UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JORGE WILLIAMS CUNHA FERREIRA

# O CAMPO MULTIPLICATIVO NO ÂMBITO INSTITUCIONAL: DAS PRAXEOLOGIAS SÁBIAS ÀS ENSINADAS

BELÉM

2021

JORGE WILLIAMS CUNHA FERREIRA

# O CAMPO MULTIPLICATIVO NO ÂMBITO INSTITUCIONAL: DAS PRAXEOLOGIAS SÁBIAS ÀS ENSINADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito para obtenção de título de mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.

BELÉM - PA

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

F383c Ferreira, Jorge Williams Cunha.
O campo multiplicativo no âmbito institucional : das praxeologias sábias às ensinadas / Jorge Williams Cunha Ferreira. — 2021.
lxxii, 72 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2021.

1. Campo multiplicativo. 2. Instituição. 3. Praxeologias. I. Título.

CDD 510.7

---

JORGE WILLIAMS CUNHA FERREIRA

**O CAMPO MULTIPLICATIVO NO ÂMBITO INSTITUCIONAL: DAS PRAXEOLOGIAS SÁBIAS ÀS ENSINADAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito para obtenção de título de mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

DATA DA AVALIAÇÃO:___/___/____

**BANCA EXAMINADORA**

_____________________________________________

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Orientador – PPGECM/UFPA

_____________________________________________

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales
Examinador interno – PPGECM/UFPA

_____________________________________________

Prof. Dr. José Carlos de Souza Pereira
Examinador externo – SEDUC/PA

## DEDICATÓRIA

*Em memória de meus avós Rosa e Dário Cunha.*

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Maria Ruth Ribeiro Cunha pelo apoio e compreensão.

Ao meu orientador, professor Dr. José Messildo Viana Nunes, uma pessoa extremante admirável e compreensiva, que não mede esforços pelo apoio e incentivo aos seus orientandos.

Aos ilustríssimos membros da banca examinadora desta dissertação pelas riquíssimas e pertinentes contribuições à pesquisa.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) pelas valorosas contribuições teórico-metodológicas que subjazem este estudo.

Às queridas amigas Vera, Addélia, Gilvana e Cláudia, grandes parceiras que o PPGECM me proporcionou.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudo.

A todos que de alguma forma contribuíram à minha caminhada até onde me encontro. Obrigado!

## RESUMO

O presente estudo objetiva analisar o campo conceitual multiplicativo no âmbito institucional, desde as praxeologias matemáticas sábias relativas ao referido objeto de estudo em questão à sua transposição didática em termos de saber a ensinar na instituição escolar. Para tanto, à luz da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria Antropológica do Didático, realizamos um estudo analítico descritivo de organizações praxeológicas inerentes a duas obras matemáticas da literatura acadêmico-científicas, as condições institucionais impostas no desenho curricular prescrito à educação básica em conexão ao campo multiplicativo materializado~~s~~ na Base Nacional Comum Curricular e, por fim, uma análise da difusão dos objetos matemáticos constituintes do campo multiplicativo em termos de competências/concepções inerentes às respectivas organizações praxeológicas dispostas em uma coleção de manuais didáticos de matemática para os anos iniciais de escolarização aprovada pelo Plano Nacional do Livro Didático para o ano de 2019 para o sistema municipal de ensino de Belém do Pará. Apontamos para a necessidade de uma convergência entre nuances relativas a aspectos epistemológico-conceituais dos objetos matemáticos e suas relações com processos cognoscitivos entre sujeito e objeto matemático face à difusão de paxeologias didático-matemáticas no âmbito institucional escolar.

**PALAVRAS-CHAVE:** Campo Multiplicativo, Instituição, Praxeologias.

**ABSTRACT**

The present study aims to analyze the multiplicative conceptual field in the institutional scope, from the wise mathematical praxeologies concerning the referred object of study in question to its didactic transposition in terms of knowledge to teach in the school institution. To this end, in the light of the Conceptual Fields Theory and the Anthropological Theory of the Didactic, we conducted a descriptive analytical study of praxeological organizations inherent in two mathematical works from the academic-scientific literature, the institutional conditions imposed in the curricular design prescribed to basic education in connection with the multiplicative field materialized in the Common National Curricular Base and, finally, an analysis of the diffusion of mathematical objects constituting the multiplicative field in terms of competences/conceptions inherent to the respective praxeological organizations arranged in a collection of mathematics textbooks for the initial years of schooling approved by the National Textbook Plan for the year 2019 for the municipal education system of Belém do Pará. We point to the need of a convergence between nuances related to epistemological-conceptual aspects of mathematical objects and their relations with cognitive processes between subject and mathematical object in face of the diffusion of didactic-mathematical paxeologies in the school institutional scope.

**KEYWORDS:** Multiplicative Field, Institution, Praxeologies.

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE SIGLAS

| | |
|---|---|
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| OD | Organizações Didáticas |
| OM | Organizações Matemáticas |
| PNLD | Programa Nacional do Livro Didático |
| TAD | Teoria Antropológica do Didático |
| TCC | Teoria dos Campos Conceituais |

# SUMÁRIO

## INTRODUÇÃO

Entendemos como campo multiplicativo todo um conjunto de situações que envolvem a mobilização de esquemas, conceitos e representações em torno de tarefas que envolvem multiplicação, divisão ou uma relação entre elas (VERGANAUD, 1988, 1990, 1993, 1996). Os processos de ensino e aprendizagem do campo multiplicativo têm se configurado como objeto de estudo pertinente em pesquisas no âmbito nacional e internacional.

De acordo com Gascón, Bosch, Bolea (2001) e Gascón (2003), os problemas de investigação em Didática das Matemáticas[1] caracterizam-se por dois principais enfoques: o cognitivo e o epistemológico. O enfoque cognitivo, que compreende o processo "ensino e aprendizagem" da matemática como processos de apreensões de estruturas cognitivas específicas, e esse tem sido a principal fonte de respostas às questões inerentes ao ensino e aprendizagem das estruturas multiplicativas. Já o enfoque epistemológico compreende que as formas de compreensão, de organização e, consequentemente, de difusão dos saberes matemáticos em um âmbito institucional têm grande influência no processo de apropriação deste saber.

A cerca desses enfoques, destacamos alguns estudos na literatura, como Downton e Sullivan (2017), que investigaram as estratégias de resolução de problemas multiplicativos de estudantes da 3ª série de uma escola primária de Melbourne, Austrália, e evidenciaram que estudantes em meio a tarefas multiplicativas com determinado grau de complexidade, esboçam estratégias de resolução sofisticadas para essas, que variavam de cálculo multiplicativo (usando procedimentos de multiplicação) e pensamento holístico (uso de propriedades multiplicativas com estimativas).

Ferreira e Nunes (2017) realizaram um estudo numa escola pública com o objetivo de investigar as representações que estudantes do 4º ano do ensino fundamental expressavam acerca das operações de multiplicação e divisão em meio a situações das estruturas multiplicativas, através de atividades que envolviam o cotidiano dos alunos. Os autores

---

[1] Gascón, Bosch, Bolea (2001) e Gascón (2003) não tomam, apenas, como referência a tendência Didática da Matemática com seu arcabouço teórico-metodológico específico, fundada na França pelos teóricos Guy Brousseau, Gérard Vergnaud e Yves Chevallard, mas sim toda e quaisquer perspectivas que tomam como problema de investigação nuances inerentes à Educação Matemática.

constataram que as representações dos alunos em meio às situações multiplicativas, variam de pictóricas e aritmético-numéricas transitando entre os pensamentos aditivo e multiplicativo.

Delgado, Casabó e Pérez (2013), no âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD), ao discutirem a dimensão do trabalho com as técnicas matemáticas de multiplicação, avaliando a economia, a confiabilidade e a validade de tal técnica, a partir de uma investigação epistemológica, propõe um estudo dessa dimensão da atividade matemática tanto no âmbito escolar quanto no processo formativo dos professores.

Esses estudos, em comum, têm evidenciado que o processo de aquisição do que consideramos campo multiplicativo tem se demonstrado como fenômenos de aquisição e representação de competências conceituais complexas, que se desenvolvem ao longo do tempo. Evidenciam, ainda, que a organização do saber no âmbito ao qual se toma como referência, influencia diretamente nas escolhas didáticas, na pedagogia e, consequentemente, no saber aprendido.

Contudo, observamos que tal literatura científica carece de investigações que proponham uma interlocução entre os enfoques de investigação cognitivo e epistemológico, o que se presume uma certa transparência de uma dimensão em relação à outra, ou seja, como se a dimensão cognitiva fosse independente da dimensão epistemológica (e vice-versa). Consideramos pertinente uma articulação entre os processos de aquisição de competências de natureza cognitiva com as condições (que em alguns casos podem ser restrições) necessárias à difusão do saber passível de ensino.

Para fins desta pesquisa, consideramos como organização do saber as formas de sistematização que tornam um saber culturalmente produzido em instituições específicas para torná-lo ensinável. Para Chevallard (1985, 2005) esse processo ocorre através de níveis e etapas específicas ao qual denomina de transposição didática. O saber, na perspectiva de Chevallard (2009), é composto por uma dimensão prático-técnica, as quais assentam-se tarefas e tipos de tarefas, e por uma dimensão tecnológico-teórica, que fundamentam e justificam o saber. A compilação dessas duas dimensões o autor chama de praxeologia[2].

Nesses termos, assumimos como temática de investigação o estudo das estruturas multiplicativas no âmbito institucional, de modo a investigar em que condições institucionais

[2] Aprofundaremos essa noção mais adiante.

as competências das estruturas multiplicativas estão assentadas. Desse modo, postulamos a seguinte questão problema: **em que termos compreende-se o objeto campo multiplicativo nos âmbitos institucionais inerentes ao seu processo de transposição didática?** Temos como objetivo geral **analisar o campo multiplicativo âmbitos institucionais dos saberes sábios, a ensinar e ensinados do processo de transposição didática.**

Para tanto, postulamos o presente estudo em uma perspectiva qualitativa, pois segundo Bicudo (2005), um fenômeno passível à supracitada modalidade de análise, necessita sempre estar contextualizado à abordagem em questão. As pesquisas na perspectiva qualitativa, para Bicudo (2012, p. 19)

> [...] permitem compreender características do fenômeno investigado e que, ao assim procederem, oferecem oportunidade para possibilidades de compreensões possíveis quando a interrogação do fenômeno é dirigida a contextos diferentes daquele em que a investigação foi efetuada. Sustentam raciocínios articuladores importantes para tomadas de decisão políticas, educacionais, de pesquisa e, aos poucos, semeiam regiões de inquérito com análises e interpretações rigorosas.

Podemos afirmar, portanto, que a perspectiva qualitativa corrobora com os preceitos almejados por esse estudo. Como estratégia de coleta de dados, optamos pela análise documental, pois auxilia na identificação de informações factuais em função de hipóteses de interesse do investigador (CAULLEY, 1983).

Consideram-se documentos todo e quaisquer materiais escritos utilizados como fonte de informação sobre o comportamento humano (PHILLIPS, 1974), que incluem leis, regulamentos, normas, pareceres, livros, manuais, dentre outros.

Nesses termos, realizamos um estudo analítico-descritivo de organizações matemáticas em obras da literatura acadêmico-científica de matemática, bem como de organizações didático-matemáticas consonantes no currículo educacional vigente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referente as ideias multiplicativas.

Em seguida, realizamos uma análise praxeológica e conceituais multiplicativas disposta em uma coleção de manuais didáticos de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental, aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para o ano de 2019 a ser utilizada no sistema de ensino municipal de Belém do Pará.

# 1 O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Neste capítulo discorreremos acerca de elementos conceituais e noções basilares da Teoria dos Campos Conceituais, de modo a proporcionar um quadro analítico dos processos de ensino e aprendizagem de competências fundamentais à apropriação das operações de multiplicação e divisão e os condicionantes que a essas são intrínsecos.

Vergnaud (1990, 1993, 1996) situa os processos de aquisições e desenvolvimento de competências complexas em termos de campos conceituais[3], sendo uma perspectiva teórico-analítica dos fenômenos do ensino e aprendizagem em um viés cognitivista. O conhecimento racional, segundo o autor, é operatório, ou seja, comporta um conjunto sucessivo de operações variáveis e invariáveis para o trato de uma determinada situação. Para o autor, são as situações que fornecem sentido à ação do sujeito, tendo o sentido de tarefa, com natureza e níveis de complexidades próprios.

As situações, segundo o autor, podem ser classificadas em classes de situações que determinam os níveis de competência do sujeito na ação. A primeira classe de situações é a que o sujeito mobiliza as competências que dispõe para o trato iminente de uma determinada situação. Por outro lado, a segunda classe de situações é a que um sujeito não dispõe, em um determinado momento, das competências necessárias para mobilizar um tratamento imediato para uma situação, o que "obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso" (VERGNAUD, 1996, p. 156). Os esquemas são sempre efetivos, porém, nem sempre eficazes.

É através das situações que os sujeitos mobilizam seus esquemas. Para Vergnaud (1990, 1993, 1996) um esquema representa uma totalidade de dinâmicas que organizam a ação do sujeito para uma determinada classe de situações. Para cada classe de situações há um esquema subjacente. No cerne dos esquemas assentam-se dois elementos fundamentais, que são os invariantes operatórios e as inferências. Os invariantes operatórios são os

---

[3] Para Vergnaud (1996) um campo conceitual, no sentido lato, corresponde a um conjunto de situações que permitem uma análise tanto das tarefas cognitivas e procedimentos implementados nelas (situações), como também o leque de conceitos e teoremas que para essas situações são inerentes.

conhecimento (conceitos e teoremas) [4] inerentes aos esquemas de ação do sujeito em meio a uma situação, que remetem a conceituações anteriormente assimiladas e acomodadas pelo sujeito. As inferências representam raciocínios, condutas e procedimentos intrínsecos aos esquemas do sujeito face uma determinada situação, que o levam, segundo Vergnaud (1996), a uma relação *hic et nunc*[5] do ato em uma situação.

Quanto aos invariantes operatórios, Vergnaud (1990, 1993, 1996) distingue três tipos: proposição, função proposicional e argumento. Os invariantes do tipo proposição atribuem um caráter algorítmico aos esquemas, tendo a função de teorema, sendo esses passíveis de serem verdadeiros ou falsos (VERGNAUD, 1996). Os invariantes de função proposicional são os conceitos inerentes aos esquemas, que remetem a uma conceituação implícita. Os invariantes argumentativos externalizam a forma operatória do esquema, transformando conceitos-ferramenta em conceitos-objeto (VERGNAUD, 1990, 1993, 1996).

No cerne dos invariantes operatórios estão os conceitos. Para Vergnaud (1990, 1993, 1996) um conceito corresponde a um conjunto de três elementos essenciais a ele, que são o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (**S**), o conjunto dos invariantes operacionais que racionalizam e tornam operáveis os esquemas (**I**) e o conjunto das representações no meio simbólico do conceito (**s**).

**C = (S, I, s)**

**S**: Classe de situações (Referência).

**I**: Invariantes (Significado).

**s**: Representação (Significante).

Assim, o conjunto de situações nas quais exigem um tratamento esquemático de operações de multiplicação e divisão, ou uma relação entre duas é considerado como campo conceitual multiplicativo, permitindo, assim, a categorização de classes de situações e a análise de conceitos e teoremas em ação mobilizados por sujeitos em meio a situações que

---

[4] Segundo Verganaud (1996) não são necessariamente teoremas e conceitos, mas sim uma parte micro e visível de um processo macro de conceituação.

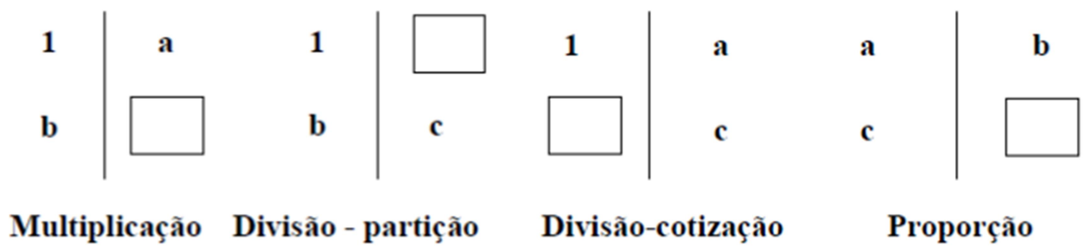
[5] Expressão latina que em sua tradução literal significa “aqui e agora”.

envolvem ideias multiplicativas (VERGNAUD, 1990, 1993, 1996, 2018). Segundo o autor, essas situações envolvem conceitos de

> [,,,] proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fracção, relação, número racional, múltiplo e divisor, etc. (VERGNAUD, 1990, p. 168).

As relações multiplicativas que dão base às situações do campo conceitual multiplicativo remetem a relações quaternárias, pois os problemas elementares de multiplicação e divisão abrangem proporções simples de duas variáveis, uma relativa à outra. Nesse sentido, Vergnaud (1990, 1993, 1996) afirma que essas relações proporcionam a concepção de quatro classes de problemas elementares multiplicativos que são: multiplicação, divisão-partição, divisão-cotização e proporção, conforme disposto na Figura 1.

Figura 1 – Classes de problemas elementares multiplicativos




Fonte**:** Vergnaud (1996, p. 174)

Assim, são distinguidas duas grandes categorias de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas. Na relação isomorfismos de medida apresentam-se relações do tipo quaternárias, duas medidas pertencem a uma grandeza e as outras duas de outra, conforme exemplificado no Quadro 1.

Quadro 1 - Situações problema da classe isomorfismo de medidas

| |
|---|
| Exemplo 1<br>Comprei 3 formas com ovos. Em cada uma há 6 ovos. Quantos ovos foram comprados ao todo? |

Exemplo 2

O litro do açaí médio[6] em regiões centrais de Belém custa R$ 19,00. Comprarei 2,5 litros, quanto pagarei pelo açaí?

Exemplo 3

No supermercado paguei um valor de R$ 24,00 na compra de 4 refrigerante de sabor guaraná, todos da mesma marca. Quanto custa cada refrigerante deste sabor e dessa marca neste estabelecimento?

Exemplo 4

Samuel tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de bombons a R$ 3,00 cada. Quantos pacotes ele pode comprar?

Exemplo 5

Um veículo consome 6,5 litros de gasolina por km rodado. Se ele percorrer uma distância de 35,5 km, quantos litros de gasolina gastará?

Exemplo 6

Gastei R$ 33,00 comprando açaí popular, ao preço de R$ 11,00 o litro. Quantos litros de açaí popular comprei?

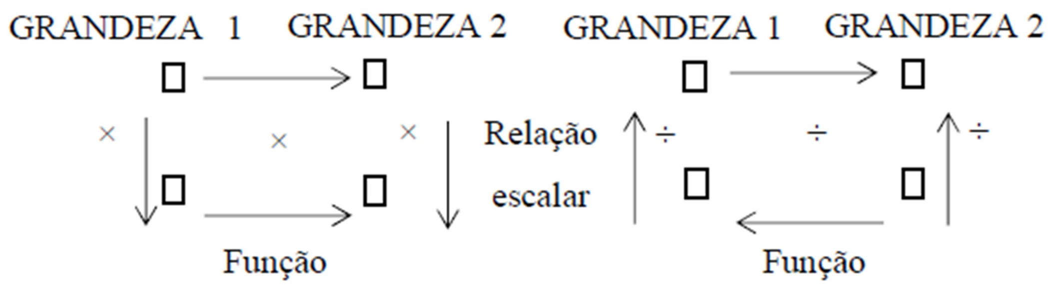
Fonte: O autor.

As soluções para esses tipos de problemas envolvem ideias de multiplicação, divisão ou relação proporcional. Contudo, Vergnaud (2009) ressalta que os níveis de dificuldades exigidas por cada tipo de problema dessa relação são distintas uma em relação a outra. As classes de situações, os tipos de problema, as relações isomórficas determinadas pela situação e o domínio numérico determinam o grau de complexidade do problema.

Para Verganaud (1996), as situações desse tipo podem ser solucionadas de duas maneiras: por meio de uma função de uma grandeza em relação à outra ou por uma relação escalar entre as quantidades na mesma grandeza, conforme exposto na Figura 2.

[6] A polpa do açaí que é consumida em Belém-PA leva em consideração sua consistência (popular/diluído, médio/transição diluído-encorpado e grosso/encorpado) que está diretamente atrelada ao seu preço.

Figura 2 – Relações operatórias dos isomorfismos de medidas




Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009)

As relações verticais e horizontais indicam as operações a serem realizadas na situação em função do tipo de problema. Vergnaud (2009) afirma ainda que as relações verticais entre quantidades de uma mesma grandeza possam ser determinadas através de uma relação escalar, que consiste numa operação de multiplicação (setas para baixo) ou divisão e (setas para cima), através de um operador numérico, para determinar a quantidades de uma mesma grandeza. Da mesma forma e mesmo sentido, as relações horizontais, denominadas pelo autor de funções, determinam as quantidades de grandezas diferentes uma em função da outra, através de multiplicações (setas à direita) ou divisões (setas à esquerda).

Os isomorfismos de medidas, Vergnaud (2009) categoriza em três grandes classes de problemas: multiplicação e dois tipos de divisão. O primeiro consiste em buscar um valor unitário e outro em buscar quantidade de unidades. Cada uma dessas classes subdivide-se em outras numerosas subclasses com níveis de dificuldades específicos. Vergnaud (1988) e Levain e Vergnaud (1994) categorizam esses tipos de problema como proporções simples. A outra relação multiplicativa é denominada pelo autor de produtos de medidas, que consistem em relações ternárias (três medidas) nas quais qualquer uma das medidas pode ser determinada através de um produto ou quociente entre as outras duas ao mesmo tempo, conforme descrito no Quadro 2.

Quadro 2 - Situações problema da classe produto de medidas

| |
|---|
| <u>Exemplo 1</u> |
| Giovani separou 5 camisas, 4 calças, 3 pares de meia e 2 pares de tênis, para ir à confraternização de sua escola. De quantas maneiras possíveis Giovani poderá se vestir? |
| <u>Exemplo 2</u> |
| Um auditório retangular é composto por 11 fileiras com 18 cadeiras em cada. Quantas |

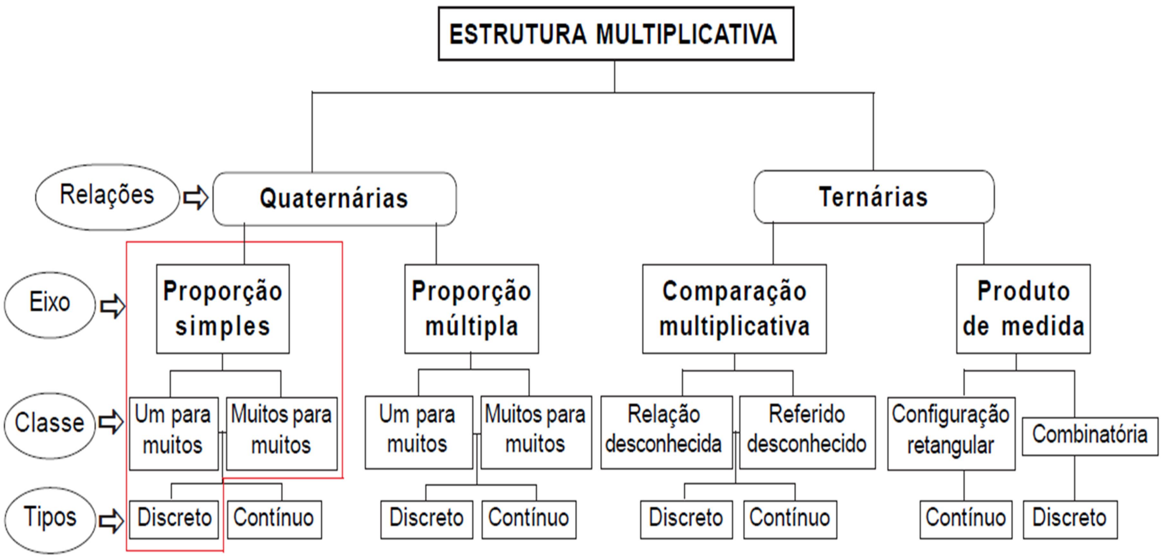
| |
|---|
| cadeiras há nesse auditório? |

Fonte: O autor.

Os produtos de medida podem ser interpretados como um caso específico de isomorfismo de medidas, pois envolvem casos de múltiplas proporções e, portanto, também assumem um tipo específico de relação quaternária (VERGNAUD, 1988). Para esta relação multiplicativa, o autor distingue duas classes de problemas: multiplicação, que consiste em encontrar uma medida ou produto tendo as demais medidas conhecidas e divisão, na qual busca-se determinar medidas elementares conhecendo a outra medida e a relação medida produto. Subdividem-se, também, em outras diversas subclasses com níveis de dificuldade e complexidade distintos.

Magina, Santos e Merlini (2014) categorizam as relações multiplicativas em duas relações: quaternárias e Ternárias. Cada uma dessas compostas por eixos. Dois eixos compõe a relação quaternária: proporção simples e proporção múltipla. A relação ternária também possui dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas. Esses eixos também podem ser compreendidos como classes de situações multiplicativas, conforme disposto na Figura 3.

Figura 3 – Estrutura do campo multiplicativo




Fonte: Magina, Santos e Merlini (2014, p. 520)

As relações quaternárias do tipo proporção simples, para os autores, correspondem a relações entre quatro quantidades, duas de uma natureza e outras duas de outra. As relações quaternárias subdividem-se em duas classes de situações: correspondência um para muitos e correspondência muito para muitos (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014). A classe de situações referente à correspondência uma para muitos ocorre quando a relção entre uma quantidade e a outra é explicitamente observável, como por exemplo um *para cinco*, *um para dez*, etc. Já as classes de situações muito para muitos "a relação entre as quantidades está implícita" (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 522).

Os autores ressaltam uma distinção entre dois tipos de situações a essa classe. A primeira situação constitui um elo direto para chegar à relação para muitos, através de uma espécie de relação semelhante a um para muitos[7]. Já a segunda situação não faz sentido obter uma relação um para muitos para determinar a relação muitos para muitos[8].

As relações quaternárias do tipo proporções múltiplas envolvem classes de situações que consistem em relações quaternárias "entre mais de duas quantidades, relacionadas duas a duas" (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 523). Assim como as proporções simples, os autores subdividem as proporções múltiplas em duas classes: correspondências um para muitos e muito para muitos. Magina, Santos e Melini (2014, p. 523) exemplificam ambas as classes a partir dos seguintes tipos de problema

> Classe 1: Correspondência um para muitos – Uma pessoa deveria beber em média 5 litros de água em dois dias. Qual é o consumo mensal (30 dias) de 5 pessoas?
> Classe 2: Correspondência muitos para muitos Um grupo de 50 pessoas vai passar 28 dias de férias no campo. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Eles sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 4Kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?

As relações ternárias envolvem um conjunto de relações entre três quantidades. Magina, Santos e Merlini (2014) subdividem as supracitadas relações em duas classes de situações: comparação multiplicativa e produto de medidas. As situações do tipo comparação multiplicativa envolvem a ideia de comparar duas grandezas de mesma natureza através de uma multiplicação agrupada (dobro, triplo, etc.) ou divisão em cotas (metade, teça parte, etc.). Já as relações ternárias do tipo produto de medidas envolvem ideias de configuração retangular e combinatória.

---

[7] Magina, Santos e Merlini (2014) exemplificam essa relação com o seguinte problemas: *três carros possuem 12 rodas, quantas rodas têm 5 carros*?

[8] Por exemplo: *a cada 5 bombons comprados, uma loja dá 3 caramelos de brinde. Se Clara comprar 15 bombons, quantos caramelos ela ganhará?*

A ideia de configuração retangular envolve situações nas quais “as quantidades representam certas medidas disposta na horizontal e na vertical, dispostas de forma retangular” (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 523). Já as ideias de combinação remetem “à noção de produto cartesiano entre dois conjuntos disjuntos (MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014, p. 523).

As perspectivas aqui discutidas nessa seção fazem ampla referência à dimensão cognitiva. Segundo Gascón (2002), o programa cognitivo é a primeira resposta às questões inerentes à problemática da integração entre o pedagógico, o matemático e o didático, postulando que o “problema” da matemática envolve essencialmente a apreensão de competências cognitivas, chamadas pelo autor de aprendizagens matemáticas, que subjazem o saber matemático.

Essa abordagem é bastante aceita e difundida na educação pela Pedagogia. Contudo, entendemos que essa dimensão é apenas uma parte de um processo amplo e complexo. Gascón (2002) reitera que não é possível integrar as dimensões pedagógicas, matemáticas e didáticas sem questionar a natureza do que se considera “matemático”. O modelo teórico proposto pela TCC se mostra pertinente à pesquisa para fundamentar questões relativas à análise da aquisição e desenvolvimento de competências cognitivas inerentes às estruturas multiplicativas.

No próximo capítulo, discorreremos acerca da Teoria Antropológica do Didático, no intuito de proporcionar um modelo de análise do saber matemático enquanto instância da prática social e seu processo de produção, difusão e circulação no âmbito institucional.

# 2 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

Neste capítulo apresentaremos os aspectos conceituais e teóricos da Teoria Antropológica do Didático, caracterizando noções basilares dessa teoria, como a noção de praxeologia, as organizações praxeológicas quanto aos seus níveis de complexidade e as dinâmicas institucionais e interinstitucionais das organizações praxeológicas.

Os estudos de Chevallard (1998) situam a matemática, e, portanto, o estudo/ensino da matemática, no campo das atividades humanas, convencionalmente regidas por regras institucionais, caracterizando os aspectos teóricos constitutivos da Teoria Antropológica do Didático TAD.

As atividades humanas, segundo a TAD, são reguladas pelas praxeologias ou organizações praxeológicas, nas quais suas unidades elementares compõem-se através de tipos de tarefas (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). Os tipos de tarefas (T) são as ações especificas de uma tarefa *t* [9]em uma instituição**[10]**, como por exemplo, calcular o produto entre 3 e 5, determinar o quociente de 15 e 3. Tanto uma tarefa t quanto um tipo de tarefa T não são dados pela natureza, são "artefatos", "obras", construções e até mesmo reconstruções institucionais (CHEVALLARD, 2001a, 2009).

A técnica (τ) é uma maneira particular, um modo de realizar um tipo de tarefa T. Chevallard (2001a, 2009) salienta que uma técnica τ só tem êxito numa determinada parte de tarefas *t* do tipo *T*. Do mesmo modo, de acordo com o autor, para um tipo de tarefa T existe ao menos uma técnica τ ou número de técnicas institucionalmente reconhecidas. Isto é, por exemplo, ao calcular o produto de 15 e 2, é usual utilizarmos a técnica clássica de multiplicação, na qual os fatores são alinhados um "em cima" do outro, de acordo com sua posição decimal, e efetuar a operação entre os valores relativos dos fatores, iniciando da direita à esquerda. Contudo, pode haver (e na maioria das vezes há) técnicas τ alternativas que, quase sempre, são desconhecidas pelos sujeitos de uma determinada instituição. O

---

[9] É uma ação para realizar algo ou alguma coisa sendo expressa, na maioria dos casos, mas não necessariamente, através de verbos como calcular, varrer, desenvolver, dividir, etc (CHEVALLARD,1998).

[10] As instituições, segundo Chevallard (1998, 1999, 2001a, 2009) são instâncias que regulam as práticas sociais em uma sociedade.

conjunto de tipos de tarefa T e técnicas $\tau$ compõe o bloco denominado prático-técnico, denotado por $\Pi = [T / \tau]$ (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2001a, 2009).

A tecnologia ($\theta$) é o discurso que justifica uma técnica $\tau$. Além dessa função, Chevallard (1998, 1999) afirma que a tecnologia possui outras duas funções: fundamentar a racionalidade da técnica, ou seja, explicar o porquê $\tau$ é assim para esse tipo de tarefa T. A outra função é de produção de técnicas a tecnologias $\theta$ em potencial. A teoria ($\Theta$) é a racionalização, em nível elevado de justificação filosófico-teórica, de toda a organização praxeológica, e que, portanto, rege toda a praxeologia. A tecnologia $\theta$ e a teoria $\Theta$ formam o bloco tecnológico-teórico $\Lambda = [\theta / \Theta]$ (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2001a, 2009).

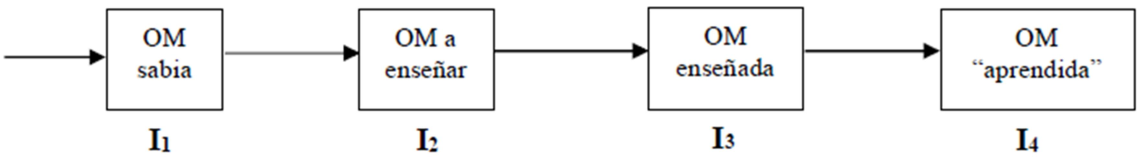
A junção do bloco prático-ténico $\Pi$ com o bloco tecnológico-teórico $\Lambda$ ($\Pi \oplus \Lambda$) formam uma organização praxeológica pontual $[T / \tau / \theta / \Theta]$ (CHEVALLARD, 1998, 1999, 2001a, 2009). Significa que para uma tarefa *t* do tipo do T há uma técnica $\tau$ (pelo menos e que é reconhecida institucionalmente) e, implicitamente, uma tecnologia $\theta$ e uma teoria $\Theta$. Geralmente o bloco tecnológico-teórico de uma organização pontual “carece” de sentido explícito.

As praxeologias no âmbito da matemática, para o autor, são denominadas de organizações praxeológicas matemáticas, ou, de modo simplificado, organizações matemáticas (OM), que são as formas de organização, dos temas matemáticos, ou das realidades matemáticas que podem ser construídas no estudo da matemática (CHEVALLARD 1998, 1999, 2001a).

O estudo ou forma de estudar uma OM é caracterizado por uma organização didática (OD), isto é, uma praxeologia que comporta uma maneira de estudar, difundir um tema matemático, uma organização matemática. As OM categorizam-se em níveis de complexidade e racionalização crescente, desde as mais elementares (pontuais), passando pelas de nível complexidade intermediária (local e regional), até as mais complexas (global).

Para Gascón e Bosch (2004) os processos de circulação e difusão institucional das praxeologias matemáticas devem tomar como referência os níveis e etapas do processo da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1985, 2005), conforme exposto na Figura 4.

Figura 4 – Organizações matemáticas correspondentes às etapas de transposição didática




Fonte: Gascón e Bosch (2004, p. 15)

As etapas (Figura 4), segundo os autores, são denotadas como instituições **I**, sendo $\mathbf{I_1}$ a instituição produtora do saber matemático; $\mathbf{I_2}$ a noosfera, instituição que pensa, discute e debate as condições e restrições impostas às difusões do saber matemático na instituição escolar ($\mathbf{I_3}$); $\mathbf{I}_4$, por fim, representa a comunidade de estudo.

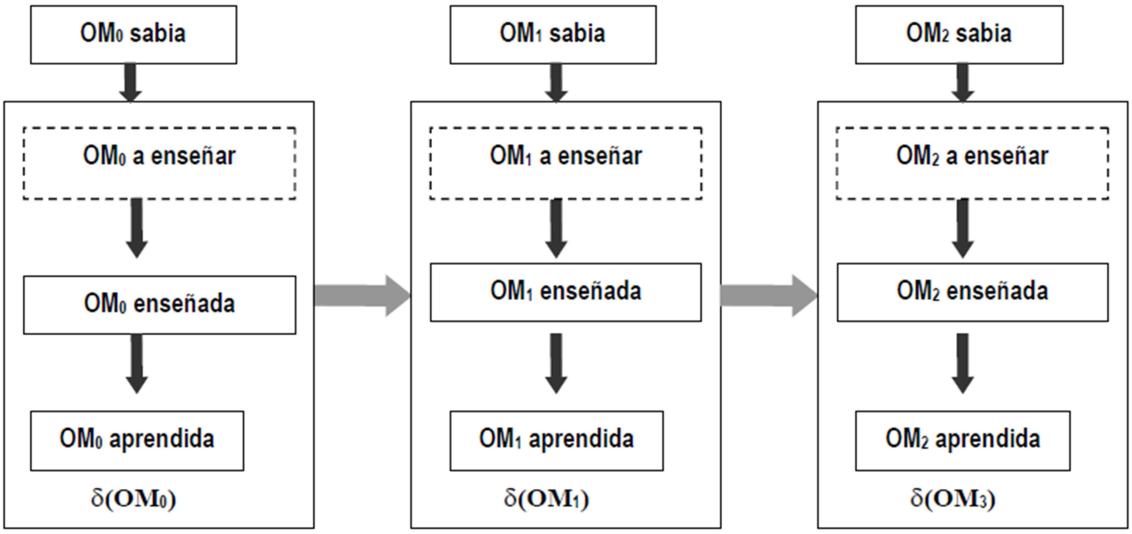
Para os autores, a cada etapa do processo de transposição didática existe uma OM correspondente à instituição **I**. Gascón e Bosch (2004) afirmam que a unidade de análise dos processos didáticos deve conter uma OD escolar que permita a construção, no mínimo de uma OM local, ou seja, uma organização matemática racionalmente justificada por uma tecnologia θ.

A OM local, segundo os autores, pode ser reconstruída a partir de ampliações e complementações progressivas, tomando como ponto de partida praxeologias pontuais, perpassando por praxeologias intermediárias geradas pelo nível sucessivo de desenvolvimento das questões problemáticas e tipos de tarefa relacionados à razão de ser da OM local relativa à instituição $\mathbf{I_n}$.

A uma OM local relativamente completa associa-se uma praxeologia didática, uma organização didática relativa a essa organização, denotada por $\delta$(OM). Gascón e Bosch (2004) ressaltam que sobre $\delta$(OM) incidem restrições provenientes das etapas do processo de transposição didática, que se manifestam tanto nas OM ensinadas, quanto nas OM a ensinar e na OM aprendida.

A OM a ensinar constitui-se, segundo os autores, como um modelo praxeológico da matemática proposta no arquétipo curricular, cuja base de construção encontra-se em programas curriculares (documentos curriculares) e manuais didáticos (livros didáticos), assumindo uma forma de organização do estudo da matemática escolar, como evidenciado na Figura 5.

Figura 5 - Dinâmica transpositiva endógena das OM




Fonte: Bosch e Gascón (2004, p. 17)

Para cada instituição $\mathbf{I_n}$ haverá um nível hierárquico de OM (pontual, local, regional e global) a essas a associação de uma organização didática $\delta$(OM). Ao conjunto de OM pontuais formam uma OM local, e suas articulações, por sua vez, dão lugar a OM regionais. Gascón e Bosch (2004) consideram essa dinâmica intrainstitucional como endógena (Figura 5).

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), nos oferece um arcabouço teórico-metodológico bastante consistente no que concerne a análise das organizações do saber matemático e suas formas de difusão no âmbito institucional. Dessa forma, podemos assumir que o problema "matemático" pode ser modelado em termos de praxeologias, ou organizações praxeológicas que ganham "vida" no seio das organizações sociais através das instituições onde vivem e nas quais são produzidas.

Contudo, reiteramos que uma abordagem epistemológica da problemática do ensino das estruturas multiplicativas, de forma isolada, sem levar em conta aspectos de bastante relevância e igualmente pertinentes revelados pela abordagem cognitiva, se mostra, em nosso ponto de vista, incompleta. O que nos leva a considerar a relevância de uma dialética interinstitucional entre as duas dimensões, que no capítulo seguinte discorreremos com mais especificidade no próximo capítulo.

## 3 A INTEGRAÇÃO ENTRE O PEDAGÓGICO E O DIDÁTICO: AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS COMO ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS

Neste capítulo propomos uma dialética em termos de um elo entre as noções de estruturas multiplicativas e organizações praxeológicas. Para tanto, fundamentamos essa dialética no discurso de Gascón (2002) em que enfatiza a existência de uma dicotomia entre o "pedagógico", o "didático" e o "matemático".

Gascón, (2002) afirma que o problema da educação matemática[11], ao longo tempo, tem recorrido à pedagogia na busca de uma solução para estes, nos quais se alicerçam a modelos analíticos ingênuos, reducionistas e/ou incompletos. A pedagogia tende a trivializar o problema, no sentido de propor soluções ingênuas, imediatistas e até mesmo radicais, como por exemplo substituir (ou até mesmo excluir) o programa matemático por outro.

Para o supracitado autor, a pedagogia, ao longo de sua história, tem construído em seus discursos uma presumida dissociação entre o matemático, que se refere ao conteúdo do saber, e o pedagógico, que se refere às formas de se ensinar esse saber, que na perspectiva pedagógica independe deste. Para o autor, esse discurso legitima uma ideia amplamente aceita na cultura educacional de que o saber (no caso em questão o saber matemático) é tido como inquestionável e absoluto, o que desloca o problema para o âmbito pedagógico, bastando apenas modificar as referidas estratégias de ensino, tornando-o um problema meramente pedagógico.

Essa ideia tem sido amplamente difundida e legitimada na cultura educacional e, consequentemente, na cultura escolar, o que caracteriza a problemática docente[12] como uma perspectiva unidimensional, ou seja, toma apenas uma das dimensões inerentes à prática do professor como referência para um problema amplo, enquanto a outra permanece transparente e inquestionável. Nesses termos, a resposta elaborada pela pedagogia tende a considerar a dimensão pedagógica como "o problema", bastando apenas o professor modificar sua prática

---

[11] Gascón (2002) considera como uma problemática complexa que envolve nuances relativas às condições para a difusão do saber matemático, que pode ser sintetizado como problema de ensino e aprendizagem das matemáticas.

[12] Um problema docente constitui-se como uma questão que é inerente à prática docente como tal, que se manifesta em discurso circulantes na cultura escolar. Como por exemplo: "Como ensinar esse conteúdo?", "O que fazer para que esse conteúdo seja aprendido pelos alunos?".

e seus arcabouços metodológicos. O matemático, por exemplo, permanece inquestionável. Gascón (2002, p.12) reitera que esse processo

> (a) Começa por eliminar a disciplina matemática considerada como a causadora da alienação matemática dos alunos.
> (b) Postula, implicitamente, que o "matemático" (como "o linguístico" ou "o musical") não é questionável e que, portanto, pode pôr-se entre parêntesis.
> (c) Centra-se em modificar as estratégias de ensino que se supõe essencialmente independentes das questões a estudar. Ditas estratégias devem responder as perguntas seguintes: "O que ensinar?", "Quando ensinar?", "Como ensinar?" e "O que, como e quando avaliar?", segundo critérios preestabelecidos e independentes da disciplina a estudar (tradução nossa).

A resposta pedagógica ao problema do ensino e aprendizagem da matemática tem se mostrado fracassada. Segundo Gascón (2002), a supressão do "matemático" do problema docente acarreta um agravamento ainda maior, pois legitima discursos ingênuos de que "matemática é difícil" ou que "esse conteúdo matemático é complicado para os alunos".

Se faz necessário, de acordo Gascón (2002), um processo de integração entre o matemático e o que se considera pedagógico, que resulta no que o autor considera como *didatização* entre o pedagógico e o didático. Para o autor, esse processo se manifesta através de dois programas de investigação em Didática das Matemática: programa cognitivo e programa epistemológico.

Como anunciamos na introdução desse estudo, o enfoque ou programa cognitivo tende a perceber o problema matemático como uma condição inerente às estruturas cognitivas do sujeito face a apreensão de competências complexas (conceitos). Gascón (2002) afirma que a hipótese básica do programa cognitivo tende a abordar o problema da educação matemática a partir de análises de determinadas características individuais evocadas pelos sujeitos em meio a relações entre esses e o objeto matemático.  Desta forma, segundo o autor, o problema da educação matemática deve desenvolver e anunciar modelos que constatem a estrutura cognitiva do sujeito associada a um determinado conceito e o desenvolvimento do pensamento matemático deste.

Nesses termos, podemos considerar que as classes de situações das estruturas multiplicativas nos fornecem um subsídio pertinente no que tange as relações entre as ideias de multiplicação e divisão em meio a atividades situadas por classes de situações. É notável que a TCC desenvolve seu arcabouço teórico em um enfoque cognitivista, e na perspectiva de nossa investigação corresponde à dimensão pedagógica do problema. O objeto de estudo da TCC implica em compreender:

> 1 O desenvolvimento dos conhecimentos e das competências ao longo do tempo.
> 2 As conceituações identificáveis na atividade em situação: conceitos e teoremas em ação.
> 3 As relações entre essas conceituações em ação e os significantes linguísticos e simbólicos, possivelmente utilizados na classe.
> 4 Três princípios de incerteza e o desenvolvimento da racionalidade. (VERGNAUD, 2019, p.6)

A referida teoria, por tanto, nos fornece um quadro analítico dos processos cognitivos inerentes à apreensão de um ou vários conceitos pelos sujeitos. Assim, "o problema pedagógico" de nossa investigação, na perspectiva do programa cognitivo, situa-se nos processos de desenvolvimento de conceitualização de esquemas reativos às estruturas multiplicativas, que correspondem às noções que os sujeitos dispõem (ou devem dispor) em meio a situações que envolvem tanto a multiplicação quanto a divisão.

O enfoque cognitivista representa uma importante ruptura com a perspectiva pedagógica, na tentativa de buscar respostas ao problema da educação matemática. Gascón (1998) considera essa primeira ruptura como ponto de vista clássico. Contudo, para o supracitado autor, este ponto de vista apresenta limitações. Embora centrem-se na problemática do ensino e aprendizagem da matemática, o ponto de vista clássico não inclui em seus objetos de estudo noções como, por exemplo, *ensinar matemática* ou *aprender matemática*, apenas utiliza noções ainda transparentes[13] e inquestionáveis (GASCÓN, 1998).

Outra limitação é a excessiva centralização em análise de processos cognoscitivos emanados por alunos e/ou professores em seu objeto de estudo. Segundo Gascón (1998) essas análises são fortemente condicionadas aos fenômenos psicológicos evidenciados nos processos de ensino e aprendizagem e, por consequência, tendem a pôr em segundo plano os fenômenos didático-matemáticos. Ainda como uma das limitações do ponto de vista clássico está o ainda estatuto da inquestionabilidade do saber institucional, que em nosso caso tomamos como exemplo a transparência do saber matemático.

[13] No sentido de se tornarem "invisibilizados", deixados em segundo plano, não sendo observáveis.

Nesse ponto de vista, o saber não é tomado como objeto de questionamento, tampouco o seu processo de difusão e circulação. É até compreensível que questões como essas não encontram resposta no ponto de vista clássico, uma vez que seus modelos empírico-analíticos não dispõem de unidades de análise específicas para tal. Se tomarmos como exemplo o caso das estruturas multiplicativas, que são inerentes à TCC, veremos que os processos de ensino e aprendizagem das operações de multiplicação e divisão e suas respectivas relações, podem ser analisadas sob uma ótica de competências multiplicativas, que a teoria considera como estruturas multiplicativas. Contudo, embora a teoria leve em consideração que o saber matemático é um objeto de estudo e que consequentemente é um objeto cognoscível, não se questiona o que venha a ser "o multiplicativo", "a multiplicação" e/ou "a divisão", embora possua uma perspectiva implícita.

A essas e outras limitações inerentes a incompletude do ponto de vista clássico, a Didática das Matemáticas encontra respostas ao problema matemático pondo-o em questão no programa epistemológico, que tem como hipótese básica a abordagem do problema da educação matemática a partir da análise das práticas matemáticas que se desenvolvem nas diferentes instituições, não apenas nos docentes e nos alunos (GASCÓN, 2002). Nessa perspectiva, segundo Gascón (2002) o problema docente deve ser analisado a partir de um modelo epistemológico geral das matemáticas, assim como auxiliado por modelos locais em diferentes âmbitos, e em modelos que abarquem uma gênese e o desenvolvimento das respectivas organizações matemáticas.

Dessa forma, podemos afirmar que a TAD propõe um modelo geral da matemática em termos de organizações praxeológicas matemáticas, ou organizações matemáticas (OM). Em nossa investigação, podemos inferir que as classes de situações multiplicativas propostas por Vergnaud (2009) podem ser consideradas como tipos de tarefas inerentes ao campo multiplicativo, que podem possuir uma ou várias técnicas racionalmente justificadas por um ou vários discursos tecnológico-teóricos regidos por uma teoria geral.

Assim, as organizações matemáticas referentes às estruturas multiplicativas devem possuir, necessariamente, um bloco prático-técnico que abarca todas as situações do campo multiplicativo e um conjunto dos modos de saber-fazer essas situações, e outro tecnológico-teórico, que abrangem os discursos racionalizados que sustentam e instituem uma razão de ser à organização matemática. Nesse mesmo sentido, podemos afirmar que a gênese do desenvolvimento dessas organizações matemáticas ocorre no seio das instituições que ditam as condições e as restrições para que essa praxeologia possa viver.

O programa epistemológico, portanto, completa, em nosso ponto de vista, o problema da educação matemática, uma vez que procura questionar o próprio saber institucionalizado e sua organização no âmbito institucional. Para Gascón (2002), esse programa propõe abordar um problema partindo da necessidade de explicar as condições e restrições que as organizações didático-matemáticas sofrem em função de seu trânsito institucional.

Contudo, levar a cabo apenas os condicionantes inerentes à organização do saber sem considerar, também, os condicionantes relativos aos processos de aquisição e desenvolvimento das competências conceituais do saber, nos parece, de certa forma, incompleto, tendo em vista que organização da prática docente, necessita, também, de uma dimensão que abranja aspectos específicos do conteúdo do saber.

Um professor que, por exemplo, ao elaborar seu plano de ensino leva em consideração apenas os aspectos cognoscitivos da prática docente, como os processos de ensino que deve oferecer aos alunos para tornar o conteúdo ensinável e as condições de aprendizagem que seus alunos possuem ou necessitam alcançar, em detrimento de um questionamento do saber institucionalizado, leva a muitos dos equívocos que citamos anteriormente no ponto de vista clássico. Da mesma forma, ao elaborar uma proposta de ensino em que as condições prévias emanadas pelos alunos em meio às situações de ensino e aprendizagem não sejam consideradas, tornam a prática docente meramente hipotética.

Assim, ressaltamos a importância de uma didatização entre o pedagógico e o didático em termos dialéticos entre os enfoques cognitivo e epistemológico, nas quais não transpareça uma dimensão em detrimento da outra, mas sim complementaridade naquilo em que convergem. Para Almouloud (2007) é de vital importância considerar relações entre epistemologia e didática, nos quais evidenciem-se os processos de formulação e desenvolvimento dos conceitos matemáticos e as especificidades características das atividades matemáticas.

O professor é, de fato, um mediador entre o conhecimento e o aluno, e, para tanto, as condições fundamentais para o ensino e a aprendizagem dependem de, em um primeiro momento, suas representações em relação a sua área do conhecimento e, em outro momento, das representações que esse dispões sobre a prática de ensino e o processo aprendizagem em sua área do conhecimento (VERGNAUD, 2002).

A necessidade dessa dialética é fundamental na prática escolar, uma vez que, ao longo do processo educativo na escola, os estudantes devem adquirir, ao longo do tempo, competências gerais e específicas que são consideradas fundamentais, que necessitam, portanto, serem planificadas em termos de organizações e práticas de ensino. Essas competências podemos descrever em termos de níveis de aquisição conceitual ou competências relativas a um determinado saber que os sujeitos dispõem em seus esquemas em função da ação face as situações a que são condicionados.

A noção de conceito evidenciada por Vergnaud (1990, 1993, 1996) nos oferece uma visão analítica pertinente no que concerne à modelagem das competências fundamentais. Como vimos no capítulo 2, um conceito, é um tripleto, composto por três conjuntos de elementos fundamentais que são: o conjunto das situações que dão sentido a um conceito; o conjunto dos teoremas em ação e conceitos em ação, chamados invariantes operatórios; e o conjunto de representações que simbolizam o conceito.

Nesse sentido, tomando como exemplo o caso das estruturas multiplicativas, o conjunto dos conceitos multiplicativos remetem a uma composição quaternária nas quais abarcam o conjunto das situações multiplicativas, como o caso das situações dos isomorfismos e produtos de medida, os invariantes operatórios multiplicativos, que remetem aos conceitos e teoremas multiplicativos dispostos em ação e, por fim, as representações dos conceitos evocados. O grau de conceituação emanado pelos sujeitos em ação através de seus esquemas nos fornece subsídio à análise dos níveis de conceitualização dos sujeitos ou aos quais esses devem adquirir ao longo da vida escolar.

Evidenciamos, portanto, um elo conectivo entre as dimensões cognitiva, que pode ser tomada como pedagógica, e a epistemológica, que aqui tomamos como matemático, que consideramos como uma forma de didatização entre as competências multiplicativas o saber multiplicativo.

Assim, necessitamos primeiramente questionar, o que vem a ser considerado como saber multiplicativo como esse se difunde no âmbito institucional, para então pôr em questão a dimensão pedagógica. No capítulo seguinte encontraremos possíveis respostas ou mesmo indícios para tal.

# 4 O SABER SÁBIO MULTIPLICATIVO

Neste capítulo buscamos indícios de uma caracterização de um possível saber sábio relativo[14] às estruturas conceituais do campo multiplicativo em um âmbito institucional. Nesses termos, realizamos uma análise das organizações matemáticas dispostas em duas obras de matemática da literatura acadêmico-científica, estudadas academicamente como obras matemáticas em um curso de formação profissional inicial de professores à docência nos anos iniciais do ensino fundamental.

Compreendemos como saber sábio como aquele se difunde em um âmbito institucional e culturalmente validado (CHEVALLARD, 1985, 2005). Assim, podemos inferir que um saber sábio é relativo e condicionado às instituições em que este é produzido e onde esse circula. Se tomarmos como exemplo as instituições produtoras de conhecimento acadêmico-científico, consideraremos como saber sábio aquele que é produzido e difundido em instituições acadêmico-científicas, institucionalizados em obras da literatura acadêmica a qual são inerentes.

Nesse sentido, tomando como o caso das estruturas multiplicativas, consideramos como saber sábio multiplicativo aquele que é produzido no âmbito acadêmico-científico e que é difundido nas instâncias[15] do saber. O saber ensinável na escola, por exemplo, corresponde a uma dessas instâncias. Esse saber, contudo, sofre alguns afeiçoamentos que são necessários para que se torne ensinável. Esse processo, Chevallard (1985, 2005) chama de Transposição Didática.

Se tomarmos como referência as instâncias produtoras de conhecimento, que nos termos da transposição didática podemos considerá-las como instituições sábias (CHEVALLARD, 1985, 2005), existem formas específicas de se interpretar o saber tomado como referência. No caso do saber sábio multiplicativo, evidenciamos que competem às ideias que advêm do

---

[14] Para Chevallard (1985, 2005) o saber constitui uma certa relatividade, em função do âmbito institucional, não sendo tomado como uma referência absoluta.

[15] No sentido de Chevallard (1985, 2005) que remete aos níveis e etapas do processo de transposição didática.

campo das operações aritméticas elementares, em específico nas operações de multiplicação e divisão.

A primeira obra analisada é de autoria de Bento de Jesus Caraça, intitulada "Conceitos Fundamentais da Matemática", publicada no ano de 1951, pela Sá de Costa Editora, sendo o autor um renomado matemático e docente português, com relevantes obras na literatura matemática. Justificamos a escolha da obra pelo fato de termos realizado um estudo desta ainda em nível de graduação (licenciatura), na Universidade Federal do Pará, e por fazer parte de um conjunto de obras acadêmico-científicas estudadas nesse nível e nessa instituição. Para nós, uma análise dessa obra, nesse contexto, se mostra pertinente à presente pesquisa e até mesmo para futuras.

A obra de Caraça (1951), organiza as operações fundamentais em três graus (1º, 2º e 3º) e duas ordens de relações: diretas e inversas. Os graus são os níveis de complexidade das operações, partindo das mais elementares (adição e subtração) até as de maior nível complexo (potenciação, radiciação e logaritmação). As ordens de relação referem-se às operações relacionadas a cada uma, conforme ilustrado no quadro 3:

Quadro 3 - Agrupamento das operações fundamentais

| **GRAUS** | **ORDEM DE RELAÇÕES** | |
|---|---|---|
| | **DIRETA** | **INVERSA** |
| 1º | Adição | Subtração |
| 2º | Multiplicação | Divisão |
| 3º | Potenciação | Radiciação<br>Logaritmação |

Fonte: Adaptado de Caraça (1951).

A multiplicação é definida como uma operação direta de segundo grau, denotada simbolicamente por × ("vezes"), definida pelo autor como uma soma de parcelas iguais. A operação algorítmica a se realizar consiste em determinar o produto de através de uma soma de parcelas iguais expressa pela forma $a \times b = a + a + a + \ldots + a$.

A divisão, para o autor, é uma operação de 2º grau e inversa da multiplicação. A definição dessa operação está diretamente relacionada à ideia de inversão da multiplicação, que segundo Caraça (1951, p. 20), "consiste em dado o produto e um dos fatores, determinar o outro". É simbolicamente representada por $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, em que, obrigatoriamente, $b \neq 0$.

Nessa operação, $a$ é o dividendo, $b$ o divisor e $c$ o quociente. É, portanto "a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo" (CARAÇA, 1951, p. 22). Para que a divisão seja possível "deve o dividendo ser múltiplo do divisor, caso contrário, não existe número inteiro $c$ que satisfaça a $c \, . \, b = a$" (CARAÇA, 1951, p. 22). Nesse caso, segundo o autor, existirá um quarto número chamado "resto" ( $r < b$) que certificará a igualdade $c \, . \, b + r = a$.

A segunda obra analisada é de autoria de Aurélio Baldor, intitulada "Artmetica Teorico Practica", publicada em 1985, pela Compañía Cultural y Editora de Textos Americanos, sendo esta obra também estudada em cursos de formação profissional de nível médio para docentes no contexto educacional espanhol. Justificamos a escolha da obra pelos mesmos critérios da escolha da obra de Bento de Jesus Caraça, que anteriormente discorremos.

Baldor (1985), a multiplicação é uma operação cujo objeto consiste em composições de dados números chamados pelo o autor como *multiplicando* e *multiplicador*, para encontrar outro número, chamado *produto*, nas quais essa relação é a repetição tantas vezes o produto unitário do multiplicador pelo multiplicando. Por exemplo, multiplicar 5 (multiplicando) por 3 (multiplicador), significa encontrar um número (produto) que seja 3 multiplicado por 1 em repetição por 5 vezes, sob a notação $a \times b$. O autor, ainda, ressalta quatro relações entre o produto e o multiplicando, que são:

1) Se o multiplicador é o numeral zero (0), o produto entre o multiplicando e o multiplicador é 0, pois o multiplicador 0 indica uma ausência de unidade.
2) Se o multiplicador é o numeral 1, o produto entre o multiplicando e o multiplicador é o próprio multiplicando.
3) Se o multiplicador é > 1, o produto é maior que o multiplicando.
4) Se o multiplicador é < 1, o produto é menor que o multiplicando.

A última relação enumerada anteriormente, afirma o autor, deduz que o ato de multiplicar nem sempre significa aumentar a relação numérica. No âmbito dos $\mathbb{N}$, o autor afirma que a multiplicação pode ser compreendida como uma soma repetida do multiplicando tantas vezes indicar o multiplicador. Como por exemplo $6 \times 3$ significa somar repetidamente o multiplicando 6 por 3 vezes, na forma $(6 \times 3) = 6 + 6 + 6 = 18$.

Outra relação indicada pelo autor é multiplicação por uma unidade seguida por zeros, nas quais para multiplicar um número por outro com valores relativos iguais a zero é igual tantas vezes o valor relativo subjacente. Por exemplo, efetuar a multiplicação $5 \times 100$ é indicar a unidade 5 por 1 maior 100 vezes. O mesmo princípio aplica-se à multiplicação entre números terminados em zero. A multiplicação, também, para o autor, pode ser representada gráfica e geometricamente.

A divisão, segundo o autor, é definida como uma operação inversa da multiplicação, cujo objetivo consiste em determinar um outro fator *q* (quociente), dado o produto entre os outros dois fatores *D* e *d* (dividendo e divisor, respectivamente). Essa operação é representada pelo símbolo ÷. A divisão entre *D* (dividendo) e *d* (divisor) resulta em *q* (quociente). A divisão pode ser indicada em três modos: $D \div d = q$; $\frac{D}{d} = q$; $D/_{d}$.

Para o autor, dividir um número (dividendo) pelo outro (divisor), é encontrar outro número (quociente) que multiplicado pelo divisor resulte no dividendo. Por exemplo, dividir 15 por 5 é encontrar um número que multiplicado por 5 resulte em 15. Esse número é o 3, pois $15 \div 5 = 3$. Portanto, se $D \div d = q$ é porque $q \times d = D$. Isso presume que, também, segundo o autor, o dividendo *D* dividido pelo quociente *q* resulta no divisor *d*. Baldor (1985) afirma que a palavra quociente, etiologicamente, significa “quantas vezes. Assim, o quociente indica quantas vezes o dividendo contém o divisor. Na divisão $12 \div 6 = 2$, indica que o dividendo 12 está contém o divisor 6 duas vezes. Em sua forma simplificada, segundo o autor, a divisão consiste em determinar quantas vezes um determinado está contido em relação ao outro.

A divisão, para o autor, possui duas possibilidades, ser exata ou inexata/inteira. A divisão será exata quando existir um número *q* que multiplicado pelo divisor *d* resultará exatamente no dividendo *D*, pois, nesse caso, *D* é múltiplo de *d*. Nesses termos, a divisão $18 \div 3 = 6$, por exemplo, é exata, pois 18 é múltiplo de 3. No mesmo sentido, a divisão será inexata, quando não for possível determinar um número *q* que multiplicado pelo divisor *d* resulte exatamente seu dividendo *D*, pois *D* não é múltiplo de *d*. A divisão $25 \div 3$ não é exata, pois não existe um número *q* que multiplicado por 3 seja exatamente 25, ou seja, noutros termos, 25 não é múltiplo de 3.

Contudo, isso não indica que a divisão não seja possível, pelo contrário, determina-se um número *q* “próximo”, que o autor chama de quociente por defeito, em que *q* está contido em *D* na forma inteira aproximada possível. Tomamos novamente o exemplo $25 \div 3$, tem como quociente por defeito 8, porém, aplicando a regra da divisão, $8 \times 3 = 24$, logo $24 < 25$, então $25 - 8 \times 3 = 1$, sendo 1 o resíduo por defeito *r*. No mesmo sentido, a divisão entre um dividendo *D* e um divisor *d* poderá gerar um número *q* no qual $q \times d > D$, em que $q \times d - D = r'$, no qual *r’* é chamado de resíduo por excesso. No exemplo da divisão $25 \div 3$, o quociente por excesso é 9, pois $9 \times 3 = 27$, em que $27 > 25$, logo, $9 \times 3 - 25 = 2$, portanto, 2 é o resíduo por excesso $r'$. A soma dos resíduos (por defeito e por excesso) será igual ao divisor $d$. Exemplificando, tomando os anteriormente elencados, em que $r = 1$, $r' = 2$, $r + r' = d$.

O autor afirma, ainda, que para dividir um número inteiro por outro com valores relativos seguidos de zero[16], deslocam-se tantas casas decimais à esquerda de $D$ o quanto indicar as unidades de zero em $d$. Por exemplo, ao realizar a divisão $40 \div 10$, o quociente $q$ pode ser determinado deslocando-se uma casa decimal à esquerda de $D$ (pois $d = 10$, sendo uma unidade de zero), sendo, nessa divisão, $q = 4$. Outro exemplo é a divisão $3000 \div 100$, em que o quociente $q$ pode ser determinado deslocando duas casas decimais à esquerda de $D$ (pois $d = 100$, sendo duas unidades de zeros) sendo, nesse caso, $q = 30$. Isso se explica, segundo o autor, que os valores relativos às unidades de zeros é tantas vezes menor quanto o divisor $d$ indicar.

Tomando como referência o modelo proposto pela TCC, estas definições de multiplicação e divisão podem se configurar como possíveis conceitos e teoremas em ação (VERGANAUD, 1990, 1993, 1996) do saber neste âmbito institucional, que ao serem mobilizados em classes de situações dão um primeiro sentido conceitual (filiação) às ideias de multiplicação e divisão.

À TAD, podemos inferir a essas definições duas características. A primeira enquanto elemento tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 1999, 1998, 1999, 2001a), que fundamenta e justifica a técnica algorítmica da multiplicação e divisão respectivamente implementadas, e a segunda, como possíveis técnicas a essas operações.

Se considerarmos que as organizações sábias multiplicativas são produtos das instâncias produtoras de conhecimento, denotamos que essas organizações são instituições geratrizes, que condicionam a existência do saber, no caso de nosso estudo o saber sábio multiplicativo. Contudo, segundo Gascón e Bosch (2004) essas instituições devem contemplar explicitamente alguma organização praxeológica matemática. Nesses termos, inferimos que as organizações matemáticas multiplicativas são compostas por duas organizações matemáticas que, como anteriormente, remetem à praxeologias inerentes as operações de multiplicação e divisão.

---

[16] Nesse caso, segundo Baldor (1985), são relativos aos múltiplos de 10.

Essas organizações matemáticas são o cerne para a conceitualização multiplicativa, tendo em vista que condizem as condições às quais as atividades matemático-escolares devem encontrar sistematização e justificativa. São condicionantes essenciais para a construção de atividades de estudo com o objeto matemático e, também, referências às quais o docente elucida a construção e reconstrução de conceitos e teoremas que subjazem o percurso das aprendizagens dos alunos.

No entanto, essas organizações necessitam de uma forma explicita de desenvolvimento no âmbito escolar, de modo a contemplarem competências específicas necessárias para que os alunos desenvolvam os conceitos em seu percurso escolar. Para tanto, vermos na próxima seção que as condições às quais as organizações multiplicativas devem se assentar no âmbito curricular, de modo a transpor aos estudantes habilidades e competências específicas inerentes à área do conhecimento, sistematizados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

## 5 AS ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS MULTIPLICATIVA NO CURRÍCULO: A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo elaborado, em conjunto, pelos sistemas de ensino, comunidade escolar, acadêmica, política e sociedade civil, que define as aprendizagens essenciais que todos os discentes da educação básica que devem se desenvolver ao longo de seu percurso instrutivo de base. Em outros termos, constitui-se como um currículo prescrito ao qual um determinado sistema de ensino deve organizar todo o seu desenho curricular.

Nesses termos, utilizamos a BNCC como referência à análise da organização no âmbito curricular das organizações matemáticas multiplicativas. O referido documento estrutura-se em competências gerais que abrangem todas as etapas da educação básica, que compreendem a toda estrutura da base curricular. Cada etapa de escolaridade possui suas competências especificas. Para o ensino fundamental, a BNCC organiza os conteúdos de ensino em cinco áreas do conhecimento: Linguagens; Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humana e Ensino Religioso.

Em cada área do conhecimento, estão contidos os componentes curriculares, que são as formas de organização do saber a serem estudadas durante os níveis de cada etapa da educação básica. Às áreas do conhecimento são atribuídas competências específicas que devem ser promovidas ao longo dos nove anos do ensino fundamental. Os componentes curriculares possuem competências específicas, que de acordo com Brasil (2018, p. 28)

> [...] possibilitam a articulação horizontal entre as áreas, perpassando todos os componentes curriculares, e também a articulação vertical, ou seja, a progressão entre o Ensino Fundamental – Anos Iniciais e o Ensino Fundamental – Anos Finais e a continuidade das experiências dos alunos, considerando suas especificidades.

As competências específicas garantem a progressividade das experiências de aprendizagem entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental (BRASIL, 2018). Para garantir o desenvolvimento dessas competências, o documento apresenta um conjunto de habilidades, que são aprendizagens essenciais asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares. Essas habilidades estão diretamente relacionadas ao que o documento denomina de objetos de conhecimento, que, em outras palavras, são os conteúdos do saber selecionados pela noosfera (assim podemos dizer). Os objetos do conhecimento são organizados em unidades temáticas.

Para fins desse estudo, nossa análise centra-se na área de conhecimento da Matemática. Essa área do conhecimento, de acordo com a categorização do documento, possui um único componente curricular, a própria Matemática. Esse único componente curricular subdivide-se em cinco unidades temáticas que são: Números, Álgebra, Geometrias, Grandezas e medidas e, por fim, Probabilidade e estatística.

As organizações multiplicativas encontram vida na unidade temática Números. Essa unidade "tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades" (BRASIL, 2018, p. 266). Algumas competências para nosso objeto matemático também são dispostas na unidade temática Álgebra.

Nos anos iniciais do ensino fundamental, segundo o documento, a expectativa é de que os alunos resolvam problemas no domínio dos números naturais, e que envolvam diferentes significados às operações de multiplicação e divisão. O documento ressalta ainda a importância que deve ser atribuída às justificações e argumentos que os alunos devem dispor frente aos procedimentos de resolução dos problemas e as diferentes estratégias utilizadas em suas resoluções.

A aprendizagem na unidade temática Números, no que tange as quatro operações fundamentais, segundo o documento, não deve restringir-se às fórmulas algorítmicas, embora ressalte sua importância. As organizações multiplicativas estão inerentes, segundo o documento, nas operações de multiplicação e divisão, as quais apresentam-se como objetos de conhecimento da supracitada unidade temática ao longo de todas as séries iniciais.

O Quadro 4 evidencia que primeiro encontro dos alunos com as ideias de multiplicação e divisão durante o ensino fundamental deve ocorrer no 2º ano, num primeiro momento por meio de problemas que envolvem a noção de adição de parcelas iguais. As habilidades que devem ser desenvolvidas são as de resolução de problemas multiplicação por 2, 3, 4 e 5 a partir da ideia de soma de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais com o sem suporte de ilustrações ou matérias manipuláveis (BRASIL, 2018).

Quadro 4 – Competências da multiplicação e divisão para o 2° ano do Ensino Fundamental

| **UNIDADE TEMÁTICA** | **OBJETO DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADE** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| NÚMEROS | Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação). | (EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável. |
| | Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte. | (EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais. |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

Em um segundo momento, os alunos nessa fase devem reconhecer algumas relações multiplicativas, através do objeto de conhecimento “problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte” (BRASIL, 2018, p. 280), desenvolvendo habilidades de resolução e elaboração de problemas que envolvam essas noções, com ou sem ilustrações ou matérias manipuláveis, utilizando diversificadas estratégias (BRASIL, 2018).

Podemos afirmar que as situações iniciais para o trato das estruturas multiplicativas envolvem preliminarmente noções pré-operatórias que subjazem sentidos que podem ser atribuídos às operações a serem introduzidas levando em consideração conceitos anteriormente internalizados pelos alunos. No caso da introdução à multiplicação, deve se recorrer a fatos aditivos de base alicerçados na ideia de soma de parcelas iguais, corroborando assim uma transição do pensamento aditivo para o multiplicativo (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014). Essas situações envolvem relações multiplicativas de base na multiplicação (VERGNAUD, 1990, 1996, 2019). Já à divisão, recorre-se à ideia de “repartir igualmente para”, na qual se pré-estabelece uma concepção de que a divisão consiste em uma repartição de um todo em partes menores e de mesma quantidade.

Os registros dessas operações, para esses níveis de escolaridade segundo o documento, são entendidos como estratégias de resolução, às quais devem remeter a formas de representação variadas, dentre os quais destacam-se registros de representações pessoais com uso ou não de materiais manipuláveis. Para Ferreira e Nunes (2017), essas estratégias são representações pictóricas de composições aditivas que guardam em si uma conceitualização preliminar por parte dos estudantes sobre a operação de multiplicação.

No 3º ano do ensino fundamental de acordo com o documento, os alunos devem construir fatos fundamentais da multiplicação para que possam construir e utilizar os fatos básicos de multiplicação para o cálculo mental ou escrito da operação. Nessa fase, os alunos devem ser introduzidos aos diferentes significados de multiplicação e divisão e a divisão como repartição em partes iguais e medidas. À multiplicação envolvem significados de adição de parcelas iguais e configuração retangular, conforme o Quadro 5.

Quadro 5 - Competências da multiplicação e divisão para o 3° ano do Ensino Fundamental

| **UNIDADE TEMÁTICA** | **OBJETO DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADE** |
|---|---|---|
| **NÚMEROS** | Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação. | (EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito. |
| | Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida. | (EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.<br>(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição |

| | | |
|---|---|---|
| | | equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais. |
| | Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. | (EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes. |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

Os estudantes devem ter capacidade, ainda, de resolver e elaborar problemas de multiplicação pelos multiplicadores 2, 5, 4, 5 e 10, com significados, também, de adição de parcelas iguais e disposição de elementos e configuração retangular. A ideia de multiplicação como soma de parcelas remete a compreensão da relação entre multiplicando como parcela repetida e o multiplicador como número de vezes em que a parcela se repete (CARAÇA, 1951).

Devem, também, resolver e elaborar problemas de divisão entre números naturais de 0 a 10, com restos iguais ou diferentes de zero, com significados de e partição equitativa e de medida. Os significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte, são, também, objetos de conhecimento nessa fase. As habilidades a serem desenvolvidas, para tanto, são as de associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural qualquer por 2, 3, 4, 5 e 10 a essas ideias. Em todas essas habilidades, é fundamental, segundo o documento, a valorização das estratégias e registros pessoais dos alunos.

Para Vergnaud (1990, 1996, 2019) essas situações remetem a relações multiplicativas de divisão como partição, que levam à compreensão de repartir um todo em valores unitários de mesma quantidade e quotização, no qual determina-se cotas-partes de uma relação. Essas relações, para Magina, Santos e Merlini (2014), envolvem explicitamente relações quaternárias nas quais relacionam-se grandezas de tipos distintos.

No 4º ano, conforme descrito no Quadro 6, o estudo dos objetos matemáticos de multiplicação e divisão são aprofundados. Os alunos devem aprender a compor e decompor números naturais de até cinco ordens por potências de 10, para que possam compreender o sistema de numeração decimal, remetendo o estudante a uma compreensão de que, segundo

Baldor (1985), ao se multiplicar um número por outro de base 10, significa determinar uma unidade tantas vezes maior que a potência de base 10 indicada.

Quadro 6 - Competências da multiplicação e divisão para o 4° do Ensino Fundamental

| **UNIDADE TEMÁTICA** | **OBJETO DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADE** |
|---|---|---|
| **NÚMEROS** | Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10. | (EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo. |
| | Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais. | (EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo. |
| | Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, | (EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, |

| | | |
|---|---|---|
| | repartição equitativa e medida. | cálculo mental e algoritmos. (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

As propriedades das operações de multiplicação e divisão devem ser desenvolvidas para que os alunos possam, segundo o documento, utilizar as relações entre multiplicação e divisão de modo a ampliar e desenvolver suas estratégias de cálculo. O trabalho com problemas envolvendo os diferentes sentidos de multiplicação, como o de adição de parcelas iguais, organização retangular ou proporcionalidade, deve ser empreendido para que o aluno utilize estratégias diversificadas, desde estimativas a algorítmicas. Magina, Santos e Merlini (2014, p. 518) elencam alguns aspectos a serem observados

> (1) do ponto de vista didático, restringir multiplicação à adição de parcelas iguais repetidas implica considerar que multiplicação sempre aumenta, o que não é verdade em outro domínio numérico como, por exemplo, no campo dos números racionais (0,5 x 0,5 = 0,25);
> (2) (2) do ponto de vista conceitual, existe uma clara descontinuidade (ruptura) entre essas duas operações. No raciocínio aditivo as situações podem ser analisadas a partir de um único invariante operatório, qual seja, a relação parte e todo – as partes são conhecidas e se procura o todo ou, ainda, o todo e uma das partes são conhecidas e se procura a outra parte. Já nas situações envolvendo o raciocínio multiplicativo o que está em jogo é uma relação fixa (invariante operatório) entre duas quantidades, ou seja, toda situação multiplicativa envolve duas quantidades (de naturezas iguais ou distintas) e uma relação constante entre elas.

Os autores ressaltam, ainda, a importância de uma interação dos estudantes com um variado leque de situações para que possam se apropriar e expandir seus raciocínios em relação ao campo multiplicativo.

A divisão, segundo a BNCC, deve remeter aos significados de repartição equitativa e medida, para que possam resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor possua no máximo dois algarismos. Vergnaud (2019) ressalta que nem sempre a multiplicação implica em tornar um valor maior e a divisão remeter a um valor menor, essa relação dependerá da situação a qual é tomada como referência a operação.

O Quadro 7 mostra que o trabalho com as operações de multiplicação e divisão deve abranger também, nessa fase, de acordo com o documento, aspectos relacionados à unidade temática Álgebra.

Quadro 7 - Competências da multiplicação e divisão para o 4° ano na unidade temática Álgebra

| UNIDADE TEMÁTICA | OBJETO DE CONHECIMENTO | HABILIDADE |
|---|---|---|
| **ÁLGEBRA** | Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. | (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. |
| | Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero. | (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. |
| | Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão. | (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de |

| | | |
|---|---|---|
| | | multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

O trabalho com múltiplos de um número natural deve ser introduzido, para que os alunos identifiquem as regularidades nas sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. A sequência numérica recursiva de múltiplos de um número natural diferente de zero também deve ser desenvolvida, para que os alunos reconheçam e identifiquem regularidades em determinados números naturais nos quais a divisão resulta em restos iguais. As relações entre essas operações devem ser aprofundadas, para que reconheçam as relações inversas entre elas para que possam aplicá-las às resoluções de problemas multiplicativos.

Segundo a BNCC, no 5º ano, conforme o Quadro 8, as operações de multiplicação devem ser estudadas pelos alunos no domínio dos números racionais, num elo de interseção com os números naturais, para que percebam a representação finita de racionais por naturais. Para tanto, os alunos devem elaborar e resolver problemas de multiplicação e divisão de números naturais.

Quadro 8 - Competências da multiplicação e divisão para o 5° ano do Ensino Fundamental

| **UNIDADE TEMÁTICA** | **OBJETO DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADE** |
|---|---|---|
| **NÚMEROS** | Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais. | (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como |

| | | |
|---|---|---|
| | | cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. |
| | Problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?” | (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

Outra forma de representação da multiplicação na BNCC é através do raciocínio combinatório, no qual os alunos devem resolver e elaborar problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo. Para Magina, Santos e Merlini (2014) essas situações configuram-se como classes de situações de produto de medidas do tipo combinatória, as quais remetem à noção de produto cartesiano.

De acordo com o Quadro 9, em Álgebra as propriedades de igualdade devem ser desenvolvidas para que os estudantes compreendam as relações equitativas existentes permanecem entre membros mesmo quando multiplica ou dividir ambos por um mesmo número natural, e que as relações entre ambas operações auxiliam a determinação de outro elemento numérico que é desconhecido.

Quadro 9 - Competências da multiplicação e divisão para o 5° ano na unidade temática Álgebra

| **UNIDADE TEMÁTICA** | **OBJETO DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADE** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| **ÁLGEBRA** | Propriedades da igualdade e noção de equivalência | (EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.<br>(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. |
| | Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo<br>em duas partes proporcionais | (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.<br>(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a |

| | | |
|---|---|---|
| | | partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo. |

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

O raciocínio multiplicativo nessa unidade temática também deve ser apresentado aos estudantes por meio da ideia de proporcionalidade, intermediada por problemas de partição entre grandezas diretamente proporcionais, nos quais o aluno necessita compreender as relações existentes entre essas grandezas (Quadro 9). A ideia de razão também deve ser desenvolvida, por meio de problemas de partição um parta para duas proporcionais, para que o aluno compreenda noções de comparação multiplicativa. Para Vergnaud (2009) essas situações necessitam de uma compreensão clara entre as relações de mesma grandeza (relação escalar) entre grandezas distintas (função).

Em síntese, as sistematizações curriculares das organizações multiplicativas alicerçam-se em ideias relativas às operações de multiplicação e divisão, em função de nível de complexidade conceitual crescente e nas condições de desenvolvimento cognitivo dos estudantes. As noções multiplicativas iniciam-se no 2º ano, com a ideia de multiplicação alicerçada em ideias aditivas (adição de parcelas iguais) e que ao longo do 3ª ano essa ideia vai dando corpo aos fatos fundamentais da multiplicação (BRASIL, 2018), que é a formalização conceitual e algorítmica da operação propriamente dita com seus conceitos e procedimentos. A divisão, no 2º ano, de acordo com o documento curricular, está relacionada a noções de partes de um todo, como a ideia de metade e a terça parte. No 3º ano, por sua vez, é introduzida através da ideia de repartição em quantidades iguais ou partes de todo, como na fase anterior.

No 4ª e 5ª ano, de acordo com a BNCC, as operações são formalizadas com seus algoritmos e propriedades. Nesses níveis, os diferentes significados de multiplicação e divisão são introduzidos, como a ideia de configuração retangular proporcionalidade, repartição equitativa e medida. No 5ª ano o domínio dessas operações estende aos racionais e as operações desses números com naturais. Há conexões com a álgebra, através das ideias de múltiplos e divisores, equivalência e igualdade, a relação de inversão duma operação com a outra e a proporcionalidade direta.

Assim, condições institucionais impostas à difusão das organizações matemáticas multiplicativa no currículo prescrito remetem a organizações didáticas progressivas ao longo dos anos iniciais do ensino fundamental, partindo de noções elementares inerente à multiplicação e divisão às mais específicas em função do nível de complexidade crescente. Essa progressão é expressa através do que podemos considerar como uma construção linear dos conceitos multiplicativos.

Essas construções conceituais lineares remetem ao que Vergnaud (1990, 1996, 2011, 2019) considera como filiações, no sentido de um primeiro processo de filiação e acomodação de esquemas nas estruturas cognitivas do sujeito, e rupturas no sentido de um desequilíbrio entre esquemas novos e antigos, de modo que os estudantes reconfigurem seus esquemas em meio a novas situações para um novo processo de equilibração.

Nesse sentido, podemos afirmar que essa progressividade conceitual ocorre em termos de competências conceituais, que para Pastré, Mayen e Vergnaud (2019, p. 19) constituem-se em quatro definições distintas, porém complementares e interrelacionadas

> 1. A é mais competente que B se ele souber fazer algo que B não sabe fazer. Ou ainda: A é mais competente no tempo t' do que no tempo t se ele souber fazer o que não sabia fazer;
> 2. A é mais competente se ele agir de uma maneira melhor: mais rápida, por exemplo, mais confiável, ou ainda mais compatível com o modo de fazer dos outros...;
> 3. A é mais competente se dispuser de um repertório de recursos alternativos que lhe permitem adaptar sua conduta aos diferentes casos que podem se apresentar;
> 4. A é mais competente se for menos despreparado diante de uma nova situação, nunca encontrada antes.

É importante ressaltar que o desenvolvimento por competências não se restringe à mensuração de resultados, mas também a inclusão de uma análise das atividades em situação (OTERO et.al, 2014). Nesse sentido, as situações têm um papel significativo nos processos de construção e reconstrução do conhecimento dos estudantes. Essas situações remetem a um sentido de tarefas, ou seja, um tipo de ação a se realizar circunstanciado a um determinado contexto.

As circunstâncias são determinadas pelas prescrições curriculares (que aqui vimos em termos de competências conceituais), os contextos, por sua vez, se materializam na transposição do currículo à prática docente, que nas instituições escolares, na maioria das vezes, revelam-se nos manuais didáticos para o ensino dessas competências, que na próxima seção faremos um estudo, em específico, das organizações praxeológicas multiplicativas.

# 6 O CAMPO MULTIPLICATIVO NAS ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS DE ENSINO FUNDAMENTAL

Consideramos como manual didático, todo material com finalidades didáticas. Quando tomamos como referência a instituição de saber a ensinar, os manuais didáticos possuem especificidades que lhe dão um caráter intencional-instrutivo, cuja finalidade é a difusão de um saber apto a ser ensinado na instituição aos sujeitos que nela convivem, mediados por um diretor de estudo, sendo um tipo de texto do saber (CHEVALLARD, 1985, 2005) disponibilizado, com todas as condições e restrições impostas pelo processo de transposição didática, onde o saber é difundido. Tratam-se, em outros termos, dos livros didáticos disponíveis para o ensino dos componentes curriculares indicados no currículo.

Nesse contexto, tomamos como referência de análise de organizações de ensino dispostas em uma coleção de livros didáticos de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental aprovadas pelo PNLD 2019. A análise dos materiais nos permitiram evidenciar conceituações referentes às estruturas multiplicativas, na coleção de livros de didáticos de matemática para os anos iniciais Ápis, de Luiz Roberto Dante, da editora Ática, aprovada pelo PNLD para o ano de 2019, para utilização no trabalho pedagógico nos anos iniciais de escolarização no supracitado ano na Rede Municipal de Ensino de Belém, capital do estado do Pará, organizada e gerida pela Secretaria Municipal de Educação e Cultura de Belém (SEMEC).

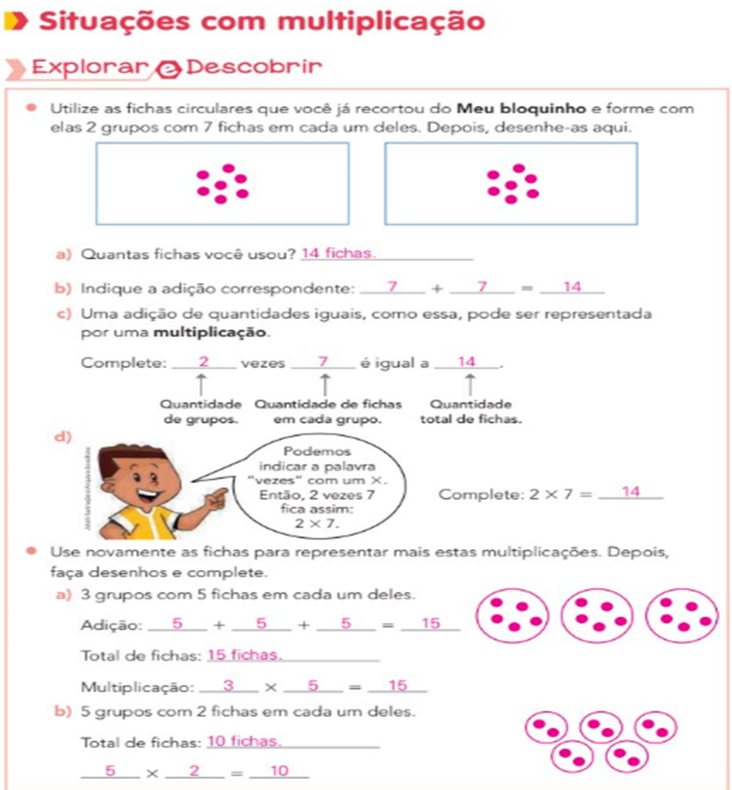
A escolha pela referida coleção é justificada, a priori, por condições logísticas e de livre acesso ao material, uma vez que dispomos de modo íntegro e facilitado do respectivo material. Ressaltamos que as condições e suas respectivas restrições, das difusões de praxeologias matemáticas do campo multiplicativo estarão circunstanciadas aos dados empíricos emanados do referido objeto de análise. A coleção está distribuída em cinco volumes, um para cada ano do ensino fundamental inicial (1º ao 5º ano). Cada volume, por sua vez, é dividido em oito unidades, em cada unidade, por conseguinte, são desenvolvidas as unidades temáticas e seus respectivos objetos de conhecimentos, assim como propostos na BNCC.

A análise da coleção, a partir dos enfoques da TCC revelados por Vergnaud (1990, 1993, 1996, 2009, 2011, 2019), Magina, Santos e Merlini (2014), nos permitiu evidenciar sete concepções multiplicativas que condicionam veementemente o estudo das praxeologias do campo multiplicativo dispostas no referido manual didático, que são: Multiplicação aditivo-multiplicativa; Multiplicação como produto entre fatores; Multiplicação como configuração retangular; Multiplicação como combinatória; Divisão como repartição; Divisão como medida e Proporcionalidade.

Ressaltamos que no manual do 1º ano, trabalham-se noções matemáticas basilares, como contagem, ordenação numérica e representações espaciais. Não observamos, portanto, o desenvolvimento de trabalho com as operações de multiplicação e divisão. O trabalho com as referidas operações inicia-se a partir do volume do 2º ano.

No do volume do 2º ano, as tarefas envolvem situações de cálculo multiplicativo nos quais os estudantes devem proceder, primeiramente em realizar uma adição de parcelas iguais, e em seguida deve ser sistematizada em forma de multiplicação. Nesse tipo de tarefa, o objetivo é encontrar uma quantidade ao todo a partir de um agrupamento de elementos com a mesma quantidade numérica, conforme a Figura 6.

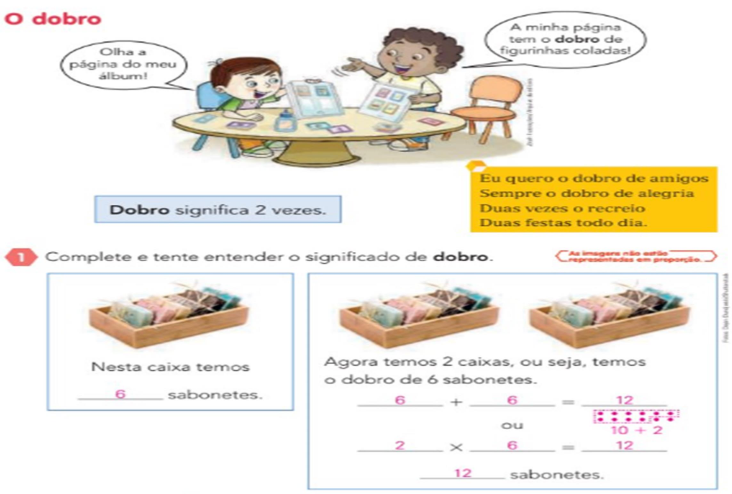
Figura 6 – Ideia de agrupamento




Fonte: Coleção Ápis Matemática 2º ano (DANTE, 2017, p. 135)

A ideia de dobro também é desenvolvida e consiste em situações nas quais determinam-se um número **n** vezes (duas ou três vezes) em relação a uma determinada quantidade, com o auxílio de ideias aditivas de multiplicação, conforme disposto na Figura 7.

Figura 7 – Ideia de dobro.




Fonte: Coleção Ápis Matemática 2º ano (DANTE, 2017, p. 141)

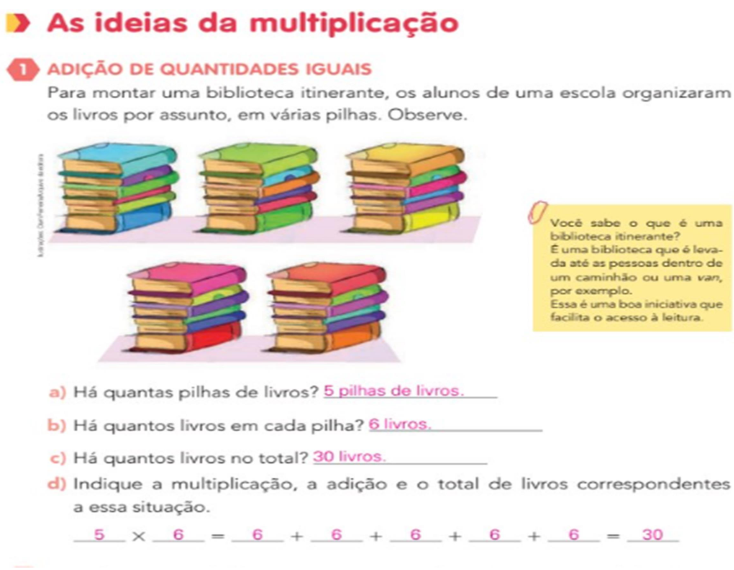
Essas situações remetem a uma concepção de multiplicação como uma composição aditiva e multiplicativa, na qual categorizamos como multiplicação aditivo-multiplicativa, que consiste em realizar atividades de agrupamento e composição de conjuntos com elementos em mesmo número de quantidades. O primeiro encontro com a referida operação remete à sua ideia matemática elementar como soma de parcelas iguais (CARAÇA, 1951). Nessas tarefas percebemos uma filiação relativa a conceitos do campo aditivo, remetendo a ideias de composição, nas quais duas medidas compõem-se em uma outra (VERGANAUD, 1996).

A ruptura com os conceitos aditivos não acontece de imediato, mas sim um rearranjo das referidas composições aditivas em termos de grupos ordenados com mesma quantidade que se repetem em função de uma constância preestabelecida, nas quais o conjunto dessas composições pode ser melhor representado por meio da multiplicação.

Para Magina, Santos e Merlini (2014) essas situações remetem a um processo de transição entre o pensamento aditivo para o multiplicativo. Essa situação vai ao encontro de uma das competências indicadas por Brasil (2018) nos quais é fundamental, nessa etapa, que o estudante apreenda os conceitos elementares multiplicativos face as estratégias variadas de representação algorítmica da operação, tendo como recurso objetos manipuláveis ou imagens.

No manual do 3º ano, a concepção aditivo-multiplicativa ainda prevalece, no entanto, os estudantes devem representar a multiplicação realizada numericamente na forma algorítmica usual da multiplicação (a × b = c). Uma atividade inerente a essa é a contagem multiplicativa, na qual enumeram-se agrupamentos de mesma quantidade, em números específicos de grupos, como podemos observar na Figura 8.

Figura 8 – Ideia de adição de parcelas iguais


As ideias da multiplicação

1 ADIÇÃO DE QUANTIDADES IGUAIS

Para montar uma biblioteca itinerante, os alunos de uma escola organizaram os livros por assunto, em várias pilhas. Observe.

Você sabe o que é uma biblioteca itinerante? É uma biblioteca que é levada até as pessoas dentro de um caminhão ou uma van, por exemplo. Essa é uma boa iniciativa que facilita o acesso à leitura.

a) Há quantas pilhas de livros? 5 pilhas de livros.

b) Há quantos livros em cada pilha? 6 livros.

c) Há quantos livros no total? 30 livros.

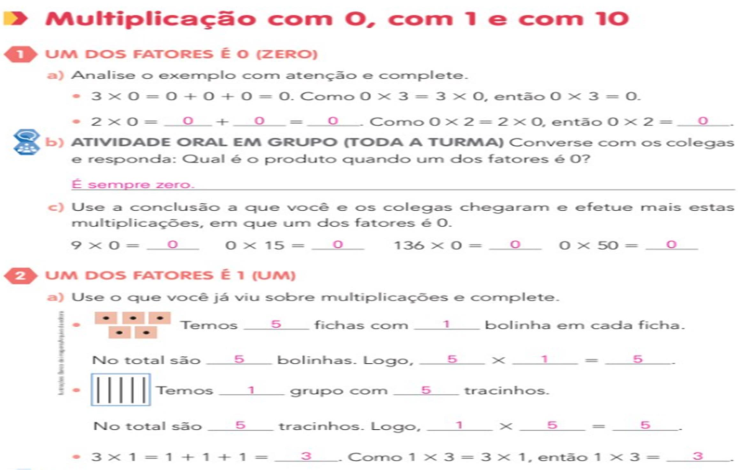
d) Indique a multiplicação, a adição e o total de livros correspondentes a essa situação.

5 × 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30

Fonte: Coleção Ápis Matemática 3º ano (DANTE, 2017, p. 121)

Algumas especificidades da multiplicação são desenvolvidas em atividades que na obra são considerados como “fatos multiplicativos”. Dentre esses ressaltam-se as multiplicações por 0, 1 e 10, conforme evidenciado na Figura 9.

Figura 9 – Multiplicação por 0 ou 1


Multiplicação com 0, com 1 e com 10

1 UM DOS FATORES É 0 (ZERO)

a) Analise o exemplo com atenção e complete.

- 3 × 0 = 0 + 0 + 0 = 0. Como 0 × 3 = 3 × 0, então 0 × 3 = 0.
- 2 × 0 = 0 + 0 = 0. Como 0 × 2 = 2 × 0, então 0 × 2 = 0.

b) ATIVIDADE ORAL EM GRUPO (TODA A TURMA) Converse com os colegas e responda: Qual é o produto quando um dos fatores é 0?

É sempre zero.

c) Use a conclusão a que você e os colegas chegaram e efetue mais estas multiplicações, em que um dos fatores é 0.

9 × 0 = 0 0 × 15 = 0 136 × 0 = 0 0 × 50 = 0

2 UM DOS FATORES É 1 (UM)

a) Use o que você já viu sobre multiplicações e complete.

- Temos 5 fichas com 1 bolinha em cada ficha.

No total são 5 bolinhas. Logo, 5 × 1 = 5.

- Temos 1 grupo com 5 tracinhos.

No total são 5 tracinhos. Logo, 1 × 5 = 5.

- 3 × 1 = 1 + 1 + 1 = 3. Como 1 × 3 = 3 × 1, então 1 × 3 = 3.

Fonte: Coleção Ápis Matemática 3º ano (DANTE, 2017, p. 137)

Segundo Baldor (1985), essas relações são justificadas pelo fato da multiplicação representar uma “repetição” do produto do multiplicando por 1 tantas, vezes o multiplicador indicar.

Na multiplicação por 10 é utilizada a ideia de configuração retangular com agrupamentos de 10 elementos. Significa, em outros termos, determinar 10 vezes 1 (disposto na vertical), o número de vezes repetidamente essa quantidade que determinar numericamente a disposição horizontal, conforme mostra a figura 10.

Figura 10 – Multiplicação por 10

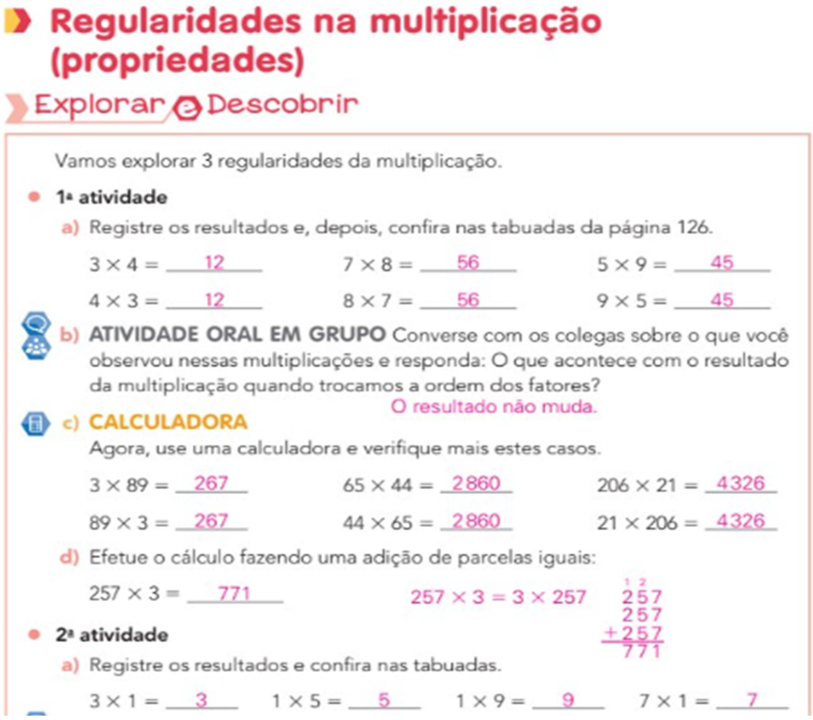

Fonte: Coleção Ápis Matemática 3º ano (DANTE, 2017, p. 138)

Essa é uma competência que estudante deve desenvolver ao longo dessa fase para que este possa apreender os diferentes significados à multiplicação, que segundo Brasil (2018) podem envolver tanto a concepção aditiva de parcelas iguais às singularidades de uma disposição retangular, nas quais as respectivas dimensões podem corresponder a elementos constitutivos da multiplicação (fatores).

Nesses termos, esses tipos de tarefas remetem a uma concepção de multiplicação como uma configuração retangular cujas medidas estão dispostas em quantidades na horizontal e na vertical, onde a medida envolve um produto entre uma dimensão pela outra (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014).

No manual do 4º ano, conforme disposto na Figura 11, são evidenciadas duas regularidades da multiplicação. A primeira atividade da respectiva figura mostra a existência de uma regularidade multiplicativa na qual alterando-se a disposição do multiplicando e multiplicador (fatores) o produto resultante deles não se altera.

Figura 11 – Propriedades da multiplicação



Regularidades na multiplicação (propriedades)

Explorar e Descobrir

Vamos explorar 3 regularidades da multiplicação.

- 1ª atividade

a) Registre os resultados e, depois, confira nas tabuadas da página 126.

$3 \times 4 =$ 12 $7 \times 8 =$ 56 $5 \times 9 =$ 45

$4 \times 3 =$ 12 $8 \times 7 =$ 56 $9 \times 5 =$ 45

b) ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Converse com os colegas sobre o que você observou nessas multiplicações e responda: O que acontece com o resultado da multiplicação quando trocamos a ordem dos fatores?

O resultado não muda.

c) CALCULADORA

Agora, use uma calculadora e verifique mais estes casos.

$3 \times 89 =$ 267 $65 \times 44 =$ 2860 $206 \times 21 =$ 4326

$89 \times 3 =$ 267 $44 \times 65 =$ 2860 $21 \times 206 =$ 4326

d) Efetue o cálculo fazendo uma adição de parcelas iguais:

$257 \times 3 =$ 771 $257 \times 3 = 3 \times 257$

$$\begin{array}{r} 257 \\ 257 \\ +257 \\ \hline 771 \end{array}$$

- 2ª atividade

a) Registre os resultados e confira nas tabuadas.

$3 \times 1 =$ 3 $1 \times 5 =$ 5 $1 \times 9 =$ 9 $7 \times 1 =$ 7

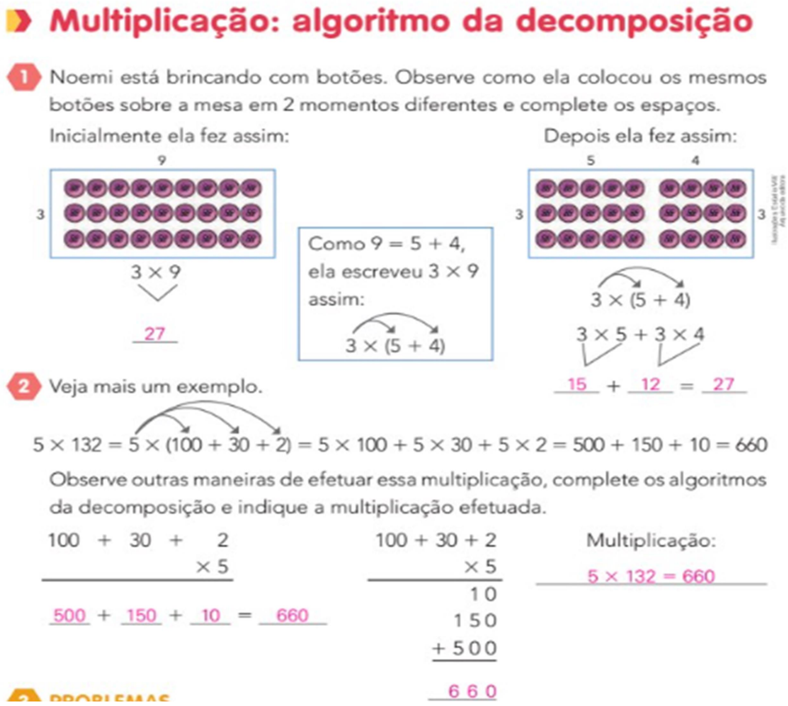
Fonte: Coleção Ápis Matemática 4º ano (DANTE, 2017, p. 131)

Matematicamente essa regularidade corrobora a propriedade comutativa da multiplicação, nas quais tendo-se dois fatores *a* e *b*, invertendo-se a ordem desses, seu produto *c* permanece o mesmo (BALDOR, 1985). A outra regularidade evidenciada é quando um dos fatores é multiplicado por 1, que resulta no próprio número multiplicado pelo último.

Essa regularidade encontra sentido em uma ideia já citada anteriormente, na qual de acordo com Baldor (1985), multiplicar significa resumidamente compor multiplicações por unidade (1) o número de vezes determinado pelo multiplicador. No caso da multiplicação por 1, significaria compor multiplicações $n \times 1$ apenas uma vez, o que resultaria nessa própria multiplicação.

Algumas técnicas algorítmicas da multiplicação são apresentadas nessa unidade. Uma das técnicas, conforme a Figura 12, é a da decomposição, que consiste em decompor um dos dois fatores em uma soma para então aplicar a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação, para assim obter o produto.

Figura 12 – Técnica da decomposição



**Multiplicação: algoritmo da decomposição**

1 Noemi está brincando com botões. Observe como ela colocou os mesmos botões sobre a mesa em 2 momentos diferentes e complete os espaços.

Inicialmente ela fez assim:

9

3

3 × 9

27

Como 9 = 5 + 4, ela escreveu 3 × 9 assim:

3 × (5 + 4)

Depois ela fez assim:

5 4

3 3

3 × (5 + 4)

3 × 5 + 3 × 4

15 + 12 = 27

2 Veja mais um exemplo.

5 × 132 = 5 × (100 + 30 + 2) = 5 × 100 + 5 × 30 + 5 × 2 = 500 + 150 + 10 = 660

Observe outras maneiras de efetuar essa multiplicação, complete os algoritmos da decomposição e indique a multiplicação efetuada.

100 + 30 + 2
× 5

500 + 150 + 10 = 660

100 + 30 + 2
× 5
1 0
1 5 0
+ 5 0 0
6 6 0

Multiplicação:
5 × 132 = 660

Fonte: Coleção Ápis Matemática 4º ano (DANTE, 2017, p. 135)

Para com Magina, Santos, Merlini (2014), do ponto de vista didático, considerar a multiplicação apenas como uma composição aditiva específica pode remeter a uma concepção de que o produto observado na referida multiplicação será sempre "um número maior", o que não necessariamente acontece quando, por exemplo, como frisam os autores, na multiplicação 0,5 × 0,5 = 0,25, que resulta em um produto menor que os fatores.

Nesse sentido, essas atividades remetem a uma concepção que consideramos multiplicação como um produto entre fatores, de fato, significando, assim, uma primeira ruptura com a ideia de adição de parcelas iguais.

Nos manuais do 3º, 4º e 5 º ano identificamos que uma abordagem à multiplicação como ideia de combinação de possibilidades, conforme disposto na Figura 13. As atividades são basicamente semelhantes em cada volume da coleção, variando apenas o nível de complexidade conceitual de uma série para outra conforme o educando apropria-se das ideias multiplicativas.

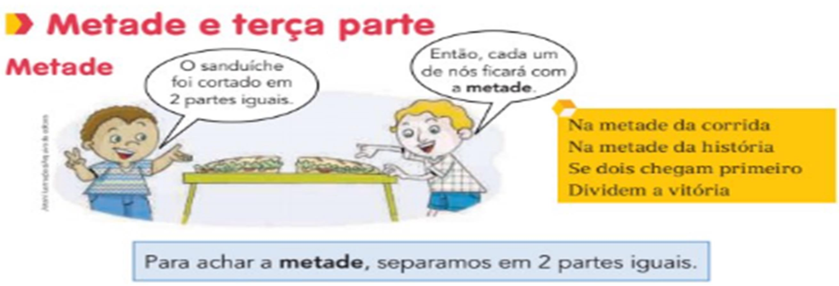
Figura 13 – Ideia de combinação


Fonte: Coleção Ápis Matemática 3º ano (DANTE, 2017, p. 123)

De acordo com a Figura 13, a finalidade dessas atividades é determinar as possibilidades de combinações entre os eventos ou escolhas entre determinados elementos, que pode ser representada pelo algoritmo da multiplicação **a** × **b** = **c**, onde **a** corresponde a uma quantidade de referência do evento, **b** o número de elementos para o evento e **c** o número de possibilidades concretas. Para Magina, Santos e Merlini (2014), essa concepção remete à uma ideia de produto cartesiano entre dois conjuntos respectivamente disjuntos.

A divisão tem suas primeiras noções no manual do 2º ano como ideia de repartição, a partir das noções de "metade" e "terça parte", respectivamente nas Figuras 14 e 15, que consistem em repartições equitativas dos elementos em **n** partes iguais.

Figura 14 – Ideia de metade




Fonte: Coleção Ápis Matemática 2º ano (DANTE, 2017, p. 153)

Figura 15 – Ideia de terça parte


Fonte: Coleção Ápis Matemática 2º ano (DANTE, 2017, p. 154)

À metade, repartições em duas partes iguais e à terça parte, três partes iguais. As atividades desse tipo consistem numa partição de elemento de um todo em **n** partes de mesma quantidade. As **n** partes são em 2 ou 3.

No manual do 3º ano a noção de repartir igualmente, conforme a Figura 16, consiste em redistribuir um todo em partes de mesma quantidade e valor numérico. O todo representa a quantidade total de um determinado número de objetos. As partes representam as quantidades menores as quais o todo foi redistribuído em unidades de mesma quantidade.

Figura 16– Ideia de repartir igualmente


Fonte: Coleção Ápis Matemática 3º ano (DANTE, 2017, p. 149)

Essa é a primeira filiação conceitual que os estudantes devem apreender acerca da divisão, que de acordo com Brasil (2018) os estudantes devem propor soluções para situações eproblema como essa, que envolvem a metade e terça parte. Essa ideia faz alusão ao que Baldor (1985) afirma genericamente sobre a divisão, como uma operação que consiste em determinar “quanta vezes” uma determinada quantidade contém a outra.

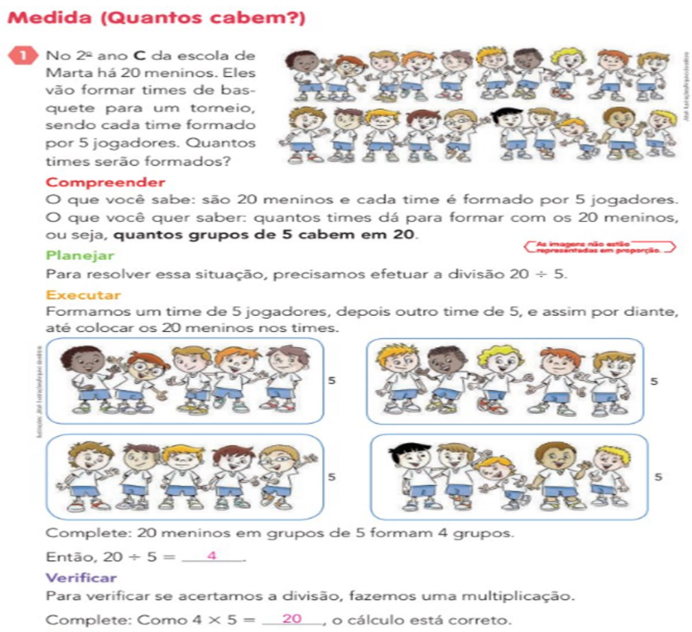
Significaria, no caso das tarefas supracitadas, determinar quantas vezes uma respectiva metade ($n/2$) está contida em uma quantidade $n$, da mesma forma e sentido identificar a contingência da terça parte ($n/3$) em relação a outra quantidade $n$.

Podemos afirmar que essas atividades remetem uma ideia de divisão como repartição nos quais um referido todo é resdistribuido em outras partes de mesmo valor unitário, que segundo Vergnaud (1990, 1993, 1996, 2011, 2019) são situações de divisão como partição, as primeiras as quais os estudantes defrontam-se.

Isso implica, contudo, em uma compreensão de que ao se dividir necessariamente remete-se a uma quantidade de valor numérico menor do que a quatidade disposta no todo, o que conceitualmente é equivocado, pois dividir significa encontrar um valor $q$ que multiplicado por outro valor $d$ resulta em $D$.

Uma segunda ideia de divisão é a de medida, de acordo com a Figura 17, que consistem em determinar um valor, que é considerado a medida, que represente a quantidade de conjuntos formados a partir de um todo referência.

Figura 17 – Ideia de medida


Medida (Quantos cabem?)

1 No 2º ano **C** da escola de Marta há 20 meninos. Eles vão formar times de basquete para um torneio, sendo cada time formado por 5 jogadores. Quantos times serão formados?

Compreender

O que você sabe: são 20 meninos e cada time é formado por 5 jogadores.
O que você quer saber: quantos times dá para formar com os 20 meninos, ou seja, **quantos grupos de 5 cabem em 20**.

As imagens não estão representadas em proporção.

Planejar

Para resolver essa situação, precisamos efetuar a divisão 20 ÷ 5.

Executar

Formamos um time de 5 jogadores, depois outro time de 5, e assim por diante, até colocar os 20 meninos nos times.

5 5 5 5

Complete: 20 meninos em grupos de 5 formam 4 grupos.

Então, 20 ÷ 5 = 4.

Verificar

Para verificar se acertamos a divisão, fazemos uma multiplicação.

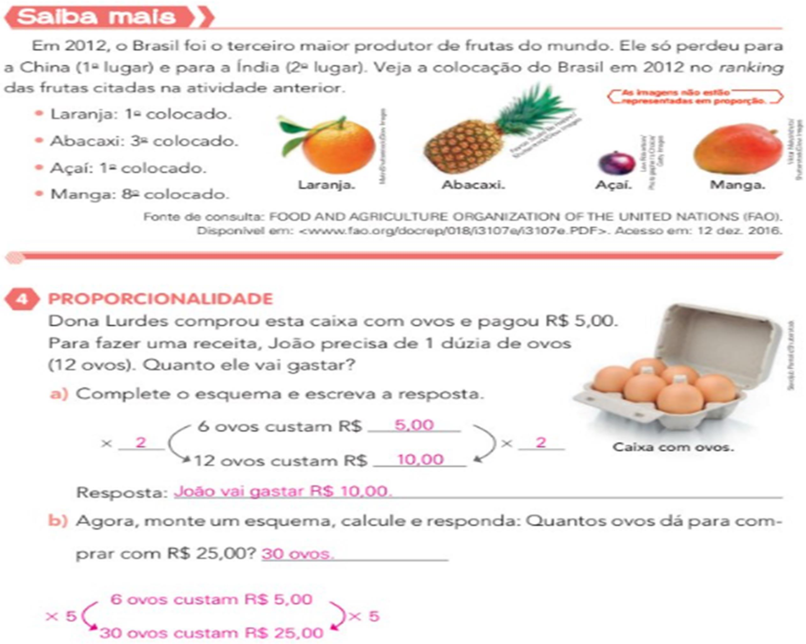
Complete: Como 4 × 5 = 20, o cálculo está correto.

Fonte: Coleção Ápis Matemática 3º ano (DANTE, 2017, p. 151)

Essa medida é determinada a partir de uma relação multiplicativa entre o dividendo e o divisor, no qual o quociente é um múltiplo do dividendo, que para Caraça (1951) e Baldor (1985) evidencia a relação operatória de inversidade existente entre divisão e multiplicação.

Nas coleções do 2º ao 5º ano é desenvolvida a ideia de proporcionalidade, conforme exemplificado na Figura 18, que consistem em relações quaternárias, nas quais determina-se uma escala na qual o valor é determinado através de um produto por um fator de proporcionalidade.

Figura 18 – Ideia de proporcionalidade




Fonte: Coleção Ápis Matemática 4º ano (DANTE, 2017, p. 125)

Essas situações consistem em proporções simples, que, de acordo com Magina, Santos e Merlini (2014), há uma relação proporcional entre quatro quantidades, com duas quantidades pertencendo a uma grandeza, e duas pertencendo a outra.

Nessas situações há duas relações implícitas, que segundo Vergnaud (1990, 1993, 1996, 2009) remetem, primeiramente, à ideia de função, nas quais uma quantidade de uma grandeza se relaciona diretamente a outra quantidade de outra grandeza, e, posteriormente, a uma relação escalar, nas quais uma quantidade de uma grandeza se relaciona com outra quantidade de mesma grandeza, a partir de uma constante escalar.

Podemos afirmar, portanto, que as OD do campo multiplicativo dispostas nos manuais didáticos constituem-se como modelos praxeológicos de referência (GASCÓN; BOSCH,

2004) no âmbito institucional $\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$. As OM dispostas compreendem-se em um nível hierárquico de tarefas em níveis de complexidade crescente.

As mais elementares englobam-se em organizações matemáticas pontuais de três principais tipos: produto, quociente e combinação. Nas OD, depreendem-se sete principais concepções multiplicativas, que subjazem o trabalho com o objeto matemático das estruturas multiplicativas em termos de apropriações progressiva dos conceitos de multiplicação e divisão em função do nível de complexidade cognitivo-conceitual, aos quais permitem uma análise sistemática dos processos de filiação e ruptura de conceitos pelo sujeito no campo conceitual multiplicativo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Objetivamos como o presente estudo realizar uma análise do campo multiplicativo no âmbito institucional, subjazendo sua dinâmica inerente no processo de transposição didática desde o saber institucional sábio às condições evidenciadas nas organizações didático-matemáticas, expressas no currículo nacional prescrito, evidenciados pela BNCC, até as praxeologias inerentes a uma coleção de manuais didáticos de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental no âmbito do sistema municipal de ensino de Belém-PA.

Os aspectos cognitivos referentes às ideias de multiplicação e divisão são compreendidos em termos de campos conceituais das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1990, 1996), através das classes de situações multiplicativas. As organizações de ensino podem ser concebidas como organizações praxeológicas (CHEVALLARD. 1998, 1999, 2002a, 2009), o que levou a assumir, as classes de situações multiplicativas como organizações praxeológicas locais com técnicas em potencial.

As condições institucionais, que consideramos como prescrições curriculares, estipulam que as estruturas multiplicativas são estudadas através de temas referentes à multiplicação e divisão, que devem ser estudados em unidades temáticas referentes aos domínios dos Números e da Álgebra, como ideias progressivas em função do nível de complexidade da etapa.

As situações multiplicativas referentes à multiplicação devem, num primeiro momento, ser fomentadas como adição de parcelas iguais, e, ao longo do processo de ensino-aprendizagem, como ideia de produto de medidas e relação proporcional, configurado a ideia de função que representa a multiplicação de fato. Às situações que envolvem divisão, a ideia de partição e distribuição de elementos em mesma quantidade. A relação de inversão de uma operação em relação à outra é estudada através da ideia de elemento desconhecido, no qual este pode ser o quociente ou o produto entre outros elementos conhecidos, dependendo do sentido disposto à classe de situação multiplicativa na qual se encontra.

Quanto às organizações didáticas multiplicativas dispostas numa coleção de manuais didáticos de matemática dos anos iniciais de escolarização, inerentes a um sistema de ensino municipal tomado como referência, observamos que as estruturas multiplicativas desenvolvem-se através de ideias inerentes à multiplicação e divisão, que perpassam por construções de ideias e noções elementares relativas a cada uma das operações, até as mais complexas e sofisticadas que envolvem o pensamento e o raciocínio multiplicativo. Assim, evidenciamos na supracitada coleção sete principais concepções multiplicativas (Multiplicação aditivo-multiplicativa, Multiplicação como produto entre fatores, Multiplicação como configuração retangular, Multiplicação como combinatória, Divisão como repartição, Divisão como medida e Proporcionalidade), que subjazem os processos de filiação e rupturas de conceitos apreendidos pelos estudantes.

Nesse estudo tomamos como umas das referências o currículo no âmbito da Base Nacional Comum Curricular, que corresponde atualmente no contexto educacional brasileiro como um documento balizador da qualidade do aprendizado nacional, bem como um instrumento normativo e indicador de conteúdos mínimos para as áreas do conhecimento.

Ressaltamos que a BNCC, enquanto documento norteador da prática pedagógica, necessita ser amplamente estudada e debatida em contextos propícios à formação docente, como também tomada como objeto de questionamento enquanto difusora de saberes institucionalmente construídos. É no currículo onde arquitetam-se as condições para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de maneira eficiente e circunscrita nos ideais e saberes fundamentais, que no manual didático materializa-se de forma a proporcionar um aprendizado significativo.

Os manuais didáticos também necessitam ser objeto constante de estudo e questionamento, tendo em vista que são obras nas quais subjazem certas concepções de práticas pedagógicas assim como interpretações variadas no que concerne aos conceitos e saberes que neles se difundem. O modelo teórico proposto pela TAD enfatiza, as formas como se compreendem e interpretam determinados saberes são relativos às instituições e condições as quais esses são produzidos e tomados como referência.

Sendo assim, o modelo aqui desenhado nesta pesquisa situa-se em uma instituição com condições e restrições que lhe são próprias, e que, por tanto, não deve ser tomado como referência absoluta e geral, mas sim como uma hipótese de trabalho relativa a um âmbito institucional com determinadas condições postas e restrições impostas.

Nesse sentido, vemos como fundamental a análise dos fenômenos didáticos a luz de enfoques que subjazam os referidos problemas, de modo a encontrar uma compreensão consistente e plausível aos determinados âmbitos.

Por tanto, nesses temos, uma análise aprofundada das relações inter e intra-institucional faz-se necessária de modo a identificar as possíveis condições que subjazem o referido objeto matemático no referido âmbito institucional e as prováveis restrições que este enfrenta no seu processo de difusão. Em um contexto de formação de professores, é necessário que nuances relativas às formas de organização curricular do saber bem como suas respectivas transposições à prática pedagógica sejam postas em questão, de modo a proporcionar uma ação docente cada vez mais objetiva, que contemplem os objetivos educacionais almejados e que proporcionem um ensino racionalizado e com sentido aos conteúdos aprendidos pelos educandos.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da matemática.** 1. ed. Curitiba: UFPR, 2007.

ALENCAR FILHO, E. **Teoría elementar dos números.** São Paulo: Nobel, 1981.

BALDOR, A. **Aritmética teórico practica.** Madrid: Compañía Cultural y Distribuidora de Textos Americanos. Códice, Ediciones y Distribuiciones, 1985.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.15, n.1, p. 1-28, 2013.

BICUDO, M.A.V. Pesquisa Qualitativa: significados e a razão que a sustenta. **Revista Pesquisa Qualitativa**. São Paulo, ano I, n. 1, pp. 07-26, 2005.

BICUDO, M.A.V. A pesquisa em Educação Matemática: a prevalência da pesquisa qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa: v.5, n.2, 2012.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GASCÓN, L. Science of Magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. In BOSCH, M. **Proceedings of the 4th Conference of the European Research in Mathematics Education**. 2006.

BRASIL, M.E.C. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1951.

CAULLEY, D.N. Document analysis in program evaluation. **Evaluation and Program Planning**. Portland. v.6, pp. 19-29, 1983.

CHEVALLARD, Y. **La transpotition didactique**: du savoir savant au savouir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

_________________. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**: l'approche anthropologique. La Rochelle. [s.n.], 29 p., julho, 1998.

_________________. **Organiser l'étude** : 1. Structures & fonctions. XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). La Pensée Sauvage: Grenoble, 2002a.

_________________. **Organiser l'étude** : 1. XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). La Pensée Sauvage: Grenoble, 2002b.

_________________. **La TAD face au professour de mathematiques.** Toulouse, [s. n.], 24 p., abril, 2009.

________________. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber ensenãdo Trad. Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique, 2005.

DELGADO, T.A.S.; CASABÓ, M.B.; PÉREZ, J.C. El Cuestionamiento Tecnológico-Teórico en la Actividad Matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación. **BOLEMA**. Rio Claro, v.27, n.47, 805-828, 2013.

DOWNTON, A. SULLIVAN.P.; Posing complex problems requiring ultiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. **Educational Studies in Mathematics.** [S.l.], v.95, n.3, p. 303-328, 2017.

FERNANDES, J.A.N. **ECOLOGIA DO SABER**: o ensino de limite em um curso de engenharia. 2015. 226 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

FERREIRA, J.W.C; NUNES, J.M.V. Representações de estudantes do 4º ano do ensino fundamental frente a problemas do campo multiplicativo: uma análise de resoluções. **Perspectivas da Educação Matemática**. Campo Grande, v. 10, n. 23, p. 624-644, 2017.

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**. V. 18/1, p. 7-34, 1998.

____________. El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. Havana, [s. n.], p. 11-25, 2003.

____________. Incidencia del modelo epistemológico de las matemátcas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa.** [S.l.], Vol.4. n. 2, p. 129-159, jul, 2001.

____________. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elementar. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa.** [S.l.], Vol.14. n. 2, p. 205-232, jun, 2011.

GASCÓN, J.; BOSCH, M. La praxeologia local como unidad de análisi de los processos didácticos. **Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.** 2004.

GASCÓN, J.; BOSCH, M.; BOLEA, P. ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas?. **Educación Matemática**. [S.l.], Vol.13. n. 3, p. 22-63, dez, 2001.

LEVAIN, J.P.; VERGNAUD, Gérard. Proportionnalite simple, proportionnalite multiple. **Grand N**. Grenoble, n. 56, p. 55-66, 1994.

MACIEL, V.B. Uma ‘Aritmética Para Ensinar’ no Curso Primário: Orientações nos Manuais para o Ensino de Multiplicação. **JIEEM**. v.11, n.1, p. 64-71, 2018.

MAGINA, S.M.P.; SANTOS, A.; MELINI, V.L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação**. Bauru, v. 20, n.2, p. 527-533, 2014.

NUNES, T.; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática:** números e operações numéricas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

OTERO, M.R. **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física.** 1. ed. Buenos Aires: Dunken, 2014.

PASTRÊ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD, G. A didática profissional. In: GRAUBER, Crislaine; ALLAIN, Olivier; WOLLINGER, P. (Org). **Didática profissional:** princípios e referências para a educação profissional. Florianópolis: Publicações do IFSC, 2019. p. 11-97.

PHILLIPS, B.S. **Pesquisa Social**. Rio de Janeiro: Agir, 1974.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: HIEBER, J. BEHR, B. **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston: NCTM, 1988.

______________. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [S. l.], v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

______________. Teoria dos Campos Conceituais. In: Nasser, L. **Anais do 1º Seminário de Internacional de Educação Matemática do Rio Janeiro**, p. 1-26, 1993.

______________. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean (dir.). **Didácta das matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: INSTITUTO PIAGET, p. 155-191, 1996.

______________. La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Conférence à la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti. In A. Bessot (Ed.), **Formation des enseignants et Étude Didatictique de l'Enseignant**. Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti, p.3-19. Grenoble: CNRS/ INPG/UJF, 2002.

______________. **A criança, a matemática e a realidade.** 3. ed. Curitiba: UFPR, 2009.

______________. Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder?. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**. [S. l.] v. 9, n. 1, p. 5-28, 2019.