UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

Roberto Carlos Dantas Andrade

A NOÇÃO DE TAREFA FUNDAMENTAL COMO DISPOSITIVO DIDÁTICO PARA UM PERCURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES: o caso da Geometria Analítica

Belém
2012

Roberto Carlos Dantas Andrade

A NOÇÃO DE TAREFA FUNDAMENTAL COMO DISPOSITIVO DIDÁTICO PARA UM PERCURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES:
o caso da Geometria Analítica

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas.
Área de concentração: Educação Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

Belém

2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA

Andrade, Roberto Carlos Dantas.
A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da geometria / Roberto Carlos Dantas Andrade, orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra, revisor gramatical Mateus Maia Rezende – 2012.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

1. Professores de Matemática – formação. 2. Educação – matemática. 3. Didática – matemática. 3. Geometria Analítica Plana. 4. Prática de ensino. I. Borges, Renato Guerra, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 371.12

Roberto Carlos Dantas Andrade

A NOÇÃO DE TAREFA FUNDAMENTAL COMO DISPOSITIVO DIDÁTICO PARA UM PERCURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES: o caso da Geometria Analítica

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas.
Área de concentração: Educação Matemática.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Orientador – IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves
Membro interno – IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. José Messildo Viana da Silva
Membro interno – IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Membro externo – PUC/SP

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Membro externo – UFMS

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter iluminado de bênçãos o caminho que trilhei até este momento.

A minha mãe, Gilda, por ter incentivado e abençoado minhas ações quando da perspectiva de perceber na educação respostas para minha escolha profissional.

A minha esposa, Ana Lúcia, pela compreensão e incentivo nas horas difíceis da pesquisa.

A Ana Carla e André Luiz, meus filhos, que são os verdadeiros porquês de minha vida.

A meus irmãos, Carlos, Gildete, Janete, Valdete, Denilson, Valnete e Milton Filho (*in memoriam*).

A todos os professores do Programa, pelas valiosas contribuições. Especialmente aos professores Dr. Francisco Hermes da Silva e Dr. Tadeu Oliver Gonçalves.

Ao professor Dr. Renato Borges Guerra, orientador desta pesquisa, por ter acreditado no trabalho e pela contribuição efetiva na construção de toda pesquisa.

Aos professores Dr. Saddo Ag Almouloud, Dr. José Luiz Magalhães de Freitas e Iran Abreu Mendes, por terem aceitado participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições quando da qualificação.

A meus amigos professores do GEDIM, em especial ao MSc. Reginaldo da Silva e ao Dr. José Messildo Viana da Silva, pela paciência, contribuição e críticas nas leituras preliminares.

A meus amigos professores da Escola Tenente Rêgo Barros, em especial os da Matemática, que contribuíram de maneira efetiva para a concretização desta pesquisa.

A minha família CAJU (Comunidade Católica Casa da Juventude) pelas orações e contribuições.

RESUMO

Esta pesquisa trata do problema praxeológico do professor de matemática e da profissão docente, na perspectiva da formação de professores por meio do enfrentamento do fenômeno da desarticulação entre temas, setores e áreas de estudo da matemática no Ensino Básico. Insere-se no Programa Epistemológico de Pesquisa em Didática das Matemáticas, mais precisamente no quadro da Teoria Antropológica do Didático, cujos subsídios permitem propor a noção de Tarefas Fundamentais a partir do estudo das potencialidades dos tipos de tarefas em articular e justificar outras tarefas, constituindo-se em ponto de partida e de convergência entre estes e outros tipos de tarefas quando das reconstruções de organizações matemáticas e didáticas para o estudo na Educação Básica. Nesse sentido, partimos do seguinte questionamento: de que forma um Percurso de pesquisa e investigação que envolve Tarefas Fundamentais pode constituir-se um dispositivo metodológico de formação de professores? Como resposta a esse questionamento, a partir da vivência em Comunidade de Práticas de Professores de uma escola pública, com o estudo da Geometria Analítica Plana, sob condições e restrições específicas institucionais, as Tarefas Fundamentais apontam como um dispositivo didático capaz de desencadear e fomentar o enfrentamento do problema da desarticulação, constituindo um Percurso de Estudos e Pesquisa como Percurso de Formação Continuada de professores de matemática no efetivo exercício da profissão.

Palavras-chave: Comunidade de Práticas. Educação Matemática. Formação Docente. Tarefa Fundamental. Geometria Analítica.

ABSTRACT

This research addresses the praxeological problem of the math teacher and the teaching profession from the perspective of teacher education through the confrontation of the phenomenon of disconnection between themes, sectors and areas of study of mathematics in primary school. It is part of the Epistemological Research Program in Didactics of mathematics, more precisely in the context of Anthropological Theory of Didactics, whose subsidies allow us to propose the concept of Fundamental Tasks based on the study of types of effective tasks which is capable of articulating and justifying other tasks, constituting a starting point and convergence between these and other tasks concerning the reconstructions of mathematical organizations for the study and teaching in basic education. In this sense, we set the following question: in what way a route search and research involving Fundamental Tasks can be a device methodological formation of teachers? In response to this question, from the experience in a Community of Teachers' Practices in a public school, with the study of Plane Analytic Geometry, under specific institutional conditions and restrictions, which point to Fundamental Tasks as a didactic device capable of triggering and encouraging to face the problem of disarticulation, as well as providing a pathway for Studies and Research as a Way of Continuing Education of mathematics teachers in the effective exercise of the profession.

Keywords: Community of Practices. Mathematics Education. Teacher Training. Analytic Geometry. Basic Task.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

ETRB	Escola Tenente Rêgo Barros
GAP	Geometria Analítica Plana
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
IUFM	*Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l`Académie d`Aix-Marseille*
MER	Modelos Epistemológicos de Referência
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
OML	Organização Matemática Local
OMLRC	Organizações Matemáticas Locais Relativamente Completas
OMP	Organização Matemática Pontual
OMR	Organização Matemática Regional
OMRE	Organização Matemática de Referência
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PER	Percurso de Estudos e Pesquisas
PNELEM	Plano Nacional do Livro Para o Ensino Médio
SCO	Sistema de Coordenadas Ortogonais
SCNO	Sistema de Coordenadas não Ortogonais
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TTF	Tipos de Tarefas Fundamentais
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A partir da prática docente como professor de Matemática da rede pública no ensino básico, mais especificamente de Geometria Analítica Plana, podemos destacar que as organizações matemáticas propostas para o ensino médio apresentam reduzidas, senão nenhuma, conexões internas, como também ausência de conexões objetivas com outros tópicos matemáticos.

Sobre as conexões internas, observamos que as organizações matemáticas apresentam praxeologias pontuais – como calcular a distância entre dois pontos e calcular o módulo de um vetor – em momentos diferentes de ensino e desarticuladas, parecendo serem totalmente desconectadas, apesar de utilizarem a mesma técnica decorrente do Teorema de Pitágoras como tecnologia. Essa observação nos levou naturalmente a pensar que as tarefas poderiam ser articuladas, em um dinamismo que permitisse um desencadeamento de tarefas integradas entre si em níveis crescentes de complexidade.

Esse pensar se estendeu às conexões externas, ao conjecturarmos se os objetos de estudo da Geometria Analítica poderiam de alguma forma evocar outros tópicos matemáticos do currículo do ensino básico, ou melhor, se esses objetos de estudo da Geometria Analítica poderiam ser intencionalmente conectados com temas matemáticos estudados no passado e no futuro do desenvolvimento do currículo do ensino básico. Assim, nos questionamos se os modelos matemáticos da Geometria Analítica poderiam, ou mesmo se já seriam, intencionalmente utilizados para justificar conceitos relacionados ao estudo das funções, da Geometria Plana e espacial, da trigonometria etc.

Os destaques acima nos provocam reflexões sobre o ensino da matemática nas escolas, essas reflexões giram em torno de questões iniciais do tipo: *Que critérios devo utilizar para elaborar as organizações matemática e didática*[1] *que proporcionem o encontro do aluno com um determinado objeto matemático de saber do ensino básico, de forma inteligível e articulada com outros objetos? Quais instrumentos didáticos posso utilizar ou construir que possibilitem a preparação dos alunos para os concursos vestibulares e ENEM*[2]*? Como desenhar uma organização*

1 Termos cunhados da Teoria Antropológica do Didático, relativos às praxeologias matemáticas e didáticas que expressam de maneira imbricada o jeito de fazer e pensar do sujeito.
2 Exame Nacional do Ensino Médio.

matemática e didática que evidencie a articulação entre vetores e outros temas da Geometria Analítica Plana? Esses questionamentos nos motivaram a realizar investigações em busca de enfrentar e compreender o impacto que exercem sobre a formação e a prática docente.

Nesse caminhar investigativo, encontramo-nos com o Programa Epistemológico de Investigações em Didática das Matemáticas, em que as questões em destaque parecem convergir para o problema da desarticulação entre os conteúdos de estudo no ensino básico.

À luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida por Yves Chevallard (1992), que nos fornece os subsídios para analisar e desenvolver organizações matemáticas e didáticas para os processos de estudos da Matemática, modelados a partir das noções de praxeologias matemáticas e didáticas, temos constatado que a problemática da desarticulação entre os conteúdos de estudo da Matemática tem se constituído a veia principal de onde pululam ramificações como as problemáticas relativas aos currículos, as quais, por sua vez, estão inclusas em problemáticas relativas à prática docente que se traduz no questionamento de Bosch e Gascón (2004, p. 12):

> Quais deveriam ser a estrutura e as funções dos dispositivos de uma organização didática escolar que permitiriam retomar os conteúdos antigos, inclusive os estudados em etapas educativas anteriores, para questioná-los, desenvolvê-los e articulá-los em organizações matemáticas cada vez mais amplas e complexas?

Tal questionamento, central do Programa Epistemológico em Didática da Matemática, revela o quanto nossas preocupações se aproximam e nos situa nessa linha de investigação em busca de dispositivos didáticos e metodológicos no enfrentamento da problemática posta. Gascón (2010) destaca a complexidade dessa problemática quando aponta que o problema da desarticulação temática requer outros enfrentamentos, pois se desdobra em outros questionamentos, tanto na perspectiva da Matemática, da didática e na relação do didático com o matemático. Dentre tais questionamentos, estão os relacionados ao currículo, à formação e à prática docentes, ao autismo temático do professor, ao uso das metodologias de resolução de problemas e da modelagem matemática no ensino.

Nesse sentido, em conformidade com Gascón (2010, 2011), na prática docente da Matemática está inserido o problema da desarticulação, e este está associado às problemáticas do currículo; portanto, essas problemáticas não são do indivíduo, do professor enquanto pessoa, mas dele enquanto sujeito de uma instituição docente – o que é indicado por Cirade (2006), Chevallard (2001a, 2009a) e Gascón (2010) como problema da profissão professor; ou seja, o problema da desarticulação temática é um problema institucional.

Podemos assim, a partir da questão anterior proposta por Bosch e Gascón (2004, p. 12), fazer o seguinte questionamento: Que dispositivos didáticos permitiriam retomar os conteúdos antigos, inclusive os estudados em etapas educativas anteriores, para que sejam questionados, desenvolvidos e articulados em organizações matemáticas de complexidade crescente?

Dentre os dispositivos apresentados para o enfrentamento do fenômeno da desarticulação na prática docente, encontramos indicações de Chevallard (2001a), Bosch, Fonseca e Gascón (2004) e Fonseca (2004) referentes à importância dos tipos de tarefas, mas estas não são exploradas como dispositivos didáticos. É acentuado por Chevallard (2001) que a razão de ser de um objeto matemático se dá por meio das tarefas em uma organização matemática, podendo não se resumir a ela. É nessa perspectiva – da busca da razão de ser da obra matemática, que pode ser uma tarefa – que vislumbramos a tarefa como dispositivo didático capaz de minimizar os problemas da desarticulação temática.

Nessa perspectiva, conjecturamos a existência de tarefas matemáticas que nos permitam olhar o conteúdo matemático ao longo do currículo do ensino básico possibilitando o desenvolvimento de praxeologias matemáticas de complexidade crescente.

Nesse sentido, defendemos a tese de que no enfrentamento do problema da desarticulação a instituição docente, entendida como uma comunidade de professores, pode construir tarefas, eleger algumas dentre as já existentes em seu equipamento praxeológico ou nas obras matemáticas – que daqui em diante referenciaremos como Tarefas Fundamentais – que em um processo de estudos possam ser integradas e articuladas para o enfrentamento de outras tarefas. Assim, a conexão dos objetos matemáticos envolvidos seria estabelecida de forma inteligível, tanto no que se refere às relações internas ao tema, ao setor ou à área da disciplina matemática, como também às relações externas a cada um desses níveis de codeterminação, de modo a atender a intencionalidade dos sujeitos envolvidos no processo de estudos.

Desse modo, nesta pesquisa buscamos enfrentar o seguinte questionamento: **de que forma um Percurso de pesquisa e investigação que envolve Tarefas Fundamentais pode constituir-se um dispositivo metodológico de formação de professores?**

Para isso, e tendo em conta que a problemática posta é um problema da profissão docente, situamos esta pesquisa no nível da disciplina Matemática da escola básica, por meio da área da geometria – em particular o setor Geometria Analítica – tomando como ambiente de investigações não só a história e a epistemologia da Geometria Analítica, mas, sobretudo, os confrontos de práticas docentes e das mobilizações dessas práticas, os quais professores em suas memórias, em suas vivências e experiências, não somente com o tema em questão, poderiam realizar quando buscam as imbricações entre as tarefas próprias do estudo da Geometria Analítica e outras que ocupam lugar de estudo em diferentes posições do currículo e da instituição.

Com esse enfoque, no desenvolvimento de nossa investigação, assumimos então o problema em nível institucional como de uma comunidade de práticas, do modo caracterizado por Lave e Wenger (2000), de professores que atuam em uma escola pública, por meio de um Percurso de Estudos e Pesquisas (PER) na ambiência de um sistema didático nos termos propostos por Yves Chevallard (2009a, 2009b). O PER no seio desse tipo de comunidade configura-se como um dispositivo de formação continuada, que poderá provocar a entrada dos professores em processos de investigações das questões que emergem dos confrontos das práticas.

Nosso propósito é o de construir uma compreensão do papel que a tarefa deve cumprir para que seja eleita como Tarefa Fundamental que permitiria o desenvolvimento de organizações matemáticas e didáticas de complexidade crescente, não só no sentido do tema, mas também na perspectiva do horizonte do conteúdo no currículo. Dessa maneira, olhamos para o passado e para o futuro de nossas vivências escolares, de modo a termos em conta a razão de ser dos objetos matemáticos estudados e, com isso, a sua institucionalização como organização matemática, em nosso caso, a Geometria Analítica de referência para a escola.

Esta pesquisa tem caráter teórico-metodológico em acordo com as pesquisas realizadas no seio do Programa Epistemológico de Pesquisas em Didática das Matemáticas, por esse motivo ela é dividida em duas partes, que se articulam simultaneamente: na primeira delas, propusemo-nos a realizar uma revisão teórica dos elementos conceituais que compõem a TAD, de modo a nos possibilitar compreensões que proporcionassem conceber possíveis contribuições teóricas para a prática docente; na segunda parte, corporificamos nossa compreensão a partir de uma comunidade de práticas de professores de matemática da Escola Tenente Rêgo Barros, por meio de um percurso de estudo e pesquisa, PER, que se configura não só como uma metodologia de nossa pesquisa empírica, como também um percurso de formação continuada de professores no efetivo exercício da docência.

Assim sendo, esta pesquisa se desenvolve em cinco capítulos. No primeiro, iniciamos por evidenciar a compreensão dada na Teoria Antropológica do Didático ao problema da profissão de professor de matemática, relativa à desarticulação entre os conteúdos matemáticos do currículo da escola básica. Em seguida, realizamos levantamento nas pesquisas mais difundidas, que se inserem no Programa Epistemológico de Pesquisas em Didática das Matemáticas dos dispositivos utilizados para o enfrentamento dessas problemáticas, como por exemplo, o Percurso de Estudos e Pesquisas.

No segundo capítulo, tratamos da desarticulação temática como problema relacionado ao currículo, assumindo-o como um problema conexo à profissão docente, isso se dá por meio de investigações no programa de pesquisa liderado por Gascón (2010). Nessas investigações buscamos compreender os dispositivos didáticos e metodológicos propostos para o enfrentamento do problema da desarticulação, objetivando aprofundamentos teóricos para melhor nos darmos conta da importância das tarefas como dispositivo didático para construções de praxeologias que possibilitem a reconstrução de organizações matemáticas de complexidade crescente.

Nesse sentido, no terceiro capítulo, evidenciamos o que nomeamos por Tarefa Fundamental, a partir de análises nas organizações matemáticas propostas nos livros didáticos e no estudo histórico e epistemológico da Geometria Analítica na obra de René Descartes (1637). Este estudo também tomou como base as organizações matemáticas e didáticas utilizadas para o ensino da Geometria Analítica na instituição escolar onde se realizou a parte empírica desta pesquisa, para que fosse possível a eleição, ou construção, de tipos de tarefas que possuem potencialidade de tipo de tarefa fundamental para o estudo da Geometria Analítica na educação básica.

Em função da imbricação entre o problema da desarticulação e o currículo, anunciada por autores como Gascón (2010, 2011), Chevallard (2001a, 2009a) e outros, como também por conta dos resultados revelados no terceiro e quarto capítulos nos propusemos a analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a fim de compreender as estratégias e as proposições que propiciam a articulação entre temas, setores e áreas da Matemática. Além disso, buscamos investigar nesses documentos as indicações curriculares para a educação básica, e, nestas, verificar a distribuição do conteúdo da área da geometria, procurando, identificar articulações possíveis na perspectiva do passado e do futuro do que se estudou e do que se vai estudar.

Como desdobramento de nossas pesquisas – e por termos assumido o problema da desarticulação temática como fenômeno ligado às problemáticas do currículo, da formação e da prática docente, no quinto capítulo –, descrevemos e analisamos o desenvolvimento de um Percurso de Estudos e Pesquisas como dispositivo metodológico de formação, no seio de uma comunidade de práticas, que se iniciou pelo enfrentamento da questão fruto da necessidade institucional em elaborar organizações matemáticas e didáticas de referência para o fazer docente da instituição em jogo: *Como fazer a construção de uma OM/OD, entendida como um conjunto estruturado de tarefas, que respondem a questões determinadas, com forte grau de integração e em ordem crescente de complexidade e que façam o reencontro dos professores com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analítica?*

O caráter aberto e amplo da questão acima possibilitou o percurso de pesquisa, pois dela derivaram outras questões, as quais, quando enfrentadas, proporcionaram respostas intermediárias, que articuladas compõem as possíveis respostas à questão primeira, todas tomadas a partir da motivação da eleição das tarefas que possuem a potencialidade de Tarefas Fundamentais.

1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, nossas reflexões intencionam a compreensão dada na Teoria Antropológica do Didático ao problema da profissão de professor de matemática em reconstruir as organizações matemáticas e didáticas, vinculado à formação e prática docentes, especificamente ligado ao problema da desarticulação entre os conteúdos matemáticos do currículo da escola básica. Bem como, reconhecer e pôr em evidência os dispositivos utilizados para o enfrentamento dessas problemáticas, como por exemplo, o Percurso de Estudos e Pesquisas (PER) concebido nas pesquisas realizadas no Programa Epistemológico de Pesquisas em Didática das Matemáticas

1.1 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E A PRÁTICA DOCENTE

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), resultante da problemática da Transposição Didática entre instituições proposta por Chevallard (1991), tem como linha condutora um programa de investigação caracterizado como Programa Epistemológico de Investigação em Didáticas das Matemáticas, cuja origem remonta os anos 1970, com os trabalhos de Guy Brousseau que deram origem à Teoria das Situações Didáticas.

A TAD parte da compreensão de que os seres humanos, para agirem, reúnem-se em grupos – as instituições – os quais impõem certo modo de fazer e pensar próprios no desenvolvimento de suas atividades. Nesse sentido, o fazer de um professor quando resolve uma equação em classe, ou quando corrige os exames de seus alunos, toma como referência construções elaboradas em instituições, resultantes de uma produção coletiva da qual esse professor participou e participa, mas que assume como suas.

Da mesma forma, os pesquisadores também agem em conformidade com instituições – como departamentos de universidades, academias, ou mesmo equipes de pesquisa – que de uma maneira ou de outra impõem os modos de realizar suas pesquisas; ou seja, esses modos são resultados de construções coletivas de diversas instituições e, nesse sentido, é importante destacar que as aproximações teóricas que adotam, também são consideradas como “instituições” em um sentido amplo, como as entidades que se criam para libertá-los dos condicionamentos até então existentes e que permitam o surgimento de novas formas de pensar e agir.

Sob esse pensar, Chevallard (1999) introduziu a noção de *praxeologias* para se referir a qualquer estrutura possível de atuação e conhecimento, assumindo que, na perspectiva antropológica adotada, toda atividade humana pode ser descrita como a ativação de *praxeologias* e que qualquer prática ou "saber-fazer" (toda *praxis*) é sempre acompanhada de um discurso ou "saber" (um *logos*); isto é, uma descrição, uma explicação ou uma racionalidade mínima sobre o que é feito, como se faz e por que se faz.

A *praxis* e o *logos* estão integrados "como dois lados de uma moeda, não há *praxis* sem *logos*, mas também não há *logos* sem *praxis"* (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 251)*;* ou seja, a prática e um discurso que lhe dá razão, que explica ou justifica o que se faz, mesmo que se reduza a função da prática em toda atividade humana, inclusive na atividade matemática, estes vivem em simultaneidade (sincronia) em uma instituição. Daí o nome *praxeologia*, que significa essa simultaneidade a partir da junção das palavras gregas *praxis* e *logos*, que, em uma estrutura simples, pode ser descrita por meio das componentes tarefa-técnica, que diz respeito ao saber-fazer, e à tecnologia e teoria [T / ô / θ / Θ] que constituem o saber.

Em termos praxeológicos, podemos entender a Tarefa (t), que está sempre relacionada a um Tipo de tarefas (T), como toda ação singular, particular, específica de um fazer que se expressa por um verbo, como: arrumar a sala; organizar a gaveta; encontrar a fração reduzida; fatorar o polinômio; simplificar a expressão algébrica; encontrar a equação da reta tangente à curva no ponto P; dividir um número por outro etc.

Já o Tipo de tarefas (T), é um conjunto de ações do mesmo tipo, ou seja, é uma classe de tarefas com características comuns, como: arrumar salas; organizar cômodas; simplificar expressões algébricas; encontrar equações de retas tangentes a uma curva em um dado ponto P; determinar o quociente entre dois números dados etc., isto é, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots\ldots\ldots t_n\}$. No quadro abaixo, exemplificamos alguns tipos de tarefas e suas possíveis tarefas associadas.

Quadro 1 – Quadro exemplo de tipos de tarefas T e tarefas t

Tipos de Tarefas (T)	Tarefas (t)
Localizar pontos no plano	**Tarefa$_1$**: localizar o ponto A, dadas as coordenadas (x_a,y_a). **Tarefa$_2$:** Identificar as coordenadas do ponto A, representado no sistema de coordenadas ortogonais.
Determinar o baricentro do triângulo	**Tarefa$_1$:** Determinar o baricentro do triângulo equilátero ABC. **Tarefa$_2$:** Determinar o baricentro do triângulo retângulo MNP.
Calcular a distância entre dois pontos	**Tarefa$_1$:** Calcular a distância entre os pontos A e B. **Tarefa$_2$:** Calcular o comprimento do segmento $\overline{AB}$. **Tarefa$_1$:** Determinar o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$.
Escrever a equação da reta r, dados dois pontos	**Tarefa$_1$:** Escrever a equação da reta suporte do segmento $\overline{AB}$. **Tarefa$_2$:** Escrever a equação da reta que contém o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC.

Faz-se necessário destacar que a noção de tarefa está sempre interligada a um tipo de tarefa, ou seja, essas noções são solidárias. Contudo, devemos ter clareza de que não existem regras para se especificar um tipo de tarefa (T) e suas tarefas (t), o que pressupõe a complexidade existente na diferenciação e estabelecimento do que sejam as tarefas e o tipo de tarefas associados. Também é necessário garantir a existência de pelo menos uma maneira de realizar as tarefas pertencentes a um determinado tipo de tarefas (T). A essa maneira de realizar uma tarefa pertencente a um dado tipo de tarefas (T), dá-se o nome de técnica (ô). Vale salientar que a técnica (ô), que nem sempre é única, é relativa ao tipo de tarefas (T) e não apenas a uma tarefa específica.

Dessa forma, vemos a imbricação entre o tipo de tarefas e a técnica, o que revela o jeito de fazer. Assim, a Técnica (ô) é a maneira ou as maneiras de enfrentar uma tarefa ou um tipo de tarefas. Porém, a técnica pode se mostrar limitada para resolver todas as tarefas do mesmo tipo, o que requer um trabalho sobre a técnica, o que Chevallard (1999) denomina de alcance da técnica. Quando uma primeira técnica tem competência reduzida para o enfrentamento das tarefas de um mesmo tipo, elabora-se a partir desta uma outra técnica mais abrangente; é esse trabalho da técnica que vemos ser necessário em um processo de estudos da matemática escolar. Significa que, nessa imbricação entre tipos de tarefas e técnicas, uma tarefa pode ser problemática ou não. Ela é problemática quando o aluno não tem o domínio de uma técnica para resolvê-la. O objetivo no ensino é tornar as tarefas problemáticas em tarefas rotineiras pelo domínio das técnicas.

Tomando o saber como uma associação organizada de conhecimentos, a noção de praxeologia dada pela TAD nos possibilita unificar sob um mesmo conceito saber e atividade. O que significa que, ao se falar em teoria, como a teoria dos números, as teorias sociais etc., não estaremos nos referindo apenas aos componentes tecnológico-teóricos [θ / Θ] que formam o *logos*, como também a um conjunto de praxeologias.

Por outro lado, ao nos referirmos à prática, geralmente as identificamos como a perícia em saber fazer, por meio das componentes tarefa-técnica [T / ô], que formam a *praxis,* deixando de lado, ou por vezes omitindo, o componente tecnológico-teórico existente nessas práticas.

É importante, então, dizermos que o que é comumente considerado como conhecimento, habilidade ou competência de uma pessoa corresponde ao que Chevallard (2009a) designa como o Equipamento Praxeológico (EP) da pessoa, isto é, o amálgama de praxeologias e de fragmentos praxeológicos de que a pessoa dispõe para ativar a qualquer momento, quando necessário, sob certas condições e restrições.

Mais precisamente, na TAD é assumido que a pessoa é resultante de seu passado e presente de sujeições institucionais e o seu conhecimento pode, em diacronia, ser imaginado como o fazer da história da pessoa como sujeito, por meio da crônica de suas sujeições e contrassujeições, e, em sincronia, com o conjunto de suas relações pessoais com os objetos[3] que vivem nas instituições em que atua e em que atuou.

Esse conjunto de relações pessoais, que Chevallard (2009a) designa como universo cognitivo (UC) da pessoa é entendido como resultante das movimentações de praxeologias que a pessoa realiza ao longo do tempo sobre seu EP. Segundo o autor, dessa movimentação resulta que partes desse equipamento podem perder suas características de operação, outras podem vir a ser remodeladas e novos elementos podem ser adicionados. De outra maneira, as mudanças no UC resultam de uma dinâmica cognitiva que ocorre quando as relações pessoais a um dado objeto, que vive em uma dada instituição, na qual o indivíduo ocupa certa posição, mudam, são criadas ou desaparecem.

Nessa linha de pensamento, podemos inferir que a relação de uma pessoa com um dado saber matemático existe quando a pessoa realiza uma praxeologia

3 É considerado por Chevallard na TAD como a primeira noção fundamental e concebido como “qualquer entidade, material ou não material, *que existe pelo menos para um individuo.”* (CHEVALLARD, 2009a, p. 01, grifos do autor, tradução nossa).

com esse saber em uma instituição. Chevallard (2009a) considera Instituição um dispositivo social, total ou parte dele, que impõe ou permite que a pessoa que vive nesse espaço ocupe uma determinada posição e influa em sua maneira de fazer e pensar.

Nesses termos, o que fazemos ou pensamos em uma dada instituição, em uma determinada posição, são frutos de assujeitamentos institucional. Isso significa que o indivíduo se torna uma pessoa à medida que é sujeito de múltiplas instituições; portanto, não há como falar de relação pessoal sem que seja disponibilizada pelo menos uma praxeologia com um objeto de saber pela instituição para a pessoa, mesmo que não estejam claros os interesses e as intenções institucionais que envolvam essa praxeologia.

Mas é preciso considerar que a relação pessoal nunca é perfeitamente conforme as relações institucionais, tampouco é original. A relação pessoal a um objeto é um amálgama resultante das integrações e influências ao longo do tempo de múltiplas relações institucionais em que a pessoa vive e viveu, aceitando, ou se recusando a aceitar, essas ou aquelas mudanças em seu EP.

Por outro lado, segundo Chevallard (2009a), a multiplicidade de sujeição é fonte de sentimento de liberdade das pessoas nas instituições, pois, constantemente, para testar ou exercer sua liberdade, confrontam uma sujeição contra as outras, desestabilizando seus condicionamentos, criando uma nova sujeição, voluntariamente, como faz o cientista quando cria uma nova teoria para, em seu sujeitamento, descondicionar-se das maneiras de pensar e fazer que impedem ou limitam seu fazer.

Isso nos leva então a considerar que a relação institucional e as relações de pessoas que vivem em uma instituição relativas a um dado objeto matemático determinam-se mutuamente nas dinâmicas dos interesses e intenções institucionais e pessoais que vivem na instituição, dando forma e sentido às praxeologias.

De outro modo, as praxeologias não são obras do acaso, mas, antes, construções de pessoas que vivem em uma instituição, os atores da instituição, que as dotaram de *porquês* e *para quês*, *com* e *para* a instituição, pois

> em geral, nossas relações “pessoais” são frutos de nossa história de submissões institucionais passada e presente. Reciprocamente, uma instituição não pode existir sem indivíduos. Há, portanto, uma dialética *entre instituições e indivíduos*. (CHEVALLARD, 2009a, p. 03, grifos do autor, tradução nossa).

Essa dialética entre pessoa e instituição se desenvolve nas sujeições que exigem a conformidade da relação de uma pessoa com a instituição, relativa a um dado objeto institucional; no entanto, a relação institucional pode ser modificada pelos sujeitos dessa instituição ao criarem para si uma nova sujeição, que pode ser inédita e significativa no seio da instituição.

A capacidade dessas pessoas em desenvolver relações pessoais institucionalmente inéditas, corporificadas em praxeologias inéditas pela mobilização de seus EPs, quando necessário para aquela instituição, contrastam-nas daquelas pessoas que aderem apaixonadamente a certos meios das instituições a que tenham se assujeitado. Para estas, certamente "a conformidade com a instituição é mais assumida do que a capacidade pessoal para produzir relações inovadoras" (CHEVALLARD, 2009a, p. 04).

Em ambas as situações, como criadores de praxeologias inéditas para uma instituição ou como difusores de praxeologias dominantes[4], os docentes assumem papel importante na transposição didática quando elaboram seus textos eminentes de saber, colocando o saber em seu discurso derradeiro, para ser ensinado, o que Chevallard (2001) destaca como o momento do professor, só seu, em relação com o saber, que permite construir a sua versão para o saber.

Nesse momento, o docente busca responder a questões que emergem em suas práticas, no confronto de praxeologias institucionais matemáticas e didáticas, que exigem a construção de praxeologias, às vezes nunca ensinadas, mas necessárias não só para a compreensão das organizações matemáticas que vivem na instituição, mas também para tornar o ensino inteligível para ele mesmo – o professor.

A movimentação de praxeologias disponíveis não se constitui produtora de mudanças praxeológicas substanciais. Há a necessidade de que uma questão exija do professor mudanças em suas relações com o saber matemático em jogo. Há a necessidade de uma capacidade de questionamento forte, que exija uma resposta com sentido forte, que não seja simples informação, mas signifique propor tarefas, as quais, para serem enfrentadas, requeiram o desenvolvimento de uma ou mais técnicas que provoquem a reconstrução de OMs e ODs institucionalizadas, buscando as "razões de ser" para o saber ora questionado, pois

[4] Assumidas como as praxeologias que vivem nas instituições e são consideradas pelos professores como imprescindíveis para o estudo de um determinado objeto matemático.

> geralmente, as “razões de ser” de uma OM se encontram nas OMs que a precedem ou nas OMs a que se integrará. Estas tendem a desaparecer à medida que a construção avança, mas pode ser importante, do ponto de vista da eficácia da OD correspondente, saber manter em vida essas OMs “intermediárias”, pelo menos durante a construção da OM considerada. (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 18, grifos dos autores, tradução nossa).

Mas, por outro lado, nenhum dos componentes das organizações escolares, Matemática e Didática, estão oficialmente cristalizados em uma dada instituição. Em geral, esses componentes não se encontram elaborados em todos os seus detalhes e nem se encontram necessariamente coerentes, mas fortemente “naturalizados”, até transparentes, para os sujeitos da instituição que os assumem e os transmitem por meio de suas práticas institucionalizadas.

Além disso, a construção de uma organização praxeológica não se faz livremente, pois está subordinada a condições impostas, seja pela instituição, por outros atores da instituição que defendem uma praxeologia até então dominante, por condições de ordem pedagógica que exigem uma subordinação à infraestrutura didática, como as dos livros-textos adotados pela escola, ou do tempo didático, como os programas estabelecidos pelas secretárias de educação, por exemplo. As condições precisam ser vencidas. As que resistem tornam-se restritivas e podem não fazer vingar a organização didático-matemática na instituição.

Essa compreensão, que se estende ecologicamente no sentido de que as praxeologias construídas em uma instituição são reconstruídas para dar respostas a outras instituições sob outras condições e restrições distintas de sua origem, é o cerne da TAD e revela a importância da prática docente como provedora de questões fortes que exigem como respostas um conjunto articulado de praxeologias matemáticas e didáticas sujeitas às condições e restrições existentes nas instituições.

É nesse sentido que a TAD, certamente, constitui-se em um aporte para as investigações sobre práticas docentes e formação de professores, assim como fez Chevallard (1999) ao propor a análise do didático das práticas docentes e, em continuidade, quando o mesmo autor (2001a, 2001b, 2002, 2006, 2009a, 2009b, 2009c) passou a assumir importante papel nas pesquisas relacionadas à formação inicial e continuada de professores, como as realizadas pelo programa de pesquisa liderado por Gascón (2010), que encaminhou pesquisas de doutorado como as de, entre outros, Bolea (2003), Fonseca (2004), Garcia (2005), Sierra (2006), Rodriguez (2005) e Barquero (2009).

Bosch e Gascón (2009) apontam que a TAD tem estado sempre intimamente relacionada com a formação inicial e continuada de professores, não somente pela formação contínua de investigadores que trabalham no âmbito da TAD, mas também – que é de nosso interesse – porque desde a evidência do fenômeno da *transposição didática* (CHEVALLARD, 1991) a TAD tem sido um dos primeiros enfoques a considerar como objeto de estudo e investigação não só as atividades de ensino e aprendizagem mas também todo o processo interminável que se estende desde a criação, utilização e difusão do saber matemático, passando por sua incorporação na escola como saber ensinado, incluindo todas as instituições que participam nesse processo, entre elas o próprio professor como instituição e as que intervêm em sua formação inicial e continuada.

1.2 O PROBLEMA PRAXEOLÓGICO DO PROFESSOR: um problema da formação docente

Bosch e Gascón (2001), em um de seus primeiros trabalhos, analisaram as relações entre as práticas docentes e as organizações didáticas escolares, objetivando situar as práticas docentes como constituídas de atividades humanas institucionalizadas, caracterizam-nas como praxeologias didáticas dos professores, segundo o modelo estabelecido por Chevallard (1999).

As praxeologias didáticas dos professores são consideradas por Chevallard (2001b) como um problema praxeológico, que ele identifica como o *problema π do professor*, decorrente da necessidade que esse professor tem de reconstruir Organizações Matemáticas (OMs) que possam ser estudadas em uma instituição escolar, expressando-o da seguinte maneira:

> Observando T_π tipo de tarefas, dizemos que o problema praxeológico do professor de matemática é construir uma praxeologia $[T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$, isto é, buscar uma resposta $R_\pi = [T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$ para a questão Q_π: como realizar uma tarefa t_π do tipo T_π? É o mesmo que falar de organização matemática, chamada aqui de organização didática uma praxeologia da forma $[T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$. (CHEVALLARD, 2001, p. 03, grifos do autor, tradução nossa).

Essa descrição da praxeologia do professor se situa em um nível de generalidade no qual se encontra diluído o objetivo principal em um vasto conjunto de tarefas dispersas e, em consequência, em múltiplos objetivos também dispersos. Se for tomada uma OM específica, pode-se dizer que o problema do professor consiste em reconstruir a OM para que possa ser estudada em uma instituição docente. Com esse fim, o sistema de tarefas passa a ter unidade e até certa estrutura, e então se pode falar de praxeologia didática do professor relativa a uma OM concreta, como sendo a resposta $R_\pi = [T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$ que cada professor dá ao problema de reconstruir uma OM em uma determinada instituição de ensino. É, em outras palavras, a resposta para o "problema [praxeológico] do professor" (CHEVALLARD, 2001, p. 01).

Dessa forma, a praxeologia didática do professor – que pode ser descrita como a reconstrução de uma OM vivenciada em sala de aula que permita aos alunos atuarem com eficácia para resolver problemas com Matemática e, ao mesmo tempo, entender o que fazem de maneira racional – nos leva a afirmar, em acordo com Chevallard (2001, 2005), que o que se aprende e se ensina em uma instituição escolar são praxeologias matemáticas que respondem a uma dada questão por meio de tarefas ou tipos de tarefas mobilizadas pelo professor.

Nesse sentido, as praxeologias didáticas são um conjunto de praxeologias que o professor movimenta para a difusão social das praxeologias matemáticas e, como tal, estão estreitamente relacionadas de acordo com o princípio fundador da didática, já que

> o princípio fundador das didáticas, pelo menos no sentido brousseauniano da palavra, não só o que é transmitido depende da ferramenta com a qual se pretende conseguir a transmissão, como também que as organizações de transmissão, isto é, didáticas, estejam configuradas de uma forma intimamente relacionada com a estrutura do que deve ser transmitido. Em outras palavras, as organizações didáticas dependem fortemente das organizações a ensinar: das organizações matemáticas, em nosso caso. Este "isomorfismo" didático-matemático é o que eu expresso através de uma hierarquia de níveis de codeterminação de OD e de OM. (CHEVALLARD, 2001, p. 02, grifos do autor, tradução nossa).

Sob esse pensar, fica claro o alerta, tanto de Chevallard (1991) sobre o cuidado com a reconstrução das OMs no trânsito dos objetos matemáticos entre as instituições de ensino, quanto o de Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 210) ao afirmarem que a "ignorância das causas de origem matemática do problema didático impossibilita seu tratamento eficaz e perpetua as descontinuidades e contradições entre as práticas que se desenvolvem nas diferentes instituições afetadas".

Nesses termos, podemos inferir, em acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001), Bosch, Fonseca e Gascón (2004), Bosch e Gascón (2004), Chevallard (2005) e outros, que, embora o Programa Epistemológico assuma que o matemático (o objeto de estudo) e o didático (a organização para o estudo) constituam duas dimensões inseparáveis da realidade escolar que se determinam mutuamente, faz-se necessário analisar o conhecimento matemático tal como se apresenta historicamente no seio de cada instituição, fazendo abstrações de sua gênese e de seu processo de reconstrução, o que se constitui em um processo de estudos e, portanto, didático. Isso revela a dimensão epistemológica que Gascón (2011) destaca como o cerne do problema didático.

É necessário ressaltar que o sentido dado na TAD ao epistemológico, segundo Bosch, et al. (2006), é de não reduzi-lo ao conteúdo matemático, mas sim ampliá-lo ao âmbito e ao alcance que habitualmente se tem dado ao matemático e à epistemologia das matemáticas, conforme Chevallard (2005) e Gascón (2001), quando tratam das diversas ampliações da epistemologia clássica. Esses autores estabelecem a concepção epistemológica relativa à manipulação de um saber em uma dada instituição com objetivos didáticos.

Sob esse entendimento, vários pesquisadores têm se dedicado às pesquisas sobre a formação de professores. Silva (2005) assume os dispositivos da TAD como a modelação em termos de praxeologias para analisar e construir organizações didáticas propostas pelos professores para o ensino dos números fracionários na quinta série do ensino fundamental. Rossini (2006), na mesma perspectiva, ao tratar dos saberes docentes sobre o tema função, toma os mecanismos de modelação em praxeologias das OMs e ODs propostas por Chevallard (1999), objetivando a análise e a reconstrução delas.

Ainda relacionado à formação para a prática docente fundamentada na TAD, encontramos as pesquisas de Parra e Otero (2009), que analisam as restrições e as exigências que limitam a prática docente na universidade a partir das praxeologias didáticas institucionais. Nesses trabalhos, temos percebido a utilização da TAD como enfoque teórico que propicia ferramentas metodológicas para analisar e reconstruir de maneira articulada as OMs e ODs.

Outros trabalhos buscam por meio de relações teóricas e metodológicas investigar a formação docente, como o de Lopes Júnior e Freitas (2009), que, por meio da relação entre a TAD e o conceito de *habitus* e campos de Bourdieu, investigam práticas de formação que propiciem a conexão sujeito/saber, oportunizando o desenvolvimento de processos de crescimento pessoal e profissional a partir da reflexão crítica que extrapola o paradigma do professor reflexivo, e avança no sentido de levar esse professor a desenvolver ações e/ou estratégias que visem à solução de problemas coletivos.

Na linha da investigação da profissão do professor de Matemática, Cirade (2006) busca caracterizar essa profissão a partir da interrelação entre o problema da profissão e o da formação no *Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l`Académie d`Aix-Marseille* (IUFM), por meio da análise das praxeologias matemáticas e didáticas que o professor deve possuir para o exercício da prática docente, como problema profissional. Para tanto, utilizou o modelo de praxeologias proposto por Yves Chevallard, assumindo a classificação do saber docente para a prática do professor de Matemática em três tipos: as praxeologias matemáticas a ensinar; as praxeologias matemáticas para o ensino; e as praxeologias didáticas. Esses tipos praxeológicos não são considerados como compartimentos isolados, mas como um conjunto em que as praxeologias didáticas englobam as praxeologias a ensinar, as quais, por sua vez, comportam as praxeologias para o ensino. Esse conjunto de praxeologias que o professor deve possuir para ser ativado, sob certas condições e restrições, em um dado momento da prática docente, constituiria o EP disponível para a prática profissional.

Seguindo esse entendimento do papel do EP na profissão do professor de Matemática, Gascón e Bosch apontam três contribuições da TAD para a formação de professores para o ensino básico, quais sejam:

> A maneira de colocar o problema da formação e delimitar o âmbito empírico no qual este deve se situar para ser abordado; a proposição e experimentação de dispositivos de formação; e, finalmente, a colocação em evidência de fenômenos que incidem no desenvolvimento desta formação, dificultando-a ou facilitando-a. (2009, p. 89, tradução nossa).

Esses autores formulam o problema de formação nos seguintes termos:

> Qual é o Equipamento Praxeológico necessário, ou pelo menos útil, para que os professores possam intervir de maneira efetiva e pertinente na formação matemática dos estudantes, de tal ou qual etapa educativa e o

> que se pode fazer para ajudar para que os professores disponham dele? (GASCÓN; BOSCH, 2009, p. 94, tradução nossa).

No entanto, alertam para o risco de se querer formar professores a partir dos EPs já disponíveis, deixando sob a responsabilidade do professor a capacidade de poder “aplicar” esses equipamentos em situações concretas que podem vir a enfrentar. Isso não quer dizer que os EPs disponíveis não devam estar presentes no processo de formação, mas que, sobretudo, esse processo ocorra a partir das necessidades praxeológicas que se criam no exercício da profissão, evitando a *pedagogia do monumentalismo*, que, de certo modo, antepõe o estudo das questões, problemas ou necessidades que estão na origem do processo de formação, pois

> [...] quando o projeto de formação está baseado mais no que o formador pode oferecer em detrimento às necessidades das pessoas em formação, os conteúdos de ensino – que podem ser um “saber” com claro componente teórico, mas também um “saber-fazer” eminentemente prático – se convertem em “obras” ou monumentos que os estudantes devem conhecer, no sentido de “ser visitado”, sem que ninguém saiba muito bem o porquê de terem sido construídos nem para quê servem hoje. (BOSCH; GASCÓN, 2009, p. 95, tradução nossa).

Com tal preocupação, esses autores reformulam o problema da formação docente considerando-o “dual” do anterior: “Quais são as *questões cruciais* que devem enfrentar os professores em sua prática docente, e o que pode fazer a formação para ajudá-los a construir *respostas satisfatórias* a essas questões?” (BOSCH; GASCÓN, 2009, p. 96, grifos do autor, tradução nossa).

Segundo Bosch e Gascón (2009), as respostas às questões cruciais residem nos ingredientes básicos do EP do professor, o que caracteriza o caráter “dual” do problema. Mas tal encaminhamento tem a virtude de manter aberto o problema da descrição desse EP e, portanto, de sua construção e difusão nos processos de formação.

1.3 O PROBLEMA DA DESARTICULAÇÃO: o problema praxeológico como problema da profissão

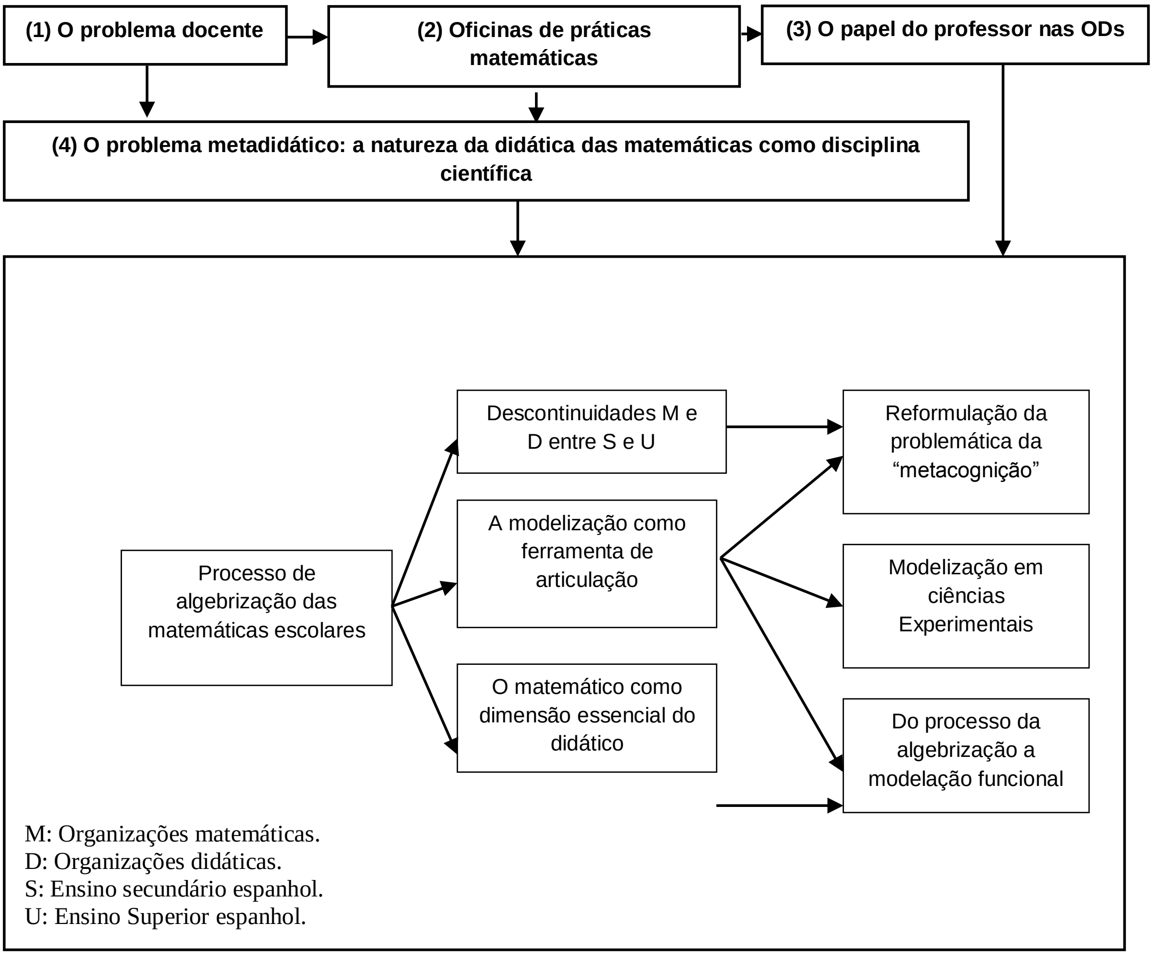
A reformulação do problema do professor apresentado por Bosch e Gascón (2009, p. 96) surgiu bem mais tarde no seio da comunidade de pesquisas liderada por eles, que se iniciou pelo enfrentamento do *problema* π do professor no ensino da Matemática, e se desdobrou em duas ampliações: a primeira em uma oficina de práticas matemáticas que evidenciam a necessidade de novos dispositivos didáticos, e a segunda em pesquisas que buscam identificar o papel do professor nas organizações didáticas escolares.

Das investigações dos problemas docentes e da oficina de práticas, emergem problemáticas referentes à natureza da didática da Matemática como disciplina cientifica e em desdobramento; relacionado ao papel do professor nas organizações didáticas, resulta o “grande problema do currículo” (GASCÓN, 2010, p. 20), que é anunciado pelo seguinte questionamento:

> Como desenhar, de maneira didaticamente fundamentada, o currículo de Matemática para certa etapa educativa?, e associado ao problema do fenômeno da desarticulação da Matemática escolar, como organizar o ensino escolar da Matemática de maneira que provoque a articulação de todos os tipos de conteúdos que propõe o currículo: procedimentais, conceituais e atitudinais? Como conseguir, em definitivo, que os conhecimentos matemáticos aprendidos pelos alunos não se reduzam a um conjunto completamente desarticulado de técnicas mais, ou menos, algorítmicas e carentes de sentido? (GASCÓN, 2010, p. 21, tradução nossa).

Tais problemas associados se corporificam desde a descontinuidade Matemática e didática entre o ensino secundário e o superior até a atomização do conteúdo matemático no currículo escolar. Esquematicamente, Gascón (2010) descreve os desdobramentos das investigações dessa comunidade como explicitado na Figura 1.

Figura 1 – Esquema do desdobramento das investigações da comunidade de estudos liderada por Gascón e Bosch



Fonte: Gascón (2010, p. 02)

O esquema evidencia questões associadas à problemática do currículo como linhas de pesquisas, em que destacamos o problema da desarticulação do conteúdo escolar com expressivo número de trabalhos, entre eles, os de Bolea (2003), Fonseca (2004), Garcia (2005), Sierra (2006), Rodriguez (2005), Barquero (2009); e por se apresentarem estreitamente associados ao problema de formação como o de Ruiz et al. (2010), em desenvolvimento, sobre a formação matemático-didática do professor do ensino médio, assumindo a formação matemático-didática como um problema geral, situando-o como um aspecto de um dos grandes problemas da didática.

Na pesquisa de Ruiz et al. (2010), o enfrentamento da problemática é desenvolvido por meio de um curso de formação para professores do ensino básico tendo como estratégia a construção de praxeologias matemáticas para o ensino, considerando, em consonância com a investigação de Cirade (2006), Chevallard, (2003), Chevallard e Cirade (2006, 2009), além das questões apresentadas acima, outras relacionadas a essas são formuladas da seguinte forma:

> Como se geram as questões que estão na origem das praxeologias matemáticas a ensinar e das praxeologias matemáticas para o ensino? Quais são os problemas que constituem a razão de ser das praxeologias didáticas que tomam parte do necessário equipamento praxeológico do professor? (RUIZ et al. 2010, p. 401, tradução nossa).

Embora essa pesquisa apresente resultados parciais, por se encontrar em fase experimental, torna-se, para nós, importante destacar que esses autores apontam as práticas docentes, de certa forma, como âmbito privilegiado da formação, pois seria nesse âmbito que tomariam corpo as questões a que o professor deve buscar respostas possíveis. Nesse sentido, esses autores pretendem superar a concepção de que os professores aprendem as teorias para em seguida as aplicarem e passem então a fundamentar sua formação na dialética entre os questionamentos que surgem nas práticas docentes e as respostas que professores vão poder construir com as ferramentas a eles fornecidas.

Assim, vemos nesses estudos a indicação de que a construção de praxeologias, que se põem naturalmente no coração do problema da desarticulação do currículo, passa a ter um papel estratégico na formação de professores, uma vez que esta evidencia o problema docente não como do professor, mas como problema da profissão do professor, que deve ser respondida coletivamente mediante a elaboração dos recursos técnicos e teóricos em praxeologias apropriadas.

Essa compreensão sobre o enfrentamento do problema da desarticulação temática associada à prática docente em Matemática, que está estreitamente relacionado com a formação profissional, considera as diferentes dimensões que envolvem o problema didático: a epistemológica, que coloca a Matemática no “coração” do problema; a econômico-institucional referente à análise clínica da didática, que inclui a observação e a descrição detalhada das OMs e das ODs que existem efetivamente em uma dada instituição; e a ecológica, “que enfatiza as condições necessárias para que seja possível o estudo institucionalizado da Matemática e que põe em manifesto as restrições de todo tipo que incidem sobre este estudo” (GASCÓN, 2011, p. 203), de outra forma, a relação entre a história e a epistemologia do saber, do seu modo de vida na instituição, nas praxeologias didáticas relativas a esse saber que são realizadas pelas pessoas que vivem nessa instituição.

Nesse sentido, o problema praxeológico do professor não está subordinado ao próprio professor, senão à instituição e à formação profissional, e, como tal, exige as mobilizações das práticas dos professores em suas memórias, em suas vivências e experiências, pois as formulações de questões fortes não são espontâneas, mas essencialmente elaboradas nas e para as práticas, nas congruências e nos conflitos decorrentes dos confrontos de práticas, quando buscam responder às questões que nelas emergem, por exemplo, nas imbricações entre as tarefas próprias de uma OM com outras que ocupam lugar de estudo em outras OMs em diferentes posições do currículo na instituição.

Sob essa compreensão, as praxeologias são obras sempre inacabadas de pessoas que são sujeitos e atores de diferentes instituições, que, embora atuem em conformidade com estas, ao longo do tempo criam novas praxeologias, as quais podem ser inéditas e significativas para os sujeitos de certa instituição.

Mas, tal empreendimento não é simples, exige uma conjugação de elementos matemáticos e didáticos. Infraestruturas matemática e didática que parecem ser independentes, mas que estão sempre juntas para permitir o ensino da disciplina.

É preciso ter em conta que a infraestrutura matemática imposta aos professores não atende, em geral, as diversas e numerosas restrições existentes em todos os níveis que eles têm de acatar no exercício de sua profissão. Sobre isso, Chevallard (2009b) alerta que, em geral, a infraestrutura matemática não está disponível ou não satisfaz as restrições chave de uma dada pedagogia, afirmando que isso se dá, geralmente, porque os autores têm ignorado, voluntariamente ou não, essas restrições.

Para enfrentar esse problema de infraestrutura didático-matemática, Chevallard (2009c) alerta que seria errado acreditar no mito do professor como o pequeno produtor independente que fabrica seu curso, pois em essência os materiais matemáticos que compõem sua organização vêm de outros lugares. Para clarear sua afirmação, recorre a uma metáfora a partir da profissão médica:

> Se situamos esta questão no contexto de uma profissão, não há mistério: acredita-se que se espera dos médicos, em geral, que inventem a vacina contra a AIDS? Em geral, todos sabem que a criação de tal “infraestrutura médica” não pode ser alcançada sem a mobilização de enormes forças

> produtivas. Gostaria de sugerir que não há razão para ser de outra forma no ensino. (CHEVALLARD, 2009b, p. 13).

Assim, reconstruir praxeologias inéditas não é tarefa de uma única pessoa, mas de sujeitos de uma instituição quando do enfrentamento de questões Q, do tipo: Como cumprir, de maneira inteligível e justificada, as tarefas t* de um certo tipo T*, que se constituem em Atividades de Estudo e Pesquisa (AER), que demandam, em princípio, projetar uma "situação" para concebê-la, com as suas tarefas? Nesse sentido, a tentativa de resolução deve induzir o encontro com as obras de interesse que possam ser feitas, pelos profissionais professores, a fim de que se constituam "na infraestrutura didático-matemática a serviço de evidências didáticas da razão de ser das noções matemáticas" (CHEVALLARD, 2009d, p. 8).

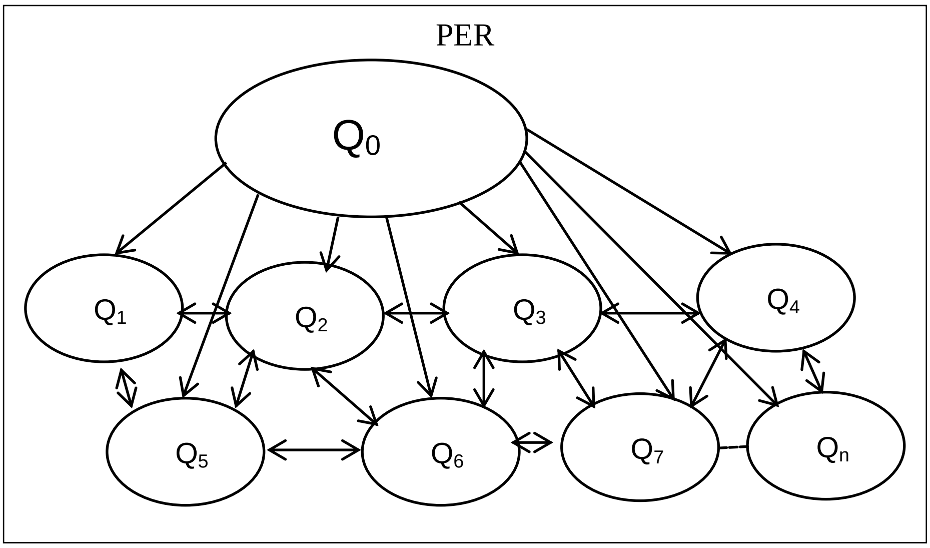
Nesse caminhar, Chevallard (2009c) destaca como parte da infraestrutura didática o Percurso de Estudo e Pesquisa (PER) que uma comunidade constrói a partir de uma questão previamente analisada como forte, e que desenvolve de modo aberto sem determinar, *a priori,* o tipo de OM que pode ser usado para desenvolver uma resposta para a questão geradora considerada. Não há uma rota previamente traçada que seguirá a comunidade de estudo, embora se possa vislumbrar uma ampla gama de possíveis caminhos a explorar sob as condições e restrições impostas pelos diferentes níveis de codeterminação didática.

Essa abertura inicial é necessária para que se "prime" pela resposta que se deve fornecer à questão inicial com OMs operadas sob condições entre restrições, e, claro, sob as condições e restrições específicas da Matemática escolar, de modo a dar respostas ao problema praxeológico, tendo em conta as dimensões epistemológicas, econômicas e ecológicas – nem todas simultaneamente presentes – que um problema da profissão docente exige, como buscamos mostrar na sequência.

1.4 O PER E A FORMAÇÃO

A pedagogia da investigação, mais especificamente o Percurso de Estudo e Pesquisa, com sigla no original PER, foi caracterizada por Chevallard (2004, 2006, 2009a, 2009b, 2009c) pela formulação de uma questão geratriz Q_0 com capacidade de gerar outras questões problemáticas Q_1, Q_2, Q_3 etc., sob as condições e restrições pedagógicas e específicas do saber em jogo, que resultam em um conjunto de respostas que virão a se constituir em uma sucessão de OMs articuladas entre si. Como na Figura 2:

Figura 2 – Esquema de um PER



O sentido forte como qualitativo da questão Q_0 refere-se à capacidade que esta deve possuir para propiciar, a partir dela, o desencadeamento de questões outras com respostas (R) acessíveis pela comunidade de estudos por meio de atividades matemáticas desenvolvidas pelo grupo.

Essas atividades não acontecem (ou não devem acontecer) de forma aleatória, são construídas por meio de estudos e pesquisas na infraestrutura didático/matemática disponível que revelam as possíveis respostas à questão. Assim, na constituição e desenvolvimento do PER, podem ser estabelecidas AERs com nível de abrangência local, pois, entre outros, têm como objetivo revelar a infraestrutura didático/matemática disponível relativa às obras matemáticas relacionadas à questão em jogo, daí por que

> a pedagogia da AER e, mais importante, a do PER, exige dos professores uma revisão profunda de sua relação com o saber, aqui a Matemática. Para dizer de uma única maneira: o saber (Matemática) não é algo que se sabe de antemão, é o que nós descobrimos juntamente com os alunos durante as investigações (“matemáticas”) – e independentemente destes e outros resultados serem conhecidos ou não pelo professor, estarão à mão ou permanecerão inacessíveis. (CHEVALLARD, 2009c, p. 08, tradução nossa).

Nesse sentido, na configuração do PER entre as questões derivadas, aparecerão questões cujas respostas para o seu enfrentamento não são de imediato identificadas pelo grupo, as quais requererão um processo de estudos ora mais profundo, ora menos, e até superficial, de obras que poderão levar à reconstrução das OMs e ODs desejadas; ou seja, “o estudo de Q_0 e de suas questões derivadas conduz a construção de um grande número de saberes que delimitarão o mapa dos percursos e seus limites” (FONSECA; BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 250), delineado em percurso configurado por um conjunto de sistemas didáticos.

Mais precisamente, para Chevallard (2009b, 2009c), o PER se constitui em sistemas didáticos a partir do sistema S (X, Y, Q_0) formado em torno de Q_0, em que X é um grupo de estudo, podendo ser de alunos, de professores, de pesquisadores, de jornalistas etc., e Y é um conjunto, podendo ser unitário, daquele que tem o papel de ajudar os estudos, o coordenador do estudo (professor, tutor, coordenador de pesquisa, editor etc.).

Pretende-se que, nesse ambiente, o resultado do trabalho que se espera de X, sob a orientação e supervisão de Y, possa produzir a reconstrução de OM e OD. Para isso, o sistema didático S(X, Y, Q_0) necessita de ferramentas, de recursos, em resumo, de um *millieu* didático M específico, que os sujeitos que compõem o sistema devem identificar e aprender a usar a fim de produzir $\mathbf{R}^{\blacktriangledown}$, e que Chevallard (2009a) representa por o que ele chama de esquema de Herbart[5], simplesmente como:

$$[S(X\ ;Y\ ;\ Q_0) \rightarrow M] \rightarrow R^{\blacktriangledown}$$

Esse *millieu* didático M é dinamicamente *construído* a partir de respostas (as praxeologias) e de obras requeridas para o estudo, presentes ou não nas instituições em jogo, que são movimentadas a fim de compor outras respostas em busca de uma resposta $\mathbf{R}^{\lozenge}$, em geral sempre parcial, relativa à questão Q_0. Refere-se à infraestrutura didático-matemática a que a Comunidade de Estudos pode recorrer, como os livros didáticos, o laboratório de informática, o quadro de escrever, as teorias matemáticas, as experiências desenvolvidas nas OMs e ODs já estabelecidas na instituição que possam ser desconstruídas ou reconstruídas, ou seja, tudo que tenha a função de apoiar a construção e validação de uma resposta $\mathbf{R}^{\blacktriangledown}$. Dessa forma, o sistema didático é reformulado por Chevallard (2009a) da seguinte maneira:

5 O termo usado refere-se ao filósofo e educador alemão Johann Friedrich Herbart (1776 - 1841).

$$[S(X\,;Y\,;\,Q_0\,) \rightarrow \{\,R^{\lozenge}_{1},\,R^{\lozenge}_{2},\,\ldots,\,R^{\lozenge}_{n},\,O_{n+1},\,\ldots,\,O_{m}\}] \rightarrow R^{\blacktriangledown}.$$

Torna-se necessário destacar que, para que aconteça o PER, é necessário que haja um questionamento do saber em jogo a partir das praxeologias existentes na instituição; ou seja, é necessário que “tanto X quanto Y tenham relação com a questão Q_0” (CHEVALLARD, 2009a, p. 17) que possivelmente se desdobrará em um percurso de investigação em busca da resposta desejada.

Assim, o PER se constitui em um Percurso de Formação de Professores, na formação inicial e continuada, à medida que vem constituir processos de estudos para o enfrentamento do problema praxeológico da instituição docente, de questões que emanam das e nas práticas docentes, das condições e restrições impostas a essas problemáticas, eliminando riscos de se querer formar professores a partir de um EP imutável que se deixaria sob a responsabilidade do professor para mobilizá-lo em situações concretas.

Nesse pensar, os EPs disponíveis passam a ser objetos questionáveis, a partir das necessidades praxeológicas que se criam no exercício da profissão, constituindo-se no estudo das questões, problemas ou necessidades, que estão na origem do processo de formação, que por sua vez levarão a reformulações desses EPs disponíveis.

Nesse sentido, o PER tem sido usado em diferentes pesquisas, em particular nas da comunidade de estudos liderada por Gascón sobre formação e prática docentes em Matemática, relacionadas ao enfrentamento do problema da desarticulação, como apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Pesquisas no Enfoque do Programa Epistemológico que trataram do problema didático da desarticulação entre objetos matemáticos para o ensino associada à prática e formação docente em Matemática

Tema/autor/ano	Problemática da prática docente	Indicações para a prática docente
***Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad* (FONSECA, 2004)**	A problemática central se inscreve no fenômeno da desarticulação da Matemática escolar. Mais especificamente nas descontinuidades matemáticas do ensino secundário ao das matemáticas do ensino superior.	Indica que para os estudos da Matemática em qualquer nível de ensino se faz necessário partir de uma questão suficientemente rica que possibilite gerar novas questões cuja resposta seja uma OMLRC. Para tanto, indica a utilização de dispositivos didáticos e metodológicos como a modelagem matemática e o PER.
***La modelización como instrumento de articulación de la Matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (GARCIA, 2005)**	A atomização dos conteúdos matemáticos. Como tema de investigação a proporcionalidade.	- Propõe o uso da Modelagem Matemática a partir do MER, como dispositivo didático que propicia a articulação da Matemática escolar. - Indica o PER como dispositivo metodológico que possibilita o questionamento das razões de ser das OMs nas instituições de ensino.
***Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (SIERRA, 2006)**	- A razão de ser dos conteúdos matemáticos para o Ensino Básico. - A elaboração separada das Organizações Matemáticas e das Organizações Didáticas.	- Indica a necessidade de considerar o modo inseparável do matemático e do didático - Propõe como dispositivo didático para a formação inicial do professor de Matemática um percurso de formação, a partir da construção e questionamento de um MER.
***Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (RODRIGUES, 2005)**	- A separação entre o fazer matemático (a prática) e o saber matemático (justificativas desta prática). - O problema da separação que no sistema educativo se faz entre o matemático e o didático.	- Propõe a metodologia da resolução de problemas como a origem e razão de ser de toda atividade matemática - Indica o PER como dispositivo didático que possibilita vivenciar em aula a razão de ser dos conhecimentos metacognitivos por meio da necessidade de construir praxeologias, para além da resolução de questões pontuais.
***Ecología de la modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (BARQUERO, 2009)**	-A desarticulação entre os conhecimentos matemáticos estudados e que se vai estudar. -A questão da ecologia do saber matemático vinculado às restrições institucionais.	- Indica uma nova epistemologia escolar que traduza o paradigma escolar da monumentalização dos saberes por um paradigma do questionamento do mundo. - Propõe o PER como um dispositivo didático que constitui a resposta da TAD ao problema da desarticulação e falta de sentidos da Matemática escolar.

Fonte: Fonseca (2004); Garcia (2005); Sierra (2006); Rodrigues (2005); Barquero (2009)

Nesse levantamento bibliográfico, percebemos que o PER é utilizado principalmente em duas perspectivas: como dispositivo didático e/ou metodológico, e que sua proposição se dá em ambientes escolares, mais especificamente em salas de aula do ensino básico ou universitário na formação inicial de engenheiros e na formação inicial e continuada de professores de Matemática, seja ela para a docência no ensino infantil ou no ensino secundário espanhol.

Em nossa pesquisa, propomos um PER com professores de uma comunidade de práticas com objetivo de construir um modelo epistemológico de referência (MER) para permitir a construção de OM e OD, tendo em conta os Modelos Epistemológicos presentes nas instituições que compõem a unidade escolar e o equipamento praxeológico institucional, das memórias das práticas de seus professores, que evidencie uma razão de ser de uma das OM/OD relativa à Geometria Analítica Plana presente nas proposições curriculares de uma instituição escolar.

A comunidade de práticas compreendida, nos termos expostos por Wenger (2001), como um agrupamento de pessoas que compartilham e aprendem uns com os outros em interações físicas ou virtuais, com objetivo ou necessidade de resolver problemas, trocar experiências, determinar ou construir padrões, técnicas ou metodologias, tudo isso objetivando aperfeiçoar suas práticas.

Assim, a comunidade de práticas se constitui em um ambiente propício para a implantação do PER, pois em nosso caso, na instituição escolar onde ocorre a parte empírica da pesquisa, os professores de Matemática se reúnem semanalmente para tratar das questões relativas ao fazer docente.

Dessa forma, buscamos nessa comunidade de práticas a ampliação desse espaço para além das questões pedagógicas, com a inserção das problemáticas didáticas, possibilitando aos professores socializar suas práticas confrontando suas experiências relativas a um determinado saber matemático para o estudo, portanto institucionalizado, com o objetivo da construção negociada de OM/OD que possa constituir-se em práticas matemáticas/didáticas de referência.

Sob a compreensão de um dispositivo metodológico de formação continuada para a prática docente, o PER se estabelece a partir da questão geratriz, que se constitui em: **Como fazer a construção de uma OM/OD, entendida como um conjunto estruturado de tarefas, que respondem a questões determinadas, com forte grau de integração e em ordem crescente de complexidade e que façam o reencontro dos professores com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analítica?**

Essa questão é fruto da necessidade institucional de construir Modelos Epistemológicos de Referências (MER) que permitam elaborar praxeologias matemáticas e didáticas de referência para essa dada instituição.

Assim sendo, nesta pesquisa assumimos os pressupostos metodológicos de uma pesquisa clínica-experimental caracterizada pelo desenvolvimento do PER, pois, segundo Chevallard (2009, p. 02), na TAD,

> o clínico refere-se a toda pesquisa, em particular qualquer experiência (na acepção da ciência experimental) que supõe e implica primeiramente em um conhecimento clínico do objeto de pesquisa [...], desta forma a experimentação é assumida como uma modalidade clínica.

O trabalho “clínico” implica que o pesquisador deva realizar investigações minuciosas sobre o objeto de pesquisa, considerando, como em nosso caso, as variáveis institucionais de condições e restrições advindas dos níveis de codeterminação didática: civilização, sociedade, escola, pedagogia, disciplina.

Por fim, o experimental no PER diz respeito às condições e restrições tanto nos níveis acima como abaixo dos níveis de codeterminação em uma clínica dos tipos de objetos, sejam eles quais forem, em que se trata na pesquisa, como do problema da desarticulação vinculado às problemáticas do currículo associado à formação e prática docentes. Isso permite projetar e realizar gestos observacionais “puros” ou experimentais (no sentido *lato* ou *stricto*), de onde o pesquisador pode ler e interpretar os resultados.

Dessa forma, assumindo o PER como a metodologia que propicia o questionamento dos EPs; vemos a necessidade de um dispositivo didático que provoque o acontecimento (o desencadeamento) desse percurso, a questão forte, e daí conjecturamos ser a Tarefa Fundamental um desses dispositivos.

Esse pensar não se deu ao acaso, mas a partir das compreensões dos trabalhos de Chevallard (2001b), Fonseca (2004) e Bosch, Fonseca e Gascón (2004), em que os autores destacam o cuidado com os tipos de tarefas que produzam o trabalho das técnicas, pois estas devem suscitar um questionamento tecnológico o mais abrangente possível, que resulte em uma atividade matemática de complexidade crescente.

Assim, há de se ter cuidado com os tipos de tarefas nas construções de praxeologias matemáticas/didáticas já que exercem posição de destaque, tanto no sentido da análise das organizações matemáticas e didáticas (OM/OD), como nas práticas docentes, pois dependendo dos tipos de tarefas eleitas, a reconstrução das

OMs e ODs poderá ou não proporcionar um fazer matemático articulado, justificado e compreensivo.

Nessa linha, de questionar as praxeologias disponíveis, damos conta de que as pesquisas até então desenvolvidas embora reconheçam a importância e o papel da tarefa na construção de praxeologias não a destacam, ou quando o fazem é de forma implícita. Nesse sentido, atentamos para a necessidade de se investigar a potencialidade das tarefas que vivem nas praxeologias de uma instituição, de promover a articulação entre os níveis de codeterminação disciplinar (temas, setores e áreas)[6] entre as praxeologias, de modo a minimizar a complexidade na construção de novas praxeologias, como os modelos praxeológicos de referência para a instituição em destaque.

Nessa perspectiva, questionar as praxeologias disponíveis consiste antes questionar as tarefas, mais precisamente, o seu papel na praxeologia e suas relações com outras praxeologias. Com este olhar, propor o enfrentamento do problema π do professor parece se reduzir a um único tipo de tarefa T_{π}, no entanto, visto de outra maneira, o tipo de tarefas T_{π} se desdobra em vários tipos de tarefas que compõem o que Chevallard (2001b) caracteriza como um sistema de tarefas. Isso porque certo tipo de tarefa T nasce em uma dada instituição como desdobramento de outro tipo de tarefa T´, sendo que a técnica ô´, que possivelmente responderia a T´, não dá conta desse tipo de tarefa. Mas o trabalho na técnica ô´ conduz a resolução das tarefas $t \in T$.

Nesses termos, o enfrentamento de um tipo de tarefa T´ é motivado pelo tipo de tarefa T ou vice-versa, significa que o tipo de tarefas T_{π} motiva assim, de maneira direta ou indireta, uma enorme variedade de tipos de tarefas que formam um sistema de tarefas.

Essa compreensão se estende de "forma mais ampla que T´ motiva T em uma dada instituição se existe tipos de tarefas T_1, T_2, ... T_n, tal que temos: $T' \searrow T_1 \searrow T_2 \searrow \ldots \searrow T_n \searrow T$" (CHEVALLARD, 2001b, p. 04). Então, o enfretamento de um tipo de tarefas requer a movimentação de outros tipos de tarefas que podem se caracterizar como subtarefas da tarefa que se pretende enfrentar.

6 Em acordo com a TAD (CHEVALLARD, 2001b e 2002), que propõe uma hierarquia de níveis de determinação da atividade matemática e seus resultados, ambos condicionados às condições e restrições observadas em cada nível ou na transição entre níveis.

É nessa dinâmica das tarefas – que pode se dar no interior de um pequeno conjunto de praxeologias e evoluir para um conjunto articulado e integrado de praxeologias, no sentido da Organização Matemática Local Relativamente Completa (daqui em diante OMLRC) anunciado por Fonseca (2004) – que vemos emergir a configuração de um PER, pois o tipo de tarefas T, que surge no seio de uma questão Q formada por um conjunto de outros tipos de tarefas T`, enfrentadas de maneira articulada para atender uma intenção didática, possibilita a formação de sistemas didáticos para a proposição de respostas $\mathbf{R}^{\Diamond}$ parciais.

Isso permite pensar que a questão geratriz Q_0 de um PER deva possuir o qualitativo de forte para proporcionar o desenvolvimento desse percurso, possa ser posta em termos do papel das tarefas, sob as condições e restrições institucionais impostas, para o atendimento de uma intencionalidade da instituição docente, que se traduz na busca de tipos de tarefas que se apresentam como respostas das questões derivadas que ainda são tarefas.

Dessa forma, o enfrentamento do problema da construção ou reconstrução das OMs e ODs pode ser visto como a eleição do tipo de tarefas de modo adequado às condições e restrições institucionais impostas para o estudo. Esse processo de desenvolvimento de escolhas de tipo de tarefas possíveis que atendam às condições e restrições institucionais constitui, sem dúvida, um problema da profissão docente que pode ser enfrentado em acordo com o desenvolvimento de um PER que se configurará em um dispositivo didático e metodológico de formação.

Assim, em um processo de formação continuada de professores de Matemática de uma instituição, assumimos como nossa investigação o papel da potencialidade das tarefas (ou tipos de tarefas) em articular com outras tarefas, potencialmente existentes nas praxeologias disponíveis, como dispositivo didático na promoção de um percurso de estudo e investigações para a produção de novas praxeologias.

Para tanto, de forma mais específica, elegemos na área da Geometria o setor Geometria Analítica como objeto matemático de análise, investigando as tarefas das praxeologias matemáticas desse setor no contexto histórico e epistemológico, nos livros didáticos e nas praxeologias dos professores em uma determinada instituição escolar.

Ao questionar o EP necessário para a prática docente, relativo a um dado saber e de acordo com as pesquisas realizadas no programa de pesquisas liderado por Gascón, temos assumido, de forma abrangente, o seguinte questionamento: Como se geram as praxeologias matemático-didáticas para efetiva ação de estudos na escola? Em outras palavras: Que dispositivos didáticos permitiriam retomar os conteúdos antigos, inclusive os estudados em etapas educativas anteriores, para questioná-los, desenvolvê-los e articulá-los em organizações matemáticas de complexidade crescente? Ou mais claramente: **De que forma um Percurso de pesquisa e investigação que envolve Tarefas Fundamentais pode constituir-se um dispositivo metodológico de formação de professores?**

Nesse caminhar, a seguir apresentamos as pesquisas realizadas no programa epistemológico de investigações em didática das matemáticas acerca do enfrentamento do problema da desarticulação e suas imbricações com o currículo da escola básica. Nosso objetivo é o aprofundamento para melhor situar nossas hipóteses relativas à nossa questão de pesquisa.

2 O ENFRENTAMENTO DO FENÔMENO DA DESARTICULAÇÃO

Neste capítulo, trataremos da desarticulação temática da Matemática escolar entendida como um problema do currículo associado ao problema praxeológico docente com desdobramento em vários dispositivos didáticos concebidos dentro do Programa Epistemológico de Pesquisas em Didática das Matemáticas para o enfrentamento dessa problemática.

2.1 A DESARTICULAÇÃO TEMÁTICA COMO PROBLEMA DO CURRÍCULO

Buscando enfrentar o fenômeno da desarticulação da Matemática escolar, Bosch, Garcia e Gascón (2006) iniciam por analisar os currículos matemáticos das instituições na Espanha, que se assemelham às diretrizes e aos parâmetros brasileiros e de muitos outros países, os quais estão estruturados em um conjunto de áreas, e estas em setores. Entretanto,

> o currículo assume desde seu início que todos os conteúdos fazem parte de uma organização maior, as matemáticas, sem estabelecer qual a maneira de articular estes conteúdos para proceder a seus estudos nas instituições escolares, além de algumas considerações gerais e um tanto vagas (BOSCH; GARCIA; GASCÓN, 2006, p. 51, tradução nossa).

Nas proposições curriculares, de modo geral, esses autores evidenciam que se atribui à resolução de problemas e à aplicação da Matemática em contextos reais um pretenso papel articulador dos diferentes conteúdos e das diferentes áreas e setores.

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), Bosch, Garcia e Gascón (2006), atualmente em muitos países e também no Brasil (PCN+, 2002) as indicações curriculares estão estruturadas em três grandes seções de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais: os conceituais surgem como respostas à questão: Quais conteúdos matemáticos a sociedade considera que devem ser estudados na escola? Os procedimentais tentam responder a questões do tipo: Até que ponto se deve estudar essa obra matemática? O que se deve poder fazer com ela? Já os atitudinais, por sua vez, questionam como se devem considerar as matemáticas no conjunto das obras da sociedade, assim como identificar os aspectos da atividade matemática que não se podem descrever como tarefas ou procedimentos.

Nesses termos, a tarefa da escola, em geral, e dos professores, em particular, pode ser concebida em: criar as condições que propiciem aos alunos terem acesso às obras matemáticas; mais claramente, “criar as melhores condições possíveis para que os alunos possam estudar – e, portanto, aprender – os conteúdos apresentados no currículo” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 121). Para tal fim, usa-se uma série de dispositivos pedagógicos, como biblioteca, sala de aula de Matemática, livro didático de Matemática, testes de Matemática, perguntas que fazem os professores na classe de Matemática etc. E também os dispositivos didáticos, caracterizados por Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 278) como sendo os dispositivos pedagógicos, ao incidirem “sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo da Matemática, funcionando como um *dispositivo de ajuda para o estudo da Matemática*, diremos que se trata, além disso, de um dispositivo didático [no sentido de didático/matemático]”.

Dessa forma entendemos, de acordo com Bosch, Garcia e Gascón (2006), que um dos problemas centrais está na estruturação e na organização dos conteúdos escolares expostos nos currículos, isto é, na elaboração de um programa de estudos para os alunos. Porém acentuamos que uma boa organização e estruturação dos conteúdos não garante nada em termos de ensino e aprendizagem, pois está ligada às praxeologias matemáticas e didáticas dos professores, ou seja, à intencionalidade docente.

O exposto implica, em termos da TAD, considerar a infraestrutura didático-matemática institucionalizada que promova a elaboração do currículo, destacando que essa organização não pode ser realizada de maneira independente da estruturação dos conteúdos em determinadas áreas, setores e temas, imposta pelas administrações educativas, e nem sem levar em conta as condições e restrições que provêm das instituições escolares.

O que não significa que o professor não possa, a partir dessa infraestrutura, desenvolver dispositivos didáticos para o enfrentamento do problema do currículo referente à desarticulação entre os objetos de estudos nas matemáticas escolares. Para tanto, Bosch, Garcia e Gascón (2006) expõem que, no Programa Epistemológico de Investigação em Didática das Matemáticas, o problema do currículo é desconstruído como um problema de ordem pedagógica, passando a ser tratado como de ordem didática. O modelo epistemológico das matemáticas é problematizado, ou seja, em vez de considerar que este é transparente e estabelecido de uma vez por todas, faz-se necessário considerar que os conhecimentos matemáticos, objeto de ensino nas instituições escolares, não estão prontos e acabados.

O problema da construção curricular na perspectiva da didática da Matemática inclui um componente matemático imprescindível, o que requer do docente um olhar cuidadoso para os elementos das praxeologias matemáticas que fazem parte de cada obra matemática componente do currículo, tomando como base as questões matemáticas a serem enfrentadas, mais especificamente as tarefas e as possíveis respostas que emergem do seu enfrentamento. “Não se trata unicamente de um problema de sequenciar ou temporalizar os conteúdos do currículo [...]. Trata-se, realmente, de uma verdadeira *reconstrução criativa* das obras matemáticas que fazem parte do currículo” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 128).

Tomando o problema do currículo no sentido da reconstrução das obras matemáticas, estaremos diante de um problema didático; dito de outra forma, em um problema de investigação didática, que, nos termos da TAD, requer considerar as questões epistemológicas ligadas ao problema do currículo. Então, a desarticulação da Matemática escolar, vista como uma das problemáticas curriculares, requer elaborar OMs e ODs que permitam articular o currículo de Matemática tanto em nível disciplinar como em nível escolar (etapas educativas), na perspectiva de poder rever conteúdos já estudados, questionando-os para que possam ser desenvolvidos e integrados em OMs mais amplas e complexas.

Para enfrentar esse problema, Bosch, Garcia e Gascón (2006) propõem duas maneiras imbricadas de abordagem. A primeira diz respeito à infraestrutura matemática presente nas instituições escolares – como o currículo – questionando a natureza das restrições que impedem que as OMs propostas possam gerar e dar sentido a OMs mais amplas e complexas, objetivando a reconstrução das OMs de maneira a torná-las mais completas e articuladas superando o nível temático. A segunda propõe o questionamento da infraestrutura didática existente, a fim de propor OD que possibilite a reconstrução de Organizações Matemáticas Locais Relativamente Completas (OMLRC) que permitam superar a atomização dos conteúdos da Matemática escolar.

Assumindo essa linha de investigação, no enfoque da TAD vários trabalhos já foram desenvolvidos, os quais de uma maneira ou de outra abordam o problema didático da desarticulação do conteúdo. Em Gascón (2001, 2002, 2011), é evidenciada a desarticulação entre a geometria sintética da educação secundária obrigatória e a Geometria Analítica do bacharelado (correspondente ao 3ª ano do ensino médio), questionando principalmente a razão de ser da Geometria Analítica que evidencia a monumentalização e o autismo temático[7] presentes na prática docente. Em resposta a esses problemas, tem desenvolvido OMs e ODs a partir de dispositivos didáticos como a resolução de problemas e a modelagem matemática na concepção do programa epistemológico.

Bolea (2003), ao tratar do problema da desarticulação entre a aritmética e a álgebra escolar, descreve a álgebra institucionalizada na escola como a generalização da aritmética. Concebe o processo de algebrização na perspectiva da modelação algébrica relacionada com o nível de algebrização da obra matemática de estudo na escola questionando até que ponto a algebrização de uma obra matemática pode ser considerada como um instrumento que permite desenvolver um processo de estudos que, por suas características, poderia ser denominado como processo de estudo integrado da obra matemática em questão.

No processo da modelação algébrica que se apresenta como resultado da Organização Matemática Algebrizada (BOLEA, 2003), objetiva-se um fazer matemático de complexidade crescente, associado ao nível de algebrização. Para avaliar esses níveis, Bolea (2003, p. 86) propõe os *indicadores do grau de algebrização* (IGA), quais sejam:

1- *Manipulação da estrutura global dos problemas*: a qual entendemos como o tratamento nas tarefas e tipos de tarefas que desencadeiam um processo progressivo de algebrização. “Isto significa que quanto mais algebrizada está uma organização matemática mais clara é a tendência a tratar com *tipos gerais de problemas,* em lugar de tratar unicamente com problemas isolados” (BOLEA, 2003, p. 86, tradução nossa, grifos da autora);

2- *Tematização das técnicas e nova problemática em nível tecnológico:* referem-se ao alcance da técnica, denotando um olhar para os tipos de tarefas que

---

7 Em Chevallard (2001a), diz respeito à prática docente em que geralmente os professores têm se limitado ao estudo do tema, ou, mais especificamente, da questão; não levando em consideração, em muitos casos, os níveis superiores de determinação, como o setor, a área, a disciplina etc., o que resulta na perda da razão de ser; ou seja, as razões que motivam sua presença no currículo.

são propostos no processo de algebrização, no sentido de verificar se existem ou não técnicas para a sua solução, e ainda, se esta é única. Implica dizer que a ascensão no nível de algebrização facilita "a proposição da questão das *condições de existência de soluções* (de um determinado tipo de problemas) e não só a questão da *determinação de uma solução desse tipo de problemas*" (BOLEA, 2003, p. 87, tradução nossa, grifos da autora);

3- *Unificação e redução dos tipos de problemas, técnicas e tecnologias*: são a redução dos elementos ostensivos; referem-se à capacidade de unificação dos tipos de tarefas e de suas técnicas correspondentes, bem como dos elementos tecnológicos. A organização matemática algebrizada deve possuir um número suficiente de tipos de tarefas e de técnicas que, em princípio, são diferenciadas. Significa que nesse indicador não podem ser avaliadas as OMPs, visto que giram em torno de uma única tarefa e de uma técnica para enfrentá-la. Nesse sentido, são as OMLs as que possuem características que propiciam avaliação por esse indicador, já que decorrem da integração de um conjunto de tarefas e técnicas que aceitam uma tecnologia comum;

4- *Emergência de tipos de problemas independentes do sistema de modelação*: esse indicador vem destacar a possibilidade de um processo de modelação em gerar tipos de tarefas fora do contexto em que se encontra a organização que está sendo analisada. "Quanto mais algebrizada está uma organização matemática, mais possibilidades tem de tornar-se independente do sistema que a modela" (BOLEA, 2003, p. 88, tradução nossa).

Esses indicadores, além de acentuarem a necessária complexidade crescente das organizações matemáticas, destacam a funcionalidade dos tipos de tarefas no processo de modelação algébrica e de avaliação das organizações matemáticas algebrizadas.

Fonseca (2004) e Fonseca et al. (2010), assim como Bosch, Fonseca e Gascón (2004), realizam investigações centradas no trânsito das matemáticas do ensino secundário espanhol para o ensino superior. Analisam as OMs nesses dois níveis de ensino a partir das noções de OMs pontuais, locais e regionais, e concluem que as OMs que se estudam no ensino secundário são pontuais, rígidas e isoladas, tanto entre si, como com as OMs estudadas na universidade tidas como regionais. Descrevem que a relação pessoal do aluno com a OM que se estuda no ensino secundário está essencialmente determinada pela relação institucional.

Postulam que a rigidez está relacionada com a incompletude das OMLs (Organizações Matemáticas Locais) que há no ensino secundário. E consideram que nessa incompletude se situa a base das descontinuidades matemáticas do ensino secundário à Matemática de ensino superior. A problemática central se inscreve no fenômeno da desarticulação da Matemática escolar.

Em resposta ao enfrentamento dessas problemáticas, os autores propõem indicadores que permitem medir o grau de completude de uma dada OM. Expõem a necessidade de se partir de uma questão suficientemente rica que possibilite gerar novas questões, cuja resposta seja uma OMLRC. Destacam que a OMLRC caracteriza-se pela dimensão do momento do trabalho da técnica, que implica no seu questionamento. Indicam e utilizam a modelagem matemática como dispositivo didático e o PER como dispositivo metodológico para o enfrentamento de problemas didáticos no ensino, cuja resposta seja uma OMLRC.

Garcia (2005) e Garcia e Ruiz-Higueras (2005) tratam do problema da atomização dos objetos de estudo no ensino secundário espanhol inserido na problemática da desarticulação da Matemática escolar. Tomam como tema de investigação a proporcionalidade das relações funcionais na educação secundária espanhola, questionando o isolamento da proporcionalidade no currículo devido à distribuição em temas, setores e áreas realizada pelos programas oficiais. Desenvolvem estudos sobre os processos de modelação matemática e o seu uso na Didática da Matemática.

O enfrentamento das questões associadas à desarticulação se dá a partir de um MER relativo às funções, em que propõem seu estudo ligado à modelagem matemática de sistema de variações. Esse MER resulta das análises nos documentos curriculares e nos livros-textos. Assumindo esse modelo, é posto em desenvolvimento um PER a partir de uma questão externa à Matemática escolar, como dispositivo metodológico no ensino secundário que possibilite o questionamento das razões de ser das OMs nas instituições de ensino. Neste, o destaque é a modelagem matemática, em termos do programa epistemológico, utilizada como dispositivo didático que propicia a articulação da Matemática escolar.

Em Barquero (2009), o interesse central é na problemática de questionar até que ponto as dificuldades dos estudantes não eram, na realidade, um reflexo do resultado de determinadas dificuldades do sistema de ensino, como a desarticulação temática, devido às restrições ecológicas que deveriam ser analisadas. Daí os questionamentos de como construir um processo de estudos que permita articular em uma OM suficientemente compreensiva e relativamente completa OMs pontuais e bastante rígidas que aparecem isoladas, descritas em termos de temas, em um programa oficial de estudos de uma determinada instituição docente. De que forma se interpreta em uma comunidade universitária atual o papel da atividade matemática e, especialmente, a modelagem matemática no desenvolvimento das ciências experimentais? Até que ponto prevalece o aplicacionismo? Qual é a economia dessa epistemologia dominante? Qual é sua ecologia?

Em resposta, Barquero (2009) destaca que do modelo didático e do modelo epistemológico dominante nas instituições universitárias surgem as primeiras restrições sobre a presença da atividade de modelação nessas instituições. Para responder a essas restrições, é proposto um PER como um dispositivo didático que aposta em uma nova epistemologia escolar que transforme o paradigma escolar da monumentalização dos saberes por um paradigma do questionamento do mundo.

O PER proposto na pesquisa de Barquero (2009) configura-se como um dispositivo didático que constitui a resposta da TAD ao problema da desarticulação e da falta de sentidos da Matemática escolar; em outros termos, a razão de ser dos objetos matemáticos propostos para estudo nas instituições escolares. Isso é assumido pelo entendimento da capacidade que o PER tem em permitir que a modelação matemática viva nos sistemas de ensino.

Apesar das várias proposições relativas ao problema do currículo vinculado ao problema da desarticulação – que envolve a atomização, o autismo temático, a monumentalização etc. – temos constatado que nenhuma das proposições, de forma específica, tratou da potencialidade que as tarefas têm em articular e justificar outras tarefas que poderiam de alguma forma possibilitar a reconstrução de OMLRC, podendo também servir como um dispositivo de entrada e convergência das etapas que ocorrem nos processos de modelagem matemática. Nesse sentido, passamos a descrever os dispositivos didáticos e metodológicos que entendemos como passíveis da proposição da tarefa fundamental.

2.2 DISPOSITIVOS DIDÁTICOS E METODOLÓGICOS PROPOSTOS NAS PESQUISAS REFERENCIADAS NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Bosch, Garcia e Gascón (2006) apontam o problema da desarticulação da Matemática escolar utilizando estudos sobre as relações funcionais estudadas no ensino secundário espanhol. Para enfrentar esse problema, eles têm desenhado e experimentado um dispositivo didático cujo objetivo é desenvolver na educação secundária obrigatória uma atividade matemática integrada e articulada em torno dos estudos de variações de grandezas, propondo uma reformulação no processo de modelagem matemática. Nesse sentido, afirmam que

> um dos fenômenos didáticos, diretamente relacionados com a ausência escolar dos processos de modelagem matemática, e o *fenômeno da desarticulação da Matemática escolar*, que se estende a praticamente todos os níveis do sistema de ensino das matemáticas (BOSCH, GARCIA e GASCÓN, 2006, p. 68, grifos do autor, tradução nossa).

O fenômeno da desarticulação é gerado por diversos fatores, que, pela complexidade que envolve o sistema educativo, sua identificação constitui, sem dúvida, um problema de investigação amplo e complexo. Porém, a TAD coloca à disposição dos investigadores várias ferramentas para mergulhar na origem desse fenômeno e construir soluções que ao menos diminuam a desarticulação observada e seus efeitos sobre o sistema didático.

O trabalho de Bosch, Garcia e Gascón (2006), bem como o de Garcia (2005), tem como proposta a reformulação dos processos de modelagem, na perspectiva da TAD, como processo de reconstrução e articulação de praxeologias de complexidade crescente (pontuais→locais→regionais), os quais devem começar a partir do questionamento da razão de ser das organizações matemáticas que se deseja reconstruir e articular, de onde surgirão as questões cruciais para os indivíduos nas instituições onde se desenvolverá o processo de estudos.

Especificamente para o problema da articulação do estudo das relações funcionais, os autores propuseram um PER a partir da questão da aplicação financeira em cadernetas de poupança, objetivando a reconstrução explícita de um MER do sistema de variação entre grandezas. Esse PER tem desempenhado um duplo papel nas investigações desses autores, qual seja, o de mostrar a pertinência e a potencialidade da reformulação da noção de modelagem matemática como ferramenta de análise didática, assim como construir uma solução para o problema da desarticulação do estudo das relações funcionais no ensino secundário.

Quanto ao processo de modelagem, Bosch, Garcia e Gascón (2006, p. 69) destacam que seu desenvolvimento e caracterização são redefinidos a partir do PER como "um processo de estudos longo e complexo que supõe a construção, a ampliação e a integração de um conjunto de praxeologias". Em suma, nesse trabalho os autores apresentam uma perspectiva de modelagem como um dispositivo didático para o processo de estudos, por meio de um PER, sendo essa ferramenta uma alternativa didática que visa propiciar um fazer matemático articulado.

Em outro estudo, Bosch e Gascón (2004) têm enfrentado um dos problemas docentes, que, segundo os autores, têm sido clássico nas instituições e pesquisas escolares, denominado como problema de Pólya, caracterizado como a problemática da resolução de problemas. Para tanto, os pesquisadores propõem uma reformulação desse problema, caracterizado como sendo a enorme dificuldade das instituições escolares para conseguirem que os alunos, além de resolverem os exercícios rotineiros, cheguem a resolver verdadeiros problemas matemáticos.

Esse problema é reformulado, a partir da TAD, como um problema de investigação do fenômeno da desarticulação do currículo escolar. Como resposta a essa reformulação do problema de Pólya, os autores postulam que, em geral, "qualquer problema didático requer uma descrição prévia da dinâmica institucional das organizações praxeológicas matemáticas e didáticas postas em jogo" (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 1). Isso amplia a necessidade de um olhar cuidadoso no âmbito em que se situa o objeto de estudo da Didática da Matemática, o que conduz à reconstrução teórica das praxeologias empíricas e "evidenciará a praxeologia local como unidade mínima de análise" (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 1).

Na tradição da resolução de problemas, é assumido quase explicitamente que o ensino da resolução de problemas (no sentido de Pólya) alterará as práticas da escola tradicional para acomodar uma verdadeira atividade matemática em que os alunos construirão seus próprios métodos de resolução, em vez de aplicá-los mecanicamente. Nesse sentido, Bosch e Gascón (2004, p. 4) expõem o que consideram uma ideia bastante ingênua, que está atualmente em vigor nas diretrizes curriculares dos Princípios e Padrões para a Matemática Escolar do *National Council* *of Teachers of Mathematics* (NCTM), na qual a resolução de problemas, além de ser uma dimensão essencial da atividade matemática, teria um papel na organização e articulação dos diferentes conteúdos do currículo.

Essa qualificação atribuída à metodologia de ensino, denominada como resolução de problemas, situa a atividade no nível da disciplina, pois se coloca ao nível da reorganização geral do currículo de Matemática. Para essa qualificação, Bosch e Gascón (2004) tomam como níveis de análise os níveis de codeterminação das ODs e OMs propostas por Chevallard (2001a, 2002), quais sejam:

Sociedade
↓
Escola
↓
Pedagogia
↓
Disciplina
↓
Área
Sociedade
↓
Sociedade **Setor**
↓
Tema
↓
Questão

A partir desses níveis de codeterminação das ODs e OMs, Chevallard (2001a, p. 02) destaca que as ODs, organizações transmissoras, dependem das OMs, organizações a transmitir. Assim, ocorre um "isomorfismo" didático-matemático que se propagará mediante os níveis hierárquicos expostos acima; significa que cada nível impõe restrições didáticas específicas sobre a OM proposta para o estudo em sala de aula, ou seja, em cada etapa se impõem restrições e condições que acabam definindo o que é possível ser feito para estudar a questão considerada.

> Para se transmitirem conhecimentos de certa questão, que se encontra no nível mais baixo da hierarquia, deve-se percorrer um caminho que começa na sociedade e continua pela escola, considerando certa pedagogia dentro

> de uma disciplina em que se estuda a questão, por certo setor de uma área, e por certo tema de um setor. (CHEVALLARD, 2001a, p. 03, grifos do autor, tradução nossa).

Trata-se, portanto, de que em todo o dispositivo didático – como na resolução de problemas –, ao considerar o enfrentamento de uma questão – como calcular a distância entre dois pontos que emerge de um tema, estudo do ponto, no seio de um setor Geometria Analítica, vinculado à área Geometria, que compõe a disciplina Matemática – devem-se considerar as condições e restrições sobre a OM, advindas dos níveis superiores de hierarquia para que seja elaborada a OD correspondente.

Apesar de Bosch e Gascón (2004) situarem a resolução de problemas no nível da disciplina, destacam que podem ocorrer situações em que cada problema esteja associado a uma questão específica, proporcionando, inclusive, atividades matemáticas isoladas, como quando a resolução do problema tem objetivo em si mesmo, mantendo-o relativamente separado do resto das atividades matemáticas, assumindo características de atividades matemáticas pontuais, o que o coloca no nível da questão. Também a atividade pode se situar no nível do tema – aplicações do Teorema de Pitágoras, a utilização da regra de três etc. – no qual a atividade que se coloca evidencia o estudo da classe ou das classes de problemas relativos a tais temas, configurando-se como uma atividade matemática local.

Também pode ocorrer o desenvolvimento de atividades matemáticas por meio da resolução de problemas em níveis superiores ao nível temático, de forma mais genérica no nível do setor ou da área como problemas de funções, de Geometria Analítica, da álgebra etc. Muitas vezes coloca-se apenas como problemas de Matemática, destituindo o vínculo com um determinado tema, setor ou área, o que proporciona atividades descontextualizadas e isoladas sendo atividades matemáticas pontuais.

A partir dessas considerações, Trigueros (2003), apud Bosch e Gascón (2004, p. 08) expõe o seguinte questionamento: “até que ponto os estudantes podem relacionar os distintos conceitos de cada parte das matemáticas para formar um todo que possam utilizar conjuntamente na resolução de problemas?”. Em resposta, Bosch e Gascón (2004, p. 10) assumem o que é postulado na TAD: “na vida das instituições nunca se estudam problemas isolados [...] o que importa não é o problema a ser resolvido e sim o que se fará depois com a solução encontrada”.

Assim, a proposição dos autores se caracteriza por atividades matemáticas que proponham resoluções de problemas que propiciem

> a reprodução e desenvolvimento em tipos de problemas cada vez mais amplos e complexos, tipos de problemas cujo estudo provocará novas necessidades tecnológicas que, por sua vez, permitirão construir e justificar técnicas novas capazes de resolver novos tipos de problemas da organização matemática inicial. Essa hipótese antropológica pode ser sintetizada dizendo que *o processo de estudos de um tipo de problemas* desemboca na reconstrução institucional de *organizações matemáticas de complexidade crescente*. (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 10, grifos dos autores, tradução nossa).

Na pesquisa de Bosch e Gascón (2004), é evidenciado um processo de estudos que utiliza a metodologia da resolução de problemas de maneira mais ampla, no sentido de provocar um fazer que visa à reconstrução de organizações matemáticas com maior amplitude e completude, o que, segundo os autores, pressupõe um processo de estudos fortemente integrado e articulado.

No trabalho de Bosch, Fonseca e Gascón (2004), destaca-se a necessidade de desenvolvimento de praxeologias matemáticas de complexidade crescente, as quais se estabeleceriam como referência de análise da atividade matemática institucional. Entende-se como complexidade crescente das OMs o percurso didático de uma Organização Matemática Pontual (OMP) a uma Organização Matemática Local (OML) até alcançar uma Organização Matemática Regional (OMR). Para tanto, é imprescindível no processo provocar movimentações e articulações necessárias entre os tipos de tarefas, T; as técnicas, ô; as tecnologias, θ; e as teorias, Θ.

Em uma instituição, a OMP se estabelece em torno de único tipo de tarefa, que depende da instituição em que está colocada e é determinada pelo seu bloco prático-técnico [T / ô]. Para se descrever a OMP, dever-se-á detalhar com certa precisão o tipo de tarefa e as pequenas variações da técnica que se considera na instituição de referência como uma mesma técnica. E também é preciso especificar em que ponto as pequenas variações da técnica são consideradas na instituição de referência como a constituição de uma nova técnica; em consequência, é necessário verificar quais são as novas OMPs e que relações têm com a OMP inicial.

A OML em uma instituição é o resultado da integração de OMP em torno de um discurso tecnológico comum que a caracteriza e serve para justificar, explicar, relacionar entre si as técnicas de todas as OMPs que a integram. A integração das OMPs em OMLs objetiva dar respostas satisfatórias a um conjunto de questionamentos problemáticos que não se poderiam resolver completamente por nenhuma OMP inicial. Dessa forma, as novas questões deveriam constituir a razão de ser da OML, porém as relações entre as questões e as respostas tendem a inverter-se até o ponto em que a razão de ser da OML tende a desaparecer.

O outro fenômeno associado ao estabelecimento de uma OML é o caráter autotecnológico, “trata-se de técnicas que justificam a si mesmas ou, em outros termos, de técnicas tão naturalizadas e transparentes nas instituições que não parecem necessitar de nenhuma justificativa externa a elas mesmas” (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 214). Esse fenômeno ocorre em função de as instituições privilegiarem apenas um tipo de técnica para um dado tipo de tarefa, sendo essa técnica a maneira evidente e inquestionável de se resolver a tarefa em questão, o que dificulta a integração de OMPs em praxeologias mais amplas.

Uma OMR se caracteriza pela articulação e integração de várias OMLs em torno de uma teoria matemática comum Θ. A reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias relativas às OMLs que integram a OMR. E ainda, descrever uma OMR é o mesmo que descrever uma teoria unificadora das OMLs que a integram; as relações estabelecidas entre tais OMLs constituem as novas questões problemáticas que podem abordar-se na OMR final, e que não podem ser abordadas em nenhuma das OMLs iniciais.

As OMLs que aparecem explicitamente nas instituições escolares são constituídas a partir de uma integração incompleta ou coordenação demasiadamente fraca de certas OMPs e, como consequência, “as OMLs que vivem nas instituições escolares apresentam múltiplas incompletudes” (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 219). Nesse sentido, Bosch, Fonseca e Gascón (2004) concluem que só se podem mostrar as características e experimentar um processo de estudos de uma OML se previamente for realizado um trabalho de engenharia matemática que permita reconstruir OMLs relativamente completas.

Segundo Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 215), para determinar o grau de completude de uma OML duas características interligadas devem ser consideradas: a dinâmica do processo de estudos para a reconstrução da OML, e, simultaneamente, as propriedades de sua estrutura definida a partir dos componentes praxeológicos e das relações entre eles.

De acordo com o que é postulado pela TAD, a reconstrução das OMLs ocorre na dinâmica dos momentos de estudos, sendo esses atemporais. Então, Bosch, Fonseca e Gascón (2004) destacam que o grau de completude dependerá da maneira em que se cumpram as seguintes condições:

1- A OML deve responder às questões problemáticas advindas das OMPs que as constituem e que não podem ser respondidas por nenhuma das OMPs iniciais– essas questões se constituem na razão de ser da OML. Isso se configura no primeiro encontro com um tipo de tarefa T_q associada a uma questão **q** que provenha dos níveis superiores de determinação;

2- A reconstrução de uma OML deve conter um momento exploratório, em que a comunidade de estudos empenha-se em estabelecer uma técnica inicial $ô_o$ com grande potencialidade para o enfrentamento das tarefas do tipo T_q. Além disso, esse momento deve propiciar a exploração das variações de $ô_o$ que surgem ao abordar as diferentes tarefas do tipo T_q;

3- Na exploração da técnica $ô_o$, desencadeia-se um verdadeiro trabalho na técnica que inicia por tornar rotineiro o uso desta, e, em consequência, o seu desenvolvimento progressivo, o que deve gerar técnicas relativamente novas para a comunidade de estudos. Esse trabalho da técnica deve continuar até que os alunos tenham dominado esse conjunto de técnicas, provocando assim a ampliação progressiva do tipo de tarefas iniciais T_q e o surgimento de novos tipos de tarefas;

4- O questionamento tecnológico advém das diferentes técnicas que vão aparecendo; isto é, questões relativas à interpretação, à justificação e ao alcance das técnicas, bem como as relações que são estabelecidas entre elas, compondo assim um conjunto de questões cuja resposta requeira a realização de novas tarefas matemáticas que constituirão a reconstrução da OML. Dessa forma, faz-se necessário um marco tecnológico-teórico que englobe todas as técnicas necessárias para o enfrentamento desse novo conjunto de tarefas, “se não se fizer nenhuma referência ao processo concreto de construção, se diz que uma OML está caracterizada por uma tecnologia, θ, que engloba a todas as OMPs que a integram” (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 217);

5- Devem-se institucionalizar os elementos considerados pela comunidade como componentes explícitos da OML, diferenciando dos elementos que ao longo do processo se colocaram como ferramentas auxiliares para o processo de reconstrução. A institucionalização de qualquer elemento da OML deve fazer referência a ela, ou seja, “o que se institucionaliza é sempre ao menos virtualmente a OML” (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 217);

6- Faz-se necessária a avaliação da qualidade dos componentes da OML construída. Quanto aos tipos de tarefas, devem ser facilmente identificados: Estes possuem variadas espécies do mesmo tipo? A quais questões as tarefas estão associadas? Têm relação com as outras atividades dos alunos? Quanto às técnicas, foram suficientemente trabalhadas? São confiáveis? São econômicas? São as mais pertinentes para a realização das tarefas apresentadas? Quanto ao discurso tecnológico, são explícitos? Ajudam efetivamente a explicar e justificar as técnicas? Permitem variar as técnicas possibilitando a construção de novas técnicas?

Considerando que uma OML é o resultado do processo de construção que se cumpre nos seis momentos anteriormente descritos, Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 217) indicam, por meio de sete indicadores, o grau de completude de uma OML, e ainda enfatizam a relação entre o processo de construção de uma OML e o produto resultante como constituinte de “uma unidade indivisível, uma totalidade organizada cujos componentes se implicam mutualmente”. Assim, os sete indicadores são:

1- *Integração dos tipos de tarefas*: o grau de completude depende da integração entre os distintos tipos de tarefas e os vínculos existentes entre elas, uma OML será menos completa quanto mais isolados estejam os tipos de tarefas que a compõem;

2- *Diferentes técnicas que permitam a eleição da mais eficiente entre elas e que provoquem economia didática*: uma OML será mais completa quando existirem técnicas alternativas para realizar alguns tipos de tarefas, isso implica na existência de elementos tecnológicos que permitam questionar as distintas técnicas alternativas;

3- *Independência dos ostensivos que compõem a técnica*: em uma OML, o grau de completude depende da rigidez existente entre as técnicas e os objetos ostensivos que se utilizam para descrevê-las e aplicá-las; ou seja, são necessárias diferentes representações ostensivas dependendo da atividade matemática na qual estão imersas e para a tarefa específica abordada dentro de um tipo de tarefa;

4- *Existência de tarefas e técnicas inversas*: o grau de completude é também proporcionado pela existência de técnicas reversíveis; ou seja, técnicas que permitam resolver um tipo de tarefa e também a tarefa inversa desta. O inverso caracteriza-se pela troca de dados e incógnitas;

5- *Interpretação do resultado da aplicação das técnicas*: uma OML estará mais completa quando o seu discurso tecnológico adquirir mais funcionalidade, especialmente na interpretação do funcionamento das técnicas e de seu resultado;

6- *Existência de tarefas matemáticas abertas*: é a possibilidade de se abordarem questões matemáticas abertas; isto é, tipos de tarefas em que se estudam situações nas quais os dados e as incógnitas não são prefixados completamente de antemão. Segundo Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 219), as questões abertas são estabelecidas em dois níveis. No primeiro nível, os dados da questão são valores conhecidos tratados como desconhecidos (parâmetros), e no segundo, as incógnitas não são objetos matemáticos concretos, mas sim relações estabelecidas entre elas em determinadas condições explicitadas no enunciado da tarefa;

7- *Incidência dos elementos tecnológicos sobre a prática*: significa que uma OML se caracteriza pela sua tecnologia; isto é, o grau de completude de uma OML está ligado ao fato de se estabelecerem relações entre os elementos tecnológicos e a sua incidência efetiva sobre a prática matemática realizada na OML, o que resulta na constituição de novas técnicas capazes de ampliar os tipos de tarefas de uma OML.

Bosch, Fonseca e Gascón (2004), ao admitirem que a noção de completude é relativa, destacam que as condições acima, para verificar o grau de completude de uma OML, não estabelecem precisamente se uma OML é completa ou incompleta. Trata-se, em todos os casos, de uma questão de grau, já que existem OMLs mais ou menos completas que outras em função do grau em que seus componentes cumprem as condições descritas pelos indicadores 1-7. Assim, entendemos que a completude é configurada não apenas pelo produto, mas também pelo processo de construção de uma OML de forma bastante articulada por meio dos momentos didáticos de 1-6.

Assumindo que no ensino médio “as OMs são pontuais, rígidas e isoladas”, Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 223) estabelecem cinco conjecturas para servirem de referência para suas análises da parte empírica da pesquisa, quais sejam:

1- *Dependência da nomenclatura associada à técnica*: no ensino médio, a rigidez das OMPs pode levar a identificar e até a confundir a técnica com os objetos ostensivos que constituem seu suporte material;

2- *Aplicar uma técnica não inclui interpretar o resultado*: geralmente não se exige interpretação adequada do resultado da aplicação de uma técnica para se verificar se foi corretamente utilizada. Significa que essa não é uma responsabilidade que o contrato didático institucional assegura ao aluno;

3- *Não existem duas técnicas diferentes para realizar uma mesma tarefa*. No ensino médio, utilizam-se técnicas isoladas e muito rígidas até o ponto de que, ainda que existam duas técnicas diferentes para um mesmo tipo de tarefa, o contrato didático institucional não estabelece como responsabilidade do aluno a escolha entre as duas técnicas a que melhor resolva a tarefa em questão. O que ocorre é que uma das técnicas acaba se colocando como a maneira de resolver o problema, adquirindo um caráter autotecnológico e provocando o desaparecimento da outra técnica;

4- *Ausência de técnicas para realizar a tarefa inversa*: a não reversão das técnicas matemáticas correspondentes se constitui como um aspecto bastante importante da rigidez das OMPs no ensino básico. O contrato didático institucional não estabelece que no trabalho matemático do aluno ocorra a inversão da técnica para resolver a tarefa inversa à tarefa inicial. Quando existem tarefas inversas, estas são resolvidas por técnicas sem nenhuma relação entre elas;

5- *Ausência de situações abertas de modelização*: os problemas no ensino básico se mostram com enunciados muito fechados, fornecendo todos os dados necessários para resolver os problemas. Raramente se apresenta uma situação em que o aluno deva decidir quais são os dados necessários para formular corretamente a situação.

Partindo dessas premissas e confrontando-as com o material empírico utilizado na pesquisa por eles realizada no ensino secundário espanhol, Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 237) fizeram análises sobre as relações entre os diferentes aspectos da rigidez das OMs que se estudam no ensino médio; a incompletude das OMLs que se reconstrói nessas instituições; as restrições institucionais que pesam sobre a atividade matemática escolar; e as descontinuidades entre o ensino médio e o ensino universitário. Essas análises possibilitaram chegar às seguintes conclusões:

1- No ensino secundário, as técnicas matemáticas tendem a se identificar com os próprios objetos ostensivos que se utilizam para descrevê-las e para aplicá-las. Essa situação é inevitável quando se apresenta pela primeira vez uma técnica aos estudantes; o que Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 239) consideram como uma restrição normal na primeira fase do desenvolvimento da atividade matemática; porém, se no desenvolvimento da atividade essa restrição não for superada, aparecerão conflitos nas etapas posteriores da educação matemática;

2- Há uma dificuldade para realizar as tarefas que necessitam de interpretação, explicação e justificação da atividade matemática que se está realizando; ou seja, questões que provocam a movimentação do bloco tecnológico-teórico. Isso apoia a hipótese de que a atividade matemática que se desenvolve no ensino médio é predominantemente prático-técnica e raras vezes alcança o nível tecnológico. Assim, aparece outra restrição institucional, a que concentra a atividade matemática do nível do saber-fazer, o que gera uma Matemática em que as demonstrações são meras ilustrações e as propriedades e os resultados são apresentados como uma figura, um esquema ou um exemplo particular;

3- Muitas técnicas utilizadas para o enfrentamento de tarefas nas atividades matemáticas do ensino médio têm um caráter naturalizado e autotecnológico, ou seja, são técnicas colocadas como se fossem a única maneira de resolver tais tarefas. Esse aspecto da rigidez implica forçosamente que os diferentes tipos de tarefas estudadas aparecem pouco articuladas entre si, como atomizadas, porque dessa forma se pode associar institucionalmente a cada tipo de tarefa a técnica correspondente. Isso, segundo Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 239), implica uma restrição institucional em que o tipo de atividade matemática realizada no ensino médio raramente começa por um tipo de tarefa matemática que vá se ampliando sucessivamente à medida que a técnica correspondente vai se desenvolvendo por meio do trabalho dos alunos;

4- No ensino médio, o processo de construção das OMs não institucionaliza a tarefa matemática de inverter uma tarefa, nem, por conseguinte, a tarefa matemática de inverter uma técnica para realizar a tarefa inversa, isso também se configura como uma restrição que provoca disfunções na atividade matemática do ensino médio;

5- No ensino médio, há pouca incidência de questões abertas, e quando existem se reduzem à manipulação de um modelo matemático dado previamente no enunciado da tarefa, o que impede a realização da modelagem matemática, a qual requer a eleição das variáveis pertinentes e a construção de um modelo matemático da situação dada. Nesses termos, Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 241) descrevem outra restrição da atividade matemática do ensino médio, pois, ao considerarem que toda atividade matemática é uma atividade de modelação, concluem que a escola não está cumprindo sua função de preparar o aluno para desenvolver progressivamente atividades de modelação, o que pode ser um indício do fracasso escolar;

6- Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 241) concluem que a relação pessoal dos alunos com as OMs que se estudam no ensino médio é essencialmente determinada pelas relações institucionais, o que confirma a hipótese básica do programa epistemológico, mais especificamente da TAD. As respostas dos alunos às questões propostas na parte empírica da pesquisa revelam não características pessoais, mas práticas institucionalizadas que adquiriram ao longo de sua carreira estudantil;

7- Se em uma instituição não se constrói OMLRC, não se pode esperar que os alunos as construam espontaneamente, o que aponta para a necessidade de que a própria instituição docente coloque a necessidade de se reconstruir OMLRC, evidenciando a flexibilidade e a integração das OMPs que se estudam no ensino médio.

Em consequência dessas investigações, Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 242) suscitam dois questionamentos para os quais destacam ainda não terem respostas: Que características específicas deveriam possuir uma organização didática escolar para poder reconstruir uma OMLRC? *Que técnicas didáticas se deveriam pôr à disposição do professor para que pudesse desenhar e gerenciar tal processo de estudos?* Como indicação, os autores asseveram que “por meio dos momentos didáticos poderia se responder a primeira destas perguntas e em consequência atacar a segunda por meio de três técnicas didáticas” (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 242).

1- Partir de uma questão problemática cuja resposta seja forçadamente uma OMLRC;

2- Partir de uma atividade matemática dentro de uma OMP que provoque o trabalho da técnica;

3- Partir de uma OMP em que surjam questões cujas respostas desencadeiem processos de modelação matemática ampliando progressivamente a OMP até obter uma OMLRC.

E ainda, Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 243) destacam que, para enfrentar esse problema, "é necessário questionar tanto a estrutura das OMs escolares que se ensinam atualmente, como a natureza de seus componentes e sobre tudo sua razão de ser". Por fim, por meio da pesquisa de Bosch, Fonseca e Gascón (2004), abre-se um amplo leque de investigações que requer um desenvolvimento teórico da TAD para enfrentar o problema geral da articulação do currículo de Matemática.

Nesse sentido, comungamos com esses autores acerca de tal entendimento, inclusive quanto aos questionamentos abertos postos e, em particular, com os encaminhamentos dados para responder a esses questionamentos. Se o encaminhamento dado para o primeiro questionamento não é simples, é objetivo do ponto de vista da intenção didática de atender os momentos didáticos; no entanto, o mesmo não se pode afirmar quanto às três técnicas didáticas encaminhadas para o segundo questionamento.

Primeiro, por não se ter de modo simples e *a priori* uma questão necessária com selo de problemática suficiente para que leve à OMLRC. Segundo, porque as OMPs são naturalizadas o suficiente nas OMs/ODs escolares para não permitir o trabalho da técnica e o emergir de questionamentos que levem a OMLRC. De outro modo, exigiria a questão problemática da primeira técnica didática sugerida.

Assim, assumimos apenas a primeira técnica didática: *partir de uma questão problemática cuja resposta seja forçosamente uma OMLRC.* Para isso, partimos do entendimento da Transposição Didática sobre a necessidade da integração e articulação de objetos matemáticos, de modo que permanentemente, no currículo, o objeto seja renovado em contrastes novo/velho, deixando aparecer a razão de ser de um objeto de estudo em que o questionamento no sentido forte pode ser traduzido em propor tarefas que, para serem enfrentadas, requeiram um conjunto estruturado de tarefas, em que fique claro o papel dos tipos de tarefas, como questionamentos fortes que conduzem o processo de estudos.

De outro modo, dispomos de modelos de respostas – como a OMLRC – e de processo para sua construção – como o PER – que mantêm complexidades que se materializam em dificuldades para desdobramento do percurso de estudo e de pesquisa. O modelo da busca e de construções objetivas de questionamentos fortes que permitam que tal processo produza respostas possíveis para o enfrentamento da problemática da desarticulação em seus desdobramentos ao nível disciplinar entre temas, setores e áreas, como também ao nível das etapas educativas.

Para isso, propomos inicialmente a construção de modelos epistemológicos de referências por meio de um PER que teria como questão forte a escolha ou as reconstruções de tarefas, entre as tarefas disponíveis no EP institucional docente, na epistemologia e na história do saber matemático, inclusive escolar, que tenham por funcionalidade atender às intenções didáticas institucionais, entre elas, aquelas que podem ser eleitas como Tarefas Fundamentais por se configurarem como ponto de partida e ponto de convergência de outras tarefas por suas potencialidades de articulação, integração e justificação de outras tarefas vinculadas a um tema, setor ou área, postas como dispositivos didáticos que comporiam a infraestrutura matemático-didática em uma dada instituição escolar.

Portanto, nossa proposta caminha no sentido da proposta de Fonseca (2004) quanto à configuração da resposta como uma OMLRC, mas difere desta e da de Garcia (2005) e Bolea (2003) no sentido em que as tarefas não são eleitas para prover o trabalho da técnica que levaria à complexidade crescente, mas a partir da compreensão de que a complexidade crescente pode ser entendida como o enfrentamento de tarefas por meio de articulações e integrações de outras tarefas, ou seja, de um conjunto estruturado de tarefas dependentes de outras tarefas sob as condições e restrições institucionais, entre elas e não menos importante, a instituição docente.

Isso exige encaminharmos a seguir a compreensão sobre o papel das tarefas em nossa pesquisa.

3 TIPOS DE TAREFAS FUNDAMENTAIS

A TAD enfatiza três tipos de atividades: as estritamente humanas; as estritamente institucionais e as humanas reguladas por critérios institucionais, as quais podem ser exemplificadas, respectivamente, como sendo o ato de tomar água, emitir uma certidão de nascimento e ministrar uma aula de Matemática.

Nas atividades do terceiro tipo – atividades humanas reguladas por critérios institucionais, como a exemplificada acima (o ato de ministrar aula de Matemática) –, o professor tem a liberdade de escolher o objeto de ensino, porém essa escolha é vinculada a alguns critérios que devem ser considerados, como a série ou a faixa etária dos alunos, a matriz curricular da instituição, dentre outros. Assim, na construção da OD relativa a uma dada OM, é necessário considerar o conjunto de regras e normas estabelecidas pelas instituições escolares, no sentido de regular a atividade. São esses tipos de atividades que caracterizam as atividades humanas e das instituições sociais, ou seja, o conectivo “e” significa estar na intersecção entre as atividades estritamente humanas e as atividades estritamente institucionais. É no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais que se localizam as atividades matemáticas, o que, segundo Chevallard (2002), é um dos princípios fundamentais da TAD.

Com a designação antropológica dada a essa teoria, Chevallard quer destacar que um saber é relativo a uma determinada instituição, a qual vive com características específicas. O autor caracteriza fundamentalmente três elementos: o *sistema didático*, como marco sistemático de referência à análise; a noção *praxeológica*, como marco conceitual que estrutura a noção de saber; a *transposição didática,* como teoria que abarca os fenômenos de trânsito do saber entre instituições.

Ao que propõem Chevallard et al. (2001) quanto à distinção entre técnica, tecnologia e teoria, Miguel (2005), Fonseca et al. (2010a, 2010b) e outros descrevem que essa diferença é de ordem funcional e deve sempre se referir ao tipo de tarefas que se toma como ponto de referência. Para esses autores, no âmbito da tecnologia situam-se os conceitos e as noções que permitem compreender e controlar a atividade humana; nele, objetos ostensivos são manipulados concretamente para permitir materializar explicações e justificações necessárias ao desenvolvimento da técnica; a teoria é a especulação abstrata da tecnologia. No plano teórico, estão as definições, os teoremas, as noções mais abrangentes e abstratas que servem para explicar, justificar e produzir tecnologias. Cria-se, então, o bloco teórico-tecnológico associado ao saber.

Mas, podemos pensar as OMs e as ODs para um processo de estudos bem como para a difusão social da Matemática, como (re)construção de praxeologias por meio da organização de um conjunto de tarefas de uma obra matemática que atende a condições institucionais que advêm dos níveis de codeterminação didática.

Nesse sentido, a organização de tarefas implica considerar as condições institucionais que orientam a atividade matemática. Em Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a atividade matemática do ensino secundário espanhol, como no brasileiro, se caracteriza por OMs pontuais, rígidas e isoladas, visto que nelas verificam-se as conjecturas: a técnica, em muitos casos, confunde-se com os objetos ostensivos; não se aplica a técnica com a intenção de interpretar o resultado; em geral, trabalha-se apenas uma técnica para realizar uma tarefa; há ausência de tarefas inversas e, em consequência, de técnicas para realizar a tarefa inversa; raramente se propõem tarefas abertas.

Admitindo essas conjecturas, e confrontando-as com as OMs e ODs presentes em nossas instituições de ensino básico, percebemos que em alguns casos se configuram como condições restritivas que caracterizam o tipo de atividade matemática dominante nessas instituições.

Nesse pensar, tendo em conta que a atividade matemática aportada no ensino básico, em particular, de acordo com o foco de investigação desta pesquisa, no sistema de ensino público paraense, é essencialmente uma atividade paramatemática, no sentido de que os objetos matemáticos são tomados como “ferramentas transparentes úteis para descrever e estudar outros objetos” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 75). Desprovidas, portanto, de teorias e com forte ênfase praxeológica centrada no bloco Tarefa-Técnica, as técnicas acabam por assumir papel ostensivo superior ao da tarefa e, em consequência, ocultam o papel instrumental da tarefa na atividade matemática e também as questões determinadas que levam ao desenvolvimento e ao aperfeiçoamento da técnica, ao trabalho da técnica, inclusive à ordem crescente de complexidade desejado para uma OMLRC (FONSECA, 2004 e BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004).

As condições de invocar tecnologias/teorias que justifiquem as técnicas, as vezes restritivas que levam em suas ausências, exigem a elaboração de tarefas que assumam o papel tecnológico, às vezes como dispositivos didáticos, para tornar possível o ensino de outras tarefas.

Nesse sentido, e sob a compreensão da TAD, a tarefa não se reduz a si mesma, tampouco as técnicas que permitem enfrentá-las, mas, sobretudo, está em relações com outras tarefas. De outro modo, uma tarefa se enfrenta por meio de outras tarefas. Isso põe em destaque o seu papel funcional nas práticas docentes, não como monumentos que o professor mostra aos estudantes, mas como ferramentas materiais do professor, que as manipula não só para atender a sua intenção didática, como a de construir organizações matemáticas/didáticas do tipo OMLRC, mas para torná-las claras para os alunos como ferramentas materiais e tecnológicas úteis para estudar e resolver situações problemáticas.

Sob essa compreensão, é tarefa, entre outras, do professor criar e selecionar tarefas que atendam às condições e restrições institucionais para a consecução objetiva de um conjunto de praxeologias articuladas, em ordem crescente de complexidade, para um tema, integrando setores e áreas.

Seja para criar ou selecionar, em nossa pesquisa, o docente deve levar em conta critérios de avaliação dos tipos de tarefas, os referidos por Chevallard (1999): critério de identificação, referente à clareza de sua proposição e à abrangência; critério da razão de ser, alusivo a esta ser explícita ou não; critério de pertinência, se representam uma boa mostra da atividade matemática que se intenciona desenvolver e se atendem as necessidades matemáticas dos alunos no presente e futuro em conexão com as outras atividades, seja ela matemática ou extramatemática.

Sob as condições que temos assumido até então, nossa compreensão nos encaminha a pensar tais critérios como uma seleção de tarefas, relativamente independentes, com potencialidades de se articularem com outras tarefas, de modo a que possam ser interpretadas como subtarefas de um conjunto de tarefas de uma, ou mais OM, funcionando como tecnologias dessas tarefas, delineando um jeito de pensar e fazer a integração de praxeologias.

As tarefas com essa propriedade de articulações, que temos denominado de Tarefas Fundamentais*,* constituem-se em partes integrantes das tarefas cujas articulações funcionariam como um esquema de movimentação de praxeologias e, como tal, como um jeito de pensar a praxeologia como local, regional ou global.

Parece-nos claro que os esquemas conexos de articulações de tarefas, não necessariamente linear, dependem de um MER que não está necessariamente definido, mas que dinamicamente é construído e posto à prova no processo de seleção ou criação das Tarefas Fundamentais por meio de uma investigação pela comunidade de estudos – em nosso caso de docentes (Y) e um coordenador também docente (y) – para uma questão *Q* do tipo *Como fazer a construção de uma OM/OD, entendida como um conjunto estruturado de tarefas, que respondem a questões determinadas, com forte grau de integração e em ordem crescente de complexidade e que façam o reencontro dos professores com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analítica?*

Postulamos que a noção de tarefa fundamental levará a uma investigação que irá gerar as questões determinadas e cujo estudo levará a respostas $R^{\heartsuit}$ legitimadas pela classe por meio de certo percurso de estudo e de pesquisa (PER), não planejado previamente, ou seja,

> […] não se determina *a priori* o tipo de OM a que se pode recorrer para elaborar uma resposta à questão geratriz considerada, ainda que haja uma análise prévia da potencialidade da questão inicialmente abordada. Em outras palavras, ao iniciar um PER, nem o professor nem o engenheiro didata sabem qual será o percurso específico que a comunidade seguirá, ainda que se conheça um conjunto amplo de possíveis caminhos por percorrer. Esta abertura inicial é necessária para que a questão inicial "prime" sobre a resposta que se deve fornecer e não se converta, como ocorre muitas vezes, em um simples pretexto para a construção dos saberes que proporcionariam a resposta. (SERRANO, BOSCH e GASCÓN, 2010, p. 837, tradução nossa).

Parece-nos claro que o percurso a ser seguido será dependente das atividades e das decisões de *Y* e *y* dos recursos praxeológicos, como as respostas $R^{\lozenge}_{i}$ oriundas das movimentações do EP institucional e de Y, das obras *Oj* requeridas para o estudo; ou seja, dependente do *millieu* a ser criado no percurso de estudo e investigação pelos membros da comunidade de estudo, já que as problemáticas levantadas devem estar assentadas em um conjunto de relações, essencialmente didático-matemático, que irá se modificar à medida que forem produzidas as respostas no transcurso da situação e modificando, em consequência, a realidade com que interatuam.

Esse *millieu* não foi definido *a priori*, Chevallard (2009a) nos indica sua composição por um conjunto de respostas e obras movimentadas no percurso e presentes nas instituições em jogo, as quais podem ser mobilizadas a fim de compor uma “boa” resposta $R^{\heartsuit}$ relativa à questão Q. Isto é, a Comunidade de Estudos pode recorrer à infraestrutura didático–matemática, composta pelos livros didáticos, pelas teorias matemáticas, pelas experiências desenvolvidas nas OMs e ODs já estabelecidas na instituição que possam ser desconstruídas ou reconstruídas; ou seja, a função do *millieu* é a de apoiar a construção e validação da resposta $R^{\heartsuit}$.

Admitindo toda essa complexidade que gira em torno da organização de tarefas – e em nosso caso para a eleição das Tarefas Fundamentais no setor da Geometria Analítica Plana – iniciamos o percurso de estudo e investigação com *millieu* considerando inicialmente dois aspectos:

a) o da cultura escolar, compreendendo as tarefas existentes na instituição de ensino básico: nas praxeologias matemáticas propostas nos livros didáticos; nas praxeologias matemáticas e didáticas dos professores, inclusive as nunca objetivamente ensinadas;
b) o da história e epistemologia da Matemática, no que se refere à epistemologia do saber, inclusive o escolar, no nosso caso da Geometria Analítica; ou seja, as Tarefas que são estabelecidas para a articulação dos saberes matemáticos no que diz respeito à sua estrutura interna e externa, como por exemplo, entre a Geometria Sintética e a Geometria Analítica.

Antes, buscamos desenvolver um PER para apontar a potencialidade da noção de tarefas fundamentais para o desenvolvimento de um PER de uma comunidade de práticas e, nesse sentido, nos tópicos seguintes apresentaremos possíveis seleções de tarefas a partir de OMs e ODs propostas nos livros didáticos, na história e epistemologia referentes à Geometria Analítica Plana (GAP).

3.1 TIPOS DE TAREFAS NAS OMS E ODS DOS LIVROS DIDÁTICOS

A partir do estudo dos tipos de tarefas presentes nas OMs e ODs propostas em livros didáticos, buscamos estudar para identificar e eleger aqueles tipos de tarefas que poderiam assumir o papel de tipos de tarefas fundamentais para um determinado objeto de ensino em tal etapa de estudos, no nosso caso a Geometria Analítica para o estudo no terceiro ano do ensino médio. Os manuais utilizados foram as edições disponibilizadas em 2009 dos livros-textos do ensino médio: Matemática volume único para o ensino médio (YOUSSEF, 2005) e Matemática volume único (DANTE, 2005), recomendados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), e tomados como referência na instituição escolar em que a pesquisa empírica foi realizada.

As OMs e ODs propostas nos dois livros apresentam uma similaridade nos objetos matemáticos propostos para o estudo, sendo estes: ponto; reta; circunferência e cônicas, sem conexões explícitas. Também observamos que não há muita diferença nas organizações, visto que nas duas obras a Geometria Analítica é distribuída em cinco blocos isolados, denominados de estudo do ponto, estudo da reta, continuação do estudo da reta, estudo da circunferência e estudo das cônicas.

Considerando estas aproximações, por nós identificadas, entre as OMs e ODs constantes nesses livros, optamos por descrever em um único quadro (Quadro 3) o que seria o esquema de OMs e ODs presentes nos livros. Assim, a análise teve como foco os tipos de tarefas que nos permitiram inferir ter certo destaque dentro de cada bloco da organização.

Quadro 3 – Esquema da organização didática presente nos livros analisados

Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3	Bloco 4	Bloco 5
Estudo do ponto	**Estudo da reta**	**Continuação do estudo da reta**	**Estudo da circunferência**	**Estudo das cônicas**
Localizar pontos no plano	Analisar a inclinação da reta	Encontrar a equação da reta dados dois pontos	Encontrar a equação da circunferência	Encontrar a equação da elipse
Calcular a distância entre dois pontos	Determinar o coeficiente angular	Analisar a posição relativa entre duas retas		Encontrar a equação da hipérbole
Determinar o ponto médio de um segmento	Encontrar a equação da reta dado um ponto e o coeficiente angular	Calcular o ângulo entre duas retas		Encontrar a equação da parábola
Analisar as condições em que três pontos estão alinhados		Calcular a distância entre ponto e reta		

Na organização representada pelo esquema acima, os dois primeiros blocos – estudo do ponto e estudo da reta – são apresentados sem evidenciar, explicitamente, conexões entre os tipos de tarefas presentes neles, exceto tímidas conexões entre as tarefas do mesmo bloco, mais marcantes no segundo bloco. Há apresentação direta da condição (fórmula) que estabelece o alinhamento de três pontos.

Após o estudo desses dois blocos, a organização didática apresenta o terceiro bloco, que trata da continuação do estudo da reta sem explicitar conexões existentes com os blocos anteriores. As conexões existentes são deixadas como interpretação para o leitor, como por exemplo, no tipo de tarefas *encontrar a equação geral da reta dados dois pontos*, em que se aplica a técnica do cálculo do determinante, sem referenciar a condição de alinhamento de três pontos, tratado no primeiro bloco. Em seguida, apresenta-se o próximo tipo de tarefas, *analisar a posição relativa entre duas retas,* propondo como técnica o uso do coeficiente angular, mais uma vez sem explicitar de forma enfática a conexão existente entre esses tipos de tarefas, apesar do resgate do coeficiente angular.

Ainda no enfoque do estudo da reta, são apresentadas as tarefas do tipo tangente do ângulo entre retas a partir da apresentação da expressão $tg\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$. O último tipo de tarefas desse terceiro bloco é *calcular a distância entre ponto e reta*, em que é apresentada de forma direta a expressão $d_{pr} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$. Esse tipo de tarefas poderia ser enfrentado de outro modo, pela articulação de outros tipos de tarefas, como: encontrar a equação da reta perpendicular; determinar o ponto de intersecção entre duas retas e o cálculo da distância entre dois pontos. Desencadeando um fazer matemático articulado e justificado.

Esse terceiro bloco, além de estar majoritariamente desconectado dos outros dois anteriores, é marcado pela apresentação direta de técnicas para o enfrentamento dos tipos de tarefas propostos, escamoteando as possíveis conexões que poderiam ser vislumbradas pelo aluno no processo de estudo. Explicitamente, a ênfase é no saber-fazer (tarefa, técnica) que, embora necessário, não constitui o saber, ou ainda o desejado fazer justificável.

Os dois outros blocos tratam das cônicas, com destaque para o estudo da circunferência, que ganha um bloco isolado dedicado a ela. Neste é apresentado o tipo de tarefas *encontrar a equação da circunferência* por meio da técnica da distância entre dois pontos, ou seja, distância entre o ponto que designa o centro c (a, b) da circunferência e um ponto p (x, y) qualquer da circunferência. A conexão com a tarefa distância entre dois pontos do primeiro bloco, embora explícita, não é explorada. É direta, podendo até ser despercebida. Novamente a ênfase é no saber-fazer (tarefa, técnica).

O último bloco de tipos de tarefas apresentado é o da equação das cônicas, sendo este totalmente desconectado dos outros, e até dentro dele as equações são apresentadas a partir de expressões gerais que devem servir de modelos para os alunos, destacando elementos característicos de cada cônica. Esses modelos são usados para o enfrentamento de tipos de tarefas como: *encontrar a equação da elipse, encontrar a equação da hipérbole e encontrar a equação da parábola.* Esse bloco também apresenta a definição das cônicas por meio de distâncias entre pontos, porém essa tarefa não é evidenciada de modo a prover ao aluno um fazer justificado de articulações e integrações de tipos de tarefas já estudadas.

Enfim, a partir desses estudos das OMs dos livros, podemos perceber que, quando evidenciam conexão, esta é posta, em nossa opinião, de modo tímido, não evidenciando as possíveis articulações e integrações que podem ser realizadas entre os tipos de tarefas propostos ao longo do processo de estudo.

No entanto, esse estudo preliminar já nos permite eleger tipos de tarefas que podem estar, ora mais, ora menos, presentes em todas as outras tarefas por meio de articulações implícitas ou explícitas entre si. Tais articulações entre esses tipos de tarefas, que caracterizamos de fundamentais no decorrer do processo de estudo podem prover um fazer inteligível e justificado e proporcionar um olhar para geração de novas praxeologias matemáticas.

Com esse pensar e considerando as possíveis conexões que podem ser realizadas de forma implícita ou explícita a partir das organizações dos livros didáticos – como o cálculo da área do triângulo dado por três pontos, que de forma implícita usa a condição de alinhamento de três pontos e a determinação da equação da circunferência, em que se utiliza de forma explícita o cálculo da distância entre dois pontos –, procuramos explicitar essas relações de modo a tornar mais claras as conexões e proporcionar um olhar que poderá ser materializado em novas praxeologias matemáticas.

3.2 DINÂMICA NA ELEIÇÃO DAS TAREFAS FUNDAMENTAIS

No estudo realizado nas praxeologias propostas nos livros didáticos pesquisados, os tipos de tarefas identificados e eleitos por nós, a partir da noção de Tarefas Fundamentais, para promover os momentos didáticos de um processo de estudo da GAP são:

Tipo de tarefa fundamental 1 (TTF1): localizar pontos no plano.

Tipo de tarefa fundamental 2 (TTF2): calcular a distância entre dois pontos dados.

Tipo de tarefa fundamental 3 (TTF3): encontrar a equação do segmento de reta.

A partir desses três tipos de tarefas, os quais denominamos de tipos de tarefas fundamentais (TTF), ou seja, tarefas que propiciam a manifestação e conexão com outros tipos de tarefas (TT), que neste estudo compõem as OMs propostas nos livros didáticos da GAP, buscamos evidenciar as possíveis justificativas e articulações existentes entre as tarefas propostas, bem como no contexto do objeto de estudo propiciar a tomada de consciência, por parte da comunidade de estudos, da razão de ser desses objetos.

Dessa forma e com o objetivo de evidenciar o pressuposto de que os TTF fazem emergir outros tipos de tarefas propostos para o ensino da GAP no nível médio, utilizaremos os tipos de tarefas mais evidenciados nos livros-textos, os quais em geral são propostos em sequências didáticas desconectadas uma das outras, deixando implícitas suas articulações.

Assim, assumindo que qualquer tarefa necessariamente partirá da TTF1, serão consideradas para realização das tarefas a seguir apenas as que complementam esta.

Tipo de tarefas I (TT1): determinar em que condição três pontos são colineares.

A realização desse tipo de tarefas é movimentada a partir da TTF3.

Tipo de tarefas II (TT2): encontrar a equação da reta dados dois pontos que pertencem à reta.

Para realizar este tipo de tarefas teremos de recorrer também à TTF3.

Tipo de tarefas III (TT3): verificar a posição relativa entre duas retas dadas.

Esse tipo de tarefas poderá ser realizado manipulando a TTF2 combinada com a TTF3.

Tipo de tarefas IV (TT4): encontrar equação da reta **(s)** que passa por um ponto P e é perpendicular à reta **r**.

Esse tipo de tarefas requer a articulação da TTF3 com a TT3.

Tipo de tarefas V (TT5): calcular a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta (**r**) de equação ax + by + c = 0.

Na realização da TT5, devem-se articular tipos de tarefas como a TT4, em seguida realiza-se a tarefa de encontrar o ponto (Q) r $\cap$ s e, por fim, a **TTF2:** calcular a distância entre os pontos P e Q;

Tipo de tarefas VI (TT6): se três pontos assinalam os vértices de triângulo, como calcular a área desse triângulo.

A TT6 é solucionada pela combinação da TTF2 e da TT5, porém a técnica apresentada nos livros didáticos é a resolução de um "determinante". Essa técnica é proposta de forma totalmente desconectada de outras tarefas, o que nos permite destacar que o simples uso de um determinante no cálculo de áreas de triângulos obscurece o fazer matemático, de onde não raro se originam questões de alunos – e até mesmo de docentes – do tipo: O que tem a ver esse determinante com a área? Qual relação existe entre esses objetos matemáticos de estudo?

Tipo de tarefas VII (TT7): encontrar a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano cartesiano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos e distintos F_1 e F_2, e distintos de P, é igual a 2a e maior que a distância 2c entre eles.

$$Elipse = \{P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 \ \ | = 2a\}$$

Tipo de tarefas VIII (TT8): encontrar a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano cartesiano cuja diferença entre as distâncias entre esse ponto a dois pontos distintos F_1 e F_2, também distintos de P, é igual a 2a e é menor que a distância 2c entre eles.

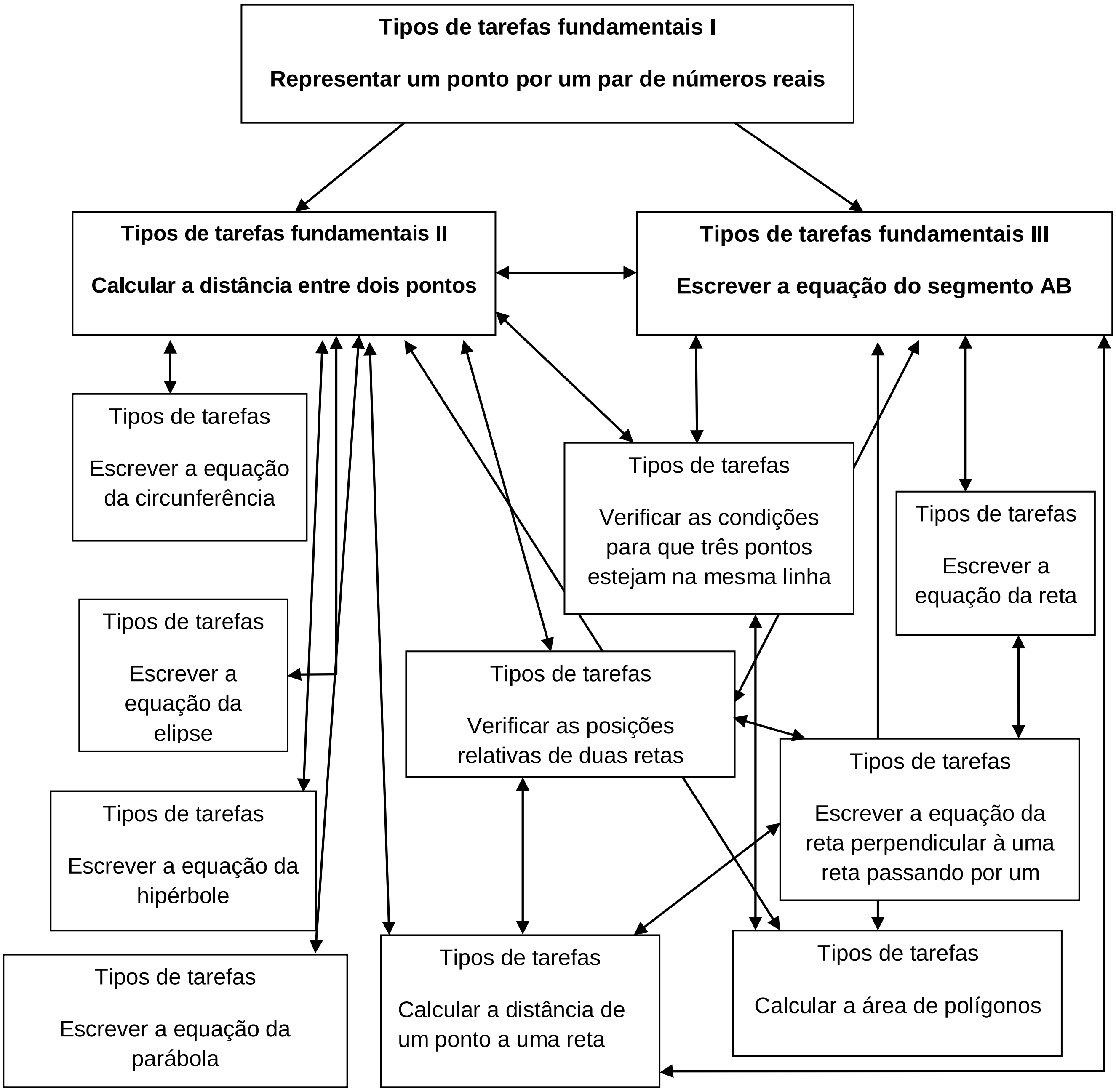
$$Hipérbole = \{P \in \alpha / |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Tipo de tarefa IX (TT9): encontrar a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano cartesiano cuja distância a um ponto C dado é igual a r, ou ainda, encontrar a equação da circunferência de centro C(a, b) e raio r.

Os tipos de tarefas TT7, TT8 e TT9, podem ser executados a partir da articulação de outras tarefas do ensino fundamental em consonância de forma restrita com a TTF2.

Como se observa, os tipos de tarefas aqui apresentados são produtos da articulação das tarefas TTF1, TTF2 e TTF3, com destaque para a presença constante da TTF2, e é nesse sentido que são destacadas como TTF. Neste trabalho não se quer afirmar que outras tarefas são levadas a cabo somente por meio dessas tarefas/técnicas, mas destacar que é possível e desejável explicitar essas articulações destacando os tipos de tarefas fundamentais no desenvolvimento de um processo de estudo. Desse modo, o fazer matemático como um processo articulado e integrado, do tipo presente nas teorias axiomáticas próprias da Matemática, é evidenciado como essencial no processo de estudo dos objetos matemáticos e expõe um jeito de pensar as tarefas da GAP, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Esquema de conexões dos tipos de tarefas propostos para o ensino da GAP



Como se pode observar, os tipos de tarefas padrões estabelecidos nas organizações matemáticas da GAP, objeto de estudo do ensino médio, podem, em geral, ter suas técnicas justificadas pelas técnicas de tipos de tarefas que em nosso olhar contemplam a noção de Tarefas Fundamentais. Esses tipos de tarefas fundamentais, identificados como **representar um ponto por um par de números reais**, **determinar a distância entre dois pontos dados** e **encontrar a equação do segmento de reta** relacionados com o tipo de tarefas **encontrar a equação da reta**

perpendicular a uma reta permitem desenvolver os principais tipos de tarefas padrões constantes dos livros didáticos, assim possibilitando construir sequências didáticas distintas das apresentadas por esses manuais didáticos, de modo a promover uma praxeologia didático-matemática no sentido dado pela TAD, que consiste em um fazer articulado e integrado de Tarefas/Técnicas na (re)construção de novas Tarefas/Técnicas.

A complexidade na eleição dos tipos de tarefas fundamentais requer relações mais profundas no objeto de saber da escola básica que nos exigem o estudo histórico e epistemológico desse saber que a seguir passamos a considerar.

3.2 TIPOS DE TAREFAS NO CONTEXTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste tópico, consideramos a obra *La Géométrie*, de René Descartes (1637), buscando em parte da história e da epistemologia da Geometria Analítica eleger os tipos de tarefas que podemos caracterizar como fundamentais, pois a apropriação desses tipos de tarefas poderá contribuir para a elaboração das praxeologias matemáticas, que substanciadas pelo uso destes possibilitará a articulação e justificação entre os temas, setores e áreas da Matemática escolar.

Na elaboração de transposições didáticas, os professores devem considerar a epistemologia do saber matemático como orientação e condução para a construção dos objetos matemáticos na instituição escolar a partir de reflexões no contexto histórico, de modo a assegurar uma forma equilibrada, evitando sua banalização ao tempo que o mantêm próximo ao saber de referência, é vigilância epistemológica requerida por Chevallard (2001) na transposição didática.

Nesse sentido, procuramos investigar aqueles tipos de tarefas estabelecidas por Descartes como articuladoras de outras tarefas, que possam ser vistas como as Tarefas Fundamentais. Assim, o estudo teve como fonte primária a obra *La géométrie* (1637), apoiada nas traduções e comentários feitos por Smith e Latham (1954) – esta edição contém a versão original em fac-símile da obra *Geometria* de Descartes e uma tradução para o inglês. Outra obra utilizada é a tradução para o português de Lopes (s/d), editada em Lisboa e, do mesmo modo que a de Smith e Latham, traz comentários como notas a fim de interpretar a obra de Descartes.

La géométrie é parte da obra *Discours de La méthode,* o qual é formado por um prefácio com o mesmo nome da obra e mais três partes: *La géométrie, La dióptrique, Les météores.* Essa obra foi publicada originalmente em francês, as três partes constituem-se em ensaios do método para conduzir a razão na busca das verdades da ciência. Segundo os comentadores de *La géométrie*, este é um dos trabalhos de Descartes que menos recebeu críticas e objeções em relação às críticas recebidas pelas partes em que são expostos os aspectos filosófico-teológicos do Método, porém foi o trabalho que revolucionou não só a Matemática como também a ciência como um todo. *La géométrie* é composta de três livros: o livro primeiro, intitulado "Dos problemas que se podem construir sem empregar mais que círculos e retas"*;* o livro segundo, intitulado "Da natureza das linhas curvas"; e o livro terceiro, denominado "Da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos".

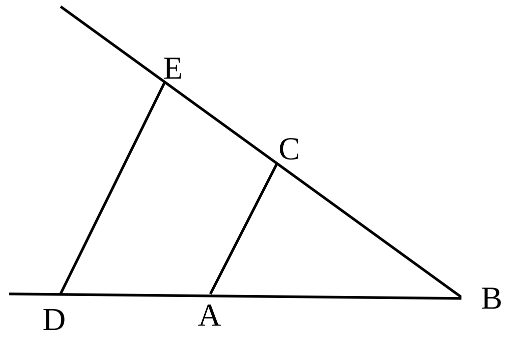
Descartes inicia o livro primeiro refletindo sobre o cálculo aritmético e relaciona com as operações de geometria e um correspondente geométrico às operações algébricas. Em seguida, construiu a simbologia que iria usar na obra e mostrou como se chega às equações que serviriam para resolver problemas. Fez um estudo sobre os tipos de equações de segundo grau e como resolvê-las. Finalmente, aplicou seu método à resolução algébrica do *problema de Pappus* para quatro retas. Estabelecendo assim os princípios gerais da Geometria Analítica, como descrito abaixo:

> A aritmética não compreende mais que quatro ou cinco operações, que são, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes, que pode tornar-se como uma espécie de divisão, assim não há outra coisa a fazer em geometria, com respeito às linhas que se desejam conhecer, *que juntar ou subtrair outras, ou ainda, conhecendo uma, que designarei por unidade para relacioná-la o melhor possível com os números, e que geralmente pode ser escolhida arbitrariamente* e, conhecendo logo outras duas, determinar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a outra esta para a unidade, que é o mesmo que a multiplicação; ou ainda, encontrar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a unidade está para a outra, que é o mesmo que a divisão; ou, enfim, encontrar um, dois, vários meios proporcionais entre a unidade e alguma outra linha, o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, ou cúbica, etc. *E eu não temerei introduzir estes termos aritméticos em geometria, a fim de tornar-me mais inteligível* (DESCARTES, 1954, p. 3, apud Lopes).

Nesse texto, percebemos a relação que Descartes estabelece entre a geometria e a aritmética; para tanto, utiliza-se da proporcionalidade, na forma do que hoje é institucionalizado como o Teorema de Tales, “um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais”, este teorema é em princípio tema de estudos no nono ano do ensino fundamental brasileiro.

Para realizar a articulação entre as operações aritméticas com as geométricas, Descartes procedeu da maneira descrita na Figura 4.

Figura 4 – Multiplicação e divisão de segmentos



Fonte: Descartes (1637, p. 298)

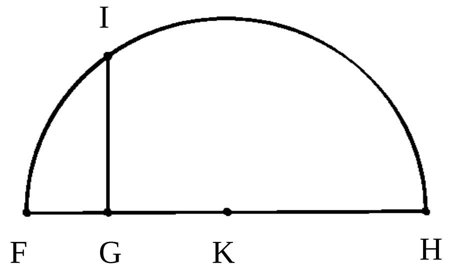
Para multiplicar BD por BC, dever-se-ia tomar AB como unidade, depois unir os pontos A e C e então traçar $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CA}$. Daí, afirmou que BE seria o produto de BC por BD. Em consequência a esse procedimento, Descartes também estabeleceu a divisão BE por BD como sendo BC, descrevendo o seguinte procedimento: unindo os pontos E e D, traça-se $\overline{AC}$ paralela a $\overline{DE}$. Aplicando o Teorema de Tales chega-se à seguinte proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE}$$

E assim, assumindo $\overline{AB}$ como a unidade, então BE = BD x BC e BC=BE : BD.

Em seguida, Descartes estabelece a extração da raiz quadrada tomando um triângulo inscrito em uma semicircunferência, mais uma vez utilizando a proporcionalidade, pois estabelece a raiz quadrada como sendo a altura do triângulo inscrito, que é o meio proporcional em que esta divide a hipotenusa, já que esse triângulo é retângulo.

Figura 5 – Cálculo da raiz quadrada



Fonte: Fonte: Descartes (1637, p. 298)

Para se extrair a raiz quadrada de GH, junta-se em linha reta $\overline{FG}$, que é a unidade, dividindo-se FH em duas partes iguais pelo ponto K; tomando esse ponto como centro, traça-se o círculo FIH, elevando-se desde o ponto G uma linha reta, formando ângulos retos com $\overline{FH}$, até I, é GI a raiz buscada. Em termos atuais, percebemos que Descartes utilizou o axioma da inscrição de um triângulo em um semicírculo, que determina que esse triângulo é retângulo com a hipotenusa sobre o diâmetro do semicírculo, daí que utilizando as relações métricas do triângulo retângulo podemos concluir que $GI^2 = FG \,.\, GH$, e como FG é a unidade conclui-se que GI é a raiz quadrada de FH.

Esses fazeres são confirmados por Descartes ao descrever a relação entre a aritmética e a geometria. Segundo Smith e Latham (1954), ele resume seu trabalho em carta à Princesa Elisabeth descrevendo que “na solução de problemas geométricos [...] não usei outro teorema exceto os que afirmam que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos lados” (SMITH; LATHAM, 1954, p. 10, tradução nossa). Essa afirmativa nos indica a compreensão de que a teoria das proporcionalidades estabelece em nível histórico e epistemológico a conexão e articulação da aritmética com a geometria, possibilitando assim o desenvolvimento do método para enfrentamento dos tipos de tarefas concebidos no contexto geométrico, sendo esse método a própria Geometria Analítica.

Percebemos que por meio desses dois exemplos Descartes, para realizar a tarefa de relacionar as operações aritméticas com as operações de segmentos, teve que estabelecer o segmento unitário e com isso o produto de dois segmentos, que na geometria grega resultava em uma superfície, a partir de então poderia resultar também em outro segmento. Além disso, pensamos que na realização dessa primeira tarefa, Descartes intencionava a busca de uma estrutura Matemática que fundamentaria o método analítico por ele desenvolvido.

Um dos objetivos do método analítico é o enfrentamento dos problemas da geometria sem a necessária construção com régua e compasso utilizados no método sintético; para isso Descartes propõe a utilização de letras para a representação dos segmentos, assim estabelece os procedimentos algébricos que utilizará no enfrentamento do problema de Pappus. Significa que o seu proposito é a retirada das linhas, já que em determinado momento se tornaria dificultoso representá-las, em função da quantidade, pois ele amplia o problema para *n* linhas em vez de apenas quatro, como na proposição original.

> Frequentemente não é necessário então traçar as linhas no papel, mas é suficiente designar cada uma por uma simples letra. Desse modo, para somar as linhas $\overline{BC}$ e $\overline{GH}$, eu chamo uma de *a e outra de b e escrevo a + b. Então a - b indicará que b é* subtraído de *a; ab que a é multiplicado por b;* a/b, que *a é dividido por b; aa ou a² que a* é multiplicado por ele mesmo; *a³ que é o resultado multiplicado por a e assim* indefinidamente. (DESCARTES, 1954, p. 5, grifos do autor, tradução nossa).

Em continuação, descreve o seu método de resolver problemas enfatizando a necessidade da representação algébrica, destacando que

> se nós desejarmos solucionar qualquer problema, primeiro supomos a solução já efetuada e damos nomes para todas as linhas que parecem necessárias para sua construção as que são desconhecidas e as que são conhecidas. (DESCARTES, 1954, p. 6, tradução nossa).

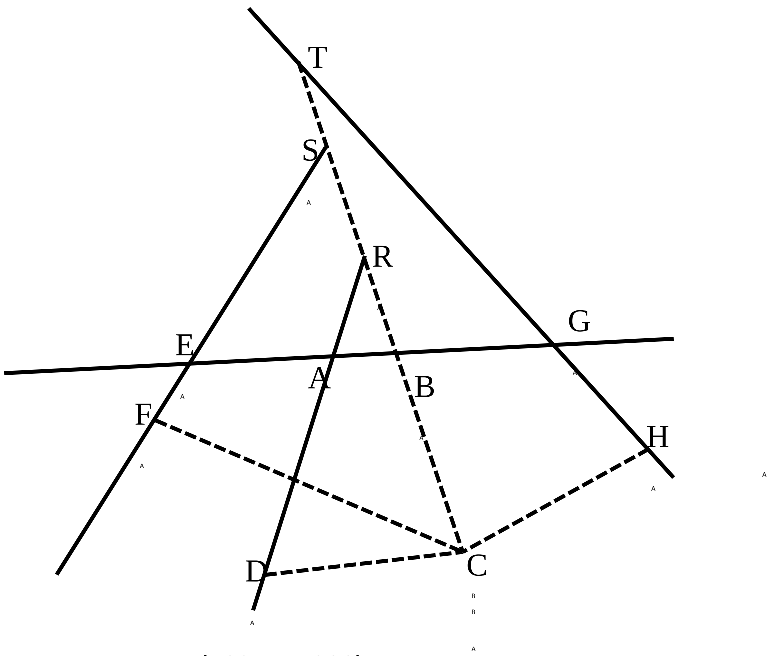
Assim, o método pode ser resumido em três etapas: nomear, que consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema; equacionar, que significa estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis; e construir soluções geométricas, fazendo uso de régua e compasso. Essas indicações culminam com a maneira de articular as equações de retas para resoluções de problemas, sem se prender à utilização apenas de equações de retas que possam ser visualizadas, essa articulação provocará o surgimento de outra equação, que representará o lugar geométrico que é a solução do problema. Como na indicação abaixo:

> [...] Então, não fazendo distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, nós temos que examinar a dificuldade no caminho que mostra mais naturalmente as relações entre essas linhas, até conseguirmos expressar uma mesma quantidade de duas maneiras. Isso constituirá uma equação, pois os termos de uma dessas duas expressões é igual aos termos da outra. (DESCARTES, 1954, p. 9, tradução nossa).

Após estabelecer a estrutura que fundamentaria o seu método, Descartes toma como motivação para a concepção da Geometria Analítica a tarefa proposta por Pappus, reconhecida como o problema de Pappus, e já enfrentada pelos gregos por meio das mais variadas técnicas. Euclides (322-285 a.C.) o resolveu para três e quatro retas. Pappus o generalizou para um número arbitrário de retas. Sendo esse considerado um dos problemas chave para o desenvolvimento da geometria.

O problema de Pappus é descrito da seguinte maneira: são dadas quatro linhas (retas), nas posições $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$. Temos que descobrir o lugar geométrico do ponto C, a partir do qual é possível traçar as linhas $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ e $\overline{CG}$ até as quatro retas, sempre fazendo com que cada uma delas forme o mesmo ângulo com a linha com que se encontra, de tal modo que CB x CD, mantenha sempre uma determinada proporção com CF x CH. O lugar geométrico é uma cônica que passa pelas quatro intersecções (A, B, C, D) das quatro linhas. Sendo sua representação geométrica representada pela figura 6.

Figura 6 – Representação gráfica do problema de Pappus



Fonte: Fonte: Descartes (1637, p. 309)

Na perspectiva de resolver o problema, Descartes descreveu o seguinte procedimento:

> Primeiro suponho o problema resolvido e, para sair da confusão de todas essas linhas, considero uma das dadas e uma das que se há de encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designo AB por X [...] e BC por Y [...] e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também essas duas, prolongadas se necessário e se não lhe são paralelas; como se vê, elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Pois bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção dos lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b; de maneira que representando AB por x, RB será bx/z e a linha total CR será y + bx/z, pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria CR = y - bx/z e se caísse entre B e R, seria CR = -y + bx/z. Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CD, indico como z para c, de modo que sendo CR = y + bx/z, será CD = cy/z + bcx/z^2. Após isso, como as linhas AB, AD, e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando-as por k, ter-se-á EB igual a x + k; que seria k – x se o ponto B caísse entre E e A; e -k + x se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como z está para d, tem-se: BS = (dk + dx)/z e a linha CS é (zy + dk + dx)/z. Se o ponto S caísse entre B e C seria CS = (zy – dk - dx): e quando C cair entre B e S teremos CS = (-zy + dk + dx)/z. Além disso, os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e, portanto, é dada a proporção de CS para CF, que z para e, e será CF = (ezy + dek + dex)/z^2. Analogamente, AG ou l é dada e BG é l - x, pois no triângulo BGT é também conhecida a proporção BG:BT = z/t, teremos: BT = (f l - fx)/z, sendo CT = (zy + fl - fx)/z. Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como z para g, tem – se CH = (gzy + fgl - fgx)/z^2. (DESCARTES, 1954, p. 20, tradução nossa).

A partir do exposto, podemos destacar a proposição de um tipo de tarefas que é a necessidade da utilização de duas linhas como referência para a localização das outras linhas, o que está muito próximo do que usamos como sistema de coordenadas que caracteriza o método analítico.

Na Geometria Analítica escolar atual, identificamos como a necessidade primeira **representar um ponto por um par de números reais** e que, ao analisarmos as organizações propostas nos livros didáticos, esse é um tipo de tarefa que poderíamos considerar como sendo uma das tarefas fundamentais da Geometria Analítica, a qual se refere ao estabelecimento de um sistema de coordenadas.

Na continuação da resolução do problema, Descartes propõe o que identificamos como outra tarefa fundamental a **determinação da equação da reta**, pois substituindo em CB x CD = CF x CH, obtemos uma equação do segundo grau em *x* e *y*. Atribuindo um valor a uma das variáveis, encontramos a segunda. Como isso pode ser feito indefinidamente, encontraremos uma infinidade de pontos, e a partir deles poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico. A resolução do problema de Pappus dada por Descartes é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Reduzindo o problema a duas retas e, ao graduá-las, constrói-se o sistema de coordenadas, base da Geometria Analítica. O que é exposto no destaque:

> Vê-se assim que qualquer que seja o número de linhas dadas, todas as linhas traçadas a partir de C, que formam ângulos dados, conforme o enunciado, podem sempre expressar-se, cada uma por três termos, dos quais um é composto pela quantidade desconhecida **Y** multiplicada ou dividida por alguma outra conhecida, e o outro, pela quantidade desconhecida **X** multiplicada ou dividida por outra conhecida, e o terceiro termo, de uma quantidade conhecida. (DESCARTES, 1954, p. 22, tradução nossa).

Quanto ao tipo de tarefas que descreve **o cálculo da distância entre dois pontos**, encontramos o trecho da obra de Descartes que além de descrever essa tarefa também evidencia a sua relação com outro tipo de tarefa, que é a determinação da equação da circunferência. Essa relação nos indica que também no contexto histórico e epistemológico a determinação da distância entre dois pontos se estabelece como uma tarefa que movimenta e propicia o enfrentamento de outros tipos de tarefas, caracterizando-se como uma tarefa fundamental.

> Não direi tampouco que fosse em virtude dos geômetras não quererem aumentar o número das suas condições e que eles se tenham contentado com o que lhes facultasse poder unir dois pontos dados por uma linha reta e descrever o círculo de um centro dado e passando por um ponto dado. (DESCARTES, 1954, p. 26, tradução nossa).

Nessa revisão histórica e epistemológica, podemos inferir que para o estabelecimento do método analítico, Descartes, além de eleger o Teorema de Tales para relacionar a aritmética com a geometria e a álgebra – o que fundamentaria seu método por meio das proporções – ele, em seu fazer, evidencia três tipos de tarefas que também hoje são proposições nas OMs e ODs constantes nos livros didáticos, sendo estas: representar um ponto por um par de números reais; a determinar a distância entre dois pontos e determinar a equação da reta. Assim, pensamos, a partir dessa revisão histórica e epistemológica, que se confirma a eleição desses três tipos de tarefas como os tipos de tarefas que podem ser tomadas como fundamentais na reconstrução de praxeologias matemáticas articuladas para o estudo no ensino médio.

Após essa revisão histórica e epistemológica, conjuntamente com as análises nos manuais didáticos, o Percurso de investigação por nós vivenciado até aqui, quando do estudo das OMs presentes nos livros-textos, na história e epistemologia da GAP, e as obras constituídas no Programa Epistemológico de Investigação em Didática das Matemáticas nos indicam novos desdobramentos, pois nas OMs dos livros didáticos o Teorema de Tales não aparece como tarefa, nem como técnica, muito menos como tecnologia da GAP; já na investigação histórica e epistemológica, esse tema parece transversalizar o fazer, ora no nível de tarefa/técnica, ora como a tecnologia.

Nesse sentido, outros questionamentos surgem como, por exemplo: qual o nível de participação do Teorema de Tales nas tarefas escolares de Geometria Analítica? É necessária ou não a construção de novas tarefas sobre o Teorema de Tales para o estudo de GAP, visto que esse tema é proposto na grade curricular para ser tratado no sétimo ano do ensino fundamental como tarefas isoladas no setor da Geometria Plana?

Assim sendo, como desdobramentos deste percurso investigativo, novas questões são postas a partir da noção de Tarefa Fundamental: qual a potencialidade do Teorema de Tales para o ensino da GAP? Como os professores em suas práticas docentes veem essa potencialidade? Essas questões nos indicam a ampliação do *millieu*, visto que as compreendemos em função da imbricação existente entre a dimensão epistemológica do problema didático da desarticulação entre os conteúdos e as problemáticas da prática docente.

Essa ampliação do *millieu* também nos conduz a realizar análises investigativas na dimensão institucional relativas ao problema da desarticulação em níveis da disciplina matemática, da área geometria, do setor geometria analítica entre os temas de um mesmo setor, como o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, ou de setores diferentes como o Teorema de Tales e a condição de alinhamento.

4 O PROBLEMA DA DESARTICULAÇÃO EM TERMOS INSTITUCIONAIS

As investigações nos manuais didáticos e a revisão histórica e epistemológica nos possibilitaram eleger os tipos de tarefas que podem assumir, ou que possuem a potencialidade de Tarefas Fundamentais na Geometria Analítica. Porém, decorrente dessas investigações percebemos que o problema da desarticulação entre os conteúdos não se dá só no nível temático, mas também em níveis superiores, como entre os setores Geometria Sintética e Geometria Analítica, entre áreas como a álgebra e a geometria etc.

Dessa forma, há um desdobramento daquilo que era uma problemática específica para uma problemática em nível curricular, visto que a eleição da Tarefa Fundamental suscita análises no horizonte do currículo, isso porque a ampliação do *millieu* no PER, por nós vivenciado, nos tem revelado condições e restrições para a prática docente advindas dos níveis superiores de codeterminação, e mais ainda, surge a necessidade de um olhar cuidadoso nessas condições e restrições relativas às instituições que permeiam a prática docente. Isso nos conduz verificar as desarticulações em níveis institucionais e sua implicação na eleição dos tipos de Tarefas Fundamentais.

Tal problemática é claramente de ordem institucional e como tal exige a participação da instituição docente para seu enfretamento o que leva ao encaminhamento do PER na comunidade de práticas.

4.1 A DESARTICULAÇÃO NAS INDICAÇÕES CURRICULARES

As várias questões levantadas dentro do programa epistemológico de investigação nos influenciaram na identificação de indagações sobre as OMs/ODs propostas para o ensino nas instituições escolares brasileiras, tais como: Que critérios determinam, no ensino básico, que o estudo de um tema da Matemática (Teorema de Tales) deva ser realizado antes do estudo de outro tema (semelhança de triângulos)? Quais relações existem entre o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos? E ainda, que contribuições para o processo de estudos desses temas podem ser estabelecidas ao serem propostas OMs que evidenciem as articulações entre eles? Em uma organização matemática, quais contribuições à eleição de uma tarefa/tema como objeto matemático que articula e justifica outros(as) temas ou setores ou áreas trarão para o ensino?

Na perspectiva de encontrar possíveis respostas às perguntas acima, estabelecemos o seguinte questionamento que entendemos ser a questão primeira que pode ser vista como a possível origem dessas perguntas: Por que os conteúdos matemáticos apresentam isolamento entre suas áreas, setores e temas nas organizações matemáticas propostas para o ensino básico? Essa indagação emerge ao analisarmos as organizações matemáticas e didáticas propostas nos livros didáticos e as grades curriculares norteadoras do trabalho docente nas instituições escolares brasileiras.

A respeito dessa problemática, nossas investigações têm mostrado que professores no exercício da docência têm se questionado a respeito de como fazer para adequar esse ou aquele conteúdo à realidade da escola e dos alunos. Quais adequações devem ser realizadas para adaptar o livro didático à grade curricular da escola? Esses problemas se incluem no que Bosch e Gascón (2004, p. 4) identificam como “problema praxeológico do professor: o que se deve ensinar e como ensiná-lo?”.

O problema praxeológico do professor traz à tona, mais uma vez, a questão do isolamento entre temas, setores e áreas de estudos da Matemática, e para enfrentá-lo iniciamos por analisar questões institucionais como, por exemplo, a utilização do livro didático como principal referência para a constituição das OMs e ODs. Essa questão se torna bastante relevante, pois todos os alunos do ensino médio da rede pública do Brasil recebem livros didáticos por meio do Programa do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM), para que possam ser utilizados como aporte para seus estudos.

Apesar de os livros serem escolhidos pelos professores, não contemplam algumas questões próprias da realidade da escola e dos alunos, que se caracterizam por condições e restrições institucionais, como por exemplo, a sequência de apresentação dos conteúdos diferente da proposta na grade curricular, as formas de apresentações dos conceitos e definições às vezes não afinadas com as propostas dos professores, e ainda, o aluno tem dificuldades para enfrentar muitas tarefas propostas nos livros, isso por vários fatores, sendo um deles a linguagem.

A partir dessas análises nas OMs propostas nos livros didáticos, percebemos que a hipótese levantada por Fonseca et al. (2010a) sobre o ensino secundário espanhol (S), descrita abaixo, que nesse aspecto se assemelha ao ensino básico brasileiro:

> Em S, o estudo das organizações matemáticas se concentra no bloco prático/técnico, sendo baixa a incidência do bloco tecnológico-teórico sobre a atividade matemática que se realiza efetivamente. Não se questiona até que ponto são justificadas as técnicas que se utilizam, e nem a interpretação dos resultados proporcionados por essas técnicas, nem o seu alcance ou domínio de validade, nem a sua relevância para levar adiante uma tarefa determinada, nem sua eficácia, nem sua economia, nem suas relações com outras técnicas, nem suas limitações, nem as possíveis mudanças que podem sofrer essas técnicas para aumentar a sua eficiência na execução de determinadas tarefas. (FONSECA et al. 2010a, p. 248, tradução nossa).

Essa hipótese e os estudos realizados por Fonseca et al. (2010a) permitiram a ele classificar a atividade matemática do ensino secundário espanhol como pontual, rígida e isolada, o que não difere do que temos percebido no ensino básico brasileiro.

As indagações relativas às OMs propostas para o ensino médio e a análise realizada nas OMs propostas nos livros-textos, bem como a revisão histórica e epistemológica nos possibilitaram a eleição de tipos de tarefas que podem estar, ora mais, ora menos, presentes em todas as outras tarefas por meio de articulações implícitas ou explícitas entre si. Como no caso do setor Geometria Analítica, em que os tipos de tarefas por nós identificados e eleitos foram: localizar pontos no plano; calcular a distância entre dois pontos dados; encontrar a equação do segmento de reta. Esse estudo também nos propiciou a percepção da potencialidade do Teorema de Tales que possivelmente nos permitirá extrapolar as articulações ao nível do tema e do setor para além destes.

Nesse sentido, a noção de tarefas fundamentais nos permitiu conjecturar em um primeiro momento a elaboração de OM que evidencie as articulações existentes no e com o setor Geometria Analítica; ou seja, sob a perspectiva da tarefa fundamental, pode-se (re)organizar as tarefas de uma organização já existente de modo a poder atuar mais e melhor, e também de maneira justificada e inteligível.

Para tanto, e objetivando o enfrentamento da problemática da desarticulação, realizamos estudos analíticos nas diretrizes curriculares apontados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) com o propósito de analisar a possível influência desses documentos oficiais na questão do isolamento temático dos conteúdos matemáticos propostos para a educação básica no Brasil. Essa análise se caracterizou como “análise espontânea” (BOSCH; GARCIA; GASCÓN, 2006, p. 55) e limitou-se a observar e descrever os conteúdos propostos para o ensino básico e sua distribuição sem nenhum tipo de ferramenta teórica de análise didática.

No transcorrer dessas análises, verificamos que, nesses documentos, a ênfase é dada ao desenvolvimento de competências e não ao estudo específico de disciplinas escolares[8], fato que abre amplas possibilidades para elaboração de organizações didáticas interdisciplinares, a partir da definição de conteúdos que transversalizem o estudo, essa proposta difere das disciplinas tradicionais. E ainda se evidencia a possibilidade da entrada em processos de estudos por meio do desenvolvimento de projetos de ensino e pesquisa. Esses fatores nos parece contribuírem para o estabelecimento de OMs e ODs que contemplem o maior número possível de articulações entre os objetos matemáticos propostos para o estudo.

Quanto ao trabalho dos professores da educação básica, as recomendações nacionais indicam que estes devem levar em conta os princípios pedagógicos estabelecidos nas normas curriculares nacionais: a interdisciplinaridade, a transversalidade, a contextualização e a integração de áreas por meio de projetos de ensino e da metodologia da resolução de problemas. Além disso, é indicado que os conhecimentos para o ensino de crianças e jovens e as situações de aprendizagem devem propiciar a articulação dos conteúdos via processos de transposição didática, isso mostra a necessária apropriação do professor no sentido histórico epistemológico do conteúdo matemático a ser ensinado. O que quer dizer não apenas dar informações sobre contextualização, interdisciplinaridade, transversalidade e outros princípios, mas efetivamente elaborar e pôr em prática OMs e ODs que propiciem ao aluno competências interdisciplinares que incluam o contexto social. Assim, inferimos que as indicações curriculares oficiais propõem o estabelecimento de OMs e ODs que visem a um fazer matemático escolar que propicie a articulação entre os temas e os setores de cada área e entre as áreas.

---

7 Refere-se a uma seleção de conhecimentos que são ordenados e organizados para serem apresentados ao aluno, recorrendo, como apoio a essa apresentação, a um conjunto de procedimentos didáticos e metodológicos e de avaliação.

No entanto, apesar das indicações oficiais acenarem para uma abordagem articulada, o que temos percebido são ainda abordagens que isolam setores e temas, por exemplo, o estudo do tema função do 1º grau, que requer análise gráfica, bem como a interpretação da expressão algébrica característica dessa função como uma reta no sistema de coordenadas ortogonais, que tem seu estudo proposto no primeiro ano do ensino médio incluído como tema da álgebra. Enquanto a interpretação da reta como expressão algébrica e da expressão algébrica característica como reta são temas de estudos do setor Geometria Analítica, que por sua vez estão incluídos na área geometria; porém a Geometria Analítica tem seu ensino proposto tanto nas organizações didáticas dos livros-textos como nas organizações curriculares das escolas para o terceiro ano do ensino médio. E não só isso, o estudo das funções do primeiro grau evoca o estudo das proporções e vice-versa, porém no sistema de ensino brasileiro as proporções são estudadas no ensino fundamental, sem nenhuma relação com a representação geométrica, e em muitos casos não se evidencia a função polinomial do primeiro grau como uma relação proporcional.

Na análise das indicações curriculares nacionais para o estudo da Matemática no nível básico, observamos que os conteúdos para os estudos no ensino fundamental são divididos em quatro blocos de conhecimentos: o estudo dos números e das operações envolvendo aritmética e álgebra; o estudo do espaço e das formas na área da geometria; o estudo das grandezas e das medidas, que “permite as interligações entre os campos da aritmética, da álgebra, e da geometria e de outros campos do conhecimento” (BRASIL, 1998, p. 49); e o tratamento das informações que visa possibilitar ao cidadão a leitura de dados estatísticos, tabelas e gráficos e a raciocinar a partir de ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

Apesar de percebemos nos PCN a preocupação com a perspectiva de articulação entre os objetos matemáticos, a divisão em blocos temáticos não deixa claro um olhar em busca de interligações entre eles, em apenas um desses blocos é enfatizada a interligação das áreas. Pensamos que esse fato contribui para o isolamento dos objetos matemáticos quando da elaboração das OMs/ODs por parte dos professores e também pode ser um elemento motivador aos autores de livros didáticos nos quais as OMs propostas estabelecem o isolamento entre as áreas, setores e temas da Matemática.

Quanto ao ensino médio, as indicações curriculares propõem a divisão dos conteúdos sistematizados em três temas estruturadores: álgebra, que visa ao tratamento dos números e funções; geometria e medidas; e análise de dados. O estudo desses eixos deve “ser desenvolvido concomitante nas três séries do ensino médio” (BRASIL, 2002, p. 128) e devem possibilitar “o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos” (BRASIL, 2002, p. 128).

É destacado nos PCN que cada eixo estruturador é uma unidade de conhecimento por ser um “campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo” (BRASIL, 2002, p. 120). Para a organização do planejamento escolar, é indicada para cada um desses eixos a divisão em unidades temáticas consideradas como partes autônomas de conhecimentos específicos, podendo ser organizadas matemática e didaticamente a partir das características dos alunos, dos tempos e espaços em cada instituição escolar.

Além dessa distribuição em eixos estruturantes e unidades temáticas, nos PCN é indicada a distribuição dos conteúdos nas três séries do ensino médio.

Quadro 3 – Distribuição de conteúdos proposto nos PCN

1ª SÉRIE	2ª SÉRIE	3ª SÉRIE
1. Noção de função; funções analíticas e não analíticas; Análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer ou da primeira volta.	1. Taxa de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: área e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados; contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: PCN+ (2002)

Essa distribuição do conteúdo, mais uma vez, pode proporcionar o estudo isolado dos temas, setores e áreas, e esse fato possivelmente provoca algumas desconexões entre setores e temas de estudo da Matemática nas proposições das OMs e ODs elaboradas pelos professores, o que se verifica de forma transparente na grade curricular e no fazer docente com Matemática na instituição escolar em que a parte empírica da pesquisa se realiza.

Nesse enfoque, Schoenfeld (1992) apud Bosch e Gascón (2004, p. 4) “denuncia que a prática escolar tradicional decompõe o saber matemático em pequenas porções”, o que possivelmente desenvolve no aluno, como no exposto por Fonseca et al. (2010a), a concepção de que para um dado tipo de tarefas o enfrentamento só é possível por meio de uma única técnica, pois ele passa a olhar a Matemática por meio de fragmentos de estudos, não lhe sendo possibilitado um olhar articulado que permita escolher dentre as técnicas conhecidas para o enfrentamento de um dado tipo de tarefas a que melhor soluciona a tarefa, proporcionando um fazer que seja justificado e promova economia de tempo, objetivos esperados do processo de estudos da Matemática. A problemática do isolamento foi também motivo de estudos de Bosch e Gascón (2004); eles destacam que na Espanha o ensino da Matemática, seja no primário ou no secundário como também na universidade, há uma tendência de

> atomização dos conteúdos matemáticos em uma série de questões pontuais relativamente independentes entre si. A desconexão é tanta que se corre o perigo de converter a Matemática ensinada em um conjunto de “anedotas” e adivinhações isoladas. Correlativamente as técnicas matemáticas que se utilizam também aparecem isoladas e apresentam uma grande rigidez que se manifesta especialmente na passagem do ensino secundário para universidade e ultimamente na passagem do ensino secundário obrigatório (12-16 anos) ao bacharelado (16-18 anos). (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 10, tradução nossa).

O exposto destaca que a questão do isolamento temático não se coloca apenas no que se refere aos temas, mas também no fazer, como havíamos inferido. Em consequência, os autores asseveram que a desarticulação aparente no currículo de matemática deixa para segundo plano a análise das possíveis articulações que podem ser estabelecidas a partir de cada tema proposto para o estudo, “se constata a ausência de uma estruturação do currículo a níveis superiores ao tema que se coloca, particularmente, no ‘abandono’ desses níveis por parte do professor” (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 10). Essa inferência determina certo retraimento por parte do professor no que diz respeito a suas ações em relação aos níveis de abordagem de cada tema. Isso é caracterizado por Chevallard, (2001a, 2002) como o fechamento dos temas que constituem um fenômeno didático denominado por esse autor de autismo temático.

Alguns exemplos da desarticulação entre os temas Teorema de Tales e semelhança de triângulos, entre setores como Geometria Sintética e Geometria Analítica e entre áreas como álgebra e aritmética também são evidentes no ensino espanhol, como no destaque abaixo.

> Há uma forte desconexão entre os setores de uma mesma área da Matemática – como, por exemplo, entre a Geometria Sintética e a Geometria Analítica – entre as diferentes áreas da Matemática escolar – como, por exemplo, entre as áreas de geometria e funções e grafismos no ensino secundário obrigatório espanhol (12-16 anos). No caso das geometrias analítica e sintética, apesar da continuidade e até complementaridade que existe entre ambas, o fato e que se continua estudando completamente separados ao longo do ensino secundário (sintética no secundário e analítica no bacharelado). (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 11, tradução nossa).

Notamos que assim como ocorre na Espanha também no Brasil as orientações curriculares estabelecem, a partir da distribuição de conteúdos nas series e nos níveis de ensino, desconexões similares.

Tomando como área a geometria, como setor a Geometria Analítica e como temas o Teorema de Tales, semelhança de triângulos e a condição de alinhamento de três pontos, e ao analisarmos as proposições curriculares do ensino básico brasileiro, observamos que o Teorema de Tales é proposto para estudo no sétimo ano do ensino fundamental, semelhança de triângulos para nono ano, ambos incluídos no setor da Geometria Sintética, enquanto que a condição de alinhamento de três pontos é proposta para o estudo no terceiro ano do ensino médio como tema da Geometria Analítica. Essa distribuição possivelmente é também um dos elementos que influencia no isolamento que temos percebido.

Outro exemplo do isolamento pode ser evidenciado no trabalho de Garcia (2005) quando afirma que no ensino secundário espanhol existem dois momentos diferentes relacionados ao estudo da teoria das proporções. A primeira estabelece a relação proporcional no setor da proporcionalidade e na área da aritmética. A segunda estabelece a relação proporcional em um setor que é caracterizado pelas relações entre grandezas como parte do tema funções e suas representações gráficas, nesse setor a proporcionalidade é estudada como função linear. Segundo Garcia, Bosch e Gascón (2006), a existência dessas duas abordagens propicia a reconstrução das OMs presentes no ensino básico, que muitas vezes estão totalmente desconectadas.

Esses isolamentos entre os conteúdos também são identificados por Chevallard (2006, p. 229) como “confinamento temático do professor”, o que segundo ele não evidencia para os professores o modo como os conteúdos matemáticos estão organizados, e nem responde a perguntas como qual a ligação entre a proporcionalidade e a função linear, ou entre a função linear e a Geometria Analítica. Assim, os conteúdos se tornam conteúdos mortos, o que transforma essas perguntas em perguntas mortas, de tal forma a indicar para docentes e alunos e às instituições certa ignorância de onde vêm esses conteúdo, para onde eles vão, e de que formas serão aplicados fora do contexto escolar. Essas situações são caracterizadas por Bosch, Garcia e Gascón (2006, p. 43) como “monumentalização dos fenômenos das organizações matemáticas: os alunos são convidados a visitar, mas não para construí-las”.

A monumentalização dos fenômenos chama a atenção para a construção de um caminho adequado para a introdução de um conteúdo matemático em uma determinada instituição, porém em muitos casos sem qualquer reflexão mais profunda sobre a forma como esse conteúdo foi estruturado, e sem levar em conta as condições e restrições impostas pelos diferentes níveis educativos nos processos de transposição didática, ou seja, sem uma razão de ser.

Observando o exposto, quanto às consequências do isolamento e da monumentalização de conteúdos e com objetivo de reconstruir OMs e ODs que estabeleçam o maior número de articulações possíveis entre temas, setores e áreas, utilizando para tal fim os tipos de tarefas fundamentais para reconstrução de OMs e ODs, como dispositivo didático que propicie a professores e alunos tomar consciência da razão de ser dos temas propostos para o estudo no ensino básico. Nesse sentido, e por temos eleito a área da geometria como objeto de estudo, mais especificamente a Geometria Analítica, faz-se necessário investigar a desarticulação entre a Geometria Analítica e a Geometria Sintética em termos institucionais, referentes ao estudo da geometria no ensino básico.

4.2 A DESARTICULAÇÃO NA ÁREA DA GEOMETRIA

A área da geometria tem posição central no currículo escolar, recebendo tratamento diferenciado em função das especificidades características dessa área, pois os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática; por meio deles, “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (PCN, 1998, p. 51).

A importância do estudo da geometria se evidencia por apresentar e possibilitar conexões com outras áreas, como para a aprendizagem de números e medidas, pois a geometria estimula “o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.” (PCN, 1998, p. 51) e também na utilização das transformações geométricas (isometrias, homotétias), que permitem “o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes” (PCN, 1998, p. 51).

A geometria propicia ao professor a elaboração de OM e OD que explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, na perspectiva da visualização e aplicação de propriedades das figuras, bem como no estabelecimento de outras relações. Também nessa área pode-se proporcionar a assimilação das noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. A utilização de objetos do mundo físico nas OMs e ODs, como as obras de arte, as pinturas, os desenhos, as esculturas e artesanatos permitem o estabelecimento de conexões não só no nível disciplinar mas também em termos codisciplinares.

No ensino médio, a geometria é concebida, segundo o PCN+ (2002, p. 124) como área de estudos “essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços”. Assim, o seu estudo visa ao tratamento das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

A proposição curricular brasileira para o estudo dessa área da Matemática é estabelecida a partir de quatro setores: Geometria Plana, espacial, métrica e analítica. Estes setores têm suas organizações matemáticas fundamentadas basicamente em dois métodos o método sintético e o método analítico (Quadro 4).

Quadro 5 – Conteúdos e habilidades propostos para o estudo da geometria no ensino médio

Unidades temáticas
1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras. • Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema. • Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc. • Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real. • Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras. • Fazer uso de escalas em representações planas. **2. Geometria espacial:** elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos. • Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções. • Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos. • Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade. • Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados. **3. Métrica:** áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado. • Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos. • Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos. • Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro. **4. Geometria analítica:** representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras. • Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos. • Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características. • Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa. • Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Fonte: PCN+ (2002)

A geometria sintética, ou método sintético, é vinculada “à geometria pura que proporciona provas simples e intuitivas, [...] própria do modelo euclidiano baseada numa axiomática mais ou menos explícita” (GASCÓN, 2002, p. 02), e caracteriza-se pela utilização e articulação das propriedades de posições relativas de objetos geométricos, das relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos, das propriedades de congruência e semelhança de figuras, das análises de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. Quer dizer, um fazer matemático associado à utilização de teoremas e postulados vinculados à posição relativa das formas e das medidas, que objetiva à assimilação das propriedades relativas ao paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e à quantificação de comprimentos, áreas e volumes. Por meio do método sintético, “o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas” (PCN+, 2002, p. 124), da Matemática ou de outras disciplinas. Em suma, aprende-se a lidar com a forma e a posição relativa dos objetos geométricos, como abstração preliminar do mundo real.

A Geometria Analítica, ou método analítico, é caracterizada pelo “modelo cartesiano”, cuja prática se sustenta nas técnicas da álgebra linear e cuja axiomática se coloca de forma mais implícita” (GASCÓN, 2002, p. 02). No plano, pressupõe a utilização de um sistema de coordenadas que implica em estabelecer uma correspondência entre pares ordenados de números reais e pontos do plano, o que permitirá assim a correspondência entre curvas do plano e equações com duas variáveis, de modo que cada curva no plano seja representada por uma determinada equação $f(x, y) = 0$ e a cada uma dessas equações corresponda uma determinada curva, ou conjunto de pontos, do plano. De forma análoga se estabelece uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva relacionada.

Segundo Eves (1969, p. 1), a demonstração de um teorema da geometria pelo método analítico passa a ser aquela de teoremas correspondentes em álgebra e análise Matemática. Assim, o método, ao alcançar um resultado algébrico ou analítico, pode conduzir ao descobrimento de um resultado novo e inesperado. Portanto, a Geometria Analítica é um método notadamente fértil, tanto para resolver problemas como para descobrir novos resultados na geometria.

Tanto Eves (1969) como Gascón (2002) evidenciam que a Geometria Analítica proposta para o estudo no ensino básico é tão elementar que se reduz a ver esse setor como um simples transporte gráfico de pontos e curvas, um modo de reconhecer as formas das seções cônicas a partir de equações expressadas de maneiras mais ou menos normais. Nesse caso, o estudante não toma consciência do poder desse método no que se refere à flexibilidade, diversidade e aplicabilidade, o que resulta em não reconhecê-lo como um método eficiente que pode ser utilizado para resolver problemas não triviais da geometria sintética, ou até mesmo pode propiciar a resolução de problemas que, pelo método sintético é mais custoso que pelo método analítico, assim como há problemas que pelo método analítico se tornam muito complexos e que, ao contrário, pelo método sintético teriam sua complexidade diminuída. O desejável é que o aluno tome consciência da potencialidade e articulação entre os dois métodos, sobretudo porque cada método pressupõe um conjunto de situações com suas correspondentes tarefas, inclusive aquelas que podem ser eleitas como Tarefas Fundamentais.

Deve-se perceber que o método analítico “é um processo de tradução por meio do qual se utiliza uma interpretação algébrica para resolver problemas e estabelecer teoremas da geometria” (EVES, 1969, p. 04); ou seja, significa realizar estudos da geometria por meio de análises em diferentes linguagens e em seguida fazer a tradução dos resultados das análises em registros geométricos dos quais as análises foram originadas. E ainda nos permite ampliar um campo de estudos no qual nos desenvolvemos melhor para obter informação acerca de outro campo de estudos diferente daquele que poderíamos ter maior dificuldade.

Nas proposições dos PCN, o setor Geometria Analítica é descrito como o tratamento algébrico para as propriedades e elementos geométricos, ou seja, por meio dele o aluno terá a oportunidade de conhecer e desenvolver uma forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. Além disso,

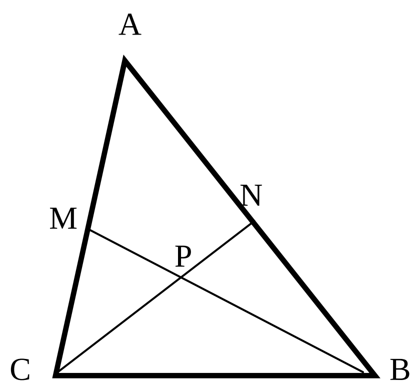
> o aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e

> equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente. (PCN+, 2002, p. 124).

Percebemos que as indicações curriculares propõem um fazer por meio da Geometria Analítica que expresse uma das razões de ser desse setor no currículo do ensino médio, como mais um método alternativo para resolução de problemas geométricos, o que nos permite considerá-lo em um contínuo ao método sintético, propiciando ao estudante a ampliação de seu EP, e, dessa forma, possibilitando a ele a capacidade de escolher a partir do questionamento do tipo de tarefa a técnica para enfrentar esses tipos de tarefas.

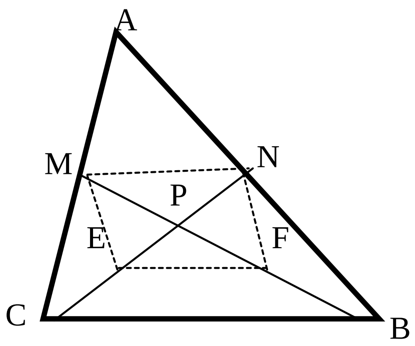
Em Eves (1969), são propostos diversos problemas que evidenciam a diferença entre o método sintético e o método analítico. Um desses é o tipo de tarefas que podemos enunciar da seguinte maneira: *demonstrar que as medianas de um triângulo concorrem a um ponto que trisseca cada uma delas*. Essa é uma proposição vinculada à Geometria Plana, o que de imediato faz suscitar no aluno a busca por técnicas da Geometria Sintética para realizar esse tipo de tarefa, o que poderá ser feito a partir da construção de segmentos de retas auxiliares, articulando essas construções e admitindo alguns axiomas da geometria, como por exemplo: tomando no triângulo ABC, as medianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$, e considerando o ponto P como ponto de intersecção entre as medianas (Figura 7).

Figura 7 – Trissecção das medianas



Com o auxilio de instrumentos, como régua e compasso, podemos traçar o segmento $\overline{MN}$, sendo M e N pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente, e paralelo ao lado $\overline{BC}$, o que o torna a base média do triângulo ABC (mede a metade do comprimento do lado $\overline{BC}$). Construindo o segmento $\overline{EF}$, em que os pontos E e F são respectivamente pontos médios dos segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{PB}$, lados do triângulo PCB, sendo $\overline{EF}$, paralelo a $\overline{BC}$, então $\overline{EF}$ é metade da medida de $\overline{BC}$, em consequência tem a mesma medida de $\overline{MN}$ e é paralelo a este, portanto a figura MNEF é um paralelogramo, então $\overline{EM}$ e $\overline{FN}$ são diagonais desse paralelogramo, e como as diagonais de um paralelogramo se intersecionam em seus pontos médios, logo P é o ponto médio dessas diagonais. Assim, $\overline{NP}$ tem mesma medida de $\overline{PE}$, em consequência $\overline{EC}$ também terá a mesma medida. O mesmo ocorre na mediana $\overline{BM}$, na qual $\overline{MP}$ tem a mesma medida de $\overline{PF}$, portanto $\overline{FB}$ mede o mesmo que esses dois segmentos. Daí podemos inferir que com procedimentos idênticos ocorre a demonstração do ponto P como trissecção da mediana que parte do vértice A. Por meio de técnicas da geometria sintética, podemos concluir que o ponto P é comum às medianas e as trisecta.

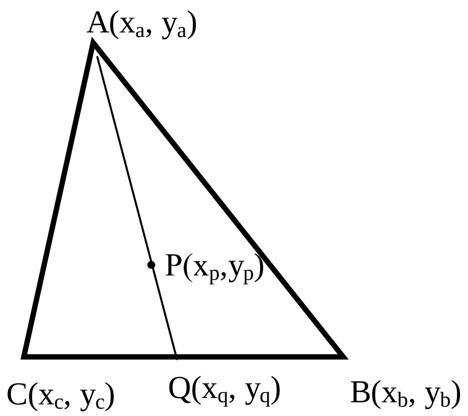
Figura 8 – Trissecção das medianas, construção do paralelogramo MNEF



Essa maneira de fazer, que parece ser muito simples, na verdade requer certa experiência de trabalho com a utilização do método, pois diante desse tipo de tarefa, a primeira dificuldade seria a escolha e a localização dos tipos de construções que devem ser feitas e quais axiomas devem emergir a partir delas, e ainda deveremos levar em conta que a escolha da construção das linhas auxiliares movimenta conhecimentos em nível de axiomas que determinam a localização e justificam a construção dos segmentos, funcionando como tecnologias dessa praxeologia.

Esse mesmo tipo de tarefa enfrentado por meio do método analítico requer em um primeiro momento a localização do triângulo em um sistema de coordenadas, assim podemos representar cada vértice pelas suas coordenadas, $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$. Em seguida localizamos o ponto P, que trisecta a mediana $\overline{AQ}$, logo P está sobre ela na razão de 2 para 1 em relação ao vértice A, dessa forma poderemos aplicar a técnica analítica da razão de segmento.

Figura 9 – Trissecção das medianas pelo método analítico



Como Q é ponto médio de $\overline{BC}$, então $x_q = \frac{x_b + x_c}{2}$ e $y_q = \frac{y_b + y_c}{2}$, aplicando a técnica da razão de segmento teremos que $\frac{AP}{PQ} = \frac{2}{1}$, logo $AP = 2.PQ$ o que resulta em $x_p - x_a = 2x_q - 2x_p$, assim podemos concluir que $x_P = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}$, como também $x_P = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$, e da mesma forma ou por simetria poderemos mostrar que as outras diagonais concorrem ao ponto P, e esse as trisecta. Então, para o enfrentamento do tipo de tarefa, demonstrar que existe um ponto comum e que esse trisecta as medianas de um triângulo, pelo método analítico se constitui em encontrar as coordenadas desse ponto, como na praxeologia acima. Assim, podemos perceber que pelo método analítico utilizamos apenas a técnica da razão de segmento, que se confunde com a própria tecnologia para essa praxeologia.

Comparando os dois métodos para esse tipo de tarefas, percebemos que o método analítico provoca certa economia, ou seja, é menos custoso e possui certo padrão no fazer. Enquanto no método sintético esbarramos na dificuldade do que fazer primeiro e requer certa destreza, que só se adquire com a prática e a experiência. Porém, em outros tipos de tarefas pode ocorrer ao contrário, o método sintético apresentar um fazer mais econômico, compreensivo e justificado que o método analítico.

Assim, o que defendemos, de acordo com as indicações dos PCN e Gascón (2002, 2010), é que esses métodos sejam vistos não de forma dissociada, e sim articulada em que um possa complementar o outro, oferecendo ao estudante habilidades para o enfrentamento de tipos de tarefas da geometria que lhe permitam escolher o método que possibilite economia no fazer e que ele possa justificar esse fazer de forma simples e compreensiva.

Em Gascón (2002), o autor faz referência à introdução da Geometria Analítica por Descartes e Fermat como sendo a instituição de novas técnicas que permitiram não só abordar muitos problemas geométricos, até no momento sem resolução ou com resoluções ainda não tão bem determinadas – como o problema de Papus utilizado por Descartes como motivação para estabelecimento do método analítico – mas também por propor problemas geométricos mais complexos.

Nesse sentido, não só a investigação da história e da epistemologia de um dado saber matemático e de obras de estudo que vivem na escola permitiria ao docente se dar conta do papel das tarefas na reconstrução do saber como objeto de estudos. É necessário ter em conta que as diretrizes dos PCN se constituem em condições com implicações no ensino, em particular na escolha do que pode ser tomada como tarefas fundamentais.

Assim, a noção de tarefas fundamentais pode proporcionar um fazer docente de articulação entre os setores da geometria, para a reconstrução de OMs e ODs, desde que tenha sempre em conta que o objetivo fundamental pode, e deve, ser outorgado pela instituição docente a partir dos tipos de tarefas que podem evidenciar a razão de ser de outras tarefas que atendam as condições, às vezes restritivas, impostas e admitidas pelas instituições.

As tarefas vivem nas praxeologias que atendem necessidades institucionais, inclusive docentes, em suas atividades e tal condição nos leva a caminhar as problemáticas por nós enfrentadas até este momento de modo solitário, mas como problemáticas imbricadas da profissão docente, que requerem um *millieu* mais rico, um EP mais amplo, que disponibilize outras obras e outras respostas para o seu enfrentamento, o qual somente é possível em colaboração com os pares e estes se impõem como novas condições.

Daí que, mais uma vez, o *millieu* de nossas investigações sofre outra ampliação, pois passamos a vivenciá-lo em uma comunidade de práticas que vive em uma dada instituição, em que os docentes influenciam ou são influenciados pelas práticas um dos outros e de terceiros, frutos de seus assujeitamentos institucionais passados e presentes sob as condições e restrições das instituições em jogo.

5 O RECOOR DE MATEMÁTICA COMO UMA COMUNIDADE DE PRÁTICAS DOCENTES

A Escola Tenente Rêgo Barros (ETRB) é uma escola publica federal de ensino fundamental e médio, vinculada ao Ministério da Defesa, Comando da Aeronáutica, situada em Belém-PA. Sua estrutura administrativa é constituída das direções geral, administrativa e pedagógica. A direção pedagógica é formada pelo diretor, pela equipe de orientação e supervisão escolar e pelas coordenações de área ou disciplina. O regimento da escola ETRB determina que as questões de ordem pedagógicas devam ser tratadas em dois órgãos, um deliberativo, denominado DICOOR, composto pelos diretores e os coordenadores de cada área ou disciplina, e outro, o RECOOR órgão deliberativo executivo constituído da coordenação de cada área ou disciplina e os respectivos professores; ambos reúnem-se semanalmente.

As reuniões acontecem em dias diferentes, o DICOOR sempre nas manhãs de segunda-feira e o RECOOR nos outros dias da semana, de acordo com a programação anual feita pela área ou disciplina. O RECOOR de Matemática tem acontecido, nos últimos anos, nas manhãs de terça-feira. O RECOOR acontece nas áreas: Ciências, que agrega Química, Biologia e Ciências do ensino fundamental; Ciências Humanas, composta por História, Geografia, Sociologia e Filosofia; Matemática, que inclui duas disciplinas: Matemática e Geometria (Desenho Geométrico); Língua Portuguesa, que abrange as disciplinas Língua Portuguesa, Redação e Literatura; e separadamente em cada disciplina: Física, Língua Estrangeira, Educação Física e Artes.

No DICOOR, são feitas as proposições sobre questões administrativas e pedagógicas, que depois de discutidas e aprovadas são tomadas como diretrizes para a escola. Essas diretrizes resultam de questionamentos que, em termos de Chevallard (2001 e 2002), situam-se nos níveis da escola e da pedagogia. Em seguida, essas diretrizes são encaminhadas pelos coordenadores, no RECOOR, aos professores para que esses aprofundem o debate e as ponham em prática, situando e considerando-as no nível disciplinar.

O RECOOR de Matemática é formado por 14 professores sendo um coordenador, também professor de Matemática, eleito ou indicado por seus pares. Além dos informes das decisões pedagógicas e administrativas tomadas em

DICOOR, que em RECOOR são avaliadas em nível disciplinar, considerando as especificidades de cada área ou disciplina. Além disso, nesse fórum são tratadas as implicações do pedagógico sobre o didático e vice-versa, pois as questões pedagógicas – avaliação, projetos pedagógicos, desempenho dos alunos – são enfrentadas considerando as implicações no didático, distribuição do conteúdo, OM e OD, etc.

Dessa forma, no RECOOR de Matemática existe a composição de uma unidade docente com interesses comuns, com problemas advindos não somente da tríade aluno, professor e saber, que são enfrentados, a partir do compartilhamento das práticas e da negociação de significados, no desenvolvimento de ações conjuntas que resulta em construções coletivas de respostas, mas de problemas advindos de outros níveis de codeterminação didática com implicações diretas no ensino. Essas características nos levam a compreender o RECOOR de Matemática da ETRB como uma Comunidade de Práticas.

A concepção de Comunidades de Práticas, devida a Jean Lave e Etienne Wenger (1987), é descrita como comunidades em que pessoas reunidas têm interesses comuns no aprendizado e principalmente na aplicação prática do que é aprendido. Essas comunidades desenvolvem-se dentro das estratégias das organizações e visam criar e melhor aproveitar o conhecimento organizacional, surgem e são orientadas pelos objetivos da organização, sendo um de seus benefícios principais a circulação de conhecimentos tácitos.

Nessa ambiência, o conhecimento não é visto como algo estritamente do indivíduo, vinculado a processos cognitivos, mas como fruto da relação social entre as pessoas, em que se aprende com o outro por meio de trocas de experiências. Isto é, “uma comunidade forte fomenta interações e relacionamentos baseados no respeito mútuo e na confiança. Ela encoraja a disposição para compartilhar ideias, expor sua própria ignorância, levantar questões difíceis e ouvir com atenção” (WENGER; McDERMOTT; SNYDER, 2002, p. 28, tradução nossa).

No cotidiano da Comunidade de Práticas, o conhecimento é integrado e distribuído de forma aberta, sem restrições a cargos ou atividades, está disponível para quem tiver interesse, como no exposto: “Aprender necessariamente requer envolvimento e contribuições para as atividades e para o desenvolvimento das comunidades. Em outras palavras, a aprendizagem não ganha espaço se a participação não é possível” (GHERARDI; NICOLINI, 2000, p. 11, tradução nossa).

Em nosso caso, todos participam em igual condição, embora contemos com diferentes níveis de formação e posições na instituição (1 doutor, 3 mestres , 5 especialistas e 5 graduados, destes 2 são doutorandos e 5 mestrandos), todos são professores de matemática em efetivo exercício da docência.

Essa compreensão de aprendizagem também é um dos pontos marcantes na TAD ao situar o ensino e a aprendizagem como resultado de processos de estudos de determinados temas, pois

> em primeiro lugar, embora a aprendizagem possa ser considerada como uma conquista individual, esquecem que é o resultado de um processo coletivo: o processo de estudo que se desenvolve *no interior de uma comunidade*, seja ela uma classe ou um grupo de pesquisadores. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 198, grifo dos autores).

Mais ainda, Wenger (2001) destaca que a aprendizagem decorrente de uma Comunidade de Práticas é produção coletiva, o que caracteriza a comunidade como um agrupamento de pessoas que compartilham e aprendem uns com os outros por contato físico ou virtual, com objetivo ou necessidade de resolver problemas, trocar experiências, determinar ou construir padrões, técnicas ou metodologias, tudo isso objetivando aperfeiçoar suas práticas, como o que ocorre no RECOOR de Matemática.

A prática nesse sentido é identificada como prática social, tal como o fazer docente, descrita como “fazer algo, mas não simplesmente fazer algo em si mesmo e por si mesmo; é fazer algo em um contexto histórico e social que outorga uma estrutura e um significado ao que fazemos” (WENGER, 2001, p. 71). Dessa forma, a prática não é irreflexiva, ao contrário faz-se necessário que os componentes de uma Comunidade de Práticas reflitam sobre a natureza de suas próprias práticas. Nesses termos, a prática se constitui tanto de aspectos implícitos como explícitos, ou seja, se considera prática tudo que

> se fala ou o que se cala, o que se supõe ser é o que se revela ser, incluem a linguagem, os documentos, os instrumentos, as imagens, os símbolos, os papéis definidos, os critérios especificados, os procedimentos codificados, as regulações e os contratos que as diversas práticas determinam para uma variedade de propósitos. [...] As convenções tácitas, os sinais sutis de regras não escritas, as intuições reconhecidas, as percepções específicas, as sensibilidades afinadas, as compreensões encarnadas, as suposições subjacentes e as noções compartilhadas da realidade que, em sua maior parte, nunca se chegam a expressar, são sinais inequívocos da afiliação a

> uma comunidade de práticas e são fundamentais para o êxito de seus empreendimentos. (WENGER, 2001, p. 71, tradução nossa).

Uma Comunidade de Práticas, em nosso caso o RECOOR com duração permanente pela complexidade advinda do enfrentamento das questões problemáticas que envolvem esse fazer e por se constituir institucionalmente para tal, tem como objetivo desenvolver as competências dos participantes, além de gerar trocas e conhecimentos (WENGER; SNYDER, 2002).

Em consonância com o exposto, e como definição abrangente de Comunidade de Práticas, assumimos que

> comunidade de Práticas são grupos de pessoas que compartilham um interesse, um problema em comum ou uma paixão sobre determinado assunto e que aprofundam seu conhecimento e *expertise* nessa área por meio da interação contínua em uma mesma base. Essas pessoas não necessariamente trabalham juntas todos os dias, mas se encontram porque agregam valor em suas interações. Como passam algum tempo juntas, elas compartilham informações, *insights* e conselhos. Ajudam umas às outras a resolver problemas, discutem suas situações, aspirações e necessidades. Elas ponderam pontos de vista em comum, exploram ideias e ações, assim como sondam os limites. Podem criar ferramentas, padrões, desenhos genéricos, manuais e outros documentos – ou podem simplesmente desenvolver uma tácita compreensão do que é compartilhado. Porém elas acumulam conhecimento, torna-se informalmente a fronteira (do conhecimento) pelo valor que agregam na aprendizagem que encontram juntas. Esse valor não é meramente instrumental para o seu trabalho. Resulta também na satisfação pessoal de conhecer colegas que compreendem as perspectivas uns dos outros e de pertencer a um interessante grupo de pessoas. Com o passar do tempo, elas desenvolvem uma perspectiva única sobre seus tópicos, bem como formam um corpo comum de conhecimento, práticas e teorias. Elas também desenvolvem relações pessoais e instituem formas de interação. Podem também desenvolver um senso comum de identidade. Elas tornam-se então uma Comunidade de Práticas. (WENGER; McDERMOTT; SNYDER, 2002, p. 4-5, grifos dos autores, tradução nossa).

Assim, o RECOOR de Matemática é compreendido por nós como uma Comunidade de Práticas, que daqui em diante nomearemos de Comunidade de Práticas ETRB; ou seja, é espaço de construção de conhecimentos, e admitindo que esses conhecimentos ocorram de forma natural nas relações sociais que se estabelecem no ambiente de trabalho, é assumido como um compromisso mútuo entre os membros, um empreendimento comum e, com o tempo, um repertório compartilhado de rotinas, conhecimentos e regras tácitas de conduta. Isso implica em afirmar que com o passar do tempo, os componentes da comunidade busquem ações conjuntas que se desdobrem em práticas comuns na busca de objetivos comuns (WENGER, 2001).

Parece-nos claro, que as características que vislumbramos no RECOOR enquanto uma comunidade de práticas no enfrentamento de suas problemáticas podem ser traduzidas em um percurso de estudos e de investigações (PER) que se desenvolve na Comunidade de Práticas ETRB a partir de questionamentos, entre outros, sobre a infraestrutura didático-matemática e que ecoa como a necessidade do grupo em construir seu próprio manual didático, o texto de saber que implique na elaboração de novas OMs e novas ODs de referências para a ETRB.

Mais precisamente, a problemática enfrentada pela Comunidade de prática da ETRB advém da situação vivenciada pelos docentes sobre as OMs dos livros-textos disponibilizados a escola, pelo PNLEM, diferirem das OMs requeridas pelos programas de ensino que a escola busca atender para cada série.

De outro modo, as OMs dos livros não atendem as exigências de processos seletivos de algumas universidades e que a escola se impõe a atender, como o estudo dos polinômios e das equações polinomiais que estão presentes na programação prevista para 1ª etapa desses processos, enquanto que nos livros estão propostos para a 3ª serie do Ensino Médio, ou ainda, do tratamento vetorial da Geometria Analítica não presentes nessas obras.

Desse modo, as OMs e ODs que vivem na escola manifestam a ausência de razão de ensinar tal e tal tema do currículo em tal e tal série, carecendo de conexões que minimizem as problemáticas decorrentes, como cumprir o tempo didático, por exemplo, ao tempo que “facilitariam” a abordagem de um tema a partir de outro, como no caso da geometria, mais especificamente, a geometria analítica com a Geometria Plana, ou ainda, a geometria analítica com vetores e entre os temas destes setores, mesmo que se encontrem em programas de séries diferentes.

A necessidade de organizações matemáticas/didáticas de referências levam os docentes a buscarem em outras obras que disponham, inclusive de outras instituições, as referências para a elaboração de seu texto de saber tendo em conta outras problemáticas:

- necessidade de cumprir integralmente o programa do currículo escolar;
- necessidade de realizar a avaliação comum a todas as classes da mesma série de estudos;

- necessidade em articular os conteúdos de modo a atender o imutável tempo didático;
- necessidade de motivação dos alunos com temas do currículo que não apresentam relações tão facilmente identificadas em situações extramatemáticas e matemáticas do ensino médio, como o caso dos números complexos e vetores;
- necessidade de atender as exigências que extrapolam o nível da disciplina, como atender a exigência de elaborar tarefas contextualizadas do modo proposto pelo ENEM e de outros concursos para que componham a avaliação institucional.

Além disso, outra problemática ao nível da escola, como de outras disciplinas relacionadas com a matemática, no caso, a disciplina desenho geométrico, que posta sob a responsabilidade de docentes da disciplina matemática passa a demandar, segundo a intenção docente, um programa de estudo que aproxime as praxeologias dessa disciplina com as praxeologias da matemática, mais precisamente, que as construções geométricas façam uso justificado de régua e compasso, requerendo a reconstrução de praxeologias dessa disciplina em conformidade com as praxeologias matemáticas.

Nesse caminhar, a Comunidade de Práticas ETRB toma como objetivos principais o estudo das obras matemáticas da grade curricular do ensino básico e a compreensão das teorias que referenciam a elaboração da Organização Matemática de Referência (OMRE). Para tanto, o grupo decidiu pela criação de um segundo momento de encontro dos professores para esse fim, passando então os encontros formais a ocorrer em dois momentos; às terças e quintas-feiras, sendo os encontros de quinta-feira, específicos para estudos.

Assim, como encaminhamento procedimental para o enfrentamento das questões anunciadas acima, a Comunidade passou a investigar as condições sobre suas atividades de ensino ao nível pedagógico da instituição escolar, como currículo e programas, metodologias, objetivos e avaliações.

Nessa investigação sobre o questionamento da infraestrutura didático-matemática da instituição escolar se encaminhou as condições singulares de enfrentamento pela Comunidade de Práticas ETRB, que podem ser assim descritas:

- a instituição (escola) propicia reuniões para enfrentamento de problemas pedagógicos e didáticos incluídas no horário de trabalho dos professores;
- a atitude dos professores em questionar as OMs e ODs propostas nos livros didáticos utilizados na escola;
- a "liberdade institucional" de uso de textos construídos pelos docentes em suas práticas;
- a "liberdade institucional" para movimentar os objetos de saber no currículo, ora conhecidos e já estudados, ora emergindo como novos, promovendo uma flexibilidade dos programas.

Estas condições e mais especificamente as restritivas não diferem substancialmente das apontadas por Bolea (2003, p. 225), que as identifica como "quatro grandes tipos de restrições transpositivas genéricas, fortemente relacionadas", sendo estas restrições:

(1) as que provêm da representação institucional do saber matemático que se ensina, relacionadas aos modelos epistemológicos didáticos de referencias e geral da matemática, traduzida por "o currículo tem que atender os programas e as diretrizes oficiais";

(2) as provocadas pela necessidade de avaliar, traduzida por "avaliação é controle realizada pela instituição dividida em duas partes; uma processual e outra em forma de teste a todas as classes da mesma série de estudos";

(3) as impostas pelo tempo didático, traduzida por "O docente tem que cumprir integralmente, no tempo e como previsto, o programa do currículo escolar";

(4) as que provêm da necessidade de que todo saber ensinado apareça como definitivo e inquestionável, traduzida por "a obrigatoriedade de atender a imposição social de preparação específica para os exames de avaliação nacional (ENEM) e vestibulares".

A clareza dos questionamentos sob as condições, inclusive restritivas, são frutos de olhares aguçados de experientes professores e dos que apresentam uma formação diferenciada, pois a equipe comporta um doutor, dois doutorandos, um mestre e seis mestrandos.

O estudo, fruto do questionamento da infraestrutura didática, mostra a preocupação da Comunidade com as dimensões ecológica e econômica de um problema didático e objetivou a compreensão da construção do conhecimento dos objetos matemáticos, no sentido da assimilação das possíveis articulações que podem ser estabelecidas, e ainda, das possíveis aplicabilidades desse conhecimento, buscando evidenciar os porquês da presença desse objeto na grade curricular, na perspectiva de propiciar ao professor subsídios teóricos que lhe possibilitem responder a perguntas que emergem da sala de aula, como: por que devo estudar este ou aquele conteúdo matemático? Questionamento ligado à razão de ser dos objetos no currículo escolar.

Esses olhares aguçados, e em particular com o estudo sob nossa direção, com suporte teórico da Didática da Matemática, mais especificamente, com a TAD, traduzem essas problemáticas como o problema da desarticulação presente na infraestrutura didático-matemática disponível, no sentido posto por Chevallard (2009a, 2009b), Bosch e Gascón (2009) e Gascón (2010), que passamos a apresentar a seguir.

6 O PERCURSO DE ESTUDOS E DE PESQUISAS: a comunidade de práticas ETRB

O primeiro encontro ocorreu em horário específico para o estudo no dia 15 de agosto de 2010. Nesse encontro foram acordados os objetivos do estudo, bem como a elaboração de um roteiro. Nesse roteiro, foi incluído um encontro com a TAD, embora parte da comunidade já a tivesse encontrado anteriormente, mais precisamente, por meio da pesquisa de Andrade (2007) compartilhada com a Comunidade.

Iniciamos enfatizando a necessidade do enfoque teórico não somente para nos permitir análises de práticas, de OM e OD, como também por proporcionar o desenvolvimento de dispositivos didáticos e metodológicos para o enfrentamento das problemáticas que envolvem as práticas docentes com Matemática. De outro modo, assumindo que “a didática da Matemática se constituía como um saber instrumental básico de referência para a profissão de professor de Matemática e, portanto, como eixo vertebral de qualquer processo de formação dessa profissão” (BOSCH; GASCÓN, p. 91, 2009).

Destacamos que as investigações em TAD apontam que, paralelas às pesquisas que abordam a problemática do saber matemático, surgem novas questões de investigação vinculadas à formação matemático-didática do professor e, em consequência, sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem. Gascón (2010), por exemplo, chama atenção apontando que apesar de muitas pesquisas já terem sido realizadas, ainda hoje os pesquisadores em nível global não possuem ferramentas adequadas para tratar dessa problemática.

Em busca de enfrentar a problemática da Comunidade e possíveis questões derivadas, a interpretamos como isolamento e atomização (CHEVALLARD, 2001a e 2002; BOSCH; GASCÓN, 2004) e monumentalização dos conteúdos matemáticos (BOSCH, GARCIA e GASCÓN, 2006), buscando encaminhar o estabelecimento de um sistema didático com a Comunidade que proporcionasse um ambiente de estudos, de análises, desenvolvimentos e reconstruções de OMs e ODs com intuito de estabelecer o maior número de articulações possíveis entre temas, setores e áreas, de modo que as OMs pudessem ascender ao nível de OMLRC.

A OMLRC é a ferramenta didática desenvolvida por Fonseca (2004) e Bosch, Fonseca e Gascón (2004) para enfrentar a questão da incompletude das OMs que vivem nas instituições escolares. Optar por essa ferramenta faz emergir a necessidade de construir OM que contenha

> um questionamento tecnológico relevante, ou seja, um conjunto de tarefas matemáticas que dizem respeito à interpretação, justificação, confiabilidade, economia e ao alcance das técnicas e, ainda, que tal questionamento incida de tal forma sobre a prática matemática que induza o Momento de desenvolvimento do Trabalho da Técnica em uma direção tal que produza uma atividade matemática de complexidade crescente, que provoque a ampliação do tipo de problemas que podem ser abordados. (FONSECA et al. 2010, p. 249, tradução nossa).

A noção de OMLRC encaminha o desenvolvimento de uma resposta, no caso a OM, que atenda as seguintes condições:

1- que a OM em questão contenha um questionamento tecnológico pertinente, isto é, um conjunto de tarefas matemáticas que façam referência à interpretação, à justificação, à fiabilidade, à economia e ao alcance das técnicas;

2- que o referido questionamento incida de tal forma sobre a prática matemática que provoque o desenrolar do momento do trabalho da técnica em uma direção tal que produza uma atividade matemática de complexidade crescente, que provoque a ampliação do tipo de problemas que podem ser abordados;

3- que os tipos de tarefas que geram a atividade matemática estejam associados a uma questão matemática “com sentido”, isto é, que provenha de níveis superiores de determinação didática e conduza a alguma parte, que não se trate de uma questão “morta”. A razão de ser (matemática ou extramatemática) da atividade matemática pode estar mais além dos próprios conteúdos matemáticos.

Atender tais condições constitui assim um conjunto de tipos de tarefas aos docentes sob condições – algumas restritivas – não rotineiras e até não imaginadas pelos professores, que têm suas atividades condicionadas a currículos não muito flexíveis, até mesmo rígidos, a livros didáticos impostos pela instituição que acabam por determinar uma organização de tarefas a ser posta em jogo na organização didática. Todas atendendo condições outras como o tempo de relógio para o ensino e condições institucionais de avaliação como observado na problemática vivenciada pela comunidade ETRB.

Embora os condicionamentos institucionais sobre nossa comunidade em certa medida atribuam tarefas aos docentes, como a de *construir organizações a partir de recortes de organizações matemáticas presentes nos livros-textos do ensino básico*, esses condicionamentos em si não tornam clara a necessária presença de uma ou mais dimensões didáticas; epistemológica, econômica e ecológica (GASCÓN, 2011).

Essas ausências dificultam, senão impedem, vislumbrar *tipos de tarefas dos docentes* como “organizar para o ensino um conjunto de tarefas matemáticas tendo em conta a interpretação, justificação, confiabilidade, economia e ao alcance das técnicas ”, “Organizar para o ensino um conjunto de tarefas que no momento do trabalho da técnica com os alunos produza uma atividade matemática de complexidade crescente provocando a ampliação dos tipos de problemas que podem ser abordados”, ou ainda, “Dar ou encontrar a razão de ser de uma praxeologia matemática.”

Essas tarefas, não estão claramente postas ao professor que está longe de atribuir a si o papel de construtor e organizador de tarefas para o estudo. Construir ou organizar tarefas seria antes tarefa dos matemáticos e, em última análise, dos especialistas em educação (matemática) e, como tal, não seria tarefa rotineira dos docentes do ensino básico, em nossa instituição, organizar tarefas para o ensino de modo a atender uma intensão didática, por exemplo, de forma a integrá-las em conexões que permitam uma prática matemática inteligível e justificada.

Nosso estudo nos encaminhou ao encontro de obras sobre reconstrução de OMLRCs de Fonseca et al. (2004 e 2010), mas não no sentido exclusivo de se pensar tomar tarefas que para serem enfrentadas pelos alunos suscitem neles questionamentos tecnológicos mais abrangentes possíveis, que produzam uma atividade matemática de complexidade crescente.

Nosso olhar, embora admita o pensar da complexidade crescente a partir do trabalho da técnica, caminha em pensar a complexidade crescente, antes como fruto das manipulações de tipos de tarefas pelo professor, como uma tarefa docente que este tem de desenvolver para ascender uma organização matemática pontual a uma OMLRC.

É nesse sentido que levamos à Comunidade a noção de Tipos de Tarefas Fundamentais quando da reconstrução das OMs e ODs nas instituições de ensino, pois essas propiciariam um olhar sobre a tarefa ora como técnica e ora como tecnologia/teoria de acordo com a sua função na organização (FONSECA et al. 2010a, 2010b).

A complexidade crescente para o professor se situa assim no trabalho de articulação de tarefas, na construção estruturada de um conjunto de tarefas que cresce em complexidade, por exemplo, à medida que busca considerar o horizonte dos objetos matemáticos de ensino no currículo, tendo em conta as condições e restrições institucionais impostas sobre esse fazer.

Sob essa compreensão, como membro da comunidade, compartilhamos com a Comunidade de Práticas ETRB nossa problemática a respeito da Geometria Analítica – tema que já vínhamos compartilhando com essa comunidade, em particular quando do seu tratamento vetorial – e propomos um sistema didático a partir de questionamentos sobre esse saber específico.

Situamos, assim, a problemática da Comunidade na Geometria Analítica, suas possíveis articulações internas com temas de outros setores ou áreas do currículo, esperando encontrar questionamentos outros a partir dos possíveis modelos epistemológicos que governavam as reconstrução de OMREs tendo em conta o estudo da epistemologia matemático-didática da geometria analítica nas OMs e ODs constantes nos livros didáticos do PNLEM, e, sobretudo, das experiências docentes e ferramentas didáticas institucionalmente disponíveis, incluindo os materiais por eles construídos no exercício de suas práticas.

Em consequência desses estudos, a Comunidade de Práticas ETRB assume o desenvolvimento do sistema didático a partir do questionamento da noção de Tarefas Fundamentais que se põem como ambiente propício para *habitat* de sistemas didáticos e metodológicos de formação continuada no exercício da prática docente com Matemática, nos termos propostos por Yves Chevallard (2009b, 2009c), que em palavras de Chevallard (2009b) e Barquero (2009), constitui-se em um dispositivo de respostas aos problemas da prática docente.

Daqui em diante os professores que compõem a Comunidade de Práticas ETRB, exceto o coordenador, serão referenciados por letras maiúsculas como: A; C; F; G; GU; L; V etc.

6.1 O DESENVOLVIMENTO DOS SISTEMAS DIDÁTICOS DO PER A PARTIR DA NOÇÃO DE TAREFA FUNDAMENTAL NA COMUNIDADE DE PRÁTICAS ETRB

Partimos da tese de que a noção de tarefa fundamental não somente induz como também mantém um PER e, por conseguinte, que se torna um dispositivo didático para enfrentar o problema da desarticulação, embora entendendo que tratar o problema da desarticulação considerando as condicionantes do currículo não é simples tendo em conta que as práticas docentes que vivem na instituição podem se configurar como restrições para a proposição de resposta ao problema.

A configuração do PER, que exige o desdobrar de sistemas didáticos, e em sistemas auxiliares, a partir de questionamentos formulados pelos professores da Comunidade em torno de tarefas que possam catalisar as articulações com diferentes organizações sob as condições impostas, pode encaminhar o necessário confronto de práticas que minimizem ou eliminem as restrições impostas pelas práticas docentes que vivem na instituição, ao tempo em que se constroem as respostas procuradas para as problemáticas postas.

Nesses termos, o PER se impõe como dispositivo de formação de professores à medida que encaminha a construção de respostas às questões problemáticas da e pela Comunidade que podem ser traduzidas pela questão de pesquisa no contexto empírico em que se situa, assim reformulada:

Q: *Como fazer a construção de uma OM/OD, entendida como um conjunto estruturado de tarefas, que respondem a questões determinadas, com forte grau de integração e em ordem crescente de complexidade e que façam o reencontro dos professores com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analítica?*

Responder a tal questionamento encaminha a formação do sistema didático S(X,Y,y,Q), em que X é um grupo de alunos hipotéticos[9], Y composto pelos docentes da escola onde a pesquisa se desenvolve e $y \in Y$ o professor que coordena os estudos e autor desta investigação.

9 “A noção, de aluno hipotético, objetiva idealizar a atividade liberando o autor, provisoriamente, das variáveis contextuais e cognitivas que podem influenciar na execução da atividade” (GASCÓN, 2010, p. 12).

O pensar inicial sobre a noção de Tarefas Fundamentais nos leva ao papel funcional das tarefas nas organizações matemáticas e didáticas e é inicialmente traduzido no seguinte questionamento;

Q_0: *Por que e para quê existe tal e tal tarefa nas organizações matemáticas/didáticas da Geometria Analítica Plana do ensino básico?*

Para o enfrentamento dessa questão, a Comunidade inicia seus estudos pela busca de relações entre as OMs e ODs propostas nos livros didáticos com possíveis modelos epistemológicos relativos à Geometria Analítica recorrendo ao modelo praxeológico proposto pela TAD, destacando as tarefas ou tipos de tarefas propostos nas OMs. Busca vislumbrar um modelo epistemológico que permita uma estrutura de tipos de tarefas articuladas e, entre elas, as Tarefas Fundamentais por se permitirem ser vistas nesse modelo como técnicas/tecnologias de outras tarefas.

Nesse sentido se configura o sistema didático S_1 (Y, y, O_1), com a obra O_1 de Yussef et al. (2005) usada na escola, e dele resulta a formulação de uma resposta R_1 pela Comunidade, a compreensão da estrutura de tarefas da obra relativa aos temas que são divididos em estudo do ponto, da reta e da circunferência. Essa resposta decorre do desdobramento de S_1 em um conjunto de sistemas didáticos do tipo S_{1k} (Y, y, P_k), em que P_k são praxeologias constantes na obra em estudo. A resposta R_1 pode ser descrita como segue no quadro 6:

Quadro 6 – Tipos de tarefas para o estudo da GAP nos livros-textos

Tipo de Tarefas	**Técnica**
Localizar pontos no sistema de coordenadas ortogonais.	Constitui-se em traçar retas auxiliares, paralelas aos eixos e passando pela abscissa do ponto e ordenada do ponto.
Calcular a distância entre dois pontos.	Modela-se em triângulo retângulo, sendo a distância entre os pontos identificada como a hipotenusa desse triângulo e daí utiliza o Teorema de Pitágoras.
Determinar o ponto médio de um segmento.	Calcula-se a média aritmética entre as coordenadas dos pontos extremos do segmento.
Determinar o baricentro de um triângulo.	Calcula-se a média aritmética entre as coordenadas que compõe os vértices do triângulo.
Determinar em que condições três pontos estão na mesma linha.	Calcula-se o determinante composto pelas coordenadas desses três pontos, completando o determinante com uma coluna em que seus valores são todos iguais a um. Se o resultado for zero, os pontos estão alinhados; se for diferente de zero, os pontos não estão alinhados.
Escrever a equação da reta	Se forem informados dois pontos pertencentes à reta, então se utiliza o cálculo do "determinante". Se for informado um ponto e a inclinação que a reta tem em relação ao eixo das abscissas (o ângulo), a tarefa se desdobra em primeiro determinar o coeficiente angular *m*, para em seguida escrever a equação a partir da expressão $y - y_0 = m\,(x - x_0)$.
Determinar a posição relativa de duas retas	Analisam-se os coeficientes angulares, na perspectiva de serem iguais ou inversos e simétricos.
Calcular da distância entre um ponto e uma reta	Aplica-se a fórmula $d_{pr} = \left\| \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\|$.
Determinar a equação da circunferência	Fundamenta-se a partir da distância entre dois pontos.
Analisar a posição relativa de um ponto, de uma reta e de uma circunferência em relação à outra circunferência.	De forma genérica, a técnica para o enfrentamento desse tipo de tarefas é o cálculo da distância entre pontos.

Pelo exposto no Quadro 6, os tipos de tarefas são isolados uns dos outros, caracterizados por uso de técnicas específicas para cada tipo, sem evidenciar possíveis articulações que possam se vislumbrar entre os tipos de tarefas. O que configura realizações de OMs pontuais e rígidas, contrárias à proposição de OMLRC indicada como a estrutura mínima para o fazer docente.

Quanto ao estudo da reta, o primeiro Tipo de Tarefas é *determinar a equação da reta*. A técnica para enfrentar esse Tipo de Tarefas depende das informações fornecidas, se forem informados dois pontos pertencentes à reta, então se utiliza o cálculo do "determinante", sendo esse composto pelos dois pontos dados e um terceiro ponto genérico pertencente à reta; para a composição do determinante, utiliza-se um 's na última coluna.

A respeito dessa técnica, os professores A e Gu chamam a atenção de que é um fazer semelhante ao da condição de alinhamento, porém não justificam o uso do "determinante", tal como os livros-textos.

Se a informação para determinar a equação da reta for um ponto e a inclinação que ela tem em relação ao eixo das abscissas (o ângulo), a tarefa se desdobra em primeiro determinar o coeficiente angular *m*, para em seguida escrever a equação a partir da expressão $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, informada sem nenhuma justificativa.

Já no Tipo de Tarefas *determinar a posição relativa de duas retas*, a técnica utilizada requer a análise comparativa dos coeficientes angulares, na perspectiva de serem iguais ou inversos e simétricos. Outro Tipo de Tarefa é o *cálculo da distância entre um ponto e uma reta*. A técnica para esse tipo de tarefa se restringe à aplicação direta da formula $d_{pr} = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$, sem nenhum trabalho que estabeleça de que forma chegou-se a esse modelo. Dessa forma, enfrentar tarefas desse tipo se limita ao uso direto da fórmula em exaustivos exercícios de repetição.

Mais uma vez chegamos à compreensão de que por esse caminho o fazer docente gira em torno do Tipo de Tarefas que obedece a uma estrutura rígida de tipos de tarefas marcadamente isoladas, destituída de qualquer trabalho da técnica que possibilite a instituição de uma OMLRC no sentido proposto por Fonseca (2004).

Quanto ao estudo da circunferência, os Tipos de Tarefas iniciam por *determinar a equação da circunferência*, com a técnica fundamentada a partir da distância entre dois pontos, um dos pontos representando a localização do centro e o outro um ponto genérico da circunferência, sendo essa distância o raio. Mas, tal conexão fica limitada somente à apresentação da equação genérica da circunferência.

Outro Tipo de Tarefas é *analisar a posição de um ponto, de uma reta e de uma circunferência em relação à outra circunferência*. De forma genérica, a técnica para o enfrentamento desse tipo de tarefas é o cálculo da distância entre pontos. Nesse momento, se evidencia o resgate da técnica para se calcular a distância entre dois pontos como tarefa auxiliar para resolução dos tipos de tarefas vinculadas à circunferência, ou seja, de forma explícita surge a articulação entre os Tipos de Tarefas, porém sendo evidenciada pela utilização da mesma técnica, não descrevendo um verdadeiro trabalho na técnica, muito menos nos Tipos de Tarefas que possibilitassem no decurso do estudo a articulação e justificativas para esses Tipos de Tarefas, destacando inclusive a razão de ser desses Tipos de Tarefas nas OMs/ODs propostas no Ensino Básico.

Em resumo, a resposta R_1 produzida pela Comunidade a partir do sistema didático S_1 outorga o selo de legitimidade à resposta por nós apresentada e aqui exposta no Capítulo 3: Localizar pontos no plano; Calcular a distância entre dois pontos dados e Encontrar a equação do segmento de reta, como os Tipos de Tarefas Fundamentais.

Sempre com intuito de se obter um conjunto estruturado de tarefas com forte grau de integração e assim com maior grau de complexidade, a Comunidade sente a necessidade de investigar a história e a epistemologia da Geometria Analítica, como recursos para encontrar tarefas não explicitadas, ou omitidas, nas praxeologias escolares da Geometria Analítica, ou que podem eventualmente estar presentes na escola em outros temas ou setores em outras posições do currículo. De outro modo, a Comunidade postula a não suficiência dos livros didáticos investigados, da necessária visão do objeto no horizonte do currículo, para busca das Tarefas Fundamentais e que é traduzida no seguinte questionamento:

$Q_{1:}$ *Quais são as tarefas presentes na história e epistemologia da GAP que de algum modo podem ser vinculadas a tarefas constantes nas praxeologias que vivem na escola?*

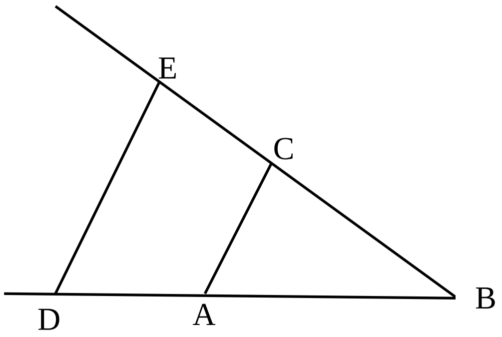
Possíveis respostas para esse questionamento são encaminhadas pelo sistema didático $S_2(Y, y, O_2)$, em que O_2 refere à obra sobre a história e epistemologia da Geometria Analítica, mais precisamente o trabalho de René Descartes (1637) apoiada pela tradução e comentários de Smith e Latham (1954).

A partir desse estudo e das mobilizações do Equipamento Praxeológico pessoal e institucional, a Comunidade estabelece possíveis relações entre as tarefas da GAP que vivem na escola com as tarefas também da escola sobre o Teorema de Tales e que se faz presente na obra estudada e que fundamenta a GAP.

Nesse texto, a Comunidade nota que Descartes recorre ao que hoje é institucionalizado como um tipo de tarefa do Teorema de Tales, “um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais”, tema de estudos no sétimo ano do ensino fundamental brasileiro.

Mais precisamente, para realizar a articulação entre as operações aritméticas com as geométricas, necessárias ao desenvolvimento da GAP, Descartes procedeu da maneira citada na página 77 deste texto conforme a Figura 10.

Figura 10 – Construção de Descartes



Fonte: Descartes (1637)

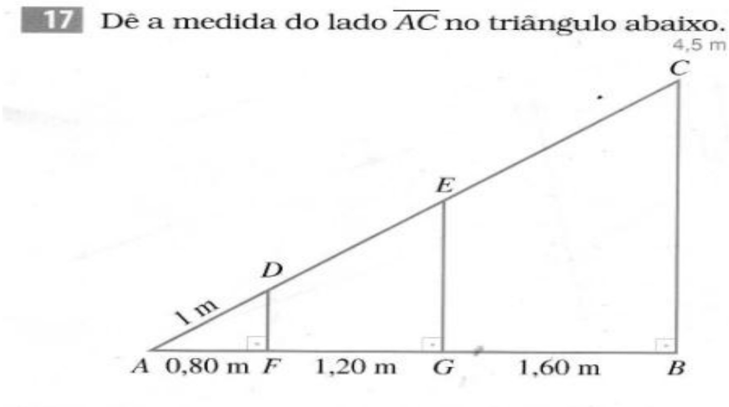
Para multiplicar BD por BC, Descartes tomou AB como unidade, em seguida traçou o segmento $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CA}$. Assim sendo aplicando o Teorema de Tales chega-se à seguinte proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE}$$

E assim, assumindo $\overline{AB}$ como a unidade, então BE = BD x BC e BC=BE : BD.

Se no contexto da epistemologia da GAP, as operações entre segmentos, pensadas como operações entre números, constituía-se em novidade, hoje são rotineiras nas tarefas escolares sobre o Teorema de Tales e se constituem como a resposta R_2 selada pela Comunidade como exemplo o tipo de tarefa da figura 11 extraída do livro didático do 9º ano.

Figura 11: Tipo de tarefas propostos para o estudo do Teorema de Tales nos livros



Fonte: Bianchini (2006, p. 153)

De outro modo, do sistema didático S_2, resulta que tipos de tarefas sobre o Teorema de Tales se põem como uma conexão que desencadeia o processo analítico que caracteriza a GAP e, nesse sentido, como um dos temas da área da geometria que possibilitaria ao professor reconstruir OMs e ODs que permitissem a articulação com outras OMs e ODs já vivenciadas ou por vivenciar nas instituições de estudos e, mais importante, pode ser assumida como tema que articula a Geometria Sintética com a Geometria Analítica.

Dessa forma, uma quarta questão foi estabelecida pela Comunidade:

Q_2: *Qual a potencialidade do Teorema de Tales no currículo do ensino básico?*

Na perspectiva de enfrentamento da Q_2, se impõe um sistema auxiliar S_3(Y, y, *O_3*). A Comunidade decidiu realizar investigações históricas e epistemológicas desse tema matemático de estudo propostos na grade curricular da escola, nesse sentido outras obras (*O_3*) são incluídas para estudos, mais precisamente, Guedj (2008); Boyer (1974); Eves (2004); e Struik (1989).

No percurso do estudo, o professor A, um dos membros da Comunidade, destacou que “Tales possivelmente não estabeleceu relação de semelhança de triângulos, pois não havia triângulo, e sim relações entre segmentos, o triângulo é a construção da nossa mente”.

Esse argumento foi construído a partir do que descreve Guedj (2008, p. 43) sobre Tales ter deduzido “que no instante em que minha sombra for igual à minha estatura, a sombra da pirâmide será igual à sua altura”.

O destaque sobre a consideração ou não da semelhança de triângulos, provocou intenso debate, pois os professores L, V e G não concordaram, afirmando que “se Tales não tivesse pensando em semelhança de triângulos, não teria se preocupado com o instante e o dia, além do que ele era astrônomo e já deveria conceber a propagação retilínea dos raios solares”.

Dessa forma, novas questões foram levantadas como:

(Q_3) Qual relação existe entre o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos?

(Q_5) Qual relação existe entre o Teorema de Tales e as Proporções?

(Q_6) Tales, no episódio da medição da altura da Pirâmide, utilizou a teoria das proporções ou semelhança de triângulos?

*(Q_7) Ao propor para o aluno do sétimo ano encontrar o valor de **x**, este sendo a medida de um segmento de reta, resultado de uma figura formada por um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, estaremos trabalhando na área da álgebra ou da geometria?*

Com a finalidade de melhor esclarecer as questões formuladas, o grupo decidiu, por sugestão nossa, instituir sistemas didáticos auxiliares do tipo $S_4(y_m, P_j)$ em que $y_m \in Y$ e P_j são praxeologias relativas às questões levantadas com a finalidade de apresentação de resultados e estudos em encontros futuros.

As praxeologias de estudo, vinculadas às questões levantadas anteriormente, foram eleitas em comum acordo na Comunidade, sendo estas: a demonstração do Teorema de Tales pelo método das proporções; aplicações relativas ao Teorema de Tales, buscando evidenciar as relações desse com outros temas e setores da Matemática escolar.

Ainda sobre o estudo histórico epistemológico do Teorema de Tales, em outro episódio, o Professor V, mostrando a obra de Guedj(2008, p. 36), chama atenção do grupo ressaltando que esse autor afirma “que Tales mostrou que a cada triângulo podia corresponder uma circunferência: [...] O que quer dizer que três pontos não alinhados, *definem* não apenas um triângulo, o que é evidente, mas uma circunferência, o que não é” .

Essa argumentação provocou debate entre os componentes da Comunidade, no qual parte do grupo concordava com o que havia sido exposto e parte concordava parcialmente, como afirma o professor C: “no caso da circunferência, nem sempre, pois algumas condições deveriam ser consideradas”.

Mas foi prontamente contestado por outro membro do grupo, também professor de desenho geométrico, como segue.

Professor G: “Considerando a condição de existência de um triangulo, é evidente a construção do triângulo dado três pontos não alinhados, então sempre por três pontos não alinhados passa uma circunferência, já que todo triângulo tem circuncentro e esse é sempre possível de ser determinado”.

Continuando, o professor V destacou, fazendo referência à condição de alinhamento tema da GAP, que: “é condição necessária para a construção de um triângulo que os três pontos não estejam na mesma linha.”

Nesse episódio, fica clara a importância da presença do professor de Desenho como membro da Comunidade, como condição enriquecedora para o PER, como já destaca Chevallard (2009c) quando enfatiza a necessidade da codisciplinaridade no desenvolvimento desse dispositivo.

Em sequência aos estudos e provocados pela afirmação do professor de desenho, os professores G e V expuseram algumas reflexões que destacaram a relação de imbricação que ocorre entre a condição de alinhamento de três pontos, o triângulo e a circunferência, conteúdos de estudos propostos como temas da GAP, na perspectiva de evidenciar a relação entre o método sintético e o método analítico.

Por meio dessas reflexões, o grupo mais uma vez se reportou às ODs desenvolvidas em sala de aula, as quais tomam como referências as OMs propostas no livro didático, em que os temas mencionados são tratados sem nenhuma articulação.

Esse episódio provocou a manifestação dos membros do grupo, que puseram em destaque a importância dessa Comunidade e da elaboração da OMs e ODs de referência para estudos na escola.

Aqui, percebemos que o desenvolvimento do PER na Comunidade de Práticas despertou nos professores a necessidade de processos de estudos, pois muitos episódios da história e da epistemologia da matemática, inclusive da matemática escolar, podem revelar articulações entre temas que não são evidenciados nas OMs propostas por autores nos livros didáticos, como no caso do alinhamento de pontos, o triângulo e a circunferência, que para alguns componentes da Comunidade só ficou evidente não só com o estudo da obra, como também pelo Equipamento Praxeológico disponibilizado e mobilizado pela Comunidade. Isto está claro nas declarações a seguir.

Professor V: “só agora eu atentei para esse detalhe, que por três pontos não alinhados quaisquer podem ser traçada uma circunferência, isso permite que, ao falar de condição de alinhamento, eu já possa tratar da equação da circunferência”.

Que é corroborado por outro membro da Comunidade quando afirma: Professor M: “Também, da equação da reta e da área de polígonos dados os vértices”.

Este episódio, de algum modo, expressa a compreensão da Comunidade sobre a potencialidade das tarefas relativas ao Teorema de Tales, de forma implícita ou explicita pode se constituir para o professor como tipos de tarefa fundamental, visto que possibilitam, na perspectiva do horizonte conteúdo, articulações e justificações da atividade matemática, do professor, e do aluno, relativo ao estudo das geometrias que vivem na escola básica.

Ainda, evidencia para a Comunidade o papel do professor como construtor e organizador de tarefas para o estudo. Revela a necessidade para o professor da análise histórico-epistemológica do saber matemático de referência, tanto no sentido do saber sábio como do saber escolar.

Outro ponto destacado foi durante o debate sobre a relação entre o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, o grupo concluiu que se trata de temas imbricados, pois nas fontes por nós consultadas não ficou claro se Tales utilizou a semelhança de triângulos para estabelecer o teorema ou vice-versa.

Nesse sentido, o professor F acrescentou que “o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos são as mesmas coisas”.

Porém o grupo decidiu por aprofundar mais os estudos a fim de assumir ou não essa proposição, quando ficou claro para a Comunidade que é o nível de articulação entre esses temas, Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos, mais o estudo da teoria das proporções que poderia também, no sentido macro, estabelecer articulações mais profundas como as possíveis entre as áreas de Geometria, Aritmética e Álgebra.

Nesses termos, a Comunidade legitima como resposta R_3 que o Teorema de Tales transversaliza o ensino básico, pois ele pode ser colocado como tarefa/tema que articula outros temas, setores e áreas, e de acordo com sua função na OM/OD, pode assumir o papel de tarefa, de técnica ou de tecnologia/teoria.

Para melhor compreender a potencialidade do Teorema de Tales no currículo, a Comunidade destaca as condições e restrições advindas das relações docentes, da história, da epistemologia escolar sobre a vida do Teorema de Tales na escola.

Quadro 7 – Condições e restrições no estudo histórico e epistemológico do Teorema de Tales

Episódio	Condições	Restrições
Estudo Histórico e epistemológico do Teorema de Tales	- A presença explícita no currículo da instituição no sétimo ano do Ensino Fundamental. - A potencialidade de um fazer articulado com outros temas como semelhança de triângulos e a proporcionalidade. - A possibilidade de integração e transição entre os setores como a Geometria Sintética e a Geometria Analítica. - A capacidade de articulação entre a álgebra e a geometria do Ensino Básico. - A disposição de articulação com outras disciplinas como no caso o Desenho Geométrico.	- O isolamento temático no currículo e nas OMs e ODs institucionais. - A monumentalização desse tema por parte do fazer docente. - O isolamento em nível disciplinar. - A falta de percepção por parte do professor da presença do Teorema de Tales de forma implícita ou explícita em outros setores de estudos do Ensino Básico, que não da Geometria Plana.

Parece claro que as restrições aqui expostas podem ser removidas por um PER, como ora realizado, desde que as condições de codeterminação didática permitam.

Outras respostas apresentadas pelos sistemas auxiliares não foram assumidas para um estudo mais aprofundado por diferentes razões. Os estudos sobre as demonstrações do Teorema de Tales realizadas por Eudoxo a partir do método das proporções tendo como motivação a análise numérica foram devidas à complexidade que envolve essas obras e observando que a tarefa de demonstrar o Teorema de Tales não consta nas OMs do ensino básico relativas a esse objeto, ou quando consta é apenas para medidas com números racionais.

Mas, em decorrência desse episódio e fruto do tratamento no sentido da subdivisão de segmentos que comprova o Teorema de Tales para segmentos cuja razão entre as medidas são números irracionais, a Comunidade observou que esse procedimento poderia revelar articulações como as frações.

Essa articulação com as frações desencadeou outro sistema didático, que inserimos no Anexo 1 por fugir de certo modo do propósito quanto a questão em jogo Q_2 , marcante pela negociação de significados, pois a Comunidade se debruçou intensamente no enfrentamento da problemática levantada, assumindo um problema intrínseco da Comunidade, com argumentações várias dos seus membros que se posicionaram destacando suas experiências no ensino de frações e observando esse estudo como de grande valia para suas práticas futuras.

Em consequência, o grupo decidiu por construir futuramente uma OMRE para o ensino de frações em que as Tarefas Fundamentais poderiam ser buscadas no quadro das representações geométricas das frações, pois possibilitariam a articulação e a justificação das operações com frações, além de possibilitar o trabalho da técnica.

Nesse momento, fica claro para a Comunidade o papel do professor como construtor de OM/OD, como articulador de tarefas, e sobretudo o problema da profissão docente: “O que (de fração) e como ensinar?”

Após a evidência da potencialidade dos Tipos de Tarefas Fundamentais em contribuir para o enfretamento do problema praxeológico do professor por prover uma construção de praxeologias intra e interrelacionadas em níveis de articulação que ascendem do tema aos níveis superiores de organizações praxeológicas e de codeterminação didática, a atenção da Comunidade se volta para velhos e novos questionamentos sobre as estruturas das OMs e ODs presentes nas instituições escolares, entre eles, os seguintes:

- Quais as relações entre a Geometria Plana e a Geometria Analítica?
- Porque usar determinante para encontrar a equação da reta e mostrar que três pontos estão alinhados?
- Qual o papel de cada um dos tipos de equações da reta: segmentária, paramétrica, geral, reduzida e vetorial?
- Para que calcular as coordenadas do ponto que representa o baricentro de um triângulo?

Nessa rede de tessituras complexas, a comunidade expressou a necessidade de uma melhor compreensão da questão Q_1, propondo outras questões derivadas:

Q_8: *Como eleger as Tarefas Fundamentais?*

Q_9: Esse tipo de tarefas, as fundamentais, sempre existem, seja qual for a OM relativa um determinado objeto matemático de estudo?

Esses questionamentos refletem a complexidade na eleição das Tarefas Fundamentais, que não se configuram como instrumentos estáticos e préestabelecidos, pois estão além da história e epistemologia do saber, e intrinsecamente ligadas à intencionalidade didática, por exemplo, da função que pode assumir no processo de estudo relativo aos momentos didáticos[10]. Isso implica na atenção às condições de vida das tarefas no tema, no setor e na área e, em resumo no que permite o currículo da escola em confronto com o equipamento praxeológico da instituição docente. Nesses termos, a Comunidade coloca outra questão:

Q_{10}: *Em acordo com as condições institucionais e a instituição docente quais seriam as possíveis Tarefas Fundamentais para o estudo da Geometria Analítica Plana?*

Nesse caminhar, seguindo os questionamentos Q_8, Q_9 e Q_{10}, se acentua na Comunidade a importância da exposição de seus membros das suas relações com o saber que podem ser traduzidas a partir de suas práticas docentes com este saber, que podem revelar novas condições que venham encaminhar as tarefas fundamentais. Assim, a Comunidade opta por iniciar com o confronto das práticas na área da geometria e no setor da Geometria Analítica.

6.2 PRÁTICAS DOS PROFESSORES A E GU PARA O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Na perspectiva de compartilhar suas experiências no ensino da GAP, os professores A e Gu enfatizam que seguiam as OMs/ODs constantes nos livros didáticos utilizados como referências na escola, com algumas adaptações por eles realizadas. Isso implicou em questionamentos feitos pela Comunidade, do tipo *como eram realizadas as articulações, se é que tinham essa preocupação, se nesses textos não eram atendidas e, quando feitas, não eram evidenciadas?*

---

10 Não há de se esperar que a (re)construção, no curso de um processo de estudo de uma determinada organização matemática se organize de uma forma única. Mas verifica-se, no entanto, que seja qual for o caminho de estudo, certos *tipos de situações* estão necessariamente presentes, mesmo se são muito variáveis, tanto no plano qualitativo como no plano quantitativo. Chamaremos esses tipos de situações *momentos de estudo ou momentos didáticos* porque se pode dizer que, seja qual for o caminho seguido, *se chega forçosamente a um momento* em que tal ou qual "gesto do estudo" deverá ser cumprido (CHEVALLARD, p. 21, 1999, tradução nossa, grifos do autor).

Em resposta, os professores A e Gu comentaram que as faziam, porém de forma muito tímida, ficando quase que evidente o isolamento entre os temas desse setor e, em algumas vezes, entre as tarefas propostas em cada tema.

Quando questionados sobre o estudo dos vetores, tema da Matemática componente da grade curricular, esses professores destacaram que, como no livro didático (YOUSSEF et al., 2005) não há nenhuma referência a esse assunto, eles elaboram material complementar e seu estudo se dá após todo o estudo da GAP.

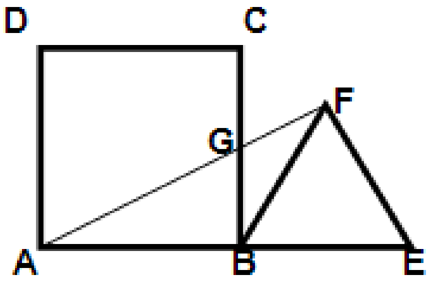
Após o relato sobre suas práticas, as quais eles afirmam estarem baseadas nas propostas constantes nos livros-textos utilizados na escola, outros professores da Comunidade relataram que também seus fazeres docentes para o estudo da GAP se assemelham com esses, assumindo como uma das principais justificativas a obrigatoriedade de utilização do livro didático. Porém, a Comunidade reconhece a desarticulação entre os temas, setores e áreas presentes nessas OMs/ODs, e também que esse fazer docente pouco contribui para o enfrentamento do autismo temático do professor.

Também foi feito aos professores o seguinte questionamento: *Quais relações eram estabelecidas em suas práticas entre a Geometria Plana (método sintético*) *e a Geometria Analítica?* O professor A relata que não destacava essas articulações, enquanto que o professor Gu descreve que propunha atividades aos alunos em que buscava evidenciar que um mesmo problema poderia ser resolvido por um dos métodos: sintético, vinculado à Geometria Plana; ou analítico, vinculado, nesse caso, à GAP.

Para mostrar como fazia essa relação, o professor Gu propôs o sistema didático, $S_5(Y, Gu, p_i)$, em que p_i é o estudo da seguinte questão:

> *A figura a seguir mostra um quadrado ABCD e um triângulo equilátero BEF, ambos com lados de medida 1 cm. Os pontos A, B e E são colineares, assim como os pontos A, G e F. Qual é a medida da área do triângulo formado pelos pontos BGF?*

Figura 12 – Área do triângulo BGF



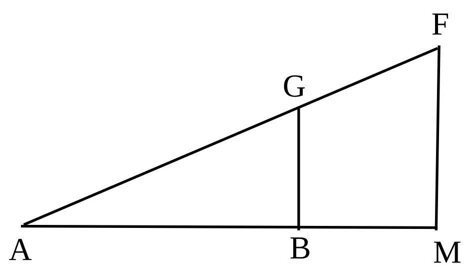
Para responder a essa questão, a Comunidade pôs-se a estudar as possíveis soluções com técnicas tanto da Geometria Plana como da Geometria Analítica. Utilizando técnicas da Geometria Plana, uma das soluções apresentadas (R_{41}) inicia por reconhecer que o triângulo ABF é isósceles, pois AB$= \mathrm{BF} = 1$, e como o ângulo $\mathrm{A\hat{B}F}$ mede 120º, posto que é suplementar do ângulo $\mathrm{F\hat{B}E} = 60^{\circ}$, então $\mathrm{B\hat{A}F} = \mathrm{A\hat{F}B} = 30^{\circ}$. Isso implica no triângulo BGF ser também isósceles, visto que $\mathrm{B\hat{F}G} = \mathrm{G\hat{B}F} = 30^{\circ}$, pois $\mathrm{A\hat{C}B} = 90^{\circ}$ e $\mathrm{F\hat{B}E} = 60^{\circ}$, já que $\mathrm{G\hat{B}F}$, $\mathrm{A\hat{C}B}$ e $\mathrm{F\hat{B}E}$ formam um ângulo raso. Assim, aplicando a lei dos senos no triângulo BGF, teremos $\frac{BG}{sen 30°} = \frac{BF}{sen 120°}$ resolvendo teremos $\overline{\mathrm{BG}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Dessa forma, para calcular a área do triângulo BGF, aplica-se a expressão que calcula a área do triângulo, quando se conhece um ângulo é os lados adjacentes a esse: $A_{\Delta} = \frac{BF\ x\ BG}{2} x\ sen\ 30°$, cujo resultado é $A_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{12}\ u.a.$

Com as técnicas da Geometria Analítica, foi proposta a seguinte solução (R_{42}): localizam-se os vértices da figura como pontos em um sistema de coordenadas ortogonais, tendo como a origem o vértice A(0, 0) do quadrado, daí temos B(1, 0), E(2, 0) e C(1, 1). Para encontrar as coordenadas do ponto F, calcula-se a altura do triângulo BEF relativa a F, $h_f = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo essa a ordenada de F e sua abscissa $\frac{3}{2}$, já que a altura em um triângulo equilátero também é mediana, portanto as coordenadas de F são $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. As coordenadas de G podem ser encontradas como ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos C e B e a reta que passa por A e F, para isso encontra-se a equação da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{CB}}$ que resulta em $x - 1 = 0$, e a equação da reta $\overleftrightarrow{AF}$ representada por $3y - \sqrt{3}x = 0$. Resolvendo o sistema $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$, encontramos as coordenadas do ponto G$(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$. Com as coordenadas dos pontos B$(1, 0)$, F$(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e G$(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, pode-se calcular a área do triângulo aplicando a técnica da área do polígono quando se conhecem os vértices, $A_\Delta = \frac{|D|}{2}$, em que D é o determinante composto pelos pontos que representam os vértices do polígono, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, sendo

$A_\Delta = \frac{|D|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}\ u.a.$

Ao final da exposição dessa solução, o professor V expressou que em vez de ter que encontrar as equações das retas, para em seguida resolver o sistema para determinar as coordenadas do ponto G, poderia ser usado o Teorema de Tales, modelando o triângulo AFM, em que M é o ponto médio do segmento $\overline{BE}$.

Figura 13 – Aplicação do Teorema de Tales



Aplicando o Teorema, teremos, $\frac{GB}{FM} = \frac{AB}{AM}$, de onde $\overline{GB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} x\ 1}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O trabalho com essa questão despertou na Comunidade a possível razão de ser da Geometria Analítica, qual seja, como no exposto por Gascón (2003, p. 29), “as técnicas da Geometria Analítica constituem a resposta a algumas das limitações que apresentam as técnicas sintéticas para resolver problemas genuinamente geométricos propostos sem utilizar coordenadas”. Por outro lado, o mesmo autor assevera que em muitos casos é quase que imprescindível o uso de técnicas sintéticas para previamente sugerir a estratégia que se usará posteriormente com as técnicas analíticas.

Quanto à busca das Tarefas Fundamentais, dentre as tarefas pertencentes ao MER assumido por estes professores a partir das OM e OD presentes nos livros didáticos, a Comunidade sela a resposta R_{pi} que estas não diferem das já elencadas anteriormente, reafirma a potencialidade do Teorema de Tales, e acrescenta que os métodos sintéticos e analíticos devem ser propostos de modo articulado na perspectiva da complementariedade de ambos.

Isto revela que as condições para eleição das Tarefas Fundamentais estão também relacionadas à intencionalidade didática em articular tarefas não só relativas de um setor em estudo, mas com tarefas de outros setores, como no caso da Geometria Plana e a geometria analítica.

Após essas compreensões, foi proposto um novo sistema didático à Comunidade para um aprofundamento sobre essas relações entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana $S_6(Y, y, O_4)$, em que a obra (O_4) utilizada é o trabalho de Gascón (2003) que trata dos efeitos do autismo temático sobre o estudo da geometria no Ensino Básico.

Nesse estudo, dentre as questões levantadas, o autor destaca o uso da construção com régua e compasso como técnica que auxilia de forma bastante significativa na escolha e aplicação das técnicas da Geometria Analítica, pois

> a eficácia para resolver certos tipos de problemas de Geometria Analítica melhora de forma muito significativa se se utiliza uma parte do tempo em traduzir os problemas ao âmbito da Geometria Sintética e resolvê-los, por exemplo, com régua e compasso. (GASCÓN, p. 29, tradução nossa).

Essa afirmativa de Gascón ajuda a Comunidade a selar como resposta Ro_1 a disciplina Desenho Geométrico no currículo do Ensino Básico na perspectiva de possibilitar articulação entre a Geometria plana e a Geometria Analítica já observada na obra de Descartes. Porém, o professor G, argumentou que para isso, apesar do que já foi feito, seria necessária uma reformulação tanto no conteúdo de ensino como na metodologia da disciplina Desenho Geométrico, para que ela assumisse esse “novo papel”, que segundo o entendimento da Comunidade, deveria ser seu principal objetivo.

A compreensão da Comunidade recai sobre as tarefas do desenho geométrico como aquelas que poderiam promover a articulação e justificação entre as tarefas da Geometria Plana e, por conseguinte entre as tarefas das geometrias planas e analíticas, daí que a busca das tarefas que possuem a noção de Tarefa Fundamental podem ser buscadas em outras disciplinas sob as condições e restrições institucionais.

Isto revela que a complexidade para eleição das tarefas extrapola o nível da disciplina matemática e implica no papel da Comunidade em outros níveis de codeterminação didática.

A resposta da Comunidade em parte pode se materializar no currículo da ETRB pelo encaminhamento programático que a Comunidade empreende a disciplina Desenho Geométrico. A disciplina existe no currículo como disciplina complementar (parte diversificada), no 8º e 9º anos, mas é ministrada pelos professores de Matemática desde 2006, que nos parece como uma condição favorável para as mudanças.

Anteriormente, a disciplina se caracterizava pelas construções no nível do desenho técnico, com poucas relações com a Matemática e após 2006 algumas mudanças foram propostas visando aproximar cada vez mais o Desenho da Matemática. Essas mudanças passam a ser condicionantes para a articulação entre essas disciplinas e seus objetos de estudo. Uma dessas mudanças foi que o estudo objetivasse, a partir das construções, as demonstrações e resoluções de problemas da geometria, como por exemplo, do Teorema de Tales, da Semelhança de Triângulos, da inscrição e circunscrição de polígonos em circunferências etc., bem como, a compreensão dos elementos, como apótema, altura, mediana, mediatriz, baricentro, ortocentro, bissetriz e outros, com suas respectivas funções no desenho.

Porém, temos tido muitas restrições para que de fato isso aconteça, dentre elas o destaque está na resistência dos professores em concretizar essas mudanças, alegando que estariam repetindo assuntos que se estuda em Matemática, que se alia à falta de uma organização de referência para que os professores possam seguir no tempo do ensino da disciplina que é de uma ou duas aulas semanais.

Ao concordar com o professor, a Comunidade assume também como resposta R_{o2} construir futuramente essa organização didática de referência para o ensino do Desenho Geométrico, tomando por base a articulação entre os setores da geometria em uma perspectiva do horizonte do conteúdo ao longo da educação básica.

Fica claro aqui, mais uma vez, a Comunidade reconhecendo seu papel de construtora de organizações para o ensino de modo a atender um modelo epistemológico de referência.

Após essas reflexões sobre a prática docente dos professores A e Gu com a GAP, a Comunidade nos solicitou que expuséssemos a prática relativa a esse setor e que foi vivenciada na ETRB configurando-se como a parte empírica da dissertação de mestrado (ANDRADE, 2007), denominada de Geometria Analítica Plana: praxeologias matemáticas no ensino médio.

6.3 PRÁTICAS DO PROFESSOR ANDRADE PARA O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Iniciamos por expor as intencionalidades que tínhamos com essa prática, buscando um estudo da Geometria Analítica Plana em conexões com o tema desse setor: o estudo dos vetores.

Relato que as tarefas eram propostas aos alunos buscando a construção do conhecimento a partir da interação em uma comunidade de estudos e elaboradas em forma de problemáticas a serem enfrentadas por eles levando em consideração seus conhecimentos matemáticos anteriores.

Nesse sentido, tivemos que romper com o MER institucionalizado que atendia as OMs e ODs propostas no livro-texto (DANTE, 2005), que não tratava do estudo dos Vetores. Assim, passamos a elaborar as OMs e ODs tomando como referência obras utilizadas em estudo no nível superior como Camargo e Boulos (2005), estabelecendo OMs e ODs diferentes daquelas institucionalizadas no ensino básico até então.

A primeira atividade da OD que teve como tarefa para os alunos uma breve pesquisa na história da Matemática a respeito do surgimento da Geometria Analítica e dos Vetores, objetivando a construção de um texto, destacando em que parâmetros ou contextos deram-se o desenvolvimento da Geometria Analítica e do estudo dos Vetores, bem como de outros conhecimentos matemáticos que possam ter servido de alavanca estimuladora para o estudo e desenvolvimento desses conhecimentos, destacando também a sua importância para a Matemática e suas aplicações no estudo de outras áreas.

O objetivo dessa tarefa era provocar o interesse dos alunos no estudo desses conteúdos, visando à razão de ser do estudo da GAP, bem como lhes possibilitar possíveis identificações de conhecimentos anteriores que possam ser resgatados a fim de possibilitar a assimilação de novos conhecimentos em processos de estudos articulados entre o novo e o velho.

Nas apresentações, pudemos observar que quase todos os grupos de alunos destacaram que os estudos da Geometria Analítica e dos Vetores não surgiram como fruto da ideia de uma pessoa e nem em um único momento histórico.

O sistema de coordenadas é assumido em posição de mais inclusivo e agregador da GAP e dos Vetores e, em termos praxeológicos, como um tema de grande potencial de articulação com os outros temas. Nesse destaque, a Comunidade ratifica esse tipo de tarefas como aquele que poderia ser eleito como um tipo de Tarefas Fundamentais.

O conceito de vetor como um conjunto de segmentos orientados, permite que possamos traçar segmentos, nesse plano e em posições diferentes, que mantém as características de direção, sentido e comprimento do primeiro.

No estudo do ponto já se evidenciava o conceito de vetores como um conjunto de segmentos orientados, com a mesma direção, sentido e magnitude. No cálculo da distância entre dois pontos, a interpretação dada foi do comprimento do segmento orientado, e assim, considerando esse segmento como um representante de um vetor que foi interpretado como o módulo do vetor.

Isso implica que calcular a distância de um ponto qualquer até a origem de um determinado sistema, seja ele ortogonal ou não, pode ser feito utilizando a lei dos cossenos, o que se caracterizou como a tecnologia para esse tipo de tarefas. As relações trigonométricas em um triângulo qualquer seria a teoria para a realização desse tipo de tarefas.

Dessa forma, a Comunidade pôde concluir que a técnica desenvolvida para realização da tarefa necessitou do resgate das relações trigonométricas no triângulo, as quais identificamos como a teoria desse tipo de tarefas, mais precisamente da lei dos cossenos, que é a tecnologia.

Assim a lei dos cossenos parece ser uma tarefa/tema da trigonometria que possibilita a articulação entre a trigonometria e a GAP, e nesses termos, para a

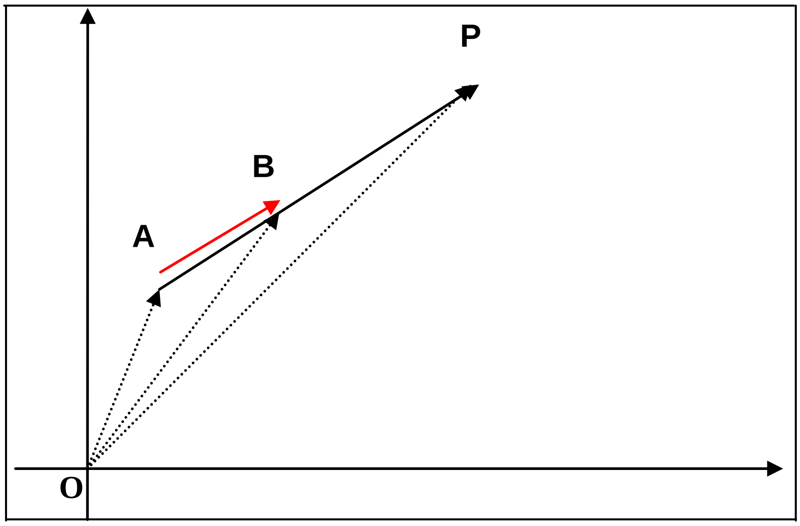
Comunidade ficaram relativamente evidenciadas as conexões existentes entre o estudo dos triângulos, a lei dos cossenos e o Teorema de Tales.

Ainda como socialização da prática, descrevemos que propusemos aos alunos tipos de tarefas em um sistema de eixos ortogonais. Como respostas para o enfrentamento, os alunos concluíram que poderiam aplicar a lei dos cossenos para calcular a distância entre dois pontos, porém isso se caracterizava como aplicação do Teorema de Pitágoras, que no entender dos alunos facilitava o fazer.

Isso nos permitiu acentuar aos nossos pares o porquê de os livros-textos só tratarem as questões em sistema ortogonais, o que em nosso entender torna opaco todo um trabalho na técnica que poderia ser realizado a fim de proporcionar o desdobramento de uma Organização Pontual a uma OMLRC.

Para o tipo de tarefas *escrever a equação da reta*, a seguinte técnica foi adotada, tomando um representante do vetor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ no sistema de eixos ortogonais de coordenadas **(a, b),** e um escalar **t** $\in R$. Ao multiplicar o vetor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ por um escalar inteiro maior que um **(t >1),** encontramos, como resultado, um outro vetor que chamaremos de $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$**,** cujas coordenadas serão **(ta, tb)**. Isso implica $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ = t ($\overrightarrow{\mathbf{AB}}$), e não esquecendo que $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ = P – A e $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = B – A, a representação no sistema é:

Figura 14 – Gráfico do produto de um Vetor por um escalar no SCO



Sendo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$(a, b) e considerando $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$(x\`, y\`), $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$(x, y) e $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$($x_b$, y_b), daí que **a** = x_b - x\`e **b** = $y_b$ – y\`. Tomando t ($\overrightarrow{\mathbf{AB}}$) = $\overrightarrow{\mathbf{AO}}$ **+** $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$, que em termos de coordenadas podemos escrever t (a, b)= **-** (x\`, y\`) + (x, y), que aplicando a igualdade entre vetores chegaremos em $\begin{cases} x = x` + t.a \\ y = y` + t.b \end{cases}$. Essa é a expressão que representa a equação da reta que passa pelos pontos **A** e **B**, ou seja, equação da reta que passa pelo segmento orientado $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ (representação do vetor)**,** que reconhecemos como equação paramétrica da reta.

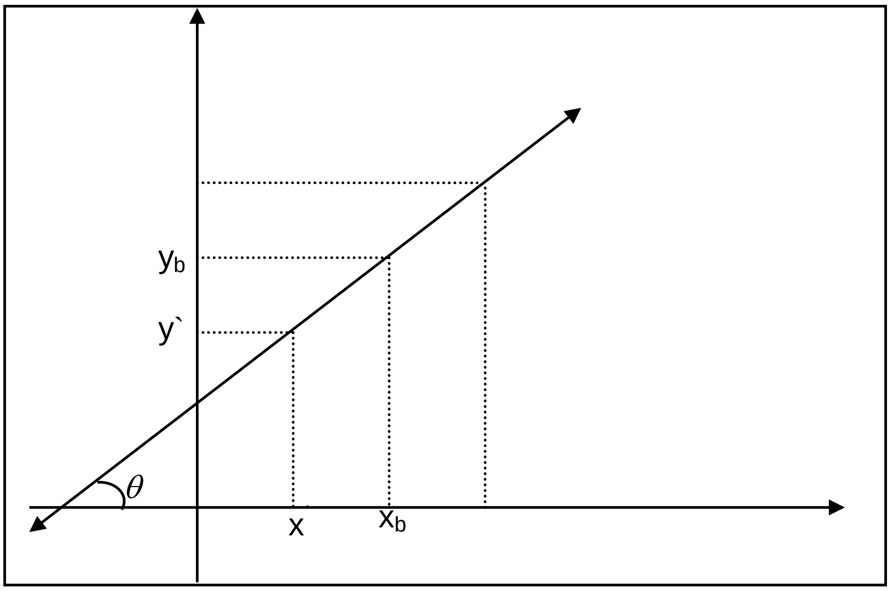
Quando questionado pela Comunidade sobre as outras representações da equação da reta, que constam nos livros didáticos, a resposta a esse questionamento se deu a partir de manipulações algébricas para reescrever a expressão acima, isolando o parâmetro **t,** como abaixo.

$$\begin{cases} x = x` + t.a \\ y = y` + t.b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x`}{a} \\ t = \dfrac{y - y`}{b} \end{cases} \longrightarrow \frac{x - x`}{a} = \frac{y - y`}{b}$$

$$y - y` = \frac{b}{a}\,(x - x`) \longrightarrow \boxed{y = y` + \frac{b}{a}\,(x - x`)}$$

Feito isso, substituímos a e b, tomados anteriormente como, **a** = x_b - x\` e **b** = $y_b$ – y\`, na equação resultando em, $\mathbf{y = y` +} \dfrac{y_b - y`}{x_b - x`}$ **( x – x\`)** onde identificamos $\dfrac{y_b - y`}{x_b - x`}$ como a razão de segmento que indica a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, denominado nos manuais como coeficiente angular da reta (o que representaremos, a partir de agora, por **m**), ou seja, em termos trigonométricos é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo horizontal.

Figura15 – Gráfico para identificar o coeficiente angular



$$\text{tg}\,\theta = \frac{y_b - y`}{x_b - x`} \quad \boxed{m = \frac{y_b - y`}{x_b - x`}\ .}$$

Sendo assim, para encontrar a equação da reta suporte que passa pelo segmento orientado $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, dados os pontos **A** (x_a, y_a) e **B** (x_b, y_b), usaremos a seguinte expressão:

$$\boxed{\mathbf{y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\,(x - x_a), \text{ ou } y = y_a + m\,(x - x_a)}}$$

Essa expressão representa a tecnologia da técnica para resolver um tipo de tarefas que é a determinação da equação da reta.

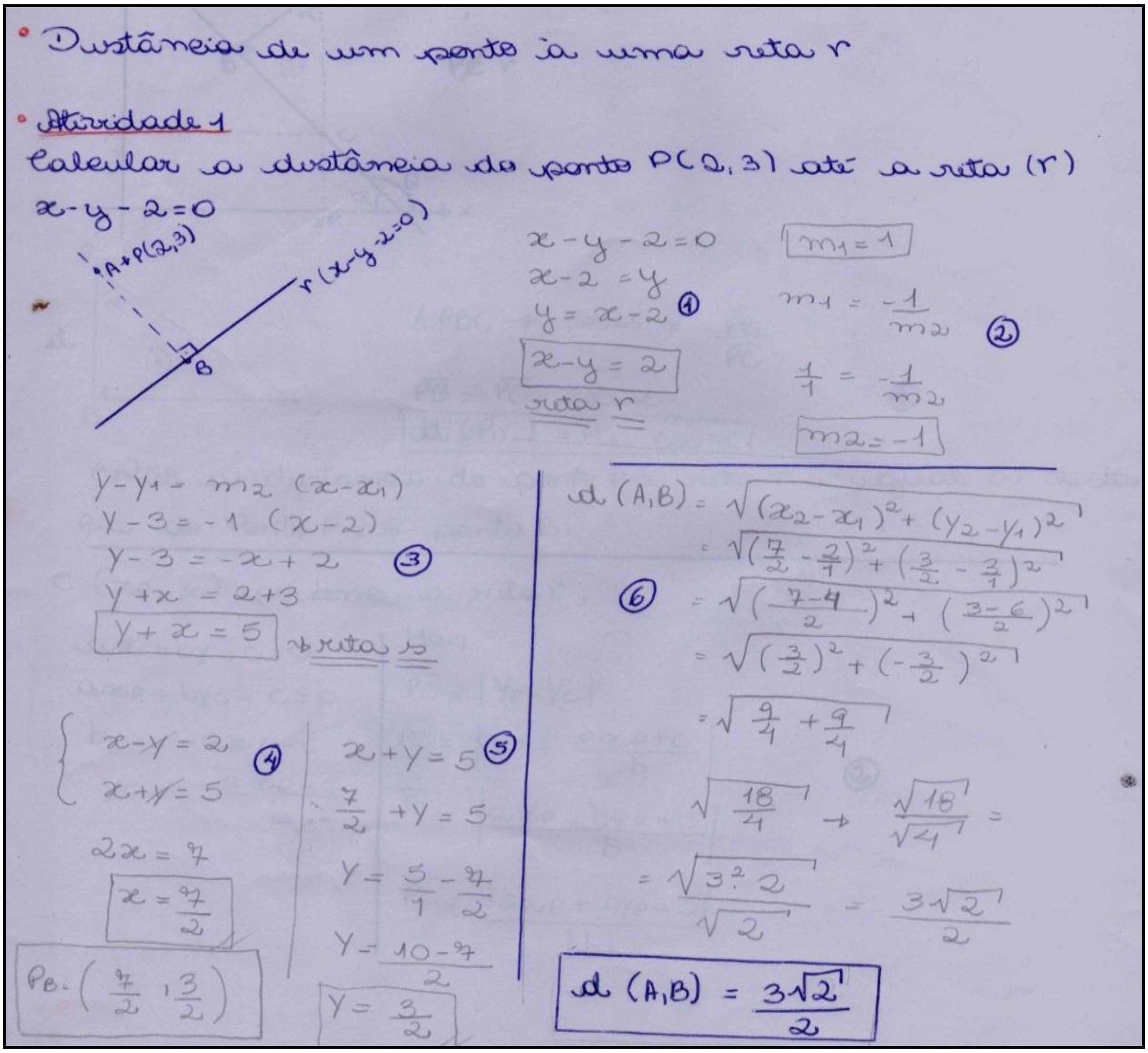
Após essa exposição, a Comunidade expressou algumas preocupações com as condições institucionais como a avaliação, a preparação para o vestibular, a carga horária etc. Em resposta, sobre a avaliação, obedecemos às orientações da escola, uma parte dessa contínua e outra parte uma prova comum para todas as classes da série, elaborada por um professor escolhido entre os que trabalham com o setor (Geometria Analítica). A parte contínua geralmente se constitui em pequenos testes, em nosso caso ela aconteceu no processo, fruto do comprometimento com os estudos desencadeado a partir da OM/OD posta em cena.

Quanto à carga horária, não tivemos problema, pois conseguimos desenvolver o estudo em um bimestre e meio, diferente do que ocorria em práticas anteriores em que levávamos dois bimestres para trabalhar os mesmos conteúdos, isso implicou em ganho de tempo que possibilitou propormos aos alunos uma grande variedade de problemas, inclusive de vestibulares, a fim de que eles construíssem um fazer rotineiro no uso de determinadas técnicas para tipos de tarefas semelhantes, atendendo assim às exigências institucionais, como a preparação para os concursos vestibulares.

Houve também indagação sobre outros tipos de tarefas, como: o cálculo do baricentro; do ponto médio; da área do triângulo dados os vértices; as posições relativas de duas retas etc. A esse respeito, acentuamos que seus estudos derivaram dos estudos do sistema de coordenadas, do ponto e da reta como expostos anteriormente, como no caso do tipo de tarefas determinar a distância entre um ponto e uma reta, que optamos por apresentar uma prática diferente da desenvolvida em nossa dissertação de mestrado.

Nesta prática, após trabalharmos as tarefas vinculadas ao cálculo da distância entre dois pontos e da determinação da equação do segmento de reta, propomos aos alunos a tarefa de determinar a distância de um ponto dado a uma reta dada como nas construções abaixo (figura 16 e 17) que revelam o enfrentamento dessa tarefa a partir de outras tarefas.

Figura 16 – Construção dos Alunos para o enfrentamento do tipo de tarefas, determinar a distância de um ponto dado a uma reta dada (1)



Fonte: Construção dos alunos em classe (2009)

Nessa construção observamos que para enfrentar a tarefa proposta o aluno enfatiza as técnicas da Geometria Analítica, mais precisamente composta pelo enfrentamento dos tipos de tarefa:

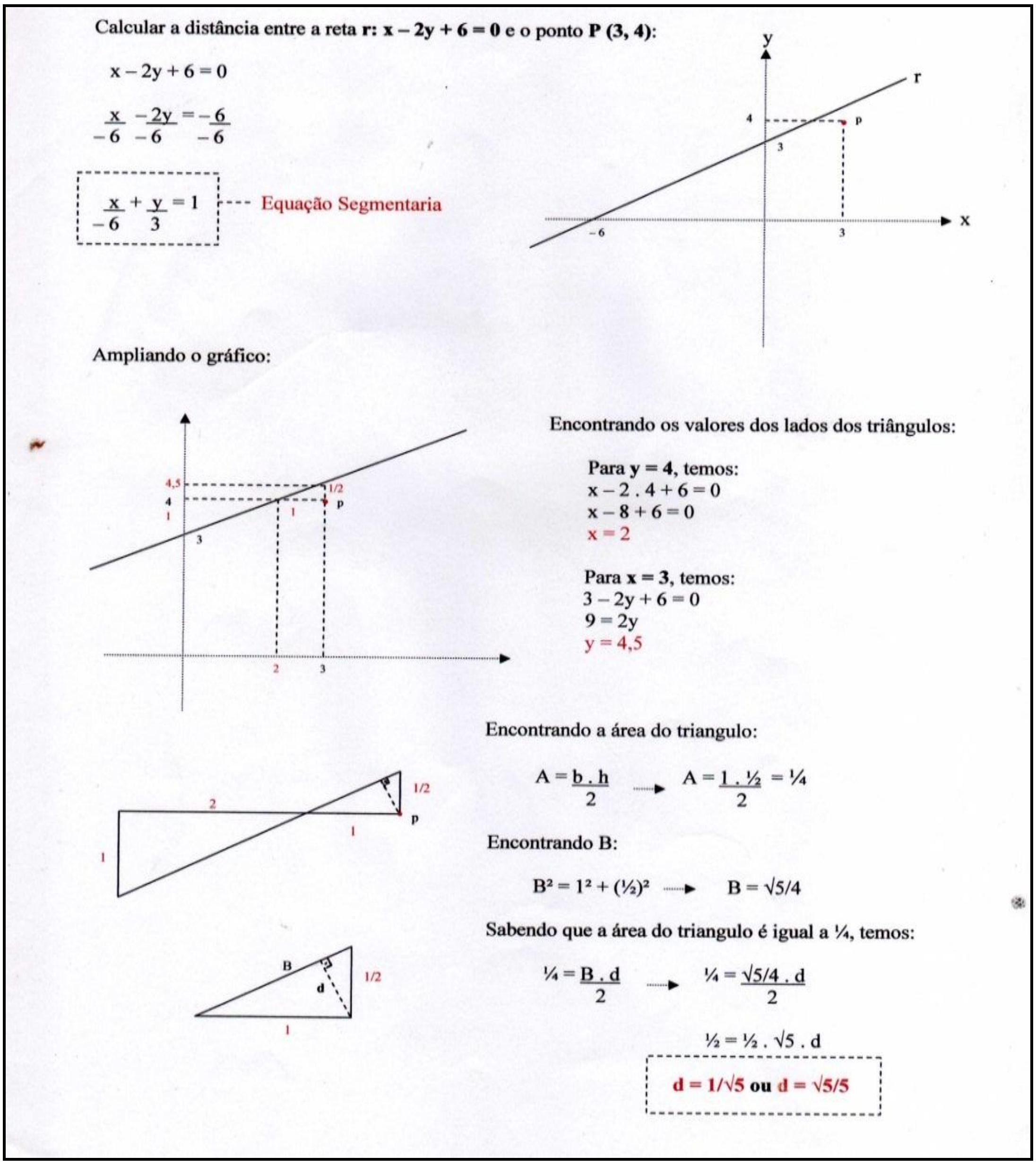
t_1- escrever a equação da reta perpendicular passando pelo ponto dado;

t_2- determinar o ponto de intersecção entre as retas;

t_3- determinar a distância entre dois pontos.

Aqui a Comunidade pôde observar que o aluno apresenta domínio das tarefas que tínhamos elegido como Tarefas Fundamentais e com a movimentação destas, associada às tarefas; determinar o ponto de intersecção entre retas e encontrar a reta perpendicular à reta dada, ele pode responder esse tipo de tarefas.

Figura 17 – Construção dos Alunos para o enfrentamento do tipo de tarefas, determinar a distância de um ponto dado a uma reta dada (2)



Fonte: Construção dos alunos em classe (2009)

Nessa segunda resposta, o aluno utiliza técnicas da Geometria Analítica inicialmente a partir da tarefa escrever a equação segmentária da reta objetivando a representação gráfica; ou seja, apoia seu fazer no desenho, o que possibilitaria a utilização de técnicas da Geometria Plana Sintética. Assim, as técnicas utilizadas que traduzimos por enfrentar as tarefas do tipo:

t_1- escrever a equação segmentária da reta;

t_2 - modelar um triângulo sendo o ponto P(3,4) um de seus vértices;

t_3- determinar os pontos de intersecção da reta r com as retas y=4 e x=3, que permite encontrar os outros dois vértices do triângulo; encontrar as medidas dos lados desse triângulo;

t_4- determinar a área desse triângulo a partir dos catetos, já que esse triângulo é retângulo;

t_6- determinar a hipotenusa desse triângulo; determinar a altura desse triângulo relativo à hipotenusa.

Essa movimentação de tarefas possibilitou a esse aluno um fazer articulado entre vários temas não só ao nível de setor, extrapolando para os setores da geometria.

As diferenças nas técnicas utilizadas entendemos ser consequência do EP de cada aluno, visto que não se firmou no contrato didático que as técnicas para o enfrentamento da tarefa deveriam ser da Geometria Analítica, ao contrário, o contrato didático possibilitava ao aluno a liberdade de recorrer ao seu EP para escolher as técnicas que lhe proporcionassem um fazer justificado e inteligível.

Diante do exposto, alguns professores da Comunidade manifestaram suas compreensões sobre essa prática, enfatizando, a condição de que ela só foi possível por ter sido desenvolvida na ETRB, pois os alunos da escola trazem consigo certa bagagem de conhecimentos anteriores que possibilita a eles revisitá-los para construir o novo sem a interferência direta do professor, o que é diferente em certas escolas públicas estaduais.

Essa afirmação foi criticada por outros membros da Comunidade, destacando a necessidade do resgate de conhecimentos anteriores para reconhecer o novo, seja qual for o aluno ou a escola. Pode ser que uns mais outros menos, mas todos possuem conhecimentos anteriores que podem ser mobilizados na perspectiva do estudo de novos conhecimentos.

Mas, sobretudo, fica claro que resolver situações problemáticas é mobilizar um conjunto de tarefas que respondem a questões determinadas.

Assim sendo, esses professores afirmam que há possibilidade sim, do desenvolvimento dessa prática, vivenciada pelo professor Andrade, nas escolas públicas estaduais, sendo necessário fazer adaptações nas OMs/ODs considerando as instituições em jogo. Isso revela a tomada de consciência da Comunidade de práticas da ETRB, sobre as ingerências das instituições no fazer docente.

6.4 PRAXEOLOGIAS CONSTRUÍDAS NA COMUNIDADE DE PRÁTICAS DESENVOLVIDAS PELO PROFESSOR V NA ETRB

Após a apresentação das práticas, tomando como base os estudos realizados no contexto histórico e epistemológico, nas análises dos livros didáticos e, principalmente dos relatos das práticas compartilhadas pelos membros do grupo, a Comunidade acorda entre seus membros a importância dos seguintes tipos de tarefas:

- localização de pontos no plano
- determinar a distância entre dois pontos;
- escrever a equação da reta;
- determinar a medida de um segmento a partir e outros segmentos;

A Comunidade assegura que de uma ou de outra maneira os três primeiros tipos de tarefas, da GAP e o último até então pensado como específico da geometria sintética, lhes parecem ser os que se caracterizam como fundamentais, pois estão presentes nas práticas que vivem na escola e expressam a potencialidade de justificação e articulação com as outras tarefas, parecendo transversalizar o setor da Geometria Analítica, ora assumindo o papel de tarefa, ora sendo utilizado como técnica, ou até mesmo como tecnologia/teoria, o que expõe a funcionalidade dos elementos de uma praxeologia.

Essa ordem, numa compreensão à luz da TAD, não se deu ao acaso, mas emergiu como produto dos confrontos das práticas, de suas interpretações à luz das obras e praxeologias estudadas, em diferentes sistemas didáticos pela Comunidade, e aponta a estrutura do modelo epistemológico a ser tomado como referência para a consecução de seu objetivo quando essa Comunidade assume o papel de construtora de OMRE que se constitua em uma OMLRC a partir da movimentação intencional de tarefas à luz da noção das tarefas fundamentais.

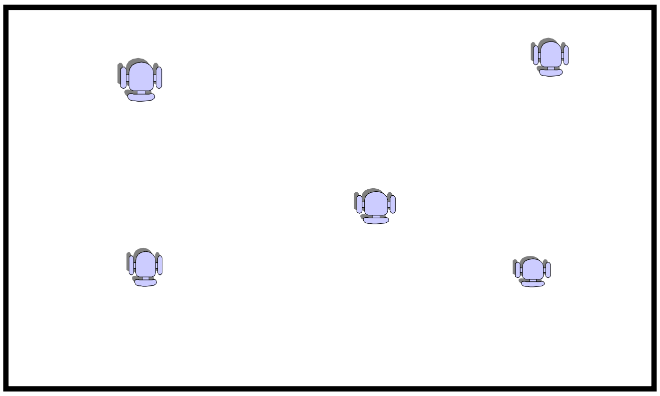
Assume que a OM deva ser construída em dialética com a OD; ou melhor, a Comunidade assume que a OM/OD terá de se desenvolver em um processo de investigação em que as tarefas sejam apresentadas aos alunos em forma de questionamentos que exijam dos alunos a mobilizações de seus EPs para enfrentá-los.

Isso implica novas condições a serem consideradas pela comunidade, visto que o aluno nesse novo sistema não seja mais hipotético, é um aluno que viverá as

OMs frutos dessa Comunidade e não as OMs dos livros-textos e das construídas na singularidade de um professor. Significa então que esse novo sistema se configura no PER como um sistema auxiliar da seguinte maneira $\mathbf{S_7(X, y, \rho_k)}$, em que **X** é o conjunto de alunos do terceiro ano, **y** o professor V membro da Comunidade e **ρ** o conjunto de praxeologias matemáticas construídas na comunidade e postas em ação na classe, constituindo-se em organizações didáticas.

Desta forma e com o objetivo de tratar o Tipo de Tarefas “Localizar um objeto no plano”. A OD inicia por propor aos alunos a localização das cadeiras na sala de aula, as cadeiras foram dispostas em cinco lugares diferentes da sala, os alunos deveriam indicar aos colegas a localização da sua cadeira nesse ambiente. As cadeiras foram assim distribuídas:

Figura 18 – Distribuição das cadeiras na sala de aula



Então, na primeira aula seria proposta a tarefa;

t_1 : localizar 5 cadeiras posicionadas no interior da sala de aula.

A tarefa a ser desenvolvida em equipes e cada equipe de alunos ficaria responsável por localizar uma das cadeiras.

Na sala de aula, o professor V relatou para a Comunidade que os grupos variando de 5 a 7 alunos foram convidados a enfrentar essa tarefa de modo reformulado – como na proposição t’ abaixo – para encaminhar o processo de investigação e com orientação de que anotassem o máximo de observações possíveis:

t_1’: Cada equipe deverá:

1) expressar a posição da cadeira correspondente ao seu grupo;

2) socializar a sua construção;

3) analisar as construções das outras equipes e socializar para abertura de debates;

4) montar a sua proposta final.

No decorrer da atividade os alunos levantaram questionamentos como:

- Considero que já estava dentro da sala ou estava lá fora?
- De onde devo partir?
- Como o piso da sala é composto de lajotas, posso considerar cada lajota como uma unidade?

Como um dos objetivos da atividade era fazer com que eles descobrissem a importância da origem, do posicionamento “livre” do sistema de eixos ortogonais, eles poderiam ficar à vontade, não ocorrendo interferência do professor em seus respectivos processos de construção.

O professor V relatou que nas construções dos alunos observou que fica clara a percepção deles sobre a necessidade de referências para localizar objetos. Essas referências são expressas no geral como considerar o ponto de partida (origem) e as direções tomadas até alcançar a cadeira; além disso, há a necessidade de assumir uma unidade de medida, no caso as lajotas do piso.

Em alguns trabalhos ocorreu a representação em sistema de eixos ortogonais, que nas palavras do professor V, ao socializar os acontecimentos com a Comunidade, expressava conhecimentos anteriores, quando do estudo de funções realizados no 9º ano do fundamental e no primeiro ano do ensino médio. Fato esse que o professor aproveitou para, por meio de diálogos provocativos sobre a técnica utilizada, buscar a institucionalização do sistema de coordenadas como resposta para o tipo de tarefas localizar objetos no plano.

A segunda e seguinte tarefa foi proposta como desdobramento da primeira.

t_2 : determinar as distâncias entre duas cadeiras.

Entre as respostas, algumas são realizadas a partir da contagem direta das lajotas, porém a dificuldade surgiu quando as cadeiras se encontravam em linha diagonal uma da outra. No relato do professor, o fazer dos alunos se deu de duas maneiras: na primeira, calculou-se a diagonal de uma lajota e em seguida contou-se o número de diagonais, para o cálculo da diagonal os alunos utilizaram a expressão da diagonal do quadrado $d = l\sqrt{2}$; já na segunda, os alunos contaram as lajotas em linha reta e aplicaram o Teorema de Pitágoras.

Após esse relato, alguns professores da Comunidade observaram que as técnicas utilizadas nos dois casos foram muito próximas, pois ambas utilizaram o Teorema de Pitágoras, a diferença consistia em que o aluno ao utilizar o modelo da diagonal do quadrado expressava que o cálculo da diagonal do quadrado é um fazer rotineiro.

Continuando a exposição, o professor V relatou que na ocasião da institucionalização buscou evidenciar o Teorema de Pitágoras como a técnica para esse tipo de tarefas, ou seja, para calcular a distância entre dois pontos aplica-se o Teorema de Pitágoras.

Para as outras atividades, as proposições deveriam visar à equação da reta, porém o professor V expressou a sua preocupação com tarefas anteriores, como o ponto médio, o baricentro e a condição de alinhamento.

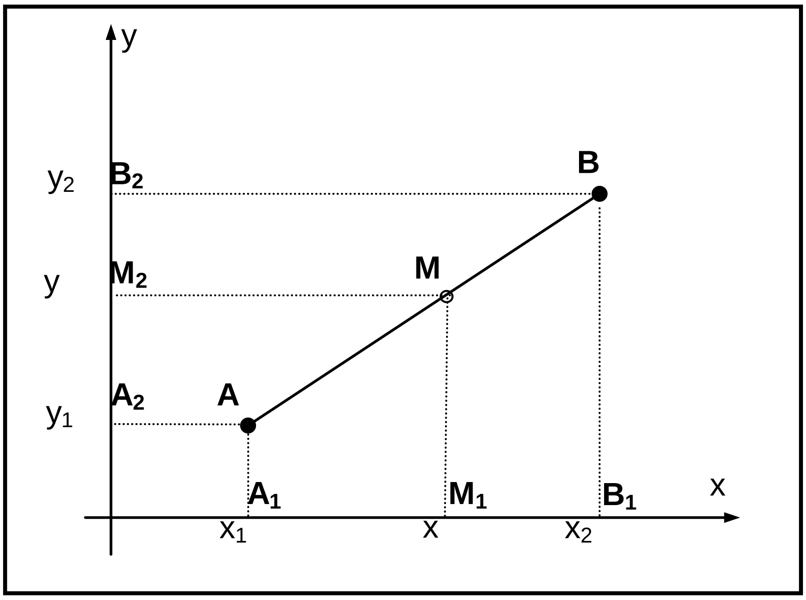
Isso expõe a resistência desse professor ao modelo alternativo que estávamos construindo, pois ele traz enraizado em seu fazer uma epistemologia que parece ser inquestionável, fruto das relações que manteve com esse objeto não só no exercício da prática docente, mas também durante seus estudos na posição de aluno. Isso implica consequentemente, e em acordo com a Comunidade, que a ponderação dele apesar de ter sido questionada foi aceita pelo grupo.

Assim, as tarefas subsequentes foram cálculo das coordenadas do ponto médio, do baricentro e, em seguida, condições de alinhamento de três pontos e equação da reta.

Porém, analisando a articulação possível entre esses tipos de tarefas, considerando os estudos realizados anteriormente, ficou estabelecido que a OM/OD proposta deveria enfatizar essa articulação de forma a justificar o fazer do aluno, o que foi feito a partir da OM/OD a seguir.

Para determinar as coordenadas do ponto médio, além de localizar no sistema de eixos, aplica-se o Teorema de Tales, considerando que, se M é ponto médio, a razão entre os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ é um, e sendo A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ e M$(x,\ y)$, temos que:

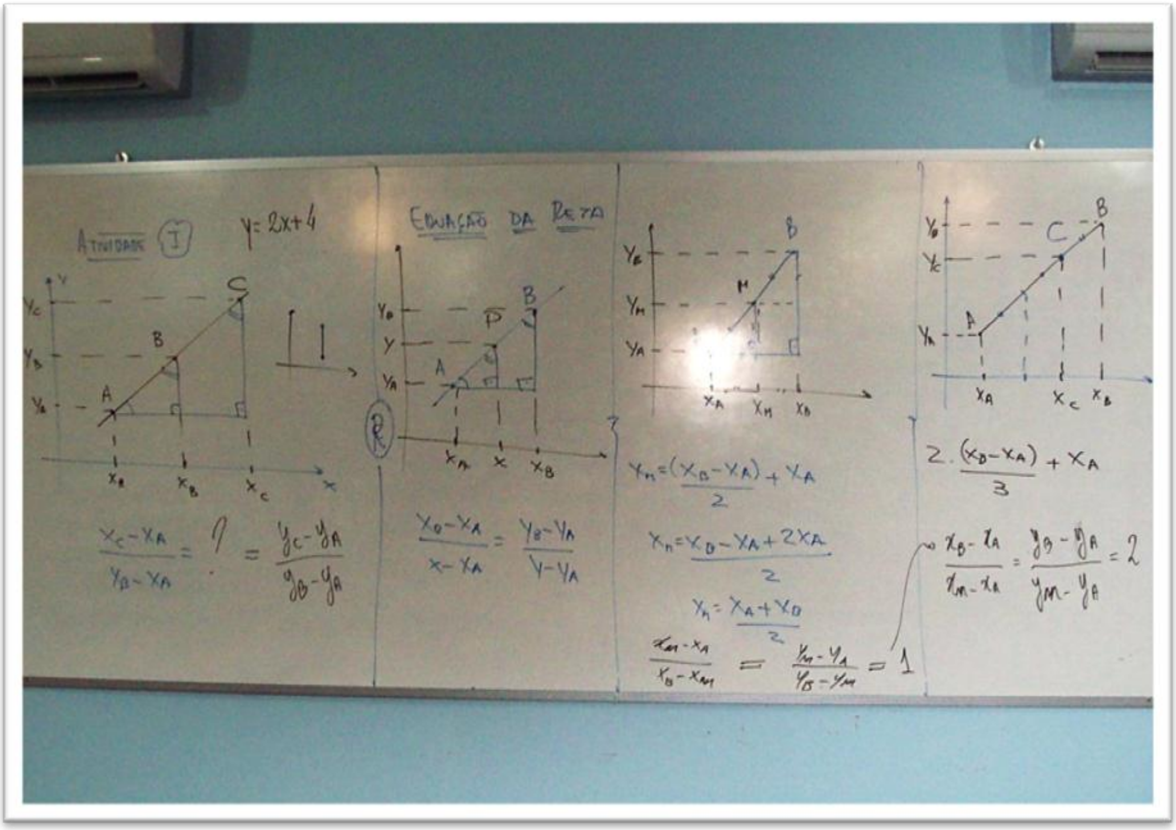
Figura 19 – Ponto médio



Aplicando o Teorema de Tales, $\frac{AM}{MB}=\frac{A_1M_1}{M_1B_1}\rightarrow 1=\frac{x_M-x_1}{x_2-x_M}$, logo $\boxed{x_M=\frac{x_1+x_2}{2}}$,

da mesma forma que $\frac{AM}{MB}=\frac{A_2M_2}{M_2B_2}\rightarrow 1=\frac{y_M-y_1}{y_2-y_M}$, portanto, $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$, daí que seguindo o mesmo raciocínio os outros tipos de tarefas poderiam ser trabalhados, como na foto abaixo em que os professores a partir da negociação, expressam a OM resultante dos estudos:

Figura 20 – OM proposta pela Comunidade para o estudo da equação da reta



Essa OM expressa a funcionalidade e a potencialidade dos Tipos de Tarefas Fundamentais eleitas pela Comunidade, sendo a localização de pontos no plano, a distância entre dois pontos e as tarefas relativas ao Teorema de Tales como objetos de articulação entre os temas desse setor.

A OD relativa a essa OM aconteceu seguindo as determinações iniciais, a partir da proposição de tarefas matemáticas para que os alunos enfrentassem, movimentando os conhecimentos anteriores de tal maneira a articular o novo com o velho e sempre em negociações com seus pares.

O professor V, em relato à Comunidade, se disse satisfeito e de certa forma surpreso com a capacidade que os alunos demonstraram na construção das respostas às tarefas propostas. Ele percebeu que em vez de ele apresentar ou chegar aos modelos que possibilitariam o fazer rotineiro para esses tipos de tarefas, os próprios alunos, em consequência do trabalho no enfrentamento das tarefas e questionamentos provocadores do professor sobre elas, chegam a esse modelo.

Essas experiências, relatadas pelo Professor V, a partir de organizações praxeológicas feitas pela Comunidade, segundo sua intencionalidade é expressa a movimentação de um conjunto de tipos de tarefas, as tarefas fundamentais que estruturam o modelo epistemológico, mostram-se como os primeiros pilares de uma obra a ser realizada pela e para a Comunidade.

A experiência revela que a OM/OD até então estabelecida atendeu as intencionalidades da Comunidade, tendo em vista que iniciamos com uma OMP que girava em torno dos tipos de tarefas localização de pontos no sistema de coordenadas e cálculo da distância entre dois pontos, que, articuladas com tarefas relativas ao Teorema de Tales, permitiram o trabalho da técnica que faz dessa organização um conjunto de OMP, e assim se configurando paulatinamente em uma OMLRC.

Estabelecido esse fazer de articulações para o terceiro tipo de tarefa que tínhamos elegido como fundamental, no caso determinar a equação da reta, as OMs/ODs em sequência atendiam sempre esse objetivo de integrações e articulações entre esses e novos tipos, como no caso anterior, evidenciando uma razão de ser de cada tema da Geometria Analítica e até de setores dentro da área geometria.

Foram incluídas nessa nova organização as práticas anteriormente confrontadas no seio da Comunidade, apresentadas nesta pesquisa, dentre outras as atividades da prática do professor G, relativas à utilização da Geometria Sintética e da Geometria Analítica para a resolução de problemas da geometria, o tipo de tarefa de determinar a distância entre um ponto e uma reta, da prática do professor Andrade.

A tarefa de construir organizações praxeológicas para a GAP, assumida pela Comunidade, mostra-se árdua e complexa, com contratempos às vezes decorrentes de conflitos das relações pessoais com as novas relações institucionais com saberes nas organizações didáticas, embora realizadas por pessoas que são sujeitos dessa mesma instituição, aqui claramente vivida pelo professor V. Mas, a compreensão de poder fazer suas organizações segundo suas intencionalidade parece ser suficientemente forte, estimulador como pode nos fazer crer o professor V, que também trabalha com turmas de preparação específica para vestibular (cursinho) em outras instituições escolares, quando manifestou sua satisfação em fazer parte da Comunidade: “Em outros ambientes de trabalho não tenho oportunidades de compartilhar o meu fazer e além de tudo aprender com os colegas”.

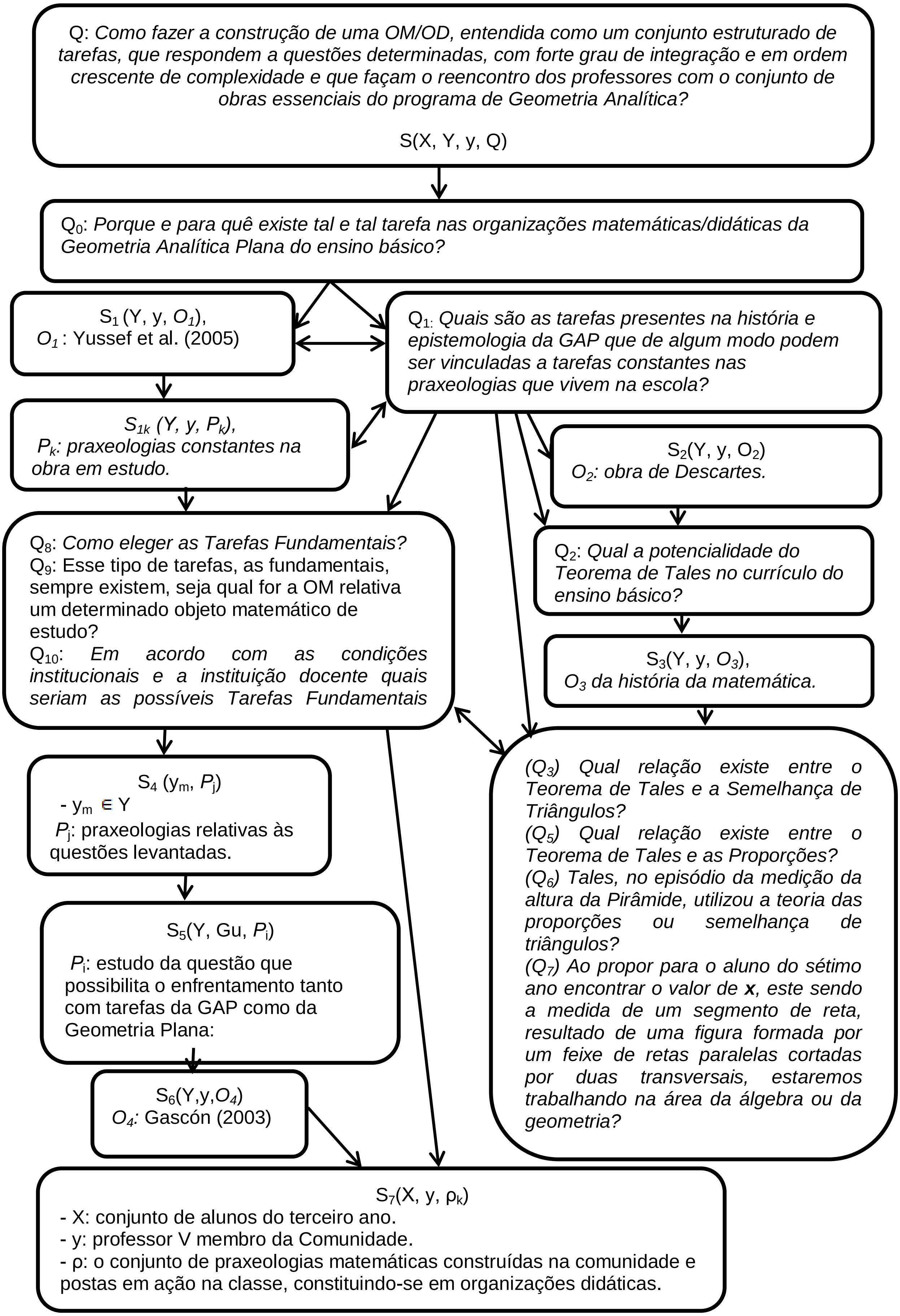
Seguindo, relata que, como tínhamos identificado no estudo histórico e epistemológico, já utilizava o Teorema de Tales como tema que articula outros temas da Geometria Analítica, como distância entre dois pontos e equação da reta etc., porém só após o estudo e a troca de conhecimentos com os colegas é que tomou consciência da verdadeira importância do Teorema de Tales para o estudo da Geometria Analítica: “Pois agora consigo articular não só os temas propostos para o ensino da Geometria Analítica como também as tarefas propostas em cada tema e vejo essas articulações como a possibilidade do aluno justificar o seu fazer” (PROFESSOR V).

A fala do professor V nos parece deixar claro a Comunidade como constituidora de meios para construção de práticas docentes relativas aos saberes matemáticos escolares e, sobretudo, que o meio para essa construção se dá nos estudos dos textos didáticos, de obras matemáticas, de história e epistemologia das matemáticas e, não menos importante, da e na interação das práticas, nos estudos das praxeologias matemáticas e didáticas que vivem, em seus modos de vida, em seus condicionamentos e restrições, na instituição.

No entanto, a constituição desse meio exige um norte de questões fortes, que questionem o saber culturalmente instituído pela escola, com seus subordinamentos aos níveis superiores de codeterminação didática, como problemático para o ensino; mas isso só e possível por meio de dispositivos que permitam interpretar e desenvolver praxeologias matemáticas e didáticas como a TAD.

A partir dos recursos interpretativos e metodológicos da TAD, é possível vislumbrar caminhos, entre eles o PER aliado à noção de tarefa fundamental, que aqui se mostrou de modo enfático como o dispositivo didático constituidor de meios para responder a questões problemáticas sobre uma organização matemático-didática e também como um percurso a ser vivido para a formação de professores, como mostraremos a seguir, ao apresentarmos a constituição do PER com seus desdobramentos e mudança de meios.

Figura 21 – Constituição do PER vivenciado na Comunidade



Em decorrência desse PER, a Comunidade expõe as seguintes respostas que descrevem as respostas do percurso:

Quadro 8 – O Percurso de Estudo e Pesquisas

Percurso de Estudos e Pesquisas	
Quanto à Formação	**Quanto à problemática**
Tarefas que os professores reconhecem como suas: - Construir OMs e ODs para atender sua intenção didática. - Reconhecem o problema praxeológico do professor; o quê, de, e como ensinar? - Reconhecem a importância da articulação com outras disciplinas, no caso Desenho. - Necessária reformulação tanto no conteúdo de ensino como na metodologia da disciplina Desenho Geométrico. - Construção da OD de referência para o ensino do Desenho Geométrico, tomando por base a articulação entre os setores da geometria em uma perspectiva do horizonte do conteúdo ao longo da educação básica. - Necessidade do resgate de conhecimentos anteriores para reconhecer o novo, seja qual for o aluno ou a escola, pode ser que uns mais outros menos, mas todos possuem conhecimentos anteriores que podem ser mobilizados na perspectiva do estudo de novos conhecimentos. - A Comunidade assume que resolver situações problemáticas é mobilizar um conjunto de tarefas que respondem a questões determinadas.	**No estudo das obras institucionalizadas:** - O fazer docente gira em torno do Tipo de Tarefa, obedecendo a uma estrutura rígida de tipos tarefas marcadamente isoladas, destituída de qualquer trabalho da técnica que possibilite a instituição de uma OMLRC. - A Comunidade outorga o selo de legitimidade à resposta por nos apresentadas, sendo os Tipos de Tarefas Fundamentais: Localizar pontos no plano; Calcular a distância entre dois pontos dados e Encontrar a equação do segmento de reta. - O Teorema de Tales transversaliza o ensino básico, ele pode ser colocado como tarefa/tema que articula outros temas, setores e áreas, e de acordo com sua função na OM/OD, pode assumir o papel de tarefa, de técnica ou de tecnologia/teoria.
Necessidade de estudo das tarefas a partir: - das OMs e ODs disponíveis nas instituições; - da historia e epistemologia da matemática; - do compartilhamento de práticas.	**Tarefas que a Comunidade acorda que atendem a noção de Tarefas Fundamentais na GAP:** - localização de pontos no plano; - determinar a distância entre dois pontos; - escrever a equação da reta; - determinar a medida de um segmento a partir e outros segmentos.

A noção de tarefa no PER produz grande quantidade de respostas aos problemas concretos da profissão, ao tempo que se constitui como percurso de formação para revelar tarefas para a atividade docente. E ainda, este acontecimento nos parece ter estabelecido uma nova prática para o ensino da Geometria Analítica a partir de OMs/ODs, utilizando um dispositivo didático denominado de Tarefas Fundamentais, como detonador de um dispositivo metodológico o PER em uma Comunidade de práticas.

7 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Em nossas investigações vivenciamos a dialética entre a pessoa e a instituição, que se dá no confronto da relação do docente com o saber matemático que deve estar em conformidade com as relações institucionais para as posições que o docente ocupa nessas instituições, e que se manifestam quando da construção/reconstrução de praxeologias.

A complexidade que permeia a eleição das Tarefas e, entre elas, as Fundamentais que estruturam a organização matemática, se impõe claramente não só por poder requerer o contexto matemático histórico e epistemológico como também pela presença de influências que condicionam as escolhas; entre elas, o currículo oficial, as ferramentas didáticas disponíveis, os livros-textos adotados pela escola como obras institucionais de estudo e, sobretudo, pelas práticas docentes que vivem na instituição e, portanto delineiam as relações institucionais com os objetos matemáticos em jogo em uma instituição escolar.

Tais condições conformam, chegando inclusive a limitar as reconstruções das OMs e ODs, e, em nosso caso, a partir das Tarefas Fundamentais, exigem mudanças de práticas docentes que somente são possíveis com construções de novas relações dos docentes com o saber em jogo, tendo em conta a dialética pessoal-institucional que exacerba os conflitos entre as relações do docente com o saber no fazer e pensar que os condicionam e limitam suas atividades de construir um novo sujeitamento para si e para a instituição.

Nesse caminhar, as praxeologias mostram-se como obras nunca prontas e acabadas, mas antes de tudo como construções de pessoas que vivem e ocupam posições no seio de uma instituição. Isso implica que a relação institucional, vista como a relação dessas pessoas com um dado objeto matemático, se determina na dinâmica dos interesses e intenções delas e lhes dá forma e sentido.

As necessidades institucionais de novas práticas exigem que as pessoas desenvolvam novas relações pessoais com os objetos, o que somente pode acontecer no estudo de e para a construção de organizações matemáticas dos professores, que momentaneamente deixam de ser os difusores de praxeologias dominantes e assumem o papel institucional de criadores de novas praxeologias no processo de transposição didática.

Certamente, nos parece, o problema praxeológico docente se mostra como o de construção de organizações didáticas e parece se impor inicialmente de modo solitário quando o professor procura responder às questões advindas do confronto das praxeologias matemáticas com suas praxeologias didáticas, que demandam reconstruções dessas praxeologias matemáticas para o ensino da matemática.

A resposta, a nova praxeologia, realiza-se na movimentação de seu equipamento praxeológico, nos confrontos de praxeologias até então vivenciadas, inclusive as nunca ensinadas que às vezes se mostram estratégicas para atender a questionamentos que podem vir a constituir mudanças praxeológicas substanciais.

As práticas docentes nesse sentido se configuram como domínio privilegiado de formação, pois seria nesse domínio que tomariam corpo as questões às quais o professor deve buscar respostas possíveis que visem a superar o modelo de que os professores devem em primeiro lugar aprender as teorias da educação e da matemática para em seguida as aplicarem.

A superação desse modelo passaria então pela atitude do professor de assumir um fazer na perspectiva da dialética entre os questionamentos que surgem na prática docente e as respostas que ele pode fazer emergir com os dispositivos didáticos de que dispõe. Mas, quando os questionamentos são potencializados de tal maneira que se caracterizem como um questionamento forte, como o de propor novas tarefas, ou de novas organizações de tarefas, que requeiram o desencadear de outras tarefas que quando enfrentadas por uma ou mais técnicas provoquem a reconstrução de OM e OD, e evidenciem uma, ou mais, razão de ser do estudo do objeto matemático em jogo, o problema se revela em magnitude que ganha dimensões institucionais.

Vejamos, primeiro é preciso ter em conta que a construção de uma organização praxeológica não se faz livremente, pois esse fazer está subordinado a condições e restrições impostas pela instituição, no mínimo por atores da instituição que defendem as praxeologias até então dominantes, como as de nível da pedagógica que exigem certa subordinação à infraestrutura didática como as dos livros-textos adotados pela escola, do tempo didático a ser dispendido para o saber, das ferramentas didáticas disponíveis, e outras condições e restrições decorrentes de outros níveis de codeterminação didática, como os programas curriculares estabelecidos pelas secretarias de educação que não estão subordinados diretamente ao professor, mas que implicam em jeitos de pensar e manipular os objetos matemáticos para o ensino

Segundo, que a subordinação às condições e restrições institucionais faz revelar a dimensão ecológica das praxeologias, caracterizada pela dinâmica de vida intra e interinstitucional; ou seja, as praxeologias construídas em uma instituição são reconstruídas em outras instituições a partir de questões distintas de sua origem e, tal como na instituição de origem, afetam e são afetadas pelas praxeologias que vivem com ela nas instituições, alterando as condições de vida dela e das outras. Isso revela mais uma face da complexidade da problemática da desarticulação que não depende de um professor solitário em particular, mas que certamente aponta a importância de práticas docentes em diferentes posições inter e intra instituições como um dos caminhos para prover as respostas praxeológicas, matemáticas e didáticas, como preconiza a TAD.

Assim, sob essa compreensão, a construção de praxeologias se configura em uma prática estratégica para um percurso de formação de professores, uma vez que pode evidenciar o problema da desarticulação do currículo como um problema docente, não do professor, mas da profissão de professor, que deve ser respondido coletivamente mediante a elaboração de recursos praxeológicos técnicos e teóricos apropriados.

O estudo acima, como observamos em nossas análises, não é simples. Exige não somente investigações no contexto institucional dos elementos matemáticos e didáticos, a infraestrutura matemática e didática disponível que possibilite o ensino da disciplina e também de necessários recursos teóricos apropriados, em nosso caso, o encontro com a TAD.

O encontro com a TAD se tornou necessário como ferramenta de análise das praxeologias matemáticas e também de desenvolvimento, exprimindo o jeito de pensar e fazer praxeologias que faz emergir a problemática da desarticulação em sua complexidade à medida que avança em seu enfrentamento. Tal encontro leva os professores a se darem conta de que a infraestrutura matemática imposta não atende, em geral, as diversas e numerosas restrições existentes em todos os níveis que eles têm que atuar e que acabam em conformar o exercício de sua profissão e, como em consequência, revela a necessidade de dispositivos de formação que possam suprir as necessidades profissionais e institucionais.

Assim, em nossa pesquisa, o encontro com professores se deu em uma comunidade de práticas, que se configurou inicialmente como o dispositivo didático para a reconstrução de OM/OD, como fruto de questionamentos da infraestrutura matemática e didática da instituição que compõe a unidade escolar a partir do confronto das práticas dos professores que integram essa comunidade.

Paulatinamente, o encontro da comunidade de práticas ganhou ares de um Percurso de Formação de Professores a partir do Percurso de Estudo e Pesquisa (PER) instaurado inicialmente pela questão sobre a reestruturação organizacional das tarefas de Geometria Analítica que permitissem um fazer de complexidade crescente.

De outro modo, o PER se constituiu como um percurso de formação dos professores à medida que objetivava questionar o EP institucional, das práticas que viviam na instituição, a partir das necessidades praxeológicas ali criadas, evocadas no estudo das questões que derivavam uma das outras e que certamente se encontravam no seio do exercício da profissão daqueles professores.

As respostas materializadas por reformulações desse EP foram construídas na dialética pessoal-institucional à medida que se revelavam as condições e restrições que conformavam as práticas institucionais e encaminhavam como poderia ser uma nova prática com a geometria analítica, em suas relações de convívio com outras praxeologias matemáticas relativas a outros objetos matemáticos e com outras de outra disciplina, como o Desenho Geométrico. Tal dispositivo, se não mudou as praxeologias matemáticas relativas a outras áreas e setores, apontou caminhos de relações que permitiriam tal fazer de mudança, o imbricado habitat com seus nichos que promoveria a vida dessas novas praxeologias, de modo a melhor atender as restrições de currículo, de tempo didático, de avaliação unificada dos alunos pela instituição etc.

Em resumo, o PER no seio da comunidade de práticas, mostrou-se como um dispositivo metodológico positivamente diferenciado para formação continuada de professores no efetivo exercício da docência:

(1) Por fazer revelar (e como enfrentar) o problema da desarticulação como da profissão docente.

Inicialmente por proporcionar o estabelecimento e enfrentamento de uma problemática da profissão docente que exigiu a (re)construção de OM e OD articuladas não só no nível do tema, mas extrapolando estes, passando para o nível do setor, da área e até mesmo da disciplina, ou seja, na perspectiva do horizonte do conteúdo de matemática do currículo do Ensino Básico.

(2) Por revelar a Dimensão escolar dos objetos matemáticos.

Por fazer revelar aos professores os objetos matemáticos do currículo além de questões locais relativas a uma dada etapa de ensino, e em um determinado momento de estudos, mas no sentido da transacionalidade desses objetos como o Teorema de Tales com os seus tipos de tarefas em diferentes posições do currículo que faziam revelar sua grande potencialidade em articular temas, setores e áreas da matemática escolar do ensino básico.

(3) Por revelar as funcionalidades das Tarefas.

Isto requereu dos docentes um olhar cuidadoso para os elementos das praxeologias matemáticas que fazem parte de cada obra matemática componente do currículo, tomando como base as questões matemáticas a serem enfrentadas, mais especificamente as tarefas e as possíveis respostas que emergem do enfrentamento dessas tarefas.

(4) Por promover e fomentar a geração de questões a partir das práticas docentes: as Tarefas Fundamentais.

Houve uma preocupação com o tipo de tarefa que proporcionaria a entrada no processo de estudos, e observando a potencialidade que as tarefas têm em articular e justificar outras tarefas que poderiam de alguma forma servir como um dispositivo de entrada e convergência das etapas que ocorrem nos processos de estudos, isto nos conduziu à noção da Tarefa Fundamental, como a tarefa que exerce posição de destaque tanto no sentido da análise das OM e OD como no fazer docente de desenvolvimento de novas praxeologias. Essa noção é tomada no sentido de permitir responder ao seguinte tipo de questão:

Que fazer docente poderia revelar, de algum modo, o papel das tarefas em jogo nas praxeologias matemáticas e que se constitua em uma das condições necessárias para fazer revelar o problema praxeológico ao professor como um produto de intenção didática e, em sentido mais amplo, o horizonte curricular das praxeologias matemáticas e didáticas?

Nesse sentido, a formulação de questão tecnológica relevante e matemática (razão de ser) constituem um tipo de tarefas docentes para consecução da transposição didática interna, institucional, e se caracteriza como de complexidade crescente à medida que se vislumbrar como um caminhar de uma organização pontual em direção a torná-la local, regional ou global, se impondo assim como uma tarefa que não pode ser enfrentada por um professor solitário.

Exigem equipamentos praxeológicos de diferentes posições na instituição, ensino fundamental menor, maior, médio e até mesmo superior, pois o horizonte praxeológico curricular sobre um objeto matemático atende a diferentes modelos epistemológicos de referências (dependente da posição, é às vezes conflitante) que exigem o conhecimento de diferentes práticas com o objeto na instituição em jogo.

Essas tarefas docentes são, portanto da profissão docente, as que o professor tem de enfrentar no exercício da profissão e, como tal, exigem o enfrentamento colaborativo que pode ser proporcionado, como em nossa pesquisa, por uma comunidade de práticas institucionalizada no seio de uma instituição docente por meio de recursos tecnológicos apropriados como a TAD, que se constituiu em obra primeira de estudo pela Comunidade.

A noção de Tarefas Fundamentais está estreitamente imbricada com um modelo Epistemológico que, senão o define é certo que o traduz, expressa sua estrutura em consonância com a intencionalidade do professor, por exemplo, de propiciar um olhar para o currículo como uma obra em que as personagens conversem entre si de tal maneira que proporcione uma atividade matemática de progressiva complexidade, de forma articulada e integrada que objetive um fazer matemático rápido, simples e seguro.

Entretanto, a busca de tarefas com o papel articulador não é livre e encontra-se envolta a diferentes condições, algumas conhecidas *a priori* e outras que se revelam no percurso de busca. Em nossa investigação, parece claro que o percurso de busca estava inicialmente condicionado às seguintes condições:

- a “liberdade” institucional para (re)construções das OM e OD para a prática docente;
- a “liberdade” de reconstrução de OM e OD que tenham a capacidade de antecipar ou resgatar obras matemáticas, desde que sejam obras que se vão estudar ou que já se estudaram;
- a obrigatoriedade de cumprir integralmente o programa estabelecido para uma dada posição do currículo escolar na carga horária prevista;
- a obrigatoriedade de realizar a avaliação, tendo parte dela comum com todas as classes da mesma série de estudos;
- a obrigatoriedade de cumprir a preparação específica para os exames de avaliação nacional (ENEM) e vestibulares etc.

Entre essas condições, a primeira é favorável ao percurso, já que institucionalmente o professor está livre para reconstruir OM/OD. Tal liberdade decorre de uma necessidade institucional tendo em conta a ausência de livros-textos que atendam o programa de ensino de matemática por cada etapa/ano que tem consequências ao nível de codeterminação didática da disciplina. Isso se traduz na escola por:

- obrigatoriedade de reuniões dos professores para tratar de assuntos didáticos, incluídas no horário de trabalho;
- questionamentos dos professores relativos às OM e OD presentes como propostas nos livros didáticos utilizados na escola.

As reuniões e questionamentos de professores que revelam o problema praxeológico do professor que é traduzido pela segunda e demais condições que é expressa de modo mais preciso. Reconstruir OM/OD resgatando as obras estudadas ou a estudar; ou seja, o condicionamento do currículo de matemática da escola, no tempo da escola, com ODs que atendam os exames nacionais de avaliação.

Mas, no percurso da busca outras condições se revelam, entre elas, e em nosso caso, as obras, aqui entendidas como os livros de história e epistemologia da GAP, as organizações matemáticas da escola, e as praxeologias matemáticas e didáticas dos professores da Comunidade. Condicionam a busca à medida que codeterminam também as respostas buscadas.

Em nossa investigação, fica claro que a busca é condicionada de modo forte pelas praxeologias matemáticas e didáticas da Comunidade. Isso é especialmente evidente quando a Comunidade encaminha como proposta de OM/OD para ETRB a partir de praxeologias desenvolvidas e vividas por professores da Comunidade.

O encontro com a obra de Descartes é superficial e esta é investigada no sentido de fazer revelar uma possível tarefa que também vivesse na escola e pudesse ser usada como ferramenta de articulação.

A GAP, como método para resolução de problemas de geometria sintética até então não resolvidos não se faz revelar aos membros da Comunidade por esse estudo que se evidencia pelos questionamentos da Comunidade sobre as relações entre GAP e a Geometria Sintética.

É no sistema didático construído a partir desse questionamento, que se reduz ao estudo de uma praxeologia didática de um membro da Comunidade, que a resposta, a GAP como método, é legitimada.

Como se pode notar, o percurso não é previsível, não sabemos o que pode ocorrer. Poderíamos ter as mesmas obras, as mesmas praxeologias dominantes da escola, mas o confronto das práticas dos professores, sob condições não muito distintas, pode acabar por encaminhar modelos epistemológicos distintos e em consequência tipos de tarefas fundamentais diferentes.

Se for certo que não se pode prever o percurso de busca, é certo também que o percurso de busca de tarefas fundamentais permite traduzir um modelo epistemológico, que pode ser construído nessa busca, que venha dar resposta ao problema praxeológico da profissão docente como mostra a investigação.

É certo também que no percurso de busca os professores ganhem consciência de problemáticas da profissão e busquem dispositivos adequados, os sistemas didáticos, que os ajudem a construir respostas. Embora não sejam certos quais questionamentos, e quando, podem ocorrer no percurso.

É essa compreensão de nossa pesquisa, sob o suporte da TAD, sobre o percurso de formação docente em matemática a partir da noção de Tarefas Fundamentais. De outro modo, que a noção de tarefas fundamentais se constitui em dispositivo didático de deflagração e desenvolvimento de busca que constitui um PER como dispositivo metodológico para formação continuada de professores.

No entanto, a noção de tarefas fundamentais ainda é embrionária. Começa em um sentido matemático axiomático, como parece mostrar nossa investigação quando a Comunidade se mostra atendida pelo encontro com o Teorema de Tales. Ele fundamentaria as demais, em um sentido dedutivo.

Esse atendimento se traduz na pouca importância que se dá as praxeologias com vetores para a GAP que poderia levar a outras estruturas de tarefas, segundo esse modelo epistemológico, como Tarefas Fundamentais. Mas, persistiu a busca de relações e integrações com outros setores o que fez essas praxeologias mostrarem um aspecto desejado, de uma via de conexão entre setores, da GAP, Geometria Sintética e Trigonometria, pela lei dos cossenos.

Os desdobramentos do percurso em sistemas didáticos a partir de questões derivadas, às vezes aparentemente sem sentido para a construção de uma resposta para a questão inicial, como o questionamento “por que e para que se ensinar frações?”, levaram aos questionamentos Q_8: *Como eleger as Tarefas Fundamentais?* e Q_9: Esse tipo de tarefas, as fundamentais, sempre existem, seja qual for a OM relativa a um determinado objeto matemático de estudo? Que mostram que essa noção requer estudos que permita melhor revelar a noção não matemática axiomática das tarefas fundamentais.

Os professores recorreram às suas práticas de modo dominante no percurso, mas nos pareceu que o encontro com a epistemologia e história da matemática, embora menos profundo, senão determinante, corroborou de modo relevante para dar o selo às tarefas do teorema de Tales como fundamentais.

As tarefas do Teorema de Tales, no entanto, não são explicitamente apresentadas na construção da OM/OD ou em algum outro momento do percurso. Quando presentes, não são destacados as características desses tipos de tarefas que devem ser explorados em tal e tal posição do currículo de modo a encaminhá-la como fundamental. O que fica para o observador são praxeologias matemático-didáticas justificadas pelo Teorema de Tales e, portanto como suas tecnologias.

Não houve um encontro que permitisse revelar a imbricada relação entre a noção de tarefas fundamentais e um modelo epistemológico artificial para o ensino de um dado objeto, que exigisse a construção de novas tarefas, ou a reconstrução de anônimas tarefas que atendam o modelo.

Parece persistir para a Comunidade, fortemente sujeita da instituição, que a construção de OM/OD se faz unicamente pela manipulação das tarefas que vivem na instituição ou que não é tarefa de professor construir tarefas para atender uma intenção didática, deixando invisível a questão “como (re)construir tarefas que atendam um dado modelo epistemológico de modo a atender as condições impostas pela instituição?”.

Na Comunidade, ficou claro que é tarefa do professor "Construir uma organização a partir de recortes de organizações matemáticas presentes nos livros-textos do ensino básico", mas não se vislumbraram claramente os *tipos de tarefas dos docentes* como "*reconstruir para o ensino um conjunto de tarefas matemáticas tendo em conta a interpretação, justificação, confiabilidade, economia e ao alcance das técnicas"*; "*reconstruir para o ensino um conjunto de tarefas que no momento do trabalho da técnica com os alunos produza uma atividade matemática de complexidade crescente provocando a ampliação dos tipos de problemas que podem ser abordados",* e suas relações com a noção de tarefas fundamentais. Esse último aspecto, das relações, nos interessa por encaminhar que a noção de tarefa ainda exige maiores estudos para construir sua compreensão.

Assim, novas pesquisas estão sendo levadas a cabo, dentre elas podemos destacar duas que já estão em andamento no Grupo de Pesquisas em Didática da Matemática sediado no IEMCI/UFPA, no qual estamos inseridos.

Uma das pesquisas tem como objeto de investigação um aprofundamento em forma de desenvolvimento do PER como dispositivo metodológico de formação continuada, objetivando por intermédio da busca dos tipos de Tarefas Fundamentais, o reconhecimento ou criação por parte do professor do MER que norteará seu fazer docente, tendo como tema as frações.

A outra pesquisa ocorre na perspectiva do desdobramento e aprofundamento da Tarefa Fundamental como dispositivo didático que potencializa atividade matemática, como um fazer rápido, simples e seguro. A hipótese é que dentre os tipos de tarefas fundamentais existe um gênero de tarefa fundamental que possibilita a geração do algoritmo que propicia a atividade matemática do trabalho da técnica a partir de transformação de um tipo de tarefa noutro. O tema matemático que está sendo utilizado para as investigações, nesse caso, é o sistema de equações lineares.

Além destas, outras investigações certamente precisam ser encaminhadas no sentido de melhor compreendermos o alcance que pode tomar a noção de Tarefas Fundamentais tendo em conta a complexidade dessa noção.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **Geometria analítica plana**: praxeologias matemáticas o ensino médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

BARQUERO, B. **Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas***.* 2009*.* Tese (Doutorado em out/2009) – Universitat Autónoma de Barcelona, Espanha, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília, 2002.

______. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília, 2002. 244p.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998.

BROSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield. Recherches en didactiques des mathématiques. Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, 1998.

BOLEA, P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.** Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2003.

BIANCHINI, **Edwaldo. Matemática**, v 4. Moderna, São Paulo, 2006

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. Edgar Blucher. São Paulo, 1974.

BOSCH, M., C. FONSECA y J. GASCÓN, Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 24, núms. 2-3, p. 205-250, 2004.

BOSCH, M. GARCIA, J.; GASCÓN, J. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa** (RELIME), México, v. 18, n. 2, p. 37-74, 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **LAS PRÁCTICAS DOCENTES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS** *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* que se celebró en Agosto de 2001.

______. **La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos**. 2004. Disponível em: <http://www.ugr.es/ ~jgodino/*siidm/madrid*>*.* Acesso em: 12 out. 2010.

______. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria**.** In: GONZÁLEZ, M. J.; GONZÁLEZ, M. T.; MURILLO, J. (ed.) **Investigación en Educación Matemática XIII**. 2009. p. 89-113). Disponível em:<http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/ actas/Actas13SEIEM/SEIEMX III.pdf>. Acesso em: 5 set. 2009.

CAMARGO, Ivan de, BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica 3ª ed.** Prentice Hall, São Paulo, 2005.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques**: entre problèmes de la profession et formation en IUFM*.* Les mathématiques comme problème professionnel. 2006. 453fl. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université de Provence, 2006. Disponível em: <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709>. Acesso em: 20 ago. 2007.

CHEVALLARD, Yves. Journal du seminaire tad/idd: Theorie Anthropologique du didactique & Ingenierie Didactique du Developpementn, Séance 7 – Vendredi 11 juin 2010, **L'organisation de la recherche**. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: jan. 2011.

______. **La TAD face au professeur de mathématiques,** Toulouse, 29 abr. 2009a. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso: em: 8 out. 2010.

______. **Didactique et formation des enseignants,** Poitiers**,** 13 maio 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 8 out. 2010.

______. **La notion de PER**: problèmes et avancées. Toulouse, 2009c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_ article=161>. Acesso em: 8 out. 2010.

______. **Remarques sur la notion d`infrastruture didactique et sur le rôle des PER,** Lyon, 19 mai 2009d. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 8 out. 2010.

______. Journal du seminaire tad/idd: Theorie Anthropologique du didactique & Ingenierie Didactique du Developpementn, Séance 3 : **le fait de la recherche**; Vendredi 11 décembre 2009e. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 12 jan. 2011.

______. **Organiser l'étude**. 3. Écologie&régulation. Actes de la XI école d'été de didactique. Grenoble: La PenséeSauvage, p. 41-56, 2002.

______. Aspectos problemáticos de la formación docente. In: Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 26. Huesca, 2001a. **Anais…** Universidade de Zaragoza, Espanha, 2001a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 23 out. 2011.

______. **Organiser l'étude**. 1. Structures & fonctions, Cours à la XI École d'été de Didactique des Mathématiques, pendiente de publicación, 2001b.

______. **L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthopologique du didactique**, Recherches en didactiques des mathématiques. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265,1999.

______. **La transposition didactique.** Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, 1991.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Yves; CIRADE, G. Pour une formation professionnelle d'université: éléments d'une problématique de rupture. **Recherche et Formation pour les Professions de L'éducation**, v. 60, p. 51-62, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em: out/2010

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2005.

DESCARTES, R. **Discurso do método.** (Coleção Pensadores). Trad.: J. Guinsburg e Bento Prado Júnior. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

______. **The geometry of Rene Descartes with a facs simile of the first edition,** 1637. Trad.: David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.1954.

EVES, Howard. **Estudio de la geometría**. México: Uteha, 1969. Tomo1

______. Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Higino A. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2004.

FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad**. 2004. Tese (Doutorado em set/2004) – Universitat de Vigo, Espanha, 2004**.**

FONSECA, C. et al. Los REI en la creacion de secuencias de enseñanza y aprendizaje. In: International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 3. **Anais…** Catalunya, Espanha. p. 247- 256, 2010a.

FONSECA, C BOSCH, M.; GASCÓN, J. El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la “regla de Ruffini” **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, v. 22, n. 2; p.05-34, 2010b.

GARCIA, F. J. **La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar**. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. 2005. Tese (Doutorado em abril/2005) - Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, 2005.

GARCIA, J.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik***,* v. 38, n. 3, p. 226-246, 2006.

GARCIA, F. J.; RUIZ HIGUERAS, L. Mathematical praxeologies of increasing complexity: variation systems modelling in secondary education. In: European Congress of Mathematics Education, 4. St. Feliu deGuixols, Espanha, 2005. **Proceedings…** 2005.

GASCÓN, J. Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**, n. 14 -2, p. 203-231, 2011.

GASCÓN, J. Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**, n. 22, p. 9-35, 2010.

______. Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **Suma**, v. 39, p. 13-25, 2002.

______. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, v. 4, n. 2; p.129-159, 2001.

GHERARDI, S. NICOLINI, D. The Organizational Learning of Safety in Communities of Pratice. **Journal of Management Inquiry,** v. 9, n. 1, 2000.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução: Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GUERRA, Renato B.; ANDRADE, Roberto C. D. Tarefas fundamentais e o ensino de geometria analítica. In: Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur, 8. Taller 21, **Anais…** Asunción, Paraguay, 2009.

JARDINETTO, J. R. B. A Função Metodológica da História para Elaboração e Execução de Procedimentos de Ensino na Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro: UNESP, v. 9, n. 10, p. 75-82, 1994.

______. **A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica a nível do 1º e 2º graus.** 1991. Dissertação (Mestrado em set/1991) - Universidade Federal de São Carlos, 1991.

LOPES JUNIOR, Dejahyr; FREITAS, José Luiz Magalhães. Um estudo sobre práticas pedagógicas de professores de matemática: uma tentativa de articulação entre a TAD e os conceitos de habitus e campo de Bourdieu. In: Reunião Anual da ANPED, 32. GT19, Caxambu, 2009. **Anais...** ANPED, 2009.

MACHADO, Silvia D. A. et al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

McDERMOTT, R. **Desenvolvimento de comunidades como estágio natural**. Disponível em: <www.melcrum.com>. Acesso em: 24 jan. 2006.

MIGUEL, Maria I. R. **Ensino e aprendizagem do modelo de Poisson**: uma experiência com modelagem. 2005. 266f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e Padrões para a Matemática Escolar**. Disponível em: <http://standards.nctm.org>. Acesso em: 10 out. 2010.

PARRA, Verónica; OTERO, Maria Rita. Praxeologias didacticas en la universidad: un estudio de caso relativo al limite y continuidad de funciones. **Zetetiké**, Campinas: Unicamp, v. 17, n. 31, jan/jun. 2009.

RODRÍGUEZ, E. **Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas:** una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. 2005. Tese (Doutorado em set/2005) - Universidad Complutense de Madrid, 2005.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das Praxeologias. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Educação Matemática, 9., 2005. São Paulo. **Anais...** São Paulo: FEUSP, 2005.

RUIZ, Alicia, et al. La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. In: International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 3. Catalunya, Spain. **Anais...** 2010. p. 399-413.

Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. **Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros**. In: International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 3. Catalunya, Spain. **Anais...** 2010. p. 413-435.

SERRANO, L., BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Como hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas.** In: En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action.* Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010. p. 835-857.

SIERRA, T. A. **Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas**. El caso de los sistemas de numeración. 2006. Tese (Doutorado em out/2006) - Universidad Complutense de Madrid, 2006.

SIERRA, T. A.; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil:** el caso de cómo enseñar a contar, Em prensa Revista de Educación, 357. Aceite em 15 dez. 2009. Disponível em: <www.revistaeducacion.mec.es/doi/357_059.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2010.

SILVA, Maria José Ferreira. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 301f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SHULMAN, L. Those who understand**:** knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

STRUIK, D. **História concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradativa, 1989.

OLIVEIRA, Adriana Barbosa. **Prática pedagógica e conhecimentos específicos**: um estudo com um professor de matemática em início de docência. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

OLIVEIRA, Adriana Barbosa; BITAR, Marilena. Um estudo das organizações didática e matemática de professores em início de docência durante as aulas de função. In: EBRAPEM, 12. **-** Educação matemática: possibilidades de interlocução, Rio Claro, 2008. **Anais...** UNESP, 2008.

YOUSSEF, Antônio Nicolau et al. **Matemática**: ensino médio, volume único. São Paulo: Scipione, 2005.

WENGER, Etienne. **Comunidades de prática**: aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paiadós, 2001.

WENGER, E.; McDERMOTT, R.; SNYDER, W. **Cultivating communities of practice**. Boston: Harvard, 2002. Disponível em: <http://books.google.com.br/> Acesso em: 31 ago. 2011.

WENGER, E.; SNYDER, W. Communities of practice: the organizational frontier. **Harward Business Review**, EUA, p. 139-145, jan./fev. 2000. Disponível em: <http://itu.dk/people/petermeldgaard/B12/lektion%207/Communities%20of%20Practice_The%20Organizational%20Frontier.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2011.

ANEXOS

ANEXO 1

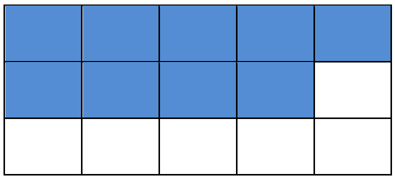
EPISÓDIO DO ESTUDO DAS FRAÇÕES

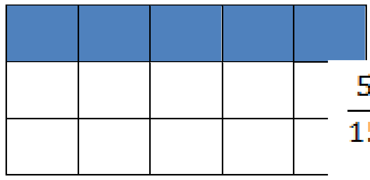
Em decorrência do episódio da demonstração do Teorema de Tales, surgiram na Comunidade indagações sobre o estudo das frações, pois o Professor R iniciou o relato sobre esse tema que está realizando com alunos do sexto ano. Ele provocou os alunos com a seguinte questão: “a divisão entre duas frações têm resto?” Essa questão provocou dúvidas na Comunidade, uns diziam que sim e outros diziam que não. Na tentativa de justificar suas respostas à Comunidade, assumiu como seu esse questionamento.

Como desdobramento, no estudo dessa questão, o professor R explicou que quando divide números inteiros cuja divisão não dá exata, sobra resto. Então, o que acontece quando se trata da divisão de frações? Ao analisar a provocação sobre a existência ou não do resto, o Professor G acentuou a existência do resto, e quando questionado pelo grupo evidenciou que na área da aritmética a divisão de duas frações que tem como resultado uma fração imprópria, que pode ser escrita na forma de número misto, a parte fracionária seria o resto como na construção do professor G (no quadro) ao expor para o grupo suas ideias.

$$\frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} . \frac{4}{3} = \frac{10}{3} = 3\,\frac{1}{3}$$

Após a exposição do professor G, alguns professores concordaram com ele afirmando que realmente a parte fracionária seria o resto. Porém, em seguida, o professor R foi ao quadro para expor suas ideias a respeito da existência ou não do resto na divisão de frações. Para tanto, ele utilizou a motivação geométrica e a contagem, destacando que a divisão pressupõe a ideia de quantos cabem, por exemplo, em $\frac{3}{5} : \frac{1}{3}$ o que se pergunta é: quantos um terço cabe em três quintos?, a partir daí o professor R realizou a seguinte construção $\frac{3}{5} : \frac{1}{3} = \frac{9}{15} : \frac{5}{15}$, em seguida considerou:

$\frac{9}{15}$ 

 $\frac{5}{15}$

Ao realizar a contagem, o professor R expressou o resultado igual a $\frac{9}{5}$, pois $\frac{3}{5}:\frac{1}{3} = \frac{9}{15}:\frac{5}{15} = 9\left(\frac{1}{15}\right):5\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{9}{5}$ e exclamou que um terço cabe nove quintos de vezes em três quintos, o que quer dizer que cabe nove partes de um quinto $9(\frac{1}{5})$, o que permitiu a ele concluir a não existência do resto. Como Justificativa, ele argumentou a comensurabilidade evocando a geometria grega, fazendo referência e demonstração do teorema das proporções realizada por Eudoxo.

Assim, tomou dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e sendo $\overline{AB}$ maior que $\overline{CD}$, perguntou se podia medir o segmento $\overline{AB}$ com o segmento $\overline{CD}$ e realizando ilustrações conclui conjuntamente com o grupo que poderia, pois bastava dividir o segmento $\overline{CD}$ em quantas partes quisesse e que coubesse em preenchimento a todo segmento $\overline{AB}$. Com isso, apesar de algumas considerações o grupo concordou com os argumentos do professor R, destacando que se tratava de números racionais, portanto comensuráveis, assumindo esse enfoque, a motivação geométrica, a divisão de frações não teria resto. Mas se as operações forem realizadas apenas no contexto aritmético, como na exposição do professor G, a parte fracionária pareceria ser o resto.