



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

NIELSON VELOSO MEDEIROS

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS COM USO DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS NA
ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM MANCAIS DE ESCORA CIRCULARES**

Orientador: Prof. João Nazareno Nonato Quaresma

**BELÉM – PARÁ – BRASIL
DEZEMBRO
2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

NIELSON VELOSO MEDEIROS

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS COM USO DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS NA
ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM MANCAIS DE ESCORA CIRCULARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química do Instituto de Tecnologia da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Desenvolvimento de Processos

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma

**BELÉM – PARÁ – BRASIL
DEZEMBRO
2014**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Medeiros, Nielson Veloso, 1977-

Soluções híbridas com o uso de transformadas integrais na análise do escoamento em mancais de escora circulares / Nielson Veloso Medeiros. - 2014.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Belém, 2014.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Mancais. 3. Transformada integrais. 4. Metodos de simulação. 5. Fluidos. I. Título.

CDD 22. ed. 620.106

NIELSON VELOSO MEDEIROS

SOLUÇÕES HÍBRIDAS COM O USO DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS NA ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM MANCAIS DE ESCORA CIRCULARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química do Instituto de Tecnologia da Universidade Federal do Pará, com parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química.

Área de Concentração: Desenvolvimento de Processos

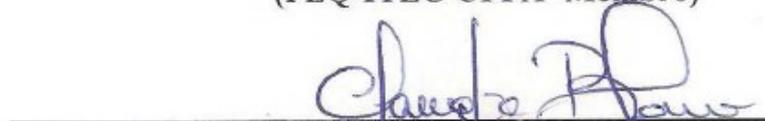
DATA DA AVALIAÇÃO: 15 / 12 / 2014.

CONCEITO: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
(FEQ-ITEC-UFPA-Orientador)


Prof. Dr. Clauderino da Silva Batista
(FEQ-ITEC-UFPA- Membro)


Prof. Dr. Cláudio José Cavalcante Blanco
(FAESA-ITEC-UFPA- Membro)


Prof. Dr. Jader Riso Barbosa Junior
(DEM - CT- UFSC - Membro)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Cibele Britto, aos meus filhos Cauã e Davi Medeiros, ao meu enteado Vitor Guerreiro, aos meus pais José Adilson e Ieda de Fátima Medeiros e aos meus irmãos Thatiana e Bruno Medeiros, os quais sempre me motivaram incansável e imensuravelmente para as conquistas em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus**, por ter possibilitado minha existência e por está sempre presente comigo para tornar possível a finalização de mais esta etapa da minha vida e também pela oportunidade de ter-me colocado diante de algumas pessoas que, além de especiais, foram fundamentais para o cumprimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor **João Nazareno Nonato Quaresma**, pela capacidade de orientação que tornou possível a realização desta dissertação; pela confiança em mim depositada a desenvolver este trabalho e pela sua extrema paciência, orientação, apoio, dedicação e companheirismo para alcançar os objetivos da mesma e também por ter despertado em mim o gosto pela ciência.

Ao Professor Doutor **Claudio José Cavalcante Blanco** pelas valiosas contribuições dadas para realização deste trabalho.

Aos Prof. MSc. **Evaldiney Monteiro** pela contribuição durante o curso.

Ao Prof. Dr. **Emanuel Negrão Macêdo** pela transmissão de novos conhecimentos e experiências profissionais durante o curso.

Ao Prof. Dr. **Célio Augusto de Sousa** pela oportunidade de obtenção de novos conhecimentos em sua área de atuação profissional.

Aos meus pais **José Adilson Noronha de Medeiros e Ieda de Fátima Veloso Medeiros**, responsáveis pela minha criação e educação e que muito contribuíram para minha formação pessoal e acadêmica;

Aos meus irmãos **Thatiana Veloso Medeiros e Bruno Veloso Medeiros** pela força e incentivo durante a realização deste trabalho;

À minha esposa **Cibele Jivatmam Guerreiro Holanda Britto**, ao meu filho **Cauã Guerreiro Britto Medeiros** e ao meu enteado **Vitor Breno Guerreiro Silva** pela extrema paciência, força e incentivo durante a realização desta dissertação;

Aos colegas **Clauderino, Carlos Célio, Cleber, Elizeu, Jean, Wanderson, Nelson, Halene e Rui**, pelas amizades, pelos auxílios e colaborações na execução deste trabalho;

À bibliotecária do LEQ/FEQ/UFGA, Sra. Maria Ivone da Costa por repassar a normalização deste trabalho.

Ao Sr. Ribamar Montoril pela atenção, boa vontade e serviços prestados nos momentos de urgência e necessidade.

À **CAPES** pela concessão da bolsa de estudos.

EPIGRAFE

Mas há outra razão que explica a elevada reputação das Matemáticas, é que elas levam às ciências naturais exatas, certa proporção de segurança que, sem elas, essas ciências não poderiam obter. “Albert Einstein”

RESUMO

O presente trabalho explora a modelagem e solução da equação de Reynolds e simulação do problema de lubrificação hidrodinâmica em mancais de escora circulares com sapatas de Rayleigh e sapata fresada. A modelação matemática do problema de escoamento hidrodinâmico em mancais com a consideração dos termos inerciais centrífugos produz uma versão modificada da genérica Equação de Reynolds, denominada equação de Reynolds com termos inerciais. Esta equação é solucionada pelo método da técnica de transformada integral generalizada (GITT), onde este transforma a equação de Reynolds gerando um sistema de equações ordinárias, infinito e não-linear para a obtenção da solução analítico-numérica do campo de pressão do filme fluido, da carga suportada e da potência consumida pelo mancal, onde estes parâmetros de desempenho dependem da geometria adotada para o mancal. Assim, quatro algoritmos foram originados pelo sistema transformado, sendo que a diferença entre eles são as geometrias escolhidas para os mancais, porém todos os códigos computacionais fizeram uso da forma tradicional da GITT. Todos os códigos foram implementados em linguagem FORTRAN 90/95 e solucionados através da rotina BVPFD da biblioteca do IMSL (1987). A solução para a equação de Reynolds do referido trabalho expressa por meio do potencial de transferência adimensional $P(r,\theta)$, que foi encontrado para as diversas combinações dos coeficientes adimensionais que constituem os termos desta equação. Foi verificada a aplicabilidade da técnica através da comparação dos resultados provenientes do uso da GITT aos valores encontrados pelo método de volumes finitos (MVF) nos trabalhos publicados por Blanco e Prata (1998, 2014). Foi verificado o comportamento dos campos de pressão variando-se os tamanhos da série obtidos pelos códigos computacionais. Os resultados apresentam razoáveis convergências.

Palavras-chave: Simulação; Modelagem; Escoamento; Mancal de Escora.

ABSTRACT

This paper explores the modeling and solution of the Reynolds equation and simulate the problem of hydrodynamic lubrication in bearings of circular anchor shoes with Rayleigh and milled pad. Mathematical modeling of the problem of hydrodynamic flow in bearings with consideration of centrifugal inertial terms produces a modified generic equation Reynolds called Reynolds equation with inertial terms version. This equation is solved by the generalized integral transform technique (TTIG) method, where it transforms the Reynolds equation system for generating a common, endless and non- linear equations for obtaining the analytical and numerical solutions of the field of fluid film pressure, the charge and power consumed by the bearing, where these performance parameters depend on the geometry adopted for the bearing. Thus, four algorithms were originated by the transformed system, and the difference between them are the geometries chosen for the bearings, but all computer codes made use of the traditional way of TTIG. In all codes were implemented in Fortran 90/95 language and solved by routine BVPFD of IMSL (1987) library. The solution to said Reynolds equation expressed using the work dimensionless transfer potential $P(r,\theta)$ that was found for various combinations of dimensionless coefficients that constitute the terms of this equation. The applicability of the technique was verified by comparing the results from the use of GITT the values found by the finite volume method (FVM) in a paper published by Blanco e Prata, 1998 e 2014. Behavior of pressure fields was verified by varying the sizes of the series obtained by computer codes. The results show reasonable convergence.

Keywords: Simulation; Modeling; Runoff; Bearing anchor.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Compressor hermético de refrigeração: (a) vista externa, (b) vista interna e (c) partes internas, (d) elementos do mancal de escora, (e) Malhas existentes no mancal de escora	19
Figura 1.2	Mancal de escora utilizado em compressores de refrigeradores domésticos	21
Figura 1.3	Representação da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular	22
Figura 1.4	Representação da sapata fresada para um mancal de escora circular	22
Figura 3.1	Esquema geométrico das dimensões do mancal de escora	29
Figura 3.2	Domínio de Solução Radial e Circunferencial	35
Figura 4.1	Desenho da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular com 4 ressaltos	48
Figura 4.2	Desenho da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular com 8 ressaltos	49
Figura 4.3	Desenho da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular com 16 ressaltos	50
Figura 4.4	Desenho da sapata fresada para um mancal de escora circular	51
Figura 5.1	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal com 4 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	60
Figura 5.2	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal de 4 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	61
Figura 5.3	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal de 8 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	62
Figura 5.4	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal com 8 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	63
Figura 5.5	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal de 16 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	64
Figura 5.6	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$)	65

	para um mancal de 16 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	
Figura 5.7	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal fresado, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	66
Figura 5.8	Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal fresado, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais	67
Figura 5.9	Comparação dos Métodos MVF (Blanco et. al, 2014) e GITT, da distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal de escora com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, na posição 11,875 mm	69
Figura 5.10	Campo de pressão ao longo da malha XY apresentado em um intervalo de 0-90 graus: (a) Mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos; (b) Mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos; (c) Mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos; (d) Mancal com sapata fresada	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Quadro esquemático dos procedimentos metodológicos de solução	41
Tabela 5.1	Parâmetros Geométricos dos Mancais de Escora usados na simulação	53
Tabela 5.2	Parâmetros Operacionais dos Mancais de Escora usados na simulação	54
Tabela 5.3	Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 7,36 \mu\text{m}$ para um mancal com 4 ressaltos	55
Tabela 5.4	Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 9,04 \mu\text{m}$ para um mancal com 8 ressaltos	56
Tabela 5.5	Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 10,45 \mu\text{m}$ para um mancal com 16 ressaltos	57
Tabela 5.6	Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 10,45 \mu\text{m}$ para um mancal com 16 ressaltos	58
Tabela 5.7	Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 7,36 \mu\text{m}$ para um mancal fresado	59
Tabela 5.8	Potência Consumida e h_1 em função do número de ressaltos do mancal	68

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

$\mathbf{A}(t, \mathbf{y})$	Coeficiente da matriz no sistema
A_{ij}	coeficiente definido na equação
B_{ij}	coeficiente definido na equação
C_{ij}	coeficiente definido na equação
D_{ijk}	coeficiente definido na equação
$d(\mathbf{x})$	coeficiente da equação do termo de dissipação linear
d_{fr}	diâmetro da fresa, mm
E_i	coeficiente definido na equação
F_c	força de cisalhamento, N
F_i	coeficiente definido na equação
$f(\mathbf{x})$	potencial de distribuição inicial
G_{ij}	coeficiente definido na equação
H	espessura do filme de óleo lubrificante, μm
H_{ij}	coeficiente definido na equação
h_1	espessura do filme de óleo lubrificante entre o rebaixo e a parte móvel do mancal, μm
h_2	Espessura do filme de óleo lubrificante entre o ressalto e a parte móvel do mancal, μm
I_{ijk}	coeficiente definido na equação
J_i	coeficiente definido na equação
$k(\mathbf{x})$	coeficiente da equação do termo de difusão
K_i	coeficiente definido na equação
N	número de termos das expansões
N_i	Norma
NP	número de pontos nodais na malha
N_c	número de pontos nodais na direção θ , utilizados na discretização do domínio de solução da equação de Reynolds
N_r	número de pontos nodais na direção r , utilizados na discretização do domínio de solução da equação Reynolds; número de ressaltos do mancal de escora
O	Origem do sistema cilíndrico de coordenadas $r\theta z$

$P(r, \theta)$	potencial de distribuição do campo de pressão, N/m^2
$P(\mathbf{x}, t)$	termo-fonte na equação
P_c	potência consumida pelo mancal, W
P_i	pressão adimensional transformada na direção radial
R	eixo polar do sistema de coordenadas $r\theta z$, relação entre as malhas
r_1	raio interno do mancal, mm
r_2	raio externo do mancal, mm
T	variável representante do tempo
$T(\mathbf{x}, t)$	potencial de distribuição
$u(\mathbf{x}, t, T)$	vetor velocidade do termo convectivo
V_r	velocidade do escoamento de óleo na direção r , m/s
V_z	Velocidade do escoamento de óleo na direção z , m/s
V_θ	Velocidade do escoamento de óleo na direção θ , m/s
W	carga suportada pelo mancal, N
$w(\mathbf{x})$	Coefficiente da equação transiente
\mathbf{X}	vetor posição no sistema
X	variável independente utilizada na apresentação da regra de Leibnitz
$y(t)$	vetor solução do sistema
Z	eixo axial do sistema de coordenadas $r\theta z$

Símbolos Gregos

A	variável independente utilizada na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais
$\alpha(x)$	coeficiente da condição de contorno
$\beta(x)$	coeficiente da condição de contorno
Δ	Variação
$\phi(\mathbf{x}, t)$	função fonte do contorno
Φ_1, Φ_2	limites de integração utilizados na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais

SUMÁRIO

RESUMO.....	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	xiii
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	17
1.1. ABORDAGEM GERAL DO TEMA	17
1.2. MOTIVAÇÃO	18
1.3. OBJETIVOS	22
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	22
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1. TRIBOLOGIA - BREVE HISTÓRICO	23
2.2. SIMULAÇÕES EM MANCAIS	24
CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	28
3.1. O PROBLEMA ESTUDADO	28
3.2. FORMULAÇÃO DO MODELO FÍSICO	28
3.3. HIPÓTESES UTILIZADAS	29
3.4. EQUAÇÃO DE REYNOLDS	29
3.4.1. Equações de Navier-Stokes	29
3.4.2. Condições de Contorno.....	33
3.4.3. Cálculo da Carga Suportada pelo Mancal.....	34
3.4.4. Cálculo da Potência Consumida por Atrito.....	34
CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	36
4.1. TÉCNICA DE TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	36
4.1.1. Formalidades da GITT	37
4.2. PROBLEMA AUXILIAR	41
4.3. DEFINIÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA	43
4.4. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA EDP	43

4.5. CÁLCULO DO POTENCIAL $P(r, \theta)$	46
4.6. ALGORITMO COMPUTACIONAL	47
4.7. GEOMETRIAS DOS MANCAIS UTILIZADOS	48
4.7.1. Mancal de Escora Circular com Sapata de Rayleigh de Quatro Ressaltos	48
4.7.2. Mancal de Escora Circular com Sapata de Rayleigh de Oito Ressaltos	49
4.7.3. Mancal de Escora com Sapata de Rayleigh Circular de Dezesesseis Ressaltos ...	49
4.7.4. Mancal de Escora Circular com Sapata Fresada	50
CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
5.1. INTRODUÇÃO	52
5.2. O PROBLEMA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	52
5.2.1. Análise de Convergência para GITT	53
5.2.2. Campos de Pressão	60
5.2.3. Comparação GITT vs MVF	68
CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
6.1. INTRODUÇÃO	71
6.2. CONCLUSÕES	71
6.3. SUGESTÕES	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
APÊNDICE A	77
A.1 – DEMONSTRAÇÃO DA FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	77
APÊNDICE B	87
B.1 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE A_{ij}	87
B.2 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE B_{ij}	88
B.3 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE C_{ij}	90
B.4 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE D_{ijk}	91
B.5 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE E_i	93
B.6 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE F_i	95
B.7 – VALORES PARA h :	97

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta uma abordagem geral e simplificada do tema, caracteriza tanto a motivação quanto os objetivos responsáveis para a elaboração deste trabalho, mostrando a importância da equação de Reynolds para o estudo de mancais de escora. Ressalta também a estrutura da presente dissertação.

1.1. ABORDAGEM GERAL DO TEMA

Os efeitos favoráveis ou não ocasionados pelo atrito são provenientes do movimento relativo entre duas superfícies rígidas em contato através de suas rugosidades e esforços compartilhados. No entanto, para o referido estudo considera-se o atrito não desejável, pois este está associado à perda de energia. Portanto, a tendência é diminuí-lo, principalmente quando se faz uso da lubrificação (substâncias utilizadas entre duas superfícies em contato), onde esta tem a função de transformar o atrito sólido entre as superfícies, em atrito fluido, entre uma superfície sólida e um fluido, conseqüentemente o atrito fluido é menor que o atrito sólido. Com isto, há também, uma redução na troca das peças desgastadas e substituídas.

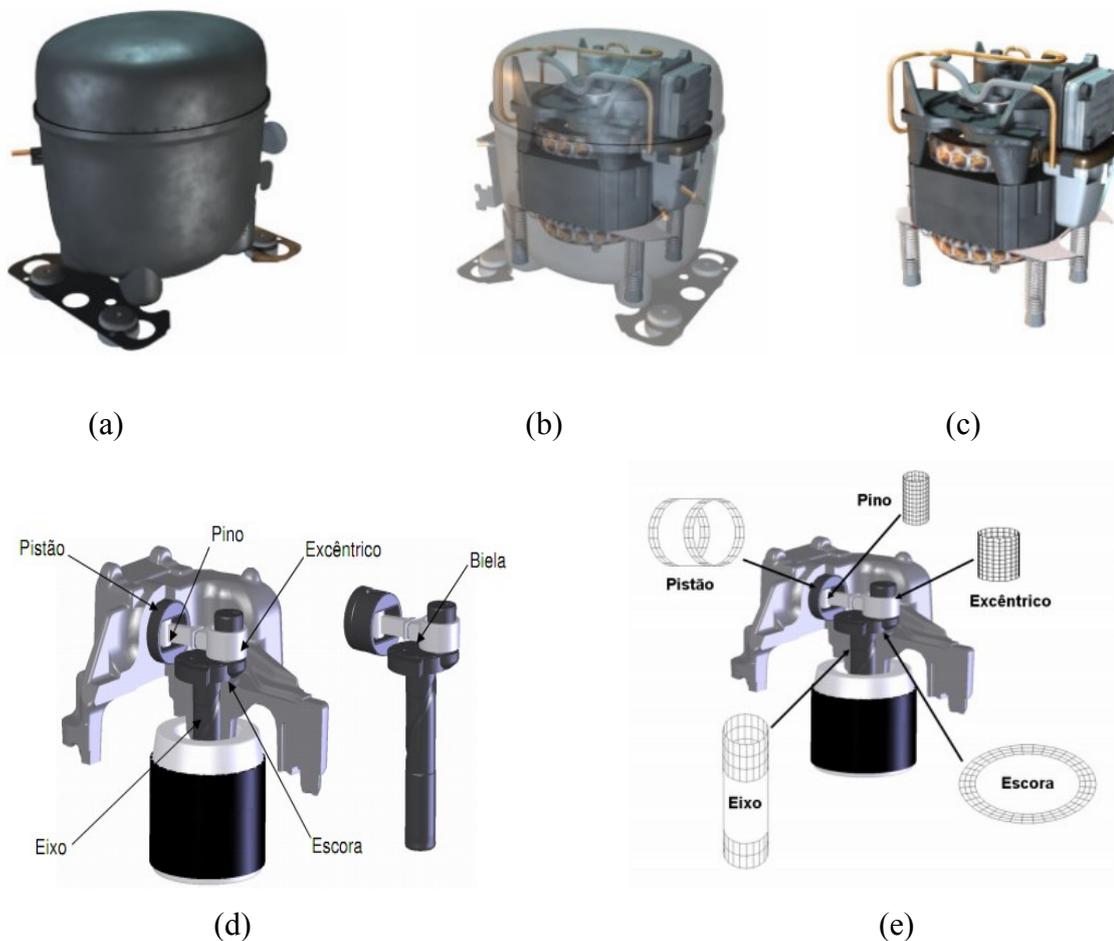
Dentre as diversas aplicabilidades em mancais usados em máquinas industriais, mostradas a seguir: motores de combustão interna – Indústria de transporte; compressores em geral – Indústria de máquinas e equipamentos; turbinas hidráulicas de eixos verticais – Indústria energética; propulsores de navios – Indústria naval; pode-se destacar a utilidade de compressores herméticos de refrigeração doméstica e comercial. Através destas máquinas os mancais possui extrema e fundamental importância na conversão de energia elétrica em energia térmica. Na sociedade atual e moderna estes sistemas de refrigeração são de imensa utilidade na qualidade de vida da população.

O aperfeiçoamento de tais sistemas tem motivado vários trabalhos tanto em refrigeração quanto em compressores. Na presente dissertação dar-se-á ênfase ao fenômeno de compressão do fluido de óleo, através dos mancais de escora utilizados em compressores herméticos de refrigeração (refrigeradores, bebedouros, balcões frigoríficos, freezers, etc.), onde este fenômeno está baseado na equação de Reynolds originada a partir das equações de Navier-Stokes, a qual será solucionada através de um método híbrido (analítico-numérico).

1.2. MOTIVAÇÃO

Os compressores de refrigeração são equipamentos indispensáveis para a vida atual do ser humano, os quais são diretamente responsáveis pela geração de frio nas residências. A Figura 1.1 apresenta um compressor hermético de refrigeração em diversas vistas.

Figura 1.1 – Compressor hermético de refrigeração: (a) vista externa, (b) vista interna, (c) partes internas, (d) elementos dos mecanismos de acionamento e compressão; (e) Malhas usadas para resolver escoamentos regiões que necessitam de lubrificação.



Fonte: Couto, P. R. C. (2006)

O mecanismo de compressão dos compressores é geralmente composto por um eixo, por uma biela e por um pistão que possui um pino para conexão. Estes componentes têm movimentos relativos e por isso precisam de mancais e devido a questões vinculadas ao custo e ao ruído opta-se pelos mancais hidrodinâmicos.

O funcionamento adequado dos compressores depende prioritariamente do funcionamento dos mancais. A ocorrência de falhas durante o funcionamento dos mancais

compromete o desempenho da máquina ou equipamento, pois estes estão sujeitos ao atrito, uma vez que são responsáveis pela transmissão de forças.

Mancal é um suporte de apoio de eixos e rolamentos que são elementos girantes de máquinas e são classificados em duas categorias, as quais são denominadas de mancais de deslizamento e mancais de rolamento. Em hipótese alguma se deve afirmar qual destes é o melhor, pois cada um tem suas qualidades particulares e nenhum destes satisfaz isoladamente a todas as exigências. Há casos em que apenas mancais de escorregamento podem ser usados, outros em que somente os de rolamentos constituem uma boa solução e, finalmente, aqueles em que os dois tipos oferecem solução satisfatória. Portanto, a decisão depende das propriedades de maior importância para cada aplicação.

Os mancais desempenham três principais funções, são elas: suportar carga (dinâmica e estática), fornecer rigidez e amortecimento, e controlar a posição do rotor (Sternlicht e Lewis, 1968). O movimento relativo entre as superfícies do eixo e do mancal gera uma pressão hidrodinâmica no filme fluido, dando ao mancal a capacidade de suportar a carga imposta pelo eixo, podendo também produzir vibrações orbitais de alta amplitude.

A crescente tendência de se projetarem máquinas de menor peso e com maior potência tem levado a projetos de rotores mais rápidos e eixos mais flexíveis, os quais apresentam maiores chances de ter problemas de vibração. Diversos estudos e testes realizados sobre o comportamento de eixos rotativos mostraram que há uma forte influência dos mancais no equilíbrio dinâmico das máquinas e na atenuação das vibrações excessivas (Gunter, 1966).

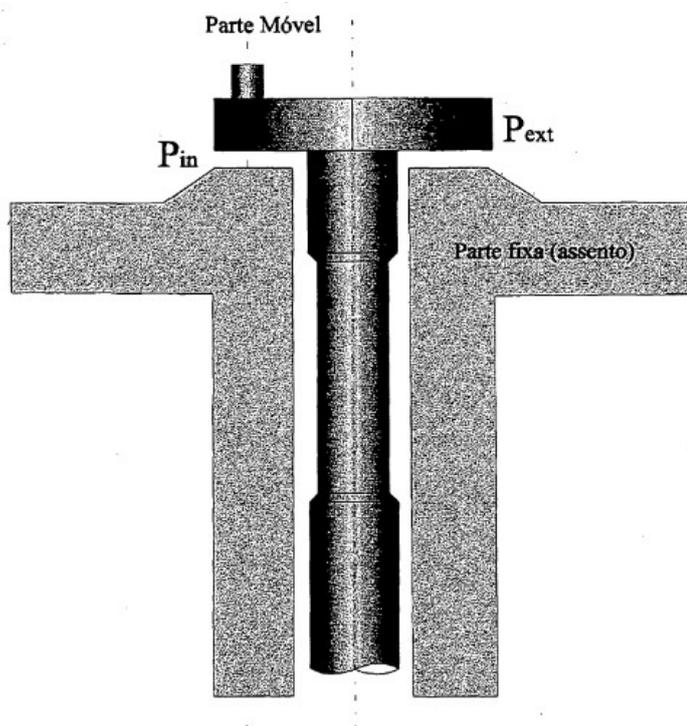
Muitas pesquisas vêm sendo feitas com o intuito de atender à demanda por projeto de mancais com maior capacidade de carga e melhor estabilidade das máquinas. Entretanto, a resposta para algumas demandas pode ser os mancais hidrodinâmicos, uma vez que eles apresentam baixo custo, boa capacidade de sustentação do eixo, vida útil longa e capacidade de amortecimento.

O aprofundamento dos estudos em questão tem mostrado que os detalhes construtivos e características de lubrificação dos mancais, tais como: perfil, folga diametral, viscosidade do lubrificante, espessura do filme de óleo, pressão do lubrificante, carga suportada, potência dissipada, temperatura do lubrificante, a relação comprimento/diâmetro entre outros, provocam variações no desempenho dos equipamentos de acordo com as suas condições de trabalho.

Os mancais são aplicáveis em turbinas, geradores, redutores e multiplicadores de velocidade, turbo-redutores, ventiladores/ exaustores, motores, bombas e compressores. Assim sendo, os mancais cada vez mais exigem uma maior precisão na coleta de dados e estudos de novos perfis que tragam soluções econômicas para os novos limites alcançados pela indústria.

No presente trabalho dar-se-á ênfase à análise do comportamento de compressão do fluido de óleo empregado em compressores herméticos de refrigeração, os quais utilizam os mancais de escora. A investigação e a simulação dos fenômenos físicos envolvidos na operação destes mancais são de extrema importância tecnológica, pois permite avaliar com maior precisão os dados de construção (ordem de grandeza: micrometros), bem como analisar os dados comprometidos com o desempenho dos mesmos (carga suportada e potencia dissipada). A figura 1.2, mostra um desenho esquemático do mancal utilizado em um compressor hermético alternativo de refrigeração doméstica.

Figura 1.2 – Mancal de escora utilizado em compressores de refrigeradores domésticos

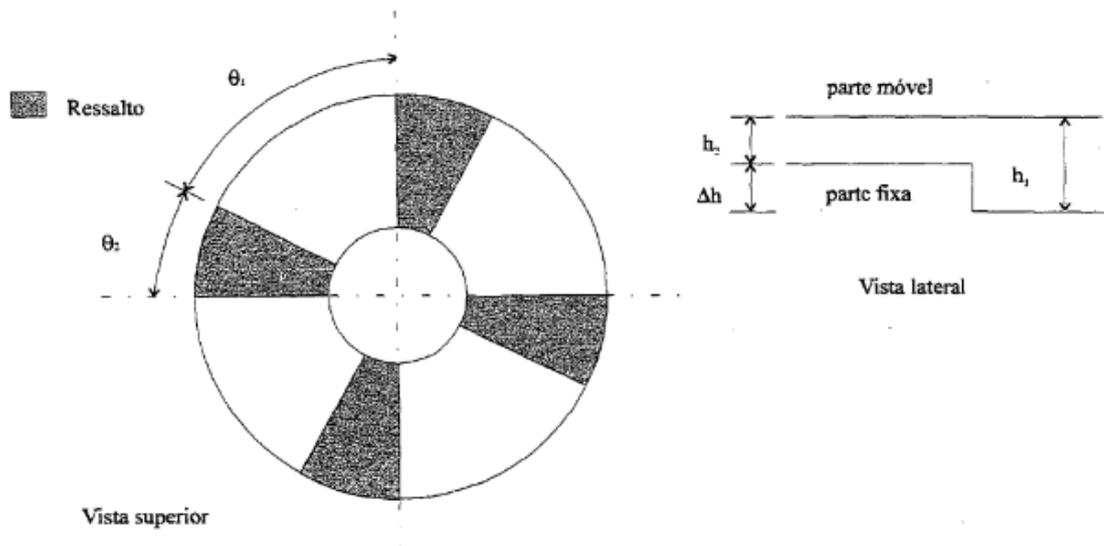


Fonte: Blanco et al. (1999, 2014)

Existe uma relação íntima entre os parâmetros de projeto e os parâmetros construtivos (físicos), pois é devido a viscosidade do fluido e a geometria da sapata que surge o efeito hidrodinâmico, gerando assim, o gradiente de pressão o qual permite ao mancal a capacidade de suportar carga. O mancal de escora pode suportar mais ou menos carga e dissipar mais ou

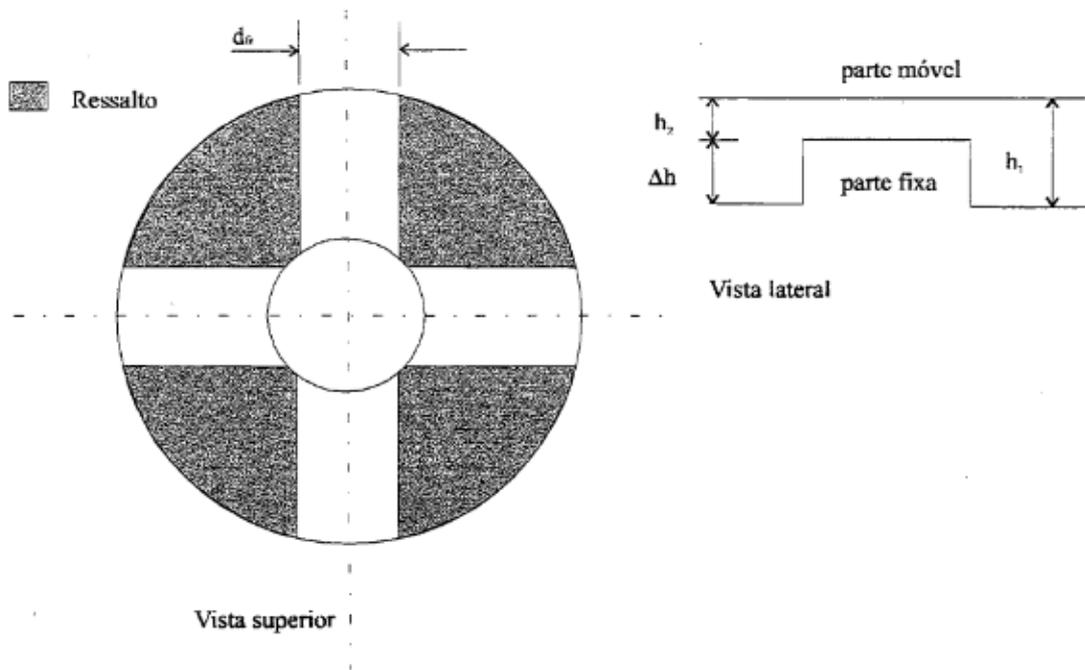
menos potência dependendo do preenchimento da folga que separa a parte móvel da parte fixa do mancal e dos parâmetros geométricos definidos pela sapata utilizada. Os mancais de escora a serem explorados neste trabalho são ilustrados nas Figuras 1.3 e 1.4 os quais representam um mancal com geometrias tipo sapatas de Rayleigh com quatro ressaltos e sapatas fresadas. São também investigados os mancais com geometrias tipo sapatas de Rayleigh com oito e dezesseis ressaltos.

Figura 1.3 – Representação da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular.



Fonte: Blanco et al. (1999, 2014)

Figura 1.4 – Representação da sapata fresada para um mancal de escora circular.



Fonte: Blanco et al. (1999, 2014)

1.3. OBJETIVOS

O presente trabalho visa deduzir a equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos, resolver de forma analítico-numérica a equação de Reynolds com aplicação da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT), sendo que a solução analítica é na direção circunferencial com domínio de $[0, \pi/2]$ e a solução numérica na direção radial com domínio de $[r_1, r_2]$, onde r_1 é o raio interno e r_2 é o raio externo do mancal. Tal resolução tem a finalidade de verificar a aplicação da GITT como técnica de transformação da equação de estudo e compará-la ao Método de Volumes Finitos utilizado no trabalho de Blanco et al (2014). Para solução numérica são consideradas as geometrias de mancais de escora investigando-se as sapatas de Rayleigh com 4, 8 e 16 ressalto e a sapata fresada, a qual é de mais fácil fabricação (Blanco et al, 2014). O sistema originado pela aplicação da GITT é implementado em um código computacional solucionado por meio da subrotina BVFPD da biblioteca do IMSL (1987). É realizada análise de convergência na série e na malha para a distribuição de pressão.

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 1 foi desenvolvido com o intuito de apresentar as principais motivações deste trabalho. No capítulo 2 desenvolveu-se um breve histórico sobre tribologia e uma revisão bibliográfica dos diversos autores que desenvolveram pesquisas em simulações de escoamentos e aplicações com a GITT.

O capítulo 3 apresenta a formulação física-matemática do problema e após o uso das hipóteses simplificadoras demonstra a equação de Reynolds vinculada ao presente estudo. No capítulo 4 é apresentado, o processo da metodologia de solução via GITT e o algoritmo computacional usado para geração dos resultados conforme os objetivos previstos.

No capítulo 5 estão descritas as análises dos resultados numéricos para a distribuição dos campos de pressão encontrados a partir das geometrias e parâmetros considerados no capítulo 4.

Finalmente, o capítulo 6 apresenta as conclusões do referido trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, é realizado um histórico da equação de Reynolds, apresentando uma revisão da literatura existente em mancais.

2.1. TRIBOLOGIA - BREVE HISTÓRICO

Em 1966, no Departamento de Educação e Ciência da Inglaterra, ocorreu o primeiro aparecimento da palavra “Tribologia” que foi definida como "a ciência e tecnologia da interação de superfícies em movimento relativo e assuntos e práticas relacionados" (JOST, 2006). Por sua vez, de acordo com o dicionário grego, a palavra tribologia é proveniente das palavras grega *tribos* que significa atrito, e *logos* que significa estudo, de maneira que a tradução resulta no “Estudo do Atrito”. Embora a pronúncia atual seja nova, o assunto não é, tribologia une as áreas da mecânica, física, química, materiais e os conhecimentos em lubrificação, atrito e desgaste para prever o comportamento de sistemas físicos (WINER, 1990).

A descoberta e a formulação dos mecanismos da tribologia são atribuídas ao russo Nicolai Petrov (1836-1920) e aos britânicos, Beauchamp Tower (1845-1904) e Osborne Reynolds (1842-1912). Eles observaram que o mecanismo de lubrificação não era devido à interação mecânica de superfícies sólidas, mas sim devido ao filme de fluido que as separava, aspecto fundamental da lubrificação hidrodinâmica, onde seus fundamentos teóricos e experimentais foram firmemente estabelecidos num curto período de tempo, de 1883 a 1886.

A fixação do conceito da lubrificação hidrodinâmica iniciou-se quando Nicolai Petrov postulou dois pontos importantes, sendo o primeiro que a propriedade importante do fluido com relação ao atrito era a viscosidade e não a densidade, e o segundo que a natureza do atrito em um mancal hidrodinâmico não é o resultado da interação entre duas superfícies sólidas, mas do atrito viscoso do fluido entre as superfícies. Em 1883, Petrov propôs uma relação funcional entre força de atrito e parâmetros de um mancal que é válida até os dias de hoje. Por sua vez, o engenheiro Beauchamp Tower descobriu a relação entre a força de atrito e a capacidade de carga num mancal. Este último era assistente de pesquisa de cientistas, tal como Fraud e Lord Rayleigh. Tower organizou um comitê de pesquisas sobre atrito de alta velocidade em mancais de estradas de ferro. Com isto, entre os anos 1883 e 1884, conduziu-se à descoberta da presença da pressão hidrodinâmica em filmes de fluidos em mancais. A lubrificação hidrodinâmica é considerada uma das áreas mais importantes da tribologia. Este

tipo de lubrificação ocorre quando duas superfícies em movimento relativo são separadas por uma película de um fluido lubrificante. Apesar da conceituação e caracterização ter sido atribuída aos pesquisadores Petrov, Tower e Reynolds, mas foi o último quem traduziu os resultados em linguagem matemática, desenvolvendo uma equação de derivadas parciais (EDP), denominada equação de Reynolds, a qual se tornou a base para a grande maioria dos desenvolvimentos nesta área, gerando um grande número de pesquisas até os dias de hoje. Esta EDP foi obtida a partir de algumas simplificações nas equações de Navier-Stokes (DUARTE JR., 2005).

Em 1918, Lorde Rayleigh iniciou o estudo da otimização de mancais de escora de sapatas setoriais. Desde então surgiram vários trabalhos que objetivaram a criação de técnicas analíticas e numéricas para a determinação da geometria que fornecesse parâmetros operacionais ótimos tais como carga suportada, potência dissipada, vazão de lubrificante, etc (BLANCO et al., 1998, 2014).

Em 1986, Dowson e Pinkus publicaram dois artigos muito interessantes, onde o primeiro relata as origens da teoria da lubrificação e suas dificuldades características, e o segundo sobre a teoria em si, atingindo desde a origem até as linhas de pesquisa atuais. O trabalho relatou o estímulo para a solução da equação diferencial proposta por Reynolds para as possíveis configurações geométricas de mancais hidrodinâmicos (VIEIRA, 2011).

2.2. SIMULAÇÕES EM MANCAIS

Esta seção foi elaborada a partir do capítulo 2 da dissertação de mestrado de Claudio Blanco, a qual fora registrada em 1998 com o título, “*Otimização de Mancais de Escora Circulares com Sapatas Planas*”, na Universidade Federal de Santa Catarina.

Gross (1962) efetuou a comparação entre a sapata de Rayleigh e uma sapata híbrida, formada por uma plano inclinado e uma sapata de Rayleigh para fluidos incompressíveis, concluindo que a segunda possui menos capacidade de suportar carga do que a primeira.

Maday (1968) ao fazer uso do cálculo variacional mostrou que para um mancal 1D (unidimensional) operado a gás, a geometria que possui maior capacidade de suportar carga é aquele com a sapata híbrida.

Chow et al. (1970) utilizaram fluidos compressíveis para resolver a equação de Reynolds 2D (bidimensional) pelo método das diferenças finitas. Mostraram através da

tentativa e erro que o mancal de escora lubrificado a gás com uma geometria híbrida pode ter uma maior capacidade de suportar carga do que um mancal com geometria espiralada, de acordo com o modelo e as condições de investigação.

Rohde (1972), usando formulação variacional, determinou o perfil do filme de óleo incompressível que minimiza o coeficiente de atrito e a força de atrito para uma dada carga. Em 1974, este mostrou que um mancal com sapata de Rayleigh suporta uma carga menor do que aquele possuidor da sapata com degrau trapezoidal.

Constantinescu (1976) observou que o efeito da força de inércia provocada pela presença do ressalto de mancais pode ser tanto pelo aumento quanto pela queda de pressão, isto é, dependendo das condições do escoamento na entrada do ressalto, há uma baixa pressão quando o escoamento é acelerado, enquanto que há uma alta pressão quando o escoamento é desacelerado.

Bagci e Singh (1983) solucionaram a equação da lubrificação 2D no plano cartesiano, para um fluido incompressível, com fuga do lubrificante pela lateral de um mancal de escora. Mostraram que uma sapata cujo perfil é uma função quadrática possui maior capacidade de suportar carga do que a sapata de Rayleigh.

Bourgin e Gay (1985) otimizaram as geometrias das sapatas de Rayleigh em termos da capacidade de carga a suportar e da potência dissipada, após análise de alguns modelos de fluidos não newtonianos aplicados as referidas sapatas.

Someya (1989) analisou uma das propriedades de mancais hidrodinâmicos, o desacoplamento entre as duas direções ortogonais. E confirmou que tal desacoplamento permite que os movimentos horizontal e vertical do rotor, não influenciam um ao outro, o que não ocorre com outros tipos de mancal. Este fato se justifica pela capacidade de rotação das sapatas, que têm liberdade para se ajustar às mais diferentes condições de operação de carregamento do mancal.

Kang et al. (1996) utilizaram uma solução com Método de Volumes Finitos (MVF) com transformação de coordenadas para alinhar a malha com as descontinuidades do filme de óleo. Anteriormente, Kogure et al. (1983) utilizaram o mesmo método para uma malha não coincidente com a descontinuidade do filme de fluido. Desta forma, os fluxos de óleo nos

Volumes de Controles (VC) foram calculados como sendo a média dos fluxos em ambos os lados de cada descontinuidade.

Arghir et al. (2002) utilizaram o MVF para o cálculo da distribuição de pressão em mancais do tipo axiais com descontinuidades na espessura do fluido. A abordagem consistiu numa análise 1D para os volumes de controles. Para permissão da inclusão das descontinuidades, tiveram que considerar a equação de Bernoulli, para analisar a variação de pressão que ocorre nas descontinuidades de fluido.

Em 2003, Zhu e Zhang propuseram calcular os coeficientes de rigidez e amortecimento através do método de perturbações.

Jang et al. (2006) utilizaram o Método dos Elementos Finitos (MEF) no estudo da dinâmica de um arranjo com mancais do tipo axiais e radiais em um disco rígido de computador.

Melo (2010) considerou como hipóteses simplificadoras um fluido newtoniano, isoviscoso e incompressível para a determinação da equação de Reynolds. Encontrou uma solução clássica analítica desta equação a partir das simplificações efetuadas para dois casos especiais de mancais estudados, os curtos (solução de Ocvirk), e os infinitamente longos (solução de Sommerfeld). E utilizou o Método de Diferenças Finitas para a solução numérica da mesma equação, com a finalidade de obter o campo de pressão no fluido, a capacidade de carga do mancal, o atrito rotor/mancal, o coeficiente de atrito e o ângulo de atitude do mancal.

Vieira (2011) utilizou o MVF para solucionar a equação de Reynolds em coordenadas polares para mancais axiais submetidos à lubrificação hidrodinâmica, obtendo os valores para distribuição de pressão, carga suportada pelo mancal e coeficientes de rigidez. Além disto, utilizou o mesmo método para resolver o balanço de fluxo em cada volume de controle, auxiliado pela equação de Bernoulli, com o intuito de permitir uma análise para descontinuidades do filme fluido. E os parâmetros tais como: área plana ao fim de cada segmento do mancal, espessura do filme de óleo e viscosidade foram otimizados para análise dos valores encontrados nos coeficientes de rigidez e amortecimentos.

Miranda (2012) simulou computacionalmente diferentes tipos de rotores compostos por eixo flexível, discos massivos e mancais rígidos ou hidrodinâmicos, com perfis circulares ou elípticos. Utilizou o MEF para resolver a equação de Reynolds para fluidos

incompressíveis, com perturbação linear para se calcular os coeficientes dinâmicos de força dos mancais cilíndricos e elípticos. As equações de movimento utilizadas são integradas usando-se o Método de Newmark a fim de se obter a resposta no tempo.

Santos et al. (2012) simularam computacionalmente mancais radiais hidrodinâmicos. Utilizaram a GITT para resolver a equação de Reynolds e os resultados obtidos comparam com os apresentados na literatura, a fim de demonstrar a consistência dos resultados finais e a capacidade da abordagem GITT em lidar com problemas de mancais radiais.

Blanco et al. (1999, 2014) apresentou em sua formulação matemática os termos inerciais centrífugos à equação de Reynolds. Através desta equação simulou o problema de lubrificação heterodinâmica, bem como otimizou as geometrias das sapatas com setor circular e fresada. Para os modelos de mancais de escora com sapata de Rayleigh (com 4, 8 e 16 ressaltos) e sapata fresada, utilizou o MVF na solução da equação diferencial parcial e para a otimização das geometrias usou o método dos Multiplicadores de Lagrange. À conclusão do problema observou que à medida que aumenta o número de ressaltos do mancal a pressão diminui e isto ocorre devido existir um maior número de regiões restritas ao escoamento. Assim o mancal deve operar com um afastamento maior do assento, e conseqüentemente consumindo menos potência.

Vale ressaltar aqui, que a abordagem feita por Blanco e Prata (1999, 2014) é a base para as modelagens matemática e numérica utilizadas na referida dissertação.

No presente trabalho além de demonstrar o modelo matemático proposto por Blanco et al. (2014), se observou que o método GITT utilizado para a solução da EDP é eficaz para o referido problema, pois até o presente momento à maioria dos casos estudados em lubrificação heterodinâmica são solucionados através de MVF e MEF. Portanto, desta forma pode-se concluir que a técnica é pertinente para problemas de tais características. A verificação disto está apresentada quando comparada com os resultados obtidos com o método MVF (BLANCO ET AL., 2014).

CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

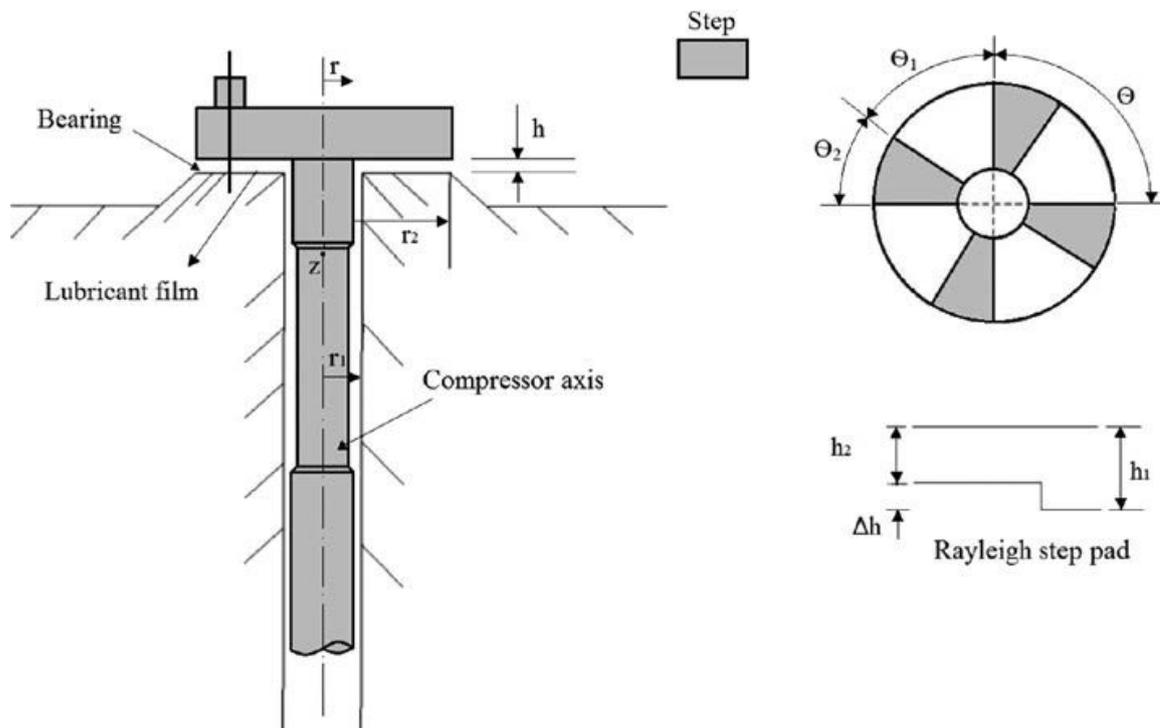
3.1. O PROBLEMA ESTUDADO

Os problemas de engenharia envolvendo mancais, em específico o de escora, pertencem a teoria da lubrificação hidrodinâmica, onde suas formulações matemáticas e físicas foram propostas, primeiramente, por Reynolds (1886). Tal teoria pertence à Mecânica dos Fluidos, pois a equação básica da lubrificação provem das equações de Navier-Stokes em conjunto com a equação da conservação da massa. Para se analisar problemas de lubrificação hidrodinâmica, busca-se uma equação diferencial cuja solução fornece o campo de pressão no filme fluido que separa as partes fixa e móvel do mancal. Ao se integrar este campo de pressão determina-se a carga que o referido mancal pode suportar.

A equação diferencial parcial da pressão é denominada de equação de Reynolds, que é usada normalmente desprezando-se os termos inerciais (Pinkus e Sternlicht, 1961). No presente trabalho os termos inerciais centrífugos serão considerados e a equação diferencial da pressão será denominada de equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos (Blanco et al., 1998/2014).

3.2. FORMULAÇÃO DO MODELO FÍSICO

Figura 3.1 – Esquema geométrico das dimensões do mancal de escora.



Fonte: Blanco et al. (2014)

O esquema apresentado na Figura 3.1 faz referencia ao mancal de escora estudado destacando-se suas partes fixa e móvel, bem como as características de suas dimensões: raio interno r_1 , raio externo r_2 , ângulo do rebaixo θ_1 , ângulo do ressalto θ_2 e espessura do filme de óleo lubrificante h . A pressão interna P_{int} e a pressão externa P_{ext} são conhecidas. O sistema de coordenadas adotado para análise do problema é o sistema cilíndrico (r, θ, z) , onde a referencia para a coordenada z é a parte móvel do mancal que acompanha seu movimento axial, enquanto a parte fixa é a referencia para as coordenadas r e θ .

3.3. HIPÓTESES UTILIZADAS

Para obtenção da equação de Reynolds com termos inerciais e centrífugos, assume-se as seguintes hipóteses simplificativas:

- i. Desprezam-se os efeitos das forças de campo.
- ii. As forças de inércia são desprezíveis, exceto a centrífuga.
- iii. A pressão não varia na direção da folga (z), $P = P(r, \theta)$.
- iv. Condição de não deslizamento do óleo lubrificante nas superfícies sólidas.
- v. Escoamento laminar.
- vi. Fluido newtoniano.
- vii. Viscosidade constante.
- viii. Fluido incompressível.
- ix. Regime permanente

Tais hipóteses são normalmente utilizadas em problemas desta natureza.

3.4. EQUAÇÃO DE REYNOLDS

3.4.1. Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para densidade e viscosidade constantes são:

Componente r :

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \left. \begin{aligned} & - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \left. \begin{aligned} & + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Componente z :

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right\} \quad (3.3)$$

Considerando as hipóteses simplificativas relacionadas anteriormente para a geometria apresentada na Figura 3.1, obtêm-se as seguintes expressões para as equações de Navier-Stokes nas direções r e θ , respectivamente:

$$-\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \quad (3.4)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \quad (3.5)$$

Integrando-se as equações (3.4) e (3.5) na direção da espessura do filme de óleo (direção z conforme Figura 3.1) e usando as condições de contorno abaixo relacionadas,

$$z=0 \text{ e } r_1 \leq r \leq r_2 \rightarrow V_\theta = \omega r \text{ e } V_r = 0 \quad (3.6)$$

$$z=h \text{ e } r_1 \leq r \leq r_2 \rightarrow V_\theta = 0 \text{ e } V_r = 0 \quad (3.7)$$

Em $z=0$ o óleo lubrificante possui a velocidade da parte móvel do mancal, enquanto que em $z=h$ (parte fixa do mancal), o fluido é considerado em estado de repouso.

Portanto, obtém-se para as velocidades $V_r(r, \theta, z)$ e $V_\theta(r, \theta, z)$ as equações:

$$V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) (z^2 - hz) + \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4 - h^5 z) \\ + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{3z^5}{h} - 10z^4 + 10hz^3 - 3h^3 z \right) \\ - \frac{\omega^2 r^2}{12} \left(\frac{z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

$$V_\theta = \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) - \omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \quad (3.9)$$

A equação (3.8) da velocidade V_r foi obtida após a substituição da equação da velocidade V_θ dado em (3.9) na versão integrada da equação (3.4). (Ver demonstração no *APÊNDICE A*)

Considerando agora a equação da conservação da massa simplificada pelas hipóteses apresentadas anteriormente, tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0 \quad (3.10)$$

Integrando-se a equação (2.10) de $z=0$ a $z=h$, resulta em,

$$\frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) dz + \frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) dz + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (V_z) dz = 0 \quad (3.11)$$

Aplicando a regra de Leibniz¹ para diferenciação de integrais em cada uma das parcelas da equação (2.11), tem-se

¹A regra de Leibniz para diferenciação de integrais:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} dx - F(\varphi_1, \alpha) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} + F(\varphi_2, \alpha) \frac{d\varphi_2}{d\alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rV_r) dz &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) dz - rV_r(r, \theta, 0) \frac{d}{dr}(0) + rV_r(r, \theta, h) \frac{d}{dr}(h) \\ &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rV_r) dz \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h (V_\theta) dz &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) dz - V_\theta(r, \theta, 0) \frac{d}{d\theta}(0) + V_\theta(r, \theta, h) \frac{d}{d\theta}(h) \\ &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) dz = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h (V_\theta) dz \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (V_z) dz &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (V_z) dz - V_z(r, \theta, 0) \frac{d}{dz}(0) + V_z(r, \theta, h) \frac{d}{dz}(h) \\ &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (V_z) dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (V_z) dz = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo-se as equações (3.12), (3.13) e (3.14) na equação (3.11) e, posteriormente substituindo, as equações (3.8) e (3.9) na equação resultante, tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rh^3 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) + \rho \left[-\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] = \\ 6\mu r \omega \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) é bastante semelhante à equação de Reynolds clássica (Cameron, 1966, Pinkus e Sternlicht, 1961), porém incluindo os efeitos inerciais centrífugos, e por isso chama-se equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos, isto é, no presente trabalho.

Diferentemente da equação de Reynolds clássica, a equação (3.15) é não linear devido à existência do termo $\left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2$. A influência deste termo sobre a equação é, no entanto, pequena devido os termos que o multiplicam, pois a espessura do filme de óleo lubrificante é da ordem de micrômetros (μm) e está elevado à sétima potência; todas as variáveis constantes

da equação (3.15) estão listadas na nomenclatura. Embora a equação (3.15) seja de fácil obtenção, tudo indica que a primeira vez que tal equação tenha sido utilizada foi em Oliveira e Prata (1992).

3.4.2. Condições de Contorno

A equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos apresentada anteriormente é uma equação elíptica na direção radial (r) e axial (θ) e, portanto, precisa de duas condições de contorno para o raio e logicamente duas para o ângulo teta para que possa ser resolvida.

Na direção radial as condições de contorno são:

$$r = r_1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \rightarrow P = P_{\text{int}}$$

e

$$(3.16)$$

$$r = r_2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \rightarrow P = P_{\text{ext}}$$

Considerar-se-á, no presente trabalho, $P_{\text{int}} = P_{\text{ext}} = 0$.

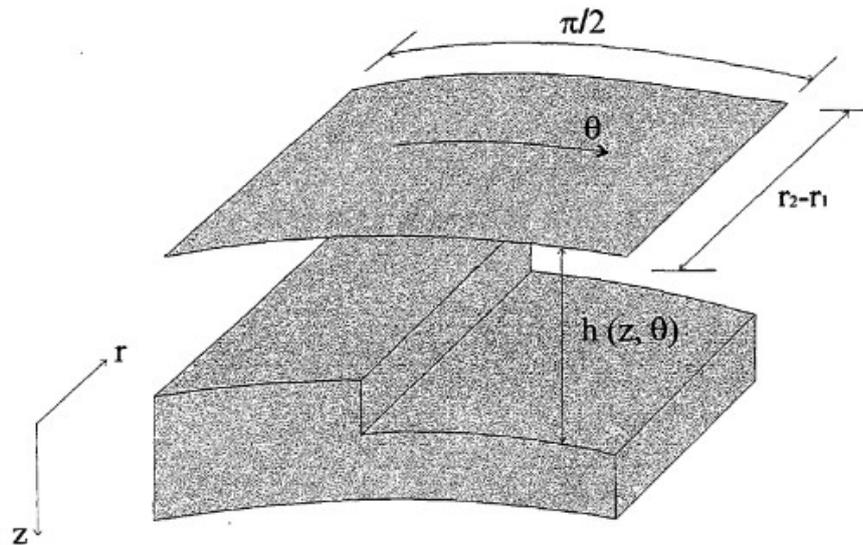
Para a direção angular a condição de contorno a ser adotada é a de escoamento periódico (Patankar et al., 1977), isto é,

$$P(r, \theta) = P(r, \theta + 2\pi) \quad (3.17)$$

As referidas condições contorno são aplicadas na equação de Reynolds apresentada em (3.15), cujo domínio de solução é apresentado na Figura 3.2. Para a direção angular considera-se a simetria apresentada por um mancal de escora com quatro ressaltos e resolve-se apenas para um ressalto.

Um fato a ser observado é que o óleo ao escoar do ressalto para o rebaixo experimenta uma abrupta expansão de área o que resulta em grande depressão. Esta depressão pode levar a valores bem menores do que a pressão ambiente dando origem ao fenômeno de cavitação do filme de óleo (Santos, 1995 e Santos e Prata 1997). No entanto, neste trabalho, sempre que a pressão assumir valores negativos a metodologia arbitrará 0 (zero) como sendo o valor da pressão.

Figura 3.2 – Domínio de Solução Radial e Circunferencial



Fonte: Blanco et al. (1999, 2014)

Tal prática é muito utilizada em problemas de cavitação e corresponde ao modelo de cavitação associado à condição de Gumbel (Santos e Prata, 1997).

3.4.3. Cálculo da Carga Suportada pelo Mancal

A carga suportada pelo mancal é o resultado da integração do campo de pressão, ao longo do domínio de solução, advindo da solução da equação (3.15).

$$W = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r \cdot P(r, \theta) dr d\theta \quad (3.18)$$

3.4.4. Cálculo da Potência Consumida por Atrito

A potência consumida pelo atrito é o produto da força cisalhante no mancal pela velocidade linear,

$$P_c = F_c \cdot v = F_c \cdot \omega \cdot r \quad (3.19)$$

Por sua vez a força de cisalhamento apresentada na equação (3.19) é dada por,

$$F_c = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \tau \cdot r dr d\theta \quad (3.20)$$

onde a tensão de cisalhamento segue dada por,

$$\tau = -\mu \cdot \left. \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (3.21)$$

No presente trabalho, o cálculo da tensão de cisalhamento se dá a partir da superfície da parte móvel do mancal. Após a derivação de V_θ dada pela equação (3.9) e substituindo $z=0$ na equação resultante e retornando à equação (3.21) tem-se:

$$\tau = \frac{h}{2r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\mu \omega r}{h} \quad (3.22)$$

Substituindo-se (3.22) em (3.20) e o resultado em (3.19) tem-se,

$$P_c = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} hr \frac{\partial P}{\partial \theta} dr d\theta + \mu \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3}{h} dr d\theta \quad (3.23)$$

Ao solucionar-se a equação (3.23) obtém-se a potência consumida ou dissipada em mancais de escora circulares. Convém observar que a equação acima incorpora o atrito viscoso associado ao escoamento devido ao gradiente de pressão, bem como o atrito associado ao escoamento de Couette, primeiro e segundo termos do lado direito, respectivamente.

CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Neste capítulo abordar-se-ão os formalismos pertinentes à GITT, a transformação do sistema descrito pela equação (3.15) através da utilização desta técnica e a descrição sintetizada do algoritmo desenvolvido que originou o código computacional de escoamento em mancais de escora via GITT.

4.1. TÉCNICA DE TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

O desenvolvimento de técnicas de soluções de sistemas de equações diferenciais parciais (EDP) que controlam problemas de convecção-difusão culminou com o surgimento da técnica de transformação integral clássica (CITT) fundamentada na separação de variáveis e formalizada com a publicação de Mikhailov e Özisik (1984). É aplicada na busca de solução analítica de problemas de difusão lineares. Porém, problemas não transformáveis pela CITT propiciaram o avanço gradativo das ideias da técnica combinada aos problemas apresentados por Özisik e Murray (1974). Surgia, então, a técnica da transformação integral generalizada (GITT). A GITT foi desenvolvida para ter aplicação estendida a classe de problemas subdivididos nas categorias:

- Problemas com equação de coeficiente variável – quando os coeficientes da equação diferencial parcial são transientes ou espaciais.
- Problemas com coeficiente da condição de contorno variável – quando os coeficientes da equação da condição de contorno são transientes ou espaciais.
- Problemas com contorno variáveis – quando a posição da condição de contorno varia com o tempo, problemas com fronteira móvel, ou quando o domínio é irregular com respeito ao sistema de coordenada considerado. Problemas de mudança de fase e de oxidação são exemplos de fronteira móvel, escoamento de fluido e transferência de calor em dutos irregulares.
- Problemas que envolvam dificuldades nos problemas auxiliares – atribuem dificuldades computacionais e estão presentes na literatura, tais como:
 - Problemas de Sturm-Liouville com transformada de Laplace variável;
 - Problemas de Sturm-Liouville com variáveis complexas;
 - Sistemas não separáveis de Sturm-Liouville;
 - Problemas de autovalor não-clássico.

- Problemas não-lineares – quando o termo fonte depende do potencial a ser obtido. Sendo aplicada a fenômenos radioativos, difusão de calor com condutividade variável, problemas acoplados, problemas de convecção, difusão-convecção, camada limite e equação de Navier-Stokes.

A GITT é uma metodologia de estrutura híbrida (analítico-numérica) que segundo Macêdo (1998) tem como ideia básica relaxar a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata do problema. Segundo Cotta (1993) outro excelente aspecto deste método é a extensão às situações multidimensionais, com um crescimento moderado do esforço computacional, em relação às aplicações unidimensionais. A natureza híbrida é responsável por este comportamento, onde a parte analítica da solução é aplicável na variável independente e a tarefa numérica é sempre reduzir, por integração, a um sistema diferencial ordinário de uma única coordenada cujos passos básicos da técnica são:

- i) Escolher o problema auxiliar com base nos termos difusivos da formulação original, que contenham informações a respeito da geometria e da coordenada a ser eliminada;
- ii) Solucionar o problema auxiliar, obtendo as autofunções, autovalores, normas e propriedade de ortogonalidade;
- iii) Desenvolver o par transformada-inversa através da propriedade de ortogonalidade;
- iv) Transformar o sistema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário, infinito e acoplado;
- v) Resolver numericamente o sistema diferencial ordinário, depois de truncar o sistema infinito originado na N-ésima linha e coluna, com ordem suficiente para atingir a acurácia prescrita. O sistema é resolvido numericamente através das subrotinas como as de pacotes comerciais como o IMSL (1987);
- vi) Utilizar a fórmula de inversão para a construção do potencial original.

4.1.1. Formalidades da GITT

Considere uma formulação geral de um problema transitente com termos convectivo-difusivo definido na região V com condições de contorno na superfície S , onde os efeitos convectivo e difusivo são não-lineares. Então temos:

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + u(\mathbf{x}, t, T) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) = LT(\mathbf{x}, t) + P(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

com condições inicial e de contorno dada, respectivamente, por

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in V \quad (4.2)$$

$$BT(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in S \quad t > 0 \quad (4.3)$$

onde os operadores da equação são:

$$L = -\nabla k(\mathbf{x}) \nabla + d(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

$$B = \left[\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \quad (4.5)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à superfície S .

Aplicando os formalismos estabelecidos pela GITT, o seguinte problema auxiliar é definido como:

$$L\Psi_i(\mathbf{x}) = \mu_i^2 w(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in V \quad (4.6)$$

com condição de contorno

$$B\Psi_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in S \quad (4.7)$$

onde $\Psi_i(\mathbf{x})$ são autofunções correlacionadas aos autovalores (μ_i 's).

O par transformada-inversa é definido

$$T_i(t) = \int_V w(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dv \quad (\text{Transformada}) \quad (4.8)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\mathbf{x}) T_i(t) \quad (\text{Inversa}) \quad (4.9)$$

onde a autofunção normalizada $\Psi_i(\mathbf{x})$ é dada por

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_i(\mathbf{x})}{\sqrt{N_i}} \quad (4.10)$$

e a integral de normalização é:

$$N_i = \int_V \Psi_i^2(\mathbf{x}) dv \quad (4.11)$$

A transformação integral da equação (4.1) é obtida através da aplicação do operador $\int_V \Psi_i(\mathbf{x}) dv$ e obtém-se assim:

$$\frac{dT_i(t)}{dt} + \int_V \Psi_i(\mathbf{x}) [u(\mathbf{x}, t, T) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t)] dv + \mu_i^2(\mathbf{x}) T_i(t) = g_i(t) \quad t > 0 \quad (4.12)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots$

onde

$$g_i(t) = \int_V \Psi_i(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) dv + \int_S \left[\Psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} - T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Psi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right] ds \quad (4.13)$$

$$\int_V \Psi_i(\mathbf{x}) [u(\mathbf{x}, t, T) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t)] dv = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij}^*(t, T) T_j(t) \quad (4.14)$$

onde

$$a_{ij}^*(t, T) = \int_V \Psi_i(\mathbf{x}) [u(\mathbf{x}, t, T) \cdot \nabla \Psi_j(\mathbf{x}, t)] dv \quad (4.15)$$

A equação (4.12) é reescrita, na forma mais compacta como:

$$\frac{dT_i(t)}{dt} + \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij}^*(t, T) T_j(t) = g_i(t) \quad t > 0 \quad (4.16)$$

Transformando a condição inicial através do operador $\int_V \Psi_i(\mathbf{x}) dv$, resulta em:

$$T_i(0) = f_i = \int_V w(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dv \quad (4.17)$$

onde

$$a_{ij}(t, T) = a_{ij}^*(t, T) + \mu_i^2(x) \delta_{ij}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.18)$$

A equação (4.16) origina um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas para os potenciais transformados T_i 's. Para fins computacionais, a equação (4.16) é truncada então na N-ésima coluna e linha, com N suficientemente grande para a convergência desejada. O sistema truncado é escrito da seguinte forma matricial:

$$\mathbf{y}'(t) + \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t) \quad t > 0 \quad (4.19)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{f} \quad (4.20)$$

onde

$$\mathbf{y}'(t) = \{T_1(t), T_2(t), \dots, T_N(t)\}^T \quad (4.21)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{y}) = \{a_{ij}(t, T)\}^T \quad (4.22)$$

$$\mathbf{g}(t) = \{g_1(t), g_2(t), \dots, g_N(t)\}^T \quad (4.23)$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}^T \quad (4.24)$$

O método de solução do problema mostrado na seção 4.1 deste capítulo se dá através da técnica de transformada integral generalizada conforme as etapas descritas a seguir:

Tabela 4.1 – Quadro esquemático dos procedimentos metodológicos de solução.

ETAPA	PROCEDIMENTO
Primeira	Obter um problema auxiliar que contenha o máximo de informações possível do problema original, em relação à geometria e aos operadores nas coordenadas a serem eliminadas na transformação integral.
Segunda	Solucionar o problema auxiliar com a finalidade de se obter as autofunções, autovalores e normas.
Terceira	Desenvolver o par transformada-inversa
Quarta	Transformar o problema com EDP em um sistema com EDO infinito.
Quinta	Obter os campos transformados, a partir do truncamento do sistema da “Etapa 4” em uma ordem suficientemente grande.
Sexta	Determinar o campo original em forma analítica, utilizando a fórmula de inversão.

Fonte: Particular

4.2. PROBLEMA AUXILIAR

Para a transformação da equação (3.15) se faz necessário definir o seguinte problema auxiliar apropriado:

Problema de Autovalor:

$$\frac{d^2\Psi_i(\theta)}{d\theta^2} + \mu_i^2\Psi_i(\theta) = 0 \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (4.25)$$

Condições de contorno:

$$\Psi_i(0) = \Psi_i(2\pi) \quad (4.26)$$

e

$$\Psi_i\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Psi_i\left(\frac{5\pi}{2}\right) \quad (4.27)$$

A solução da equação (4.1) é encontrada analiticamente através de:

$$\Psi_i(\theta) = \text{Sen}(\mu_i\theta) \quad (4.28)$$

e os autovalores são raízes da equação:

$$\text{Sen}(\mu_i\theta) \Rightarrow \mu_i = 2i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.29)$$

$\psi_i(\theta)$ e μ_i são respectivamente as autofunções e os autovalores.

A propriedade de ortogonalidade é satisfeita através de:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta)\Psi_j(\theta)d\theta = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ N_i; & i = j \end{cases} \quad (4.30)$$

A integral de normalização é

$$N_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Psi_i(\theta)]^2 d\theta = \frac{\pi}{4} \quad (4.31)$$

onde N_i é a norma.

4.3. DEFINIÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

Define-se a transformada como:

$$\bar{P}_i(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) P(r, \theta) d\theta \quad (4.32)$$

E a inversa como:

$$P(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\theta) \bar{P}_i(r) \quad (4.33)$$

A autofunção normalizada é então definida como:

$$\Psi_i(\theta) = \frac{\Psi_i(\theta)}{\sqrt{N_i}} \quad (4.34)$$

4.4. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA EDP

A metodologia de transformação da equação (3.15) consiste em multiplicar-se a equação pela autofunção $\Psi_i(\theta)$ e em seguida integrar-se ao longo do domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ em θ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rh^3 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) + \rho \left[-\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] = 6\mu r \omega \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} d\theta \quad (4.35)$$

Ao se desenvolver as regras de derivação em r e θ e em seguida, em cada termo resultante, aplicar-se a integral na equação (4.35), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) h^3 \frac{\partial^2 P(r, \theta)}{\partial r^2} d\theta = -\frac{1}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) h^3 \frac{\partial P(r, \theta)}{\partial r} d\theta - \frac{\alpha}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) h^5 \frac{\partial^2 P(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} d\theta \\ & + \frac{3\alpha}{14r^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) h^7 \frac{\partial P(r, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial^2 P(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} d\theta - \frac{3\alpha}{14r^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) h^7 \left(\frac{\partial P(r, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \\ & + 6\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) h^3 d\theta + 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta - \frac{1}{r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial P(r, \theta)}{\partial \theta} \right) d\theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo-se o potencial $P(r, \theta)$ da equação (4.36) pela inversa citada na equação (4.33), vem:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i(\theta) \Psi_j(\theta) d\theta \right)}_{\nu_{ij}} \frac{d^2 \bar{P}_j(r)}{dr^2} = - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i(\theta) \Psi_j(\theta) d\theta \right)}_{\nu_{ij}} \frac{d \bar{P}_j(r)}{dr} \\
& - \frac{\alpha}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^5 \Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) d\theta \right)}_{\mu_{ij}} \frac{d \bar{P}_j(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i'(\theta) \Psi_j'(\theta) d\theta \right)}_{\nu_{ij}} \bar{P}_j(r) \\
& + \frac{3\alpha}{14r^3} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^7 \overline{\Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) \Psi_k'(\theta)} d\theta \right)}_{\nu_{ijk}} \frac{d \bar{P}_k(r)}{dr} \bar{P}_j(r) \\
& - \frac{3\alpha}{14r^4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^7 \overline{\Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) \Psi_k'(\theta)} d\theta \right)}_{\nu_{ijk}} \bar{P}_k(r) \bar{P}_j(r) \\
& + 6\alpha \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \overline{\Psi_i(\theta)} d\theta}_{\nu_i} + 6 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{\Psi_i(\theta)} \frac{dh}{r \cdot \alpha} d\theta}_{\nu_i}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Reescrevendo a equação (4.37) em função dos coeficientes, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \bar{P}_j(r)}{dr^2} = - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d \bar{P}_j(r)}{dr} - \frac{\alpha}{r} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \frac{d \bar{P}_j(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \bar{P}_j(r) \\
& + \frac{3\alpha}{14r^3} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk} \frac{d \bar{P}_k(r)}{dr} \bar{P}_j(r) - \frac{3\alpha}{14r^4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk} \bar{P}_k(r) \bar{P}_j(r) + 6\alpha E_i + 6F_i
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde os coeficientes A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ijk} , E_i e F_i são dados por:

$$A_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i(\theta) \Psi_j(\theta) d\theta \tag{4.39}$$

$$B_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^5 \Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) d\theta \quad (4.40)$$

$$C_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i'(\theta) \Psi_j'(\theta) d\theta \quad (4.41)$$

$$D_{ijk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^7 \Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) \Psi_k'(\theta) d\theta \quad (4.42)$$

$$E_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i(\theta) d\theta \quad (4.43)$$

$$F_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \quad (4.44)$$

Isolando-se o termo diferencial de segunda ordem do potencial, origina-se um sistema transformado de equações diferenciais ordinárias, dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{P}_j(r)}{dr^2} = & -\frac{1}{r} \frac{d\bar{P}_j(r)}{dr} - \frac{\alpha}{r} \sum_{j=1}^{\infty} G_{ij} \frac{d\bar{P}_j(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij} \bar{P}_j(r) \\ & + \frac{3\alpha}{14r^3} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk} \frac{d\bar{P}_k(r)}{dr} \bar{P}_j(r) - \frac{3\alpha}{14r^4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk} \bar{P}_k(r) \bar{P}_j(r) \\ & + 6\alpha J_i + 6K_i \end{aligned} \quad \begin{array}{l} i, j, k = 1, 2, 3, \dots; \\ \gamma < r < 1 \end{array} \quad (4.45)$$

onde os coeficientes G_{ij} , H_{ij} , I_{ijk} , J_i e K_i são dados por:

$$G_{ij} = A_{ij}^{-1} \cdot B_{ij} \quad (4.46)$$

$$H_{ij} = A_{ij}^{-1} \cdot C_{ij} \quad (4.47)$$

$$I_{ijk} = A_{ij}^{-1} \cdot D_{ijk} \quad (4.48)$$

$$J_i = A_{ij} \cdot E_i \quad (4.49)$$

$$K_i = A_{ij} \cdot F_i \quad (4.50)$$

E para solucionar o sistema de EDO'S temos as seguintes condições de contorno:

$$\bar{P}_i(\gamma) = 0 \quad (4.51)$$

e

$$\bar{P}_i(1) = 0 \quad (4.52)$$

Os coeficientes supracitados têm seus cálculos demonstrados no *APÊNDICE B*.

4.5. CÁLCULO DO POTENCIAL $P(r, \theta)$

O cálculo do potencial $P(r, \theta)$ é obtido através da fórmula de inversão dada por:

$$P(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi_i(\theta) \bar{P}_i(r) \quad (4.53)$$

O algoritmo construído a partir da equação (4.53) foi possível utilizando-se a solução do sistema infinito de EDO'S não lineares cujas condições de contorno são dadas pelas equações (4.51) e (4.52). Esta solução é encontrada numericamente pelo truncamento da série de expansão em um número finito de termos (N) suficiente para garantir soluções convergidas com uma precisão desejada e para tanto é chamada a rotina BVPFD, com dupla precisão, da biblioteca IMSL (1987). Esta rotina é indicada para problemas com alto grau de complexidade tal como o sistema de EDO'S desenvolvido neste trabalho.

A rotina BVPFD resolve sistemas de EDO'S de primeira ordem, entretanto, a formulação transformada do problema em (4.45) possui um sistema de equações de segunda ordem, o qual é modificado para um sistema de primeira ordem equivalente. A referida rotina exige uma tolerância absoluta específica que é imposta a todos os componentes da solução. Além disto, a BVPFD exige também a construção de três a cinco funções por parte do usuário, as quais são chamadas pelo programa principal. As especificações destas funções são: FCNEQN – Especificação do Sistema Diferencial Ordinário; FCNJAC – Especificação do Jacobiano do Sistema; FCNBC – Especificação das Condições de Contorno; FCNPEQ – Especificação das Derivadas Parciais relativas ao parâmetro p; FCNPBC – Especificação das Condições de Contorno relativas ao parâmetro p; sendo que as duas últimas somente são usadas para problemas parametrizados.

4.6. ALGORITMO COMPUTACIONAL

Conforme as formalidade e exigências da rotina BVFPD se fez a redefinição da equação (4.45) com a finalidade de obtenção do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, exposto a seguir:

$$w_i = \overline{P}_i \quad (4.54)$$

$$w_{NP+i} = \frac{d\overline{P}_i}{dr} \quad (4.55)$$

onde $i=1,2,3,\dots$ e w_i é o vetor solução do sistema.

Assim sendo, o sistema a ser resolvido de forma computacional é representado por:

$$\begin{aligned} \frac{dw_{NP+i}}{dr} = & -\frac{1}{r} w_{NP+i} - \frac{\alpha}{r} \sum_{j=1}^{NP} G_{ij} w_{NP+j} - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{NP} H_{ij} w_j \\ & + \frac{3\alpha}{14r^3} \sum_{j=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} I_{ijk} w_{NP+k} w_j - \frac{3\alpha}{14r^4} \sum_{j=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} I_{ijk} w_k w_j + 6\alpha J_i + 6K_i \end{aligned} \quad (4.56)$$

A outra equação do sistema de equação diferencial de primeira ordem é dada por:

$$\frac{dw_i}{dr} = w_{NP+i} \quad ; \quad i=1,2,3,\dots \quad (4.57)$$

com condições de contorno:

$$w_i(\gamma) = 0 \quad (4.58)$$

e

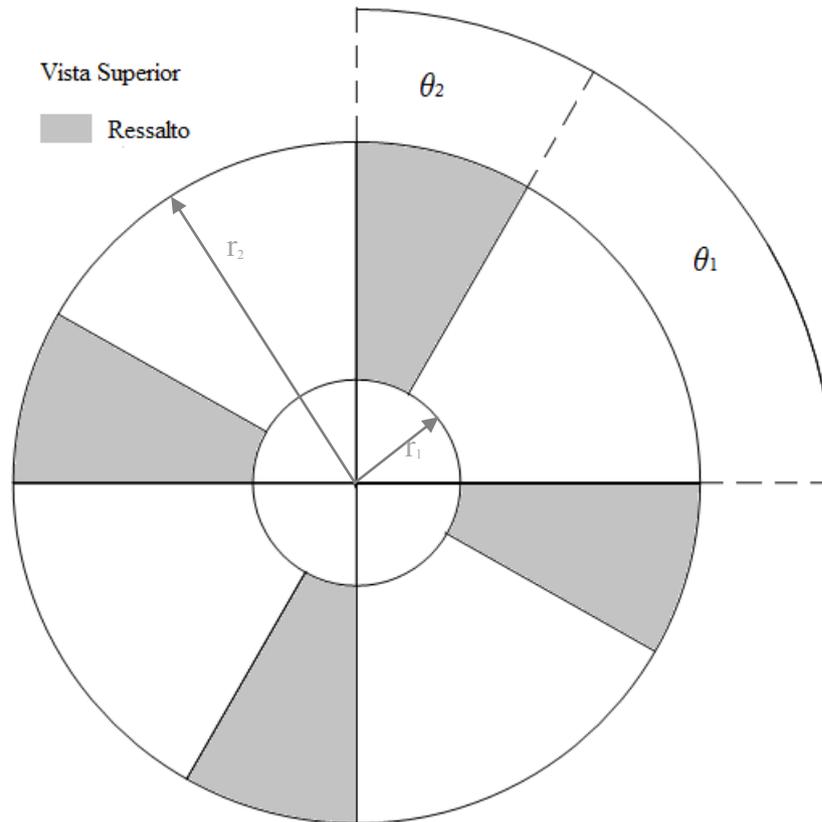
$$w_i(1) = 0 \quad (4.59)$$

Portanto, o sistema de segunda ordem mostrado em (4.45), tendo a série truncada por exemplo, em NP termos, será representado por um sistema de $2*NP$ equações de primeira ordem não lineares, a ser resolvido pela rotina BVFPD em dupla precisão.

4.7. GEOMETRIAS DOS MANCAIS UTILIZADOS

4.7.1. Mancal de Escora Circular com Sapata de Rayleigh de Quatro Ressaltos

Figura 4.1 – Desenho da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular com 4 ressaltos.



Fonte: Prata et al. (1992, 1995)

Simular-se-á um campo de pressão para a geometria apresentada na Figura 4.1, onde será utilizado os seguintes parâmetros para as variáveis na direção radial e circunferencial, respectivamente: $r_1 = 10,50 \mu m$, $r_2 = 13,25 \mu m$, $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ$, cuja a soma entre os ângulos deve obedecer a condição descrita na equação (4.60).

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{nr} \quad (4.60)$$

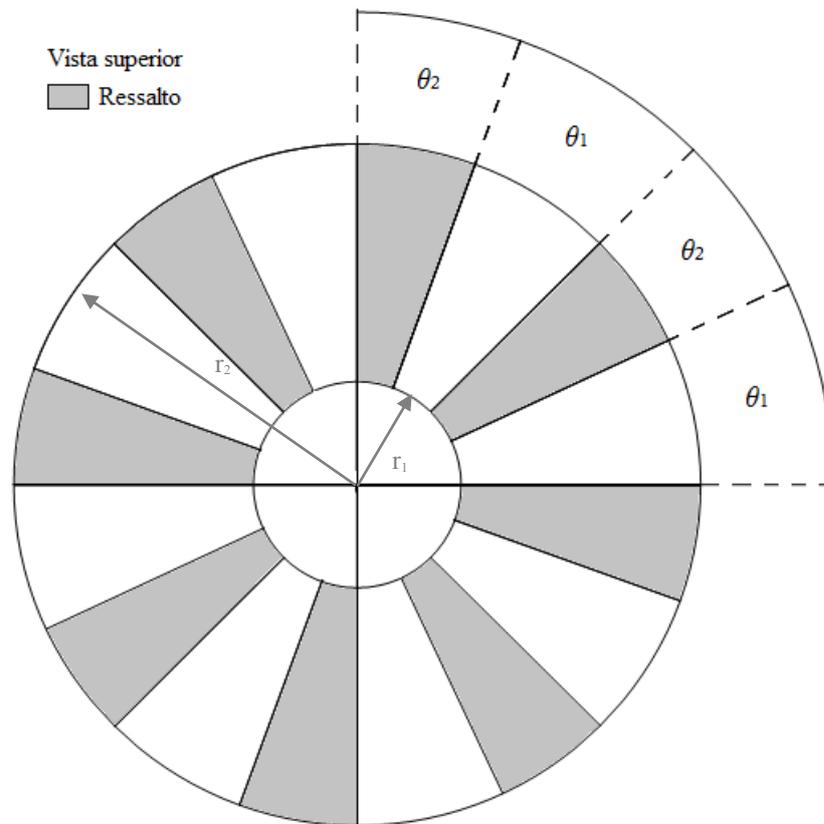
onde θ_1 é o ângulo do rebaixo, θ_2 o ângulo do ressalto e nr o número de ressaltos. Portanto,

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

4.7.2. Mancal de Escora Circular com Sapata de Rayleigh de Oito Ressaltos

Simular-se-á um campo de pressão para a geometria apresentada na Figura 4.2, onde são utilizados os seguintes parâmetros para as variáveis na direção radial e circunferencial, respectivamente: $r_1 = 10,50 \mu m$, $r_2 = 13,25 \mu m$, $\theta_1 = 25^\circ$ e $\theta_2 = 20^\circ$, cuja a soma entre os ângulos deve obedecer a condição descrita na equação (4.60). Portanto, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/4$.

Figura 4.2 – Desenho da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular com 8 ressaltos.

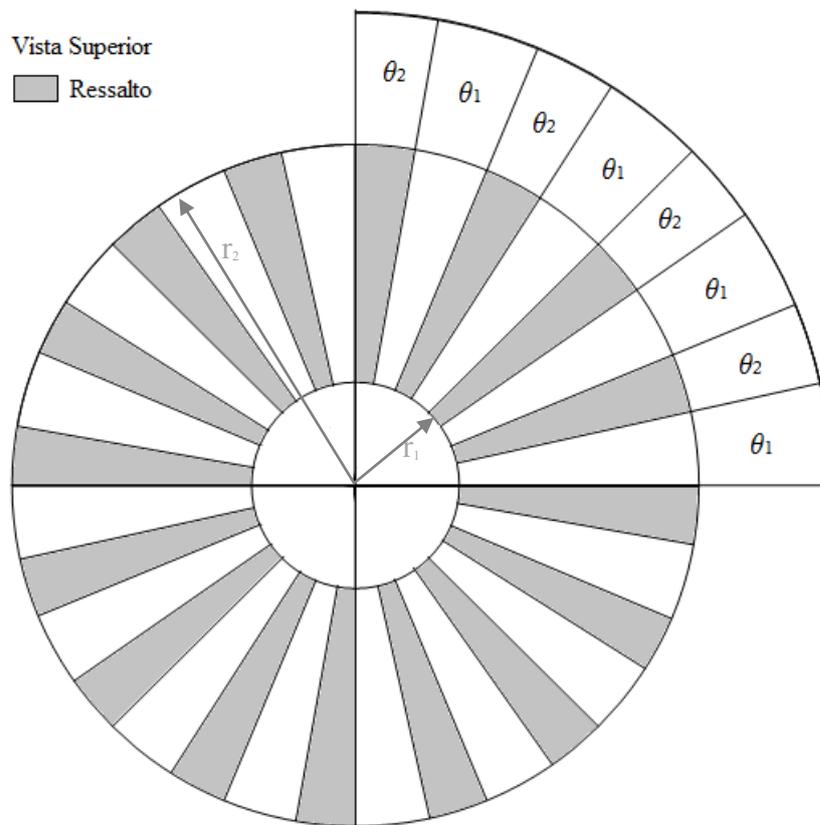


Fonte: Prata et al. (1992, 1995)

4.7.3. Mancal de Escora com Sapata de Rayleigh Circular de Dezesseis Ressaltos

Simular-se-á um campo de pressão para a geometria apresentada na Figura 4.3, onde são utilizados os seguintes parâmetros para as variáveis na direção radial e circunferencial, respectivamente: $r_1 = 10,50 \mu m$, $r_2 = 13,25 \mu m$, $\theta_1 = 12,5^\circ$ e $\theta_2 = 10^\circ$, cuja a soma entre os ângulos deve obedecer a condição descrita na equação (4.60). Portanto, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/8$.

Figura 4.3 – Desenho da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular com 16 ressalto.



Fonte: Prata et al. (1992, 1995)

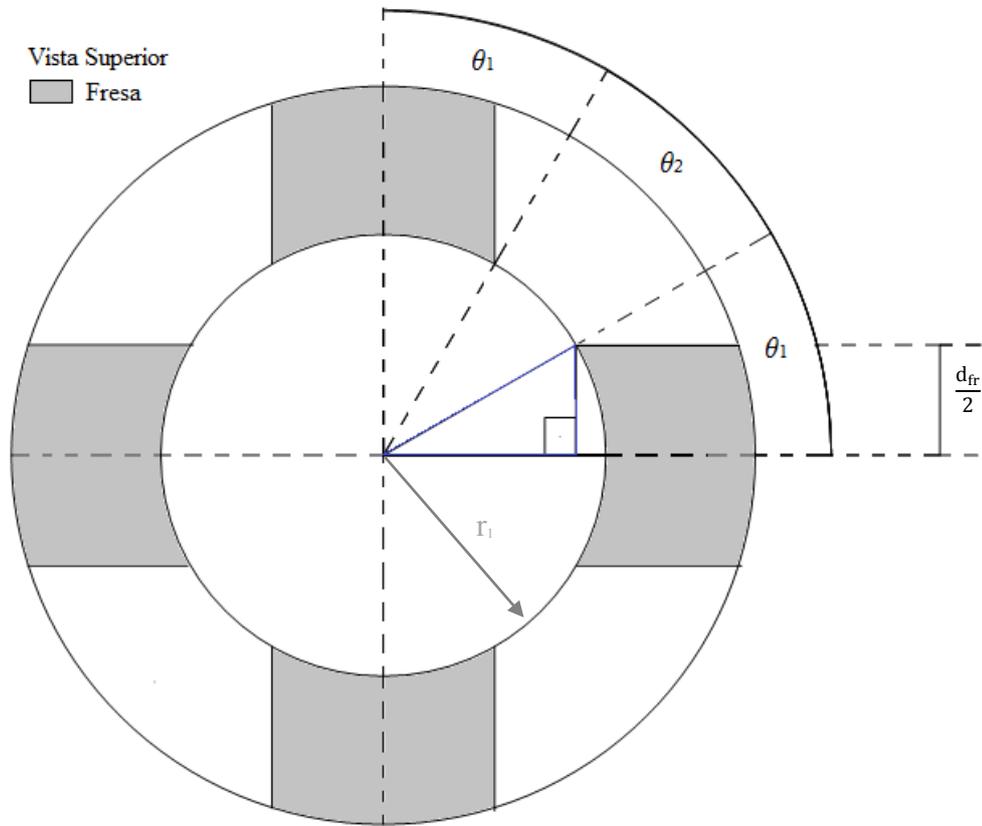
4.7.4. Mancal de Escora Circular com Sapata Fresada

Simular-se-á um campo de pressão para a geometria apresentada na Figura 4.4, onde são utilizados os seguintes parâmetros para as variáveis na direção radial e circunferencial, respectivamente: $r_1 = 10,50 \mu m$, $r_2 = 13,25 \mu m$, $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ$, cuja a soma entre os ângulos deve obedecer a condição descrita na equação (4.61). Portanto,

$$2\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{4} \quad (4.61)$$

onde θ_1 é o ângulo do rebaixo e θ_2 o ângulo do ressalto. Portanto, $2\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Figura 4.4 – Desenho da sapata fresada para um mancal de escora circular.



Fonte: Prata et al. (1992, 1995)

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo é dividido em quatro partes, as quais apresentam os resultados do código computacional cujo enfoque principal é a solução do problema de lubrificação hidrodinâmica. Em cada uma das partes é analisado os resultados para o potencial $P(r, \theta)$, originados através dos códigos computacionais GITT para cada geometria das sapatas dos mancais de escora apresentada no capítulo 4, seções 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3 e 4.7.4, respectivamente. Os programas desses códigos foram implementados em linguagem Fortran 90/95. As simulações foram realizadas em uma plataforma de processador Intel® Core™ 2 Duo CPU T6500 – 2.10 GHz e 4.00 Gb de memória RAM do Laboratório de Simulação de Processos do PPEQ/ UFPA com erro prescrito de 10^{-8} .

5.2. O PROBLEMA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

O principal resultado encontrado a partir da solução da equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos é o campo de pressão que é gerado pelo efeito cunha, e causado pela restrição exigida no escoamento ao passar do rebaixo para o ressalto do mancal.

Todas as simulações efetuadas são com o intuito de analisar o comportamento dos campos de pressão para mancais com geometria das sapatas com 4, 8 e 16 ressaltos, além de também o mancal de escora com geometria de sapata fresada. Cada uma das simulações possuem coeficientes específicos para o sistema de EDO'S, isto é, dependendo da geometria adotada (*Ver APÊNDICE B*).

Os parâmetros geométricos fixos dos mancais utilizados nas simulações estão descritos na Tabela 5.1, de acordo com o número de ressaltos do mancal. As propriedades termofísicas do óleo lubrificante e os parâmetros de operação do mancal estão descritos a partir da Tabela 5.2. Os referidos parâmetros e as referidas propriedades serão os mesmos para todas as simulações deste trabalho.

Tabela 5.1 – Parâmetros Geométricos dos Mancais de Escora usados na simulação

Número de Ressaltos	4 (QUATRO)	8 (OITO)	16 (DEZESSEIS)
θ_1	60°	25°	12,5°
θ_2	30°	20°	10°
Δh	5 μm	5 μm	5 μm
r_1	10,50 mm	10,50 mm	10,50 mm
r_2	13,25 mm	13,25 mm	13,25 mm

Fonte: Blanco et al. (1999, 2014)

Tabela 5.2 – Parâmetros Operacionais dos Mancais de Escora usados na simulação

PARÂMETROS	SÍMBOLO	VALORES	UNIDADES
Viscosidade absoluta do lubrificante	μ	$2,74 \times 10^{-3}$	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$
Massa específica do lubrificante	ρ	876	kg/m^3
Frequência angular da parte móvel do mancal	f	60	Hz
Carga suportável pelo mancal	W	12	N

Fonte: Blanco et al. (1999, 2014)

5.2.1. Análise de Convergência para GITT

A Tabela 5.3 apresenta o potencial $P(r, \theta)$ para $\theta = 60^\circ$ em um mancal de 4 ressaltos, com NP = 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190 e 200 pontos para o código via GITT. Utilizando-se o método de tentativa e erro, observa-se que ao considerar uma espessura $h_1 = 7,36 \mu\text{m}$, a convergência é atingida a partir de 170 pontos nodais (Np), onde o valor da pressão máxima encontrada é de aproximadamente $9,08 \times 10^5$ Pa avaliada na posição radial igual a 11,875 mm.

A Tabela 5.4 apresenta o potencial $P(r, \theta)$ para $\theta = 25^\circ$ e $\theta = 70^\circ$ em um mancal de 8 ressaltos, com NP = 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190 e 200 pontos para o código via GITT. Com o uso do método supracitado, observa-se que ao considerar uma espessura $h_1 = 9,04 \mu\text{m}$, a convergência é atingida a partir de 180 pontos nodais (NP) onde o valor da pressão encontrada para $\theta = 25^\circ$ é de aproximadamente $4,62 \times 10^5$ Pa e 160 pontos nodais onde o

valor da pressão para $\theta = 70^\circ$ é de aproximadamente $4,60 \times 10^5$ Pa, ambos avaliados na posição radial igual a 11,875 mm.

A Tabela 5.5 apresenta o potencial $P(r, \theta)$ para $\theta = 12,5^\circ$ e $\theta = 22,5^\circ$ em um mancal de 16 ressaltos, com NP = 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190 e 200 pontos para o código via GITT. Observa-se que ao considerar uma espessura $h_1 = 10,45 \mu\text{m}$, a convergência é atingida a partir de 150 pontos nodais, onde o valor da pressão encontrada para $\theta = 12,5^\circ$ é de aproximadamente $2,75 \times 10^5$ Pa e o valor da pressão para $\theta = 22,5^\circ$ é de aproximadamente $2,74 \times 10^5$ Pa, ambos avaliados na posição radial igual a 11,875 mm.

A Tabela 5.6 apresenta o potencial $P(r, \theta)$ para $\theta = 57,5^\circ$ e $\theta = 80^\circ$ em um mancal de 16 ressaltos, com NP = 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190 e 200 pontos para o código via GITT. Observa-se que ao considerar uma espessura $h_1 = 10,45 \mu\text{m}$, a convergência é atingida a partir de 150 pontos nodais, onde o valor da pressão encontrada para $\theta = 57,5^\circ$ é de aproximadamente $2,74 \times 10^5$ Pa e o valor da pressão para $\theta = 80^\circ$ é de aproximadamente $2,75 \times 10^5$ Pa, ambos avaliados na posição radial igual a 11,875 mm.

A Tabela 5.7 apresenta o potencial $P(r, \theta)$ para $\theta = 30^\circ$, com NP = 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190 e 200 pontos para o código via GITT. Observa-se que ao considerar uma espessura $h_1 = 7,36 \mu\text{m}$, a convergência é atingida a partir de 150 pontos nodais onde o valor da pressão encontrada é de aproximadamente $9,08 \times 10^5$ Pa avaliado na posição radial igual a 11,875 mm.

Tabela 5.3 – Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 7,36 \mu\text{m}$ para um mancal com 4 ressaltos.

Teta = 60° ; $h_1 = 7.36 \times 10^{-6}$								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	6.32E+05	6.40E+05	6.42E+05	6.43E+05	6.43E+05	6.43E+05	6.43E+05	6.44E+05
0.011600	8.61E+05	8.69E+05	8.72E+05	8.72E+05	8.73E+05	8.73E+05	8.73E+05	8.73E+05
0.011875	8.96E+05	9.04E+05	9.07E+05	9.07E+05	9.08E+05	9.08E+05	9.08E+05	9.08E+05
0.012150	8.81E+05	8.90E+05	8.93E+05	8.93E+05	8.93E+05	8.94E+05	8.94E+05	8.94E+05
0.012700	6.76E+05	6.87E+05	6.91E+05	6.91E+05	6.9b1E+05	6.92E+05	6.92E+05	6.92E+05
0.013250	0.00E+00							

Fonte: Particular

Tabela 5.4 – Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 9,04 \mu\text{m}$ para um mancal com 8 ressaltos

Teta = 25° ; $h_1 = 9.04 \times 10^{-6}$								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	3.16E+05	3.24E+05	3.26E+05	3.26E+05	3.27E+05	3.27E+05	3.27E+05	3.27E+05
0.011600	4.32E+05	4.41E+05	4.43E+05	4.43E+05	4.44E+05	4.44E+05	4.44E+05	4.44E+05
0.011875	4.49E+05	4.58E+05	4.61E+05	4.61E+05	4.61E+05	4.62E+05	4.62E+05	4.62E+05
0.012150	4.41E+05	4.51E+05	4.53E+05	4.54E+05	4.54E+05	4.54E+05	4.55E+05	4.55E+05
0.012700	3.36E+05	3.47E+05	3.50E+05	3.50E+05	3.51E+05	3.51E+05	3.51E+05	3.52E+05
0.013250	0.00E+00							
Teta = 70° ; $h_1 = 9.04 \times 10^{-6}$								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	3.16E+05	3.23E+05	3.25E+05	3.25E+05	3.26E+05	3.26E+05	3.26E+05	3.26E+05
0.011600	4.32E+05	4.39E+05	4.41E+05	4.42E+05	4.42E+05	4.42E+05	4.42E+05	4.43E+05
0.011875	4.49E+05	4.57E+05	4.59E+05	4.60E+05	4.60E+05	4.60E+05	4.60E+05	4.61E+05
0.012150	4.41E+05	4.49E+05	4.52E+05	4.52E+05	4.53E+05	4.53E+05	4.53E+05	4.53E+05
0.012700	3.36E+05	3.46E+05	3.49E+05	3.50E+05	3.50E+05	3.50E+05	3.50E+05	3.51E+05
0.013250	0.00E+00							

Fonte: Particular

Tabela 5.5 – Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 10,45 \mu\text{m}$ para um mancal com 16 ressaltos

Teta = 12.5° ; h1 = 10.45d-6								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	1.86E+05	1.93E+05	1.95E+05	1.95E+05	1.95E+05	1.96E+05	1.96E+05	1.96E+05
0.011600	2.54E+05	2.61E+05	2.64E+05	2.64E+05	2.64E+05	2.65E+05	2.65E+05	2.65E+05
0.011875	2.64E+05	2.72E+05	2.75E+05	2.75E+05	2.75E+05	2.76E+05	2.76E+05	2.76E+05
0.012150	2.60E+05	2.68E+05	2.71E+05	2.71E+05	2.71E+05	2.72E+05	2.72E+05	2.72E+05
0.012700	1.99E+05	2.07E+05	2.10E+05	2.11E+05	2.11E+05	2.11E+05	2.11E+05	2.12E+05
0.013250	0.00E+00							
Teta = 35° ; h1 = 10.45d-6								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	1.85E+05	1.92E+05	1.94E+05	1.94E+05	1.94E+05	1.95E+05	1.95E+05	1.95E+05
0.011600	2.53E+05	2.60E+05	2.63E+05	2.63E+05	2.63E+05	2.64E+05	2.64E+05	2.64E+05
0.011875	2.63E+05	2.71E+05	2.74E+05	2.74E+05	2.74E+05	2.75E+05	2.75E+05	2.75E+05
0.012150	2.59E+05	2.67E+05	2.70E+05	2.70E+05	2.70E+05	2.71E+05	2.71E+05	2.71E+05
0.012700	1.98E+05	2.06E+05	2.09E+05	2.10E+05	2.10E+05	2.10E+05	2.10E+05	2.11E+05
0.013250	0.00E+00							

Fonte: Particular

Tabela 5.6 – Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 10,45 \mu\text{m}$ para um mancal com 16 ressaltos

Teta = 57.5° ; h1 = 10.45d-6								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	1.85E+05	1.92E+05	1.94E+05	1.94E+05	1.94E+05	1.95E+05	1.95E+05	1.95E+05
0.011600	2.53E+05	2.60E+05	2.63E+05	2.63E+05	2.63E+05	2.64E+05	2.64E+05	2.64E+05
0.011875	2.63E+05	2.71E+05	2.74E+05	2.74E+05	2.74E+05	2.75E+05	2.75E+05	2.75E+05
0.012150	2.59E+05	2.67E+05	2.70E+05	2.70E+05	2.70E+05	2.71E+05	2.71E+05	2.71E+05
0.012700	1.98E+05	2.06E+05	2.09E+05	2.10E+05	2.10E+05	2.10E+05	2.10E+05	2.11E+05
0.013250	0.00E+00							
Teta = 80° ; h1 = 10.45d-6								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	1.86E+05	1.93E+05	1.95E+05	1.95E+05	1.95E+05	1.96E+05	1.96E+05	1.96E+05
0.011600	2.54E+05	2.61E+05	2.64E+05	2.64E+05	2.64E+05	2.65E+05	2.65E+05	2.65E+05
0.011875	2.64E+05	2.72E+05	2.75E+05	2.75E+05	2.75E+05	2.76E+05	2.76E+05	2.76E+05
0.012150	2.60E+05	2.68E+05	2.71E+05	2.71E+05	2.71E+05	2.72E+05	2.72E+05	2.72E+05
0.012700	1.99E+05	2.07E+05	2.10E+05	2.11E+05	2.11E+05	2.11E+05	2.11E+05	2.12E+05
0.013250	0.00E+00							

Fonte: Particular

Tabela 5.7 – Convergência do potencial $P(r, \theta)$ com $h_1 = 7,36 \mu\text{m}$ para um mancal fresado

Teta = 30° ; $h_1 = 7.36 \times 10^{-6} \text{ m}$								
r (m) \ NP	50	100	150	160	170	180	190	200
0.010500	0.00E+00							
0.011050	6.32E+05	6.40E+05	6.42E+05	6.43E+05	6.43E+05	6.43E+05	6.43E+05	6.43E+05
0.011600	8.62E+05	8.69E+05	8.72E+05	8.72E+05	8.72E+05	8.73E+05	8.73E+05	8.73E+05
0.011875	8.96E+05	9.04E+05	9.07E+05	9.07E+05	9.08E+05	9.08E+05	9.08E+05	9.08E+05
0.012150	8.81E+05	8.90E+05	8.93E+05	8.93E+05	8.93E+05	8.94E+05	8.94E+05	8.94E+05
0.012700	6.77E+05	6.87E+05	6.91E+05	6.91E+05	6.91E+05	6.92E+05	6.92E+05	6.92E+05
0.013250	0.00E+00							

Fonte: Particular

5.2.2. Campos de Pressão

Com a definição da malha computacional mostrar-se-á agora os resultados de campo de pressão para os mancais com 4, 8 e 16 ressaltos e também para o mancal fresado; os parâmetros geométricos utilizados são aqueles listados na Tabela 5.1. Os resultados são gerados a partir do código computacional GITT.

A distribuição da pressão em função da posição circunferencial ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) para um mancal com quatro ressaltos é apresentada na Figura 5.1 para a posição radial em $r = (r_1 + r_2)/2$ ou equivalente a 11,875 mm. Na Figura 5.2 é apresentada a distribuição da pressão em função da posição circunferencial para uma variação angular de 0° a 360° . Nas duas situações considerou-se 200 pontos nodais.

Figura 5.1 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal de 4 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.

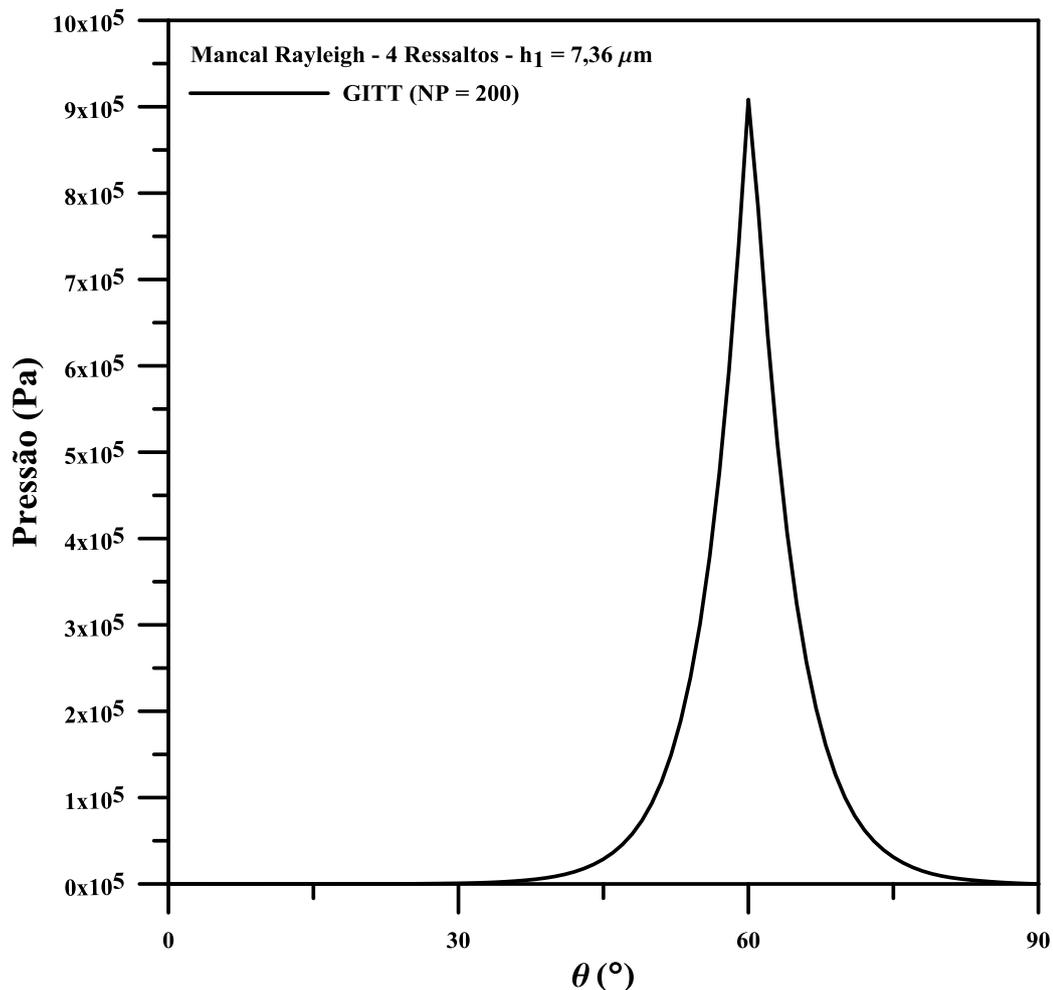
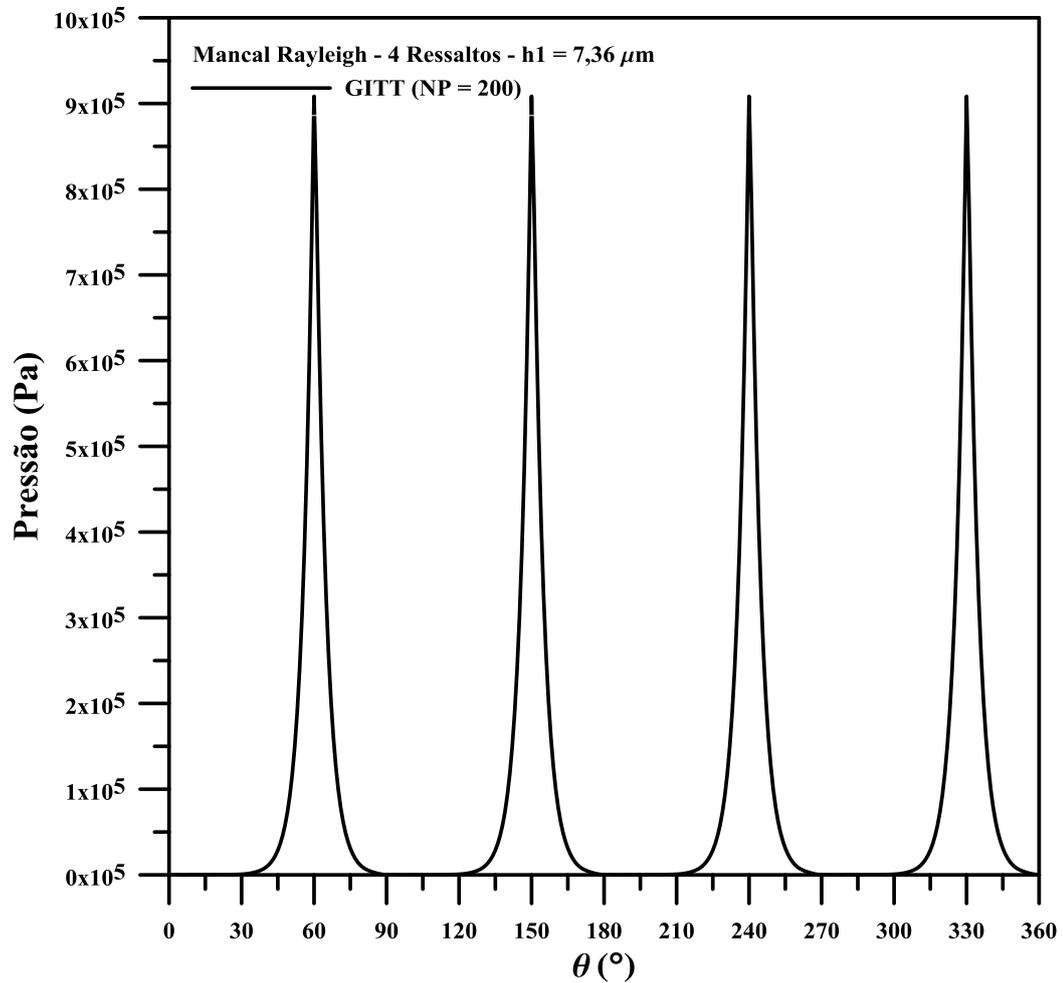


Figura 5.2 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal de 4 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.



A distribuição da pressão em função da posição circunferencial ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) para um mancal com oito ressaltos é apresentada na Figura 5.3 para a posição radial em $r = (r_1 + r_2)/2$ ou equivalente a 11,875 mm. Na Figura 5.4 é apresentada a distribuição da pressão em função da posição circunferencial para uma variação angular de 0° a 360° . Nas duas situações considerou-se 200 pontos nodais.

Figura 5.3 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal de 8 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.

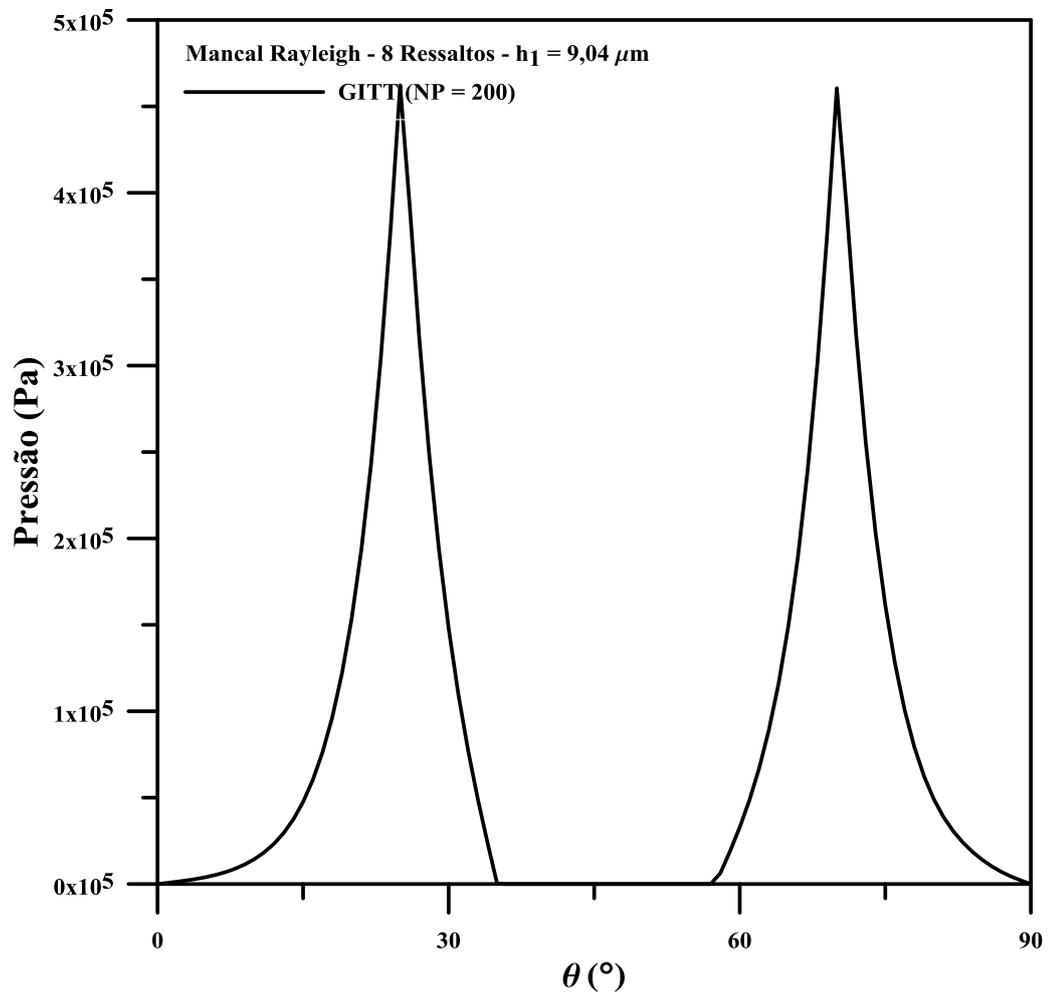
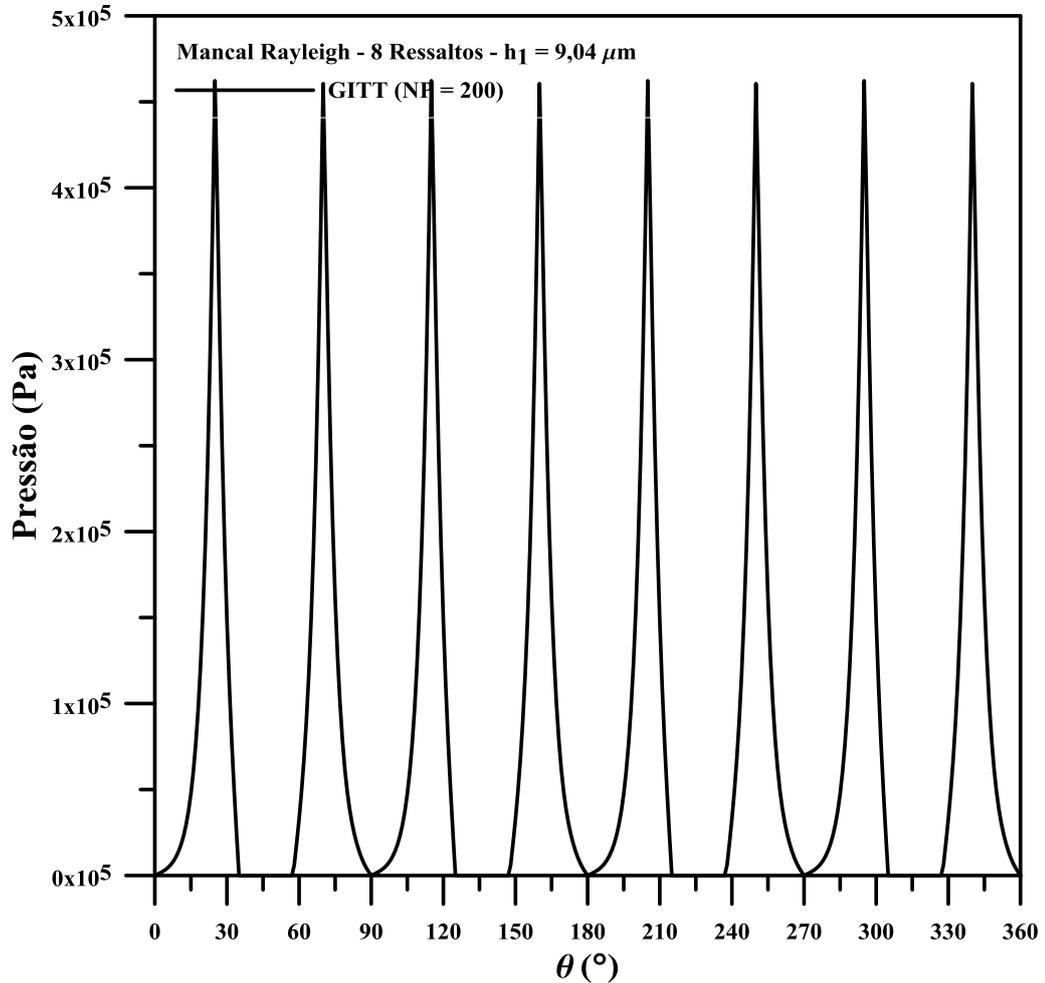


Figura 5.4 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal de 8 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.



A distribuição da pressão em função da posição circunferencial ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) para um mancal com dezesseis ressaltos é apresentada na Figura 5.5 para a posição radial em $r = (r_1 + r_2)/2$ ou equivalente a 11,875 mm. Na Figuras 5.6 é apresentada a distribuição da pressão em função da posição circunferencial para uma variação angular de 0° a 360° . Nas duas situações considerou-se 200 pontos nodais.

Figura 5.5 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal de 16 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.

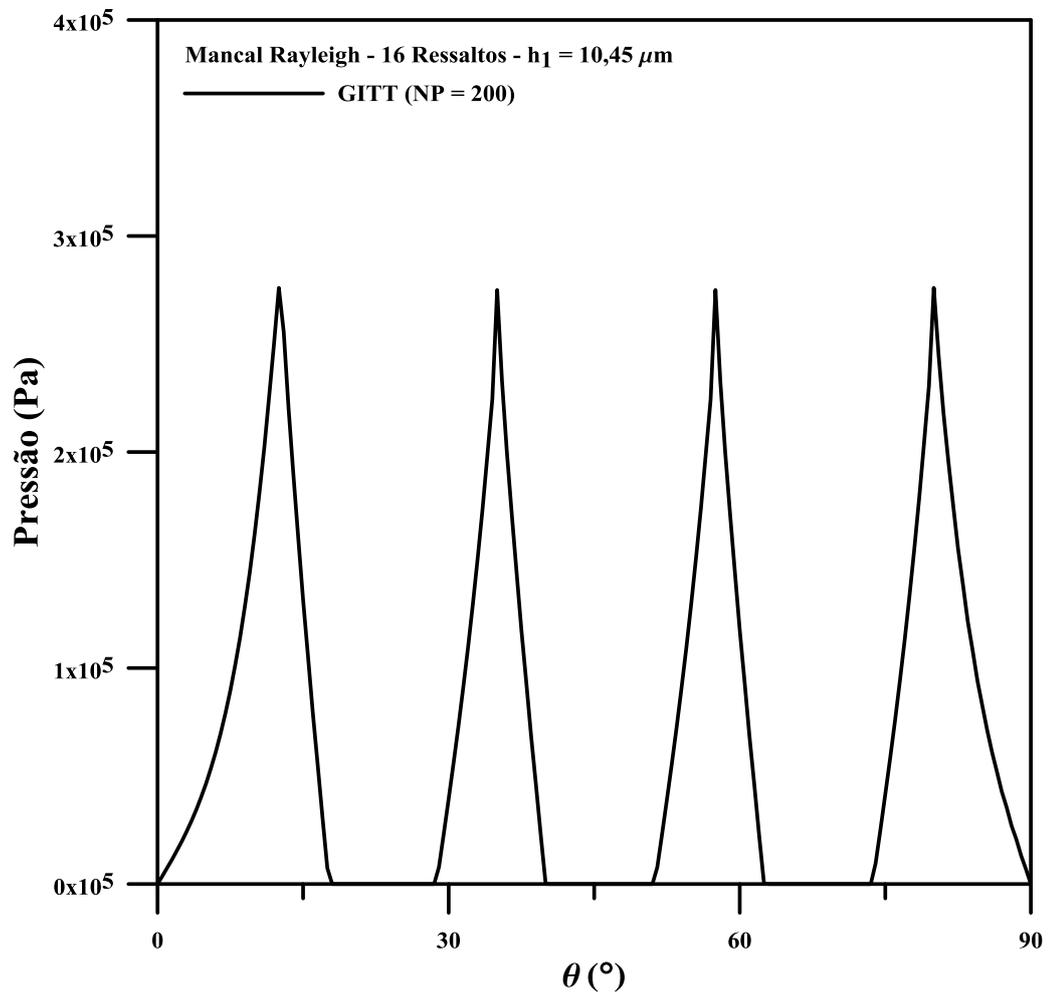
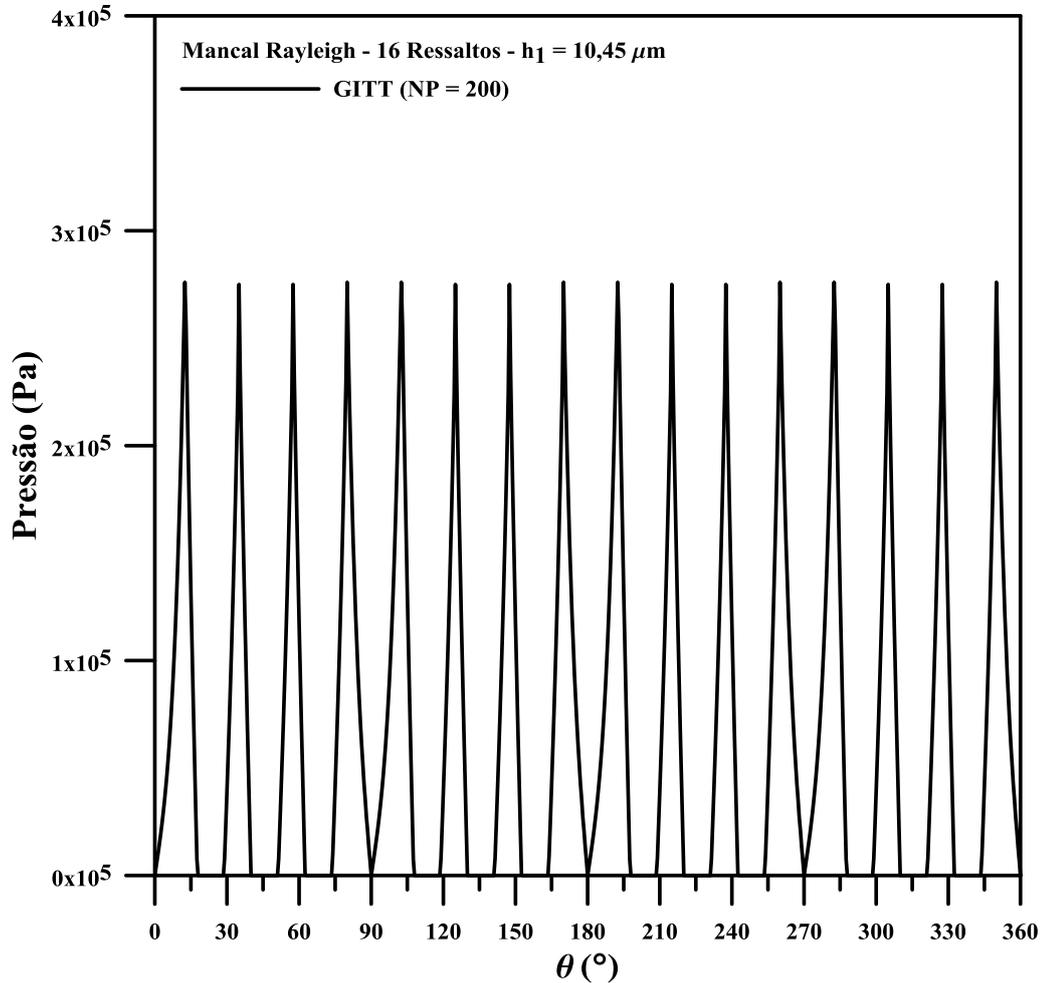


Figura 5.6 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal de 16 ressaltos, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.



A distribuição da pressão em função da posição circunferencial ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) para um mancal fresado é apresentada na Figura 5.7 para a posição radial em $r = (r_1 + r_2)/2$ ou equivalente a 11,875 mm. A Figura 5.8 é apresentada a distribuição da pressão em função da posição circunferencial para uma variação angular de 0° a 360° , respectivamente. Nas duas situações considerou-se 200 pontos nodais.

Figura 5.7 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 90^\circ$) para um mancal fresado, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.

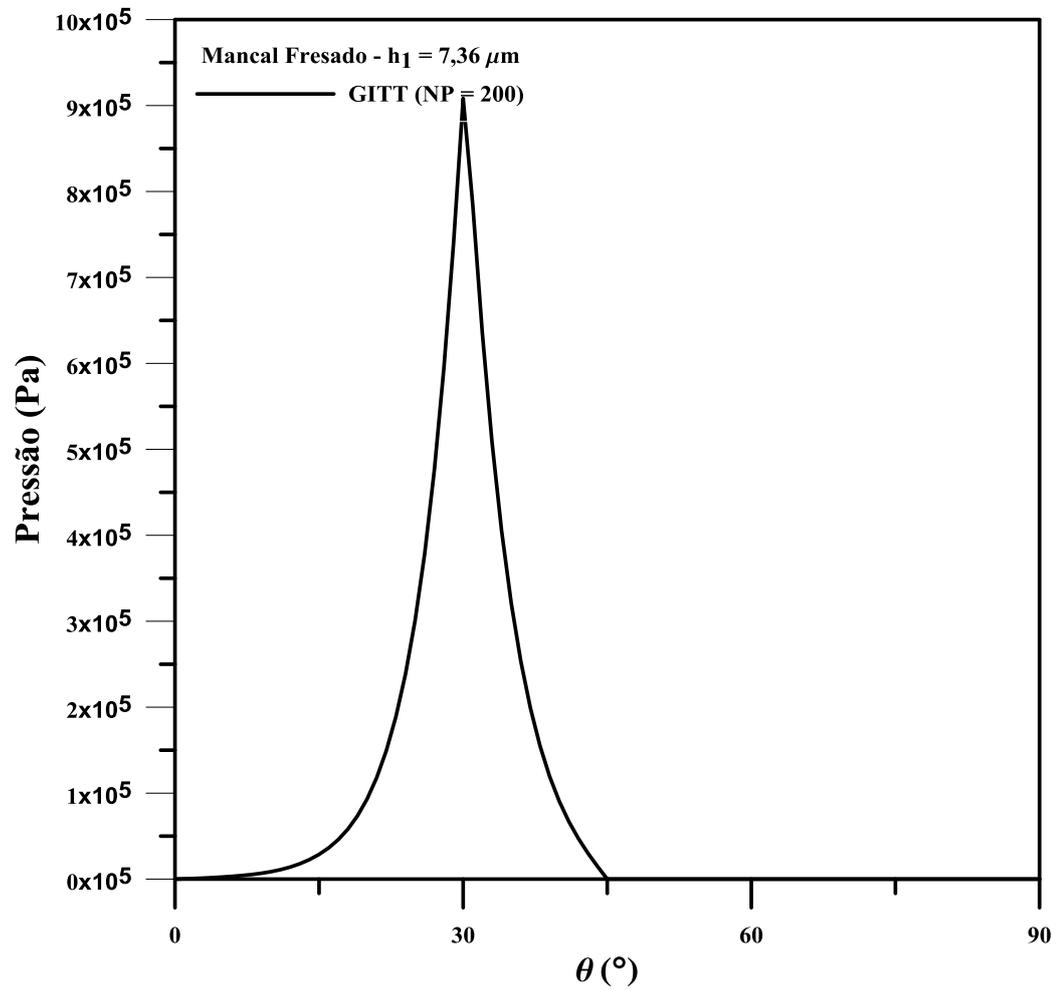
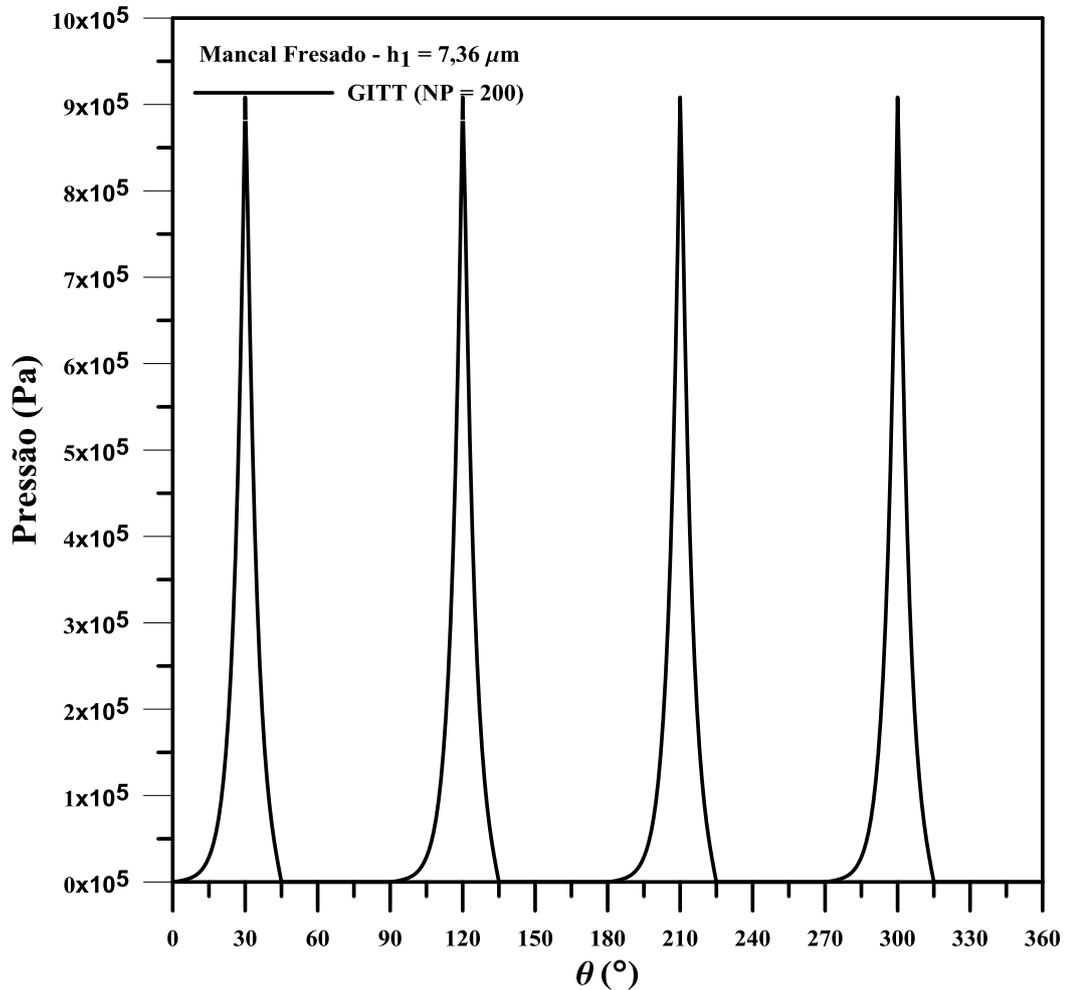


Figura 5.8 – Distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial ($0^\circ - 360^\circ$) para um mancal fresado, na posição 11,875 mm e 200 pontos nodais.



Nas Figuras 5.1 a 5.6 observa-se, que com o aumento do número de ressaltos para o mancal, a pressão no ponto entre o ressalto e o rebaixo diminui. Este fato ocorre devido à existência de um maior número de regiões de restrição ao escoamento. Devido a carga a ser suportada é a mesma e o número de picos de pressão é maior, o valor da pressão em cada pico diminui. Este efeito está associado ao aumento de h_1 e h_2 . Assim, estando operando com um maior afastamento do assento, o mancal deverá consumir uma menor potência viscosa. Este resultado é de fato verificado conforme mostrado na Tabela 5.8. Da tabela vê-se que a potência consumida por atrito tende a diminuir com o aumento do número de ressaltos. Esta redução na potência consumida (P_c) ocorre devido ao aumento da espessura de filme fluido.

Tabela 5.8 – Potência Consumida e h_1 em função do número de ressaltos do mancal

Parâmetro \ Número de Ressaltos	4 (QUATRO)	8 (OITO)	16 (DEZESSEIS)
Potência Consumida (W)	2,73	2,08	1,70
Espessura do filme fluido (μm)	7,36	9,04	10,45

Fonte: Particular

A Figura 5.8 apresenta a distribuição de pressão em função do ângulo teta para o mancal fresado. Esta distribuição de pressão foi avaliada na direção radial em 11,875 mm. Observa-se na referida figura que para $\theta = 30^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\theta = 210^\circ$ e $\theta = 300^\circ$, existe um acentuado pico na pressão. As mudanças existentes do ressaltos para o rebaixo ocorrem nestas posições e ocasiona uma diminuição da área de escoamento, e provoca este aumento de pressão. Nota-se um comportamento semelhante para o mancal com quatro ressaltos, mudando apenas a posição circunferencial do pico na pressão, conforme é mostrado nas Tabelas 5.3 e 5.7, as quais fazem referência aos mancais com sapatas de quatro ressaltos e fresada, respectivamente.

5.2.3. Comparação GITT vs MVF

A Figura 5.9 apresenta duas curvas para efeito de comparação e validação do método matemático utilizado neste trabalho, e para tanto, observou-se apenas a distribuição de pressão em função do ângulo teta para o mancal de Rayleigh com sapata de quatro ressaltos. Tal comparação se deu entre os resultados obtidos neste trabalho (ver Figura 5.1) e os dados obtidos no trabalho de (BLANCO et al, 2014). Nos casos dos demais mancais pressupõe-se que tem-se um analogia na característica dos resultados.

A Figura 5.10 apresenta os campos de pressão ao longo das direções X(m) e Y(m), seus valores foram obtidos através das seguintes expressões:

$$X = r \cos(\theta) \text{ e } Y = r \sin(\theta)$$

A distribuição de pressão em função de X e Y é mostrada através de uma malha 0,015m vs 0,015m, para um intervalo de 0° a 90° .

Figura 5.9 – Comparação dos métodos MVF (Blanco et al., 2014) e GITT da distribuição da pressão ao longo da direção circunferencial para um mancal de escora com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, na posição 11,875 mm.

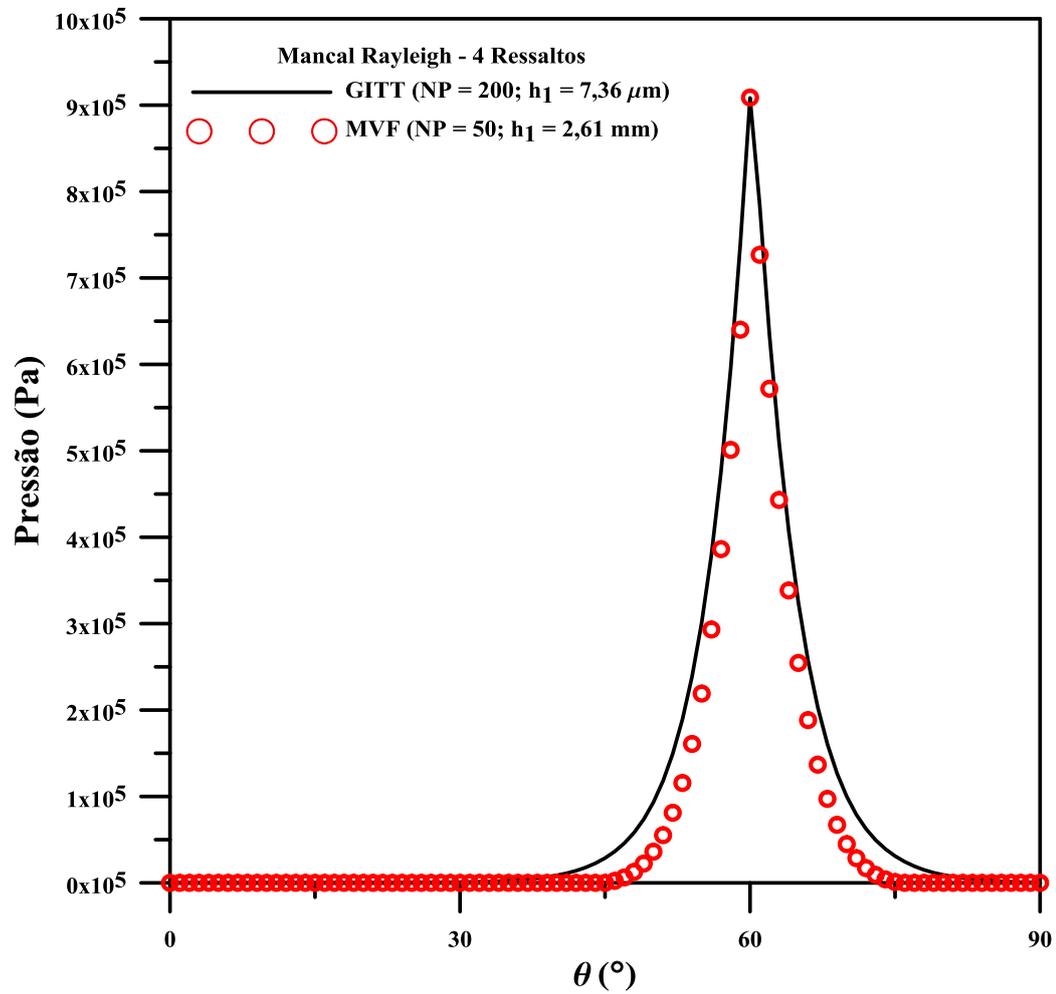
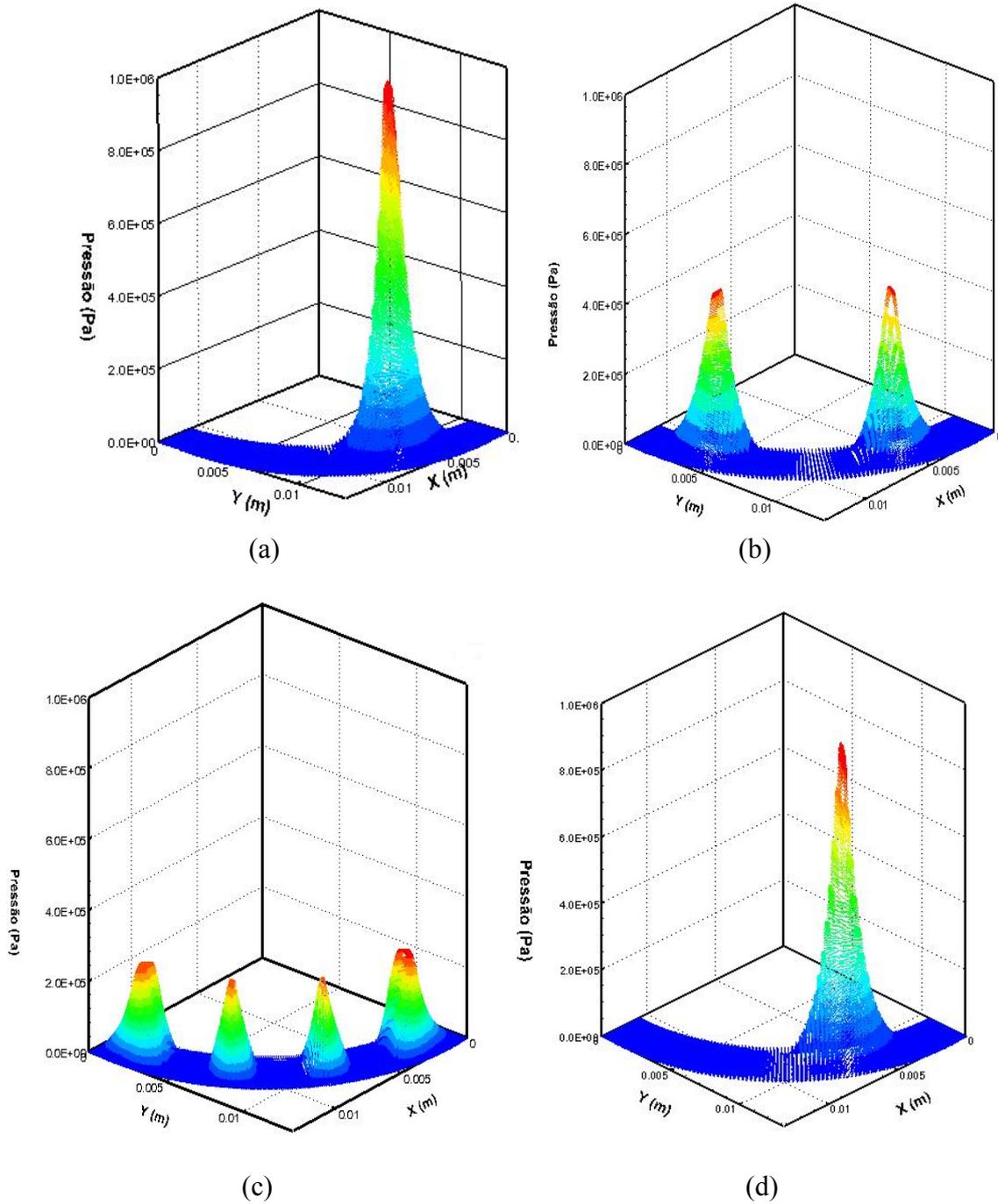


Figura 5.10 – Campo de pressão ao longo da malha XY apresentado em um intervalo de 0-90 graus: (a) Mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos; (b) Mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos; (c) Mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos; (d) Mancal com sapata fresada.



CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi apresentada, uma formulação matemática que acrescenta à equação de Reynolds os termos inerciais centrífugos e que por esse motivo a equação diferencial parcial da pressão foi chamada de equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos. A referida equação foi utilizada para a simulação do problema de lubrificação hidrodinâmica para mancais com sapatas circulares de quatro, oito e dezesseis ressalto e sapata circular fresada, isto é, sendo somente possível após a sua solução encontrada através da metodologia da técnica de transformada GITT. Além disto, foi apresentado os parâmetros de desempenho do mancal, carga suportada e potência consumida, os quais são oriundos a partir da integração do potencial da pressão calculado de forma analítico-numérica.

6.2. CONCLUSÕES

- a) Há um salto na distribuição da pressão, nas regiões de mudança na interface entre o rebaixo e o ressalto do mancal. Esse fenômeno ocorre devido a diminuição da área de escoamento denominado de efeito cunha e é neste momento que o mancal é dotado de suportar carga do peso do motor elétrico.
- b) À medida que se propõe aumentar o número de ressalto do mancal, a pressão diminui no instante de mudança do rebaixo para o ressalto. Isto é devido ao fato de existir um maior número de regiões de restrição ao escoamento. Desta forma o mancal opera com um afastamento maior do rebaixo, e como consequência possui uma menor potência.
- c) O desempenho do mancal fresado é superior ao do mancal com quatro ressalto.
- d) O código computacional desenvolvido para resolver o problema de lubrificação hidrodinâmica, através do método GITT com uso da rotina BVFPD, mostrou-se bastante eficaz, porém apresentou uma demora na aquisição da convergência do potencial.
- e) O Método GITT utilizado no presente trabalho obteve um resultado bastante considerável quando comparado com o Método MVF (BLANCO et al., 2014), pois os resultados foram tão satisfatórios quanto ao do MVF e isto pode ser verificado na

Figura 5.9 do capítulo 5. Portanto, pode-se concluir que a GITT é um método que garante validade em resultados de problemas desta natureza.

6.3. SUGESTÕES

Outras pesquisas podem ser feitas, como por exemplo, a aplicação de um método de otimização para o método de solução via GITT.

Sugere-se também um estudo com dados reais obtidos em equipamentos semelhantes aos utilizados nas indústrias de fabricação de mancais. Como contrapartida validar os dois métodos MVF e GITT ainda mais.

Sugere-se também um estudo com mancais de sapatas em menores e maiores quantidades das quais foram utilizadas neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGHIR, M., ALSAYED, A., NICOLAS, D., **The finite volume solution of the Reynolds equation of lubrication with film discontinuities**. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, pp. 2119-2132, 2002.
- BAGCI, C., SINGH, A. P., **Hydrodynamic Lubrication of Finite Slider Bearings: Effect of One Dimensional Film Shape and Their Computer Aided Optimum Designs**. Journal of Lubrication Technology, v. 105, pp. 48-66, January, 1983.
- BOURGIN, P., GAY, B. **The Optimum Rayleigh Bearing in Terms of Load Capacity or Friction for Non-Newtonian Lubricants**. Journal of Lubrication Technology, v. 107, pp. 59-67, January, 1985.
- BLANCO, C. J. C., **Otimização de Mancais de Escora Circulares com Sapatas Planas**. 1998. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica. Centro Tecnológico. Universidade Federal de Santa Catarina, 1998.
- BLANCO, C. J. C., PRATA, A. T., **Otimização de Mancais de Escora Circulares com Sapatas Planas**. 1998. V Congresso de Engenharia Mecânica Norte Nordeste, 1999.
- BLANCO, C. J. C., PRATA, A. T., **Otimização de Mancais de Escora Circulares com Sapatas Planas**. 1999. Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Águas de Lindóia-SP, 22 a 26 de Novembro, 1999.
- BLANCO, C. J. C., PRATA, A. T., PESSOA, F. C. L., **Simulation and optimization of thrust circular bearings with planes sector-shaped**. Emerald Group Publishing Limited, Industrial Lubrication and Tribology v. 66/1, pp. 75–82, 2014.
- CAMERON, A., **The Principles of Lubrication**. London, 1966.
- CHOW, C. Y., CHENG, H. S., WILCOCK, D. F., **Optimum Surface Profile for the Enclosed Pocket Hydrodynamic Gas Thrust Bearing**. Journal of Lubrication Technology, v. 92, pp. 318-324, April, 1970.
- CONSTANTINESCU, C., **Le problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations non-linéaires**. Séminaire de Théorie du Potentiel Paris 1972–1974. Lecture Notes in Mathematics, vol. 518, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

COTTA, R. M., **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**. Rio de Janeiro, CRC Press, 1993.

COUTO, P. R. C., **Análise de Mancais Radiais Hidrodinâmicos com Aplicação em Compressores Herméticos de Refrigeração**. 2006. Tese (Doutorado). Curso de Engenharia Mecânica. Centro Tecnológico. Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

DUARTE JR., D., **Modelagem Matemática e Simulação em Mancais Hidrodinâmicos**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica. Universidade de São Paulo, 1987.

DUARTE JR., D., **Tribologia, Lubrificação e Mancais de Deslizamento**. 1ª Edição. Ciência Moderna, São Paulo, 2005.

FERNANDES, J. R. S. e PRATA, A. T., Estudo de Formas Alternativas para Sapatas em Mancais Axiais de Escora, Relatório de Pesquisa, RHAE/ CNPq/ UFSC, 1996.

GUNTER, E. J. Jr., **Dynamic Stability of Rotor Bearing Systems**, NASA SP-113, Vol. 29, 1966.

GROSS, W. A., **Gas Film Lubrication**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962.

IMSL, Library, MATH/LIB. Houston, Texas, 1987.

JANG, G. H.; LEE, S. H., KIM, H. W.; **Finite Element Analysis of the Coupled Journal and Thrust Bearing in a Computer Hard Disk Drive**; Transactions of ASME – Journal of Tribology, Vol. 128, pp. 335-340, Abr. 2006.

JOST, H. P. (2006). **Tribology: How a word was coined 40 years ago**. TRIBOLOGY AND LUBRICATION TECHNOLOGY. 62 (3), pp 24-29

KANG, K., RHIM, Y., SUNG, K.; **A study of oil-lubricated Herringbone-Grooved Journal bearings – Part 1: Numerical Analysis**, ASEM Journal of Tribology, Vol. 118, p. 906-911, 1996.

KOGURE, K., FUKUI, S., MITSUYA, Y. and KANEKO, R., “**Design of Negative Pressure Slider for Magnetic Recording Disks**”, Journal of Lubrication Technology, Vol. 105, pp. 496-502, 1983.

MACÊDO, E. N., **Simulação computacional e estimativa de propriedades termofísicas na combustão de troncos cilíndricos de madeira**. 1998. Tese (Doutorado). Curso de Engenharia Mecânica. Centro Tecnológico. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1998.

MADAY, C. J., The One-Dimensional Optimum Hydrodynamic Gas Slider Bearing. *Journal of Lubrication Technology*, v. 90, pp. 281-284, January, 1968.

MELO, F. X., **Modelagem e Simulação de Mancais Hidrodinâmicos Radiais**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Curso de Engenharia Física. Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2010.

MIKHAILOV, M. D., ÖZISIK, M. N., **Unified Analysis and Solutions of heat and transfer mass diffusion**, New York: John Wiley, 1984.

MIRANDA, W. M., **Análise de Rotores Flexíveis apoiados em Mancais Radiais Elípticos e Cilíndricos utilizando o Método de Elementos Finitos**. 2012. Tese (Doutorado). Curso de Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

OLIVEIRA, J. C., PRATA, A. T., Estudo dos Efeitos Bidimensionais em Mancais de Escora, Relatório de Pesquisa, RHAE/ CNPq/ UFSC, 1992.

ÖZISIK, M. N., MURRAY, R. L., **On the solution of linear diffusion problems with variable boundary conditions parameters**. *Journal of Heat Transfer*, v. 96, p. 48-51, 1974.

PATANKAR S. V., LIU, C. H., SPARROW, E. M., **Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross-Sectional Area**. *Journal of Heat Transfer*, v. 99, pp. 180-186, May, 1977.

PINKUS, O., STERNLICHY, B., **Theory of Hydrodynamic Lubrication**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962.

REYNOLDS, O., **On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil**, *Philos. Trans. R. Soc. London, Series A, Vol. 177, Part 1*, pp.157-234, 1886.

ROHDE, S. M., **The Optimum Slider Bearing in Terms of Friction**. *Journal of Lubrication Technology*, v. 94, pp. 275-279, July, 1972.

SOMEYA, T. **Journal-Bearing Databook**. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1989.

SANTOS, E. S. S., **Carregamento Dinâmico de Mancais Radiais com Cavitação do Filme de Óleo**. 1995. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina, 1995.

SANTOS, E. S. S., PRATA, A. T., **Carregamento Dinâmico de Mancais Radiais com Cavitação do Filme de Óleo**. 1995. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica. Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (CD-ROM), Bauru, 8 a 12 de Dezembro, 1997.

SANTOS, E. N., BLANCO, C. J. C., MACÊDO, E. N., MANESCHY, C. E. A., QUARESMA, J. N. N., **Integral transform solutions for the analysis of hydrodynamic lubrication of journal bearings**, *Tribology International* (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2012.03.016>

STERNLICHT, B., LEWIS, P., **Vibration Problems With High-Speed Turbomachinery**, *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp.174-186, 1968.

VIEIRA, L. C., **Análise de Mancais Axiais sob Lubrificação Hidrodinâmica**, 2011. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica. Faculdade de Engenharia Mecânica. Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2011.

WINER, W. O., **Future trends in tribology**. *WEAR*. 136, pp. 19-27, 1990.

ZHANG Zhi-ming, ZHU Li-jin, YU., **Effect of Film Force Nonlinearity on Unbalance Response of a Jeffcot Rotor**. *Journal Bearing System, Journal of Shanghai University*, Vol. 3 No. 3 Sep. 1999, Shanghai, China Jun, 1999.

APÊNDICE A

6.4. A.1 – DEMONSTRAÇÃO DA FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para se demonstrar as fórmulas para as velocidades nas direções radiais e circunferenciais, primeiramente integraram-se as equações (3.4) e (3.5) destacadas no Capítulo 3, Seção 3.4, sendo na direção da espessura do filme de óleo (direção z ; ver Figura 3.1). Além disso, se usou as condições de contorno dadas nas equações (3.6) e (3.7). Desta forma rearranjando-se a equação (3.5), encontra-se:

$$\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (\text{A.1})$$

Aplicando-se a integral em (A.1), vem:

$$\int_0^h \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} dz = \int_0^h \left[\frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] dz \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^h \frac{\partial V_\theta}{\partial z} dz = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \int_0^h [z + C] \quad (\text{A.3})$$

$$V_\theta = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left[\frac{z^2}{2} + C \right] \quad (\text{A.4})$$

Como:

$$V_\theta(r, \theta, h) = 0 \quad \therefore \quad 0 = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left[\frac{h^2}{2} + C \right] \quad (\text{A.5})$$

Logo:

$$0 = \left[\frac{h^2}{2} + C \right] \quad (\text{A.6})$$

Como:

$$V_\theta(r, \theta, 0) = \omega r \quad \therefore \quad \omega r = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left[\frac{0^2}{2} + C \right] \quad (\text{A.7})$$

Logo:

$$C = \left[\frac{\omega r \mu r}{\frac{\partial P}{\partial \theta}} \right] \quad (\text{A.8})$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 0 = \left[\frac{h^2}{2} + \mathbb{C} & \mathbb{C} \right] \\ \mathbb{C} & \left[\frac{r}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Temos:

$$0 = \left[\frac{h^2}{2} + \mathbb{C} \quad \left[\frac{r}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbb{C} \quad \left[\frac{\omega r}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbb{C} \quad \left[\frac{1}{h} \frac{\omega r}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.12})$$

Portanto:

$$V_\theta = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left\{ \frac{z^2}{2} - \frac{zh}{2} - \frac{z}{h} \left[\frac{\omega r}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\omega r}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \right\} \quad (\text{A.13})$$

$$V_\theta = \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) - \omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \quad (\text{A.14})$$

Rearranjando a equação (3.4) citada no Capítulo 3, Seção 3.4, tem-se:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\rho}{\mu r} V_\theta^2 \quad (\text{A.15})$$

Substituindo V_θ citado na equação (A.14), vem:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\rho}{\mu r} \left[\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) - \omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right]^2 \quad (\text{A.16})$$

Utilizando o produto notável $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, temos:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \left[\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) \right]^2 - 2 \cdot \left[\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) \right] \cdot \left[\omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right] + \left[\omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right]^2 \right\} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{4\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (z^4 - 2hz^3 + h^2 z^2) - \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{z^3}{h} - 2z^2 + hz \right) + \omega^2 r^2 \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{2z}{h} + 1 \right) \right\} \quad (\text{A.18})$$

Aplicando-se a integral em (A.18), vem:

$$\int_0^h \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} dz = \int_0^h \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right] dz - \int_0^h \left\{ \frac{\rho}{\mu r} \left[\frac{1}{4\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (z^4 - 2hz^3 + h^2 z^2) - \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{z^3}{h} - 2z^2 + hz \right) + \omega^2 r^2 \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{2z}{h} + 1 \right) \right] \right\} dz \quad (\text{A.19})$$

$$\int_0^h \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} dz = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \int_0^h dz - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{4\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \int_0^h (z^4 - 2hz^3 + h^2 z^2) dz - \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \int_0^h \left(\frac{z^3}{h} - 2z^2 + hz \right) dz + \omega^2 r^2 \int_0^h \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{2z}{h} + 1 \right) dz \right\} \quad (\text{A.20})$$

$$\int_0^h \frac{\partial V_r}{\partial z} dz = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \int_0^h (z) dz - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{4\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \int_0^h \left(\frac{z^5}{5} - \frac{2hz^4}{4} + \frac{h^2 z^3}{3} \right) dz - \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \int_0^h \left(\frac{z^4}{4h} - \frac{2z^3}{3} + \frac{hz^2}{2} \right) dz + \omega^2 r^2 \int_0^h \left(\frac{z^3}{3h^2} - \frac{2z^2}{2h} + z \right) dz \right\} + \mathbb{C} \quad (\text{A.21})$$

$$V_r = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} \right) - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{4\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{z^6}{30} - \frac{hz^5}{10} + \frac{h^2 z^4}{12} \right) - \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{z^5}{20h} - \frac{z^4}{6} + \frac{hz^3}{6} \right) + \omega^2 r^2 \left(\frac{z^4}{12h^2} - \frac{z^3}{3h} + \frac{z^2}{2} \right) \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \quad (\text{A.22})$$

$$V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) z^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4) \\ & - \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3z^5 - 10hz^4 + 10h^2 z^3) \\ & + \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (z^4 - 4hz^3 + 6h^2 z^2) \end{aligned} \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \quad (\text{A.23})$$

Como:

$$V_r(r, \theta, h) = 0 \therefore$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2h^6 - 6h^5 + 5h^4) \\ & - \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^5 - 10h^4 + 10h^3) + \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (h^4 - 4h^3 + 6h^2) \end{aligned} \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \quad (\text{A.24})$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^6) - \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^5) + \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (3h^4) \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \quad (\text{A.25})$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^6) - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^4) + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3h^2) \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \quad (\text{A.26})$$

Como:

$$V_r(r, \theta, 0) = 0$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) 0^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (20^6 - 6h0^5 + 5h^2 0^4) \\ & - \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (30^5 - 10h0^4 + 10h^2 0^3) \\ & + \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (0^4 - 4h0^3 + 6h^2 0^2) \end{aligned} \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \quad (\text{A.27})$$

Logo:

\mathbb{C}

Resolvendo o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^6) \right. \\ \left. - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^4) + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3h^2) \right\} + \mathbb{C} \quad \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \end{array} \right. \quad (\text{A.28})$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^6) - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^4) + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3h^2) \right\} + \mathbb{C} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbb{C} \quad \left\{ \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h^2 + \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^6) - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^4) + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3h^2) \right\} \right\} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbb{C} \quad \left\{ \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h + \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^5) - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^3) + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3h) \right\} \right\} \quad (\text{A.31})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) z^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2z^4) \right. \\ \left. - \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3z^5 - 10hz^4 + 10h^2z^3) \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (z^4 - 4hz^3 + 6h^2z^2) \right\} \\ + \left\{ -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) h + \frac{\rho}{\mu r} \left[\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^5) - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^3) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3h) \right] \right\} z \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned}
V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) z^2 - \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4) \\ & - \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3z^5 - 10hz^4 + 10h^2 z^3) \\ & + \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (z^4 - 4hz^3 + 6h^2 z^2) \end{aligned} \right\} \\
+ \left\{ -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) hz + \frac{\rho}{\mu r} \left[\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (h^5 z) - \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3h^3 z) + \frac{\omega^2 r^2}{12} (3hz) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) (z^2 - hz) + \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4) \\ & + \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (3z^5 - 10hz^4 + 10h^2 z^3) \\ & - \frac{\omega^2 r^2}{12h^2} (z^4 - 4hz^3 + 6h^2 z^2) \end{aligned} \right\} \\
+ \frac{\rho}{\mu r} \left[-\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (-h^5 z) + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) (-3h^3 z) - \frac{\omega^2 r^2}{12} (-3hz) \right]
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) (z^2 - hz) + \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4 - h^5 z) \\ & + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{3z^5}{h} - 10z^4 + 10hz^3 - 3h^3 z \right) \\ & - \frac{\omega^2 r^2}{12} \left(\frac{z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Portanto, obtém-se para as velocidades $V_r(r, \theta, z)$ e $V_\theta(r, \theta, z)$ as equações:

$$\begin{aligned}
V_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) (z^2 - hz) + \frac{\rho}{\mu r} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4 - h^5 z) \\ & + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{3z^5}{h} - 10z^4 + 10hz^3 - 3h^3 z \right) \\ & - \frac{\omega^2 r^2}{12} \left(\frac{z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$V_\theta = \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) - \omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \tag{A.37}$$

A equação (A.36) da velocidade V_r foi obtida após a substituição da equação da velocidade V_θ dado em (A.14) na versão integrada da equação (3.4) do Capítulo 3.

Considerando a equação da conservação da massa simplificada pelas hipóteses apresentadas anteriormente, tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(V_z) = 0 \quad (\text{A.38})$$

Integrando-se a equação (A.38) de $z = 0$ a $z = h$, resulta em,

$$\frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) dz + \frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) dz + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(V_z) dz = 0 \quad (\text{A.39})$$

Aplicando a regra de Leibniz² para diferenciação de integrais em cada uma das parcelas da equação (A.39), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rV_r) dz = \int_0^h \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) dz - rV_r(r, \theta, 0) \frac{d}{dr}(0) + rV_r(r, \theta, h) \frac{d}{dr}(h)$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rV_r) dz \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h (V_\theta) dz = \int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) dz - V_\theta(r, \theta, 0) \frac{d}{d\theta}(0) + V_\theta(r, \theta, h) \frac{d}{d\theta}(h)$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) dz = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h (V_\theta) dz \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (V_z) dz = \int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(V_z) dz - V_z(r, \theta, 0) \frac{d}{dz}(0) + V_z(r, \theta, h) \frac{d}{dz}(h)$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(V_z) dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (V_z) dz = 0 \quad (\text{A.42})$$

Substituindo-se as equações (A.40), (A.41) e (A.42) na equação (A.39) e, posteriormente substituindo, as equações (A.36) e (A.37) na equação resultante, tem-se,

²A regra de Leibniz para diferenciação de integrais:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} dx - F(\varphi_1, \alpha) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} + F(\varphi_2, \alpha) \frac{d\varphi_2}{d\alpha}$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rV_r) dz \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\int_0^h (V_\theta) dz \right] = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \right. \left. + \int_0^h \frac{r\rho}{\mu r} \left[-\frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4 - h^5 z) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega}{60\mu h} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left(\frac{3z^5}{h} - 10z^4 + 10hz^3 - 3h^3 z \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega^2 r^2}{12} \left(\frac{z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) \right] dz \right\} \quad (\text{A.44})$$

$$+ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - hz) \right. \right. \\ \left. \left. - \omega r \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right] dz \right\} = 0$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \int_0^h (z^2 - hz) dz \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho}{\mu} + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \int_0^h \left(\frac{3z^5}{h} - 10z^4 + 10hz^3 - 3h^3 z \right) dz \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega^2 r^2}{12} \int_0^h \left(\frac{z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) dz \right] \right\} \quad (\text{A.45})$$

$$+ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \int_0^h (z^2 - hz) dz \right. \right. \\ \left. \left. - \omega r \int_0^h \left(\frac{z}{h} - 1 \right) dz \right] \right\} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. \left. \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \left[\frac{z^3}{3} - \frac{hz^2}{2} \right]_0^h \\ & - \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \left[\frac{2z^7}{7} - \frac{6hz^6}{6} + \frac{5h^2 z^5}{5} - \frac{h^5 z^2}{2} \right]_0^h \\ & + \frac{\rho}{\mu} + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left[\frac{3z^6}{6h} - \frac{10z^5}{5} + \frac{10hz^4}{4} - \frac{3h^3 z^2}{2} \right]_0^h \\ & - \frac{\omega^2 r^2}{12} \left[\frac{z^5}{5h^2} - \frac{4z^4}{4h} + \frac{6z^3}{3} - \frac{3hz^2}{2} \right]_0^h \end{aligned} \right\} \right\} \right\} \\
& + \frac{1}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{hz^2}{2} \right]_0^h \\ & - \omega r \left[\frac{z^2}{2h} - z \right]_0^h \end{aligned} \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. \left. \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \left[-\frac{h^3}{6} \right] \\ & - \frac{1}{240\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \left[-\frac{3h^7}{14} \right] \\ & + \frac{\rho}{\mu} + \frac{\omega}{60\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \left[-\frac{h^5}{2} \right] - \frac{\omega^2 r^2}{12} \left[-\frac{3h^3}{10} \right] \end{aligned} \right\} \right\} \right\} \\
& + \frac{1}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left[-\frac{h^3}{6} \right] \\ & - \omega r \left[-\frac{h}{2} \right] \end{aligned} \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A.47}$$

$$\left. \left. \left. \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{rh^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \\ & + \frac{\rho}{12\mu} \left[\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right\} \right\} \right\} + \frac{1}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{h^3}{12\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{h\omega r}{2} \right] \right\} = 0 \tag{A.48}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12\mu r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[rh^3 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho \left[\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right] \right\} \\
& + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{h^3}{12\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \right\} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\omega r}{2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12\mu r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[rh^3 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho \left[\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right] \right\} \\
& - \frac{1}{12\mu r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \right\} + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = 0
\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$-\frac{1}{12\mu r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[rh^3 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) - \rho \left[\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right] \right\} - \frac{1}{12\mu r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \right\} = -\frac{\omega}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \tag{A.51}$$

Multiplicando-se a equação supracitada por $(-12\mu r)$, tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ rh^3 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) + \rho \left[-\frac{3h^7}{280\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\omega h^5}{10\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{3h^3 \omega^2 r^2}{10} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] = 6\mu r \omega \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \tag{A.52}$$

APÊNDICE B

Este apêndice apresenta o cálculo de cada coeficiente pertencente à equação (4.14) do potencial através da aplicação da GITT, os quais devem ser calculados analiticamente e em seguida numericamente pela subrotina DQDAG da biblioteca do IMSL (1987), para efeito de confirmação dos resultados.

6.5. B.1 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE A_{ij}

$$A_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i(\theta) \Psi_j(\theta) d\theta \quad (\text{B.1})$$

Substituindo-se a autofunção normalizada em (B.1), vem:

$$A_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \frac{\text{Sen}(\mu_i \theta)}{\sqrt{N_i}} \frac{\text{Sen}(\mu_j \theta)}{\sqrt{N_j}} d\theta \quad (\text{B.2})$$

Rearranjando-se, tem-se:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \quad (\text{B.3})$$

O cálculo para o coeficiente é originado a partir da geometria adotada para cada mancal, isto é, portanto:

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, tem-se:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.4})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos, tem-se:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{2\theta_1 + \theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.5})$$

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos, tem-se:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{2\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + 2\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{2\theta_1 + 2\theta_2}^{3\theta_1 + 2\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{3\theta_1 + 2\theta_2}^{3\theta_1 + 3\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{3\theta_1 + 3\theta_2}^{4\theta_1 + 3\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{4\theta_1 + 3\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.6})$$

➤ Para o mancal com sapata fresada, tem-se:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Sen}(\mu_j \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.7})$$

6.6. B.2 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE B_{ij}

$$B_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^5 \Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) d\theta \quad (\text{B.8})$$

Substituindo-se a autofunção normalizada em (B.8), vem:

$$B_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^5 \frac{\text{Sen}(\mu_i \theta)}{\sqrt{N_i}} \frac{\mu_j \text{Cos}(\mu_j \theta)}{\sqrt{N_j}} d\theta \quad (\text{B.9})$$

Rearranjando-se, tem-se:

$$B_{ij} = \frac{\mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \quad (\text{B.10})$$

O cálculo para o coeficiente é originado a partir da geometria adotada para cada mancal, isto é, portanto:

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, tem-se:

$$B_{ij} = \frac{\mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.11})$$

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos, tem-se:

$$B_{ij} = \frac{\mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right. \\ \left. + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.12})$$

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos, tem-se:

$$B_{ij} = \frac{\mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right. \\ + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+2\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{2\theta_1+2\theta_2}^{3\theta_1+2\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{3\theta_1+2\theta_2}^{3\theta_1+3\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ \left. + \int_{3\theta_1+3\theta_2}^{4\theta_1+3\theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{4\theta_1+3\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.13})$$

➤ Para o mancal com sapata fresada, tem-se:

$$B_{ij} = \frac{\mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right. \\ \left. + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^5 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.14})$$

6.7. B.3 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE C_{ij}

$$C_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i'(\theta) \Psi_j'(\theta) d\theta \quad (\text{B.15})$$

Substituindo-se a autofunção normalizada em (B.15), vem:

$$C_{ij} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \frac{\mu_i \text{Cos}(\mu_i \theta)}{\sqrt{N_i}} \frac{\mu_j \text{Cos}(\mu_j \theta)}{\sqrt{N_j}} d\theta \quad (\text{B.16})$$

Rearranjando-se, tem-se:

$$C_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \quad (\text{B.17})$$

O cálculo para o coeficiente é originado a partir da geometria adotada para cada mancal, isto é, portanto:

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, tem-se:

$$C_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.18})$$

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos, tem-se:

$$C_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{2\theta_1 + \theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.19})$$

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos, tem-se:

$$C_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{2\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + 2\theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{2\theta_1 + 2\theta_2}^{3\theta_1 + 2\theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{3\theta_1 + 2\theta_2}^{3\theta_1 + 3\theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{3\theta_1 + 3\theta_2}^{4\theta_1 + 3\theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{4\theta_1 + 3\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.20})$$

➤ Para o mancal com sapata fresada, tem-se:

$$C_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\sqrt{N_i N_j}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Cos}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.21})$$

6.8. B.4 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE D_{ijk}

$$D_{ijk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^7 \Psi_i(\theta) \Psi_j'(\theta) \Psi_k'(\theta) d\theta \quad (\text{B.22})$$

Substituindo-se a autofunção normalizada em (B.22), vem:

$$D_{ijk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^7 \frac{\text{Sen}(\mu_i \theta)}{\sqrt{N_i}} \frac{\mu_j \text{Cos}(\mu_j \theta)}{\sqrt{N_j}} \frac{\mu_k \text{Cos}(\mu_k \theta)}{\sqrt{N_k}} d\theta \quad (\text{B.23})$$

Rearranjando-se, tem-se:

$$D_{ijk} = \frac{\mu_j \mu_k}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \quad (\text{B.24})$$

O cálculo para o coeficiente é originado a partir da geometria adotada para cada mancal, isto é, portanto:

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, tem-se:

$$D_{ijk} = \frac{\mu_j \mu_k}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.25})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos, tem-se:

$$D_{ijk} = \frac{\mu_j \mu_k}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_1} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \end{array} \right\} \quad (\text{B.26})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos, tem-se:

$$D_{ijk} = \frac{\mu_j \mu_k}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\theta_1} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + \theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{2\theta_1 + \theta_2}^{2\theta_1 + 2\theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{2\theta_1 + \theta_2}^{3\theta_1 + 2\theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{3\theta_1 + 2\theta_2}^{3\theta_1 + 3\theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{3\theta_1 + 2\theta_2}^{4\theta_1 + 3\theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{4\theta_1 + 3\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.27})$$

➤ Para o mancal com sapata fresada, tem-se:

$$D_{ijk} = \frac{\mu_j \mu_k}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\theta_1} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_1 + \theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^7 \text{Sen}(\mu_i \theta) \text{Cos}(\mu_j \theta) \text{Cos}(\mu_k \theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.28})$$

6.9. B.5 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE E_i

$$E_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \Psi_i(\theta) d\theta \quad (\text{B.29})$$

Substituindo-se a autofunção normalizada em (B.29), vem:

$$E_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \frac{\text{Sen}(\mu_i \theta)}{\sqrt{N_i}} d\theta \quad (\text{B.30})$$

Rearranjando-se, tem-se:

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \quad (\text{B.31})$$

O cálculo para o coeficiente é originado a partir da geometria adotada para cada mancal, isto é, portanto:

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, tem-se:

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.32})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos, tem-se:

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \right. \\ \left. + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.33})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos, tem-se:

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \right. \\ + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+2\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \\ + \int_{2\theta_1+2\theta_2}^{3\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{3\theta_1+\theta_2}^{3\theta_1+3\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \\ \left. + \int_{3\theta_1+3\theta_2}^{4\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{4\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.34})$$

- Para o mancal com sapata fresada, tem-se:

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \int_0^{\theta_1} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta + \int_{\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} h^3 \text{Sen}(\mu_i \theta) d\theta \right\} \quad (\text{B.35})$$

6.10. B.6 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE F_1

$$F_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_i(\theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \quad (\text{B.36})$$

Substituindo-se a autofunção normalizada em (B.36), vem:

$$F_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sen}(\mu_i \theta)}{\sqrt{N_i}} \frac{dh}{d\theta} d\theta \quad (\text{B.37})$$

Rearranjando-se, tem-se:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \quad (\text{B.38})$$

O cálculo para o coeficiente é originado a partir da geometria adotada para cada mancal, isto é, portanto:

➤ Para o mancal com sapata de Rayleigh de 4 ressaltos, tem-se:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \int_0^{\theta_1} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \right\} \quad (\text{B.39})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 8 ressaltos, tem-se:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\theta_1} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \\ & + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.40})$$

- Para o mancal com sapata de Rayleigh de 16 ressaltos, tem-se:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\theta_1} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \\ & + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{2\theta_1+\theta_2}^{2\theta_1+2\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \\ & + \int_{2\theta_1+2\theta_2}^{3\theta_1+2\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{3\theta_1+2\theta_2}^{3\theta_1+3\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \\ & + \int_{3\theta_1+3\theta_2}^{4\theta_1+3\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{4\theta_1+3\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.41})$$

- Para o mancal com sapata fresada, tem-se:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\theta_1} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \\ & + \int_{\theta_1+\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}(\mu_i \theta) \frac{dh}{d\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.42})$$

6.11. B.7 – VALORES PARA H :Mancal de 4 ressaltos:

Se	$0 < \theta < \theta_1$	então	$h = \beta_1$
----	-------------------------	-------	---------------

Se	$0 < \theta < \pi/2$	então	$h = \beta_2$
----	----------------------	-------	---------------

Mancal de 8 ressaltos:

Se	$0 < \theta < \theta_1$	então	$h = \beta_1$
----	-------------------------	-------	---------------

Se	$\theta_1 < \theta < \theta_1 + \theta_2$	então	$h = \beta_2$
----	---	-------	---------------

Se	$\theta_1 + \theta_2 < \theta < 2\theta_1 + \theta_2$	então	$h = \beta_1$
----	---	-------	---------------

Se	$2\theta_1 + \theta_2 < \theta < \pi/2$	então	$h = \beta_2$
----	---	-------	---------------

Mancal de 16 ressaltos:

Se	$0 < \theta < \theta_1$	então	$h = \beta_1$
----	-------------------------	-------	---------------

Se	$\theta_1 < \theta < \theta_1 + \theta_2$	então	$h = \beta_2$
----	---	-------	---------------

Se	$\theta_1 + \theta_2 < \theta < 2\theta_1 + \theta_2$	então	$h = \beta_1$
----	---	-------	---------------

Se	$2\theta_1 + \theta_2 < \theta < 2\theta_1 + 2\theta_2$	então	$h = \beta_2$
----	---	-------	---------------

Se	$2\theta_1 + 2\theta_2 < \theta < 3\theta_1 + 2\theta_2$	então	$h = \beta_1$
----	--	-------	---------------

Se	$3\theta_1 + 2\theta_2 < \theta < 3\theta_1 + 3\theta_2$	então	$h = \beta_2$
----	--	-------	---------------

Se	$3\theta_1 + 3\theta_2 < \theta < 4\theta_1 + 3\theta_2$	então	$h = \beta_1$
----	--	-------	---------------

Se $4\theta_1 + 3\theta_2 < \theta < \frac{\pi}{2}$ então $h = \beta_2$

Mancal fresado:

Se $0 < \theta < \theta_1$ então $h = \beta_1$

Se $\theta_1 < \theta < \theta_1 + \theta_2$ então $h = \beta_2$

Se $\theta_1 + \theta_2 < \theta < \frac{\pi}{2}$ então $h = \beta_1$