\mathbf{d}}+\frac{c\text{x}\mathbf{b}}{d\text{x}\mathbf{b}}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

De maneira análoga, damos a justificativa para os exemplos usados na explicação para soma e subtração, respectivamente:

i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{6}=\frac{2\text{x}6}{5\text{x}6}+\frac{5\text{x}5}{6\text{x}5}=\frac{12}{30}+\frac{25}{30}=\frac{37}{30}$

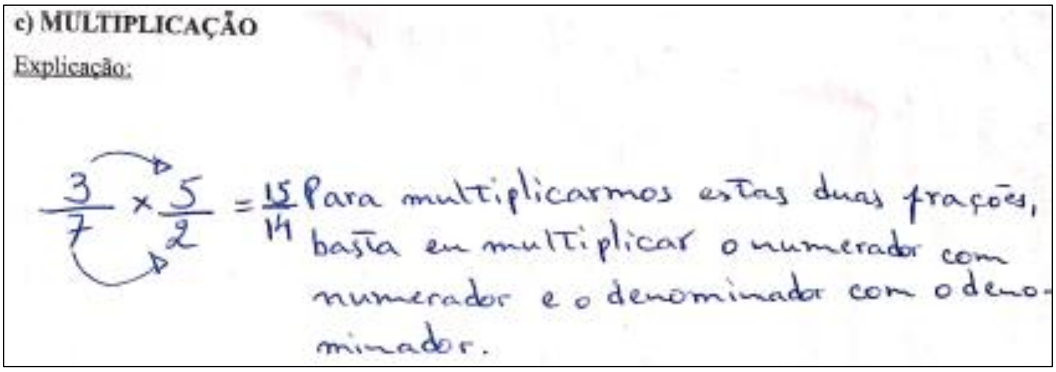
ii) $\frac{8}{4}-\frac{3}{2}=\frac{8\text{x}2}{4\text{x}2}-\frac{3\text{x}4}{2\text{x}4}=\frac{16}{8}-\frac{12}{8}=\frac{4}{8}$

Ressaltamos que o uso da regra na matemática deve ser ensinado com cautela, para que o processo de aplicação desta não seja classificado como mecânico, memorizado, como afirma a pesquisa de Machado (2007) quando propõe uma reconfiguração no ensino de operação de adição com fração com o intuito de o aluno não ficar escravo de regras memorizadas sem sentido para ele. Para Meira (2012), os alunos aplicam as regras dos algoritmos e processos de resolução sem se darem conta de que não compreenderão, porém, isso não significa que a compreensão seja algo mecânico. Nesse aspecto, Wittgenstein enfatiza que “a compreensão é efetuada pela explicação, mas também pelo exercício” (Z, § 186).

4.3 Multiplicação

Nessa operação, ambos os professores usaram a regra clássica facilmente encontrada em livros didáticos: “multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador”.

Figura 16 – Exemplo 1: Multiplicação

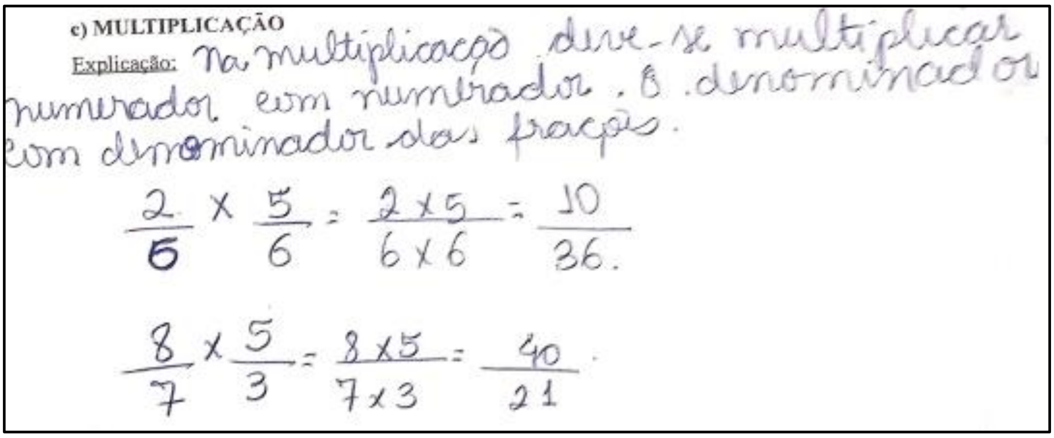

c) MULTIPLICAÇÃO

Explicação:

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$ Para multiplicarmos estas duas frações, basta eu multiplicar o numerador com numerador e o denominador com o denominador.

Fonte: Professor João (2019)

Figura 17 – Exemplo 2: Multiplicação


c) MULTIPLICAÇÃO

Explicação: Na multiplicação deve-se multiplicar numerador com numerador. O denominador com denominador das frações.

$\frac{2}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{6 \times 6} = \frac{10}{36}.$

$\frac{8}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{8 \times 5}{7 \times 3} = \frac{40}{21}.$

Fonte: Professora Maria (2019)

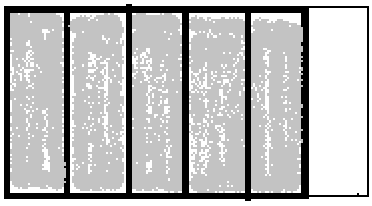
Ainda neste tópico os professores não explicaram de forma detalhada porque multiplicam-se os numeradores e denominadores, embora tenham aplicado corretamente a regra. Os professores usam como base, muitas vezes, o livro didático e de lá copiam as regras para ensinar aos alunos, mesmo não sabendo explicá-las. Para Wittgenstein, quando o indivíduo é ensinado por alguém ou este observa a ação de outrém na medida que há um costume, um hábito, o indivíduo segue a regra cegamente: “fui treinado para reagir de uma determinada maneira a este signo e agora reajo assim” (IF, § 198).

Vejamos no esquema a seguir, a interpretação da regra, a partir do exemplo dado pela professora Maria em $\frac{2}{6}\text{x}\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$.

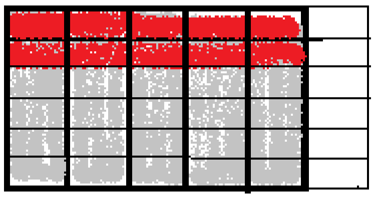
Observe que a multiplicação $\frac{2}{6}\text{x}\frac{5}{6}$ significa $\frac{2}{6}$ de $\frac{5}{6}$.

Então, considere o retângulo como um número inteiro:

Hachuramos de cinza $\frac{5}{6}$ do inteiro.



Agora hachuramos de vermelho $\frac{2}{6}$ destes $\frac{5}{6}$.

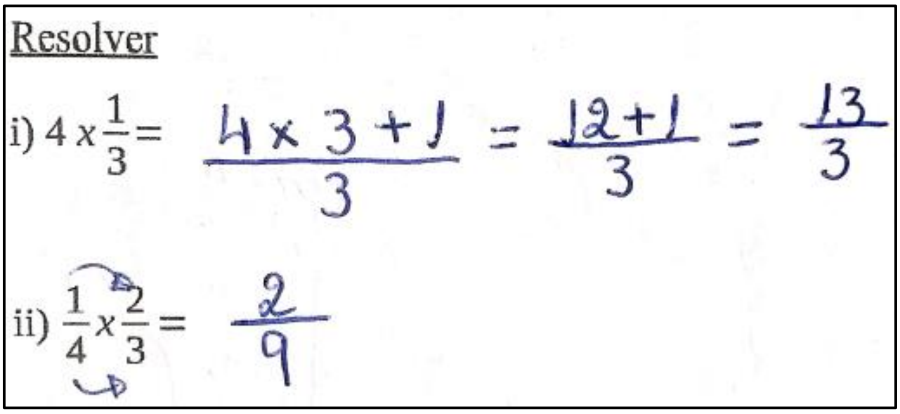


Logo, o retângulo (inteiro) agora está dividido em trinta e seis partes iguais e a multiplicação $\frac{2}{6} \text{x} \frac{5}{6}$ representa $\frac{10}{36}$.

Vale lembrar que, na multiplicação com números inteiros, a multiplicação perfaz um resultado maior que cada um dos fatores, 2 x 3 = 6. Porém, na multiplicação de frações próprias, como no exemplo acima, o mesmo não ocorre: $\frac{2}{6} \text{x} \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$. Assim, ao multiplicarmos as frações, estamos dividindo o inteiro por seis e novamente dividimos cada uma dessas partes por seis, ficando com um resultado menor do que cada fator.

Embora os professores tenham se utilizado do método clássico para explicar a regra da multiplicação de fração, o que nos chamou atenção foi no momento da aplicação da regra nos dois exercícios propostos: no primeiro temos um número inteiro multiplicando uma fração e no segundo temos multiplicação de fração por fração.

Figura 18 – Exemplo 3: Multiplicação



Resolver

i) $4\,x\frac{1}{3} = \frac{4 \times 3 + 1}{3} = \frac{12+1}{3} = \frac{13}{3}$

ii) $\frac{1}{4}x\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Fonte: Professor João (2019)

O professor João resolveu a segunda multiplicação utilizando o conceito de fração mista como $4\frac{1}{3}$, o que percebemos, de acordo com Wittgenstein, é que uma regra que foi aprendida num contexto, por exemplo: $\frac{2}{5}\text{x}\frac{3}{4}$, pode também ser aplicada em outro contexto, como este do exercício proposto.

Outro conceito da filosofia de Wittgenstein que nos dá direcionamento é que o professor não conseguiu perceber que $4\text{x}\frac{1}{3}$ é o mesmo que $\frac{4}{1}\text{x}\frac{1}{3}$ e que é preciso, neste contexto, *ver* 4 *como* $\frac{4}{1}$, ou seja, ter habilidade para ver um número inteiro como uma fração.

Ainda neste exemplo, o professor pode propor a soma de parcelas iguais, assim: $4\text{x}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Sarrazy (1997 *apud* SILVEIRA, 2015a) ressalta que as regras matemáticas não se atualizam independentemente dos contextos de resolução, porque, em cada contexto, a regra é diferente, na perspectiva do *aluno*. Esta pesquisa versa na perspectiva do *professor*, este que deve ensinar ao aluno o sentido da regra, que deve orientar o aluno a “enxergar” que a mesma regra pode ser utilizada em contextos diferentes.

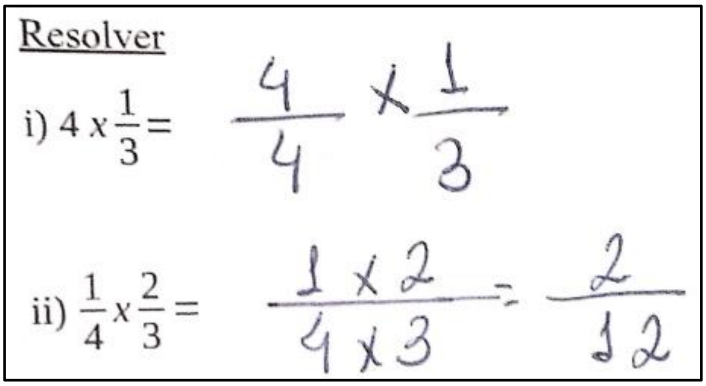
Em consonância ao exposto, uma pesquisa feita em São Paulo por Rosseti (1998) revelou que não só os alunos apresentam dificuldades em Matemática, mas também os erros cometidos são os mesmos de seus professores:

> Professores de 1ª a 4ª séries, de escolas públicas de São Paulo, acertaram, menos questões de multiplicação e divisão do que alunos de 5ª série de

> escola particular, em uma pesquisa piloto realizada a partir de duas teses de mestrado. [...] Sandra Magina, professora do Mestrado em Matemática da PUC, diz: O que ficou claro é que onde os professores erram, os alunos também erram (ROSSETI, 1998, p. 2).

Assim como o professor João, a professora Maria também teve equívocos na aplicação da regra no primeiro item de multiplicação com frações, como podemos ver abaixo:

Figura 19 – Exemplo 4: Multiplicação



Fonte: Professora Maria (2019)

Nesta situação, a professora apresenta dificuldades em analisar o contexto matemático para poder aplicar a regra corretamente e não percebe que, ao estar no contexto das operações com frações, precisa *ver* 4 *como* $\frac{4}{1}$, no entanto, ela segue a regra na multiplicação ao usar a ideia de número inteiro $\frac{4}{4}$. Neste episódio, além do conceito de *ver-como*, a professora é cega para o *aspecto*, de acordo com a filosofia de Wittgenstein.

Chauviré (2003 apud Silveira, 2015b) afirma que nossa cegueira para as coisas ordinárias é fruto de podermos ver apenas aquilo que nos aparece aos olhos, como também é difícil descrevermos a periferia de nosso campo visual. Para reeducar o olhar, é preciso que nos apropriemos de jogos de linguagem que expliquem melhor as coisas vistas.

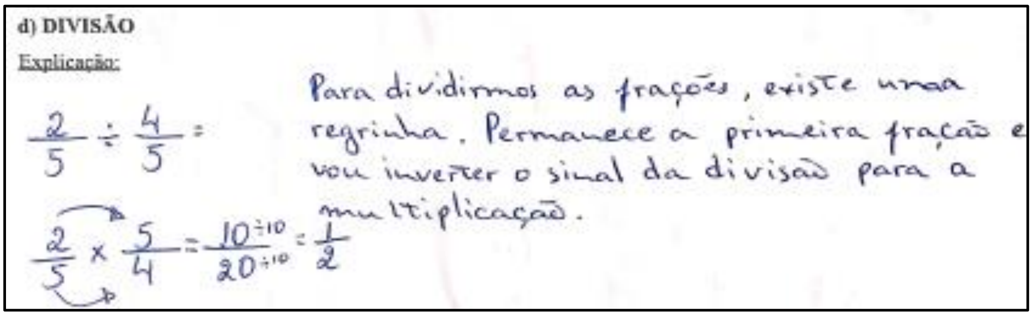
Para exemplificar, voltemos ao exemplo da soma de frações com denominadores diferentes, no qual a professora Maria, no cálculo de $\frac{2}{5} \mathrm{x} \frac{5}{6}$, não compreendeu que, ao fazer a operação $\frac{2}{5} + \frac{5}{6} = \frac{12+25}{30} = \frac{37}{30}$, ela encontrou frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{6}$ com denominador comum para, assim, somar as frações. Logo, concluímos que há a cegueira para o sentido desta operação, isto é, há a cegueira para o *aspecto*.

Para Silveira (2017), na sala de aula, a cegueira visual é diagnosticada ao aluno que não consegue ver aquilo que é ensinado, não percebe um aspecto do objeto que é salientado pelo professor. O aluno cego para determinados aspectos precisa treinar sua visão para que consiga ver aquilo que está diante dos olhos. Todavia, este treino deve ser orientado por seu professor.

A autora ressalta que o professor precisa treinar o aluno a ver os *aspectos* diante das transformações matemáticas, como a transformação de fração mista para fração imprópria.

4.4 Divisão

Figura 20 – Exemplo 1: Divisão



d) DIVISÃO

Explicação:

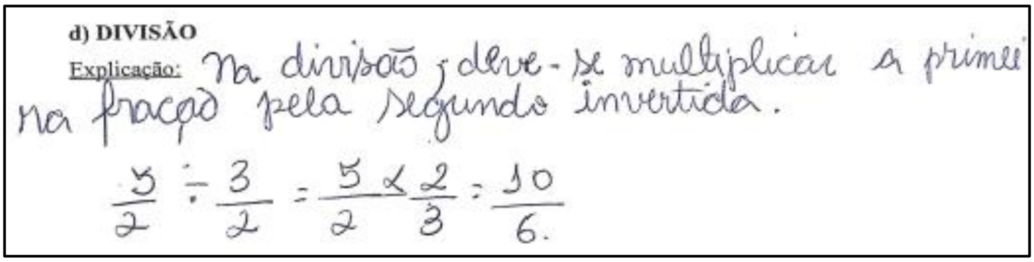
Para dividirmos as frações, existe uma regrinha. Permanece a primeira fração e vou inverter o sinal da divisão para a multiplicação.

$\frac{2}{5} \div \frac{4}{5} =$

$\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10^{\div 10}}{20^{\div 10}} = \frac{1}{2}$

Fonte: Professor João (2019)

Figura 21 – Exemplo 2: Divisão



d) DIVISÃO

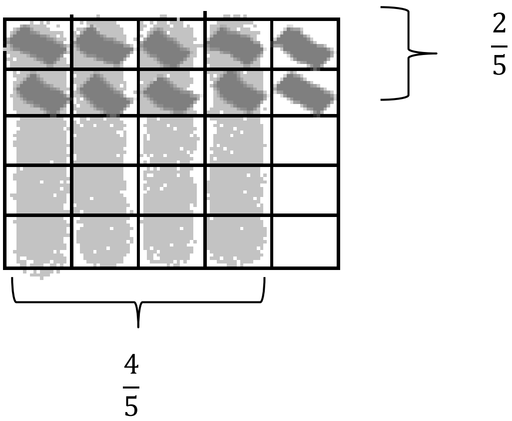
Explicação: Na divisão, deve-se multiplicar a primei na fração pela segundo invertida.

$\frac{5}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{6}.$

Fonte: Professora Maria (2019)

De forma semelhante à operação com multiplicação, os docentes, nesta operação, apenas seguiram cegamente a regra da divisão com fração. De acordo com Silveira (2015a), o processo de aplicação de regras não é mecânico, pois é preciso interpretar. É no uso que adquire sentido. Sendo assim, vamos interpretar o exemplo dado pelo professor João: $\frac{2}{5}:\frac{4}{5}$.

Façamos uso da pergunta “Quantas vezes $\frac{4}{5}$ cabe em $\frac{2}{5}$ da unidade?” e da representação de figuras planas.



Temos que $\frac{4}{5}$ da unidade é representado por 20 quadrados, e $\frac{2}{5}$ da unidade é representado por 10 quadrados.

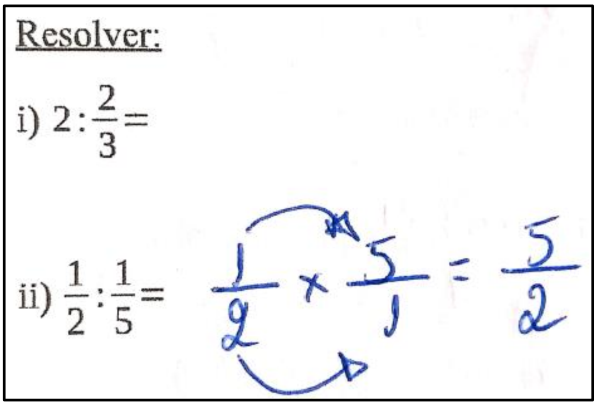
Então, é necessário verificar quantas vezes $\frac{4}{5}$ cabe em $\frac{2}{5}$. Podemos observar na figura que $\frac{4}{5}$ cabe em apenas 10 dos 20 quadrados, ou seja, cabe apenas $\frac{1}{2}$ do total. Então, $\frac{2}{5}:\frac{4}{5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

Logo, é importante o professor mostrar ao aluno a justificativa da regra clássica da divisão, visto que, segundo Silveira (2015a), o algoritmo precisa ser demonstrado para que o aluno perceba o caminho de sua abreviação, já que a demonstração de um cálculo é uma técnica que mostra como se procede de acordo com a regra. Já para Wittgenstein, é através da demonstração do cálculo que o professor mostra ao aluno que ele sabe como ensinar, pois, se disser “eu sei” em matemática, o argumento será uma justificativa, tal como:

$$\frac{2}{5}:\frac{4}{5}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{2}{5}\mathrm{x}\frac{5}{4}}{\frac{4}{5}\mathrm{x}\frac{5}{4}}=\frac{\frac{2}{5}\mathrm{x}\frac{5}{4}}{1}=\frac{2}{5}\mathrm{x}\frac{5}{4}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

No item para resolver as divisões, o professor João não resolveu o primeiro, tendo a mesma dificuldade de representar o número inteiro em forma de fração, o que ocorreu na multiplicação, tendo resolvido somente o segundo seguindo a regra estabelecida.

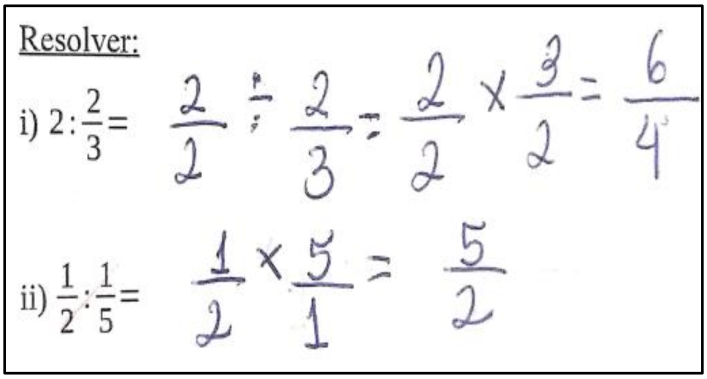
Figura 22 – Exemplo 3: Divisão



Fonte: Professor João (2019)

A professora Maria equivocou-se ao resolver o primeiro item da divisão, o mesmo que aconteceu com o professor João na multiplicação. Ela não conseguiu ver 2 como $\frac{2}{1}$. Percebemos, também, que a professora é cega para o *aspecto*, ou seja, depende de uma aprendizagem de habilidades para ver um objeto matemático.

Figura 23 – Exemplo 4: Divisão



Fonte: Professora Maria (2019)

Para Silveira (2015a), o processo de seguir a regra é imprevisto e depende do contexto, assim, no processo de aplicação da regra, o aluno se depara com contextos diferentes e a regra que deveria ser a mesma passa por transformações e é modificada. A regra segue procedimentos que apresentam sentido, porém o aluno mecaniza o procedimento sem dar o devido sentido. Isso acontece porque ele fixa seu reconhecimento da regra num contexto determinado.

A educadora matemática destaca em sua fala que o aluno é o protagonista em transgredir ou modificar a regra de acordo com o contexto matemático que ele esteja estudando. No entanto, nosso sujeito de investigação são professores, e são estes que apresentam dúvidas e cometem alguns equívocos na aplicação de regras. O filósofo ressalta que não se ensina por meio de dúvidas, e sim, a partir de certezas.

Diante do exposto através do questionário, percebemos que o ensino de regras nas operações com frações pelos professores participantes da pesquisa possuem algumas características importantes no que tange ao uso de regras, em que o objetivo é ensinar o algoritmo dessas operações com sentido aos alunos. Contudo, os excertos mostraram que os professores têm dúvidas, bem como cometem erros na resolução de operações com frações, a *priori*, pois reconheceram tal dificuldade e pudemos constatar o mesmo durante a análise do material empírico.

Se o ensino é baseado a partir de erros conceituais, equívocos na aplicação de regras, dificuldades de *ver* um objeto matemático *como* algo diferente, pesquisas no âmbito da educação matemática continuarão a afirmar que o uso de regras é feito de forma mecanizada e sem sentido para o aluno. Destarte, para Silveira (2015a), saber seguir uma regra é uma capacidade técnica, porém a regra não é mecânica, porque ela não contém todos os casos de sua aplicação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve como objetivo *Discutir como os professores ensinam e aplicam as regras matemáticas no conceito de frações*, bem como direcionar caminhos a fim de responder a questão-problema *Como os professores dão sentido às regras no ensino de frações?* A proposta buscou, através do questionário aplicado aos professores que ensinam matemática nos anos iniciais, identificar o conhecimento matemático em relação ao objetivo de estudo que versa sobre as regras das operações com frações, uma vez que as pesquisas em educação matemática apontam que o uso de regras torna o aluno refém de regras memorizadas, mecanizadas. Conforme Meira (2012), aplicar regras mecanicamente não significa que a compreensão é algo mecânico, pois, quando não temos dúvidas quanto ao seguimento de regras, isso ocorre em virtude do treino, da prática. Ademais, buscou-se mostrar que os conceitos wittgensteinianos podem favorecer (ou contribuir) no ensino de matemática.

Diante desse cenário, o referencial em Wittgenstein (1996) mostra caminhos concernentes ao sentido de uma regra, haja vista ser no uso que ela adquire sentido, o que constitui a regra é a prática constante. Assim como outros autores, a exemplo de Silveira (2015), o processo de aplicação da regra não é mecânica, é preciso a interpretação. O aluno interpreta a regra e projeta sentido durante a sua aplicação e compreende. Para Machado (1990) afirma que na aprendizagem de qualquer assunto, é necessária uma abordagem inicial no âmbito da técnica operatória. As regras precisam ser bem conhecidas antes de se poder pensar em agir ou jogar.

Após a leitura do referencial teórico e com as análises do material empírico, observamos que os professores participantes da pesquisa apresentaram erros na aplicação da regras com frações, não sabendo interpretá-las, sobretudo apresentando erros conceituais, tais como: resolver uma multiplicação de um número inteiro por uma fração e usar o conceito de número misto; resolver adição/subtração com denominadores diferentes por um artifício e não concebidos por conceitos de frações equivalentes, tampouco sabiam justificar tal técnica.

A pesquisa evidenciou que os professores têm dúvidas e apresentam falhas ao explicar o conteúdo matemático proposto, inicialmente identificadas nas respostas do questionário, em seguida durante as análises do material empírico. De acordo com Wittgenstein, “o professor não pode ensinar por meio da dúvida, e sim, partir de certezas", o que pode corroborar para pesquisas no âmbito da educação matemática. Apesar desta constatação, os professores continuam a afirmar que o ensino pautado no uso de regras é feito de forma mecanizada e sem sentido para o aluno. Nessa perspectiva, a pesquisa mostra que o ensino de matemática nos anos iniciais ainda continua com problemas, o que pode acarretar déficits no decorrer da Educação Básica. A intenção da pesquisa não foi trabalhar com o "Currículo e a Formação de Professores". Preocupamo-nos com o relativo à aprendizagem desses alunos ao longo do tempo, visto que um dos professores pesquisados possui 24 anos de magistério e apresenta erros conceituais essenciais ao ensino das operações com frações.

Ressaltamos que a pesquisa trouxe mais uma possibilidade, por meio dos conceitos wittgensteinianos, ao professor da educação básica para ensinar as operações com frações, na tentativa de amenizar as dificuldades no processo educativo junto aos alunos, sobretudo se o professor estabelecer um jogo de linguagem com o aluno para que a regra seja compreendida.

Silveira (2015a) ressalta que os jogos de linguagem apresentam semelhanças entre jogos e linguagem, assim como o cálculo ressalta as semelhanças existentes entre linguagem e sistemas formais. É por esse motivo que existe semelhança entre o cálculo, a gramática e os jogos de linguagem, justamente porque seguem regras. O sentido das palavras utilizadas em tais regras está no uso e também na maneira como esse uso se entrelaça com o cotidiano da sala de aula, pois estão presentes: o professor, o aluno e a matemática.

Para tanto, como sugestão para continuação da pesquisa, seria importante investigar como os licenciandos em cursos de formação de professores - para os anos iniciais do ensino fundamental - estão sendo formados para ensinar matemática, se as regras matemáticas são ensinadas a partir das exigências conceituais da matemática ou de elementos extra matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACQUET, M. **Matemática sem dificuldades:** ou como evitar que ela seja odiada por seu aluno. Trad. Maria Elizabeth Schneider. Porto Alegre: ARTMED Editora, 2001.

BALDIN, Y. Y.; MALAGUTTI, P. L. A. **Ensino de números racionais no ensino fundamental**. São Carlos: LIMC, 2006. 199p.

BALDIN, Y. Y. **Texto explicativo sobre a chamada Matemática de Singapura**. 2013.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. 2017.

BROLEZZI, A. C. A. Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática. 1996. 96p. **Tese** (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

COSTA, C. F. **Wittgenstein e a Gramática do Significado**. Natal: Servgráfica, 2005.

COSTA, Sandro Henrique Barbosa da. O ensino das frações no ensino fundamental e seu reflexo no ensino médio. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/UNIFAP). Macapá, 2014.

CUNHA, M. B.; RITTER, O. M. S; GIORDAN, M.; AZEVEDO, P. R.; DUNCKE, A. C. P; BERTOLDO, R. R. **Uma metodologia para avaliar as percepções de ciência e tecnologia dos estudantes**. In: VII ENPEC e I CIEC, 2011, Campinas

DALL'AGNOL, Darlei. **Sobre a conexão entre regras e ações:** Uma análise do § 198 das Investigações Filosóficas de Wittgenstein. In: DI NAPOLI, R.; ROSSATO, N; FABRI, M. (Org) Ética & Justiça. Santa Maria: Palloti/CNPq, 2003, v. 1, p. 41-52.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização Matemática:** as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, Passo Fundo: Ediupf, 1998.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigações em Educação Matemática**: Percursos Teóricos e Metodológicos. 3 ed. Rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

GADOTTI, Moacir. **Concepções Dialéticas da Educação:** Um estudo de pesquisa. Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIMENEZ, J.; BAIRRAL, M. Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdicas. **Seropédica:** GEPEM/EDUR, 2005, v. 2, p. 130 (Série Pensamento em Ação)
GLOCK, H. **Dicionário Wittgenstein**. Trad. Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOIS, Renata Cláudia. O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do ensino fundamental. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlo, 2014.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. **Aquisição da Linguagem Matemática:** símbolo e significado. In: Teberosky, A; Tolchinsky, L. (Org) Além da alfabetização fonológica, textual e material. Trad. Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1996.

GONÇALVES, Carolina Fragoso. Adestrar para a autonomia: a crítica wittgensteiniana ao construtivismo. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense. Programa de Pós-Graduação em Cognição e Linguagem, Campos dos Goytacazes (RJ), 2013.

GOTTSCHALK, Cristiane M. C. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido; MONTENEGRO, Maria Aparecida; PEQUENO, Tarcísio (Org) **Colóquio Wittgenstein**. Fortaleza: Edições UFC, 2006, p. 73-93.

GOTTSCHALK, Cristiane M. C. Três concepções de significado na matemática: Bloor, Granger e Wittgenstein. In: MORENO, Arley R (Org) Wittgenstein: aspectos paradigmáticos. **Coleção CLE**. Campinas, v. 49, p. 95-133, 2007.

GOTTSCHALK, Cristiane M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência**: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HEBECHE, Luiz. **A FILOSOFIA** sub specie grammaticae. Florianópolis: Editora UFSC, 2016.

HINTIKKA, J.; HINTIKKA, M. **Uma investigação sobre Wittgenstein**. Trad. Enid Abreu Dobranszky. Campinas: Papirus, 1994.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos e Funções. São Paulo: Atual Editora. 3ª ed., 1977.

JESUS, Amanda Botega Masson de. Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.

KRIPPKE, S. A. **Wittgenstein on Rules and Private Language**. Basil Blackwell Publisher, 1982.

LACERDA, Alan Gonçalves. A Interpretação e a comunicação das regras matemáticas na resolução de problemas de divisão por alunos da 5ª série do ensino fundamental**. Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2010.

LEÃO, G. M. **Dicionário ilustrado de matemático.** (S.I.): INL, 1972.
LIMA, Iranete. **O ensino de matemática e os livros didáticos para os anos iniciais do ensino fundamental em escolas do campo**. Livro Didático e Educação do Campo. Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, 2014, p. 161-175.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

LUNA, José Marcos Gomes de. Sentido e jogos de linguagem nas investigações filosóficas. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Filosofia, 2009.

MACHADO, C. T. O. Concepções epistemológicas e experiências de professores de matemática sobre números fracionários: As implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. Recife, 2007.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

MEIRA, Janeisi de Lima. Labirintos da compreensão de regras em matemática: um estudo a partir da regra de três. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

MORIEL JÚNIOR, Jeferson Gomes. Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações. **Tese** (Doutorado) – Universidade Federal de Mato Grosso. Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Cuiabá, 2014.

OLIVEIRA, Marcelo de Sousa; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Entre o empírico e o transcendental: gestos ostensivos wittgensteinianos no ensino da matemática. **Boletim Online de Educação Matemática**, v. 5, n. 8, p. 93-110, jan./jul, 2017.

PALLA, Ana Claudia; MAUERBERG-DECASTRO, E. Atitudes de professores e estudante de Educação Física em relação ao ensino de alunos com deficiência em ambientes inclusivos. **Revista da Sobama**, v. 9, n. 1, p. 25-34, 2004

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação. **Documento Curricular para Educação Infantil e Ensino Fundamental do Estado do Pará**, 2018.

ROSSETI, F**. Professor de matemática não aprendeu e ensinar**. Folha de São Paulo, São Paulo, 1998.

SILVA, João Esteves da. **Cinco Ensaios sobre Wittgenstein**. Lisboa: Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, 2010.

SILVA, Paulo Vilhena da. O aprendizado de regras matemáticas: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo de divisão**. Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2011.

SILVA, Carlos E. S; MELO, Luciano A. S; BARATA, Rouziclayde C. **O ensino da adição de frações na perspectiva da linguagem**. In: II Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática. Rio de Janeiro, 2018.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática. **Tese** (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Porto Alegre, 2005.

SILVEIRA, M. R. A. **Interpretação e Comunicação em Matemática**. In: 2 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife (PE), 2008.

SILVEIRA, M.R.A. **Linguagem Matemática e Linguagem Natural**: Interpretação de regras e de símbolos. In: VI Congresso Ibero-americano de Educación Matemática. Puerto Montt-Chile, 2009.

SILVEIRA, M. R. A.; MEIRA, J. L.; SILVA, P. V. Os dicionários de Wittgenstein e de Baruk: o significado linguístico no ensino e no aprendizado da matemática. **Educação** (Porto Alegre, impresso), v. 37, n. 3, p. 390-399, set-dez, 2014.

SILVEIRA, M. R. A. Interpretação de Textos na Aprendizagem da Matemática. In: FLORES, C.R.; CASSIANI, S. (Org). **Tendências Contemporâneas nas Pesquisas em Educação Matemática e Científica:** sobre linguagens e práticas culturais. 1ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2014, p. 131-154.

SILVEIRA, M. R. A. **Matemática, discurso e linguagens**: contribuições para a educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015a.

SILVEIRA, M.R.A. Tradução e interpretação de textos matemáticos. In: MARTINHO, M. H.; MELO, M. C. (Org) **A literacia das disciplinas escolares:** desafios nas aulas de História e Matemática. Lisboa: Universidade do Miho. Centro de Investigação em Educação (CIEd), p. 203-226, 2015b.

SILVEIRA, M.R.A.; SILVA, P.V. O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas**. Educ. Matem. Pesq**. São Paulo, v.18, n.1, pp; 469-483, 2016.

SILVEIRA, M. R. A. Jogos de linguagem entre professor e alunos: possibilidades de aprender e ensinar matemática. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 50, p. 78-91, 2017.

SOUZA, Miriam Karine et al. **Termo de consentimento livre e esclarecido** (TCLE): fatores que interferem na adesão. ABCD (Arquivos Brasileiros de Cirurgia Digestiva). São Paulo, 2013.

WITTGENSTEIN, L. **Da Certeza (DC)**. Trad. Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, 1969.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas (IF)**. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural,1996.

WITTGENSTEIN, L. **Observações sobre os Fundamentos da Matemática (OFM)**. Trad. João José R. L. de Almeida.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas (Zettel) (Z).** Trad. Ana Berhan da Costa. Lisboa: Edições 70, 1989.

WITTGENTEIN, L. **Gramática Filosófica (GF).** Trad. Luís Carlos Borges. São Paulo: Edições Loyola, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

Prezado(a) professor(a),

Eu, Marcel de Almeida Barbosa, solicito que responda este questionário, dividido em duas partes, que tem o intuito de conhecer sua atuação no Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e faz parte da Pesquisa em andamento do Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas sob o Título: O Sentido das Regras no Ensino de Frações.

PARTE I

1) Identificação

Nome: ____

Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

2) Formação Acadêmica

(   ) Graduação.

Qual? ____________________________________

(   ) Especialização.

Qual? ____________________________________

(   ) Mestrado.

Qual? ____________________________________

(   ) Doutorado.

Qual? ___________________________________

3) Experiência Profissional

Atua na rede pública de ensino:

(   ) Municipal

Tempo de serviço? ______________________________

(   ) Estadual

Tempo de serviço? ____________________________

(   ) Federal

Tempo de serviço? ____________________________

Turma em que atua no Ensino Fundamental I:

(   ) 1º ano

(   ) 2º ano

(   ) 3º ano

(   ) 4º ano

(   ) 5º ano

PARTE II

1) Assinale cada uma das seguintes frases, de acordo com o seu grau de acordo/desacordo, numa escala entre 1(discordo em absoluto) e 5 (concordo totalmente) sobre o Ensino das Operações com Frações.

	1	2	3	4	5
A Matemática é uma disciplina independente das outras					
Gosto de ensinar este conteúdo					
Conheço bem o conteúdo a desenvolver					
Tenho dúvidas em relação ao conteúdo					
Ensino bem o conteúdo se tiver material manipulável					
Ensino bem o conteúdo se contextualizar com o cotidiano					
Considero importante ensinar as regras das operações					
A aplicação de regras com as operações é mecânica					
Utilizo somente o livro didático nas aulas					
Utilizo outros materiais de apoio além do livro didático					

2) Professor(a), em muitas pesquisas na área de Educação Matemática envolvendo as Operações com Frações, tal como a pesquisa realizada por Teixeira (2016), afirma que o ensino é trabalhado em sala de aula de forma mecânica e tradicional, e não permite que o aluno faça uma conexão entre a teoria e prática. Logo, uma parcela dos docentes que se utiliza dessa metodologia, com uso de regras, está fada a falência de uma aprendizagem significativa.

A partir do excerto e da sua experiência em sala de aula. Explique como você ensina as operações com frações para que o aluno compreenda as regras. Qual livro didático você utiliza para o planejamento das aulas?

a) ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO com denominadores iguais.

Explicação:

Resolver:

i) $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$

ii) $\frac{10}{10} - \frac{6}{10} =$

b) ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO com denominadores diferentes.

Explicação:

Resolver:

i) $\frac{1}{5} + \frac{7}{9} =$

ii) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} =$

c) MULTIPLICAÇÃO

Explicação:

Resolver

i) $4x\frac{1}{3} =$

ii) $\frac{1}{4}x\frac{2}{3} =$

d) DIVISÃO

Explicação:

Resolver:

i) $2 : \frac{2}{3} =$

ii) $\frac{1}{2} : \frac{1}{5} =$

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a), professor(a)

Este é um convite para você participar da pesquisa intitulada: O Sentido das Regras no Ensino de Frações, que tem como pesquisador responsável Marcel de Almeida Barbosa e orientação da professora Marisa Rosâni Abreu da Silveira. Esta pesquisa pretende discutir como os professores ensinam e aplicam as regras matemáticas para o conceito de fração.

Caso você decida participar, o procedimento de pesquisa a ser submetido é através de um questionário, dividido em duas partes: Parte I, sobre a sua experiência acadêmica e profissional e na Parte II, visa conhecer sua prática no ensino de Matemática nos anos inicias do Ensino Fundamental I. Ressalto que nesta pesquisa não haverá gravação de voz e/ou imagem.

Os dados que você fornecerá serão confidenciais e divulgados apenas em eventos científicos, não havendo divulgação do seu nome - para tanto, será criado um pseudônimo – tampouco o nome da escola que exerce suas atividades como docente.

Agradeço sua colaboração na pesquisa e fico à disposição para quaisquer dúvidas e/ou esclarecimentos, via contato telefônico **(91) 98471-5991** ou via e-mail: **mab_marcel@hotmail.com.**

Belém (PA), 20 de fevereiro de 2019.

____

Professor(a) Participante

____

Marcel de Almeida Barbosa
Pesquisador Responsável