SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

RENAN MARCELO DA COSTA DIAS

UM ESTUDO ACERCA DA INSERÇÃO DE ASPECTOS HISTÓRICOS DOS CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR EM CURSOS DE ÁLGEBRA LINEAR

BELÉM/PA
2022

RENAN MARCELO DA COSTA DIAS

UM ESTUDO ACERCA DA INSERÇÃO DE ASPECTOS HISTÓRICOS DOS CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR EM CURSOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.
Área de concentração: Educação Matemática

Orientação: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg

BELÉM/PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D541e Dias, Renan Marcelo da Costa.
Um estudo acerca da inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear / Renan Marcelo da Costa Dias. — 2022.
141 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2022.

1. História da Matemática. 2. Álgebra Linear. 3. Dependência e Independência Linear. 4. Desenvolvimento histórico-epistemológico. I. Título.

CDD 510.9

RENAN MARCELO DA COSTA DIAS

UM ESTUDO ACERCA DA INSERÇÃO DE ASPECTOS HISTÓRICOS DOS CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR EM CURSOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Aprovado em: 22/02/2022

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará (Orientador)

____
Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Universidade Federal do Pará (Membro interno)

____
Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales
Universidade Federal do Pará (Membro interno)

____
Profa. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias
Universidade do Estado do Pará (Membro externo)

____
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Universidade do Estado do Pará (Membro externo)

Ao meu amado afilhado
Nicolas Dias Meireles (in memoriam),
que é a estrelinha que ilumina os meus sonhos

AGRADECIMENTOS

Ao meu amado Deus pela força e sabedoria na realização desse trabalho e a Virgem Maria Santíssima por sua poderosa intercessão.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg, por seus valiosos conselhos e ensinamentos que transcenderam a execução da pesquisa.

Aos membros da Banca Examinadora, Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha, Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales, Profa. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias e Prof. Dr. Miguel Chaquiam, por suas relevantes contribuições que foram decisivas para a conclusão do trabalho

Aos meus familiares, em especial meus pais, Marcelo da Costa Dias e Rosiani Amaral da Costa, e meus irmãos, Rayane Dias e Ruan Dias, pelo apoio em todos os momentos do curso e por partilhar das minhas angústias e preocupações quanto a conclusão da pesquisa

Aos meus grandes amigos e fiéis companheiros, pelas palavras de conforto e incentivo nos momentos de frustração e medo quanto a conclusão do curso de mestrado e da dissertação.

Aos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisas em História e Ensino de Matemática (GEHEM), pelo caloroso acolhimento antes mesmo de ser aluno do programa e pelas grandes contribuições no decurso da investigação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, pelas discussões que contribuíram para a minha formação enquanto pesquisador.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Educação sem ser ancorada na História é uma pregação sem fundamentos.
Enquanto a História sem ser inserida na Educação é inconclusa

Ubiratan D'Ambrosio

Resumo

O presente estudo teve por objetivo investigar de que forma o desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear pode ser abordado em cursos de Álgebra Linear para viabilizar uma melhor compreensão destes por licenciandos em Matemática. Para tal, desenvolvemos uma Pesquisa Bibliográfica com abordagem qualitativa para análise de dados constituída de dois momentos. No primeiro momento discorremos, com base em Dorier (1995b; 2000) e Moore (1995), sobre a constituição histórica da Álgebra Linear, na qual identificamos quatro diferentes noções precedentes dos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, sejam elas, *dependência inclusiva* (Euler), *dependência unificada para equações e n-uplas* (Frobenius), *generalização da dependência para o espaço n-dimensional* (Grassmann) e *axiomatização da dependência e independência linear* (Peano). No segundo momento apresentamos sugestões didáticas, fundamentadas em Mendes (2006; 2015; 2016) e Brandemberg (2018; 2021), sobre como abordar essas diferentes noções em cursos de Álgebra Linear. Tais sugestões prezam em oportunizar aos alunos o contato com diferentes aspectos que lhes possibilitem ampliar a compreensão da linearidade como uma relação entre vetores, bem como visualizar as atuais definições de Dependência e Independência Linear como uma linguagem que não descarta as noções dadas por Euler, Frobenius, Grassmann ou Peano, mas as conservam em um caráter unificador e generalizante.

Palavras-chave: História da Matemática; Álgebra Linear; Dependência e Independência Linear; Desenvolvimento histórico-epistemológico.

ABSTRACT

The present study aimed to investigate how the historical development of the concepts of Linear Dependence and Independence can be approached in Linear Algebra courses to enable a better understanding of these concepts by Mathematics undergraduates. To this end, we developed a Bibliographic Research with a qualitative approach for data analysis consisting of two moments. In the first moment, based on Dorier (1995b; 2000) and Moore (1995), we discuss the historical constitution of Linear Algebra, in which we identify four different preceding notions of the current concepts of Linear Dependence and Independence, whether they are inclusive dependence (Euler), unified dependence for equations and n-tuples (Frobenius), generalization of dependence to n-dimensional space (Grassmann) and axiomatization of dependence and linear independence (Peano). In the second moment, we present didactic suggestions, based on Mendes (2006; 2015; 2016) and Brandemberg (2018; 2021), on how to approach these different notions in Linear Algebra courses. Such suggestions aim to give students the opportunity to have contact with different aspects that allow them to broaden their understanding of linearity as a relationship between vectors, as well as to visualize the current definitions of Linear Dependence and Independence as a language that does not discard the notions given by Euler, Frobenius, Grassmann or Peano, but keep them in a unifying and generalizing character.

Keywords: History of Mathematics; Linear algebra; Linear Dependence and Independence; Historical-epistemological development.

Lista de figuras

LISTA DE QUADROS

.

LISTA DE SIGLAS

BDTD	-	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	-	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CIEM	-	Comissão Internacional de Ensino de Matemática
CREPHIMat	-	Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática
HEdM	-	Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática
HEnM	-	Estudos e Pesquisas em História da Matemática para o Ensino
HEpM	-	Estudos e Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática
ICMI	-	Comissão Internacional de Instrução Matemática
L.D.	-	Linearmente Dependente
L.I.	-	Linearmente Independente
PPGECM	-	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
SNHM	-	Seminário Nacional de História da Matemática
TCC	-	Trabalho de Conclusão de Curso
UEPA	-	Universidade do Estado do Pará
UFPA	-	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Nos últimos dez anos, os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear têm se constituído como objeto de estudo em diversas pesquisas brasileiras desenvolvidas no campo da Educação Matemática. Tais pesquisas, de um modo geral, explicitam que os alunos encontram grandes dificuldades na compreensão dos conceitos dessa disciplina e por isso recorrem às memorizações procedimentais na garantia de suas aprovações. No que diz respeito aos conceitos de Dependência e Independência Linear, esses trabalhos apontam que os alunos não conseguem identificar a dependência em objetos diferentes das n-uplas, tais como funções, polinômios, matrizes etc. e apontam a linguagem formal e axiomática utilizada na abordagem desses conceitos como o elemento complicador.

Entretanto, para Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a, 1998, 2002), a linguagem formal e axiomática presente nos estudos em Álgebra Linear se configura como elemento chave da disciplina, uma vez que sua criação e adoção esteve diretamente relacionada a uma necessidade de simplificação e generalização de diferentes métodos e técnicas existentes ao longo da constituição história da Álgebra Linear. Em outros termos, na concepção dos referidos autores, é a partir da linguagem formal e axiomática que os alunos podem compreender o caráter unificador e generalizante dos conceitos subjacentes à Álgebra Linear, dentre os quais, dos conceitos de Dependência e Independência Linear.

Nesse sentido, investigar de que forma os aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear podem ser abordados em cursos de Álgebra Linear, de modo a viabilizar uma melhor compreensão desses conceitos por licenciandos em Matemática, foi o objetivo que balizou a execução da presente pesquisa. Assim, com o propósito de possibilitar ao leitor maior compreensão acerca da sistematização do trabalho, este contempla a seguinte estrutura:

Em nossas *Considerações Iniciais,* exibimos as motivações pessoais e acadêmicas que nos conduziu à construção desta pesquisa, bem como evidenciamos o percurso teórico ao tema, do qual emergiu a questão de pesquisa e os objetivos geral e específicos. Além disso, também apresentamos os aspectos metodológicos que norteiam o estudo, tais como a metodologia de pesquisa e os procedimentos executados em seu decurso.

No primeiro capítulo, intitulado *A História da Matemática no campo Educação Matemática*, dissertamos sobre a inserção da História da Matemática nos processos de instituição e constituição histórica e epistemológica da Educação Matemática, a fim de localizar nosso estudo no referido campo, por meio das contribuições que pesquisas dessa natureza agregam ao desenvolvimento da Educação Matemática. Além disso, também discutimos as potencialidades que processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, quando subsidiados pela História da Matemática, podem ofertar aos alunos em termos conceituais e procedimentais.

No segundo capítulo, intitulado *A constituição histórica da Álgebra Linear,* apresentamos o desenvolvimento histórico de conceitos que compõem a disciplina Álgebra Linear, com o intuito de evidenciar o modo como o caráter unificador e generalizante da disciplina desponta de sua própria constituição como zona de inquérito. Para além disso, também vislumbramos localizar o leitor no contexto histórico, epistemológico e matemático nos quais os conceitos de Dependência e Independência Linear constituíram-se, para que as análises – realizadas no próximo capítulo – sejam compreendidas de maneira holística e fluida por ele.

No terceiro capítulo, intitulado *Noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear,* abordamos as diferentes noções concebidas ao longo do tempo e que remontam ao que conhecemos atualmente por Dependência e Independência Linear, de modo a evidenciar a refletividade do caráter unificador e generalizante na axiomatização destes, bem como apresentamos recomendações didáticas sobre como abordar essas diferentes noções em cursos de Álgebra Linear, a fim de que os alunos compreendam e valorizem a linguagem formal e axiomática com a qual os conceitos em questão são abordados.

À guisa de conclusão, nas *Considerações Finais*, retomamos a questão que balizou o estudo em apreço, assim como explicitamos os aspectos resultantes da execução da pesquisa e que nos possibilitou respondê-la. Além disso, também pontuamos contribuições que este trabalho fornece ao campo da Educação Matemática, assim como ressaltamos limitações que foram encontradas por nós no decorrer da investigação, e ainda destacamos possíveis desdobramentos que podem ser elencados a partir de nossos resultados e de nossas conclusões.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Inicialmente se faz necessário discorrer acerca das motivações pessoais e acadêmicas que conduziram ao tema do estudo em questão, uma vez que elas estão intrinsecamente ligadas ao caminho teórico/metodológico percorrido no decurso da pesquisa e das quais emergiram as inquietações e reflexões que se materializaram na questão de pesquisa e nos objetivos erigidos para respondê-la.

MOTIVAÇÕES PESSOAIS E ACADÊMICAS[1]

O interesse pela disciplina Álgebra Linear nasceu no ano de 2017 ao cursá-la em minha graduação em Matemática na Universidade do Estado do Pará (UEPA). Embora vindo de uma formação em Geometria Analítica com lacunas de aprendizagem, as quais hoje compreendo terem sido um dos obstáculos à uma maior compreensão dos conceitos da Álgebra Linear, fascinava-me com as ideias discutidas acerca dos Espaços Vetoriais e Transformações Lineares, sentia-me empolgado ao demonstrar alguns teoremas e conhecer novas formas de representação de um mesmo objeto matemático ou suas aplicações.

Apesar da minha afinidade com a disciplina, eram visíveis as dificuldades que meus colegas e eu enfrentávamos na compreensão dos conceitos da Álgebra Linear, o caráter formal e abstrato das definições eram as nossas principais queixas quando questionados pelo professor sobre a natureza de nossa incompreensão. Os resultados avaliativos ficavam em torno do mínimo esperado e os mecanismos desenvolvidos por nós na garantia desses resultados eram as memorizações procedimentais. Assim, passei a refletir sobre a existência de aspectos que estavam por trás desses processos, embora não soubesse exatamente quais eram.

No ano de 2018, enquanto monitor de Álgebra Linear em duas turmas do curso de licenciatura em Matemática da UEPA, foi possível observar que as dificuldades enfrentadas por meus colegas e por mim não eram somente nossas, mas sim características do próprio processo de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear,

---

[1] Esta seção será escrita na 1ª pessoa do singular, uma vez que diz respeito às motivações pessoais e acadêmicas vivenciadas pelo autor e que o conduziu a execução de sua pesquisa de mestrado.

o que reafirmava minhas reflexões sobre a existência de aspectos internos nesse processo os quais desconhecia. Além disso, os alunos constantemente afirmavam não ver sentido nessa disciplina, pois a concebiam como pertencente a um mundo ideal, no qual apenas as mentes brilhantes poderiam obter resultados positivos e verdadeiros, ou ainda que aquela matemática 'não era humana'.

Ainda em minha experiência enquanto monitor da disciplina, notei que os alunos apresentavam significativas dificuldades em compreender o caráter generalizante e unificador da disciplina, era inconcebível para eles que um vetor pudesse ser uma n-upla, uma matriz, uma função ou um polinômio. As dificuldades relativas aos conceitos adjacentes aos Espaços Vetoriais eram as mais latentes, e as vezes só eram mais bem compreendidas quando retomadas no estudo das Transformações Lineares, entretanto, ainda sim, noções elementares como combinação linear, geradores, dependência e independência linear e base e dimensão não estavam bem claras.

As noções elementares de Álgebra Linear pareciam ser os primeiros e mais efetivos obstáculos que os alunos encontravam no decurso da disciplina, uma vez que estas eram frequentemente retomadas em conteúdos futuros tais como Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores etc. Os conceitos de Dependência e Independência Linear foram os que mais me chamaram atenção, pois os alunos não conseguiam transpor as ideias aprendidas no contexto das n-uplas para outros, tais como funções, polinômios, matrizes etc. o que evidenciava a ausência de percepção quanto ao carácter unificador e generalizante característico da Álgebra Linear apontado por Dorier (1995a; 1998; 2002).

As experiências enquanto discente e posteriormente como monitor da disciplina Álgebra Linear foram contundentes para que este se tornasse o tema de meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), em especial, os conceitos de Dependência e Independência Linear, Geradores, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial[2]. Durante o desenvolvimento da minha pesquisa, tive contato com diversas leituras sobre os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, o que confirmou minha hipótese de que havia particularidades nesses processos as quais desconhecia, e que iam ao encontro das dificuldades apresentadas pelos alunos.

[2] Para maiores esclarecimentos consultar Dias (2019) e Dias e Chaquiam (2020)

Analisar um compêndio de livros de Álgebra Linear, datados da década de 1970, de autoria do cientista paraense Guilherme de La Penha (1942 – 1996) foi o objetivo que balizou meu TCC. De maneira mais precisa, busquei caracterizar nestes livros as apresentações e representações utilizadas por Guilherme de La Penha na abordagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear, Geradores, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial.

Diante das análises, foi possível perceber que esse autor se preocupou em evidenciar os conceitos supracitados em suas mais diversas representações e/ou em diferentes objetos matemáticos. Foram Identificadas pelo menos três diferentes representações utilizadas nesses livros, a saber, Representação Algébrica, Representação Geométrica e Representação em Linguagem Natural. Além disso, também foi percebido nos livros analisados que Guilherme de La Penha buscou evidenciar os referidos conceitos em diferentes objetos matemáticos tais como n-uplas, matrizes, funções, polinômios entre outros.

Os resultados obtidos ao final da investigação me levaram a concluir que Guilherme de La Penha buscou em seus livros dar significado ao curso de Álgebra Linear, na medida que propunha que o aluno não deveria compreender os conceitos da disciplina em um plano limitado, mas sim em toda sua completude e em seus mais diversos aspectos. Tal assertiva encontra suporte em estudos acerca dos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, em especial quanto ao caráter unificador e generalizante da disciplina.

A compreensão do caráter unificador e generalizante tem sido discutida pela literatura como sendo imprescindível ao processo de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, haja vista que este agrega significado e sentido ao formalismo com o qual os conceitos da disciplina são trabalhados. Assim, com base nos resultados obtidos em minha pesquisa e tendo em vista a imprescindibilidade apontada pela literatura quanto ao caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, o desejo em dar continuidade ao tema discutido crescia a cada nova descoberta.

Nesse contexto, após a finalização da pesquisa de graduação e ainda a realização de algumas leituras e pesquisas particulares, passei a refletir que os conceitos de Dependência e Independência Linear eram basilares e poderiam ser tomados como elementos coesivos no estudo dos Espaços Vetoriais a fim de compreender o caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear. Desse modo, o curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA) surgiu como espaço oportuno para dar continuidade em meus estudos.

Nesse sentido, busquei suporte em literaturas nas quais os autores investigam os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, em especial em relação aos conceitos de Dependência e Independência Linear, assim como em pesquisas nacionais emergentes de igual natureza, que por sua vez forneceram subsídios teóricos/metodológicos e que me conduziram ao tema da investigação em tela. O referido percurso é mais bem detalhado na próxima seção, na qual também destaco a questão norteadora do trabalho e os objetivos construídos.

PERCURSO TEÓRICO AO TEMA

A especificidade da disciplina Álgebra Linear no ensino superior justifica-se pelo fato de ela ser uma das responsáveis pelo primeiro contato do aluno com o rigor e o formalismo necessário ao estudo dos objetos matemáticos, em que o professor exige demonstrações e/ou argumentos explicativos de procedimentos matemáticos e de concepções conceituais. Desse modo, tendo em vista a ausência de habilidade nesses aspectos, muitos alunos se veem impossibilitados em obter bons resultados em Álgebra Linear e recorrem à memorização de procedimentos operacionais na garantia de sua aprovação (DORIER, 1998).

O primeiro contato dos alunos com a disciplina Álgebra Linear na universidade, em termos gerais, não ocorre de maneira muito tranquila, uma vez que eles têm a sensação de estar pousando em um planeta totalmente diferente e não conseguem encontrar caminhos neste novo mundo. As principais críticas proferidas por esses novos habitantes estão relacionadas à quantidade esmagadora de novas definições, a falta de conexão com os conhecimentos matemáticos aprendidos anteriormente e ainda o formalismo com a qual são tratados os objetos matemáticos (DORIER *et al*. 1994; DORIER 1998).

No Brasil, estudos têm sido desenvolvidos nos últimos 10 anos com o propósito de investigar os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear. Ao realizar um levantamento no banco de Teses e Dissertações da plataforma da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), utilizando como chave de busca o termo 'Álgebra Linear' e detendo-se em Programas de Pós-Graduação em Educação, Educação Matemática, Educação em Ciências e Matemáticas, Ensino de Matemática e afins, obtivemos um total de 13 dissertações e 9 teses, cujos detalhamentos, em síntese, são destacados no quadro 01.

QUADRO 01: Teses e Dissertações em Álgebra Linear (2011 – 2021)

NATUREZA	TÍTULO	AUTOR	IES	ANO
Dissertação	Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: Contribuições para a formação de Professores de Matemática	Walter Sérvulo Araújo Rangel	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)	2011
Dissertação	Uma tecnologia para redação matemática e seu uso na elaboração de um curso de Álgebra Linear	Rodrigo Gomes Devolder	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)	2012
Dissertação	Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o Estudo das Transformações Lineares	Vitor Rezende Almeida	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	2013
Dissertação	Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais	Aretha Fontes Alves	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	2013
Dissertação	A Sequência Fedathi no ensino de Álgebra Linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial	Francisca Cláudia Fernandes Fontenele	Universidade Federal do Ceará (UFC)	2013
Dissertação	Uma sequência didática sobre Transformações Lineares em um ambiente de geometria dinâmica	Odilthom Elias da Silva Arrebola	Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo (UNIBAN)	2013
Dissertação	Álgebra Linear a distância para licenciandos em Química: análise de um curso oferecido no modelo UAB	Wallace Nascimento Pinto Junior	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	2013
Dissertação	Pensamento Matemático Avançados em tarefas envolvendo Transformações Lineares	Alessandra Senes Marins	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	2014
Dissertação	Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática	Mariany Layne de Souza	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	2016

Dissertação	O uso de representações gráficas para a construção do conhecimento sobre Espaço Vetorial	Everton Francisco Ferreira Santiago	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)	2017
Dissertação	Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia	Celso Luiz Andreotti	Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN)	2017
Dissertação	Uma análise do movimento de constituição da ementa da disciplina de Álgebra Linear na licenciatura em Matemática	Luciane Nunes Ribeiro	Universidade Federal de Goiás (UFG)	2018
Dissertação	Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior	Gabrielle Nunes dos Santos	Universidade Federal de Pelotas (UFPel)	2019
Tese	Esquemas Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro	Joelma Iamac Nomura	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)	2014
Tese	Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais	Valdinei Cezar Cardoso	Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)	2014
Tese	O papel das Tecnologias Digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância: possibilidades, limites e desafios	Aparecida Santana de Souza Chiari	Universidade Estadual Paulista (UNESP)	2015
Tese	Transformações Lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com o uso de tecnologias digitais	Eliza Souza da Silva	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)	2015
Tese	Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica	Eneias de Almeida Prado	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)	2016
Tese	Concepção de Transformação Linear por estudantes de Licenciatura em Matemática	Maria Eliana Santana da Cruz Silva	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)	2016

Tese	Praxeologias e Modelos Praxeológicos Institucionais: o caso da Álgebra Linear	Fernando Cardoso de Matos	Universidade Federal do Pará	2017
Tese	Atividade de estudo do conceito de Transformação Linear na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental de V. V. Davydov	Aline Mota de Mesquita Assis	Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/GO)	2018
Tese	Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX	Elaine Caire	Universidade Estadual Paulista (UNESP)	2020

FONTE: Elaborado pelo autor

A partir do Quadro 01, é possível observar que nos últimos 10 anos houve um número expressivo de trabalhos desenvolvidos no âmbito da pós-graduação no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear. Este fato nos permite inferir que as preocupações dos professores e/ou pesquisadores com relação a temática tem ganhado novos espaços de desenvolvimento de pesquisas no campo da Educação Matemática. Além do que, evidencia a importância que o referido tema tem ganhado nos últimos anos em todas as regiões do Brasil, ainda que a maior concentração de estudos esteja nas regiões Sul e Sudeste.

As teses e dissertações obtidas no levantamento, de maneira geral, ratificam as dificuldades encontradas pelos alunos e o caráter excêntrico do primeiro contato destes com a disciplina em questão, conforme colocado por Dorier *et al*. (1994) e Dorier (1995a). Tal fato corrobora a afirmação de Celestino (2000, p. 93) quando diz que “as pesquisas brasileiras inserem-se no quadro mundial das pesquisas sobre ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, e que reforçam ou apresentam conclusões relevantes nesta área de pesquisa”.

Segundo Dorier *et al.* (1994), diante das dificuldades encontradas pelos alunos em um primeiro curso de Álgebra Linear, os professores tendem a minimizar a presença do formalismo e priorizam aspectos algorítmicos e operacionais em suas tarefas, o que acarreta em uma formação deficiente, uma vez que os alunos conseguem, por exemplo, encontrar a forma reduzida de Jordan de um operador, mas apresentam significativas lacunas na compreensão conceitual de noções elementares como combinação linear, dependência e independência linear, geradores, base e dimensão. Tais noções são concebidas como elementares por se configurarem como elementos constitutivos de outros conceitos trabalhados em Álgebra Linear, o que evidencia suas imprescindibilidades.

Dentre os conceitos elementares discutidos por Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a), a Dependência e Independência Linear foram merecedores de uma investigação mais aprofundada na presente pesquisa, uma vez que as experiências enquanto aluno e monitor da disciplina conduziram à percepção de que tais conceitos não eram bem compreendidos em uma abordagem inicial da Álgebra Linear, sendo um dos principais sinalizadores a não visualização da relação de dependência entre vetores em objetos diferentes das n-uplas, tais como matrizes, funções, polinômios etc. Além da confusão realizada entre *hipótese* e *tese* das definições de Dependência e Independência Linear, a qual era percebida nas tarefas envolvendo a verificação desses conceitos em diferentes objetos matemáticos.

Nesse sentido, é possível afirmar que a dificuldade na compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear exerce grande influência no processo de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, tendo em vista que estes são retomados ainda dentro dos Espaços Vetoriais (na determinação de uma base, por exemplo) e no estudo das Transformações Lineares (como nos autovalores e autovetores e diagonalização). Desse modo, diante das dificuldades percebidas e da importância dos conceitos de Dependência e Independência Linear, buscamos suporte em trabalhos que dissertassem melhor sobre a temática.

Ao realizar um novo levantamento no banco de Teses e Dissertações da CAPES e da BDTD, utilizando como chave de busca o termo ‘Dependência e Independência Linear’ e delimitando-se aos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, Educação em Ciências e Matemáticas, Ensino de Matemática e afins, foi possível observar que, nos últimos 20 anos, estudos dessa natureza têm sido desenvolvidos de maneira pontual, tendo em vista terem sido encontrados apenas três trabalhos, os quais podem ser visualizados com maiores detalhes no Quadro 02.

QUADRO 02: Teses e Dissertações em Dependência e Independência Linear (2001 – 2021)

NATUREZA	TÍTULO	AUTOR	IES	ANO
Dissertação	O conceito de Dependência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos em Álgebra Linear	André Lúcio Grande	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)	2006

Dissertação	Vetores: Interações a distância para a aprendizagem de Álgebra Linear	Juliana Pereira Gonçalves de Andrade	Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)	2010
Dissertação	Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática	Mariany Layane de Souza	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	2016

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Tais resultados revelam uma carência no desenvolvimento de trabalhos, no âmbito dos Programas de Pós-Graduação brasileiros nos últimos 20 anos, acerca dos conceitos de Dependência e Independência Linear, bem como salientam a necessidade da realização de novos estudos. A leitura desses trabalhos pautou-se na identificação dos principais obstáculos à compreensão dos referidos conceitos apontados pela literatura. Vale ressaltar que o trabalho de Andreoli (2009), realizado no México, também fora utilizado para a investigação, uma vez que este subsidiou os estudos nacionais supracitados.

O estudo de Grande (2006) teve por objetivo investigar quais são os registros de representação semiótica mais utilizados em livros didáticos de Álgebra Linear com relação aos conceitos de Dependência e Independência Linear. A fim de obter base à sua análise, Grande (2006) realizou uma investigação do desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, e ainda um levantamento das dificuldades dos alunos nos conceitos supracitados apontados pela literatura internacional, tendo em vista seu pioneirismo no Brasil sobre o tema.

De maneira geral, Grande (2006) evidenciou que a dificuldade mais comum nos conceitos de Dependência e Independência Linear diz respeito a incapacidade dos alunos em transpor esses conceitos a outros contextos como geometria, funções, matrizes etc., considerando-se que eles conseguem aplicar esse conhecimento apenas em n-uplas, a partir de um algoritmo memorizável. Para Grande (2006), estas dificuldades estão intimamente ligadas à incompreensão do caráter unificador e generalizante possibilitado pelo aspecto formal da disciplina, que por sua vez pode ser observado no desenvolvimento histórico das noções de Dependência e Independência Linear.

Andrade (2010), investigou os requisitos necessários ao desenvolvimento de softwares educativos que amparem a aprendizagem à distância de objetos de

Dependência e Independência Linear, a partir da elaboração de um instrumento para levantar as dificuldades de aprendizagem dos conceitos em tela. Em sua análise, Andrade (2010) percebeu que a visualização dos conceitos em destaque como procedimento e não como uma relação entre vetores configura-se como uma das principais dificuldades identificadas, atribuindo assim o aspecto formal característico das definições dos objetos da Álgebra Linear.

Ainda segundo Andrade (2010), essa situação caracteriza-se como confusão entre procedimento e objeto, cujo a natureza está diretamente relacionada ao excesso do formalismo e abstração inerentes aos objetos da Álgebra Linear, que por sua vez não permitem a compreensão propriamente dita dos conceitos de Dependência e Independência Linear, mas sim o tratamento operacional dado a eles para sua verificação. Assim como Grande (2006), Andrade (2010) pontua o formalismo exacerbado das definições como obstáculos à compreensão do caráter unificador e generalizante dos objetos da Álgebra Linear.

Souza (2016) investigou as dificuldades e concepções nos conceitos de Dependência e Independência Linear de licenciandos em Matemática por meio da aplicação de um questionário. Em suas análises, a autora percebeu que as dificuldades estavam atreladas tanto à natureza da Álgebra Linear quanto a aspectos subjetivos dos alunos. Em relação às dificuldades particulares à natureza da disciplina, foram elencadas quatro subcategorias: linguagem; entendimento dos conceitos de dependência e independência linear; identificação de conjuntos linearmente independentes e linearmente dependentes e reconhecimento da representação gráfica.

Os resultados pontuados por Souza (2016) subjazem a dificuldade dos alunos em transitar por diferentes tipos de registros de vetores Linearmente Dependentes e Independentes, bem como de compreender esses conceitos em outros objetos diferentes das tradicionais n-uplas. Ademais, para Souza (2016), as dificuldades envolvendo os conceitos em questão, estão diretamente relacionadas ao caráter formal com que eles são apresentados, haja vista que para o aluno esse formalismo não faz sentido algum, o que eventualmente o conduz a memorização de procedimentos sem compreendê-los.

O Estudo de Andreoli (2009) teve como intuito analisar os obstáculos que são encontrados pelos alunos no primeiro ano da universidade na construção dos conceitos de Dependência e Independência Linear. Segundo a autora, ao longo de sua experiência investigando a temática, percebeu algumas crenças e concepções errôneas dos alunos, tais como a redução da Independência Linear à verificação da igualdade entre o cardinal de um conjunto de vetores e a dimensão do seu espaço; que de um conjunto Linearmente Dependente não se pode obter um conjunto Linearmente Independente e ainda que as definições de Dependência e Independência Linear são os únicos modos de verificar sua existência.

Além disso, a autora destacou que os alunos encontram obstáculos significativos na compreensão dos referidos conceitos quando estes estão em diferentes registros de representação ou postos em objetos distintos do habitual como em funções, polinômios, matrizes ou ainda em objetos geométricos. De igual maneira aos estudos de Grande (2006); Andrade (2010) e Souza (2016), Andreoli (2009) apresenta o caráter unificador e generalizante do conceito de Espaço Vetorial, em seu aspecto formal, como sendo o principal obstáculo à apropriação das noções de Dependência e Independência Linear.

Desse modo, é possível observar que a principal dificuldade na compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear, pontuada pela literatura, diz respeito ao fato dos alunos não os visualizar em diferentes registros de representação semiótica (GRANDE, 2006; SOUZA, 2016), assim como em outros objetos matemáticos que não as tradicionais n-uplas (ANDREOLI, 2009; ANDRADE, 2010). Na concepção dos referidos autores, a natureza dessas incompreensões constitui-se pelo formalismo, advindo do caráter unificador e generalizante da disciplina, com o qual esses conceitos são apresentados.

A partir dos estudos de Grande (2006), Andreoli (2009), Andrade (2010) e Souza (2016), percebemos que uma das dificuldades mais pontuadas nesses trabalhos diziam respeito a linguagem formal e axiomática com a qual a disciplina Álgebra Linear era trabalhada. Essa observação foi ao encontro das impressões pessoais discutidas nas considerações iniciais, pois os alunos não viam sentido nesse tipo de abordagem e acreditavam ser esse o obstáculo que impossibilitava bons rendimentos na disciplina. Esses fatos foram preponderantes para que estudássemos mais a fundo esse aspecto.

Embora o formalismo presente nos processos de ensino e aprendizagem em Álgebra Linear seja alvo de diversas críticas por autores que buscam métodos didáticos propulsores de uma aprendizagem com mais significado ao aluno, é válido ressaltar que este formalismo emerge do caráter unificador e generalizante da teoria dos Espaços Vetoriais, que por sua vez remontam ao nascimento da própria Álgebra Linear a partir do século XIX, tendo em vista seu potencial em unificar diferentes métodos e ferramentas usadas em diversos contextos e generalizando-as (DORIER *et al.*, 1994; DORIER 1998; 2002).

Dorier (1995a) concebe a teoria dos Espaços Vetoriais como um exemplo de teoria unificadora e generalizante, haja vista sua concepção de conceitos dessa natureza, a saber,

> Conceitos unificadores e generalizantes unificam e generalizam diferentes métodos, ferramentas e objetos, que existiam anteriormente em uma variedade de ambientes. Este tipo de conceito é então um conceito formal que unifica os vários objetos dos quais foi abstraído. Não foi necessariamente criado para resolver novos problemas, mas para tornar a solução de muitos problemas mais fácil ou mais semelhantes entre si (DORIER, 1995a, p. 177, traduzido pelo autor).

Assim, observamos que o formalismo exerce um papel fundamental no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos da Álgebra Linear, uma vez que ele possibilita ao aluno compreender o caráter unificador e generalizante da referida disciplina por meio da visualização de diferentes objetos matemáticos em diversos contextos como elementos coesivos passíveis de generalização por meio de características comuns entre si. Desse modo, embora o formalismo seja considerado por muitos como o problema da Álgebra Linear, seguramente percebemos que este na verdade é o elemento chave da disciplina.

Entretanto, segundo Dorier *et al*. (1994) e Dorier (1995a; 1998), a praticidade do formalismo e da axiomatização da Álgebra Linear não é de fácil entendimento ao estudante, uma vez que para isto seria necessário que ele conhecesse todos os contextos matemáticos que a subsidiaram. O desafio do professor, portanto, concretiza-se em dar um aspecto funcional ao formalismo como sendo o único meio de compreender diferentes aspectos anteriores dentro de uma mesma linguagem, por meio de uma noção mais intuitiva, para que o aluno consiga visualizá-lo em qualquer objeto matemático compreendido como um elemento do Espaço Vetorial, tais como funções, matrizes, n-uplas, polinômios etc.

Nesse contexto, Dorier (1995a) distingue duas etapas na construção de um conceito unificador e generalizante, que segundo ele correspondem a dois processos mentais na aprendizagem: (I) O reconhecimento de semelhanças entre objetos, ferramentas e métodos dá vida ao conceito unificador e generalizante e (II) A explicitação do conceito unificador e generalizante como objeto induz uma reorganização de antigas competências e elementos do conhecimento. Desse modo, o formalismo deve ser apresentado como a resposta a um problema que os alunos são capazes de compreender e fazer por conta própria.

A ideia, portanto, consiste em inserir o aluno em uma atividade matemática na qual ele possa resolver e ao mesmo tempo refletir sobre algumas possibilidades de generalização e unificação dos métodos que ele mesmo desenvolveu, no intuito de visualizar suas praticidade e simplificação. Para Dorier (1998) isso implica não somente em dar exemplos de objetos diferentes em distintos contextos, mas também em mostrar como todos esses exemplos estão conectados e qual é o papel dos conceitos formais em relação a atividade matemática envolvida.

Nessa perspectiva, tendo em vista as dificuldades na compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear elencadas por Grande (2006), Andreoli (2009), Andrade (2010), Souza (2016), e ainda a imprescindibilidade do formalismo na visualização do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear apontada nos estudos de Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a; 1998; 2002), **levantamos a hipótese de que a visualização do caráter unificador e generalizante das noções de Dependência e Independência Linear pode contribuir para a compreensão desses conceitos com mais significado**.

Dessa forma, a História da Matemática surgiu como um interessante provedor de recursos didáticos que contribuiria para explicitação do caráter unificador e generalizante das noções de Dependência e Independência Linear, tendo em vista que este possa fornecer aos alunos subsídios histórico-epistemológicos à uma compreensão conceitual com significado.

Muitos estudiosos têm defendido as contribuições que ações docentes balizadas em fatos históricos da Matemática possibilitam aos processos de ensino e de aprendizagem desta disciplina, tais como Miguel e Miorim (2004); Miguel (1993;1997), D’ambrosio (1999; 2000); Mendes (2001; 2006; 2016) e Brandemberg (2017; 2018; 2021). Um dos aspectos que certamente se destaca nesses trabalhos diz respeito ao fato de que uma abordagem didática amparada na história empresta significado aos conteúdos matemáticos na medida que se compreende os motivos que levaram à sua constituição, o contexto histórico, social e cultural dos quais eles emergiram e ainda as implicações que culminaram em suas configurações atuais.

Para Miguel (1993;1997), é possível buscar na história elementos que conduzam o aluno a perceber a Matemática como uma criação humana, que a curiosidade estritamente intelectual pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias e ainda a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. As ideias defendidas por Miguel (1993;1997) vão ao encontro de nossas intenções investigativas, uma vez que objetivamos evidenciar a Álgebra Linear como uma criação humana proveniente da necessidade em unificar e generalizar diferentes métodos e objetos matemáticos, a fim que se compreenda o papel exercido pelo formalismo na abordagem desses conceitos.

Essas ideias encontram suporte quando D'ambrosio (1999) ratifica o papel da Matemática na evolução da humanidade:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, 1999, p. 97).

Nesse sentido, é possível observar que a História da Matemática remonta a existência da própria humanidade e sua razão de ser no mundo, ao mesmo tempo em que oportuniza a desmistificação de uma matemática fria, ideal, infalível e absoluta. É com esse propósito que muitos estudiosos têm defendido a busca de aspectos problematizadores dessas histórias, os quais possam ser vetorizados em sala de aula, na forma de exercícios de (re)descoberta e de (re)construção conceitual, conforme expressam os estudos de Miguel e Miorim (2004); Mendes (2001; 2006; 2016) e Brandemberg (2017; 2018; 2021).

Miguel e Morim (2004) defendem que as histórias podem e devem constituir pontos de referência para a problematização desde que sejam devidamente constituídas para fins explicitamente pedagógicos e organicamente articuladas com as demais variáveis que intervém no processo de ensino e de aprendizagem escolar da Matemática. Nesse viés, Mendes (2016, p. 18) defende que a História da Matemática adequada a ser inserida em sala de aula trata-se do desenvolvimento histórico e epistemológico de ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

Para Brandemberg (2017; 2018; 2021), a adoção da História da Matemática como um provedor de recursos didáticos tem por objetivo emprestar significado contextual aos conteúdos abordados nos cursos de licenciatura em Matemática, e servir como elemento de motivação para o desenvolvimento conceitual do aluno, sendo a elaboração de atividades de cunho histórico, a partir da apresentação de aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico de conceitos matemáticos, uma das formas de realizar essa prática.

Desse modo, para que essas histórias possam ser vetorizadas na forma de exercícios problematizadores que promovam a construção conceitual dos objetos matemáticos, se faz necessário construí-las e disponibilizá-las aos professores para que estes adequem ao nível cognitivo dos alunos, à realidade da sala de aula e aos seus objetivos. É nesse contexto que este trabalho se insere, uma vez que visamos investigar o caráter unificador e generalizante constante no desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear a fim de ser utilizado na aprendizagem dos referidos conceitos.

Mendes (2015), ao evocar os três grandes eixos em que a história se desdobra apontados por Hans Wussing (1998), – a pesquisa, a disciplina e o instrumento de ensino de matemática – destaca que o primeiro exerce um papel fundamental ao fornecer subsídios para que essa História da Matemática possa ser tomada como disciplina e como instrumento. Embora nosso intento não seja de que o professor ministre aulas de história da Álgebra Linear, concordamos com Mendes (2015) quando coloca que a epistemologia da matemática construída pela sociedade humana se constitui hoje como objeto de pesquisa, na tentativa de reconstituir o processo de criação matemática com vistas a retomá-lo como veículo de ensino.

O papel que a História da Matemática pode exercer no processo de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear aparece de maneira mais explícita quando Coimbra (2008) destaca o *desconhecimento da história* como sendo um dos aspectos problemáticos nesse processo.

Para Coimbra (2008), o conhecimento histórico da Álgebra Linear é de grande importância para a sua compreensão enquanto ideia unificadora, a qual não pode faltar ao professor e deve estar presente em todos os momentos para que os alunos percebam toda a sua extensão e não tenham uma visão parcial e deformada do assunto.

É nesse sentido que a História da Matemática emerge como um forte provedor de recursos didáticos, ao auxiliar o professor na elucidação do caráter unificador e generalizante das noções de Dependência e Independência Linear, tendo em vista sua especificidade em fornecer aspectos que explicitem a necessidade da criação dos conceitos em questão como linguagem universal aos conhecimentos da época. Nosso propósito é de que estes aspectos possam ser vetorizados em sala de aula na forma de exercícios problematizadores, nos quais os alunos valorizem o viés axiomático da disciplina e compreendam o formalismo como linguagem necessária com a qual os objetos da Álgebra Linear devem ser trabalhados.

Em vista disso, este trabalho se propôs a responder à seguinte questão:

- *De que forma o desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear pode ser abordado em cursos de Álgebra Linear para viabilizar uma melhor compreensão desses conceitos por licenciandos em Matemática?*

Com o propósito de responder à questão norteadora do estudo em foco, estabelecemos como Objetivo Geral:

- *Apresentar recomendações didáticas para o ensino dos conceitos de Dependência e Independência Linear, com viés histórico, visando uma melhor compreensão desses conceitos por licenciandos em Matemática.*

A fim de alcançar o Objetivo Geral e, dessa forma, responder à questão norteadora deste trabalho, elencamos os seguintes Objetivos Específicos:

- *Construir uma síntese do desenvolvimento histórico de conceitos que compõem a disciplina Álgebra Linear;*

- *Identificar, no desenvolvimento histórico da Álgebra Linear, diferentes noções matemáticas que antecederam os atuais conceitos de Dependência e Independência Linear;*

- *Propor, a partir do desenvolvimento histórico elaborado, recomendações didáticas para a abordagem das diferentes noções matemáticas, precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear, em cursos de Álgebra Linear.*

Dessa forma, este trabalho se insere na área de História da Matemática ao investigar o desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, a fim de que essa história possa ser utilizada nos processos de ensino e de aprendizagem desses conceitos.

É necessário ressaltar, contudo, que os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear subsidiado por aspectos histórico-epistemológicos são investigados desde 1980 por Jean-Luc Dorier em colaboração com outros pesquisadores franceses. Além disso, ao realizar um levantamento[3] de Dissertações defendidas no Brasil que tenham abordado conceitos subjacentes à Álgebra Linear e tenham utilizado, de maneira direta ou indireta, os aspectos históricos-epistemológicos desses conceitos, obtivemos um total de seis trabalhos, sejam eles, Oliveira (2002), Grande (2006), Júlio (2007), Coimbra (2007), Vieira (2013) e Ribeiro (2018).

A singularidade do nosso estudo em detrimento das pesquisas supracitadas consiste no papel exercido pelo desenvolvimento histórico dos conceitos da Álgebra Linear. Jean-Luc Dorier e seus colaboradores tomam esse desenvolvimento histórico-epistemológico como fonte de motivação para a construção de sequências de ensino à luz da tradição da didática francesa. De igual maneira, as Dissertações supracitadas têm no desenvolvimento histórico um repositório de subsídios analíticos e/ou argumentativos para a construção de sequências de ensino, ou então não fazem relação com os processos de ensino e aprendizagem quando a construção histórica ocupa a centralidade da investigação.

Apesar de entendermos essas investigações acerca do desenvolvimento histórico dos conceitos da Álgebra Linear como salutares aos processos de ensino e

[3] Para maiores esclarecimentos consultar Dias e Brandemberg (2021)

de aprendizagem, defendemos que a História da Matemática pode ir além de uma fonte de motivação para a construção de sequências de ensino. O desenvolvimento histórico desses conceitos pode ser diretamente inserido na sala de aula, a partir de exercícios problematizadores que possibilitem processos de (re)construção conceitual dos objetos matemáticos, e assim, uma compreensão com significado desses objetos. Esta é a singularidade e a pertinência na qual encontra-se o nosso estudo.

Na próxima seção, dissertamos acerca dos aspectos metodológicos do estudo em questão, onde exibimos a metodologia de pesquisa adotada por este trabalho e ainda os procedimentos metodológicos executados com o intuito de alcançar os objetivos ora propostos, e assim, responder à questão norteadora deste estudo.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Tendo em vista alcançar os objetivos geral e específicos, assim como, responder à questão norteadora deste estudo, realizamos uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa para análise dos dados. Para Gil (2008), a Pesquisa Bibliográfica utiliza-se de material já elaborado constituído principalmente de livros, teses, dissertações e artigos científicos, que permitem ao investigador uma visão ampla dos estudos realizados sobre o tema, assim como possibilitam visualizar que aspectos de um fenômeno ainda não foram totalmente explorados ou podem ser (re)visitados à luz de novas concepções.

A principal vantagem da pesquisa bibliográfica figura em sua praticidade e abrangência, uma vez que ela possibilita ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla e rápida do que aquela que poderia investigar diretamente. Ainda para o autor, em se tratando de estudos históricos, a pesquisa bibliográfica se faz indispensável, haja vista que em muitas situações não há outra maneira de conhecer os fatos do passado se não com base em dados secundários obtidos em investigações anteriores (GIL, 2008).

Marconi e Lakatos (2003) destacam que esse tipo de pesquisa abrange toda bibliografia tornada pública em relação ao tema estudado, tais como publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, monografias, teses, material cartográfico e meios de comunicações audiovisuais. Ainda para os autores, sua principal finalidade consiste em colocar o investigador em contato direto com tudo o que foi registrado acerca da referida temática, possibilitando assim um exame sob novos prismas investigativos a fim de obter conclusões inovadores.

A fim de responder à questão norteadora e alcançar os objetivos erigidos inicialmente, procedimentos metodológicos foram executados no decurso da pesquisa. Em um primeiro momento realizamos um levantamento de livros, teses, dissertações e artigos científicos que discutissem os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, mais especificamente, acerca dos conceitos de Dependência e Independência Linear, com o intuito de identificar que obstáculos são apontados pela literatura na compreensão desses conceitos pelos alunos, bem como das especificidades que embasam a abordagem axiomática e formal com a qual são trabalhados os conceitos da Álgebra Linear.

Posteriormente, realizamos um levantamento no banco digital da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) de trabalhos que tenham discutido o desenvolvimento histórico da Álgebra Linear. Tais estudos foram de grande importância ao desenvolvimento da pesquisa, haja vista que nos possibilitou ter conhecimento de trabalhos internacionais que também abordam a constituição histórica de conceitos subjacentes à Álgebra Linear, bem como, acesso a trabalhos originais de matemáticos que contribuíram ao surgimento da disciplina.

A partir da leitura dos trabalhos nacionais e internacionais acerca da constituição da Álgebra Linear e ainda dos trabalhos originais de matemáticos que contribuíram para tal, discorremos acerca do desenvolvimento histórico de conceitos que compõem a disciplina Álgebra Linear. Nosso propósito, nesse sentido, foi o de explicitar o caráter unificador e generalizante presente na constituição histórica dos conceitos de Dependência e Independência Linear, através da compilação de diferentes noções matemáticas ao longo do tempo, que remontam aos conceitos em foco, a fim de evidenciar a importância da linguagem axiomática e formal com a qual estes objetos são abordados em cursos de Álgebra Linear.

Por fim, apresentamos sugestões didáticas sobre como essas diferentes noções matemáticas, concebidas ao longo do tempo e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, podem ser vetorizadas na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual em cursos de Álgebra Linear, para que os alunos compreendam o caráter unificador e generalizante dos referidos conceitos, assim como entendam e valorizem a linguagem axiomática e formal com a qual esses objetos matemáticos são tratados. Além do que, visualizem na História da Matemática um recurso didático que pode contribuir para uma aprendizagem conceitual com significado.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

O propósito deste capítulo foi o de evidenciar os aspectos pessoais e acadêmicos que nos conduziu ao tema em questão, assim como de exibir a trajetória teórica percorrida por nós e da qual emergiu a questão de pesquisa, bem como os objetivos gerais e específicos que balizaram o estudo em foco. Além disso, também pontuamos a metodologia que subsidia o trabalho e ainda os procedimentos metodológicos executados por nós com o intuito de responder à questão erigida inicialmente. Diante do que fora exposto, entendemos ter sido possível evidenciar ao leitor os motivos que nos fizeram escolher o tema em apreço e o modo como esta pesquisa foi desenvolvida.

Tendo em vista utilizar a História da Matemática como recurso didático aos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear – de maneira mais específica nos conceitos de Dependência e Independência Linear – e ainda que o presente estudo encontra abrigo no campo da Educação Matemática, no capítulo subsequente discorremos a respeito da inserção da História da Matemática no processo de instituição e constituição histórica e epistemológica do campo da Educação Matemática, assim como discutimos as potencialidades que processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, subsidiados pela história, podem ofertar aos alunos em termos conceituais e procedimentais.

As ideias discutidas centram-se na maneira como o professor poderá tomar o desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e vetorizá-los na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual. Tais ideias são fundamentais, tendo em vista que as sugestões que serão apresentadas sobre o uso do desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear são amparados por tais concepções.

Capítulo 1

A História da Matemática no Campo da Educação Matemática

Tendo em vista que o presente estudo fora desenvolvido na linha de concentração Educação Matemática, visualizamos a necessidade de explicitar os aspectos que localizam as pesquisas em História da Matemática no campo da Educação Matemática. Assim, neste capítulo discutimos de que forma a pesquisa em História da Matemática se insere nos processos de instituição e constituição histórica e epistemológica do campo da Educação Matemática, bem como acerca das potencialidades e da maneira como a História da Matemática pode ser inserida nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática.

1.1. A GERMINAÇÃO DO CAMPO EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO SÉCULO XIX

O período compreendido entre o final do século XIX e início do século XX fora marcado por intensas transformações nos âmbitos sociais, políticos e econômicos em nível mundial. Segundo Miorim (1998), o novo contexto sócio-político-econômico derivado do rápido avanço tecnológico e do desenvolvimento industrial iniciado no século XVII fora decisivo para que houvesse a necessidade de trabalhadores mais qualificados em termos científicos, com o intuito de que estes pudessem operar os novos maquinários, assim como desenvolver novas ferramentas industriais.

A importância cada vez mais acentuada das ciências ao desenvolvimento sócio-político-econômico gerou pressões para a modernização dos currículos escolares da escola secundária no final do século XIX. A questão central consistia no conhecimento de quais disciplinas seriam essenciais à formação de um indivíduo que estava inserido nesse novo contexto. Tais discussões foram defendidas por dois grandes grupos: Os que acreditavam que o indivíduo deveria ser educado por meio das disciplinas clássicas (humanísticas) e aqueles que defendiam ser necessário uma formação regida pelos novos paradigmas científicos (MIORIM, 1998).

As descobertas no campo das ciências físicas e químicas ocorridas principalmente no século XIX, embora tenham sido inseridas de maneira lenta e diferenciada em cada país, foram decisivas para que surgissem apontamentos questionadores acerca da importância atribuída à Matemática nos currículos escolares dos últimos séculos.

> Os defensores da introdução de matérias mais modernas, como a História, as Ciências naturais e as Línguas modernas, ao tentarem garantir um espaço para elas no currículo da escola secundária, começaram a questionar a importância da Matemática, utilizando como argumento fundamental o fato de ela ser pouco utilizada na vida diária (MIORIM, 1998, p. 55).

Desse modo, a Matemática enfrentava a possibilidade de perder seu espaço na formação de um indivíduo imerso nesse novo cenário político-econômico-social, uma vez que era concebida por muitos apenas como uma ferramenta para a aplicação de conhecimentos oriundos de outras ciências. Estes questionamentos ganharam força por meio da realização de estudos psicológicos que expuseram a capacidade de outras disciplinas em desenvolver habilidades cujo a Matemática afirmava ser possibilitadora (MIORIM, 1998).

Como mecanismo de defesa, os Matemáticos e professores de Matemática também se envolveram em estudos psicológicos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, visando a manutenção da posição ocupada por essa disciplina nos currículos escolares e justificando-a por meio desses estudos. As Universidades, que também se encontravam em processo de modernização curricular, por sua vez configuraram-se em locais nos quais essas investigações foram desenvolvidas (MIORIM, 1998).

Além disso, estudiosos da Pedagogia também discutiam o papel da Matemática na formação de um indivíduo, tais como Johann Pestalozzi (1746 – 1827), Johann Herbart (1776 – 1841) e Friedrich Fröebel (1782 – 1852), os quais salientavam a importância dos métodos intuitivos, ligados ao concreto e baseado no desenvolvimento da criança durante os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática. Esses estudiosos não questionavam os conteúdos matemáticos presentes nos currículos escolares, tal questão fora colocada em destaque pelos próprios Matemáticos que estavam desenvolvendo estudos na área da psicologia e que passaram a reivindicar uma modernização desses currículos.

Nesse sentido, tendo em vista possibilidade de perder seu espaço enquanto formadora do homem, assim como a necessidade de que seu processo de ensino e de aprendizagem estivessem mais coadunados ao novo contexto mundial da virada do século XIX ao XX, deu-se início às primeiras discussões acerca da modernização do ensino de Matemática. É importante esclarecer que são essas mesmas ideias modernizadoras que reocupam a centralidade das discussões na década de 1950, por razões sociais, econômicas e políticas, e que culminaram no surgimento do que conhecemos por Movimento da Matemática Moderna (MIORIM, 1998).

Como justificativa à necessidade de modernização do ensino de Matemática na virada do século XIX ao XX, além das razões elencadas anteriormente, constava o descompasso existente entre a Matemática ensinada nas Universidades, pautada nas novas descobertas do século XIX, e da Matemática trabalhada no ensino secundário, que ainda estava enraizada na geometria grega, álgebra elementar e cálculo aritmético. Além disso, essas discrepâncias também ecoaram na formação de professores de Matemática pelas universidades, que sentiram a necessidade de discutir aspectos de pedagogia geral em suas formações (MIORIM, 1998).

Mesmo tendo se manifestado de diferentes maneiras em cada país, esses movimentos modernizadores do ensino de Matemática, de maneira geral, reivindicavam um ensino de Matemática mais simples e intuitivo, com a introdução de elementos da Matemática do ensino superior no ensino secundário – como o conceito de função, representações gráficas e noções de cálculo infinitesimal –, e ainda a fusão dos temas algébricos e aritméticos. Contudo, as modificações almejadas por esses movimentos ainda levariam um bom tempo até que fossem adotadas pelos sistemas escolares nacionais (MIORIM, 1998).

Apesar da repercussão dos movimentos modernizadores do ensino de Matemática em cada país de origem, essas discussões não ultrapassavam as fronteiras. Matemáticos e educadores não dialogavam com os de outros países, e ainda, experiências com a inserção de ideias modernizadoras nos currículos escolares não eram compartilhadas, o que eventualmente causava insegurança em adotá-las. Tudo isso, fora crucial para que os Matemáticos visualizassem a necessidade da realização de encontros que envolvessem estudiosos de diferentes países para discutir essas pautas (KILPATRIK, 2008).

É esse o contexto no qual podemos afirmar ter germinado o campo Educação Matemática, uma vez que nesses encontros a preocupação com os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática tornaram-se alvo de discussão e investigação em nível mundial. O início da realização dos Congressos Internacionais de Matemática no ano de 1897, em Zurique, tornou público os problemas relacionados ao ensino de Matemática, enfrentados por diferentes países, bem como as formas encontradas por eles para solucioná-los (MIORIM, 1998).

No entanto, Matemáticos e professores de Matemática expunham suas inquietações quanto às discussões realizadas durante os congressos internacionais, ao afirmar que estas se limitavam às questões sobre a própria Matemática, indo ao contrário do idealizado inicialmente. Dentre estes, David Eugene Smith (1860 – 1944) – catedrático da Educação Matemática no Teachers College da Columbia University – defendia a realização de discussões mais voltadas aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática nos diferentes países (MIORIM, 1998).

Em 1905, Smith publicou um artigo no qual defendia a criação de uma comissão internacional para investigar o ensino de Matemática no nível secundário em diferentes países, a partir do levantamento de propostas existentes que fornecessem elementos comparativos fundamentais para a organização dos currículos. No IV congresso, realizado em Roma no ano de 1908, a referida proposta foi apresentada formalmente. Tendo sido aprovada, e movida também a outros níveis de ensino, Felix Christian Klein (1849 – 1925) foi eleito o presidente-fundador da Comissão Internacional do Ensino de Matemática (CIEM), que posteriormente seria transformada na (ICMI) Comissão Internacional de Instrução Matemática (KILPATRIK, 2008).

Desse modo, dois personagens destacam-se nos processos de instituição e constituição do campo da Educação Matemática, a saber, David Smith e Felix Klein. eles foram fundamentais para o nascimento da Educação Matemática e suas contribuições por meio da História da Matemática nos permite compreender de que forma este subcampo fora inserido nos primeiros passos seguidos pela Educação Matemática, uma vez que estes fizeram da ICMI um instrumento para a realização das transformações e idealizações almejadas. Tratamos essas questões com mais detalhes na próxima seção.

1.2. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA INSTITUIÇÃO E CONSTITUIÇÃO DO CAMPO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

David Eugene Smith, embora não fosse Matemático de formação inicial, foi um renomado estudioso da História da Matemática e suas contribuições à Educação Matemática são lembradas até os dias de hoje. Smith iniciou seus estudos de ensino superior na Syracuse University, na qual cursou uma ampla variedade de cursos em artes e humanidades e obteve o grau de bacharel em filosofia no ano de 1881. Ainda na mesma instituição, Smith realizou pós - graduação em História, Línguas modernas e em Matemática, e no ano de 1884 obteve o grau de mestre em Filosofia pela Syracuse University (O' CONNER & ROBERTSON, 2015).

A partir do convite feito pela Cortland Normal School para substituir um professor, Smith ministrou aulas de Matemática e descobriu assim a paixão pela docência e pela disciplina, motivo que o fez ser efetivado como professor da instituição. Contudo, no mesmo período, Smith continuou seus estudos de pós – graduação na Syracuse University e obteve grau de doutor em História das artes plásticas no ano de 1887. A partir de então, Smith começou a acrescentar a História da Matemática no ensino dos conteúdos de aritmética, álgebra, geometria plana, geometria sólida e trigonometria (O'CONNER & ROBERTSON, 2015).

Após Cortlando Normal School, Smith ocupou cargos em outras instituições como Michigan Universtity, Brockpor Normal School e na Teachers College da Columbia Univesity. As experiências com a inserção da História no ensino dos conteúdos de Matemática somadas aos estudos na pós – graduação foram preponderantes para que Smith publicasse diversos trabalhos em Educação Matemática e História da Matemática, e conseguisse construir uma valiosa biblioteca com materiais antigos que estavam à disposição dos seus alunos. A seguir um relato de um dos alunos de Smith sobre a biblioteca:

> Esta biblioteca de material histórico e matemático é uma das mais interessantes de seu tipo no mundo, não apenas por causa de seu tamanho, mas por causa dos volumes muito raros em suas prateleiras. Livros de todos os períodos da história e de todos os países são encontrados lá. Tabletes históricos primitivos, manuscritos originais, cartas autografadas, cópias de apresentação e primeiras edições (...) A coleção é mais do que uma coleção – é uma expressão do interesse e da personalidade do Dr. David Eugene Smith, com o intuito de preservá-los para seus alunos (O'CONNER E ROBERTSON, 2015, p. 2, traduzido pelo autor).

Além disso, Smith desenvolveu diversos programas que dialogavam sobre Matemática e ensino. Ofereceu o único curso de História da Matemática na época, no qual discutia-se o desenvolvimento histórico e epistemológico dos conteúdos matemáticos, desse modo fazendo da inserção da História da Matemática uma marca registrada em seus programas. Smith encorajava os professores a ocuparem um papel ativo na determinação do currículo de Matemática e da pedagogia da sala aula, para obter uma perspectiva histórica sobre o ensino de Matemática e para considerar pontos de vistas internacionais sobre a educação (DONOGHE, 2021).

Outro personagem também muito importante ao campo foi Felix Klein, motivo que o faz ser conhecido como pai da Educação Matemática. Klein foi pioneiro, entre os Matemáticos, a se preocupar com a formação dos professores de Matemática no final do século XIX e início do século XX, formação essa que havia alcançado preocupações em instituições de nível superior nos mais diversos países. Até o final do século XIX, os professores de Matemática eram capacitados em universidades, seminários pedagógicos e escolas normais, entretanto essa formação não passava de palestras matemáticas ministradas por Matemáticos, com pouquíssima ou nenhuma instrução de ensino de Matemática (KILPATRIK, 2008).

Felix Klein, a partir de sua experiência em ministrar cursos sobre métodos de ensino em universidades na Alemanha, tomou a frente do movimento de resolução desse problema e, por estar à frente da ICMI, fez dela um instrumento para a realização da transformação almejada. A justificativa para essas ações consistia nos objetivos da Educação Matemática expostos por Klein, a saber: desenvolver a própria Matemática e destacar a importância da Matemática para o avanço das outras ciências, não como aplicações práticas, mas como ferramenta teórica fundamental para a obtenção de resultados (MIORIM, 1998).

Klein afirmava ser impossível tratar da modernização do ensino de Matemática no nível secundário e não tratar da formação do professor de Matemática pelas Universidades. Ele entendia a necessidade da realização de um ensino mais vivo, com a inserção das novas descobertas matemáticas e que promovesse uma aprendizagem com significado, assim, defendia a renovação dos métodos e conteúdos trabalhados nos centros formativos de professores para que houvesse uma melhora na qualidade de ensino no nível secundário (MIORIM, 1998).

Tendo em vista a necessidade de uma adequação curricular, dado o descompasso existente entre a Matemática do ensino secundário e a Matemática do ensino superior, Felix Klein tomou forças para intensificar a necessidade de uma melhor formação de professores de Matemática. De acordo com Kilpatrik (2008), à medida que os países começaram a estabelecer sistemas escolares nacionais, exigiu-se uma maior oferta de professores com formação profissional, bem como que estimulassem a evolução de instituições de nível secundário às de nível superior. Tais mudanças foram decisivas para a constituição da Educação Matemática como uma disciplina universitária.

Um dos instrumentos tomados por Felix Klein para tornar efetivo o que hoje tem-se em processo de consolidação no campo da Educação Matemática foi a inserção da história dos conteúdos matemáticos em sala de aula, localizado de maneira sutil no volume I de sua obra *Elementary Mathematics from advanced standpoint*,[4] publicada pela primeira vez em alemão no ano de 1908. Em seu prefácio, Felix Klein se mostra preocupado com a dissonância existente entre os métodos históricos de produção do conhecimento matemático e os métodos didáticos com os quais ele era trabalhado em sala de aula (MIGUEL, 1993).

Para Felix Klein, segundo Miguel (1993), os métodos utilizados no ensino de Matemática daquele período eram tidos como os únicos existentes, promovendo assim a ideia de uma Matemática pronta e acabada, o que não possibilitava uma educação que desenvolvesse o espírito investigativo do aluno. Esta instrução científica poderia ser efetivada, segundo Klein, através da adoção de outras lentes, dentre as quais a história. Assim, segundo Miguel (1993), tal fato evidencia a dimensão pedagógica da história associada à seleção de conteúdos adequados no processo de ensino e de aprendizagem em Matemática.

Nesse sentido, é possível afirmar que Felix Christian Klein e David Eugene Smith foram os principais responsáveis pela inserção do uso da História da Matemática nas ideias modernizadoras discutidas pela Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI). Esse movimento pôde ser observado quando, em 1916, o Comitê Nacional para os Requisitos Matemáticos, com o intuito de contribuir às ideias modernizadoras de diferentes países, propôs a inserção da História da Matemática como agente possibilitador da reforma curricular.

[4] Matemática elementar do ponto de vista avançado

> Com a intenção de que algumas experiências fossem realizadas antes de que orientações mais fechadas fossem sugeridas, o comitê apresentou algumas possibilidades de planos para a escola secundária, sendo propostos novos conteúdos eletivos (...) além disso, recomendou-se o “[...] uso extensivo de material histórico e biográfico em todo o programa para emprestar significado à matéria estudada” (Butler et al., 1970, p. 12. Trad. da autora) (MIORIM, 1998, p. 77).

Entretanto, é necessário ressaltar que a História da Matemática não se configura como um simples recurso didático que possibilita ao campo da Educação Matemática alcançar seus objetivos. A História da Matemática está imersa no processo de constituição epistemológica do campo, bem como contribui para a construção identitária da Educação Matemática, na medida que agrega a este questões que perpassam o processo de apreensão do conhecimento matemático, mas que não envolvem apenas as especificidades cognitivas dos alunos ou os aspectos formativos dos professores.

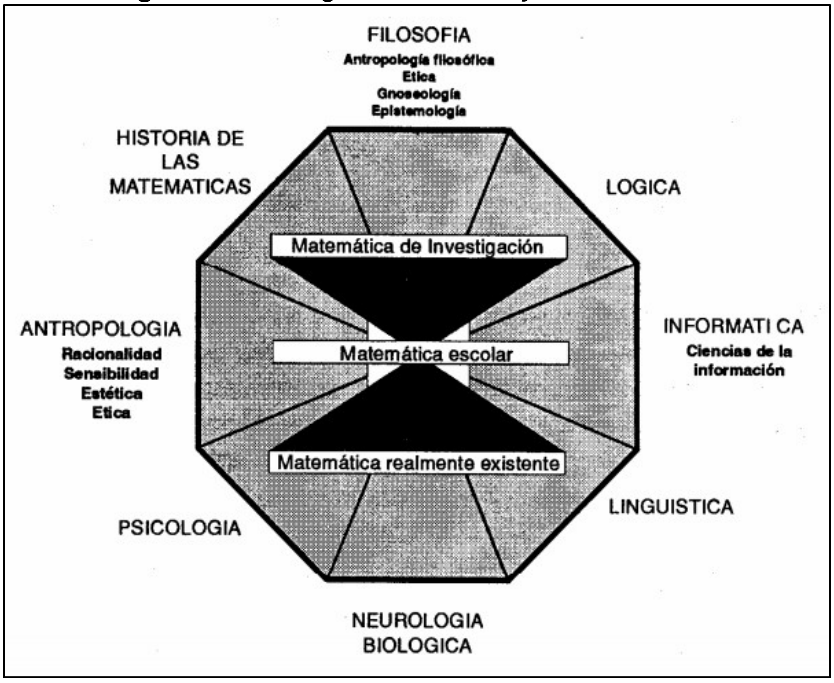
Para Kilpatrik (1996), desde seu processo de instituição e durante todo o seu processo de constituição histórica, o campo da Educação Matemática enfrenta sérios problemas de status e identidade, uma vez que os Matemáticos parecem não entender o campo e, acima de tudo, os próprios Educadores Matemáticos frequentemente não se entendem. Esse fato materializa-se nas habituais reduções simplórias ou comparações incorretas realizadas por esses mesmos pesquisadores quanto ao que seria o campo da Educação Matemática.

Na tentativa de compreender a natureza das concepções obscuras ou parciais que os pesquisadores possuem sobre a Educação Matemática, somos conduzidos à própria constituição epistemológica do campo, tendo em vista que ela foi subsidiada por outras ciências que frequentemente são confundidas com a própria Educação Matemática. Educação, Didática da Matemática, Ensino de Matemática, Psicologia da Matemática, entre outras áreas afins, são erroneamente entendidas como sinônimos do campo da Educação Matemática.

No decurso de um entendimento acerca da construção identitária do campo da Educação Matemática, é necessário atemo-nos à sua constituição epistemológica, haja vista que nesse processo, ao mesmo tempo em que o campo empresta das áreas auxiliares aspectos identitários, também os utiliza para evidenciar sua singularidade entre eles. Em meio às áreas essenciais à constituição epistemológica do campo da Educação Matemática, encontra-se a História da Matemática, que por sua vez resgata o viés social e cultural da produção do conhecimento matemático, tornando assim o campo ainda mais complexo e singular.

Nesse sentido, a fim de corporificar nossas argumentações e de fundamentar nossos entendimentos sobre a constituição da Educação Matemática, evocamos o *Octógono da Educação Matemática* (ver figura 1) proposto por Vasco (1994). Para o autor, sob uma perspectiva externa, é possível perceber que o processo de constituição epistemológica do campo fora subsidiado por outras oito áreas disciplinares, as quais permitem pensar a Educação Matemática como distintas dela, porém impensável sem elas. Essas disciplinas estão postas em um octógono no qual a Educação Matemática ocupa o espaço central.

Figura 01: Octógono da Educação Matemática



Fonte: Vasco (1994)

Para Vasco (1994), o que se entende por Matemática ainda não está bem claro quanto parece, o mais próximo que se tem alcançado a este ofício é a existência de dezenas de definições reunidas em pequenos grupos de seguidores. Entretanto, ainda para o autor, é inegável que durante toda a história muitas práticas sociais têm se desenvolvido e têm sido denominadas de matemática por seus praticantes. Nesse sentido, Vasco (1994) concebe três tipos de práticas culturais e as denomina como:

Matemática realmente existente, Pedagogia da Matemática ou Matemática escolar e Matemática de investigação.

A Matemática realmente existente é compreendida como sendo a execução de atividades matemáticas reconhecidas socialmente como contagem de objetos, mensuração de coisas, transações financeiras etc. *A Pedagogia da Matemática ou Matemática escolar* é concebida como sendo a atividade de ensinar Matemática ao outro, não necessariamente imersa em um ambiente escolar, mas voltada à prática pedagógica de comunicar Matemática. E a *Matemática de investigação* é definida como sendo camadas superiores mais refinadas das *Matemáticas realmente existentes* e das *Matemáticas escolares*, que adquirem independência até às chamadas Matemáticas puras (VASCO, 1994).

Essas diferentes práticas sociais denominadas Matemáticas são categorizadas, segundo o autor, apenas por razões teóricas e analíticas, considerando que culturalmente são processos cíclicos e que se realimentam. É em volta destes processos que Vasco (1994) propõe dois olhares, o de dentro e o de fora, nos quais o olhar de dentro é o olhar do praticante e o olhar de fora é o olhar de quem está imerso em uma prática. Assim, para o autor, é necessário tomar esse olhar externo ao precisar o que seria esse novo campo da Educação Matemática e com isso poder localizá-lo entre outras disciplinas.

Tais disciplinas constantes no octógono não são saberes dos quais o investigador deve ser especialista, mas sim saberes dos quais ele deve ter suficiente informação, uma vez que subsidiarão o entendimento das complexidades de uma pesquisa em Educação Matemática (VASCO, 1994). Além disso, o posicionamento das disciplinas no octógono é realizado sob prismas epistêmicos acerca das contribuições destas à instituição e constituição do campo, com o propósito de evitar reduções e garantir uma definição à Educação Matemática.

Uma das disciplinas do *Octógono da Educação Matemática* essencial à nossa discussão é a Psicologia, tendo em conta que Psicologia e Matemática se tornaram disciplinas embrionárias e deram suporte ao novo campo chamado Educação Matemática (KILPATRIK, 1996). A partir da psicologia, os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática foram observados por meio de outras lentes, isto é, o aluno não aprendia apenas por não ter interesse ou porque era preguiçoso, havia variáveis imbuídas nestas situações e a Psicologia foi decisiva para que essas variáveis fossem observadas com mais atenção.

Segundo Vasco (1994), doravante o entrelaçamento inicial da Matemática e Psicologia, houve uma forte tendência em psicologizar a Educação Matemática, isto é, reduzir todo o campo em situações limitadas aos processos cognitivos dos alunos em sala de aula, renegando assim, o professor com seu saber pedagógico, a microssociologia dos grupos formados pelos alunos e outras especificidades socioculturais. É nesse contexto que nasceu a necessidade de tomar aspectos identitários de disciplinas que pudessem agregar essa perspectiva sociocultural ao campo, tais como Filosofia, Antropologia e História da Matemática.

Os questionamentos emprestados da Filosofia ao campo da Educação Matemática são justamente no incurso de uma significação à própria Matemática enquanto campo disciplinar. Perguntas do tipo ‘como?’, ‘por quê?’ e ‘para que aprender Matemática?’ Ou ainda ‘qual a contribuição dessa Matemática à sociedade?’ na medida que permitem dar significado aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, necessitam de uma visão mais ampla sobre o homem e sobre a sociedade, ou seja, necessita de uma *Antropologia filosófica* (VASCO, 1994).

Além dos questionamentos ofertados pela Filosofia à Educação Matemática, a Epistemologia surge como sendo uma vertente dessa disciplina que muito tem contribuído à construção identitária do campo da Educação Matemática, a partir da investigação da natureza do conhecimento científico. Entretanto, o campo tem tido a necessidade de uma teoria mais geral do conhecimento (Gnosiologia), que abrace também o conhecimento não científico, pois este igualmente é concebido como uma prática sociocultural do homem (VASCO, 1994).

Assim, podemos perceber que o campo da Educação Matemática não se atenta apenas às práticas socioculturais epistemologicamente concebidas como conhecimento científico, também leva em consideração as práticas socioculturais não hegemônicas. É nesse contexto que a História da Matemática emerge como mais uma disciplina que está diretamente ligada ao processo de constituição epistemológica do campo da Educação Matemática e que oferta subsídios à construção identitária deste, uma vez que ela é responsável por resgatar essas práticas socioculturais em tempos e espaços diferentes (VASCO, 1994).

Este fato justifica a frequente associação da Educação Matemática às ciências sociais ao invés das ciências exatas, conforme colocado por Kilpatrik (1996):

> A pesquisa em Educação Matemática vem deixando em grande parte de imitar a ciência natural e está adotando cada vez mais métodos usados nas ciências sociais (...). Embora alguns pesquisadores em Educação Matemática ainda tenham essa orientação, a maioria tem seguido outros pesquisadores em educação que tomaram emprestado estruturas e técnicas teóricas, a partir das ciências sociais. Abordagens vistas como fenomenológicas, interpretativas, construtivista social, ou etnográfica têm se tornado especialmente populares entre os pesquisadores em Educação Matemática (KILPATRIK, 1996, p. 3).

Nesse sentido, se faz necessário assegurar a relação do octógono com as investigações desenvolvidas no campo da Educação Matemática. Para Vasco (1994), tendo em vista a natureza complexa do campo, o investigador que se detém sobre um fenômeno constante neste campo precisa adotar a maior parte, senão todos, dos prismas disciplinares do octógono, a fim de compreender a totalidade do fenômeno. Assim, justifica-se a importância de o investigador ter suficiente informação de cada uma dessas disciplinas, bem como uma rede próxima de estudiosos dessas áreas.

Desse modo, dada as colocações de Vasco (1994), observa-se que a constituição do campo da Educação Matemática fora subsidiada por outras disciplinas, as quais comumente são concebidas como similares ao campo, o que fez emergir a necessidade de explicitação da identidade da Educação Matemática. É nesse contexto que a História da Matemática ocupa uma posição fundamental ao processo, configurando-se como um elemento epistêmico-constitutivo, que fornece aspectos identitários ao campo da Educação Matemática.

Conforme pontuado no início do capítulo, sua elaboração emergiu da necessidade em localizar a nossa pesquisa de mestrado no campo da Educação Matemática e, ao mesmo tempo, expor as contribuições que pesquisas dessa natureza promovem ao avanço da Educação Matemática. Assim, se faz necessário explicitar o lugar ocupado por nosso estudo dentro da História da Matemática, uma vez que os trabalhos produzidos sob a égide desse subcampo têm crescido exponencialmente de maneira plural e diversificada.

Mendes (2015), tem se dedicado desde a década passada à realização de uma catalogação das produções acadêmicas brasileiras em História da Matemática no incurso de caracterizá-las e investigá-las. Embora tenha iniciado suas reflexões nos anais dos Seminários Nacionais de História da Matemática (SNHM) – em continuidade e ampliação das informações apresentadas por Sad (2005) – foi na transposição do seu olhar aos trabalhos produzidos no *Stricto Sensu* que sua classificação sobre essas produções obteve destaque e difusão no meio acadêmico.

Mendes (2015), por meio de investigações particulares e projetos de pesquisa institucionais, catalogou as teses e dissertações brasileiras defendidas entre os anos de 1990 e 2010 com o propósito de identificar e analisar os fundamentos teóricos e metodológicos que nortearam os estudos e pesquisas em História da Matemática, de modo a obter subsídios que apresentassem contribuições conceituais e didáticas para a formação inicial e continuada de professores de Matemática do país (p. 151). Essa catalogação foi ampliada ao período compreendido entre 1990 e 2019 e encontra-se disponível no repositório digital do CREPHIMat[5].

De posse dessas produções, Mendes (2015) as classificou em três tendências, a saber, *Estudos e Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática* (HEpM), *Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática* (HEdM) e *Estudos e Pesquisas em História da Matemática para o Ensino* (HEnM). Os estudos desenvolvidos em HEpM centram-se na investigação do desenvolvimento histórico-epistemológico de ideias e conceitos matemáticos, sem perder de vista o contexto histórico, cultural e social que os envolve, assim como os sistemas políticos e filosóficos que os subsidiaram.

Os estudos desenvolvidos em HEdM focalizam as transformações dos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática ao longo do tempo, por meio de manuais escolares, exames escolares, atas institucionais, programas de ensino, relatos de agentes atuantes nesses processos etc. Os estudos desenvolvidos em HEnM, por sua vez, constituem-se em investigações que apresentam propostas concretas do uso didático da História da Matemática em sala de aula, especificamente os que fornecem atividades e materiais de ensino apoiado no uso didático da História como contribuição ao trabalho docente.

Desse modo, o presente estudo situa-se no subcampo História da Matemática, mais especificamente no eixo HEpM, na medida que realiza uma investigação sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear. Embora tenhamos a intenção de propor algumas orientações sobre como essas histórias podem ser vetorizadas em sala de aula na forma de

[5] Centro de Referência Brasileiro de Pesquisa em História da Matemática

exercícios problematizadores, não o faz pertencer a tendência HEnM, uma vez que não se constituem em propostas concretas, mas sim recomendações de como esses exercícios didáticos podem ser executados.

Na próxima seção, discutimos de maneira mais detalhada as contribuições que os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, quando balizados por meio de investigações históricas em sala de aula, podem fornecer à formação conceitual e procedimental com significado dos alunos. As ideias discutidas centram-se na maneira como o professor poderá tomar o desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos matemáticos e vetorizá-los na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual. Tais ideias são fundamentais, tendo em vista que as sugestões que serão apresentadas sobre o uso do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear são amparadas por tais concepções.

1.3. O PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA BALIZADO PELA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Conforme pôde ser observado na seção anterior, a busca por métodos e recursos que possam promover melhores processos de ensino e de aprendizagem em Matemática tem sido alvo de diversas pesquisas no campo da Educação Matemática, desde o marco de sua instituição e durante todo o processo de sua constituição. Um dos recursos que certamente tem se consolidado nas últimas décadas – haja vista o crescente número de investigações com experiências didáticas – trata-se da inserção de aspectos históricos da produção do conhecimento matemático em sala de aula.

O uso da História da Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática encontra seus adeptos principalmente por suas contribuições à formação conceitual e procedimental com significado dos alunos e por suas potencialidades às ações formativas do professor. Para Brandemberg (2018), a inserção de aspectos históricos em sala de aula proporciona ao estudante o contato com as dificuldades características de cada época na resolução de determinados problemas, e assim o conduz a reconhecer uma matemática que se faz historicamente como uma produção de cunho sociocultural humano, onde os aspectos do cotidiano, da escola e da academia se mesclam.

Mendes (2016) assegura que a História da Matemática permite ao aluno compreender a Matemática como uma construção da humanidade, proveniente das tentativas do homem em obter melhores condições de vida no planeta e das quais emergiram modelos explicativos que posteriormente foram institucionalizados como saberes escolares. Desse modo, é dada ao aluno a possibilidade de visualizar o caráter dinâmico e recursivo da construção do conhecimento matemático, e assim, desmistificar a imagem de uma matemática fria, ideal, infalível e absoluta.

Entretanto, é importante ressaltar que quando discutimos a inserção da História da Matemática em sala de aula não estamos nos referindo ao exercício de relembrar nomes, datas e feitos heroicos que circundam a produção do conhecimento matemático, embora estes aspectos possam também se fazer presente. Trata-se, na verdade, de compreender e discutir as estratégias cognitivas desenvolvidas pela humanidade no tempo e no espaço para solucionar seus desafios e fazer destas modelos para desenvolver as nossas próprias estratégias de pensamento na compreensão do conhecimento matemático (MENDES, 2006).

Para Brandemberg (2017, p. 29), ao tomarmos a História da Matemática como nossa aliada na busca de novas alternativas de transposição didática para o ensino de Matemática, devemos trabalhar o desenvolvimento histórico-epistemológico de determinados conteúdos matemáticos (conceitos matemáticos, objetos matemáticos) sempre com o propósito de localizar possibilidades pedagógicas que possam auxiliar na superação das dificuldades encontradas por professores e estudantes de Matemática nos ambientes de ensino.

Nesse contexto, podemos afirmar que o uso da História da Matemática só terá sentido se tivermos ciência das metas e dos objetivos pedagógicos que desejamos alcançar em sua utilização. Para Miguel e Miorim (2004), a História, desde que devidamente constituída com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervém no processo de ensino-aprendizagem, pode e deve se constituir pontos de referência tanto para a problematização pedagógica quanto para a transformação qualitativa da cultura escolar e da educação escolar.

Em suas discussões, Miguel e Miorim (2004) explicitam que a História da Matemática adequada para ser utilizada como um recurso didático em sala de aula constitui-se na história da cultura matemática e da educação matemática, as quais são sustentadas por meio da problematização da matemática escolar atual. Para os autores, essa problematização fundamenta-se na concepção do modo como a cultura matemática e a educação matemática se instituem, se constituem e se transformam como práticas sociais escolares.

É em torno dessas especificidades que se configura uma História da Matemática própria para o ensino e que Miguel e Miorim (2004) conceituam como *histórias pedagogicamente vetorizadas*, as quais são definidas como sendo as histórias construídas com fins explicitamente pedagógicos e que derivam de problematizações sobre os atuais processos de ensino e de aprendizagem. Trata-se de uma história que se faz pensado tanto nos estudantes quanto nos futuros professores de matemática desses estudantes, e não necessariamente nos historiadores ou matemáticos (MIGUEL E MIORIM, 2004, p. 160).

Nesse sentido, nosso estudo, ao investigar a refletividade do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, se constitui como a construção de uma história voltada para fins explicitamente pedagógicos e que emergiu da problematização dos atuais processos de ensino e aprendizagem dos referidos conceitos. Esse tipo de estudo encontra suporte quando Miguel e Miorim (2004) evidenciam a necessidade de uma visão do professor que ensina matemática na construção dessas histórias:

> Daí, para que possam ser pedagogicamente convenientes e interessantes, pensamos ser necessário que histórias da cultura matemática passem, cada vez mais, a ser escritas sob o ponto de vista do educador matemático ou, em outras palavras, que *histórias pedagogicamente vetorizadas* passem a ser, cada vez mais, constituídas (MIGUEL E MIORIM, 2004, p. 156).

Desse modo, a História da Matemática colocada em foco neste estudo concentra-se na possibilidade de contribuir aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, de maneira geral, por meio da compreensão conceitual e procedimental com significado pelo estudante. Nesse sentido, faz-se necessário que discutamos também sobre os modos como essas histórias podem e devem ser inseridas em sala de aula nas atividades formativas de Matemática.

Mendes (2001; 2006; 2015) defende o uso da História da Matemática como um reorganizador conceitual cognitivo nas aulas de Matemática. Para o autor, a História da Matemática, quando aliada ao processo de investigação em sala de aula, contribui para que os alunos desenvolvam suas estratégias de pensamento, à medida que revisitarão os momentos históricos que envolvem os personagens que conceberam as noções matemáticas que se almeja ensinar, de modo a desafiá-los em suas capacidades de exercitar estudos, pesquisas e problematizações.

Para Mendes (2001; 2006; 2015) uma das formas de se utilizar a História da Matemática em sala de aula corresponde ao resgate de situações problematizadoras que emergiram dos momentos de produção do conhecimento matemático e que conduza o aluno à (re)descoberta desse mesmo conhecimento por meio dos aspectos históricos que as envolve. O propósito desses exercícios histórico-problematizadores de (re)construção conceitual refere-se à possibilidade em dar significado e significância ao conhecimento matemático trabalhado em sala.

> É com base nessas situações encontradas no conteúdo histórico que poderemos favorecer a formalização de conceitos matemáticos pelo aluno, em razão das informações históricas interpretadas apresentarem as estruturas cognitivas dos mesmos incorporadas à formalização dos conceitos matemáticos [...] Porém não seria possível alcançarmos essa fase se não nos apoiássemos nas atividades de redescoberta, pois as mesmas favorecem o amadurecimento do aluno à medida que procuram colocá-lo diante de uma situação similar àquela em que os matemáticos estiveram [...] (MENDES, 2001, p. 12).

Desse modo, não se trata de conduzir o aluno para que este refaça – de maneira rigorosa e mecânica – os mesmos passos que os matemáticos caminharam um dia em suas práticas construtivas, mas sobretudo de possibilitar ao o aluno a reflexão sobre as estratégias cognitivas desenvolvidas por esses mesmos matemáticos e que ele possa obter a partir delas subsídios epistemológicos que lhe possibilite desenvolver suas próprias estratégias de pensamento e que dê significado aos conteúdos matemáticos trabalhados em sala, conforme nos é evidenciado em Brandemberg (2017):

> Devemos enfatizar que as atividades perpassam ao simples encaminhamento passo a passo mecanizado. Devem sim, ser conectadas aos aspectos cotidianos, escolares e acadêmicos da cultura matemática. Umas das implicações deste processo é a discussão a partir dos erros e acertos produzidos na busca de respostas que podem encaminhar a novos desafios na resolução de problemas que ampliem e multipliquem os caminhos ou estratégias criativas de resolução que levem a novas fronteiras do conhecimento matemático (BRANDEMBERG, 2017, p. 28).

Mendes (2006), ao argumentar favoravelmente sobre a inserção de aspectos históricos nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, o faz considerando que a inserção desses aspectos pressupõe um estudo sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico de um tópico de Matemática, seguido de uma transposição adaptativa para as condições didáticas de uso em sala de aula, de modo a exercer uma ação cognitiva na aprendizagem dos alunos. Ainda para o autor, esse conhecimento, produzido na escola, será ressignificado de acordo com a contextualização sociocultural que reveste essas informações históricas.

É nesse contexto que nos propusemos a realizar uma investigação sobre a refletividade do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, para que assim pudéssemos obter subsídios que nos possibilitassem apresentar sugestões acerca de sua inserção nos processos de ensino e de aprendizagem da referida disciplina. Tudo isso, com o propósito de amenizar as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem desses conceitos.

O propósito do presente estudo encontra suporte quando Valdés (2006) pontua a importância da História da Matemática às ações docentes do professor em todos os níveis de ensino, em especial, os que lecionam no Ensino Superior e até mesmo dos matemáticos de ofício:

> Um certo conhecimento da história da matemática deveria se constituir em uma parte indispensável da bagagem de conhecimentos do matemático em geral e do professor de qualquer nível de ensino (primário, secundário ou superior). No caso deste último, não só com a intenção de que se possa utilizar a história da matemática como instrumento em seu próprio ensino, mas primariamente porque a história pode lhe proporcionar uma visão verdadeiramente humana da matemática, da qual o matemático pode estar, também, muito necessitado (VALDÉS, 2006, p. 15).

Ademais, também é corroborado quando Mendes (2006) esclarece o objetivo da inserção de aspectos históricos da Matemática em sala de aula a partir da observação de dificuldades nos atuais processos de ensino e de aprendizagem em Matemática:

> É na tentativa de superar essas situações embaraçosas que procuramos resgatar o processo histórico da construção da base conceitual da matemática, para que o aluno possa compreender o

> significado desses conceitos e sua importância para o desenvolvimento de toda a matemática e suas conexões. A partir do significado histórico e conceitual de alguns tópicos básicos da matemática é possível conduzir os alunos para que eles possam ampliar a sua aprendizagem através das atividades investigatórias desenvolvidas em sala de aula (MENDES, 2006, p. 112).

Desse modo, este trabalho emerge como sendo responsável por elaborar um estudo sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear com fins explicitamente pedagógicos e que poderá ser tomado pelo professor como matéria prima a ser vetorizada em sala de aula, por meio de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual, visando a compreensão do caráter unificador e generalizante desses conceitos, bem como da Álgebra Linear como um todo.

Sendo assim, na próxima seção, realizamos uma síntese do que fora discutido nesse capítulo a fim de evidenciar que aspectos serão preponderantes na execução do objetivo ao qual nos comprometemos no início do trabalho, bem como visando esclarecer de que forma os argumentos apresentados neste capítulo serão evocados durante a continuidade do presente estudo.

1.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Conforme explicitado no início deste capítulo, sua elaboração emergiu da necessidade em localizar o presente estudo – e as pesquisas de igual natureza de um modo geral – no campo da Educação Matemática, a partir dos processos de instituição e constituição histórica e epistemológica do campo. Ademais, também nos propomos em discutir as contribuições que as ações didáticas balizadas pela História da Matemática fornece aos processos de ensino e de aprendizagem, bem como de que forma esses aspectos históricos podem ser inseridos em sala de aula.

Em relação aos primeiros passos percorridos pelo que seria futuramente o campo da Educação Matemática, percebemos que estes foram germinados pelos movimentos modernistas do ensino de Matemática do século XIX. Por trás dessas ideias modernizadoras estavam grandes nomes como David Smith e Felix Klein, que utilizaram do campo da Educação Matemática como veículo de propagação de suas concepções em Matemática, dentre as quais, a História da Matemática como um recurso aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática.

No que diz respeito à constituição epistemológica do campo da Educação

Matemática, a História da Matemática exerceu também um papel fundamental, haja vista que agrega ao campo aspectos sociais e culturais que envolvem os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, tornando o campo ainda mais complexo e singular. Além disso, resgata as práticas socioculturais de tempos e espaços que não aqueles nos quais a sala de aula está inserida, mas que não fim são refletidos sobre os processos de ensino e de aprendizagem que nela ocorrem.

Nesse sentido, localizamos o presente estudo no subcampo História da Matemática, mais especificamente no eixo HEpM, à medida que realizamos uma investigação sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, visando propor recomendações aos professores de Álgebra Linear sobre como essas histórias podem ser vetorizadas em sala de aula na forma de exercícios problematizadores para a compreensão do caráter unificador e generalizante desses conceitos.

Por fim, discorremos sobre as contribuições da inserção da História da Matemática em sala de aula aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, mais especificamente para uma melhor compreensão conceitual e procedimental dos alunos. Além de que, evidenciamos a maneira concebida por nós sobre como esses aspectos históricos podem ser utilizados em sala de aula, a saber, na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual a fim de que os alunos, de maneira crítica e autônoma, possam visualizar significado e significância no conteúdo estudado.

Explicitar o modo como concebemos ser pertinente inserir os aspectos históricos nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática se faz essencial, tendo em vista que após investigar o caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, temos por objetivo propor algumas sugestões sobre como essas histórias poderão ser vetorizadas em sala de aula na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual.

Desse modo, no próximo capítulo, discorremos acerca do desenvolvimento histórico-epistemológico da Álgebra Linear, desde a emersão dos primeiros conceitos da Álgebra Linear, no contexto dos sistemas de equações lineares, no século XVIII até seu processo de axiomatização em meados da década de 1930. O objetivo do capítulo consiste em explicitar o carácter unificador e generalizante da Álgebra Linear como tendo emergido de seu desenvolvimento histórico-epistemológico, assim como em destacar a necessidade da adoção do formalismo como linguagem universal que possibilitasse a unificação e generalização das diferentes noções matemáticas que constituíram a referida disciplina.

Capítulo 2

Constituição histórica de conceitos da Álgebra Linear

Neste capítulo, temos por objetivo apresentar o desenvolvimento histórico de conceitos que compõem a Álgebra Linear, sejam eles, Dependência e Independência Linear, Geradores, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial e Transformações Lineares. Nosso propósito é o de evidenciar o modo como o caráter unificador e generalizante da disciplina desponta de sua própria constituição como zona de inquérito. Para além disso, também vislumbramos localizar o leitor no contexto histórico, epistemológico e matemático nos quais os conceitos de Dependência e Independência Linear inserem-se, a fim de que as análises – realizadas no próximo capítulo – sejam compreendidas de maneira completa e fluida.

Para a elaboração do capítulo em foco, nos imbuímos principalmente dos escritos de Jen Luc-Dorier, a saber, *A General Outline of Genesis Of Vector Space Theory*[6] (DORIER, 1995b) e *Epistemological Analysis of The Genesis of The Theory of Vector Spaces*[7] (DORIER, 2000). Também tomamos suporte no trabalho de Gregory H. Moore, seja ele, *The Axiomatization of Linear Algebra: 1875 – 1940*[8] (MOORE, 1995), bem como no texto de Michael J. Crowe *A Histoty of Vector Space*[9] (CROWE, 1994). Todos os textos foram traduzidos integralmente por nós e quaisquer erros que possam ser percebidos são de nossa inteira responsabilidade.

É necessário ressaltar que não se constitui como um de nossos propósitos, neste capítulo, a apresentação holística do desenvolvimento histórico da Álgebra Linear, isto é, uma apresentação que leve em consideração todos os acontecimentos ocorridos na maior linha temporal possível. Pois, além da impossibilidade de um capítulo de dissertação comportar tão grande ofício, reiteramos que a concepção

[6] Um esboço geral da gênese da teoria dos espaços vetoriais
[7] Análise epistemológica da gênese da teoria dos espaços vetoriais
[8] A axiomatização da álgebra linear: 1875 – 1940
[9] Uma história do espaço vetorial

histórica adotada por nós é aquela defendida por Miguel e Miorim (2004), a saber, uma história construída com fins explicitamente pedagógicos, que em nosso trabalho se caracteriza em destacar o caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear possibilitada pela sua linguagem axiomática formal e que emerge de seu próprio desenvolvimento histórico.

2.1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E CONCEITOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Ao nos comprometermos em apresentar o desenvolvimento histórico de conceitos que compõem a Álgebra Linear, se fez necessário refletir sobre qual seria o marco inicial da constituição desses conceitos, uma vez que apesar da disciplina ser relativamente nova no meio acadêmico, os conteúdos que a constitui são manuseados desde o tempo de civilizações antigas tais como, por exemplo, os babilônios, egípcios e chineses, os quais desenvolveram e aprimoraram métodos para a resolução de sistemas de equações lineares.

Para Dorier (1995b), os sistemas de equações lineares constituem o contexto matemático no qual os primeiros conceitos da Álgebra Linear foram desenvolvidos, contudo, as civilizações antigas que os manuseavam preocupavam-se apenas em construir e/ou aprimorar métodos de resolução desses sistemas, fato este que perdurou por um longo tempo na história. Entretanto, a partir do século XVIII os matemáticos lançaram olhares mais intuitivos e teóricos sobre sistemas de equações lineares, conforme nos coloca Dorier (1995b):

> Este trabalho poderia ter tomado como ponto de partida civilizações antigas, todas as quais desenvolveram técnicas ad hoc para resolver equações lineares. No entanto, até meados do século XVIII, pode-se dizer que, além do aprimoramento das técnicas de resolução de sistemas de equações lineares e do desenvolvimento da álgebra simbólica após François Viète e René Descartes, nada de substancial ocorreu no que diz respeito à álgebra linear (DORIER, 1995b, p. 228, traduzido pelo autor).

Desse modo, adotamos o tratamento dos sistemas de equações lineares a partir do século XVIII como ponto de partida para a apresentação do desenvolvimento histórico dos conceitos constituintes da Álgebra Linear.

Os primeiros passos no decurso de uma análise mais sistemática acerca das equações lineares foram dados em 1750 pelos matemáticos Gabriel Cramer (1704 –

1752) em sua *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*[10], na qual foi apresentada uma estrutura que preconiza os determinantes, e por Leonhard Euler (1705 – 1783) em seu *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*[11], no qual foi discutido o paradoxo de Cramer em relação às curvas algébricas (DORIER, 1995b).

No início do século XVIII, duas proposições eram consideradas verdadeiras, embora parcialmente comprovadas, a saber:

> 1) Duas curvas algébricas distintas de ordem m e n têm m.n pontos em comum. Era sabido que alguns poderiam ser múltiplos, complexos ou infinitos, mas os matemáticos também conheciam exemplos em que esses pontos eram todos simples e reais.
> 2) $\frac{n\,.(n+3)}{2}$ pontos são necessários e suficientes para determinar uma curva de ordem n (DORIER, 1995b, p. 228, traduzido pelo autor).

O paradoxo consiste na segunda proposição, na qual para n maior que dois ocorre que $\frac{n\,.\;(n+3)}{2} \leq n^2$, ou seja, duas curvas algébricas podem obter mais pontos do que o necessário para determinar cada uma. Esse paradoxo havia sido identificado inicialmente por Colin MacLaurin em 1720, porém Cramer reformulou-o em seu tratado no ano de 1750. No mesmo ano Euler lançou luz sobre esse problema ao afirmar que nem sempre *n* equações podem ser suficientes para determinar *n* incógnitas e materializou suas conjecturas através de uma análise intuitiva sobre os sistemas de equações lineares bastante incomum para época (DORIER, 1995b).

Euler deu exemplos para mostrar que uma equação poderia estar incluída (*comprise* em francês) em outras e explicitou de que forma tal situação estaria diretamente relacionada com a resolução dos sistemas constituído por estas, ou seja, embora sua abordagem fosse mais qualitativa, a resolução dos sistemas ainda era o seu principal objetivo, assim como os de seus contemporâneos (DORIER, 1995b).

Euler tomou inicialmente as seguintes equações

$$3x - 2y = 5 \; e \; 4y = 6x - 10$$

e, por meio do processo de eliminação e substituição, concluiu que era impossível determinar as duas incógnitas, pois ao tentar eliminar x, y desaparecia e uma equação idêntica surgia. Euler explicou que o motivo do aparecimento desse 'incidente' seria o

---

[10] Introdução à análise de curvas algébricas
[11] Sobre uma aparente contradição na doutrina das linhas curvas

fato de que a primeira equação nada mais era do que o dobro da segunda e assim não se diferenciariam em nada (DORIER, 1995b).

Como o fato de uma equação ser o dobro da outra não era suficiente para evidenciar tal 'incidente', Euler teve que resolver o sistema por eliminação e substituição para convencer outros matemáticos. Ele também apresentou exemplos para três e quatro equações, nos quais havia incógnitas que ficariam indeterminadas devido às relações lineares entre essas equações (DORIER, 1995b). Após a resolução e discussão dos mais diversos exemplos, Euler conclui que:

> Quando se diz que para determinar *n* quantidades desconhecidas, é suficiente ter *n* equações dando suas relações mútuas, deve-se adicionar a restrição de que são todas diferentes ou de que nenhuma é confinada [*enfermée*] nas outras (DORIER, 1995b, p. 230, traduzido pelo autor).

Para Dorier (1995b; 2000), um leitor moderno ao se deparar com a palavra confinada [*enfermée*] seria conduzido rapidamente ao conceito de Dependência Linear, entretanto, embora Euler pudesse ter ciência das relações lineares entre essas equações, sua análise repousava em um 'incidente' que ocorria durante o processo de eliminação e substituição e que resultava na indeterminação de incógnitas. Desse modo, Dorier (1995b; 2000) defende que na verdade o que Euler introduziu foi a noção de Dependência Inclusiva e não de Dependência Linear.

Dorier (1995b) coloca que as noções de dependência inclusiva e Dependência Linear coincidem quando aplicadas no contexto das equações lineares, contudo a primeira tem um caráter local e a segunda um caráter mais geral. Esses aspectos serão mais bem discutidos no próximo capítulo, juntamente com outras noções construídas por matemáticos ao longo do desenvolvimento histórico da Álgebra Linear e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear.

Dando continuidade aos demais conceitos da Álgebra Linear que emergiram do contexto dos sistemas de equações lineares, segundo Dorier (1995b), quando Euler tratou do caso em que o sistema possuía quatro equações e quatro incógnitas ele apresentou uma noção embrionária do que seria conhecido futuramente como Posto, bem como desenvolveu considerações semelhantes em relação ao paradoxo de Cramer:

> Quando duas linhas de quarta ordem se encontram em 16 pontos, pois 14 pontos, quando conduzem a equações diferentes, são suficientes

> para determinar uma linha desta ordem, esses 16 pontos serão sempre tais que três ou mais equações já estão compreendidas nas demais. Desta forma, esses 16 pontos não determinam mais do que se houvesse 13 ou 12 ou até menos pontos e para determinar a curva inteiramente, deve-se adicionar a esses 16 pontos um ou dois outros (EULER apud DORIER, 1995b, p. 230, traduzido pelo autor).

Dorier (2000) pontua que, embora a análise intuitiva de Euler tenha sido profícua para o surgimento de noções matemáticas que preconizam os conceitos de Dependência e Posto, ela não teve uma grande repercussão devido a rápida aceitação e utilização dos determinantes de Cramer para a resolução de sistemas de equações, os quais exigiam mais técnica do que intuição. De fato, Wussing (1998) assegura que apesar de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) ter sinalizado a manipulação de expressões semelhantes aos determinantes em uma carta enviada à L'Hospital (1661 – 1704) no ano de 1693, foi a partir de Cramer que os determinantes se converteram em um patrimônio geral dos matemáticos utilizado em álgebra, geometria a análise.

Segundo Dorier (1995b; 2000), por quase um século as questões relacionadas aos sistemas indeterminados e impossíveis de equações lineares foram negligenciadas por matemáticos, e como consequência os conceitos de Dependência e Posto, que emergem dessas questões, passaram por um longo processo de obscuridade. Por volta de 1840 a 1879 o conceito de Posto se constituiu dentro da teoria dos determinantes, contudo, para que esse conceito pudesse ser construído, os matemáticos tiveram que superar vários obstáculos e mudar seu ponto de vista sobre certas noções elementares.

> No contexto das equações lineares, o Posto é um invariante que determina o tamanho do conjunto de soluções (número mínimo de gerador/número máximo de soluções independentes) e, por um processo de dualidade, o número de relações de dependência (número mínimo de equações que descrevem o conjunto de soluções/número máximo de equações independentes (DORIER, 2000, p. 9, traduzido pelo autor).

Podemos destacar, segundo Dorier (1995b; 2000) três fontes principais de obstáculos e dificuldades que os matemáticos encontraram, sejam elas, o reconhecimento da invariância que teve de ser assumida sem prova; a adoção de uma mesma definição para dependência entre equações e n-uplas e a antecipação do conceito de dualidade, bem como a consideração de todos os sistemas de equações que têm o mesmo conjunto de soluções

Se faz necessário ressaltar que esses três pontos não foram independentes e o progresso de cada um subsidiou o progresso dos outros dois. Essa nova abordagem permitiu a o surgimento de novos caminhos para uma investigação mais sistemática dos sistemas de equações. Foi Henry J. S. Smith (1826 – 1883) em 1861 quem ofertou uma sutil, porém significativa, mudança na abordagem dos sistemas de equações ao mostrar que a ordem máxima de um menor diferente de zero também está relacionada ao número máximo de soluções independentes (DORIER, 1995b; 2000).

Segundo Dorier (1995b), embora esse resultado não ajudasse diretamente a descrever melhor o conjunto de soluções, pois constitui-se em um resultado mais teórico do que prático, ele evidencia que Smith não se interessou apenas em dar formas de resolver os sistemas de equações, mas acima de tudo também os estudou com base teórica. Em sua constituição, o conceito de Posto foi, de maneira implícita, central na descrição dos sistemas de equações lineares, porém o caráter técnico das demonstrações envolvendo os determinantes pode ter dificultado uma visão mais geral, concisa e clara de todas as relações de invariância e dualidade.

George Ferdinand Frobenius (1849 – 1917) foi quem alcançou essa visão geral, concisa e clara através de seu pioneirismo em introduzir uma mudança radical na abordagem dos problemas lineares. Em seu *Über das Pfaffsche Problem*[12] publicado em 1875, Frobenius definiu, em termos modernos, as noções de Dependência e Independência Linear que abraçavam tanto as equações quanto as n-uplas. Essa definição é discutida com mais detalhes no próximo capítulo, visto que faz parte do objetivo central do estudo em foco (DORIER, 1995b; 2000).

Frobenius, ao considerar equações e n-uplas como objetos de mesma natureza em relação a linearidade, possibilitou uma grande contribuição em direção ao conceito moderno de vetor. Além disso, Frobenius também definiu a noção de base de soluções e introduziu a noção de sistema associado a outro como sendo um “sistema de equações lineares cujos coeficientes são os componentes dos elementos de qualquer base de soluções do sistema inicial” (DORIER, 2000, p. 230, traduzido pelo autor). Em termos atuais, com relação aos espaços de soluções, um sistema associado representa uma base (de formas lineares) do espaço ortogonal, ou seja, relaciona-se com o conceito de dualidade.

---

[12] Sobre o problema Pfaff

Segundo Dorier (1995b; 2000), a abordagem de Frobenius foi totalmente diferente das de seus predecessores, principalmente do processo de solução via Cramer, não havia mais separação arbitrária entre incógnitas e equações principais e secundárias, bem como, sua definição de dependência substituiu a de dependência inclusiva. Também foi no texto de Frobenius que o conceito de Posto foi finalmente definido em sua generalidade e características. Em 1879, Frobenius definiu o conceito de Posto como a ordem máxima do menor não zero:

> Se em um determinante todos os sub-determinantes do (m+1)ésimo grau desaparecem, mas o m-ésimo grau não são todos zero, então eu chamo m de Posto do Determinante (FROBENIUS, 1879, p. 1 apud DORIER, 2000, p. 11, traduzido pelo autor).

Segundo Dorier (2000), os matemáticos da época compreenderam rapidamente a importância do conceito de Posto, uma vez que não apenas evitou o uso de circunlocuções longas, mas também possibilitou soluções mais fáceis e claras para muitos problemas no contexto dos determinantes. Frobenius também mostrou a eficiência de seu novo conceito em seus escritos sobre formas quadráticas e equações diferenciais.

Desse modo, é possível perceber que os sistemas de equações lineares e a teoria dos determinantes constituíram o contexto no qual conceitos chave da linearidade – Dependência, Posto e Dualidade – se fundam e relacionam-se com a teoria do Espaço Vetorial aplicado à dimensão finita. Além disso, nota-se que Frobenius lançou as bases para uma primeira abordagem teórica da linearidade, apesar de que o contexto dos determinantes agora parecesse um pouco técnico demais para tornar as ideias intuitivas eficazes.

Conforme vimos discutindo na seção, os determinantes constituíram-se em ferramentas essenciais e universais a serem usadas em todos os problemas no contexto da linearidade. Para além disto, os determinantes também se configuraram como a espinha dorsal da construção histórica das matrizes, embora geralmente o estudo das matrizes anteceda o dos determinantes, os quais por sua vez são definidos a partir de uma matriz quadrada. Dissertemos, pois, sobre o desenvolvimento histórico das matrizes, uma vez que estas também são objetos de estudo no campo dos Espaços Vetoriais de dimensão finita.

Além das equações lineares, os determinantes foram estudados por diversos matemáticos em outros contextos. Conforme podemos observar no estudo de Santos

(2011), os determinantes aparecem em diversos momentos da História da Matemática, como nas civilizações chinesas antigas, em trabalhos de Leibniz, numa regra de Cramer, nos escritos de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), etc. Contudo, foi com Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851) que, a partir do século XIX, o estudo dos determinantes se tornou contínuo.

Segundo Baroni (2009), a definição de determinante dada por Cauchy em 1812 é totalmente diferente da ordem de apresentação que é feita atualmente:

> Cauchy começa com *n* elementos ou números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e forma o produto desses por toda as diferenças de elementos distintos - $a_1 a_2 a_3 \ldots\ a_n\ (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$.
> Definiu, então, o determinante como a expressão obtida transformando toda potência indicada em [índice, de modo que a_s^r fica $a_{r.s}$. Dispunha, então, as n^2 quantidades diferentes nesse determinante num arranjo quadrado semelhante ao usado hoje para matrizes
>
> $$\begin{matrix} a_{1.1}, a_{1.2}, a_{1.3.}, \ldots, a_{1.n}; \\ a_{2.1}, a_{2.2}, a_{2.3.}, \ldots, a_{2.n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n.1}, a_{n.2}, a_{n.3.}, \ldots, a_{n.n}; \end{matrix}$$
>
> (BARONI, 2009, p. 23).

Ainda segundo Baroni (2009), a forma como Cauchy organizou-as fez com que as n^2 quantidades nesse determinante formassem 'um sistema simétrico de ordem n'. Assim, ele lançou em seus escritos as bases do conceito de determinante, e passou a aplicá-los em uma diversidade de situações. Em 1815, Cauchy publicou um trabalho sobre a propagação das ondas e para isso usou sua noção de determinante, usando pela primeira vez o termo 'determinante'. Jacobi também contribuiu para o desenvolvimento do estudo dos determinantes rumo à criação das Matrizes.

Jacobi tem sua relação com os determinantes devido a sua fama como construtor de algoritmos e seu demasiado interesse nessa nova teoria. Em 1929 ele usou pela primeira vez os determinantes conhecidos como Jacobinos. Os determinantes jacobianos nada mais eram do que determinantes funcionais, porém, as notações usadas por Jacobi eram muito mais próximas das notações modernas do que as de Cauchy, além disso, Jacobi dedicou tanta ênfase aos determinantes funcionais que pensava nos determinantes ordinários numéricos como jacobianos de *n* funções lineares em *n* incógnitas (BARONI, 2009).

É importante ressaltar que Jacobi estava interessado também na construção de um método geral para a resolução de sistemas de equações lineares de n equações e m incógnitas, mas não obteve êxito devido ao não conhecimento do conceito de Posto de uma matriz. O primeiro a abordar esse aspecto foi o matemático irlandês James Joseph Sylvester (1814 – 1897), o qual introduziu as matrizes utilizando a noção de Posto, embora não tendo utilizado essa nomenclatura (WUSSING, 1998).

Apesar de Cauchy e Jacobi, dentre outros matemáticos, terem ofertado significativos avanços no estudo dos determinantes em favor da construção de uma álgebra matricial, bem como, tenhamos conhecimento de que na obra de Herman Grassmann, datada de 1844, foi usado algo bem semelhante às matrizes, à Arthur Cayley (1821 – 1895) é dado o crédito do pioneirismo da teoria das matrizes em sua obra *A memoir on the Theory of Matrices*[13], publicada em 1858 na forma de artigo na *Philosophical Transactions*[14] da *Royal Society of London* (SANTOS, 2011.)

A obra de Cayley trata especificamente sobre a teoria das transformações, na qual ele definiu o conceito de matriz como sendo "Um conjunto de quantidades em forma de quadrado" (CAYLEY, 1889, p. 475 apud SANTOS, 2011, p. 37), ou seja, quando número de linhas é igual ao de colunas. Também foram tratadas as matrizes em que o número de linhas é diferente do de coluna, as quais ele conceituou como matrizes retangulares. Cayley explicou que essa noção de matriz proposta por ele nasceu a partir de um 'conjunto de equações lineares', isto é, sistemas lineares.

Além disso, segundo Baroni (2009), Cayley também demonstrou em seu trabalho a não comutatividade do produto de matrizes, assim como definiu adição e multiplicação por escalar; também apresentou a definição de matriz identidade, a qual deixa toda a matriz quadrada de ordem dois, invariante por multiplicação. Ainda, a definição de matriz nula, que por sua vez goza da invariância pela adição. Não nos deteremos em explicitar todas as definições e demonstrações dadas por Cayley, tendo em vista o propósito desta seção, contudo, sugerimos os trabalhos de Baroni (2009) e Santos (2011) àqueles que desejarem conhecer mais a fundo tais aspectos.

No final no século XIX os estadunidenses Benjamin Peirce (1809 – 1880) e Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), juntamente com Frobenius, Charles Hermite

---

[13] Um livro de memórias sobre a teoria das matrizes
[14] Transações filosóficas

(1822 – 1901) e outros matemáticos, consolidaram o cálculo de matrizes no que se refere às suas aplicações dentro da própria Matemática. No final do século XX, graças à Max Born (1882 – 1970) e Werner Heisenberg (1901 – 1976), o cálculo de matrizes se converteu em uma ferramenta matemática fundamental no campo da física, principalmente no estudo da Mecânica Quântica (WUSSING, 1998).

Além de ter sido subsidiado pela teoria dos determinantes, o desenvolvimento de grande parte das ferramentas, desde a álgebra matricial até o estudo das mudanças de coordenadas, foi possibilitado por meio da aplicação de métodos analíticos na geometria. Segundo Santos (2011), Euler explicitou o caráter linear das fórmulas para transformação de coordenadas no plano e no espaço, e com Lagrange, Cramer e Etienne Bézout (1730 – 1783), a geometria analítica foi atrelada aos tradicionais problemas de linearidade. Dessa forma, a geometria, assim como a álgebra, constitui-se em um campo no qual a Álgebra Linear também se funda. Discorremos com mais detalhes sobre esses aspectos na próxima seção.

2.2. O CÁLCULO GEOMÉTRICO E A EMERGÊNCIA DE NOVAS ÁLGEBRAS

A utilização de artifícios algébricos na resolução de problemas de geometria destacou-se no início do século XVII a partir dos trabalhos independentes de dois matemáticos, a saber, Pierre de Fermat (1607 – 1665) em seu *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*[15] e René Descartes (1596 – 1650) em sua *Géométrie*[16]. Segundo Dorier (2000), dado o seu grande poder de simplificação e unificação na resolução de problemas de cunho geométrico, o método analítico foi adotado por muitos matemáticos e, como consequência, a linearidade tornou-se um ponto de partida ou uma questão central em diversos problemas desse período.

Segundo Dorier (2000), apesar de sua notoriedade entre os matemáticos, o método analítico foi alvo de intensas críticas por estudiosos, principalmente no que diz respeito à arbitrariedade na escolha das coordenadas durante as demonstrações. Leibniz criticava os métodos apresentados por Descartes, bem como salientava a necessidade da criação de uma análise geométrica mais intrínseca aos problemas lineares. Tais aspectos podem ser observados em uma carta enviada a Christian Huyghens (1629 – 1695) datada de 8 de setembro de 1679:

---

[15] Introdução para planos e sólidos locais
[16] Geometria

> Ainda não estou satisfeito com a Álgebra, na medida em que não dá os versos mais curtos, nem as mais belas construções da Geometria. É por isso que, quando se trata disso, acredito que precisamos de outra análise propriamente geométrica ou linear, que expresse situação diretamente para nós, como Álgebra expressa magnitude. E acredito que tenho os meios e que poderíamos representar figuras e até máquinas e movimentos em personagens, como Álgebra representa números ou tamanhos (LEIBNIZ, 1850, p. 382 apud DORIER, 2000, p. 14, traduzido pelo autor).

Segundo Dorier (1995b), Leibniz tentou criar uma análise geométrica que chamou de ‘Geometria de situação’, a qual era baseada em uma relação de congruência entre n-uplas de pontos. Entretanto, dado o fato de a relação de congruência não levar em conta as diferentes direções no espaço e nem a orientação, ela não pôde ser expandida. A carta enviada à Huyghens em 1679 foi publicada somente em 1833, período no qual os matemáticos concentravam-se na busca por um cálculo geométrico tal qual o que Leibniz pretendia construir. Porém, nenhum resultado pertinente havia sido alcançado até então.

Nesse contexto, um passo decisivo rumo à construção de um cálculo geométrico foi dado a partir de um problema antigo que os matemáticos vinham trabalhando desde início do século XVII, seja ele, a representação geométrica das quantidades imaginárias. Embora a tentativa dos matemáticos em representar geometricamente os números complexos tenha se justificado na necessidade de sua legitimação e assim de sua manipulação, o sistema que os contém – apesar de bidimensional – pode ser classificado como um sistema vetorial e, assim, contribuiu para o desenvolvimento das primeiras ideias vetoriais (DORIER, 2000).

Segundo Baroni (2009), desde a época dos gregos Heron de Alexandria (10 d. C – 70 d.C.) e Diofanto (201/214 – 285/299), o significado de uma raiz quadrada de um número negativo preocupava as mentes matemáticas e, embora Girolamo Cardano (1501 – 1576) os tenha manipulado – em caráter embrionário – em sua *Ars Magna*[17] no ano de 1545, os números complexos nunca foram completamente aceitos entre os matemáticos como entidades legítimas até meados do século XIX.

Jonh Wallis (1616 – 1703) foi um dos primeiros matemáticos a dar uma visão geométrica das raízes quadradas dos números negativos, mas o modelo proposto por ele não obteve êxito quanto à representação da multiplicação desses números. Posteriormente cinco matemáticos, de maneira independente umas das outras,

[17] A grande arte

possibilitaram a representação dos números complexos, a saber, Caspar Wessel (1745 – 1818) em 1799; Adrien Quentin Buée (1745 – 1825) em 1805; Jean Robert Argand (1768 – 1822) em 1806; C. V. Mourey (1791 – 1830) em 1828 e John Warren (1796 – 1852) em 1828 (BARONI, 2009).

Em seu trabalho de 1799, Werrel definiu adição de linhas retas, bem como também estabeleceu a soma de três ou mais retas não coplanares e evidenciou a comutatividade dessa operação. Após Wessel, Argand e Buée, simultaneamente e separadamente, publicaram em 1806 tratamentos geométricos semelhantes para os números complexos, o que também ocorreu com Morey e Warren em 1828. Há uma possibilidade de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) ter descoberto a representação dos complexos ao mesmo tempo que Wessel (BARONI, 2009).

Embora os supracitados matemáticos tenham possibilitado, de maneira independente, a representação geométrica dos números complexos, foi com Gauss e Cauchy, por volta de 1831 e 1849, respectivamente, que as representações dos complexos se tornaram amplamente conhecidas e aceitas entre os matemáticos. Porém, ainda que o estudo das quantidades imaginárias tenha tido grandes avanços, os matemáticos não conseguiam expandir suas ideias para o espaço tridimensional e, assim, criar operações em triplas de números reais (DORIER, 2000).

Ainda no decurso da busca por uma análise geométrica intrínseca – como a que Leibniz preconizou –, bem como da resolução dos problemas de expansão para dimensão três encontrados pelos matemáticos durante a legitimação dos números complexos, August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) e Giusto Bellavitis (1803 – 1880) desenvolveram dois diferentes sistemas de análise geométrica válidos para dimensão dois e três e que se tornaram base para a Geometria Vetorial (DORIER, 2000).

No ano de 1827, Möbius publicou o seu *Barycentrish Calcul*[18], cujas ideias foram concebidas desde 1818 e no qual figura seu pioneirismo ao desenvolver a noção matemática de segmento orientado. Möbius definiu um segmento de reta de um ponto A para um ponto B pela notação AB e afirmou ainda que AB = -AB, a partir disso definiu a adição de segmentos colineares (a soma de segmentos não colineares foi executada em 1843 em seu *Elemente der Mechanik des Himmels*[19]) (DORIER,

[18] Cálculo baricêntrico
[19] Elementos da mecânica celeste

2000). O teorema central do cálculo baricêntrico foi definido por Möbius da seguinte forma:

> Dado qualquer número (v) de pontos, A, B, C ... N com coeficientes a, b, c ... n onde a soma dos coeficientes não é igual a zero, sempre pode ser encontrado um (e apenas um) ponto S – o centróide – cujo ponto tem a propriedade de se desenhar linhas paralelas (apontando em qualquer direção) através dos pontos dados e do ponto S, e se essas linhas cruzarem algum plano nos pontos A', B', C', ..., N', S', então sempre tem:
>
> $$a\,.\,AA' + b\,.\,BB' + c\,.\,CC' + \cdots + n\,.\,NN' = (a + b + c + \cdots +)\,.\,SS'$$
>
> E consequentemente se o plano passa pelo próprio S, então
>
> $$a\,.\,AA' + b\,.\,BB' + c\,.\,CC' + \cdots + n\,.\,NN' = (a + b + c + \cdots +)\,.\,SS' = 0$$
>
> (DORIER,1995b, p. 235, traduzido pelo autor)

Em 1887, Möbius publicou seu *Über geometrische Addition und Multiplication*[20], o qual fora escrito no ano de 1862 e no qual ele definiu adição de segmentos não colineares, multiplicação por qualquer número e ainda dois tipos de produtos de segmentos inspirados nos trabalhos de Herman Grassmann (1809 – 1877), este último será estudado mais à frente. Assim, devido às suas contribuições por meio de seus métodos, Möbius obteve o reconhecimento de muitos matemáticos, tais como Gauss, Cauchy, Jacobi e Johann Direchlet (1805 – 1859) (DORIER, 2000).

Segundo Dorier (1995b), apesar da teoria de Möbius figurar uma álgebra de pontos, seu propósito era o de exibir um método para resolver problemas geométricos e físicos – o que de fato realizou por meio de diversas aplicações convincentes – e não de apresentar uma estrutura algébrica detalhadamente. Desse modo, embora Möbius tenha apontado alguns aspectos fundamentais da geometria vetorial, bem como de seu trabalho estar embasado numa percepção intuitiva de espaço, isso não foi o suficiente para oferecer a possibilidade de extensão para o conceito mais geral de Espaço Vetorial.

Ainda segundo Dorier (2000), Bellavitis é considerado o primeiro a ter definido algo muito próximo ao conceito de vetor geométrico como uma classe de pares equipolente de pontos, denominado por ele de equipolência, em seu *Calculo delle*

---

[20] Sobre adição e multiplicação geométrica

Equipollenze[21] publicado no ano de 1835. À Bellavites também é creditado o mérito da primeira definição para a adição de vetores no espaço:

> (2º) Duas linhas retas são chamadas equipolentes se forem iguais, paralelas e dirigidas no mesmo sentido.
> (3º) Se duas ou mais linhas retas estão relacionadas de tal forma que a segunda extremidade de cada linha coincide com a primeira extremidade da seguinte, então a linha que juntamente com essas linhas forma um polígono (regular ou irregular), e que é desenhada a partir da primeira extremidade da última linha é chamada de soma equipolente (DORIER, 1995b, p. 236, traduzido pelo autor).

Bellavitis também definiu a multiplicação de segmentos de linha dirigidos por um número real e o conceito de multiplicação de equipolências. Segundo Baroni (2009), a soma foi representada pelo sinal '+' interposto entre duas linhas combinadas, e o sinal de '≡' indicava a equipolência. Ainda para a autora, ele afirmava que 'tais equipolências continuam verdadeiras quando substituídas pelas suas linhas ou por linhas respectivamente equipolentes a elas' (p. 35). Embora o cálculo de Bellavitis não oferecesse mais possibilidades que os números complexos e que tivesse sido baseado na obra de Buée, ele se recusava a aceitar os imaginários como entidades legítimas da Matemática.

Ainda que o método de Bellavitis fosse uma transcrição das ideias de Buée, a sua substituição de grandezas imaginárias por entidades geométricas reais estabeleceu uma perspectiva bem diferente no que se refere ao desenvolvimento de um cálculo geométrico. Além disso, a preocupação desse matemático era a estrutura algébrica das equipolências, apresentadas por ele como um novo tipo de álgebra com a maioria das propriedades da álgebra usual, e ainda, com exceção da multiplicação, elas eram tridimensionais. Bellavitis mostrou a eficiência de seu método por meio de aplicações na geometria e na física (DORIER, 2000).

Conforme colocado anteriormente, a representação geométrica dos números complexos constituiu-se em um contexto no qual o desenvolvimento de uma análise geométrica intrínseca pôde ser executado, contudo os matemáticos que legitimaram tais números a partir de suas representações não conseguiram as transpor para o espaço tridimensional. Os trabalhos de Möbius e Bellativitis se destacaram nesse período por ter possibilitado essa transposição, porém a representação do produto entre complexos continuava a ser um problema.

---

[21] Cálculo das equipolências

É nesse contexto que Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) surgiu como sendo o matemático que encontrou a solução desse problema que tanto assolou os matemáticos. É necessário salientar, antes de tudo, que até o século XIX o único modelo para álgebra tinha sido dado pela aritmética dos números reais e, portanto, caso um novo tipo de álgebra surgisse, ela deveria aderir às (implícitas) propriedades comutativas de adição e multiplicação, o que em termos atuais chamaríamos de uma estrutura de campo comutativo (DORIER, 2000).

Durante suas tentativas em resolver o problema, Hamilton mudou várias vezes sua perspectiva geométrica para a algébrica, porém não obtinha resultado. Foi então que ele decidiu concentrar sua análise não nas propriedades algébricas, mas sim na natureza geométrica da multiplicação no plano, representada por vetores. Hamilton notou que esse tipo de multiplicação se baseava no produto dos comprimentos de cada vetor e no ângulo formado entre eles, porém, quando esse produto era transposto ao espaço tridimensional, não só o ângulo, mas também o plano deveria ser levado em consideração, isto é, a direção da rotação (DORIER, 2000).

Nesse sentido, Hamilton percebeu que era mais conveniente o uso de quádruplas ou invés de ternas para que o cálculo geométrico tridimensional fosse possível, além disso, ele percebeu que o produto entre as quádruplas não poderia gozar da comutatividade, uma vez que as rotações não comutam. Assim, tendo em vista seus resultados, em 1844 Hamilton publicou os primeiros elementos do que chamou de ‘Teoria dos Quatérnios’, os quais foram definidos como sendo “números algébricos que permitem uma representação geométrica no espaço em que a multiplicação representa, ao mesmo tempo, um produto escalar e um produto vetorial” (DORIER, 1995b, p. 237, traduzido pelo autor).

Segundo Baroni (2009), Hamilton passou os últimos 22 anos de sua vida trabalhando quase que exclusivamente com os quatérnios pois afirmava que seu método seria fundamental para a teoria do calor, eletricidade e trigonometria esférica. Além disso, ele também explicitou as relações dos quatérnios com coordenadas, determinantes, trigonometria, logaritmos, séries, equações lineares e quadráticas, diferenciais e frações contínuas. É também nas publicações de Hamilton que vemos pela primeira vez os termos *vetor* e *escalar*:

> A parte algébrica *real* pode receber [...] todos os valores contidos em uma escala (graduação) de progressão de números desde o infinito negativo até o infinito positivo; nós o chamaremos portanto de parte

> escalar, ou simplesmente o escalar do quatérnio, e seu símbolo será formado prefixando, ao símbolo do quatérnio, a característica Scal., ou simplesmente S., onde nenhuma confusão parece que acontecerá usando essa última abreviação. Por outro lado, a parte algébrica imaginária, sendo geometricamente construída por uma linha reta ou raio vetor, que tem, em geral, para cada quatérnio determinado, um comprimento determinado e direção determinada no espaço, pode ser chamada parte vetorial, ou simplesmente vetor do quatérnio; e pode ser denotada prefixando a característica Vect., ou V. Nós podemos portanto dizer que um quatérnio é em geral a soma de suas próprias partes escalar e vetorial, e podemos escrever Q = Scal.Q + Vect.Q = S.Q + V.Q ou simplesmente Q = SQ + VQ (HAMILTON apud CROWE, 1994, p. 31, traduzido pelo autor).

Os quatérnios de Hamilton tiveram uma grande repercussão no meio matemático uma vez que eles quebravam a intocável lei da comutatividade para a multiplicação, fato este que se tornou o marco inicial do estudo de novas álgebras. Além disso, o desenvolvimento dos quatérnios possibilitou a constituição de uma área de pesquisa chamada sistemas de números hipercomplexos e que mais tarde ficou conhecida como álgebra associativa. Contudo, a teoria de Hamilton contribuiu mais para o desenvolvimento de uma análise vetorial do que propriamente para o surgimento da teoria dos Espaços Vetoriais (DORIER, 2000).

Segundo Dorier (1995b), embora o uso de coordenadas tivesse tornado possível a generalização da geometria para mais de três dimensões, e ainda, que essa visão fosse corroborada principalmente pela criação dos quatérnios de Hamilton em sua expansão do cálculo geométrico, a concepção dos matemáticos quanto à possibilidade de um espaço para além da terceira dimensão ainda era muito limitada devido a legitimidade perante a realidade física. Essa limitação encontra-se refletida em um excerto do *Barycentrish Calcul* de Möbius com relação a igualdade e semelhança de figuras por meio do estudo de seus pontos:

> Pela coincidência de dois sistemas iguais e semelhantes A, B, C, D, ... e A’, B’, C’, D’, ... no espaço de três dimensões, em que os pontos D, E, ... e D’, E’, ... situam-se em lados opostos dos planos ABC e A’B’C’, será necessário, devemos concluir por analogia, que devemos ser capazes de deixar um sistema fazer meia revolução em um espaço de quatro dimensões. Mas, uma vez que tal espaço não pode ser pensando, também a coincidência, neste caso, é impossível (MÖBIUS apud DORIER, 1995b, p. 240, traduzido pelo autor).

Em acordo com Dorier (1995b), Cayley foi um dos primeiros matemáticos a defender categoricamente a possibilidade de um espaço geométrico com mais de três dimensões. Em sua obra, *Sur quelques résultats de géométrie de position*[22]*,* ele demonstra de que forma esses resultados são possíveis:

> Pode-se, sem usar noções metafísicas para a possibilidade de um espaço quadridimensional, raciocinar da seguinte maneira (tudo também pode ser facilmente traduzido em linguagem puramente analítica): Assumindo quatro dimensões no espaço, deve-se considerar linhas determinadas por dois pontos, meio – planos determinados por três pontos, plano determinados por quatro pontos; (a interseção de dois planos é, portanto, meio plano, etc.). O espaço comum deve ser considerado como um plano, e sua interseção com outro plano é um plano comum, com um semiplano, uma linha comum, e com uma linha, um ponto comum (CAYLEY apud DORIER, 1995b, p. 241, traduzido pelo autor).

Segundo Dorier (1995b), além da viabilidade de cálculos geométricos para mais de três dimensões – sinalizados pelos quatérnios –, a descoberta das geometrias não euclidianas, bem como o desenvolvimento da geometria projetiva e algébrica foram fundamentais para a construção de uma geometria n-dimensional no século XIX. Podemos afirmar que em tal geometria, baseada nos métodos analíticos e na teoria dos determinantes e matrizes, encontram-se os gérmens das primeiras noções de uma teoria de linearidade, e assim, da Álgebra Linear.

Em 1844, Grassmann deu o primeiro passo rumo à uma teoria unificada da linearidade por meio da publicação da sua *Die Lineale Ausdehnungslehre*[23] que, segundo ele, fazia parte de uma teoria ainda mais geral chamada *Die Ausdehnungslehre*[24]. Em sua obra, nota-se a introdução de conceitos elementares da Álgebra Linear em um contexto mais generalizado do que seus predecessores haviam apresentado, tais como, os conceitos de Dependência, Base e Dimensão. Além disso, em sua publicação, ele conseguiu definir e provar a maioria das propriedades elementares dos Espaços Vetoriais de dimensão finita (DORIER 1995b; 2000).

Segundo Baroni (2009), Grassmann também se empenhou na busca por um cálculo geométrico intrínseco tal como Leibniz idealizou, contudo, diferente de seus precursores, ele criou um sistema totalmente original para isso, a partir de uma concepção filosófica de Ciência e Matemática. Sua teoria, de caráter algébrico-geométrico, reuniu as grandezas mais gerais que não cumpriam necessariamente a

---

[22] Sobre alguns resultados de geometria posicional
[23] Teoria das extensões lineares
[24] Teoria das extensões

propriedade comutativa, o que corresponde, em termos modernos, a uma apresentação axiomática do Espaço Vetorial n-dimensional.

A teoria de Grassmann possui uma característica peculiar, haja vista que, segundo ele, embora pudesse ser aplicada à geometria, mecânica e outros campos científicos, era independente deles, uma vez que sua construção se fundamentava em regras de raciocínio matemático (principalmente na percepção geométrica da realidade) e pressupostos filosóficos. A leitura da concepção filosófica apresentada por Grassmann no início da *Ausdehnungslehre* se faz indispensável pois é ela quem sustenta os resultados matemáticos expostos em toda sua obra. Por exemplo, Grassmann reconhece a impossibilidade da expansão de um espaço para além de três dimensões, tendo em vista o espaço físico, contudo sua filosofia o permite avançar para um espaço n-dimensional (DORIER, 1995b; 2000).

Em sua obra de 1844, Grassmann dividiu a ciência em duas partes, *Real* e *Formal*. A *Ciência Formal* foi subdividida em *Geral* e em Particular. É na *Ciência Formal Geral* que ele localizou a Matemática, a qual ele nomeou como *Teoria das Formas*. Na *Teoria das formas,* ele as classificou em quatro tipos, a saber, *Formas algébricas discretas* – que correspondem aos números; *Formas combinatórias discretas* – que correspondem às combinações (ou relações); *Formas algébricas contínuas* – que correspondem às grandezas intensivas; *Formas combinatórias contínuas* – que correspondem às grandezas extensivas. A teoria das combinações refere-se a álgebra e probabilidade; as grandezas intensivas representam as funções e o cálculo diferencial e integral e as grandezas extensivas correspondem à teoria da extensão (BARONI, 2009).

Nesse sentido, é possível observar o grau de complexidade presente na obra de Grassmann, ademais, ele não apresentava definições precisas, mas sim conceitos que emergiam de diferentes perspectivas e que eram validados a partir de seus pressupostos filosóficos e matemáticos (ligados geralmente à realidade física). Geração é um conceito essencial na *Ausdehnungslehre* pois as noções não eram definidas por meio de propriedades e suas operações, e sim criadas por meio da ‘evolução’ ou da conexão com outras entidades, numa espécie de construção dinâmica e às vezes recursiva (DORIER, 1995b; 2000).

A fim de materializar nossas exposições, destacamos a conceituação de base e dimensão. A noção de dependência será discutida com mais detalhes no próximo capítulo do trabalho.

Segundo Dorier (1995b), Grassmann, imbuído do seu modo original de Geração, afirmou que um sistema de n-ésima ordem era gerado por n métodos fundamentais de evolução – métodos estes que ele dizia serem independentes, isto é, nenhum estava incluído em um sistema gerado por outros –, o que expressa a relação intrínseca da ordem do sistema com os conceitos de geração e dependência. Para que esse modo particular de geração pudesse ser expandido para um contexto geral, Grassmann usou o contraste entre os aspectos formais e reais da adição de deslocamento (o que equivale aos nossos vetores) e concluiu que "*[O] sistema de ordem m é gerável por quaisquer m métodos de evolução pertencentes a ele que sejam mutuamente independentes*" (DORIER, 1995b, p. 245, traduzido pelo autor).

Para Dorier (1995b), essa afirmação de Grassmann fornece uma noção equivalente ao conceito moderno de base e dá ao valor *m* um significado geral próximo ao que conhecemos por dimensão. Para demonstrar a assertiva apresentada anteriormente, Grassmann usou o que ficou conhecido posteriormente como Teorema da Troca, o qual afirma que um método fundamental de evolução pode ser substituído por outro independente dos demais:

> O ponto chave é que se *p* é independente de b, c, ... então na decomposição de *p* de acordo com os métodos iniciais de evolução: p = a + b + c ... *a* não é zero. Portanto, qualquer deslocamento a_1 pertencente a *a* corresponde a um deslocamento p_1 pertencente a $P_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \ ...$ portanto: $a_1 = P_1 - b_1 - c_1 ...$ Portanto, no processo de geração, qualquer deslocamento pertencente a *a* pode ser substituído por uma soma dos deslocamentos pertencentes a p, b, c... A possibilidade de reorganização da ordem das evoluções e da partição em deslocamentos semelhantes (cf. §17 a 19) garante a permutabilidade de *p* e *a* (DORIER, 2000, p. 23, traduzido pelo autor).

Para Dorier (2000), embora Grassmann não o tenha explicitado em seu trabalho, é possível deduzir, a partir do Teorema da Troca, que nenhum conjunto com menos de *m* métodos geraria um sistema de ondem *m*. Além disso, ainda na concepção Dorier (2000), apesar de suas imperfeições, o Teorema da Troca foi fundamental por fornecer um método – que não fizesse uso de coordenadas – que pudesse provar a invariância do número de elementos de qualquer base de um

Espaço Vetorial. Entretanto, nenhum dos seguidores de Grassmann fez alusão a esse aspecto, e assim, suas concepções de base foram menos elaboradas.

Grassmann também estabeleceu em *Ausdehnungslehre* um resultado equivalente a fórmula da soma da dimensão de dois sub-espaços, seja ela: $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$. Além disso, ele apresentou uma nova abordagem para o cálculo baricêntrico de Möbius – que só foi reconhecido graças a reformulação de Grassmann – o qual forneceu ao trabalho de Möbius melhores fundamentos teóricos. Em suma, Grassmann expôs diversas aplicações de sua teoria à geometria, sistemas de equações lineares e vários campos da física, as quais estão presentes em artigos publicados por ele após 1844 (DORIER, 2000).

Conforme colocado anteriormente, a peculiaridade do *Ausdehnungslehre* consistiu em suas bases matemáticas e filosóficas, a ponto de resultados matemáticos serem confundidos com obscuras concepções filosóficas. Para além disso, o modo euclidiano como Grassmann apresentou seus resultados exigia do leitor uma compreensão ininterrupta desde a primeira página de seu tratado até a última, inclusive sobre a filosofia que os subsidiava. Nesse sentido, a obra de Grassmann foi completamente ignorada pelos matemáticos da época, os quais a caracterizavam como estranha ou falha, como podemos observar em Dorier (1995b).

Nesse sentido, em 1862, Grassmann lançou uma reformulação de sua *Ausdehnungslehre*, da qual ele retirou todo o seu tratado filosófico e ainda modificou o modo como seus resultados matemáticos eram apresentados, os quais passaram a ser dados a priori e definidos por meio de operações, conforme era costume da época. Entretanto, em sua nova obra, ele também apresentou resultados inéditos aos quais havia chegado ao reestruturar sua *Ausdehnungslehre.* O conceito de número é usado desde o princípio de suas exposições, o que lhe permitiu trabalhar com as combinações lineares desde o início, diferentemente de sua obra em 1844, na qual elas figuravam apenas a partir do quarto capítulo (DORIER, 1995b).

Um fato interessante, observado em Dorier (1995b; 2000), consiste quando Grassmann definiu um sistema de *m* unidades, ou seja, um sistema de *m* magnitudes lineares independentes, como o sistema de todas as combinações lineares das unidades, pois ele define adição, subtração, multiplicação e divisão por um número, e ainda institui uma lista de propriedades fundamentais que essas operações deveriam satisfazer, e das quais todas as leis algébricas dessas operações decorreriam.

> 8. Para magnitudes extensas a, b, c. as fórmulas fundamentais se aplicam:
> 1) $a + b = b + a$
> 2) $a + (b + c) = a + b + c$
> 3) $a + b - b = a$
> 4) $a - b + b = a$
> Prova.
> [...]
> 12. As fórmulas fundamentais se aplicam à multiplicação e divisão de magnitudes extensas (a, b) por números (α, β)
> 1) $\alpha\beta = \beta\alpha$
> 2) $\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
> 3) $(a + b)\,\gamma = a\gamma + b\gamma$
> 4) $a\,(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$
> 5) $a\,.\,1 = a$
> 6) $a\beta = 0$
> Então, e somente se $a = 0$ ou $\beta = 0$
> 7) $\frac{a}{\beta} = a\,.\frac{1}{\beta}$ se $\beta \neq 0$ (GRASSMANN, 1862 apud DORIER, 2000, p. 26, traduzido pelo autor).

Segundo Dorier (1995b), dentre todas as propriedades apresentadas por Grassmann, as do parágrafo oito e doze chamam atenção por se assemelhar bastante aos axiomas da estrutura moderna do Espaços Vetorial, exceto pela (1) e (7) referente a multiplicação que são meras convenções; a (6) que é uma propriedade redundante; e o uso ambíguo da subtração, que tornava o conceito de zero e oposto um tanto obscuro. Ainda para Dorier (1995b), esses últimos aspectos foram cuidadosamente discutidos na obra de 1844, o que expressa a impossibilidade de uma leitura isolada da reedição de 1862 do trabalho de Grassmann.

Todos os esforços empregados por Grassmann para o reconhecimento da sua teoria foram frustrantes, pois os matemáticos também rejeitaram a nova edição de sua *Ausdehnungslehre*. A retirada de seu embasamento filosófico foi um aspecto decisivo para isso, tendo em vista que tornou os resultados apresentados ainda mais difíceis de serem aceitos. Baroni (2009), salienta que o único reconhecimento que a obra de Grassmann obteve foi um prêmio oferecido pela *Jablonowskishen* em 1845 para quem criasse um sistema semelhante ao esboçado por Leibniz em 1679. Grassmann, encorajado por Möbius, se candidatou e, ao ganhar o prêmio, teve seu trabalho avaliado por uma comissão científica e foi publicado em 1847.

Segundo Dorier (1995b; 2000), embora a *Die Lineale Ausdehnungslehre* de Grassmann tenha sido ignorada pelos matemáticos em 1844 e 1862, ela se configura como sendo a primeira teoria a conter explicitamente uma geometria n-dimensional, na qual conceitos de Álgebra Linear tais como Dependência e Independência Linear, Geradores, Base e Dimensão, foram definidos em sua generalidade. Além disso, o trabalho de Grassmann serviu de suporte para as primeiras noções axiomáticas de Espaços Vetoriais e problemas lineares de dimensão finita apresentados no final da década de 1880, mas que só vieram a se consolidar por volta de 1920, período no qual os resultados apresentados por Grassmann tiveram de ser redescobertos por outros matemáticos. Na próxima seção, discute-se melhor tais questões.

2.3. AS PRIMEIRAS ABORDAGENS AXIOMÁTICAS EM ÁLGEBRA LINEAR

Conforme colocado na seção anterior, o trabalho de Grassmann constituiu-se como sendo o primeiro tratado no qual os conceitos subjacentes à Álgebra Linear foram definidos em sua unificação e generalidade e que, apesar de não ter tido a devida atenção dos matemáticos da época, forneceu bases para as primeiras noções axiomáticas em Álgebra Linear.

Segundo Baroni (2009), embora o termo *vetor* tenha sido proposto pela primeira vez por Hamilton em 1875, a ideia de vetor como um segmento orientado esteve presente em trabalhos de outros matemáticos, dentre os quais, o de Grassmann. Os sistemas de Hamilton e de Grassmann competiram pela influência no meio acadêmico por um tempo. O primeiro alcançou sucesso entre os matemáticos no período de 1840 e 1870, entretanto, de 1870 e 1890 as publicações do segundo ganharam destaque e passaram a influenciar outros matemáticos.

Dentre esses matemáticos, Giuseppe Peano (1858 – 1932) foi um dos primeiros a chamar a atenção ao trabalho de Grassmann no decurso de seus estudos envolvendo vetores. De acordo com Moore (1995), Peano trabalhou com as noções de vetores de três maneiras distintas ao longo de sua vida. A primeira maneira foi em 1887 na forma de n-uplas, na qual ele definiu adição e multiplicação escalar pela operação correspondente em cada coordenada, apesar de não as considerar naquele tempo como vetores. Hoje nós as consideramos.

A segunda maneira foi tratada por Peano em 1888 na forma de um segmento de linha orientado, ou seja, como a diferença B – A de dois pontos A e B, onde ele fez uma abordagem Grassmanniana do que nomeou como cálculo geométrico. A terceira maneira, também em 1888, foi o que ele chamou de sistemas lineares, os quais eram essencialmente o que consideramos como Espaços Vetoriais sobre o conjunto dos números reais. Tendo em vista o nosso propósito com este capítulo, discorreremos melhor acerca da terceira abordagem de Peano.

A terceira abordagem com relação aos vetores esteve contida em seu livro *Calcolo geométrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*[25] publicado em 1888 e que, segundo Peano, tinha por objetivo realizar uma discussão sobre o Cálculo Geométrico idealizado por Leibniz e desenvolvido por Möbius, Bellavitis, Hamilton e Grassmann. Mais precisamente ele teve o propósito de deixar mais claro e acessível aos matemáticos da época a abordagem de Grassmann a partir de uma releitura do *Die Lineale Ausdehnungslehre*, tendo Peano apenas introduzido ideias novas próprias nos dois últimos capítulos do livro (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), é possível observar no trabalho de Peano a influência que este recebeu de Grassmann quando, por exemplo, o primeiro considerou uma formação da primeira espécie como sendo uma expressão finita da forma *mA + nB + pC + ...,* onde *A, B, C...* são pontos e *m, n, p,* são números reais e definiu vetor como uma formação da primeira espécie que pode ser escrito na forma B – A, evidenciando assim que Peano adotou os vetores de uma maneira bastante tradicional.

Ainda para o Moore (1995), o capítulo final *Transformações de Sistemas Lineares* é o de maior interesse, pois é neste capítulo que Peano apresentou a definição do que ele nomeou por Sistema Linear, o que em sua essência figura como um Espaço Vetorial sobre os números reais:

> Existem sistemas de objetos para os quais as seguintes definições são dadas[26]:
> (1) É definida uma equivalência entre dois objetos do sistema, ou seja, uma proposição, denotada por a = b...
> (2) É definida uma soma de dois objetos a e b. Ou seja, é definido um objeto, denotado por a + b, que também pertence ao sistema dado e satisfaz as condições:
> (a = b) < (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c
> (3) Supondo que *a* seja um objeto do sistema e *m* um número inteiro positivo, entendemos por *ma* a soma de *m* objetos iguais a *a*. É fácil ver que se *a, b...* são objetos do sistema e *m, n ...* são inteiros positivos, então
> (a = b) < (*m*a = *m*b); *m*(a + b) = *m*a + *m*b ; (*m*+*n*)a = *m*a + *n*a; *m*(*na*) = (*mn*)a; 1a = a
> Assumimos que um significado é atribuído a *m*a para qualquer número real *m* de forma que as equações anteriores ainda sejam satisfeitas. O objeto *m*a é o produto do número (real) *m* pelo objeto a.

[25] Cálculo geométrico segundo a teoria das extensões de H. Grassmann
[26] Nesse contexto '<' significa 'implica'.

> (4) Finalmente, assumimos que existe um objeto do sistema, que nós... denotamos por 0, de modo que, para qualquer objeto a, o produto do número 0 pelo objeto a é sempre o objeto 0, ou seja,
>
> $$0a = 1.$$
>
> Se deixarmos a – b significar a + (-1)b, segue-se que:
>
> $$a – a = 0, a + 0 = a.$$
>
> DEF. Sistemas de objetos para os quais as definições (1) – (4) são introduzidas de forma a satisfazer as condições dadas são chamados de sistemas lineares (PEANO, 1888 apud MOORE, 1995, p. 268, traduzido pelo autor).

Para Baroni (2009), embora os axiomas de Peano sejam bastante semelhantes às propriedades fundamentais apresentadas por Grassmann (p. 72), Peano foi mais preciso em suas colocações com relação às propriedades das operações para descrever a estrutura, na medida que Grassmann havia deduzido essas propriedades a partir da definição das operações nas coordenadas. Além disso, Peano também aperfeiçoou a formulação ao retirar algumas redundâncias que apareciam nas propriedades fundamentais de Grassmann e ainda deu maior clareza aos conceitos de zero e de elemento oposto.

Após a definição dos seus sistemas lineares, Peano apresentou alguns exemplos desses sistemas, tais como os números reais, os números complexos, formações das primeiras espécies, vetores no plano e no espaço e formação de espécies superiores. Peano não considerou os pontos no espaço, haja vista que a soma destes era uma formação da primeira espécie e não um ponto. As funções polinomiais de uma variável real foi o exemplo mais inovador dado por Peano, pois ele notou que se essas funções fossem de grau no máximo n, então elas formariam um sistema linear de dimensão n + 1 e assim, se fossem consideradas todas as funções, a dimensão desse sistema linear seria infinita (MOORE, 1995).

Embora a possibilidade de um espaço linear de dimensão infinita não tenha sido levada adiante por Peano, um outro exemplo dado por ele com a utilização do objeto funções também chamou atenção, a saber, o conjunto de todas as transformações lineares de um sistema linear A para um sistema linear B, ou seja, um Homomorfismo de A para B, contudo, Peano apenas o mencionou. De fato, o mais interessante disso tudo foi a extensão do cálculo infinitesimal, considerando funções dos reais a um sistema linear arbitrário e depois definindo continuidade, derivada e integral dessas funções (MOORE, 1995).

Para Dorier (2000), no que se refere a organização do *Calcolo Geométrico*, o fato de Peano ter apresentado no primeiro capítulo os fundamentos da lógica dedutiva e no último ter exibido uma abordagem axiomática dos seus sistemas lineares evidencia a relação de dependência entre ambos os capítulos, contudo, estes parecem estar desconectados de todo o resto do trabalho. Ainda para o autor, a justificativa para isso pode ser encontrada no fato de que a definição axiomática dada por Peano adveio tanto de sua própria reflexão e trabalho sobre a lógica e o formalismo quanto emergiu de sua leitura do *Die Lineale Ausdehnungslehre*.

> [...] Pode-se dizer que Peano separou o aspecto formal (o arquitetônico dado pela teoria geral das formas na *Ausdehnungslehre*) de sua dependência do aspecto real (o modo original de geração na teoria de Grassmann). Em vez do primeiro aspecto, Peano apresentou as bases da lógica dedutiva. O resultado é que o último capítulo do *Calcolo Geometrico* foi uma simples apresentação axiomática cuja simplicidade não apenas o tornou um modelo mais poderoso para a generalização, mas também privou o leitor de chaves que podem ter sido essenciais (DORIER, 2000, p. 40, traduzido pelo autor).

No mesmo ano Peano usou, pela única vez, a linguagem e alguns resultados de sua abordagem axiomática de sistemas lineares em um artigo no qual ele resolveu um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis. A solução apresentada por Peano foi muita mais moderna do que qualquer um de seus contemporâneos ao utilizar ideias de norma euclidiana, autovalores, substituições lineares etc. Tal fato evidencia o poder de unificação e generalização que a axiomatização de Peano possuía, além do que propôs um interessante uso do modelo geométrico para generalização (DORIER, 2000).

Apensar de tudo, o livro de Peano não exerceu grande influência fora da Itália e dentro dela apenas os seguidores de Grassmann se interessaram pelo *Calcolo Geometrico*. Ademais, esses mesmos seguidores não deram muita atenção às novas ideias apresentadas por Peano, uma vez que foi nesse ponto que ele se desviou das concepções de Grassmann. O tratamento axiomático, não usual na época, constante na obra em foco pode também ter sido outro fator que tenha tornado essa teoria prematura e pouco compreendida, pois elas não ficaram familiares aos matemáticos até pelo menos 1912 (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), o próprio Peano não deu muita atenção aos seus sistemas lineares e muito menos à sua abordagem axiomática em seus trabalhos, chegando ao ponto de adotar até mesmo uma outra abordagem totalmente diferente para os vetores. Diante desses fatos, na concepção do autor, não seria de se estranhar que apenas os matemáticos sob a influência pessoal de Peano adotasse seus axiomas para os sistemas lineares. E foi o que de fato aconteceu, sendo Salvatore Pincherle (1853 – 1936), Cesare Burali-Forti (1861 – 1931) e Roberto Marcolongo (1862 – 1943) esses matemáticos.

Durante a década de 1890 Pincherle publicou vários trabalhos alinhados com os de Peano, nos quais utilizou uma abordagem axiomática para problemas com Equações Diferenciais e Integrais. Em 1901 ele publicou, em parceria com Ugo Amaldi (1875 – 1957), o livro *Le Operazioni Distributive e le loro applicazioni all'analise*[27], no qual os autores apresentaram uma teoria axiomática dos operadores lineares. Apesar de ter feito referência aos trabalhos de Grassmann e Peano, Pincherle foi mais além ao trabalhar com espaços lineares de dimensão infinita, conhecimento esse que não foi explorado até 1920 (DORIER, 2000).

Pincherle não apenas defendia uma abordagem axiomática para o estudo dos operadores lineares em espaços de dimensão finita, mas também tentou generalizar isso para os operadores funcionais, fato este que ressalta a visão futurista que ele detinha. De fato, considerar conjuntos de funções que contém todas as combinações lineares de seus elementos foi uma abordagem nova, pois até o presente momento os matemáticos estavam presos a um ponto de vista analítico de função, isto é, a concebiam como uma série infinita de coeficientes (DORIER, 2000).

No que se refere ao conteúdo da obra em questão, a definição axiomática proposta por Pincherle era bem semelhante à de Peano, assim como as definições de base e dimensão, embora este – diferentemente de Peano – tivesse feito imediata conexão com a questão dos geradores. Além disso, Pincherle também estudou a questão da mudança de base e introduziu as noções de hiperplano e subespaço e estudou suas representações por equações. Por fim, ele enunciou e provou o teorema que afirma que a dimensão da soma de dois subespaços é soma da dimensão de cada um menos a dimensão de sua interseção (DORIER, 2000).

Podemos afirmar que a contribuição de Pincherle foi bastante inovadora em detrimento da primeira tentativa de Peano, haja vista que ela possibilitou uma abordagem axiomática unificada do estudo dos operadores lineares em espaços de dimensão finita e infinita. Contudo, apesar de Pincherle ter escrito sobre equações funcionais e operadores na versão francesa da *encyclopédie des mathématiques*

[27] Operações distributivas e suas aplicações para análise

pures et appliquées[28], seu trabalho não exerceu grande influência sobre a comunidade acadêmica da época (DORIER, 2000).

Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo também receberam influência direta de Peano e publicaram artigos sobre métodos vetoriais e suas aplicações na Matemática e na Física. Embora Burali-Forti estivesse interessado nos métodos grassmannianos, em 1896 ele publicou um artigo sobre o uso dos métodos vetoriais na geometria projetiva e adotou a abordagem de Peano ao invés da de Grassmann. Igualmente a Peano, ele definiu um sistema como 'linear' quando para seus elementos existe uma soma e um produto por um número real definidos e essas operações gozam das propriedades de operações correspondentes em números. Seu interesse era com os sistemas lineares n-dimensionais de formas geométricas ($n \leq 4$) no contexto das transformações projetivas (MOORE, 1995).

Em 1909 Burali-Forti voltou a trabalhar com os sistemas lineares e publicou em parceria com Roberto Marcolongo um livro no qual deu uma definição axiomática aos sistemas lineares semelhante ao que Peano havia feito em 1888, embora menos completa. A inovação do trabalho deles foi que os sistemas lineares figuravam o capítulo inicial de sua obra, e ainda foram aplicados ao estudo das homografias vetoriais. Além disso, Burali-Forti e Marcologo explicitaram na prática em seu trabalho a funcionalidade da abordagem axiomática, ao usar conceitos e vocabulário de uma estrutura geométrica concreta, apesar de que o uso de uma teoria formal e abstrata em um único contexto específico e ainda podendo ser dispensável pode ser facilmente questionada (DORIER, 2000).

Em 1912, os sistemas lineares ocuparam um espaço ainda mais central nos estudos de Burali-Forti e Marcolongo e formaram a base do livro *Transformations linéaires*[29] publicado por eles nesse mesmo ano. O diferencial desse novo material eram as aplicações em mecânica a partir da apresentação da teoria geral dos sistemas lineares e operadores lineares, sistemas esses apresentados por meio de uma abordagem axiomática semelhante a abordagem de Peano de 1888. Eles apontaram, assim como Peano, o fato importante de que os operadores lineares entre dois sistemas lineares formam, eles próprios, um sistema linear (MOORE, 1995).

[28] Enciclopédia de matemática pura e aplicada
[29] Transformações lineares

Segundo Dorier (2000) as motivações de Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo estavam coadunadas com as de Leibniz, uma vez que a abordagem axiomática era para eles uma maneira de construir uma álgebra intrínseca que não dependesse de coordenadas, o que possibilitou assim a criação de bases para uma álgebra sobre entidades geométricas. Contudo, diferente da abordagem de Pincherle, sua abordagem tornou o poder de generalização e unificação limitado à estrutura da geometria e da física, embora tenham conseguido popularizar ainda mais o trabalho de Grassmann, bem como os métodos vetoriais.

Apesar de todos os esforços de Peano, Pincherle, Burali-Forti e Marcolongo acerca dos métodos vetoriais, a abordagem axiomática não foi rapidamente adotada pela comunidade matemática. Uma das justificativas encontra-se no fato de que os trabalhos de Peano, Burali-Forti e Marcolongo, ainda que viabilizassem uma visão mais ampla acerca da teoria de Grassmann pelo viés axiomático, permaneceram limitadas em sua potencialidade de generalização pela dependência a geometria, ou seja, usar uma abordagem axiomática parecia ser uma escolha que a gama limitada de aplicações não poderia justificar. O trabalho de Pincherle conseguiu tomar um rumo diferente, porém não obteve muita atenção (DORIER, 2000).

Em paralelo aos esforços dos matemáticos supracitados quanto ao processo axiomático em Álgebra Linear, um outro tipo de abordagem axiomática para vetores emergiu do trabalho de Gaston Darboux (1842 – 1917).

Segundo Moore (1995), Darboux publicou um artigo, em 1875, analisando várias provas da composição de forças na estática (lei do paralelogramo) em geometria pura e investigou quais proposições seriam necessárias para isso, chegando ao número de 4:

> Dados *n* segmentos direcionados, todos começando do mesmo ponto O, a lei da composição é tal que:
> 1. A resultante total é única e não muda ao se permutar a ordem das resultantes parciais.
> 2. A resultante total não é alterada por uma rotação dos segmentos em torno de O.
> 3. A lei da composição reduz à adição algébrica para segmentos com a mesma direção.
> 4. A direção e magnitude da resultante são funções contínuas dos segmentos (DAURBOX, 1875 apud MOORE, 1995, p. 275, traduzido pelo autor).

Entre os anos de 1903 e 1907 os axiomas de Darboux para vetores foram estudados pelos matemáticos alemães Rudolf Schimmack (1881 – 1912) e Georg Hamel (1877 – 1954). A dissertação de Schimmack foi dedicada à axiomatização de vetores e emergiu de sua revisão sobre os axiomas de Darboux, na qual ele, ainda que tenha também definido vetor como um segmento de linha orientado em um espaço euclidiano, propôs 7 axiomas ao invés de 4. Schimmack dividiu o primeiro axioma de Darboux em três, direcionados à adição de vetores, comutatividade e associatividade. O terceiro axioma de Darboux fora substituído por dois, o primeiro afirmava a existência de um vetor nulo e o segundo que se um vetor ʋ tem comprimento r, então para qualquer escalar positivo a o comprimento do vetor ʋ + aʋ é (1+a)ʋ. Os axiomas 2 e 4 foram conservados (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), Schimmack se empenhou em evidenciar em seus trabalhos a consistência e a independência dos 7 axiomas propostos por Darboux. A independência do quarto axioma, em especial, era equivalente a existência de uma função real descontínua f que satisfizesse a equação funcional $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todos os reais x e y. Porém, como não se tinha descoberto e provado a existência de uma solução descontínua para tal, Schimmack deixou a independência desse axioma como uma questão em aberto, sendo Hamel posteriormente o responsável por encontrar tal solução.

Em 1903, de maneira independente, Hamel fez sua própria análise dos axiomas de Darboux e esta foi ao encontro do estudo de Schimmack. Ele também percebeu que a prova da independência do quarto axioma de Darboux estava relacionada a possibilidade de encontrar uma solução descontínua para a equação $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Vale ressaltar que em 1901, em sua tese de doutorado em geometria sob a orientação de David Hilbert (1862 – 1943), Hamel deu uma solução descontínua para a referida equação e concluiu apontando que os axiomas para a adição de vetores exigem um axioma de continuidade, isto é, o quarto axioma de Darboux necessariamente precisaria ser adotado. Esse trabalho fui publicado por Hilbert em 1905 em seu *Mathematische Annalen*[30] (MOORE, 1995).

No mesmo trabalho em que Hamel provou a existência de soluções descontínuas para equações funcionais, ele também provou a existência do que chamou de ‘base para todos os números’. De acordo com Moore (1995), em termos

---

[30] Anais matemáticos

modernos, essa ideia remonta a noção de base para o Espaço Vetorial dos números reais sobre o campo dos números racionais, contudo, ainda não se tinha desenvolvido suficientemente o conceito de base, e sim duas noções que eram equivalentes quando trabalhadas em espaços de dimensão finita, mas que em espaços de dimensão infinita se opunham, sejam elas, a de um conjunto máximo linearmente independente e de um conjunto ortogonal máximo.

Hamel adotou a primeira ideia de base e por tratar-se de um contexto particular fez emergir a noção do que ficou conhecido como 'Base de Hamel', isto é, um conjunto H de números reais, de modo que cada número real poderia ser escrito como combinação linear única de algum número de membros de H com coeficientes racionais. O conceito de base de um espaço vetorial sobre os números reais, em termos de independência linear e em seu caráter generalizante, só teria recebido uma formulação geral quase duas décadas depois. Até meados de 1930 as bases de Hamel foram investigadas principalmente no contexto da análise e da teoria descritiva dos conjuntos (MOORE, 1995).

Ainda no decurso dos primeiros processos de axiomatização em Álgebra Linear, Hermann Weyl (1888 – 1955) foi outro matemático a se preocupar com tal ofício a partir da publicação de seu livro *Raum, Zeit, Materie*[31] em 1918 baseado em palestras sobre relatividade geral que havia dado em Zurique. Weyl deu a definição axiomática de um espaço afim com base em um espaço vetorial não limitado ao espaço tridimensional, os quais ele nomeou como variedades vetoriais lineares. Ele não mencionou ter conhecimentos de seus predecessores na jornada axiomática, mas provavelmente teve contato com os estudos de Peano a partir do conhecimento das obras de Pincherle (MOORE, 1995; DORIER, 1995b).

Segundo Dorier (2000), o propósito de Wely era o de apresentar a teoria da relatividade usando o espaço quadridimensional e escolheu a abordagem axiomática para o fazê-lo. Nesse sentido, ele deu dois exemplos de espaços vetoriais que não necessariamente estavam atrelados a geometria, sejam eles, um modelo da mistura de quatro gases e uma máquina de calcular, a fim de evidenciar a natureza dos conceitos que havia introduzido. Para além disso, ele mostrou como os axiomas da estrutura afim poderiam ser aplicados perfeitamente no R^n e nas equações lineares,

[31] Espaço, tempo, matéria

além de também ter defendido que a teoria axiomática dos espaços vetoriais poderia ser deduzida naturalmente das equações lineares em vez da geometria.

Os axiomas de Weyl para geometria afim foram divididos em duas partes. A primeira parte, voltada a axiomatização dos vetores, era uma reminiscência dos axiomas de Peano de 1888, embora diferentemente de Peano, ele tivesse descartado a possibilidade de um espaço de dimensão infinita. O último dos axiomas de Weyl estava relacionado a dimensão ao afirmar que se existissem n vetores linearmente independentes, então n+1 vetores seriam todos linearmente dependentes. Na verdade, Weyl acabou por axiomatizar a noção de um espaço vetorial de dimensão finita sobre os reais (MOORE, 1995).

A segunda parte dos axiomas de Weyl relacionou os conceitos de ponto e vetor, esses axiomas também muito se assemelhavam com a segunda abordagem axiomática para vetores adotada por Peano em 1898, sejam eles:

> 1. Quaisquer dois pontos determinam um vetor a; em símbolos, $\overrightarrow{AB} = a$. Se A for qualquer ponto e a for qualquer vetor, então haverá somente um ponto B para o qual $\overrightarrow{AB} = a$.
> 2. Se $\overrightarrow{AB} = a$ e $\overrightarrow{BC} = b$, então $\overrightarrow{AC} = a + b$ (WEYL, 1918 apud MOORE, 1995, p. 279, traduzido pelo autor).

Segundo Moore (1995), a preocupação de Weyl em vincular vetores a pontos o colocou em consonância com o tratamento geométrico tradicional de vetores como segmentos de linha orientados. Ele foi o primeiro a teorizar de forma tão clara a estrutura linear de R^n que, em sua concepção, era a base da teoria das equações lineares. Contudo, apesar de todos os seus esforços por uma axiomatização que ultrapasse os limites da geometria e estivesse mais coadunado ao estudo das equações lineares, seus axiomas para um Espaço Vetorial de dimensão finita foram ainda menos influentes do que os axiomas propostos por Peano.

Conforme pôde ser observado, os esforços empregados por Peano, Pincherle, Burali-Forte e Marcolongo e Weyl, rumo a axiomatização dos Espaços Vetoriais não obtiveram grande repercussão e estiveram, em sua maioria, limitados à uma visão geométrica do processo, não avançado assim mais do que Grassmann havia caminhado, tendo em vista que todos esses trabalhos derivam deste último, direta ou indiretamente. Desse modo, a noção de Espaços Vetoriais axiomáticos teve que ser redescoberta uma terceira vez, no contexto do que conhecemos hoje por Análise

Funcional e Álgebra Moderna. Trataremos desses aspectos com mais detalhes na próxima subseção.

2.4. ANÁLISE FUNCIONAL COMO CONTEXTO DE AMADURECIMENTO DOS ESPAÇOS VETORIAIS

Conforme discutido anteriormente, os esforços empregados por diversos matemáticos ao longo do tempo por uma axiomatização do que conhecemos hoje por Espaços Vetoriais não obtiveram êxito no que se refere a adoção e divulgação no meio acadêmico. Nesse sentido, essa noção teve que ser redescoberta uma terceira vez, por volta de 1920, no contexto do que se constituiria como Análise Funcional. Três matemáticos figuraram como personagens principais nesse processo: Hans Hahn (1879 – 1934), Norbert Wiener (1894 – 1964) e Stefan Banach (1892 – 1945). Contudo, se faz necessário de antemão discorrer sobre as principais ideias que alicerçaram a constituição da Análise Funcional

Podemos afirmar que as raízes da Análise Funcional se encontram no estudo das equações diferenciais e sua utilização na resolução de problemas relacionados à linearidade. No século XVIII alguns conhecimentos referentes às equações diferenciais eram sabidos, como a solução geral de uma equação diferencial homogênea linear de ondem n ser expressa como uma combinação linear de um conjunto de n soluções fundamentais ou ainda que a solução geral de uma equação diferencial poderia ser obtida a partir da adição de uma solução particular com a solução geral da equação homogênea, além do método de 'variação de constantes' para encontrar uma solução particular para toda a equação (DORIER, 1995b).

Entretanto, o ponto de partida foi a resolução de sistemas lineares com número infinito de incógnitas e equações em 1822 por Joseph Fourier (1768 – 1830) em seu *Théorie analytique de la chaleur*[32], ao resolver equações diferenciais por séries de potências. O ápice da obra de Fourier, ainda que a solução para o problema não tenha sido dada de maneira rigorosa e correta, consistiu no método utilizado, no qual considerava-se os sistemas truncados com apenas as n primeiras equações nas n primeiras variáveis e depois encontrava-se o limite da solução quando n tendia ao infinito. A dificuldade teórica era a existência desse limite e a adequação do limite das soluções com a solução do sistema infinito (DORIER, 2000).

[32] Teoria analítica do calor

Os esforços empregados por Fourier permaneceram desconhecidos por um longo tempo e a solução de sistemas lineares infinitos não foi estudada por outros matemáticos durante esse período. Henri Poincaré (1854 – 1912) entre 1886 e 1900, George William Hill (1833 – 1914) em 1877 e Helge von Koch (1870 – 1924) entre 1891 e 1893, foram os primeiros e mais significativos colaboradores ao estudo dos sistemas lineares infinitos. Em termos gerais, eles criaram uma teoria generalizada do determinante que lidava com dimensões infinitas enumeráveis, mas seus problemas não eram apenas algébricos, haja vista que o objetivo consistia em encontrar as condições em que as soluções dos sistemas truncados convergiam para a solução do sistema infinito (DORIER, 2000).

As equações integrais, obtidas em alguns casos por meio da transformação de equações diferenciais parciais, compuseram também o contexto no qual os problemas lineares infinitos foram estudados. Os trabalhos de Erik Ivar Fredholm (1866 – 1927) sobre as equações integrais compreendem o terreno onde os matemáticos responsáveis pela constituição da Análise Funcional se fundamentaram (DORIER, 2000). Ao partir de um problema de mecânica, Fredholm concentrou seu olhar sobre a seguinte equação integral, quando f é uma função integrável finita, isto é, limitada:

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\,\varphi(y)dy = \Psi(x)$$

Segundo Dorier (2000), a abordagem de Fredholm para a referida equação usou a analogia com a resolução de sistemas finitos de equações lineares, ao introduzir novos objetos e refletir acerca do método que usava objetos generalizados. Ainda para o autor, um dos aspectos revolucionários da obra em questão foi a ideia de considerar uma equação funcional como a transformação de uma função em outra, ainda que essa ideia já estivesse presente em trabalhos de Vito Volterra (1860 – 1940) em 1886. Desse modo, para Dorier (2000), além de seus resultados, a importância da obra de Fredholm encontra-se em sua abordagem, tendo em conta que introduziu o conceito de operador de função e fez uso da analogia com a teoria dos determinantes em dimensão finita de uma maneira bastante sofisticada.

Um dos matemáticos que se dedicou em estudar as equações diferenciais de Fredholm foi David Hilbert (1862 – 1943), tendo os métodos e os resultados apresentados em seus seis artigos servido como haste de sustentação de muitos outros estudos na Análise Funcional. O início se deu em 1906 quando Hilbert apresentou detalhadamente os resultados de Fredholm no caso específico quando o kernel f(x,y) era uma função simétrica, por meio de um novo método que facilitou a generalização para a dimensão infinita e ainda o fornecimento de diversas aplicações. Hilbert continuou a estudar as equações de Fredholm e a publicar seus resultados em outros cinco artigos (DORIER, 2000).

Segundo Dorier (2000), apesar de Hilbert nunca ter sinalizado durante seus estudos a intenção de unificar os diferentes contextos em uma abordagem mais formal e sintética, em 1912 ao publicar um livro que reuniu os seus seis artigos sobre as equações diferenciais ele salientou a necessidade dessa unificação:

> A construção sistemática de uma teoria geral das equações lineares integrais para todas as análises, especialmente para a teoria dos integrais definidos e a teoria do desenvolvimento de funções arbitrárias em séries infinitas, bem como para a teoria das equações diferenciais lineares e analíticas de funções, os theons potenciais e o cálculo de variações são de suma importância (HILBERT, 1912 apud DORIER, 2000, p. 61, traduzido pelo autor).

Desse modo, em acordo com Dorier (2000), é possível observar que o objetivo de Hilbert era o de resolver problemas de análise e manter explícita a analogia com a dimensão finita. Os Espaços de Hilbert só surgiriam 15 anos depois a partir de uma interpretação geométrica, sendo três matemáticos os principais responsáveis por esse processo, a saber, Frédéric Riesz (1880 - 1965), Ernst Fischer (1875 - 1954) e Erhard Schmidt (1876 - 1959).

Riesz e Fischer foram os primeiros, de maneira independente, a dar os passos iniciais rumo à constituição dos Espaços de Hilbert. Eles usaram a nova estrutura da teoria de Lebesgue para generalizar o método desenvolvido por Hilbert no estudo da equação de Fredholm quando o quadrado do kernel é integrável de Lebesgue. Por meio de métodos diferentes, cada um apresentou implicitamente um resultado equivalente ao que conhecemos como isomorfismo entre l^2 e L^2. A abordagem de Riesz era analítica e utilizou da série de Fourier, enquanto o método de Fischer era mais sintético e formal e estava baseado na definição de convergência quadrática média (DORIER, 2000).

Em 1908, Schmidt deu sua contribuição à constituição dos Espaços de Hilbert por meio de uma análise geométrica do espaço l^2 (em notação moderna). Ele considerou as séries (reais ou complexas) somadas ao quadrado as quais ele denominou como funções. Foi a partir dos trabalhos de Riesz e Schmidt que nasceu a ideia de pensar geometricamente os Espaços de Hilbert, e depois qualquer Espaço Funcional. Entretanto, muitas outras generalizações do trabalho de Hilbert ainda seriam realizadas até que uma definição formal do Espaço de Hilbert fosse dada em sua generalidade (DORIER, 2000).

Segundo Dorier (1995b), gradualmente os matemáticos começaram adotar cada vez mais espaços vetoriais de funções e esse fato foi primordial para a axiomatização da análise funcional. Um dos passos decisivos para isso foi a publicação de um artigo por Riesz em 1916, cujo a tradução para o alemão foi publicada em 1918 sob o título *Über lineare Funktionalgleichungen*[33]. Esse trabalho constituiu-se como sendo o primeiro no qual foi dada uma definição geral de um subspaço vetorial normal e fechado de funções:

> Chamamos [o conjunto de funções contínuas de [a,b] em R] para ser breve, o espaço funcional. Além disso, chamamos Norma de $f(x)$ o valor máximo de $|f(x)|$, e denotamos por $\|f(x)\|$; a magnitude $\|f\|$ é, portanto, sempre positiva e zero apenas de $f(x)$ for sempre zero. As seguintes relações são válidas:
>
> $$\|cf\| = |c|\,\|f\|;\ \|f1 + f2\| \leq \|f1\| + \|f2\|$$
>
> Chegamos agora a um problema semelhante para transformações lineares. Uma transformação T, que associa a cada elemento de f de nosso espaço funcional outro elemento $T(f)$, será dita linear, quando distributiva e limitada. A transformação é considerada distributiva se as seguintes propriedades forem válidas para qualquer f:
>
> $$T[cf] = cT[f], T[f_1 + f_2] = T[f_1] + T[f_2]$$
>
> E T é dito ser limitado quando há uma constante M, tal que, para todo f:
>
> $$\|T(f)\| \leq M\|f\|$$
>
> (RIESZ, 1918 apud DORIER, 1995b, p. 257, traduzido pelo autor).

Nesse sentido, Riesz estabeleceu as bases do que conhecemos hoje como teoria de operadores compactos Riesz-Fredholm. Além disso, ainda que seu trabalho estivesse assentado em espaços de funções contínuas em um intervalo compacto real, seus resultados poderiam ser generalizados para outros espaços funcionais, uma vez que na maior parte das vezes apenas definições axiomáticas são utilizadas. Em 1921, Eduard Helly (1884 – 1943) deu uma abordagem formal para resolver os

---

[33] Sobre equações funcionais lineares

sistemas infinitos de equações lineares e usou os Espaços Vetoriais Normados de dimensão finita e infinita. (DORIER,1995b; 2000).

É nesse contexto que, durante a década de 1920, os trabalhos de Hans Hahn, Norbert Wiener e Stefan Banach emergiram. A descoberta, de maneira independente, da noção de um Espaço Vetorial Normado, a partir do interesse em generalizar propriedades algébricas e topológicas de vários espaços, forneceram importantes contribuições ao processo de axiomatização dos Espaços Vetoriais. Vale ressaltar que embora o trabalho de Banach tenha sido anterior aos dos outros dois matemáticos, ele será estudado por último tendo em vista que, segundo Moore (1995), forneceu as contribuições mais decisivas.

Em 1920, Wiener foi o primeiro a publicar um artigo apresentando axiomas para um Espaço Vetorial Normado nas atas do Congresso Internacional de Matemáticos em Estrasburgo, em cujo propósito era determinar os espaços gerais nos quais os conceitos de limite sequencial, vizinhança e homeomorfismo concordavam. Wiener definiu o que chamou de 'sistema vetorial' ou 'sistema (Ve)' como um conjunto K de pontos e um conjunto σ de vetores com operações $\overline{\oplus}$ (adição de vetores), $\circ$ (multiplicação escalar) e $\|\quad\|$ (norma) que satisfaziam 14 axiomas, os quais definiam algo semelhante a um Espaço Vetorial Normado, sem a noção de completude (MOORE, 1995; DORIER, 2000).

Segundo Moore (1995), o sistema de Wiener detinha algumas falhas como a não afirmação da comutatividade, associatividade e identidade em $\overline{\oplus}$ que era algo esperado que se fizesse, e ainda a operação $n \circ \alpha$ foi definida apenas para os números reais não negativos n, e assim, ele não considerou o inverso de sua adição vetorial. Wiener deu alguns exemplos de um Espaço Vetorial Normado, a saber, o espaço euclidiano n dimensional, o espaço de Hilbert, o espaço de funções reais contínuas em um intervalo fechado e o espaço de sequências reais limitadas. Em 1922, ele publicou mais dois artigos sobre a temática e apresentou uma nova noção que chamou de 'sistema vetorial restrito' ou 'Vr', que era um sistema Ve no qual, entre outras coisas, a lei comutativa era válida.

Em 1922, inspirado nos trabalhos de Helly acerca dos axiomas de um espaço euclidiano n-dimensional e espaço dimensional infinito de sequências, Hahn publicou a noção de um Espaço Vetorial Normado que ele chamou de Espaço Linear, e ainda definiu completude métrica, o que possibilitou a emersão da noção de um Espaço

Vetorial Normado Completo. Os axiomas de Hahn da parte algébrica da estrutura eram semelhantes aos axiomas modernos e a definição de norma era idêntica à de Helly, também moderna. Vale ressaltar que a axiomatização não era o real objetivo de Hahn, mas sim a unificação em uma teoria geral dos problemas de equações funcionais e diferenciais (MOORE, 1995; DORIER, 2000).

De acordo com Moore (1995), a maior parte do artigo de Hahn foi dedicada a discutir 21 diferentes Espaços Vetoriais Normados (os quais eram espaços de função) e as transformações lineares nesses espaços com aplicações. Sua preocupação era com as condições equivalentes à convergência de sequências de pontos nesses espaços (ele não os chamou de vetores), isto é, estava interessado em sequências limitadas ou convergentes de operadores em tais espaços. Em 1927 Hahn voltou a discutir seus Espaços Vetoriais Normados Completos, ao trabalhar com sistemas lineares de equações nestes, a partir de problemas de equações integrais. Seus resultados foram apresentados em termos de subespaços lineares de Espaços Vetoriais Normados.

Um fato interessante no segundo artigo de Hahn consiste na enunciação da sua versão do teorema que ficou conhecido por Hahn-Banach: "Frase III. Seja R_0 um subespaço linear completo de R e $f_0(x)$ uma forma linear em R_0 da inclinação M. Então, há uma forma linear $f(x)$ em R da inclinação M, que substitui F_0 em R_0" (HAHN, 1927, p. 217 apud DORIER, 2000, p. 66, traduzido pelo autor). Além disso, Hahn iniciou nesse mesmo trabalho o estudo do espaço dual ou adjunto, em um sentido topológico, de um Espaço Vetorial Normado completo V, isto é, o espaço de todos os funcionais de valor real contínuos limitados em V (MOORE, 1995).

No ano 1920 Banach defendeu sua tese de doutorado intitulada *Sur les opérations linéaires dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*[34], contudo, apenas a publicou parcialmente em francês no ano de 1922, tendo este trabalho sido mais influente no meio acadêmico em detrimento dos escritos de Hahn e Wiener (DORIER, 2000). O objetivo de Banach foi o de estabelecer alguns teoremas válidos para diferentes campos funcionais e para isso utilizou uma abordagem axiomática semelhante a que utilizamos hoje.

Em seu trabalho, Banach se dedicou ao estudo dos Espaços Vetoriais Normados Completos (que conhecemos hoje por Espaços de Banach) e apresentou

[34] Sobre operações lineares em conjuntos abstratos e sua aplicação em equações integrais

três conjuntos de axiomas que os caracterizava. O primeiro conjunto continha 13 axiomas que definia a noção de espaço vetorial sobre os reais e mostrou alguns exemplos, tais como as formas grassmannianas, os quatérnios, os sistemas numéricos hipercomplexos e vetores na forma tradicional. O segundo grupo de axiomas referia-se ao de uma norma e o terceiro era que todas as sequências de Cauchy convergiam (MOORE, 1995).

Segundo Dorier (2000), a maior parte do trabalho de Banach de 1922 esteve concentrada no estabelecimento de resultados gerais sobre operadores lineares em seu espaço, tendo este mostrado que vários conjuntos funcionais satisfaziam a lista de axiomas dada, a saber, o conjunto de funções contínuas; espaços L^p; os conjuntos de funções mensuráveis limitadas; funções cujas (n-1) primeiras derivadas são absolutamente contínuas e a n-ésima derivada é contínua ou L^p, etc. Não foram apresentadas aplicações, embora em seu trabalho original essas aplicações estivessem presentes.

Apesar dos resultados apresentados na publicação do recorte de sua tese de doutoramento, esse trabalho obteve uma influência limitada. Banach só voltou a discutir a referida temática em 1932, após Maurice Fréchet (1878 – 1973) ter lançado luz sobre os Espaços de Banach. Em tal publicação encontra-se uma estrutura geral e a maioria dos resultados em análise funcional axiomática geral e Álgebra Linear de dimensão infinita, tendo sido esta publicação um grande sucesso entre os matemáticos da época e possibilitado novas perspectivas de estudo nesses dois campos (DORIER, 1995b). Veremos quais foram as percepções de Fréchet quanto aos resultados conhecidos em Análise Funcional.

Fréchet foi o primeiro matemático a chamar atenção aos recém descobertos Espaços Vetoriais Normados no contexto da Análise Funcional, a partir da publicação de dois artigos em 1925. Em seu primeiro trabalho, ele comparou os sistemas de axiomas de Wiener e Banach e adotou uma definição própria que combinava as vantagens de ambos, ainda que salientasse que a noção de Espaço Vetorial tivesse sido axiomatizada anteriormente por Pincherle em 1901. De Wiener, Fréchet conservou a distinção entre uma estrutura afim e uma vetorial, contudo, estava mais próximo da abordagem axiomática de Banach (DORIER, 2000).

Em seus trabalhos, Fréchet definiu axiomaticamente as noções de espaço vetorial abstrato e espaço vetorial afim, aos quais também deu definições geométricas, e ainda definiu uma noção mais geral de espaço topológico afim (não necessariamente normado), tendo apresentado vários exemplos destes. O objetivo de Fréchet era, de modo geral, a generalização de Espaços Vetoriais Normados, os quais eram espaços métricos, a fim de incluir determinados espaços funcionais interessantes que não eram espaços métricos. Assim, esses espaços topológicos afins foram o primeiro vislumbre da importante noção de Espaço Vetorial topológico formulado anos depois (MOORE, 1995).

Em 1928, Fréchet publicou um livro na coleção editada por Borel que fora dedicada à teoria das funções intitulado *Les espaces abstraits et leur théorie générale considérée comme Introduction à l'analyse générale*[35]. Nessa obra Fréchet apresentou um relato histórico sobre o desenvolvimento das principais noções da constituição da Análise Funcional, e ainda fez uma comparação com a geometria, explicitando a vantagem da definição axiomática dos Espaços Vetoriais em detrimento do uso de coordenadas, tanto em espaços de dimensão finita quanto em espaços de dimensão finita (DORIER, 2000).

Banach retomou o estudo acerca dos seus espaços em 1929, a partir da publicação de dois artigos sobre extensões de funcionais lineares. O interesse de Banach estava relacionado com a generalização de seus espaços por meio de grupos topológicos, ou seja, grupos (G, *, $^{-1}$) que possuem uma topologia que torna as operações * e $^{-1}$ contínuas. Após as observações de Fréchet sobre seus escritos de 1922, ele definiu a noção de Espaços F como um Espaço Vetorial que é também um espaço métrico completo, sequencialmente contínuo em cada argumento de sua multiplicação escalar, tal que para sua métrica d(x,y) = d(x-y, 0). Vale ressaltar que estes não eram iguais aos Espaços de Fréchet (MOORE, 1995).

A grande contribuição de Banach encontra-se na publicação de seu livro em 1932 intitulado *Théorie des opérateurs linéaires*[36], o qual tratou sobre a teoria dos funcionais lineares e unificou e simplificou resultados obtidos por ele. Diferente de seus escritos anteriores, nos quais ele havia considerado apenas as propriedades que dependiam da norma ao introduzir Espaços Vetoriais Normados, em seu livro ele tomou os Espaços Vetoriais arbitrários (reais). Além disso, Banach definiu uma base H (Hamel) para um espaço vetorial E como um conjunto de vetores, de modo que

[35] Espaços abstratos e sua teoria geral considerados como introdução à análise geral
[36] Teoria dos operadores lineares

cada vetor de E pudesse ser escrito como combinação linear única de finitos vetores em H, o que lhe permitiu afirmar que todo espaço vetorial tem uma base e que quaisquer duas bases terão a mesma cardinalidade (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), é nesse livro que Banach apresentou a primeira definição de Espaços Vetoriais sobre os números reais como um tópico distinto, em caráter generalista axiomático e sem consideração de uma norma ou restrição a uma dimensão finita. Além disso, ele também apresentou sua versão do Teorema de Hahn-Banach, que se tornou definitiva posteriormente:

> Se um funcional p(x) em um espaço vetorial E é subaditivo e homogêneo, e se um funcional f(x) é aditivo e homogêneo em um subspaço K de E, e se $f(x) \leq p(x)$ em K, então f(x) pode ser estendido a um F(x) funcional que é aditivo e homogêneo em E e tal que $F(x) \leq p(x)$ em E (BANACH, 1932 apud MOORE, 1995, p. 288, traduzido pelo autor).

Desse modo, ainda em acordo com Moore (1995), Banach dedicou um capítulo inteiro ao estudo dos Espaços F e, como aplicação dos métodos apresentados por ele, deduziu um resultado clássico em análise: ‘A existência de uma função contínua não diferenciável em um conjunto de medida positiva’ (p. 289). Assim, Banach possuía uma ordenação de generalizações do espaço euclidiano e conseguiu provar um grande número de teoremas altamente abstratos relacionando-as.

Os Espaços Vetoriais Normados continuaram a ser estudados dentro da álgebra topológica e forneceram bases para a constituição da importante noção de módulo topológico. Em 1934, Andrei Kolmogorov (1903 – 1987), com base na obra de Banach, foi o primeiro a definir de maneira mais restrita um Espaço Vetorial topológico, exigindo ainda que esse espaço tivesse uma topologia no qual a adição e a multiplicação escalar fossem contínuas. Assim, tais espaços forneceram uma estrutura natural para generalizar os Espaços Vetoriais Normados na perspectiva dos grupos topológicos (MOORE, 1995).

Em 1935, de maneira independente, John Von Neumann (1903 – 1957) também desenvolveu a noção de Espaço Vetorial Topológico ao generalizar completude de espaços métricos para espaços topológicos. Contudo, umas das grandes contribuições de Van Neumann foi ter possibilitado a emersão da definição moderna dos Espaços de Hilbert. Foi ele quem primeiro tratou esses espaços axiomaticamente em 1927 quando tentou estabelecer bases matemáticas consistentes e rigorosas para a mecânica quântica. Nesse período, duas abordagens diferentes coexistiram. O primeiro modelo era alicerçado no uso de sequências e matrizes infinitas e o segundo na noção de função de onda (MOORE, 1995).

O problema matemático presente em ambos os modelos era resolver uma equação funcional que levasse a um problema de autovalor, que poderia ser abordado por sistemas infinitos no primeiro modelo (l^2) ou por operadores em um espaço funcional (L^2) no segundo. Von Neumann estudou os dois métodos detalhadamente ao resolver o problema e mostrou analogias, fato que o conduziu aos aspectos de um Espaço de Hilbert e assim ele o definiu como um Espaço Vetorial de dimensão infinita complexo com um produto interno sendo completo e separável, isto é, existe uma família contável de vetores sendo densos (DORIER, 2000).

Segundo Moore (1995), após perceber que a o complexo espaço de Hilbert de sequência somadoras quadradas tinha as mesmas propriedades formais que um certo espaço de funções duas vezes diferenciáveis, Von Neumann buscou caracterizar esses espaços a partir de propriedades comuns e descrever os que possuíam todas as características dadas como espaço abstrato de Hilbert. Em seu trabalho, ele apresentou cinco axiomas e o definiu o Espaço de Hilbert como um espaço linear (isto é, um Espaço Vetorial complexo) com a forma bilinear Hermetiana (ou seja, um produto interno complexo), o que o tornou um espaço métrico considerado separável, completo e infinito dimensional.

Em 1930, Von Neumann retornou ao estudo desses espaços e publicou um artigo sobre operadores Hermitianos no Espaço de Hilbert e ratificou seus cinco axiomas apresentados em 1927. Em 1935 a noção moderna de Espaço de Hilbert emergiu, quando Fréchet publicou um estudo que investigou as condições sob as quais um Espaço Vetorial Normado E é isométrico para abstrair o espaço de Hilbert, chegando à conclusão de que a condição é que todo subespaço linear de E com dimensão de no máximo três seja isométrico a um espaço euclidiano. Nesse sentido, foi introduzido a noção de ‘Espaço de Hilbert generalizado’ definido como um Espaço Vetorial complexo completo com um produto interno, ou seja, a noção moderna, e ainda foi descartado a possibilidade de dimensão infinita (MOORE, 1995b).

Segundo Moore (1995b), a importante contribuição dada pela constituição da noção moderna dos Espaços de Hilbert foi ter possibilidade a continuidade de uma tendência existente há alguns anos e que agora tinha ganhado forças, a saber, tentar provar teoremas sobre esses espaços com o menor número de suposições possíveis. Em 1932 Felix Hausdorff (1868 – 1942) questionou quais resultados conhecidos para os Espaços de Banach teriam validade nos Espaços Vetoriais Normados em geral e em 1934 Heinrich Lówig (1904 – 1995) provou que teoremas antes validados apenas nos Espaços de Hilbert eram também verdadeiros para qualquer espaço euclidiano, isto é, qualquer Espaço Vetorial com produto interno.

Tais aspectos foram primordiais para a definição de um Espaço Vetorial em sua generalidade, sendo o campo da Álgebra Moderna, mais precisamente a noção de módulo topológico, o contexto no qual isso foi possível. Discorremos mais detalhadamente sobre essas questões na seção a seguir.

2.5. A NOÇÃO DE MÓDULO TOPOLÓGICO E A DEFINÇÃO DE ESPAÇO VETORIAL

Até o presente momento discutimos os contextos geométricos e analíticos nos quais os Espaços Vetoriais se constituíram, porém as raízes desses espaços também podem ser encontradas no campo da Álgebra Moderna, a partir do conceito de módulo topológico. O primeiro matemático a referir-se ao termo módulo, não ao seu conceito moderno, foi Richard Dedekind (1831 – 1916) em seu trabalho acerca da teoria algébrica dos números, publicado em 1871 no 10º suplemento às palestras de Johann Dirichlet (1805 – 1859) sobre teoria dos números. Dedekind introduziu a noção de um ideal sobre o conjunto *o* de inteiros algébricos em um campo de números algébricos **Ω**, definindo um subconjunto A de *o* como ideal se fechado sob adição, subtração e sob multiplicação por um membro de *o* (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), de uma perspectiva moderna, podemos afirmar nesse contexto que A trata-se de um módulo sobre o anel *o*, porém o significado de módulo empregado por Dedekind foi para se referir a um subconjunto M dos números complexos fechado sob adição e subtração, utilizando a notação $a \equiv b\ (modM)$ para significar a – b ϵ M cujo a inspiração veio da notação de Gauss. Ele dedicou atenção a esses campos **Ω** de números algébricos com o que ele chamou de ‘base’, isto é, de modo que **Ω** fosse combinações lineares de n elementos independentes com coeficientes racionais, o que – em termos modernos – se constitui um espaço vetorial n-dimensional sobre os racionais, porém até o presente momento tal conceito não havia sido formalizado.

Dedekind também apresentou a definição de 'módulo finito' M como combinações lineares de n números algébricos com coeficientes inteiros, e a esses n números inteiros ele denominou 'base' para o módulo, o que conduz a ideia de que M era um módulo gerado finitamente sobre os inteiros, em termos atuais. Se faz necessário ressaltar que a base discutida era para o módulo e não para o campo e por esse motivo ele permitiu que esta fosse linearmente dependente. Dedekind também introduziu a noção restrita de anel (ele chamou de 'Ordnung') como sendo um módulo contendo 1 e fechado para multiplicação, sendo esse 'Ordnung' fechado para adição, subtração e multiplicação (MOORE, 1995).

Em 1882, Dedekind publicou em parceria com Heinrich Weber (1842 – 1913) um artigo no qual estendeu as ferramentas usadas no estudo do campo dos números algébricos complexos de dimensão finita sobre os racionais para campos de função algébrica, com o propósito de dar uma fundamentação rigorosa para a teoria de Riemann das funções algébricas de uma variável complexa. Eles definiram um campo de funções algébricas como um sistema de funções algébricas (de uma variável complexa Z) fechado sob adição, subtração, multiplicação e divisão, com a restrição de considerar os campos **Ω** que eram n-dimensionais sobre o campo das funções racionais (MOORE, 1995).

Dedekind e Weber também transpuseram a noção de módulo para o contexto das funções algébricas, definindo o módulo de uma função como um subsistema de **Ω** que era fechado para adição e subtração, bem como sob multiplicação por qualquer polinômio em **Z**, o que em termos modernos figura um módulo sobre o anel polinomial complexo $\mathbb{C}_{[z]}$. Por volta de 1892 Weber, no contexto da teoria de Galois, unificou as diferentes noções de campo anteriormente trabalhas por Dedekind, tais como, campo de número algébrico, campo de função algébrica, campo finito, e introduziu o conceito abstrato moderno de campo por um viés axiomático, porém esses campos nem sempre tinham a característica zero (MOORE, 1995).

Hilbert se dedicou ao módulo de Dedekind em 1897 e chegou às seguintes definições: um campo de número algébrico K foi fechado sob adição, subtração, multiplicação e divisão; um anel era um conjunto de inteiros algébricos de K fechado sob adição, subtração e multiplicação; e um módulo era tal conjunto fechado sob adição e subtração. Um ideal era intermediário, sendo fechado sob adição e subtração, e ainda fechado sob multiplicação pelos inteiros algébricos de K. Em 1910, Ernst Steinitz (1871 – 1928) também estudou os espaços abstratos de Weber usando a noção de independência linear, a partir do que ele chamou de dependência algébrica e transcendental (MOORE, 1995).

À Emmy Noether (1882 – 1935) é creditado o mérito do pioneirismo em apresentar os conceitos modernos de anel, de ideal e de módulo sobre um anel no ano de 1921 em seu artigo intitulado *Idealtheorie in Ring-bereichen*[37], no qual ela estendeu a noção de ideal de campos de números algébricos e anéis polinomiais para todos os anéis comutativos que satisfaziam o que ela chamou de 'condição de finitude', isto é, tendo a propriedade que todo ideal foi gerado finitamente. Noether definiu módulo utilizando um domínio duplo (Σ, T) em que Σ era um anel e T foi definido como o que agora conhecemos por módulo sobre Σ, o que possibilitou tomar as condições para um espaço vetorial sobre um campo utilizando apenas um anel e eliminar o axioma que requer 1 . x = x para multiplicação escalar. Além disso, ela definiu um módulo em (Σ, T) como qualquer subconjunto M de T fechado para subtração e multiplicação à esquerda por um elemento de Σ (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), a preocupação de Noether com a teoria algébrica dos números na perspectiva de Dedekind tornou natural para ela formular a noção de um módulo sobre um anel, bem como restringir sua atenção aos módulos que eram finitos, isto é, gerados finitamente. Assim como Dedekind, ela chamou um conjunto A de 'base' para um módulo se A for finito e gera o módulo, sem que os elementos de A devessem ser linearmente independentes. Os ideais ocuparam uma posição mais presente do que os módulos no trabalho de Noether, contudo, eles foram primordiais em um artigo publicado anos depois que caracterizou abstratamente aqueles anéis cuja teoria ideal concorda com a do anel de inteiros de um campo algébrico, e possibilitou a reformulação de uma álgebra sobre um campo.

A noção moderna de uma álgebra sobre um campo evoluiu a partir da ideia de uma álgebra associativa linear ou sistema numérico complexo no século XIX. Vale lembrar que essas álgebras eram consideradas somente sobre os números reais ou complexos, e não sobre um campo arbitrário, além de ser de dimensão finita. A noção moderna é em termos de espaços vetoriais e anéis, pois A é uma álgebra sobre um campo F se A é um espaço vetorial sobre F e também é um anel com unidade, no

[37] Teoria ideal em domínios de anel

qual a adição do vetor e a multiplicação escalar coincidem com as operações correspondentes no anel (MOORE, 1995).

Em 1903, Leonard Dickson (1874 – 1954) foi o primeiro a apresentar o conceito de álgebra de dimensão finita sobre um campo arbitrário F ao invés de sobre os números reais ou complexo e o fez de duas formas. A primeira foi na forma tradicional do século XIX como uma tabela de multiplicação para n elementos linearmente independentes em relação a F, e a segunda foi em termos de n-uplas de elementos de F, no qual a adição e subtração foram definidas a partir de suas coordenadas. Embora a multiplicação não tenha sido definida dessa forma, ela foi considerada uma operação primitiva exigida para ser associativa, ter elemento de identidade à direita e satisfazer uma certa condição nos divisores zero à esquerda. Dickson se dedicou a evidenciar a independência de seus postulados (MOORE, 1995).

Em 1923 Dickson publicou um livro influente que tratava de álgebras sobre um campo e deu uma definição totalmente nova que diferia das de seus contemporâneos e até mesmo de sua definição dada em 1903. Para Dickson, uma álgebra A sobre um campo F era um sistema que consistia em duas operações em A, adição e multiplicação, e uma terceira operação entre F e A, isto é, uma multiplicação escalar. A associatividade foi assumida para as três operações e a comutatividade para as duas últimas. A multiplicação escalar foi considerada distributiva em relação à adição em A e à adição de campo. Por fim, Dickson supôs que a álgebra tinha uma base finita, e não mencionou anéis, módulos ou vetores, apesar de as matrizes exercerem um papel importante em sua obra (MOORE, 1995).

No ano de 1929, Emmy Noether publicou um artigo sobre álgebras de dimensão finita no qual apresentou a definição moderna de módulo sobre um anel de maneira mais simples do que havia feito em 1921. Seu propósito era reunir a teoria das álgebras com a teoria das representações de grupo, que havia sido unificada na obra de Frobenius, mas que se perdeu no caminho. Para que isso fosse possível seria necessário tratar ambas as teorias como casos especiais da teoria dos anéis não comutativos que satisfazem certas condições de finitude e investigar certas classes de módulos. Nesse sentido, ela desenvolveu uma teoria ideal para anéis não comutativos e mostrou que um módulo gerado finitamente sobre anel de divisão tem uma base (MOORE, 1995).

Segundo Moore (1995), o cerne da abordagem de Noether para álgebras encontra-se na noção de um grupo abeliano com operadores, isto é, um grupo de homomorfismo entre um grupo abeliano em si mesmo. Nesse mesmo ano, ela apontou que cada módulo sobre um anel é um grupo abeliano com operadores, e assim, a teoria dos grupos passou a ser estrutura dentro da qual a teoria dos módulos e a teoria das álgebras eram estudadas. Um dos aspectos marcantes na obra de Noether diz respeito a uma nota de rodapé:

> Como B. L. Van der Waerden me comunicou, pode-se obter uma conexão invariável, independente da escolha específica da base, separando os conceitos de transformação linear e matriz. Uma transformação linear é um homomorfismo de dois módulos de formas lineares; uma matriz é uma expressão (a representação) desse homomorfismo por uma escolha definida de base (NOETHER, 1929 apud MOORE, 1995, p. 300, traduzido pelo autor).

Em acordo com Moore (1995), a referida nota explicita a relação moderna essencial entre as noções de transformação linear, matriz e módulo (ou espaço vetorial) que, dois anos depois, seriam apresentadas de maneira mais clara para um público maior no livro de Van der Waerden (1903 – 1996).

Em 1927, Van der Waerden começou a trabalhar com a geometria algébrica, a qual era seu objeto de estudo, usando as ferramentas desenvolvidas por Noether em sua formulação da teoria dos zeros dos ideais polinomiais. Em 1930 e 1931 ele publicou os dois volumes de seu livro *Moderne Algebra*[38], produzido com base em palestras ministras por Emmy Noether e Emil Artin (1898 – 1962), livro este que foi altamente influente. No primeiro volume, ele definiu um módulo como um grupo abeliano aditivo com um domínio de operadores (isto é, um homomorfismo) que forma um anel e satisfaz certos axiomas (MOORE, 1995).

No segundo volume, Van der Waerden dedicou um capítulo inteiro aos módulos, mais precisamente aos módulos unitários finitamente gerados que têm uma base, que ele chamou módulos de formas lineares sobre um anel K. Ele percebeu que um módulo M de formas lineares é caracterizado pela cardinalidade (finita) n de sua base e por seu anel K. Os elementos de M poderiam ser considerados n-uplas, os quais foram nomeados como ‘vetores’. O referido capítulo, intitulado ‘Álgebra Linear’, explicita a álgebra linear como o estudo de módulos sobre um anel e seus

[38] Álgebra Moderna

homomorfismos (transformações lineares), os quais são escritos na forma de matrizes quando o módulo tem uma base finita (MOORE, 1995).

Em 1937, Van der Waerden publicou o primeiro volume da segunda edição do seu livro com uma seção inédita intitulada *Espaços Vetoriais e sistemas hipercomplexos* dentro do capítulo de anéis e campos. Ele levou em consideração a noção de uma álgebra sobre um anel, percebendo que o anel era geralmente, apesar de não necessariamente, um campo. Ele concluiu introduzindo o conceito de álgebra de dimensão infinita e deu anéis polinomiais como exemplo. Anos depois, Van der Waerden expandiu essa seção sobre módulos para um capítulo inteiro voltado aos Espaços Vetoriais em um anel de divisão. Desse modo, a Álgebra Linear, passou a ocupar uma posição de destaque em seu livro (MOORE, 1995).

Ainda que, como discutido anteriormente, os Espaços Vetoriais tivessem sido finalmente definidos em sua generalidade e unificação, a questão de difusão da teoria entre os matemáticos e sua transposição para o ensino ainda estava sendo discutida. Em meados da década de 1930 a Alemanha estava mais a frente desse intento, contudo, com a ascensão de Hitler, muitos matemáticos fugiram para outras partes da Europa e América, em especial para os Estados Unidos, influenciando assim as instituições educacionais por onde estiveram. Álgebra Moderna e Análise funcional foram campos que sofreram grandes influências dos matemáticos alemães. Nesse sentido, Garrett Birkhoff (1911 – 1996) e Saunders Maclane (1909 – 2005) foram matemáticos estadunidenses que inseriram a perspectiva alemã em seus estudos e que resultou na publicação de sua obra mais famosa (DORIER, 2000).

Durante os anos de 1937 e 1938, Birkhoff ensinou álgebra em um curso de graduação em Harvard e o fazia por meio de uma abordagem axiomática de espaços vetoriais sobre um campo. As matrizes foram inseridas na forma de operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão finita. Entre 1939 e 1940, Maclane também ministrou o mesmo curso, e igualmente a Birkhoff tratou conceitualmente os espaços vetoriais e as transformações lineares. Em 1941, Birkhoff e Maclane publicaram a primeira edição de sua pesquisa sobre Álgebra Moderna, com base em suas notas de cursos ministrados, sob o título *A Survey of Modern Algebra*[39], sendo este considerado um dos primeiros livros universitários no qual a álgebra moderna fora apresentada à este nível de ensino (MOORE, 1995).

---

[39] Um estudo de Álgebra Moderna

Em 1942, Paul Halmos (1916 – 2006) publicou seu livro intitulado *Finite-Dimensional Vector Spaces*[40], tendo por objetivo, diferentemente de Birkhoff e Maclane, não essencialmente algébrico, mas sim apresentar aos alunos o Espaço Abstrato de Hilbert, enfatizando os aspectos geométricos da análise funcional:

> Meu objetivo é enfatizar as noções geométricas simples comuns a muitas partes da matemática e suas aplicações, e fazer isso em uma linguagem que revele os segredos comerciais e diga ao aluno o que se passa na mente das pessoas que provam teoremas sobre equações integrais e espaços de Banach (HALMOS, 1942 apud DORIER, 2000, p. 71, traduzido pelo autor)

Ainda em acordo com Dorier (2000), A Survey of Modern Algebra e *Finite-Dimensional Vector Spaces* constituíram-se em duas grandes influências no ensino universitário da Álgebra Linear nos Estados Unidos e em muitos outros países do mundo.

2.6. CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Diante do que foi discutido nesse capítulo, é possível observar que apesar da Álgebra Linear ser concebida como uma disciplina relativamente nova no meio acadêmico, cuja implementação no ensino iniciou a partir dos anos de 1930, os conteúdos que a compõem têm suas origens desde os tempos das civilizações antigas. Além disso, suas raízes encontram-se em diversos contextos e momentos da história da Matemática, o que ratifica a conceituação dada por Dorier *et. al.* (1994) como uma disciplina unificadora e generalizante de conceitos e objetos existentes ao longo do tempo, e assim explicita a linguagem formal e axiomática como uma ferramenta universal e necessária ao fazê-lo.

O tratamento intuitivo dos sistemas de equações lineares no início do século XVIII foi o marco inicial da emersão de conceitos subjacentes à Álgebra Linear, mais precisamente, Dependência, Posto e Dualidade. Entretanto, a adoção dos determinantes em problemas envolvendo sistemas de equações lineares resultou em uma superposição do caráter operatório em detrimento do intuitivo, e não permitiu que novas ideias pudessem ser descobertas. Posteriormente, com a unificação das equações e n-uplas como objetos de mesma natureza com relação a linearidade, os determinantes foram usados com mais ênfase em problemas desse tipo, e ainda

---

[40] Espaços vetoriais de dimensão finita

forneceram bases para a constituição das matrizes, que tiveram papel fundamental na representação das transformações lineares entre os Espaços Vetoriais.

A geometria também se constituiu como terreno fértil no qual as ideias relacionadas a Álgebra Linear foram desenvolvidas. A busca por um cálculo geométrico intrínseco proposto por Leibniz, em contraposição a arbitrariedade da escolha de coordenadas na Geometria Analítica, foi perseguida por muitos matemáticos e possibilitou grandes contribuições ao cálculo vetorial e até mesmo aos Espaços Vetoriais. Os esforços empreendidos pelos matemáticos na representação das quantidades imaginárias para a sua legitimação foi de grande contribuição, haja vista que culminou no nascimento dos sistemas de William Hamilton e de Hermann Grassmann. Tais sistemas, de modo geral, foram tomados como subsídios por outros matemáticos para as primeiras noções axiomáticas em Álgebra Linear.

Apesar de Grassmann ter definido alguns conceitos referentes a Álgebra Linear em seus trabalhos de uma forma mais generalizada, as abordagens axiomáticas destes tiverem que ser redescobertas outras duas vezes para que finalmente fossem aceitas pela comunidade matemática. Na segunda, os Espaços Vetoriais sobre os números reais foram denominados de sistemas lineares e assim os matemáticos empenharam-se em apresentá-los por meio de uma abordagem axiomática que pudesse evidenciar suas aplicabilidades e pertinência diante dos problemas da época. Contudo, muitos desses trabalhos não ultrapassaram os muros de seus países de origem e assim não obtiveram uma grande notoriedade diante da comunidade acadêmica internacional.

Os Espaços Vetoriais foram redescobertos uma terceira vez no contexto da Análise Funcional, juntamente com o surgimento dos Espaços de Banach (Espaços Vetoriais Normados Completos) e dos Espaços de Hilbert (Espaço Vetorial dotado de produto interno), por meio também de uma abordagem axiomática que permitiu a unificação e generalização de diversos contextos, dentro os quais, o das funções. Paralelamente a isso, Álgebra Moderna também figurou como contexto de amadurecimento e consolidação de uma definição de Espaço Vetorial como um módulo topológico sobre um anel. Essa definição permitiu que a Álgebra Linear fosse concebida como a área que estuda os módulos sobre um anel e seus homomorfismos, que conhecemos por transformações lineares, os quais são representados por matrizes quando o módulo tem uma base finita.

Desse modo, diante da constituição histórica de conceitos da Álgebra Linear apresentada, foi possível identificar diferentes noções concebidas ao longo do tempo e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear. No próximo capítulo, discutimos cada uma dessas noções, de modo a traçar sugestões didáticas sobre como abordá-las em cursos de Álgebra Linear, a fim de amenizar as dificuldades dos alunos quanto a aprendizagem desses mesmos conceitos, bem como de oportunizar a compreensão do caráter unificador e generalizante, alcançado por meio da linguagem formal e axiomática, com a qual são trabalhados.

Capítulo 3

Noções precedentes dos conceitos de dependência e independência linear

Neste capítulo, apresentamos diferentes noções concebidas por matemáticos ao longo do tempo e do espaço e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, bem como discutimos de que forma essas noções podem ser vetorizadas em cursos de Álgebra Linear na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual. É pertinente ressaltar que tais noções foram identificadas por nós no decurso da construção do desenvolvimento histórico da Álgebra Linear, exibida no capítulo anterior, e assim encontram-se no marco temporal que vai do século XVIII a meados dos anos de 1930.

3.1. LEONHARD EULER E A NOÇÃO DE DEPENDÊNCIA INCLUSIVA

Filho do Paulus Euler e Margaretha Brucker, Leonhard Paul Euler (ver figura 02) nasceu na cidade de Basiléia, ao norte da Suíça, no dia 15 de abril de 1707, onde passou sua infância e juventude. Embora tendo sido conduzido por seu pai, um pastor calvinista, a seguir carreira filosófica e teológica, Euler mostrava-se habilidoso com a Matemática, fato este que chamou atenção de Johan Bernoulli (1666 – 1748), professor na universidade de Basiléia, e o fez convencer Paulus a instruir Euler nos caminhos da Matemática. Em 1723, aos seus 16 anos, Euler recebeu o grau de mestre com a tese na qual comparou as filosofias de Descartes e de Newton. Euler iniciou sua carreira ao escrever seus primeiros tratados de maneira independente em Matemática e passou a ser notado pela comunidade acadêmica da época (FOSSA E LEÔNCIO, 2013).

O real objetivo de Euler era fazer parte do corpo docente de Matemática da Universidade de Basiléia, contudo não obteve êxito, fato que o fez aceitar em 1727 o convite para ser professor na Academia de São Petersburgo. Euler permaneceu 14 anos em São Petersburgo, onde publicou mais de 50 trabalhos sobre análise infinitesimal, equações diferenciais, cálculo de variações e teoria dos números. No entanto, devido a problemas de cunho pessoal e profissional, em 1741, Euler aceitou o convite para ministrar aulas na Academia de Berlim, na Alemanha, tendo também assumido funções importantes. Nesse período, Euler produziu mais de 350 obras científicas (FOSSA E LEÔNCIO, 2013).

Figura 02: Leonhard Euler

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Ao retornar para Rússia, Euler continuou a produzir diversos trabalhos nas mais diferentes áreas, estima-se que foram escritos mais de 400 trabalhos científicos durante sua segunda estadia em São Petersburgo. Euler casou-se duas vezes e teve treze filhos com sua primeira mulher Katharina Gsell (1707 – 1773), sendo que apenas cinco chegaram a fase adulta. Com sua segunda, esposa Abigail Gsell (1723 – 1793), a qual era irmã de sua falecida mulher, não teve nenhum filho. Euler faleceu em São Petersburgo no ano de 1783, deixando um legado de inúmeros trabalhos em distintas áreas dentro e fora da Matemática, bem como trabalhos inacabados que foram publicados postumamente (FOSSA E LEÔNCIO, 2013).

Conforme discutido no capítulo anterior, em acordo com Dorier (1995b; 2000), a contribuição de Euler à constituição de conceitos referentes à Álgebra Linear remonta a publicação, no ano de 1750, de sua obra intitulada *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Ligna Courbes*, na qual ele estudou o conhecido paradoxo de Cramer e lançou luz sobre a premissa de que um sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas teria uma única solução. Euler percebeu que nem sempre isso era verdade, e para demonstrá-lo fez um estudo analítico e intuitivo de sistemas de equações em que o número de incógnitas era igual ao número de equações e chamou atenção para um 'incidente'.

Euler tomou inicialmente um sistema contendo duas equações, a saber, $3x - 2y = 5$ e $4y = 6x - 10$, e evidenciou que ao tentar resolvê-lo por eliminação e substituição uma incógnita sempre permaneceria indeterminada e salientou o motivo de tal acontecimento:

> Veremos que não é possível determinar as duas incógnitas x e y, pois ao eliminar uma x, a outra desaparece sozinha e obtemos uma equação idêntica da qual nada podemos determinar. A razão para este incidente é primeiro óbvia, uma vez que a segunda equação muda para 6x – 4y = 10, que sendo apenas a primeira 3x – 2y = 5 dobrada, não difere dela (EULER, 1750 apud DORIER, 2000, p. 7, traduzido pelo autor).

Segundo Dorier (1995b), é bem verdade que uma observação trivial como esta, mesmo para a época, fosse notada por outros matemáticos, porém não era suficiente para justificar tal incidente. Este fato, segundo o autor, evidencia o motivo que fez com que Euler tivesse que resolver o sistema para provar suas conjecturas, além do que permite-nos observar que a solução de um sistema era sua real preocupação. Euler ainda apresentou outros exemplos com três equações, sendo um exemplo com duas equações semelhantes e outro em que uma era o dobro da soma das outras duas, porém ao invés de resolvê-los, ele concluiu que:

> Então, quando dizemos que para determinar três incógnitas, basta ter três equações, devemos adicionar esta restrição, que essas três equações diferem tanto uma das outras que nenhuma já esteja incluída nas outras (EULER, 1750 apud DORIER, 2000, p. 8, traduzido pelo autor).

Euler ainda discutiu um exemplo com um sistema contendo quatro equações e observou que, nesse caso, duas incógnitas poderiam não ser determinadas (DORIER, 1995b). Ele tomou o seguinte sistema:

$$5x + 7y - 4z + 3x - 24 = 0$$

$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$

$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$
$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

E ao resolvê-lo percebeu que valeriam apenas duas equações, pois tendo trabalhado com a terceira chegou ao seguinte resultado:

$$x = -13y + 14z - 15v - 16$$

E após substituí-lo na segunda equação, obteve:

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29} \; e \; x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

A substituição do valor de x e y na primeira e na quarta equação levaria a equações idênticas, ou seja, as incógnitas z e v permaneceriam indeterminadas. Novamente percebemos que a prova de Euler é dada em função da resolução do sistema por eliminação e substituição, porém este não salienta nenhuma relação linear entre as equações, apesar de ser possível observar que a diferença entre a primeira e a segunda equação resulta na quarta, ou ainda que a diferença entre a primeira e o dobro da segunda resulta da terceira (DORIER, 1995b).

Após apresentar e discutir todos esses exemplos, Euler apresentou uma condição a ser inserida na premissa de que em um sistema de *n* equações *n* incógnitas seriam suficientes para determiná-las:

> Quando sustentamos que, para determinar n quantidades desconhecidas, é suficiente ter n equações que expressam sua relação mútua, devemos adicionar a restrição de que todas as equações são diferentes umas das outras, ou de que nenhuma das equações está contida nas outras (EULER, 1750 apud DORIER, 1995b, p. 230, traduzido pelo autor).

Assentados em uma visão moderna da Álgebra Linear, visualizaríamos o termo ‘uma equação contida nas outras’, empregado por Euler, como o atual conceito de Dependência e Independência Linear, entretanto, tais conceitos referem-se a uma relação entre vetores emergentes de diferentes naturezas, enquanto que a noção trabalhada por Euler esta imersa em um contexto particular de equações. Desse modo, Dorier (1995b; 2000) defende que Euler, em seus trabalhos sobre sistema de equações, trabalhou com a noção de *dependência inclusiva*.

Segundo Dorier (1995b; 2000), ambas as dependências se equivalem quando trabalhadas no contexto das equações, porém a de Euler é mais local e a noção de Dependência e Independência Linear carrega consigo um caráter unificador e generalizante, uma vez que generaliza e unifica essa definição de dependência para os demais objetos matemáticos, tais como n-uplas, matrizes, funções etc.

Nesse contexto, é possível observar que a inserção desses aspectos concernentes a noção de *dependência inclusiva* de Euler em um primeiro curso de Álgebra Linear poderia trazer relevantes contribuições ao processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência linear, haja vista que a abordagem de tais conceitos por meio do estudo da linearidade em equações encaminhará o aluno a compreensão da dependência como uma relação entre objetos (vetores) e não apenas como um procedimento de verificação executável a partir de um algoritmo memorizável.

Vejamos mais a frente outras noções que também estão relacionadas aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, mas que estiveram inseridas em outros contextos e/ou objetos matemáticos ao longo da constituição da Álgebra Linear.

3.2. FERDINAND FROBENIUS E O TRATAMENTO UNIFICADO PARA EQUAÇÕES E N-UPLAS

Filho de Christian Ferdinand Frobenius e Christine Elizabeth Friedrich, Ferdinand Georg Frobenius (ver figura 03) nasceu em 26 de outubro de 1849 em Charlottenburg, um distrito pertencente à Berlim que não fora incorporado à cidade até 1920. Frobenius estudou entre os anos de 1860 e 1867 no Ginásio Joachimsthal e posteriormente foi para Universidade de Gottingen dar prosseguimento aos estudos, em nível universitário, contudo, após um semestre, retornou à sua terra natal e frequentou a Universidade de Berlim, na qual assistiu palestras de Leopold Kronecker (1823 – 1891), Ernst Kummer (1810 – 1893) e Karl Weierstrass (1815 – 1897). Em 1870, na mesma universidade, ele defendeu sua tese de doutorado sobre equações diferenciais, tendo Weierstrass por orientador e sendo premiado com distinção pela academia (O’ CONNER E ROBERTSON, 2000).

Em 1874, após lecionar no ensino secundário, foi nomeado como professor ordinário de Matemática da Universidade de Berlim, na qual permaneceu por 1 ano até se mudar para Zurique para assumir o cargo de professor ordinário na Eidgenossische Polytechnikum. Frobenius esteve em Zurique de 1875 a 1892, onde estabeleceu família e produziu diversos trabalhos em diferentes áreas da Matemática. Em 1893, após o falecimento de Kronecker, assumiu a cátedra que ficou vaga da Universidade de Berlim e foi eleito para a Academia Prussiana de Ciências. Permaneceu em Berlim até o seu falecimento em 26 de outubro de 1917 (O' CONNER E ROBERTSON, 2000).

Figura 03: Ferdinand Frobenius

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_Georg_Frobenius

Durante sua carreira como matemático, Frobenius ofertou relevantes contribuições ao campo, tais como, à teoria das funções elípticas, às equações diferenciais, à teoria dos números e à teoria dos grupos. Ele é conhecido por suas identidades determinantes conhecidas como fórmulas Frobenius-Stickelberg, que regem as funções elípticas, bem como por ter desenvolvido a teoria das formas biquadradas. Além disso, ele foi o pioneiro na introdução da noção de aproximações racionais de funções, conhecidas hoje por aproximações de Padé, e deu a primeira prova completa para o teorema Cayley-Hamilton. Seu nome também está envolto em certos objetos geométricos diferenciais na física-matemática moderna, chamados de variedades de Frobenius (O’ CONNER E ROBERTSON, 2000).

Conforme dissertado no capítulo anterior, em acordo com Dorier (1995b; 2000), o uso dos determinantes na resolução de sistemas de equações lineares fez com que a análise intuitiva apresentada por Euler fosse substituída por técnicas procedimentais mecânicas, e assim, os conceitos de Posto e de Dualidade demoraram um pouco mais de tempo para amadurecer, uma vez a natureza desses conceitos está diretamente ligada às relações existentes entre o número de incógnitas e o número de soluções de um sistema de equações. Contudo, tais conceitos ainda assim chegaram ao seu desenvolvimento dentro do contexto dos determinantes.

Segundo Baroni (2009), entre os anos de 1840 e 1870 o conceito de Posto se tornou central no estudo dos sistemas lineares durante esse período, porém diferentemente do modo como Euler os tratava, os aspectos operacionais eram mais usuais. Ainda segunda a autora, foi esse conceito que possibilitou um tratamento unificado para equações e n-uplas no que diz respeito a dependência. Georg Frobenius foi o primeiro a apresentar, de forma clara e concisa, uma definição de Dependência e Independência para equações e n-uplas, sem o uso dos determinantes:

> Várias soluções particulares
> $$A_1^{(x)}, \dots, A_n^{(x)}, (x = 1, \dots, k)$$
> deve, portanto, significar independente ou diferente se $c_1 A_\alpha^{(x)} + \cdots + c_k A_\alpha^{(x)}$ não pode ser zero para $\alpha = 1, \dots, n$, sem que todo $c_1, \dots, c_k$ seja igual a zero, ou seja, se a forma k linear para $A_1^{(x)} u_1, \dots, A_n^{(x)} u_n$ são independentes (FROBENIUS, 1875, p. 223 apud DORIER, 2000, p. 12, traduzido pelo autor).

A definição dada por Frobenius permitiu que a noção de *dependência inclusiva* trabalhado por Euler fosse unificada à noção de dependência tratada por ele no contexto das n-uplas. Ao considerar equações e n-uplas como o mesmo tipo de objeto em relação à linearidade, ele avançou significativamente em direção ao conceito moderno de vetor. Além disso, a abordagem de Frobenius foi totalmente diferente do processo de solução via Cramer, uma vez que não havia mais a separação arbitrária entre incógnitas e equações principais e secundárias. Assim, finalmente o conceito de

Posto pôde ser definido em sua generalidade e características por Frobenius (DORIER, 2000).

De acordo com o que fora discutido nesta seção, é possível observar que a noção de dependência dada por Frobenius no contexto das equações e n-uplas muito se assemelha com a atual definição do conceito de Dependência e Independência Linear. Um dos aspectos constantes na noção de dependência dada por Frobenius e que pode ser inserido em um primeiro curso de Álgebra Linear concretiza-se no tratamento unificado para equações e n-uplas quanto a linearidade, haja vista que muitos alunos não conseguem visualizar os vetores na forma de outros objetos matemáticos que não das n-uplas.

Além disso, a inserção da abordagem unificada de Frobenius para equações e n-uplas em um primeiro curso de Álgebra Linear poderá contribuir para que os alunos sejam conduzidos de maneira cautelosa à uma verdadeira compressão do caráter unificador e generalizante dos conceitos de Dependência e Independência Linear, assim como da própria disciplina como um todo, e, desse modo, alcancem os primeiros 'insights' quanto ao importante papel exercido pela linguagem formal e axiomática com o qual esses conceitos são trabalhados e que emerge como resposta à uma necessidade de simplificação e unificação.

A seguir, no decurso da apresentação de outras noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear, é possível notar que a necessidade dos processos de unificação e generalização dos referidos conceitos se tornou mais frequente entre os matemáticos, ainda que estas noções estivessem inseridas inicialmente em outros contexto e/ou objetos.

3.3. HERMANN GRASSMANN E A GENERALIZAÇÃO DA DEPENDÊNCIA PARA O ESPAÇO N-DIMENSIONAL

Filho de Justus Gunter Grassmann e Johanne Luise Friederike Medenwald, Hermann Gunther Grassmann (ver figura 04) nasceu em Stettin, Polônia, no dia 15 de abril de 1809. Seu pai era professor de Matemática e Física no Ginásio de Stettin e escreveu vários livros escolares nessas áreas, tendo ainda realizado pesquisas sobre cristalografia[41] (O' CONNER E ROBERTSON, 2005).

[41] Ciência experimental que estuda a disposição dos átomos em sólidos

Apesar da posição ocupada por seu pai em Stettin, Grassmann teve um rendimento escolar mediano, tendo melhorado apenas em seus anos finais de escolaridade. Em 1827, Grassmaan foi para a Universidade de Berlim estudar teologia, onde também cursou línguas clássicas, filosofia e literatura, mas não parece ter feito nenhum curso de Matemática ou Física. Ao retornar à Stettin em 1830, Grassmann decidiu se dedicar ao estudo da Matemática de maneira autônoma, bem como buscou garantir uma vaga como professor universitário. Entretanto, ao realizar os exames necessários em Berlim no ano de 1831, foi autorizado a lecionar apenas nos níveis elementares do ginásio (O'CONNER E ROBERTSON, 2005).

Figura 04: Hermann Grassmann

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann

Em 1832 foi nomeado como professor assistente para o Ginásio de Stettin e iniciou os estudos que o conduziria à sua obra mais conhecida. No ano de 1834, após Jacob Steiner (1796 – 1863) assumir a cátedra de Matemática na Universidade de Berlim, Grassmann o substituiu como professor de Matemática na Gewerbeschule, na qual permaneceu por um ano até retornar para Stettin na condição de professor de Matemática, Física, Alemão, Latim e Estudos religiosos na Otto Schule. Durante esse período, Grassmann deu continuidade aos seus estudos particulares em Matemática, o que lhe garantiu um bom resultado em seus exames no ano de 1840, e assim, a autorização para ministrar Matemática, Física, Química e Mineralogia em todos os níveis do ensino médio (O'CONNER E ROBERTSON, 2005).

O exame de 1840 é particularmente interessante para nossa discussão, haja vista que uma das fases consistia na apresentação de um ensaio sobre a teoria das marés. Para o fazê-lo, Grassmann fundamentou-se na *Méchanique Céleste*[42] de Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) e na *Méchanique Analytique*[43] de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), contudo percebeu que seria possível aplicar os métodos vetoriais (em notação moderna) que vinha desenvolvendo desde 1832, a fim de oportunizar uma abordagem original e mais simplificada. É nesse trabalho de mais ou menos 200 páginas que encontramos as primeiras ideias da sua teoria das extensões lineares que seriam apresentadas de maneira mais detalhada em seu *Die Lineale Ausdehnungslehre* publicado no ano de 1844 (O'CONNER E ROBERTSON, 2005).

Em acordo com o que fora discutido no capítulo anterior, a busca por um cálculo geométrico liberto de coordenadas tal qual Leibniz havia idealizado ainda era perseguida por muitos matemáticos no final do século XIX. Nesse sentido, Grassmann se destacou por sua tentativa em alcançá-lo a partir da criação de um sistema totalmente novo, alicerçado em bases filosóficas e geométricas do espaço. *Die Lineale Ausdehnungslehre* era parte dessa nova teoria denominada *Die Ausdenungslehre*, porém nunca concluída. Segundo seu criador, apesar de poder ser aplicada à geometria, à mecânica e a outros campos científicos, ela era independente deles. Na verdade, para Grassmann, a geometria nada mais era do que uma aplicação de seu novo sistema (DORIER, 1995b; 2000).

Segundo Grande (2006), o real propósito de Grassmann era o de evidenciar a possibilidade de realizar operações com segmentos de reta, as quais são elementos geométricos, como se fazia com os números, como na adição e multiplicação, o que de fato se tornou possível com os vetores. Tal assertiva vai ao encontro das colocações de Táboas (2010), quando afirma que a consolidação de uma linguagem que pudesse relacionar a Geometria Sintética e a Análise Geométrica era também objetivo para Grassmann, que o fez por meio de uma abordagem de vetores (que ele concebia como deslocamentos ou extensões), através de operações de soma e

[42] Mecânica celeste
[43] Mecânica analítica

produto entre eles. A representação geométrica de extensão adotada por Grassmann era uma reta, da qual ele abstraiu o conceito de extensão linear.

Nessa perspectiva, é possível observar que apesar de Grassmann ter trabalhado com suas ideias no contexto geométrico, ele não se limitou em apresentar suas definições e seus conceitos em função de um espaço tridimensional, mas sim os apresentou em um espaço n-dimensional. Com efeito, segundo Dorier (1995b), a singularidade da obra de Grassmann encontra-se no fato de nela conter bases pertinentes para uma teoria unificada da linearidade, uma vez que seu autor introduziu com precisão e em um contexto generalizado conceitos elementares da Álgebra Linear, como Dependência Linear, Base e Dimensão. Vejamos alguns excertos nos quais Grassmann apresentou seu conceito de Dependência:

Granger (1974 apud GRANDE, 2006, p. 101) nos exibe alguns desses excertos nos quais Grassmann apresentou sua definição de dependência, a saber, “Dizemos que uma grandeza elementar de primeiro grau é dependente de outras grandezas elementares, quando ela pode ser representada por uma combinação linear dessas últimas” (GRASSMANN apud GRANGER, 1974, p. 118).

Além disso, ainda alicerçado em Granger (1974 apud GRANDE, 2006), Grassmann também se referiu ao conceito de dependência como “espécie dependente de uma outra” quando um vetor poderia ser escrito como combinação linear de outros vetores.

Uma outra definição também apresentada por Grassmann quanto ao conceito de dependência pode ser encontrada no seguinte excerto:

> Uma grandeza *a* é dita derivável (*ableitbar)* a partir de grandezas *b, c, ...* por meio dos números $\beta, \gamma, \ldots$ se:
> $$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$
> Dir-se-á ainda que *a, b* e *c...* estão ‘numa relação numérica’ (Zahlbeziehung), quando cada uma dessas grandezas foi derivável das outras (GRASSMANN apud GRANGER, 1974, p. 118).

Caire (2020), também nos evidencia uma definição de dependência apresentada no contexto do que Grassmann chamou de magnitudes:

> [Grassmann] definiu o conceito de dependência, onde uma magnitude elementar de primeira ordem era representada como soma múltipla de magnitudes elementares de primeira ordem independentes e essas magnitudes independentes não podiam ser representadas como múltiplo ou soma do restante das magnitudes independentes (CAIRE, 2020, p. 80).

O conceito de dependência, no contexto dos deslocamentos ou extensões, foi também apresentado por Grassmann à luz do que ele nomeou como evoluções fundamentais, nas quais ele também evocou, em termos modernos, os conceitos de Geradores, Base e Dimensão:

> De acordo com o modo original de geração (que representa o aspecto real da teoria), um sistema de enésima ordem é gerado por n métodos fundamentais de evolução, que são dados como independentes (ou seja, nenhum está incluído em um sistema gerado por algum dos outros). Portanto, a ordem de um sistema, que é a dimensão 'natural', está intrinsicamente relacionada aos conceitos de geração e dependência, os quais representam a medida de extensão (DORIER, 1995, p. 247, traduzido pelo autor).

Desse modo, diante dos excertos apresentados, apesar da noção de dependência de Grassmann estar imersa em um contexto geométrico, ela concentrava um potencial – assim como toda a obra de Grassmann – para ser expandida para um lócus muito mais generalizado. Segundo Táboas (2010), ainda que o conceito de Dependência e Independência Linear não tenham sido criados por Grassmann, a pertinência reside no fato de que em sua obra eles ganharam um formato bem estruturado em termos axiomáticos, além do que, receberam um contexto numa visão global da matemática, permitindo assim que fossem aplicados em diferentes ramos a partir de uma associação adequada entre os elementos da teoria abstrata e os elementos do ramo escolhido.

Em vista disso, é possível observar que a inserção dos aspectos históricos da obra de Grassmann em cursos de Álgebra Linear concentra uma dupla potencialidade didática ao processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear. Em primeiro lugar, tais aspectos evocam um outro contexto matemático no qual a relação de dependência entre vetores é também trabalhada, isto é, o espaço geométrico n-dimensional, o que permite que os alunos deem um passo ainda maior rumo à compreensão do caráter unificador e generalizante dos conceitos em foco, bem como tenham os primeiros contatos com a simplificação e praticidade ofertada pela linguagem formal e axiomática.

Em segundo lugar, ainda que o conceito de dependência trabalhado no *Die Lineale Ausdehnungslehre* de Grassmann não possua uma representação figural, isto é, uma representação geométrica entre os segmentos orientados (fato justificável, uma vez que não há representação física para um espaço com dimensão maior que

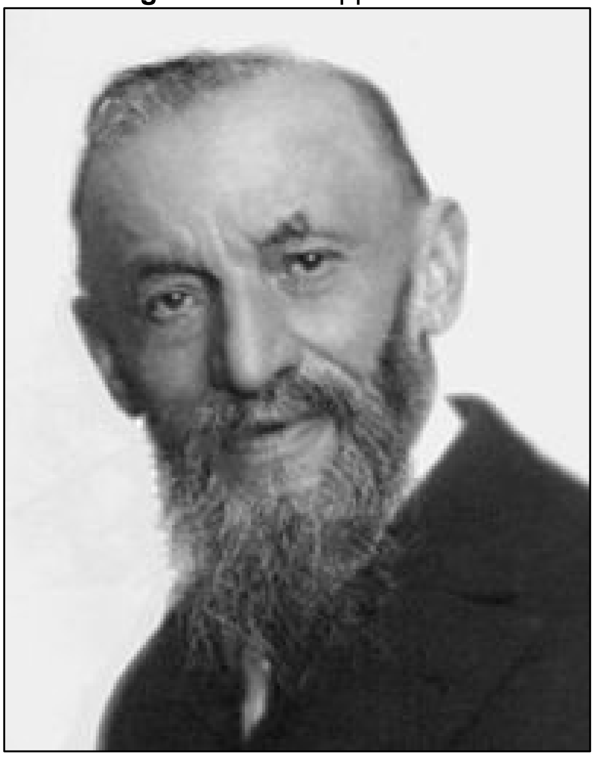
3), o professor poderá utilizar dessas ideias para discutir com seus alunos em um primeiro curso de Álgebra Linear a relação existente entre os conceitos de Dependência e Independência Linear de vetores representados no R^2 ou R^3 e a colinearidade ou coplanaridade das retas que os representam, por exemplo. A visualização desses aspectos, pode também oportunizar aos alunos a ruptura da concepção da Dependência e Independência Linear como um procedimento.

À frente, apresentamos outras noções matemáticas, concebidas no decurso da constituição da Álgebra Linear enquanto zona de inquérito, que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear e que carregam consigo potencialidades didáticas que podem contribuir para uma maior e melhor compreensão desses conceitos

3.4. GIUSEPPE PEANO E A ABORDAGEM AXIOMÁTICA DA NOÇÃO DE DEPENDÊNCIA

Giuseppe Peano (ver figura 05) nasceu no dia 27 de agosto de 1858 na Fazenda 'Tetto Galant', localizada na aldeia de Spinetta, há 5 km de Cuneo, na Itália.

Figura 05: Giuseppe Peano



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

Em Cuneo, ele fez o ensino elementar, mas em 1870 mudou-se para Turim para dar prosseguimento aos seus estudos em nível secundário e preparar-se para o ensino universitário, tendo ingressado em 1876 na Universidade de Turim, onde dedicou-se inteiramente ao estudo da Matemática (O'CONNER E ROBERTSON, 1997).

Durante seus estudos na Universidade de Turim, Peano foi aluno de renomados matemáticos daquele período. Aprendeu Geometria Analítica e Álgebra com Enrico D'Ovidio (1843 – 1933), Cálculo com Ângelo Genocchi (1817 – 1889) e Geometria Descritiva com Giuseppe Bruno (1828 – 1893), as quais eram disciplinas comuns para àqueles que também seguiriam a carreira da engenharia, contudo, Peano permaneceu na Matemática pura e estudou Análise e Geometria nos anos posteriores. Peano se tornou doutor em Matemática no ano de 1880 (O'CONNER E ROBERTSON, 1997).

No mesmo ano que obteve seu doutorado, Peano assumiu o cargo de professor assistente na Universidade de Turim e publicou seu primeiro artigo em Matemática. Em 1886, Peano passou também a lecionar na Academia Militar de Turim e no ano seguinte descobriu e publicou um método para resolver sistemas de equações diferenciais lineares usando aproximações sucessivas. No ano de 1888, Peano Publicou seu *Calcolo Geometrico*, no qual discutiu ideias referentes à lógica matemática, assim como apresentou seus famosos sistemas lineares que, em termos modernos, conhecemos por Espaço Vetoriais, a partir de uma releitura dos métodos apresentados por Grassmann (O'CONNER E ROBERTSON, 1997).

Em 1889, Peano publicou axiomas (axiomas de Peano) que definiam os números naturais em termos de conjuntos, o que lhe rendeu bastante visibilidade pela comunidade matemática da época. Com a morte de Genocchi em 1889, Peano assumiu a cátedra em seu lugar no ano de 1890 e, no ano seguinte, fundou uma revista dedicada principalmente à lógica e aos fundamentos da Matemática sob o título de *Rivista di matematica*[44]. Em 1892 Peano deu início ao seu *Formulario mathematico*[45], o qual tinha por objetivo reunir todos os teoremas e fórmulas referentes aos diversos ramos da matemática conhecidos até aquela época, contudo,

[44] Revista de matemática
[45] Formulário matemático

este formulário não fora recebido com bons olhos por seus alunos quando usado por Peano em suas aulas (O'CONNER E ROBERTSON, 1997).

Peano também participou de grandes congressos apresentando suas descobertas, tais como, a primeira Conferência Internacional de Filosofia, no qual teve contato com Bertrand Russell (1872 – 1970) e o segundo Congresso Internacional de Matemáticos, ambos realizado no ano de 1900 em Paris. No ano de 1901, Peano estava muito envolvido com suas pesquisas em Matemática, tinha feito significativos avanços em Análise, Fundamentos e Lógica, assim como no campo das Equações Diferenciais e Análise Vetorial, esta última a partir de uma abordagem axiomática, entretanto, por sua excessiva dedicação ao seu projeto *Formulario mathematico*, acabou negligenciando suas atividades docentes e foi demitido da Real Academia Militar de Turim (O'CONNER E ROBERTSON, 1997).

Em 1908, ainda estando como professor na Universidade de Turim, Peano publicou sua quinta e última edição do *Formulario mathematico*, o qual continha mais ou menos 4200 fórmulas e teoremas declarados, sendo a maior parte deles provados. Nesse mesmo ano, assumiu a cadeira de Análise Superior em Turim e foi eleito diretor da Academia Pró-interlíngua. A partir de 1910, Peano passou a se dedicar em ensinar e trabalhar com textos destinados ao ensino secundário e em 1925 mudou sua perspectiva dos cálculos infinitesimais para a Matemática complementar, mudança essa oficialidade em 1931, na qual permaneceu até o seu falecimento no ano de 1932 (O'CONNER E ROBERTSON, 1997).

Em acordo com o que fora discutido no capítulo anterior, Peano trabalhou com os vetores de três maneiras distintas durante seus estudos, a saber, na forma de n-uplas; como a diferença A – B de dois pontos A e B e por meio da axiomatização do que chamou de Sistemas Lineares, que em sua essência constituíam-se em um Espaço Vetorial sobre os números reais. As duas últimas foram trabalhadas em 1888 em sua obra *Calcolo geométrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, na qual Peano discutiu as ideias do Cálculo Geométrico idealizado por Leibniz e que fora desenvolvido por Möbius, Bellavitis, Hamilton e Grassmann.

Peano foi um dos poucos matemáticos a se interessar pela teoria das extensões lineares de Grassmann e foi esse mesmo interesse que o fez tentar apresentar de maneira mais clara e acessível os fundamentos matemáticos contidos em *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Entretanto, enquanto Grassmann deduziu as propriedades fundamentais dos seus ‘Espaços Vetoriais’ a partir da definição de operação nas coordenadas, Peano foi mais preciso e descreveu uma estrutura axiomática da qual eles emergiam, além de ter aperfeiçoado a formulação ao retirar algumas redundâncias e ter dado maior clareza aos conceitos de zero e de elemento oposto (DORIER, 1995b; 2000).

Nesse contexto, um dos aspectos mais interessante na obra de Peano e que fornece relevantes contribuições para a nossa discussão diz respeito ao seu pioneirismo em utilizar de uma abordagem axiomática na apresentação do que hoje conhecemos por Espaços Vetoriais sobre os números reais, bem como de seus conceitos adjacentes. No último capítulo do seu *Calcolo geométrico*, ele apresentou uma lista de axiomas que caracterizava o que ele chamou de *Sistemas Lineares* (em termos modernos, Espaços Vetoriais sobre os números reais), explicitando assim que a potencialidade de generalização contida na obra de Grassmann poderia ser aumentada por meio da axiomatização (DORIER, 1995b;2000).

Essa abordagem axiomática foi também utilizada para definir conceitos subjacentes aos Espaços Vetoriais, entre os quais, os conceitos de Dependência e Independência Linear.

Caire (2020), ao estudar a obra de Peano, explicita de que forma a definição dos conceitos em foco fora apresentada por ele, contudo, ressalta de antemão que Peano usou a palavra ‘ente’ para se referir a um vetor e a palavra ‘grupo’ para tratar de base:

> Na definição seguinte, página 142, Peano considerou os ‘entes’ de um sistema linear dependentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ se determinados os *n* números $m_1, m_2, \dots, m_n$, não fossem todos nulos quando substituídos na equação: $m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_na_n = 0$. Se o coeficiente de algum ‘ente’ fosse não nulo, ele poderia ser expresso numa função linear homogênea dos demais. Na página 143, $a_1, a_2, \dots, a_n$ seriam independentes entre eles, se na equação $m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_na_n = 0$, $m_1, m_2, \dots, m_n$ todos fossem nulos. $m_1 = m_2 =, \dots, m_n = 0$ (CAIRE, 2020, p. 96).

A partir da definição dada por Peano, reescrita nas palavras Caire (2020), aos conceitos de Dependência e Independência Linear, é possível compreendermos o potencial de simplificação e praticidade ofertado pela linguagem axiomática e formal com qual esses conceitos foram trabalhados por esse Matemático. Ainda que a definição de Peano estivesse inserida no contexto dos seus ‘entes’ geométricos, ela pôde ser estendida a todos aqueles outros contextos discutidos anteriormente, tais como, a dependência inclusiva abordada por Euler, a generalização das n-uplas e equações de Frobenius e a abordagem da dependência para o espaço n-dimensional trabalhada por Grassmann.

Desse modo, a inserção de aspectos históricos oriundos da definição axiomática de Dependência e Independência Linear dada por Peano em um primeiro curso de Álgebra Linear poderá contribuir de maneira mais assertiva e concreta para a compreensão do caráter unificador e generalizante desses conceitos, bem como da própria disciplina como um todo, na medida em que o aluno poderá visualizar a diversidade de objetos matemáticos (segmentos orientados, n-uplas, funções, matrizes, polinômios etc.) os quais podem ser concebidos como vetores pertencentes a um espaço vetorial.

Além disso, a inserção da abordagem de Peano em sala de aula poderá oportunizar ao professor ferramentas auxiliares para explicitar a praticidade e a facilidade ofertada pela linguagem axiomática e formal com o qual esses conceitos foram e são estudados até hoje. Com essa compreensão, os alunos poderão maximizar os ‘insights’ obtidos no estudo das noções apresentadas anteriormente (noções de Euler, Frobenius e Grassmann) e assim consolidar o entendimento dos conceitos de Dependência e Independência Linear como uma relação entre vetores pertencentes a um Espaço vetorial e não como uma operação a ser realizada a partir de um algoritmo memorizável.

Nas quatro primeiras seções deste capítulo nos detivemos em apresentar quatro diferentes noções matemáticas que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, a saber, *a noção de dependência inclusiva de Euler; a dependência unificada para equações e n-uplas de Frobenius, a generalização da dependência para o espaço n-dimensional de Grassmann* e *a axiomatização da dependência e independência linear de Peano.* Na oportunidade, também discutimos, em cada uma destas, que aspectos emergem e de que forma eles podem contribuir para um melhor processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos em questão.

Na próxima seção, apresentamos recomendações didáticas sobre como essas diferentes noções matemáticas, precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear, podem ser vetorizadas na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual em um primeiro curso de Álgebra

Linear. Tais recomendações são balizadas pelos referenciais teóricos adotados por esse trabalho, os quais dissertam sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear; que tratam do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear e ainda que discutem a inserção da História da Matemática em sala de aula.

3.5. RECOMENDAÇÕES DIDÁTICAS ACERCA DOS EXERCÍCIOS PROBLEMATIZADORES DE (RE)CONSTRUÇÃO CONCEITUAL

No decurso do presente capítulo, temos apresentado contribuições didáticas que emergem das diferentes noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear e que podem contribuir para um melhor e mais efetivo processo de aprendizagem desses conceitos pelos alunos. Para além disso, também se faz necessário discutir sobre o modo como essas noções poderão ser inseridas em um primeiro curso de Álgebra Linear, mais precisamente, no âmbito da Licenciatura em Matemática. Assim, nesta seção, apresentamos sugestões didáticas sobre como o professor poderá vetorizá-las na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual.

É pertinente esclarecer, contudo, que não temos o objetivo de apresentar propostas concretas de inserção desses aspectos, isto é, propostas que estejam sistematizadas por meio de atividades didáticas, com seus respectivos tempos de execução, ferramentas de validação matemática e ainda recursos avaliativos dos processos, por exemplo. Mas sim, trata-se de recomendações fundamentadas no referencial teórico adotado em nosso trabalho, o qual dialoga acerca das especificidades do processo de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, mais precisamente dos conceitos de Dependência e Independência Linear, assim como sobre o uso da História da Matemática em sala de aula.

Nesse sentido, as discussões aqui realizadas concentram-se em oportunizar ao professor de Álgebra Linear, que deseja trabalhar com os aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em sua turma, a autonomia para elaborar, executar e avaliar suas próprias atividades didáticas – planejadas a partir da sua percepção sobre as potencialidades e limitação dos seus alunos, bem como das especificidades do ambiente de aprendizagem –, mas sendo auxiliado pelas sugestões didáticas por nós sugeridas, os quais estão fundamentados em importantes referenciais teóricos dos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina e do uso da História da Matemática.

É importante relembrar que quatro foram as noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear identificadas por nós na constituição histórica da Álgebra Linear, sejam elas, *a noção de dependência inclusiva de Euler; a dependência unificada para equações e n-uplas de Frobenius, a generalização da dependência para o espaço n-dimensional de Grassmann* e *a axiomatização da dependência e independência linear de Peano*. Sendo assim, as sugestões didáticas que serão apresentadas a seguir levam em consideração essas noções e suas potencialidades didáticas.

Segundo Mendes (2006; 2016) os exercícios problematizadores de (re)construção conceitual são atividades didáticas nas quais os alunos, a partir de uma investigação histórica, obtém subsídios epistemológicos que lhes permite (re)construir um dado conceito matemático e uma das formas de o fazê-lo é conduzir o aluno a revisitar os contextos histórico, social e cultural no qual o conhecimento que se deseja ensinar foi desenvolvido. No caso das noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear é interessante que o professor inicialmente apresente e discuta junto aos seus alunos os dados biográficos dos matemáticos que as conceberam e os contextos nos quais eles estavam inseridos, utilizando-se para isso de textos escritos em uma linguagem mais acessível, podendo até o próprio docente produzir esses materiais.

Além disso, é de grande contribuição ao processo formativo dos licenciandos em Matemática que o professor viabilize uma discussão acerca dos problemas com os quais Euler, Frobenius, Grassmann e Peano se depararam quando conceberam as suas respectivas noções de dependência, assim como também oportunize aos estudantes conhecer as ferramentas que esses matemáticos detinham à época de suas tentativas de resolução. A ação do professor durante a execução dessas atividades deverá ser no sentido de explicitar as dificuldades características de cada época, e assim evidenciar uma matemática que se faz historicamente como uma produção de cunho sociocultural humano.

Para Brandemberg (2018; 2021), a discussão em torno dos problemas históricos se torna ainda mais significativa quando os estudantes são desafiados a resolver tais problemas usando métodos antigos de resolução, de modo que possam refletir sobre as estratégias cognitivas desenvolvidas por matemáticos e assim obter subsídios para o desenvolvimento de seus próprios mecanismos de resolução. Em se tratando das noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear, é interessante que o professor solicite, por exemplo, que os alunos façam uma análise intuitiva em diferentes sistemas de equações lineares, tal qual Euler havia feito, ou ainda que desenvolvam uma linguagem para tratar da linearidade tanto no contexto das equações quando das n-uplas, como Frobenius o fez.

Um dos aspectos de grande importância e que merece ser discutido no âmbito das sugestões didáticas refere-se às dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear. Conforme discutido em nossas considerações iniciais, estudos como os de Grande (2006), Andreoli (2009), Andrade (2010) e Souza (2016) apontam que o reconhecimento da linearidade em outros objetos diferentes das n-uplas tem sido um dos principais obstáculos encontrados pelos estudantes, o qual está diretamente relacionado com a dificuldade do aluno em visualizar um vetor em outros objetos como matrizes, polinômios, funções etc.

Nesse contexto, a inserção dos aspectos históricos das noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear poderá auxiliar os alunos na visualização da relação de linearidade em diferentes objetos matemáticos tais como nas equações de Euler, nas n-uplas de Frobenius e nos segmentos orientados de Grassmann. Assim, é interessante que o professor proponha aos seus alunos atividades de cunho histórico em que eles precisem reconhecer a relação de linearidade existente entre as referidos noções e, de maneira autônoma e consciente, sejam conduzidos a questionar sobre a possibilidade da existência de outros objetos matemáticos os quais também possuem uma relação de linearidade. Na oportunidade, o professor poderá revisar os axiomas que caracterizam um Espaço Vetorial, aprendidos no início do curso.

Ainda em acordo com os estudos supracitados, muitos alunos concebem os conceitos de Dependência e Independência linear como uma operação procedimental a ser executada a partir de um algoritmo memorizável (isto é, uma combinação linear na qual o valor escalar pode ou não ser igual a zero) e não como uma relação entre vetores, e apontam a linguagem axiomática e formal com a qual esses conceitos são trabalhados como sendo a razão principal para essa concepção. Contudo, conforme colocado por Dorier *et al.* (1994) e confirmado em nossa construção da constituição histórica da Álgebra Linear, o formalismo e a axiomatização emergiram como resposta a necessidade de unificação e generalização.

Nessa perspectiva, o uso de atividades de cunho histórico nas quais os alunos tenham que resolver os mesmos problemas enfrentados pelos matemáticos que conceberam as noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear surge como uma interessante ação didática a ser executada em sala de aula, uma vez que nela os estudantes poderão desenvolver suas próprias estratégias de pensamento e assim ser conduzidos à compreensão da linearidade como uma relação e não como um procedimento. Tal ação didática é reforçada por Mendes (2015), ao afirmar que esta agrega significado e significância ao conhecimento matemático trabalhado em sala.

Com relação ao papel exercido pela linguagem axiomática e formal com a qual os conceitos de Dependência e Independência Linear são abordados em cursos de Álgebra Linear, é interessante que o professor proponha atividades didáticas nas quais os alunos possam discutir a evolução das notações e definições dos referidos conceitos dadas por Euler, Frobenius, Grassmann e Peano, de modo que eles compreendam a linguagem axiomática e formal adotada como uma necessidade para a generalização, unificação e até simplificação dos distintos conceitos, ferramentas e métodos existentes no âmbito do processo de constituição da Álgebra Linear enquanto zona de inquérito, e assim a valorizem.

Todas as sugestões didáticas discutidas até o presente momento foram dadas no sentido de amenizar as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear, elencadas pela literatura da área, bem como de promover uma compreensão do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear possibilitado pela linguagem formal e axiomática com a qual seus conceitos são trabalhados. Essas recomendações poderão ser potencializados quando executados sob a égide de atividades de cunho histórico, mais precisamente, quando vetorizados na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual.

As discussões realizadas em torno da maneira como as diferentes noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear podem ser trabalhadas com licenciandos em Matemática, levando em consideração as especificidades dos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear e ainda dos recursos didáticos provenientes da História da Matemática, foram fundamentais para que reuníssemos elementos que pudessem embasar nossas sugestões didáticas quanto à vetorização dessas noções na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual.

Esses exercícios históricos, fundamentados em Mendes (2006; 2015; 2016) e Brandemberg (2018; 2021), devem possibilitar aos licenciandos em Matemática a (re)construção dos conceitos de Dependência e Independência Linear, em seu caráter unificador e generalizante, a partir de ações reflexivas sobre cada uma das diferentes noções de dependência estudas. O desafio do professor, desse modo, constitui-se em vetorizar as noções de dependência de Euler, Frobenius, Grassmann e de Peano em exercícios históricos de problematização, nos quais os estudantes acessem, de maneira autônoma e consciente, às ideias chave em cada uma delas e consiga agrupá-las como elementos constitutivos do conceito de dependência a ser formalizado posteriormente.

Em outros termos, cada uma das noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear poderá ser convertida na forma de um exercício histórico problematizador de (re)construção conceitual, de modo que em cada um deles o aluno se depare com diferentes aspectos que lhe possibilite ampliar a compreensão da linearidade como uma relação entre vetores, sejam eles na forma de equações, n-uplas, funções, polinômios, segmentos orientados etc., além do que, visualizem as atuais definições dos conceitos em foco como uma linguagem que não descarta as noções de dependência de Euler, Frobenius, Grassmann ou Peano, mas sim que as conservam em um caráter unificador e generalizante, e ainda permite sua extensão para outros contextos matemáticos.

3.6. CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Nesse capítulo tivemos por objetivo apresentar diferentes noções concebidas ao longo da constituição histórica da Álgebra Linear e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, bem como discutir de que forma essas diferentes noções poderiam ser vetorizadas na forma de exercícios históricos problematizadores de (re)construção conceitual em cursos de Álgebra Linear, mais precisamente no âmbito da licenciatura em Matemática, de modo a viabilizar um melhor e mais efetivo processo de ensino e de aprendizagem.

No decurso do desenvolvimento histórico da Álgebra Linear foram identificadas quatro diferentes noções precedentes dos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, sejam elas, *a noção de dependência inclusiva de Euler; a dependência unificada para equações e n-uplas de Frobenius, a generalização da dependência para o espaço n-dimensional de Grassmann* e *a axiomatização da dependência e independência linear de Peano*. Explicitamos em cada uma destas os contextos históricos e matemáticos de suas criações, assim como as potencialidades didáticas que estas promovem quando inseridas em cursos de Álgebra Linear.

As discussões em torno das contribuições que a inserção de aspectos históricos das noções de dependência promove aos processos de ensino e de aprendizagem pautaram-se nas dificuldades dos estudantes na aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear, destacadas por Grande (2006), Andreoli (2009), Andrade (2010) e Souza (2016), e ainda nas especificidades da Álgebra Linear, colocadas por Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a; 1998). Ademais, os estudos de Mendes (2006; 2015; 2016) e Brandemberg (2018; 2021) alicerçaram nossas recomendações didáticas quanto a vetorização dessas noções na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual.

Tais sugestões didáticas foram apresentadas no sentido de oportunizar ao professor diretrizes gerais, fundamentadas em sólidos referenciais teóricos, de como inserir as noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear na forma de atividades de cunho histórico. Com base nessas diretrizes, o docente poderá planejar, executar e avaliar suas próprias atividades, levando em consideração as potencialidades e limitações dos seus alunos, de modo que estes alcancem uma compreensão holística desses conceitos em seu caráter unificador e generalizante e ainda visualizem a linguagem formal e axiomática com a qual são trabalhados como necessária aos processos de unificação e generalização.

Diante do que fora exposto neste capítulo, temos reunido elementos que nos permitem afirmar que respondemos à questão norteadora do estudo e alcançamos os objetivos erigidos inicialmente. Nesse contexto, à guisa de conclusão, sistematizamos tais elementos mais a frente, em nossas considerações finais, na qual pontuamos contribuições que este trabalho fornece ao campo da Educação Matemática, bem como ressaltamos limitações que foram encontradas por nós no decorrer da investigação, e ainda destacamos possíveis desdobramentos que podem ser elencados a partir de nossos resultados e de nossas conclusões.

Considerações finais

Este trabalho teve por objetivo investigar de que forma o desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear pode ser abordado em cursos de Álgebra Linear de modo a viabilizar uma melhor compreensão destes por licenciandos em Matemática. Mais precisamente, comprometemo-nos em apresentar recomendações didáticas sobre como vetorizar as diferentes noções precedentes dos conceitos em questão na forma de exercícios históricos problematizadores de (re)construção conceitual.

Conforme discutido inicialmente, nas últimas duas décadas, ainda que de maneira pontual, estudos têm sido desenvolvidos no sentido de investigar os processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear e explicitam as dificuldades que os estudantes enfrentam no decurso desses processos. Tais estudos, de um modo geral, apontam que o reconhecimento da linearidade em outros objetos e/ou contextos matemáticos é o principal obstáculo e que este emerge da linguagem axiomática e formal com a qual esses conceitos são trabalhados.

Entretanto, estudiosos como Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a; 1998; 2002) evidenciam que o formalismo com o qual esses conceitos são abordados na verdade constitui-se no elemento chave da disciplina, uma vez que seu nascimento esteve diretamente relacionado a uma necessidade de unificação e generalização de diferentes métodos e ferramentas existentes ao longo da constituição histórica da Álgebra Linear. Este fato nos conduziu a reflexão de que a compreensão do caráter unificador e generalizante dos conceitos de Dependência e Independência Linear poderia contribuir para uma aprendizagem destes com significado.

As colocações de Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a; 1998; 2002) quanto ao papel exercido pela linguagem formal e axiomática e acerca do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear foram ao encontro do desenvolvimento histórico por nós apresentado, haja vista que as raízes dessa disciplina se encontram em diferentes épocas e contextos históricos e matemáticos, os quais só foram unificados a partir de um processo de axiomatização em meados da década de 1930.

De fato, os gérmens da disciplina localizam-se no álgebra antiga, no tratamento intuitivo dos sistemas de equações lineares e no uso dos determinantes em problemas de linearidade no início do XVIII; também na geometria, na busca por um cálculo geométrico intrínseco idealizado por Leibniz e possibilitado pelos esforços empreendidos na representação das quantidades imaginárias e na sua legitimação, os quais resultaram nos primeiros sistemas vetoriais e permitiram os primeiros processos de axiomatização; também na análise funcional, no contexto dos espaços de Banach e dos Espaços de Hilbert; e por fim da álgebra moderna topológica, com a definição de um módulo sobre um anel.

Nesse contexto, foi possível identificar quatro diferentes noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear, a saber, *a noção de dependência inclusiva de Euler; a dependência unificada para equações e n-uplas de Frobenius, a generalização da dependência para o espaço n-dimensional de Grassmann* e *a axiomatização da dependência e independência linear de Peano*. Explicitamos em cada uma destas os contextos históricos e matemáticos de suas criações, assim como as potencialidades didáticas que estas promovem quando inseridas em cursos de Álgebra Linear.

Essas noções, de um modo geral, quando trabalhadas em cursos de Álgebra Linear poderão contribuir para que os alunos possam compreender os conceitos de Dependência e Independência Linear como uma relação e não como um procedimento a ser verificado a partir de uma algoritmo memorizável, além do que, o contato com cada uma dessas diferentes noções oportuniza aos estudantes visualizar a linearidade em distintos objetos e/ou contexto matemáticos, tais como, n-uplas, equações, matrizes, polinômios, funções etc., e assim conceber seu o caráter unificador e generalizante.

A inserção das noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear poderá contribuir ainda mais aos processos de ensino e de aprendizagem quando realizada sob a égide de atividades de cunho histórico, e os exercícios problematizadores de (re)construção conceitual surgem como uma forma interessante de o fazê-lo, na medida em que os alunos poderão obter subsídios epistemológicos que lhes permitem (re)construir os referidos conceitos a partir da revisitação dos contextos histórico, social, cultural e matemático em que as diferentes noções foram concebidas.

Em outros termos, cada uma das noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear poderá ser convertida na forma de um exercício histórico problematizador de (re)construção conceitual, de modo que em cada um deles os alunos se deparem com diferentes aspectos que lhes possibilite ampliar a compreensão da linearidade como uma relação entre vetores, bem como que possam visualizar as atuais definições dos conceitos em foco como uma linguagem que não descarta as noções de dependência de Euler, Frobenius, Grassmann ou Peano, mas sim que as conservam em um caráter unificador e generalizante.

As sugestões didáticas apresentadas no decurso do trabalho foram dadas no sentido de oferecer ao professor diretrizes gerais de como vetorizar essas diferentes noções na forma de exercícios históricos problematizadores de (re)construção conceitual. Tais diretrizes estão fundamentadas em sólidos estudos acerca dos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear e do uso da História da Matemática em sala de aula, e oportunizam ao professor a liberdade para planejar, executar e avaliar suas próprias atividades didáticas, levando em consideração as potencialidades e limitações dos seus alunos.

Nesse sentido, é possível afirmar que os resultados e sugestões apresentadas no presente estudo podem servir como um repositório de subsídios teóricos e/ou metodológicos balizadores para àqueles que desejam investigar mais a fundo as contribuições que a inserção de aspectos históricos da Álgebra Linear podem possibilitar aos processos de ensino e de aprendizagem no âmbito da licenciatura em Matemática ou ainda para àqueles professores que necessitam de um norte sobre como trabalhar com esses aspectos históricos em suas aulas.

Essas contribuições, de uma modo geral, sinalizam também os benefícios que a História da Matemática tem ofertado ao campo da Educação Matemática, uma vez que, para além de agregar ao campo aspectos sociais e culturais que envolvem os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, também resgata práticas socioculturais de tempos e espaços que não àqueles nos quais a sala de aula está inserida, mas que no fim são refletidos sobre os processos de ensino e de aprendizagem que nela acontecem a partir de problematizações.

Dificuldades foram encontradas durante a execução da presente pesquisa. A escassez de textos que tratem da constituição histórica da Álgebra Linear em língua portuguesa foi um dos grandes obstáculos encontrados, haja vista termos tido acesso apenas à textos em língua inglesa e francesa, nos quais nem sempre as traduções de conceitos ou enunciados matemáticos eram fiéis, principalmente com relação a extratos de textos históricos antigos. Na oportunidade, ressaltamos que nosso trabalho contribui ao trazer um texto escrito em língua portuguesa e que discorre sobre a constituição histórica da Álgebra Linear.

Além disso, o início do curso de mestrado se deu em março de 2020, período no qual foi necessária a prática do isolamento social devido a pandemia da COVID-19. Este fato impossibilitou o desenvolvimento de atividades didáticas com os exercícios históricos problematizadores de (re)construção conceitual em cursos de Álgebra Linear, tendo em vista a suspensão das aulas presenciais nas instituições brasileiras de ensino superior. Esse fato está diretamente relacionado às limitações que a pesquisa possui.

Ademais, é válido ressaltar que no levantamento de teses e dissertações brasileiras desenvolvidas nos últimos 20 anos, em apenas 1 (uma) dissertação de mestrado observamos a interface entre História da Matemática e conceitos de Dependência e Independência Linear, na qual o autor se imbuiu da constituição histórica dos referidos conceitos para analisar livros didáticos. Nós, por outro lado, defendemos que essa história pode ir além de servir como um repositório analítico, mas sim ser inserida diretamente em cursos de Álgebra Linear a fim de oportunizar uma aprendizagem com significado.

Esses aspectos elucidam a escassez do desenvolvimento de estudos nos últimos 20 anos no âmbito da interface entre História da Matemática e conceitos de Dependência e Independência Linear, bem como explicitam a necessidade de novas investigações que discutam maneiras de inserir aspectos históricos em cursos de Álgebra Linear de modo a proporcionar um melhor e mais efetivo processo de ensino e de aprendizagem. É nesse contexto também que podemos afirmar estar alicerçado o ineditismo da nossa pesquisa.

Enquanto concluinte do curso de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, a execução da presente pesquisa possibilitou conhecer diversos aspectos intrínsecos da interface entre Álgebra Linear e da História da Matemática, os quais conduziram a um repensar nas práticas/concepções docentes e acadêmicas, e ainda estimularam em dar continuidade aos estudos de pós-graduação no âmbito da referida temática.

Diante das discussões realizadas e dos resultados apresentados, também fomos conduzidos a novos questionamentos, como por exemplo: *Que atividades de cunho histórico podem ser desenvolvidas utilizando-se as noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear? Quais contribuições aos processos formativos de licenciandos em Matemática a inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear oportuniza?* Tais questões são fecundas para o desenvolvimento de futuras investigações e que trarão relevantes contribuições ao campo da Educação Matemática.

Referências

ALMEIDA, Vitor Rezende. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o estudo das Transformações Lineares.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, 2013.

ALVES, Aretha Fontes. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o estudo dos Espaços Vetoriais.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, 2013.

ANDRADE, Juliana Pereira Gonçalves de. **Vetores: Interações a distância para a aprendizagem de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2010.

ANDREOLI, Daniela Inés. **Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad.** Tesis de maestría em Ciencias. Instituto Politécnico Nacional, México, 2009.

ANDREOTTI, Celso Luiz. **Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), São Paulo, 2017.

ARREBOLA, Odilthom Elias da Silva. **Uma sequência didática sobre transformações lineares em um ambiente de geometria dinâmica.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), São Paulo, 2013.

ASSIS, Aline Mota de Mesquita. **Atividade de Estudo do conceito de Transformação Linear na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental de V. V. Davydov.** Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC-GO), Goiânia, 2018.

BARONI, Rosa Lucia Sverzut. **Aspectos Históricos de alguns Conceitos da Álgebra Linear.** Belém: SBHMat, 2009.

BRANDEMBERG, João Cláudio. História e Ensino de Matemática. **Revista Exitus**, Santarém/PA, v. 7, n. 2, p. 16-30, 2017.

BRANDEMBERG, João Cláudio. História e Ensino de Matemática: uma abordagem partindo do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conteúdos. Anais do V Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), Belém, 2018.

BRANDEMBERG, João Cláudio. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. *In:* PEREIRA, A. C. C.; MARTINS, E. B. (Org.). **Investigações científicas envolvendo a história da matemática sob o olhar da pluralidade**. Curitiba: Editora CRV, 2021, p. 23-34.

CAIRE, Elaine. **Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX.** Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2020.

CARDOSO, Valdinei Cezar. **Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais.** Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 2014.

CALLIOLI, Carlos; DOMINGUES, Hygino; COSTA, Roberto. **Álgebra Linear e Aplicações.** 6ª Ed: Atual Editora, 1978.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras da década de 90.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2000.

CHIARI, Aparecida Santana de Souza Chiari. **O papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância: possibilidades, limites e desafios.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2015.

COIMBRA, Jarbas Lima. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear.** Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, 2008.

CROWE, Michael J. **A history of vector analysis:** The evolution of the idea of a Vectorial System. New York: Dover Publications, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. *In:* BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 97-115.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica. *In:* FOSSA, Jhon Andrew. (Org.). **Facetas do diamante:** ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática. Rio Claro: SBHMat, 2000, p. 165-200.

DEVOLDER, Rodrigo Gomes. **Uma tecnologia para a redação matemática e seu uso na elaboração de um curso de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, 2012.

DIAS, Renan Marcelo da Costa. **Análise dos livros de Álgebra Linear do Cientista**

Paraense Guilherme de La Penha. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado do Pará (UEPA), Belém, 2019.

DIAS, Renan Marcelo da Costa; CHAQUIAM, Miguel. A Álgebra Linear no Brasil na década de 1970: um estudo esteado em livros didáticos. **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 1 – 24, 2020.

DIAS, Renan Marcelo da Costa; BRANDEMBERG, João Cláudio. A História da Matemática no campo da Educação Matemática: um olhar a partir da instituição e constituição do campo. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 16, n. 1, p. 1 – 19, 2021.

DIAS, Renan Marcelo da Costa; BRANDEMBERG, João Cláudio. A História da Matemática em dissertações brasileiras envolvendo objetos da Álgebra Linear. *In:* Escola de Inverno de Educação Matemática, 7, 2021, Santa Maria. **Anais da VII Escola de Inverno de Educação Matemática**, Santa Maria, 2021. p. 936 – 946.

DONOGHE, E. **David Eugene Smith (1866 – 1944).** Disponível em: https://education.stateuniversity.com/pages/2424/Smith-David-Eugene-1860-1944.html. Acesso em 26 de maio de 2021.

DORIER, Jean-Luc; ROBERT, Aline; ROBINET, Jacqueline; ROGALSKI, Marc. **Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University.** In the Proceedings of the 18th conference of the international group for psychology of Mathematics Education, Lisbonne, v. 4, p. 137-144, 1994.

DORIER, Jean-Luc. Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 29, n. 2, p. 175-197, 1995a.

DORIER, Jean-Luc. A general Outline of the Genesis of Vector Space Theory. **Historia da Mathematica**, v. 22, n. 3, p. 227 – 261, 1995b.

DORIER, Jean-Luc. The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. **Linear Algebra and its applications**, France, 275-276, p. 141-160, 1998.

DORIER, Jean-Luc. Epistemological Analysis of The Genesis of Theory of Vector Spaces. *In:* DORIER, Jean-Luc. **On the Teaching of Linear Algebra.** Grenoble, France: Kluwer Academia Publishers, 2000, p. 1 – 73.

DORIER, Jean-Luc. **Teaching Linear Algebra at University.** In: Tatsien (Ed.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM). Beijing, China: Higher Education Press. v. 3, p. 875-884, 2002.

FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. **A sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial.** Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, 2013.

FOSSA, John Andrew; LEÔNCIO, Sarah Mara Silva. **Introdução aos métodos de Euler para achar números amigáveis.** Campinas: SBHMat, 2013.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** São Paulo: Atlas, 2008.

GRANDE, André Lúcio. **O conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2006.

JULIO, Rejane Siqueira. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para 'dimensão'.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2007.

KILPATRIK, Jeremy. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. **Revista Zetetiké,** Campinas, v. 4, n. 6, 1996, p. 153-180.

KILPATRIK, Jeremy. **The Development of Mathematics Education as an Academic Field.** Plenary. Lecture 1 at the Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICM, 2008.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos da Metodologia Científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARINS, Alessandra Senes. **Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2014.

MATOS, Fernando Cardoso de. **Praxeologias e Modelos Praxeológicos Institucionais: o caso da Álgebra Linear.** Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, 2017.

MENDES, Iran Abreu. **O uso da História no ensino de Matemática:** reflexões teóricas e experiências**.** Belém: EDUEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente de cognição matemática na sala de aula. *In:* MENDES, Iran Abreu. (Org.). **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006, p. 79-136.

MENDES, Iran Abreu. História da Matemática e reinvenção didática em sala de aula. *In:* MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. (Org.). **História nas aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016, p. 11-74.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas.** São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MIGUEL, Antônio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 1993.

MIGUEL, Antônio. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista Zetetiké**. Campinas, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIORIM, Maria Ângela Miorim. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of Linear Algebra: 1875 – 1940. **Historia Mathematica,** v. 22, n. 3, p. 262 – 303, 1995.

NOMURA, Joelma Iamac. **Esquemas Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2014.

O'CONNER, J; ROBERTSON, F. **Giuseppe Peano.** MacTutor, 1997. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peano/. Acesso em: 24 de janeiro de 2022.

O'CONNER, J; ROBERTSON, F. **Ferdinand Georg Frobenius.** MacTutor, 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frobenius/. Acesso em: 22 de janeiro de 2022.

O'CONNER, J; ROBERTSON, F. **Hermann Gunter Grassmann.** MacTutor, 2005. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann/. Acesso em: 22 de janeiro de 2022.

O'CONNER, J; ROBERTSON, F. **David Eugene Smith.** MacTutor, 2015. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Smith_David/. Acesso em: 26 de maio de 2021.

OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de Oliveira. **Sobre a produção de significados para a noção de Transformação Linear em Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2002.

PINTO JÚNIOR, Wallace Nascimento. **Álgebra Linear a distância para licenciandos em química: análise do curso oferecido no modelo UAB.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, 2013.

PRADO, Eneias de Almeida. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2010.

PRADO, Eneias de Almeida. **Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática:**

contribuições para a formação do profissional da educação básica. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2016.

RANGEL, Walter Sérvulo Araújo. **Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: contribuições para a formação de professores de Matemática.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, 2011.

RIBEIRO, Luciane Nunes. **Uma análise do movimento de constituição da ementa da disciplina de Álgebra Linear na licenciatura em Matemática.** Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, 2018.

SANTIAGO, Everton Francisco Ferreira. **O uso de representações gráficas para a construção do conhecimento sobre espaço vetorial.** Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, 2017.

SANTOS, Robinson Nelson dos. **Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes.** Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2011.

SANTOS, Gabrielle Nunes dos. **Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Pelotas, 2019.

SILVA, Eliza Souza. **Transformações Lineares em um curso de Licenciatura em Matemática:** uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2015.

SILVA, Maria Eliana Santana da Cruz. **Concepção de transformação linear por estudantes de licenciatura em Matemática.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2016.

SOUZA, Mariany Layane de. **Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2016.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. Um estudo sobre as origens dos Espaços Vetoriais. **Revista Brasileira de História da Matemática.** v. 10, n. 19, 2010, p. 1 – 38.

VALDÉS, Juan E. Nápoles. A história como elemento unificador da educação matemática. *In:* MENDES, Iran Abreu. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006, p. 15-77.

VASCO, Carlos E. La Educación Matemática: una disciplina en formación. **Revista Matemáticas:** enseñanza universitaria, Cali: Univalle, v. 3, n. 2, 1994, p. 59-75.

VIEIRA, Hálisson Barreto. **Álgebra Linear:** uma conexão do Ensino Médio ao Superior. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, 2013.

WUSSING, Hans. **Lecciones de historia de las Matemáticas.** Barcelona: Siglo XXI, 1998.