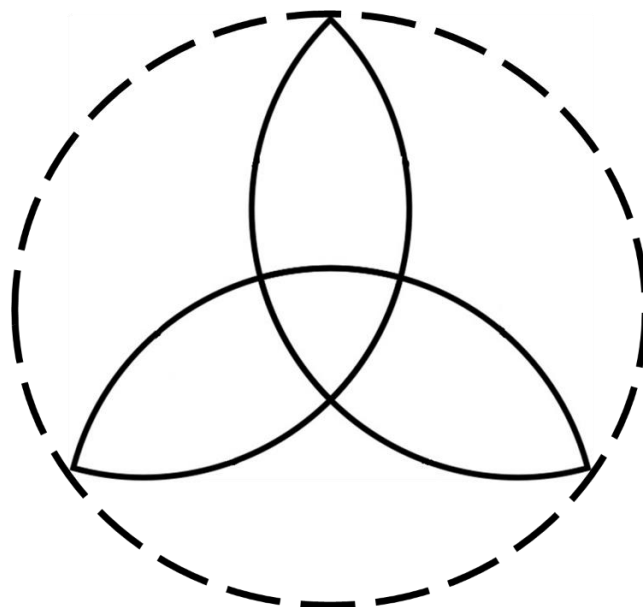




**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS**

RHÔMULO OLIVEIRA MENEZES

**MODELAGEM MATEMÁTICA *ONLINE*: temas matemáticos,
poderes naturais e estratégias pedagógicas**



BELÉM/PA

2021

RHÔMULO OLIVEIRA MENEZES

**MODELAGEM MATEMÁTICA *ONLINE*: temas matemáticos,
poderes naturais e estratégias pedagógicas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo
Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Roberta Modesto Braga

BELÉM/PA

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

- M541m Menezes, Rhômulo Oliveira.
Modelagem matemática online : temas matemáticos, poderes naturais e estratégias pedagógicas / Rhômulo Oliveira Menezes. — 2021.
185 f. : il. color.
- Orientador(a): Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo
Coorientação: Prof^ª. Dra. Roberta Modesto Braga
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2021.
1. Tarefas de Modelagem Matemática. 2. Encontros Síncronos. 3. Poderes Matemáticos. 4. Estratégias Pedagógicas. 5. Temas Matemáticos. I. Título.

CDD 510.7

RHÔMULO OLIVEIRA MENEZES

**MODELAGEM MATEMÁTICA *ONLINE*: temas matemáticos,
poderes naturais e estratégias pedagógicas**

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo
Orientador - UFPA

Prof^ª. Dra. Roberta Modesto Braga
Coorientadora – UFPA

Prof^ª. Dra. Elizabeth Gomes Souza
Examinadora Interna – PPGECCM/UFPA

Prof^ª. Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena
Examinadora Interna – PPGECCM/UFPA

Prof. Dr. Arthur Belford Powell
Examinador Externo – The State University of New Jersey (Rutgers University, EUA)

Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral
Examinador Externo – UFRRJ

Dedico à minha família, em especial à minha mãe, Laura, e a meu pai, João, pelo apoio incondicional para lutar pelos meus sonhos e alcançar meus objetivos.

Aos pretos e pretas, que foram assassinados em condições suspeitas por policiais, ou na presença deles. Em especial às crianças Jenifer Gomes (11 anos), Kauan Peixoto (12 anos), Kauã Rozário (11 anos), Kauê Ribeiro (11 anos), Ágatha Félix (8 anos), Kethellen Gomes (5 anos), e tantos outros que não foram lembrados, e aqueles que ainda terão suas vidas roubadas pela violência que extermina os nossos.

Às vítimas da doença COVID-19, que não resistiram ao vírus, e nem à ignorância e maldade de uma sociedade doente, embebida no egoísmo e no culto do Eu em detrimento do Nós.

À querida professora Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira (in memoriam), cujo o exemplo de pessoa, professora e pesquisadora foram e sempre serão inspiração em minha vida e em minhas práticas como professor e pesquisador.

AGRADECIMENTOS

A Deus, não o instituído pelas religiões conhecidas, mas ao ser livre que habita em mim e que me permitiu traçar esse caminho e conhecer pessoas maravilhosas, que ajudaram e ajudam a modelar minha existência.

A meu orientador Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo, pela confiança depositada para o desenvolvimento deste trabalho. Pelo exemplo de pessoa humilde, serena, compreensiva, que me inspira a ser um profissional competente e, acima de tudo, um ser humano melhor.

À Prof^a. Dra. Roberta Modesto Braga pelo carinho, amizade, irmandade, orientação. Pela sua história de mulher batalhadora, que me inspirou e inspira a lutar pelos meus sonhos, sem desanimar diante da complexidade dos problemas, mas com foco nas possibilidades de solução.

Ao meu amigo e irmão, que reencontrei nesta vida, Wellington Evangelista Duarte, pela amizade honesta e sincera, tão rara de ser cultivada no meio acadêmico em que a disputa de egos é tão característica.

À parceira/irmã que ganhei no Doutorado, Neuma Teixeira dos Santos, pela companhia nas viagens para o curso em Belém e para as orientações em Salinópolis, pelos momentos compartilhados nas vivências de disciplinas que estressavam e angustiavam nossas semanas, pela amizade nos vários momentos de descontração e brincadeiras, que tornavam mais leve nosso caminho em busca de uma tese.

Aos professores do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, que no convívio em disciplinas, conversas, confraternizações apresentaram-me um mundo de informações, contribuindo para o meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional.

Ao coletivo Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática – GEMM, pela irmandade e pelas sugestões que me conduziram no desenvolvimento deste trabalho, em especial ao professor e amigo Laecio Nobre de Macedo, que embarcou nessa aventura em 2017.

Ao coletivo Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) em Educação Matemática – GEPETICEM pelo acolhimento caloroso, em especial aos colegas George Bravo, Alexandre Assis, Marcos Henrique, Soraya Izar, Wagner Marques, Thaís Settimy.

Aos colegas que auxiliaram na efetivação do curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, Felipe de Jesus Ribeiro Marques e João Vítor Gomes Belshoff.

Aos professores que fizeram, fazem e farão direta ou indiretamente parte da construção deste trabalho, Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva, Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales, Profª. Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena. Em especial à Profª. Dra. Elizabeth Gomes Souza, pelo incentivo para alçar voos em outros lugares, ao Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral, por ter acolhido-me como filho/irmão na cidade de Niterói/RJ e na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ/Seropédica), e ao Prof. Dr. Arthur Belford Powell, por ter intermediado a recuperação dos dados produzidos no ambiente VMTcG.

Ao Stephen Weimar e sua equipe por ter destinado tempo e recursos para a recuperação dos dados produzidos no VMTcG, que foram perdidos com a migração do ambiente para a *internet*.

Às melhores companhias de congressos, e agora amigos, que fiz durante minhas andanças por esse Brasil. Em especial, aos amigos Fábio Borges e Elton Viana.

Aos amigos que fiz durante minha passagem pelo Rio de Janeiro, Michel Couto, Rodrigo Cavalcanti, Rodrigo Paiva, João Godoy, Fernando Vieira, Rosana Oliveira, Soraia Kindel, Agnaldo Esquincalha, Pedro Neves, Yuvita Silva, e tantos outros que não caberiam neste parágrafo. Em especial, ao amigo Vicente Furtado, que foi meu apoio e válvula de escape nos momentos de estresse, impaciência, frustração, euforia durante parte da estadia em Niterói/RJ e em meio às mediações no VMTcG.

À Universidade Federal do Pará pela oportunidade em cursar o Doutorado. E à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que financiou minha pesquisa no período de 2017-2019.

Muito Obrigado!

Eu não posso mudar os outros;
No entanto, posso trabalhar para me mudar.
É incrível a influência que isso pode ter sobre os outros.
(MASON, 2002, tradução nossa)

RESUMO

A presente tese, intitulada “Modelagem Matemática Online: temas matemáticos, poderes naturais e estratégias pedagógicas” teve como objetivo investigar que/como interações apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática, em um ambiente virtual de aprendizagem online. Para alcançar este objetivo fiz parte da equipe que planejou, elaborou e efetivou o curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, no segundo semestre de 2018. Os encontros síncronos no ambiente online Virtual Math Teams com GeoGebra contou com a participação de graduandos do curso de Matemática da Universidade Federal do Pará e da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Para esta tese foram selecionadas sessões de um grupo de estudantes, que mediei durante todo o curso. Os dados foram produzidos pelos graduandos no desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática, no ambiente online Virtual Math Teams com GeoGebra, permitindo posterior acesso aos chats, às construções feitas no quadro branco e às construções feitas no GeoGebra, armazenadas no próprio ambiente. Para análise dos dados utilizei as quatro fases de análise de *chats*, sendo construído para a quarta fase um diagrama de análise de interações, com base nos conceitos teóricos poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos. Os resultados mostraram que tarefas de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma síncrona no ambiente online Virtual Math Teams com GeoGebra, foram profícuas para a manifestação de estratégias pedagógicas, poderes matemáticos e temas matemáticos. No entanto, essa manifestação esteve condicionada ao ecossistema de ensino e aprendizagem configurado, que no caso desta tese esteve atrelado às situações-problema propostas e abordadas pelas tarefas de Modelagem Matemática, às possibilidades permitidas pelo ambiente online escolhido para a investigação dessas situações-problema, e a condução adotada pelo mediador nos encaminhamentos da investigação.

Palavras-chave: Tarefas de Modelagem Matemática; Encontros Síncronos; Virtual Math Teams com GeoGebra; Interações; Poderes Matemáticos; Estratégias Pedagógicas; Temas Matemáticos.

ABSTRACT

The present thesis entitled “Online Mathematical Modeling: mathematical themes natural powers and pedagogical strategies” aimed to investigate what / how interactions appeared between students mediator and mathematical content during the synchronous development of Mathematical Modeling tasks in a virtual learning environment online. To achieve this goal I was part of the team that planned, elaborated and carried out the course “Interactions and Modeling Strategies in the VMTcG environment” in the second half of 2018. The synchronous meetings in the Virtual Math Teams online environment with GeoGebra counted on the participation of students of the mathematics course at the Federal University of Pará and the Federal Rural University of Rio de Janeiro. For this thesis sessions were selected by a group of students that I mediated throughout the course. The data were produced by the students in the development of the Mathematical Modeling tasks in the Virtual Math Teams online environment with GeoGebra, allowing subsequent access to the chats constructions made on the whiteboard, and the constructions made in GeoGebra stored the environment itself. For data analysis I used the four phases of analysis of chats being built for the fourth phase an interaction analysis diagram based on the theoretical concepts of mathematical powers pedagogical strategies and mathematical themes. The results showed that Mathematical Modeling tasks developed synchronously in the Virtual Math Teams online environment with GeoGebra were useful for the manifestation of pedagogical strategies mathematical powers and mathematical themes however this manifestation was conditioned to the configured teaching and learning ecosystem, that in the case of this thesis the problem situations proposed and addressed by the Mathematical Modeling tasks were linked; the possibilities allowed by the online environment chosen to investigate these problem situations and the framework adopted by the mediator in conducting the investigation.

Keywords: Mathematical Modeling Tasks; Synchronous Encounters; Virtual Math Teams with GeoGebra; Interactions; Mathematical Powers; Pedagogical Strategies; Mathematical Themes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Infográfico com os trabalhos organizados segundo os perfis Formação (azul) e Ensino (laranja)	30
Figura 2	Características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática	62
Figura 3	Infográfico com o quantitativo de estudantes inscritos e desses os que concluíram o curso	69
Figura 4	Elementos dos espaços de interação do VMTcG	70
Figura 5	Perfil dos estudantes do Grupo 5	71
Figura 6	Perfil dos estudantes do Grupo 7	72
Figura 7	Perfil dos estudantes do Grupo 9	72
Figura 8	Processo de análise do <i>chat</i>	76
Figura 9	Modelo base do diagrama de análise de interações	77
Figura 10	Diagrama de análise de interações do curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”	78
Figura 11	Construção do “circuncentro” de Ana	85
Figura 12	Tentativa de Ana de construir o circuncentro	86
Figura 13	Construção de Paula	86
Figura 14	Manipulações do Mediador no GeoGebra	88
Figura 15	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Estação de Bombeamento (EP1)	99
Figura 16	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Estação de Bombeamento (EP2)	102
Figura 17	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Estação de Bombeamento (EP3)	106
Figura 18	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Polígono ABCDE (EP1)	118
Figura 19	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Polígono ABCDE (EP2)	121
Figura 20	Construção de Paula da figura da tarefa	126
Figura 21	Reconstrução de Paula da figura da tarefa	127
Figura 22	Movimentação das trajetórias na construção de Paula	130
Figura 23	Resposta de Paula	132
Figura 24	Ajuste de Paula para encontrar ângulo de 90 graus	133

Figura 25	Reajuste de Paula para encontrar ângulo de 90 graus	133
Figura 26	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na Caminhando com Carol (EP1)	139
Figura 27	Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na Caminhando com Carol (EP2)	143
Figura 28	Interações do mediador na tarefa Estação de Bombeamento	145
Figura 29	Interações dos estudantes na tarefa Estação de Bombeamento	147
Figura 30	Interações das mediatrizes e do circuncentro na tarefa Estação de Bombeamento	152
Figura 31	Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Estação de Bombeamento no VMTcG	154
Figura 32	Interações do mediador na tarefa Polígono ABCDE	155
Figura 33	Interações dos estudantes na tarefa Polígono ABCDE	157
Figura 34	Interações dos conteúdos matemáticos na tarefa Polígono ABCDE	159
Figura 35	Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Polígono ABCDE no VMTcG	162
Figura 36	Impeditivos do uso de poderes e de estratégias, e no aparecimento de temas no desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE no VMTcG	163
Figura 37	Interações do mediador na tarefa Caminhando com Carol	165
Figura 38	Interações dos estudantes na tarefa Caminhando com Carol	167
Figura 39	Interações dos conteúdos matemáticos na tarefa Caminhando com Carol	170
Figura 40	Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Caminhando com Carol no VMTcG	171

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Artigos de periódicos	23
Quadro 2	Tópicos de análise dos artigos de periódicos	24
Quadro 3	Artigos de anais de eventos	25
Quadro 4	Tópicos de análise dos artigos de anais de eventos	26
Quadro 5	Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula	36
Quadro 6	Categorias de tarefas de Modelagem Matemática	42
Quadro 7	Tópicos de Geometria Plana	67
Quadro 8	Características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática	68
Quadro 9	Tarefa Estação de Bombeamento	81
Quadro 10	Resposta de Paula e do Mediador no GeoGebra	88
Quadro 11	Estimativas dos estudantes	89
Quadro 12	Manipulações de Paula paralelas a interações no chat	90
Quadro 13	Retomado do conceito de baricentro	92
Quadro 14	Colaboração na manipulação do GeoGebra	93
Quadro 15	Encaminhamentos finais da sessão	94
Quadro 16	Síntese das Fases 2 e 3 de análise do <i>chat</i> da sessão 2	95
Quadro 17	Tarefa Polígono ABCDE	108
Quadro 18	Construção do polígono ABCDE	112
Quadro 19	Interações no <i>chat</i> e na aba GeoGebra	112
Quadro 20	Síntese das Fases 2 e 3 de análise do <i>chat</i> da sessão 3	115
Quadro 21	Tarefa Caminhando com Carol	123
Quadro 22	Interações entre Paula e Zeca	128
Quadro 23	Manipulações, inserções e apontamentos do mediador e de Paula	131
Quadro 24	Comparando respostas obtidas pelo modelo construído e pelo modelo ideal	135
Quadro 25	Síntese das Fases 2 e 3 de análise do <i>chat</i> da sessão 4	137

LISTA DE SIGLAS

- ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
- AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem
- AVEA – Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem
- CNMEM – Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática
- ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática
- Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
- EAD – Educação à distância
- EO – Educação Online
- EP – Episódio
- FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
- GEMM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática
- GEPETICEM – Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática
- GT10 da SBEM – Grupo de Trabalho 10 da SBEM
- LEMM – Laboratório Experimental de Modelagem Matemática
- MM – Modelagem Matemática
- MOODLE – Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment
- PPGEDUC – Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e demandas populares
- PROEXT da UFRRJ – Pró-Reitoria de Extensão da UFRRJ
- SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática
- SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
- TIDIA-AE – Tecnologia da Informação no Desenvolvimento da Internet Avançada-Aprendizado Eletrônico
- UFPA – Universidade Federal do Pará
- UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
- VMTcG – Virtual Math Teams com GeoGebra

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS	17
CAPÍTULO 1 – MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO <i>ONLINE</i>	21
1.1 MAPEAMENTO DE DISSERTAÇÕES E TESES SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO <i>ONLINE</i>	21
1.2 COLETA, ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE DOS ARTIGOS DE PERIÓDICOS E DE ANAIS DE EVENTOS	23
1.3 DISCUSSÕES DOS ARTIGOS DE PERIÓDICOS E DE ANAIS DE EVENTOS SEGUNDO OS TÓPICOS DE ANÁLISE	27
1.4 DIRECIONAMENTOS ENCONTRADOS NOS TRABALHOS SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO <i>ONLINE</i>	29
CAPÍTULO 2 – TAREFAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM <i>ONLINE</i> E SÍNCRONO	32
2.1 MODOS DE ENTENDER E FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO	32
2.2 EDUCAÇÃO <i>ONLINE</i> E INTERAÇÕES EM UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM (AVA)	37
2.3 TAREFAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA PENSADAS PARA PRÁTICAS DE EDUCAÇÃO <i>ONLINE</i>	40
CAPÍTULO 3 – TEMAS MATEMÁTICOS, PODERES NATURAIS, CONSTRUCTOS PEDAGÓGICOS	44
3.1 TEMAS MATEMÁTICOS	44
3.2 ESTRUTURA DE UM TEMA: CONSCIÊNCIA, EMOÇÃO E COMPORTAMENTO	49
3.3 PENSAMENTO MATEMÁTICO, PODERES NATURAIS E MATEMÁTICOS	53
3.4 CONSTRUCTOS PEDAGÓGICOS E ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS	59
CAPÍTULO 4 – ORGANIZAÇÃO E MÉTODO DA PESQUISA	67
4.1 O CURSO “INTERAÇÕES E ESTRATÉGIAS DE MODELAGEM NO AMBIENTE VMT COM GEOGEBRA”	67
4.2 O CONTEXTO DAS SESSÕES E OS GRUPOS DE ESTUDANTES	70
4.3 TIPO DE PESQUISA	73

4.4 INSTRUMENTOS DE PRODUÇÃO DE DADOS	75
4.5 ANÁLISE DOS DADOS PRODUZIDOS	75
CAPÍTULO 5 – A TAREFA ESTAÇÃO DE BOMBEAMENTO	80
5.1 PLANEJAMENTO E OBJETIVOS DA TAREFA ESTAÇÃO DE BOMBEAMENTO	80
5.2 EPISÓDIOS DO GRUPO 5 NO DESENVOLVIMENTO DA TAREFA ESTAÇÃO DE BOMBEAMENTO	82
5.3 EPISÓDIOS DO GRUPO 5 NO DIAGRAMA DE ANÁLISE DE INTERAÇÕES	96
CAPÍTULO 6 – A TAREFA POLÍGONO ABCDE	108
6.1 PLANEJAMENTO E OBJETIVOS DA TAREFA POLÍGONO ABCDE	108
6.2 EPISÓDIOS DO GRUPO 5 NO DESENVOLVIMENTO DA TAREFA POLÍGONO ABCDE	109
6.3 EPISÓDIOS DO GRUPO 5 NO DIAGRAMA DE ANÁLISE DE INTERAÇÕES	115
CAPÍTULO 7 – A TAREFA CAMINHANDO COM CAROL	123
7.1 PLANEJAMENTO E OBJETIVOS DA TAREFA CAMINHANDO COM CAROL	123
7.2 EPISÓDIOS DO GRUPO 5 NO DESENVOLVIMENTO DA TAREFA CAMINHANDO COM CAROL	124
7.3 EPISÓDIOS DO GRUPO 5 NO DIAGRAMA DE ANÁLISE DE INTERAÇÕES	138
CAPÍTULO 8 – DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS	145
8.1 – AS ESTRATÉGIAS, OS PODERES, E OS TEMAS EMERGIDOS DA TAREFA ESTAÇÃO DE BOMBEAMENTO	145
8.2 AS ESTRATÉGIAS, OS PODERES, E OS TEMAS EMERGIDOS DA TAREFA POLÍGONO ABCDE	155
8.3 AS ESTRATÉGIAS, OS PODERES, E OS TEMAS EMERGIDOS DA TAREFA CAMINHANDO COM CAROL	164
CONSIDERAÇÕES FINAIS	173
REFERÊNCIAS	180

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os temas tecnologias digitais e Modelagem Matemática sempre estiveram articulados no meu caminhar, na formação inicial, como professor e pesquisador da área Educação Matemática. Na graduação, na pesquisa realizada para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), investiguei o uso do programa *GraphEquation* para o ensino de tópicos de Geometria Analítica. Posteriormente, nos cursos de especialização, comecei a enxergar na sequência didática que elaborei para o TCC, características que se aproximavam do processo de Modelagem Matemática, resultando assim, no meu primeiro artigo, que foi apresentado e publicado nos anais da VII Conferência Nacional sobre Modelagem em Educação Matemática (VII CNMEM), em 2011. Não sendo diferente na pesquisa da dissertação de mestrado defendida em 2016, na qual investiguei os usos de tecnologias digitais em atividades de Modelagem Matemática.

No curso de doutorado, iniciei em 2018 um intercâmbio no Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEDUC), no Instituto de Educação (IE), da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), na cidade de Seropédica, RJ. No primeiro semestre estagiei com o orientador do intercâmbio, na disciplina “Ensino e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais”. Nessa disciplina tive contato com diferentes ambientes virtuais e ambientes virtuais de aprendizagem (AVA) para o ensino de Matemática.

Até então as noções que havia sobre Educação *Online* (EO) estavam alinhadas à experiência de cursar uma especialização em “Metodologia do Ensino de Matemática e Física”. Neste curso, o modelo de EO que vivenciei aproximava-se das características elencadas por Mercado (2009): combinação de diversos materiais; o ensino sendo processado de forma individual com propostas para atividades colaborativas em grupos; e a flexibilização do tempo e do espaço em que as interações entre aluno e tutor ocorriam.

Nesse curso de especialização tive acesso a livros impressos, arquivos em *Portable Document Format* (PDF), *links* de vídeos em outras plataformas como *YouTube*, e aulas dos professores gravadas em vídeo. Para Mercado (2009) essa combinação de materiais visa um ensino multimídia no qual se incorpora ferramentas de comunicação de dois tipos: síncrona e assíncrona. A primeira, capaz de promover interações em tempo real, como *chats* disponibilizados pelo curso nos quais interagiu com os tutores. E a segunda com capacidade de promover interações em tempo não real, como fóruns nos quais eram postadas perguntas, comentários, críticas e se aguardava respostas no mesmo dia ou nos dias seguintes.

A dinâmica desse curso de especialização *online* alternava momentos presenciais realizados no polo do curso e momentos síncronos e assíncronos realizados no AVA. Os momentos que era necessário comparecer ao polo referiam-se às avaliações do curso, já que o acesso a elas só era permitido presencialmente no polo, e também para assistir aulas gravadas em vídeo, que eram transmitidas simultaneamente para outros polos do país. Já outras atividades como orientações e trabalhos, eram acessadas e desenvolvidas em casa acessando o AVA do curso.

Até o intercâmbio só tive contato com esse modelo de EO, o que não permitia enxergar por meio dele o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, já que considerava e considero o processo de Modelagem Matemática dinâmico e favorável ao trabalho em grupo. Conflitando, assim, com o que vivenciei no curso de especialização à distância, pois tive uma experiência de aprendizado individual aos moldes do ensino presencial e tradicional.

O estágio na disciplina “Ensino e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais” possibilitou conhecer outros modelos de EO, desenvolvidos em ambientes virtuais de aprendizagem, como: o *Virtual Math Teams* com GeoGebra (VMTcG), e o AVA do Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM).

Proporcionou, também fazer uso de ambientes virtuais já familiares, como grupos no *Facebook*, porém inéditos na forma de uso com finalidade pedagógica. No VMTcG fui mediador de uma sessão síncrona com os discentes da disciplina, em que o objetivo era que eles se ambientassem ao AVA manipulando suas ferramentas e descobrindo suas funções.

Trazer esses recortes da minha biografia não teve a intenção de transformar essa introdução em um memorial. Esses recortes iniciam esta tese com o objetivo de contextualizar como conduzi, ao longo dos anos, minhas pesquisas em torno da mesma linha de investigação, articulando o processo de Modelagem Matemática com tecnologias digitais. Esse interesse foi cultivado pelas angústias de um professor de Matemática recém formado, que almejava que seus alunos aprendessem Matemática de forma a fazer sentido e significado na escola e na vida deles. Significados esses que eu, enquanto aluno da educação básica, não enxergava e aos poucos não quis mais enxergar, adequando-me ao sistema e aprendendo a manusear técnicas, com a única finalidade de alcançar notas satisfatórias para passar de ano.

Na escrita da tese busquei organizar os capítulos o mais próximo possível dos momentos vivenciados durante o desenvolvimento da pesquisa. No Capítulo 1, apresento o primeiro passo dado na construção desta Tese, pois conhecia apenas um trabalho no qual atividades de Modelagem Matemática aconteceram na modalidade à distância. Assim, iniciei um

mapeamento de dissertações e teses em *sites* de grupos de estudo e pesquisa, e em sites de programas de pós-graduação, em que existiam linhas de pesquisa envolvendo a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática. Posteriormente ampliei esse mapeamento ao incluir periódicos e anais de eventos nacionais e internacionais.

O que começou como mapeamento virou uma revisão de literatura em que evidenciei singularidades de pesquisas, que se fundamentaram nos temas Modelagem Matemática, Educação à distância e EO. Essa revisão de literatura ajudou a descobrir que existem poucos trabalhos que articulam esses temas, e desses poucos trabalhos, menor ainda é o número daqueles que as pesquisas investigaram atividades de Modelagem Matemática voltadas para o ensino de matemática, desenvolvidas de forma *online* e totalmente síncrona, revelando esse contexto como promissor para desenvolvimento da minha pesquisa.

Para desenvolver atividades de Modelagem Matemática em um ambiente *online* e síncrono precisei aprofundar estudos acerca de concepções de Modelagem Matemática e práticas de EO. No Capítulo 2 apresento concepções que encontrei na revisão de literatura, e concepções que permearam minhas vivências acadêmicas sobre Modelagem Matemática e EO. Assim, compreender características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática e conceitos de EO ajudou no entendimento e na elaboração de tarefas de Modelagem Matemática para serem desenvolvidas de forma *online* e síncrona.

Minhas ações como pesquisador, que resultaram nas escritas dos Capítulos 1 e 2, foram de fundamental importância para o planejamento, elaboração e efetivação de um curso no ambiente *online* VMTcG, no qual graduandos e graduandas de Matemática desenvolveram tarefas de Modelagem Matemática em encontros síncronos. Esse contexto ajudou no reconhecimento do meu objeto de pesquisa, que sintetizei na seguinte questão: Que/Como interações apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática, em um ambiente virtual de aprendizagem online? A princípio meu foco estava nas interações dos estudantes, mas com os avanços da escrita do texto de qualificação, percebi que não teria de qual maneira tomar como solitárias interações, que precisaram das interações do mediador e das interações dos conteúdos matemáticos para acontecer.

Para ajudar nas discussões dessas interações, no Capítulo 3 trouxe discussões de conceitos, como temas matemáticos associados às interações dos conteúdos matemáticos, poderes matemáticos associados às interações dos estudantes, e estratégias pedagógicas associadas às interações do professor. Entender esses conceitos e como eles articulam-se em

práticas de ensino e aprendizagem ajudou a compreender interações, que emergiram do desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática no ambiente online VMTcG.

Os temas matemáticos entendidos como intrínsecos aos conteúdos matemáticos por permeá-los revelando conexões ou elos, sendo eles: liberdade e restrição; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança. Os poderes naturais entendidos como processos matemáticos que ao serem promovidos e utilizados na sala de aula configuram pares de poderes matemáticos, como: liberdade e limitação; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança. E as estratégias pedagógicas derivadas de constructos pedagógicos que informam e embasam práticas pedagógicas quando o professor/pesquisador se vê diante de acontecimentos do seu cotidiano de sala de aula, sendo consideradas neste trabalho as estratégias pedagógicas: diga o que vê, mesmo e diferente, outro e outro, de quantas maneiras, transforme um fazer em um desfazer, andaimes e enfraquecimento, exemplos construídos pelos alunos, desviar a atenção para automatizar, o ensino de técnicas.

No Capítulo 4 configurei o movimento desenhado pela pesquisa, ou seja, quando planejei e desenvolvi um curso de modelagem matemática online e síncrono no VMTcG, não tinha ainda uma questão de investigação. O curso foi constituído a partir do contexto promissor evidenciado na revisão de literatura. Assim, as primeiras seções referem-se ao curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, ao contexto das sessões, e aos grupos de estudantes. Nas seções seguintes descrevo e justifico as escolhas metodológicas, tanto a respeito dos procedimentos de produção, quanto de análise de dados produzidos.

Nos Capítulos 5, 6 e 7 apresento, descrevo e analiso três tarefas de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma síncrona no ambiente *online* VMTcG, em que graduandos do curso de Matemática e o mediador (autor da tese) utilizaram conceitos de Geometria Plana e de outras áreas da Matemática na investigação das situações-problema das três tarefas. A partir das análises, no Capítulo 8, discuto e interpreto as interações dos conteúdos matemáticos dos estudantes e do mediador, segundo os conceitos temas matemáticos, poderes matemáticos e estratégias pedagógicas.

Nas considerações finais retomo a questão de investigação e os objetivos, de acordo com os resultados encontrados nos capítulos de análise e interpretação, evidenciando contribuições pertinentes ao estudo, limitações do trabalho, e contribuições para a área de Educação Matemática, que além da problemática já existente e investigada, precisou ser repensada para tempo de pandemia do novo Coronavírus.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO *ONLINE*

Neste capítulo apresentamos uma revisão de literatura realizada em trabalhos, que relataram investigações sobre Modelagem Matemática e Educação *Online*. Nosso objetivo com esta revisão foi entender como os trabalhos abordaram esses temas, permitindo assim identificar possibilidades para outras pesquisas. Os aspectos metodológicos de busca, seleção e análise dos trabalhos seguiram as orientações de Randolph (2009).

Inicialmente optamos por dissertações e teses, que resultou no trabalho de Menezes (2019a) publicado nos Anais da 39ª Reunião Nacional da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED). Posteriormente, ampliamos os tipos de trabalhos considerados, selecionando também, artigos de periódicos e de anais de eventos, nacionais e internacionais da área de Educação Matemática. Desta forma construiu-se o Capítulo 1, trazendo resultados que alicerçaram o recorte feito para a investigação relatada neste trabalho.

1.1 Mapeamento de dissertações e teses sobre Modelagem Matemática no contexto *online*

Menezes (2019a) apresentou um mapeamento realizado em dissertações e teses que tratavam de atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma *online* no período de 2001-2018. Desse período foram selecionados seis trabalhos: Malheiros (2008a), Santana (2010), Costa (2010), Ferreira (2010), Pereira (2015) e Bustamante (2016). Nos quais foram aferidos: a questão de investigação, a perspectiva de Modelagem Matemática, o AVA, o público-alvo e o tipo de encontro (síncrono, assíncrono ou híbrido¹).

Os resultados desse mapeamento mostraram que as atividades de Modelagem Matemática em três trabalhos – Costa (2010), Ferreira (2010) e Pereira (2015) – foram desenvolvidas na Plataforma *Moodle*. Saindo desse escopo tem os trabalhos de Malheiros (2008a) que usou o AVA Tecnologia da Informação no Desenvolvimento da Internet Avançada – Aprendizado Eletrônico (TIDIA-Ae²), de Santana (2010) que usou um AVA de um curso de Matemática à distância, e de Bustamante (2016) que usou o *Facebook* como AVA.

¹ Mercado (2009) destaca três tipos de comunicação na educação *online*: 1) síncrona, as interações são em tempo real; 2) assíncrona, as interações são em tempo diferido (não real); e 3) híbrida, utiliza a comunicação síncrona e assíncrona.

² Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Programa de Pesquisa e Desenvolvimento nas diversas facetas da tecnologia de informação, telecomunicações e redes de computadores associadas com a Internet Avançada, sendo subdividido nos projetos Kyatera, Incubadora Virtual e Aprendizado eletrônico (Ae) (MALHEIROS, 2008a, p. 17).

Já em relação ao público-alvo dessas atividades, foram em sua maioria professores que ensinam matemática em formação continuada com encontros do tipo híbrido, síncronos e assíncronos, como informado em Malheiros (2008a), Ferreira (2010), Pereira (2015) e Bustamante (2016). Diferentemente dos trabalhos de Santana (2010) e Costa (2010), nos quais o público-alvo foram professores que ensinam matemática em formação inicial e a comunicação estabelecida foi por meio de encontros assíncronos. Dos trabalhos mapeados em Menezes (2019a) foi possível destacar características sobre:

- as perspectivas de Modelagem Matemática, que no contexto *online* variaram de trabalho para trabalho. Em Malheiros (2008a) as atividades foram desenvolvidas como Projetos de Modelagem. Em Santana (2010) e Pereira (2015) a Modelagem Matemática foi entendida, respectivamente, como um ambiente (BARBOSA, 2003, 2006) e alternativa pedagógica (BARBOSA, 2004). Com foco na aliança entre teoria e prática, o trabalho de Costa (2010) norteou a pesquisa a partir de Bassanezi (2002). Ferreira (2010) desenvolveu suas atividades segundo um conjunto de procedimentos (BURAK, 1987, 2004), e Bustamante (2016), de acordo com a concepção de Borba e Villarreal (2005) de gerar ou propor problemas matemáticos;
- o público-alvo das atividades de Modelagem Matemática, a maioria era de professores em formação continuada, somente Santana (2010) tinha como público graduandos em formação inicial, e no trabalho de Costa (2010) no qual graduandos participavam em conjunto com outros pesquisadores e professores;
- o AVA, a maioria das atividades foram desenvolvidas em ambientes voltados para o ensino e aprendizagem, sendo diferente em Bustamante (2016), que optou por fazer uso de grupos fechados no *Facebook*;
- os tipos de encontros, a maioria dos trabalhos relata encontros híbridos, síncronos e assíncronos, destacando-se Santana (2010) e Costa (2010) que realizaram atividades apenas por encontros assíncronos.

Ampliamos as buscas, considerando o potencial dessas características, passando a incluir trabalhos oriundos de periódicos e de anais de eventos da área de Educação Matemática. A seguir apresentamos como se deu a coleta e organização dos trabalhos selecionados, as análises desses trabalhos, bem como direcionamentos para a pesquisa relatada nesta tese.

1.2 Coleta, organização e análise dos artigos de periódicos e de anais de eventos

A busca por periódicos, iniciada às duas horas e cinquenta e cinco minutos do dia 26/01/2019 e finalizada às vinte e três horas e vinte sete minutos do dia 03/03/2019, foi realizada na aba *links*³, do *site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM-Nacional), que dispunha de uma lista de 17 (dezesete) periódicos nacionais e 17 (dezesete) internacionais. Existem mais periódicos na área de Educação Matemática, que não estão citados no *site* da SBEM-Nacional, no entanto, considere o recorte feito pela maior organização da área no Brasil como suficiente para esta revisão de literatura.

Os *sites* dos trinta e quatro periódicos foram acessados checando nos sumários das edições títulos de artigos em periódicos nacionais que continham a palavra “modelagem” ou “modelação” e em periódicos internacionais que continham o prefixo “mod” por englobar referências à palavra “modelagem” ou “modelação” escritas em outros idiomas, como: “modeling”, “modelación”, “modelaje” e “modelización”. Nos periódicos nacionais foram encontrados 187 (cento e oitenta e sete) artigos em 14 (quatorze) periódicos, e nos internacionais foram encontrados 223 (duzentos e vinte e três) artigos em 13 (treze) periódicos. Considerando as indicações de Randolph (2009)⁴ apontadas no mapeamento de Menezes (2019a), analisamos resumos e palavras-chave dos 410 (quatrocentos e dez artigos)⁵, selecionando um total de 06 (seis) artigos, como destacado no Quadro 1.

Quadro 1 – Artigos de periódicos

TIPO	TÍTULO DO ARTIGO	AUTORES (ANO)	PERIÓDICOS (VOLUME)
Nacional	Educação Matemática <i>online</i> : a elaboração de projetos de Modelagem	Malheiros (2008b)	Bolema (V. 21)
	Educação Matemática <i>online</i> : a elaboração de projetos de modelagem	Matucheski (2012)	Bolema (V. 26)
	A escrita e o pensamento matemático no ambiente virtual utilizando a modelagem matemática: experiência de uma turma de 9ºano	Schroetter et al. (2016)	Educação Matemática Pesquisa (V. 18)
Internacional	Developing a mathematical modeling course in a virtual learning environment	Orey; Rosa (2018)	The International Journal on Mathematics Education (V. 50)
	Expansive movements in the development of mathematical modeling: analysis from an Activity Theory perspective	Galleguillos; Borba (2018)	
	Participación de profesores en un ambiente de formación <i>online</i> .	Parra-Zapata et al. (2018)	Educación Matemática (V. 30)

Fonte: *sites* dos periódicos

³ <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/links>

⁴ Randolph (2009) sugere que partindo de uma análise no título, resumo e palavras-chave pode-se incluir ou excluir trabalhos

⁵ Artigos datados no período de 1980-2018

Algumas semelhanças entre os trabalhos já discutidos em Menezes (2019a) e os periódicos incluídos na revisão de literatura foram observadas. Por exemplo, os artigos de Malheiros (2008b) e Matucheski (2012) publicados respectivamente nos volumes 21 e 26 da “Bolema - Revista Boletim de Educação Matemática” são resumos da tese de Malheiros (2008a). O artigo de Galleguillos e Borba (2018), publicado no volume 50 do “The International Journal on Mathematics Education” é um recorte da tese de Bustamante (2016). Considerando que as atividades de Modelagem Matemática relatadas e analisadas nesses periódicos são as mesmas, mesmo que com focos de investigação distintos, não voltei a discuti-las nesta seção.

Assim, optamos pelos trabalhos de Schroetter et al. (2016), Orey e Rosa (2018), e Parra-Zapata et al. (2018), e conforme feito em Menezes (2019a) para análise dos artigos de periódicos selecionados consideramos cinco tópicos: questão de investigação, perspectiva de Modelagem Matemática, AVA, público, e tipo de encontro, como delimitado no Quadro 2.

Quadro 2 – Tópicos de análise dos artigos de periódicos

AUTOR (ANO)	PROBLEMA OU OBJETIVO	PERSPECTIVA DE MM	AVA	PÚBLICO	TIPO DE ENCONTRO
Schroetter et al. (2016)	O presente artigo apresenta o relato de um trabalho de pesquisa utilizando a escrita como ferramenta para o desenvolvimento do processo cognitivo da aprendizagem em matemática.	Metodologia de ensino/aprendizagem, Biembengut e Hein (2000), Stahl (2003), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011)	<i>e-mail</i>	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental	Assíncronos
Orey; Rosa (2018)	Como os recursos tecnológicos disponíveis em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) ajudam os alunos a interagir e desenvolver projetos colaborativos de modelagem matemática que os auxiliem na solução de problemas que enfrentam no dia a dia?	Projetos de Modelagem. Rosa (2000)	Plataforma <i>Moodle</i>	Graduandos	Síncronos e Assíncronos
Parra-Zapata et al. (2018)	Este artigo analisa a participação de um grupo de professores em uma sessão de modelagem matemática em um espaço de treinamento <i>online</i> .	Alternativa para promover, formas diferentes de participação; desenvolver atitudes criativa e crítica. Parra-Zapata et al. (2017)	Plataforma <i>WizIQ</i> ⁶ e Plataforma <i>Moodle</i>	Professores	

Fonte: *sites* dos periódicos

⁶ É uma plataforma de ensino e aprendizagem que permite conversar em tempo real com quem quiser e partilhar um quadro branco, onde todos podem escrever e desenhar. Também é possível fazer o *upload* de diversos tipos de documentos (.ppt, .doc, .pdf) e mostrá-los aos participantes da sessão. Todos podem colocar questões, escrever no quadro branco ou sobre os próprios documentos. A plataforma permite ainda que as sessões sejam gravadas.

Essa quantidade reduzida de artigos de periódicos de um universo de 410 (quatrocentos e dez) artigos confirmou as afirmativas feitas em Menezes (2019a), de que quando focado no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no contexto *online* o número de trabalhos é reduzido. Assim reforçando a necessidade de mais pesquisas nesse viés temático.

Já em relação aos anais de eventos nacionais e internacionais da área de Educação Matemática, a inclusão desses trabalhos justificou-se por entendermos os eventos como espaços em que há uma cobertura maior de participação de alunos de graduação, professores e pesquisadores. Resultando assim, em inúmeras comunicações e relatos de distintas linhas de investigação da área da Educação Matemática apresentados e publicados nos anais.

Dessa forma, optamos pelo maior evento de Modelagem Matemática no Brasil, a Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), e por eventos no âmbito nacional, o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), e internacional, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Eventos nos quais a Modelagem Matemática possui um grupo de trabalho (GT10), estabelecido pela SBEM-Nacional desde 2001.

Os anais da CNMEM não se encontram disponíveis todos em um único lugar, por isso, o acesso a eles se deu no contato com integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática (GEMM), da Universidade Federal do Pará (UFPA). Já os anais do ENEM e do SIPEM estão disponíveis no *site* da SBEM-Nacional. Conforme apresentado na organização dos artigos de periódicos, analisei os títulos dos trabalhos publicados nesses anais, encontrando sete trabalhos sobre atividades de Modelagem Matemática no contexto *online*, conforme apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Artigos de anais de eventos

TIPO	TÍTULO DO ARTIGO	AUTORES/ ANO	EDIÇÃO/ EVENTO
Internacional	Projetos de Modelagem em um curso de formação <i>online</i>	Malheiros (2009)	IV SIPEM
Nacional	Considerações iniciais sobre um curso de Modelagem Matemática em Ambientes Virtuais	Ferreira; Burak (2009)	VI CNMEM
	Modelagem Matemática – uma experiência com a formação continuada de professores utilizando a educação a distância <i>online</i>	Ferreira; Burak (2010)	X ENEM
	Analisando aspectos da organização de um curso de Modelagem à distância: uma contribuição para o debate da pedagogia on-line na educação matemática	Santana (2013)	VIII CNMEM
	Proposta e Resolução de um problema de Modelagem na Educação Matemática <i>online</i>	Galleguillos (2016)	XII ENEM
	Propondo a Modelagem Matemática como um Ambiente Virtual de Aprendizagem	Freitas; Orey; Rosa (2017)	X CNMEM
Modelagem Matemática no Ambiente Virtual de ensino e aprendizagem: alguns encaminhamentos	Borsoi; Silva; Ferruzzi (2017)		

Fonte: anais dos eventos

Ao analisarmos os artigos de anais de eventos selecionados, encontramos interseções entre eles e outros trabalhos já discutidos em Menezes (2019a) e nos artigos encontrados em periódicos. O artigo de Malheiros (2009) publicado nos anais do IV SIPEM é um recorte da tese de Malheiros (2008a), que também se relaciona com os artigos de Malheiros (2008b) e Matucheski (2012). Os artigos de Ferreira e Burak (2009) publicado na VI CNMEM e Ferreira e Burak (2010) publicado no X ENEM são recortes da dissertação de Ferreira (2010). O artigo de Santana (2013) publicado na VIII CNMEM é um recorte da dissertação de Santana (2010). O artigo de Galleguillos (2016) é um recorte da dissertação de Bustamante (2016), que também se relaciona com o artigo de Galleguillos e Borba (2018). Assim, considerando que os artigos trazem novos olhares para as mesmas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma *online*, que já foram discutidas anteriormente, resolvemos não os discutir de novo.

No artigo de Freitas, Orey e Rosa (2017) publicado na X CNMEM identificamos aproximações com o artigo de Orey e Rosa (2018), sendo um artigo teórico, fugindo do escopo delimitado inicialmente de discutir trabalhos que descrevessem atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma *online*. Assim, usamos os cinco tópicos de análise no trabalho de Borssoi, Silva e Ferruzzi (2017) publicado na X CNMEM, conforme Quadro 4.

Quadro 4 – Tópicos de análise dos artigos de anais de eventos

AUTOR ANO	PROBLEMA OU OBJETIVO	PERSPECTIVA DE MM	AVA	PÚBLICO	TIPO DE ENCONTRO
Borssoi; Silva; Ferruzzi (2017)	Discutir o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática amparado pelo uso de recursos tecnológicos, mais especificamente sobre o uso de ambientes virtuais de ensino e de aprendizagem, enquanto aliadas para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.	Fases da Modelagem Matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2012)	Plataforma Moodle	Graduandos	Assíncronos

Fonte: anais dos eventos

Ao considerar o exposto acerca da coleta e organização dos artigos de periódicos e dos artigos de anais de eventos, os trabalhos selecionados foram: Schroetter et al. (2016), Orey; Rosa (2018), Parra-Zapata et al. (2018) e Borssoi; Silva; Ferruzzi (2017). Na seção seguinte apresentamos discussões desses trabalhos norteadas pelos tópicos de análise destacados nos Quadros 02 e 04.

1.3 Discussões dos artigos de periódicos e de anais de eventos segundo os tópicos de análise

No mapeamento de teses e dissertações realizado em Menezes (2019a) os resultados apontavam para pesquisas, que tinham como foco o trabalho com a formação inicial ou continuada de professores que ensinam matemática. Para o desenvolvimento das atividades realizava-se encontros híbridos ou assíncronos, em que o foco acabava sendo o planejamento e o desenvolvimento *online* de atividades para serem realizadas em aulas presenciais de Matemática.

Neste sentido, os trabalhos de Orey e Rosa (2018), Parra-Zapata et al. (2018) e Borssoi, Silva e Ferruzzi (2017) direcionaram suas atividades de Modelagem Matemática para professores em formação inicial ou continuada. Orey e Rosa (2018) e Borssoi, Silva e Ferruzzi (2017), com foco na formação inicial. Os autores da primeira obra descreveram o andamento de uma disciplina de Modelagem Matemática, ofertada para graduandos do curso de Matemática de dois estados distintos, que não haviam conseguido aprovação na primeira vez. Os da segunda obra descreveram atividades *online*, que ocorriam como parte da carga horária de disciplinas presenciais, em que os docentes orientavam, supervisionavam e avaliavam o progresso dos graduandos. Já o trabalho de Parra-Zapata et al. (2018) teve direcionamento para a formação continuada com um curso desenvolvido com nove professores brasileiros e oito colombianos.

Diferente do que aconteceu nos trabalhos citados até então, em Schroetter et al. (2016) houve a participação de alunos da educação básica. As autoras diferenciaram-se também ao usarem o *e-mail* como AVA, para comunicação assíncrona com os alunos. O uso do *e-mail* se deu mediante a inexistência de uma plataforma gerida pela escola, que acolhesse o desenvolvimento da atividade. Em Orey e Rosa (2018), por outro lado, houve a opção por uma comunicação híbrida, alternando entre encontros síncronos via videoconferências, e assíncronos, na Plataforma *Moodle*. Esse hibridismo também foi pontuado por Parra-Zapata et al. (2018), em que houve um encontro síncrono de quatro horas na plataforma WizIQ e duas sessões assíncronas, uma antes e outra depois do encontro síncrono, viabilizadas na Plataforma *Moodle* e no *Google Drive*.

A Plataforma *Moodle* também foi utilizada no relato de Borssoi, Silva e Ferruzzi (2017), na qual ancorava um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem (AVEA), no entanto, dificuldades dos grupos de graduandos em interagir nesse ambiente acabaram fazendo com que eles recorressem a outros espaços de interação, como o aplicativo *WhatsApp*. Infelizmente em Borssoi, Silva e Ferruzzi (2017) não encontrei descrições de uma atividade de Modelagem

Matemática desenvolvida pelos graduandos no AVEA do começo ao fim, o que dificultou entender como seria essa dinâmica. Porém, os recortes de diferentes atividades apresentados e discutidos da interação dos graduandos com as professoras mostram que as atividades focavam no aprendizado de conteúdos matemáticos, conforme se realizavam as fases de Modelagem Matemática (ALMEIDA, SILVA; VERTUAN, 2012).

Já nos trabalhos de Schroetter et al. (2016), Orey e Rosa (2018) e Parra-Zapata et al. (2018), considerando os objetivos de pesquisa assumidos nos trabalhos, foi possível entender a dinâmica de suas atividades de Modelagem Matemática, a partir de suas descrições.

Na atividade de Modelagem Matemática relatada por Schroetter et al. (2016) os alunos foram separados em grupos, e para cada foi criado um *e-mail* em que ocorreram as mediações entre os alunos e as pesquisadoras. A atividade requeria conteúdos matemáticos já vistos, iniciada a partir de um problema gerador (ferrar uma caixa de papelão) e de três questões iguais para todos os grupos. Questão 1. Quanto papel será necessário? 2. Sabe-se que a folha de papel pardo medindo 80 cm x 120 cm custa R\$ 1,00. Quanto será gasto em reais para ferrar a caixa? 3. Dividindo-se o valor gasto para ferrar a caixa entre os integrantes do seu grupo, quanto cada um terá que desembolsar? Posteriormente foi proposto aos alunos uma quarta questão, que solicitava de cada grupo que determinasse a quantidade de certo produto que poderia ser colocado dentro da caixa de papelão. Os autores entendiam a atividade de Modelagem Matemática como sendo uma metodologia de ensino e aprendizagem (BIEMBENGUT; HEIN 2000, STAHL 2003, MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS 2011).

Orey e Rosa (2018) descrevem projetos de Modelagem Matemática (ROSA, 2000), em que foram investigados os temas: poluição da água, do ar, e consumo de água. Com ferramentas da plataforma *Moodle* os tutores e professores postavam encaminhamentos para a disciplina, e os alunos postavam textos, impressões, dados acerca dos temas investigados. Os alunos aproveitavam os encontros síncronos para tirar dúvidas referentes às fases dos projetos e sobre os conteúdos matemáticos.

A investigação de diferentes temáticas também foi pontuada em Parra-Zapata et al. (2018) a respeito do curso envolvendo temas como: educação à distância, tecnologias digitais, visualização, formação de professores, modelagem matemática e evolução das matemáticas. Nesse contexto Parra-Zapata et al. (2018) definem a Modelagem Matemática como uma alternativa para promover formas diferentes de participação e auxiliar no desenvolvimento de atitudes crítica e criativa (PARRA-ZAPATA et al., 2017).

Ao observar o que foi discutido até aqui nos artigos de periódicos e de anais de eventos, identificamos pontos que corroboram as afirmações de Menezes (2019a), como atividades de

Modelagem Matemática no contexto *online*, voltados para a formação inicial ou continuada. No entanto, houve também informações inéditas, como o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática via *e-mail*, de forma assíncrona, para o ensino de alunos da educação básica. Na próxima seção, discutimos os pontos encontrados por Menezes (2019a), juntamente com os itens estudados na análise dos artigos de periódicos e de anais de eventos, corroborando assim, o recorte que fizemos para a elaboração da questão de investigação que regeu a pesquisa descrita nesta tese.

1.4 Direcionamentos encontrados nos trabalhos sobre Modelagem Matemática no contexto *online*

Houve uma mudança nas pesquisas quanto ao propósito, quando analisados os trabalhos oriundos dos periódicos e dos anais de evento. Ainda foram encontrados trabalhos que abordavam o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no contexto *online*, como opção metodológica na formação de professores, como no caso de Parra-Zapata et al. (2018), que relata o desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática nas plataformas WizIQ e Moodle. Contudo, foram encontrados trabalhos que priorizaram tanto formação em práticas de Modelagem Matemática como metodologia, quanto o ensinar Matemática por meio da Modelagem Matemática. Como no caso de Orey e Rosa (2018), que relata o desenvolvimento de projetos por graduandos de um curso na plataforma Moodle, em que, ao mesmo tempo em que eram informados acerca das fases e subfases da Modelagem Matemática, também aprendiam conteúdos matemáticos ao enxergá-los nos contextos reais dos temas investigados nos projetos.

Ainda imerso nessa tipificação de propósitos, destaco trabalhos que relataram o uso da Modelagem Matemática com o propósito principal de ensinar Matemática. Como no caso de Borssoi, Silva e Ferruzzi (2017), que sinalizaram o desenvolvimento de atividade no AVEA em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico entre outras, e o trabalho de Schroetter et al. (2016), que relataram o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática por *e-mail*, com alunos da educação básica. Assim, considerando os textos analisados, identifiquei que existiu uma predominância de trabalhos em que a Modelagem Matemática no contexto *online*, foi apresentada/investigada como uma possibilidade para formação inicial ou continuada de professores que ensinam matemática. No entanto, verificamos nos últimos anos, trabalhos em que a Modelagem Matemática no contexto *online*

é utilizada para ensinar Matemática, mostrando-se também uma vertente frutífera a ser pesquisada.

Neste sentido organizamos os trabalhos mapeados por Menezes (2019a) destacados em azul, e os artigos de periódicos e anais destacados em laranja, segundo dois perfis no infográfico: *Formação* – atividades de Modelagem Matemática no contexto *online* como referência metodológica, para formação inicial ou continuada de professores que ensinam Matemática, em que o foco é entender o processo de Modelagem Matemática; *Ensino* – atividades de Modelagem Matemática no contexto *online* para ensinar Matemática, independente de se os alunos sabem ou não que estão vivenciando uma atividade de Modelagem Matemática, já que o foco está na aprendizagem de conteúdos matemáticos. Como mostra a Figura 1.

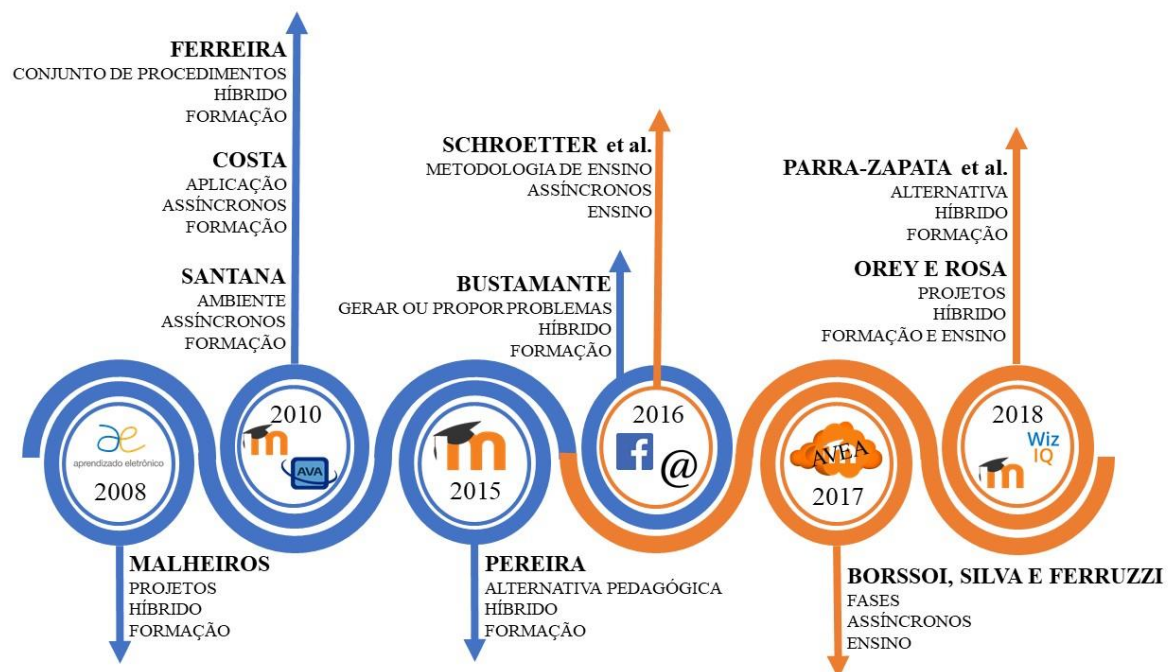


Figura 1 – Infográfico com os trabalhos organizados segundo os perfis *Formação* (azul) e *Ensino* (laranja)

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

O número de trabalhos analisados, quando comparado com o número de trabalhos de Modelagem Matemática que foram investigados neste capítulo, é pequeno, sendo o contexto de ambos os perfis frutíferos para novas pesquisas. No entanto, o perfil *Ensino* mostra-se tímido em relação ao perfil *Formação*, e nesse sentido apresenta potencial para novas pesquisas.

Além disso, outra característica que permeou os trabalhos de ambos os perfis foram os tipos de encontros no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática no contexto *online*, nos quais foi percebido que as interações entre professores e alunos nos AVA foram

estabelecidas de forma assíncrona ou por um modelo híbrido, no qual se mesclou encontros síncronos e assíncronos. Desta maneira, não sendo encontrados relatos de propostas de atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em sua totalidade por meio de comunicação síncrona.

Assim, considerando os resultados obtidos com a revisão de literatura, começamos a planejar um curso inteiramente *online* e síncrono, para o ensino de Matemática, a partir de tarefas de Modelagem Matemática. No Capítulo 2 apresentamos perspectivas de Modelagem Matemática e de Educação *Online*, que culminaram na elaboração e no desenvolvimento desse curso.

CAPÍTULO 2

TAREFAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM *ONLINE* E SÍNCRONO

Neste capítulo apresentamos discussões referentes a concepções sobre a Modelagem Matemática e o seu processo. Parte dessas concepções veio dos trabalhos investigados na revisão de literatura e a outra parte veio das vivências acadêmicas do autor desta tese. Visitar essas concepções permitiu-nos identificar características comuns do processo de Modelagem Matemática nas concepções, o que faz com que estas analisadas, mesmo situadas em contextos teóricos e práticos distintos, serem atividades de Modelagem Matemática.

Conceitos referentes a práticas de Educação *Online* (EO) e interações em um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) também foram discutidos, como Educação a distância (EAD), EO, AVA, *design*, interação, Antecipação Pedagógica (AP). Tanto as características do processo de Modelagem Matemática identificadas nas concepções, quanto os conceitos de práticas de EO ajudaram-nos a conceituar o entendimento acerca de tarefas de Modelagem Matemática, pensadas para serem desenvolvidas nos moldes de práticas de EO, de maneira inteiramente *online* e síncrona.

2.1 Modos de entender e fazer Modelagem Matemática para o ensino

Quando se pesquisa sobre Modelagem Matemática para o ensino de Matemática não é definida uma única concepção. É possível encontrar uma variedade de paradigmas determinados de acordo com o contexto de quem os aplicou e investigou. Assim, essas definições às vezes são remetidas a uma noção da Modelagem Matemática, outras vezes ao seu processo, indo ao encontro do que observou Frejd e Bergsten (2018, p. 124) ao afirmarem que “não há uma distinção clara entre conceituar a Modelagem Matemática como um conceito/noção ou como um processo/atividade” (tradução nossa).

Na revisão de literatura realizada e descrita no Capítulo 1 encontramos diferentes concepções⁷ de Modelagem Matemática. Dentre elas destacamos Bassanezi (2012), Biembengut (2016), Barbosa (2001), Burak (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2013).

⁷ Para cada concepção surgiram modos distintos de imprimir a palavra Modelagem Matemática, sendo nesta seção respeitadas e reproduzidas conforme os trabalhos dos autores.

Bassanezi (2012), um dos percussores do uso da Modelagem Matemática para o ensino, a entende como um processo em que um indivíduo imerso em sua realidade age sobre ela, criando modelos que sintetizam estratégias carregadas de suas interpretações e subjetividades. Assim, para o autor a Modelagem Matemática é uma estratégia usada para se obter explicações ou entendimentos acerca de determinadas situações reais.

Desta forma, “no processo de reflexão sobre a porção da realidade selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (*modelo matemático*), que contemple as relações que envolvem tais argumentos” (BASSANEZI, 2012, p.11). Esse processo de reflexão que gera essa formalização artificial, o modelo matemático, é composto pelas etapas: escolha de temas; coleta de dados; análise de dados e formulação de modelos; e validação.

Biembengut (2016) conceitua modelagem (matemática) como “um método para solucionar alguma situação-problema ou para compreender um fenômeno, utilizando-se de alguma teoria (matemática)” (p. 98). Em outra passagem, quando direcionada para a Educação, a modelagem é entendida como Modelação (Modelagem na Educação) e definida, segundo a autora como “um método que se utiliza a essência do processo da Modelagem no ensino e aprendizagem da Educação formal.” (Idem, p.176).

No contexto da Educação formal é evidenciada por Biembengut (2016) a importância de se orientar a Modelação pelo ensino do conteúdo do programa curricular e não curricular da disciplina, a partir do tema ou assunto abordado. Para Biembengut (2016) os procedimentos da modelagem são caracterizados em três fases: Percepção e apreensão; Compreensão e explicitação; Significação e expressão. Sendo essas fases apresentadas pela autora como etapas procedimentais da Modelação.

Segundo Biembengut (2016) é necessário que os alunos aprendam conteúdos matemáticos pela Modelação, mas também existe uma preocupação em ensinar esses alunos a fazerem pesquisa. A autora, considerando suas concepções e como estruturou o processo de Modelação, mostrou uma preocupação com pontos pertinentes à Educação básica, como tempo e currículo a ser ensinado ou aprendido. Preocupações essas que foram evidenciadas em passagens como “essa pesquisa pode ser feita em grupo de dois ou três estudantes no máximo” (p. 180), justificando o trabalho em grupo dos alunos para a economia de tempo, já que tarefas da Modelação podem ser delegadas e feitas simultaneamente pelos alunos. Assim oportunizando ao professor mais tempo para conhecer cada grupo e orientá-los.

Na concepção de Barbosa (2001) “a Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações

com referência na realidade.” (p. 31). Nesse ambiente, a indagação não é expressa somente por meio de um problema ou um conjunto de problemas, mas como uma atitude constante no processo, desde a identificação, passando pela formulação até a resolução do problema.

A forma como se organiza as atividades nessa concepção varia conforme as circunstâncias do contexto escolar, da experiência do professor, do interesse dos alunos e de outros fatores. Dessa forma, cada configuração curricular é vista e classificada por Barbosa (2001) em termos de casos: caso 1, caso 2 e caso 3.

Os casos de Barbosa (2001) mostram uma gradativa passagem de responsabilidade em que o professor é mais atuante no processo da Modelagem no caso 1 e, conforme seguem os casos 2 e 3, ele estimula que os alunos comecem a ser protagonistas. No entanto, a figura do professor e dos alunos não são anuladas uma pela outra, em todos os casos o professor é o mediador e os alunos podem indagar sobre o quê e como está sendo investigado. Outro ponto importante sobre os casos é que eles “não representam configurações estanques e definitivas, mas regiões de possibilidades” (BARBOSA, 2001, p. 40), sendo assim, ajustáveis conforme demandas do contexto escolar dos professores e dos alunos.

Para Burak (2004) a Modelagem Matemática é entendida como alternativa metodológica para o ensino de Matemática, e o seu trabalho origina-se no princípio “o interesse do grupo ou dos grupos” (BURAK, 2004, p. 2). Esse princípio, base para o trabalho com a Modelagem Matemática, contrapõe-se à forma usual em que o processo de ensino é deflagrado pelo professor, e passa a ser compartilhado com o grupo de alunos, sendo impulsionado pelo interesse pelo assunto. Partindo dessa premissa, Burak (2004) destaca os seguintes aspectos: maior interesse dos grupos; interação maior no processo de ensino e aprendizagem; e demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação e, em consequência, a adoção de uma nova postura do professor.

Para o desenvolvimento da Modelagem Matemática em sala de aula, Burak (2004) destacou cinco etapas: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; e análise crítica da(s) solução (ões). O autor recomenda ainda que “o trabalho com a Modelagem Matemática parte de temas, propostos pelo grupo, ou por grupos constituídos por 3 ou 4 participantes” (BURAK, 2004, p. 3).

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) uma atividade de Modelagem Matemática é constituída de uma situação inicial (problemática), uma situação final (uma solução), e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários utilizados para passar da situação final para

a situação inicial. A situação inicial é entendida pelos autores como uma situação-problema e a situação final é uma solução matemática, o modelo matemático.

Entende-se por problema aquela situação em que o indivíduo não tem um esquema *a priori* para solucioná-lo, e por modelo matemático, uma representação simplificada da realidade. O conjunto de procedimentos que caracteriza essa passagem da situação inicial para a situação final acontece segundo as seguintes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) a Modelagem Matemática é entendida a partir da concepção de educar matematicamente, na qual a Matemática é tomada segundo regras e convenções, que são estabelecidas dentro de determinado contexto social, histórico e cultural, permeado por relações de poder. Neste sentido os autores entendem o processo segundo um esquema cíclico, que se inicia com um problema real, passa por hipóteses de simplificação, por um problema matemático, pela resolução (aproximada!) do problema matemático, seguindo pela validação matemática e social da solução. Podendo o processo ser finalizado nesse momento ou retomado para o início (processos decisórios).

Para além das concepções de Modelagem Matemática defendidas pelos autores encontrados na revisão de literatura, destacamos também as concepções constituídas nos espaços do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática (GEMM) e do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM).

No GEMM, Chaves, Espírito Santo (2008) consideram a Modelagem Matemática como um:

(...) processo que consiste na tradução de situações/problemas, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de símbolos ou de relações matemáticas – Modelo Matemático – que procura representar ou organizar a situação/problema proposta com vistas a compreendê-la ou solucioná-la (p. 151).

Para o desenvolvimento desse processo em sala de aula Chaves e Espírito Santo (2011), ao combinarem os casos de Barbosa (2001) com as etapas de Burak (2004) e de Chaves e Espírito Santo (2008), delimitaram três possibilidades com nuances para ações do professor e dos alunos no desenvolvimento da Modelagem na sala de aula, como exposto no Quadro 5.

Quadro 5 – Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula

ETAPAS DO PROCESSO	POSIBILIDADES		
	1	2	3
ESCOLHA DO TEMA	professor	professor	prof./aluno
ELABORAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA	professor	professor	prof./aluno
COLETA DE DADOS	professor	prof./aluno	prof./aluno
SIMPLIFICAÇÃO DOS DADOS	professor	prof./aluno	prof./aluno
TRADUÇÃO/ RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	prof./aluno	prof./aluno	prof./aluno
ANÁLISE CRÍTICA DA SOLUÇÃO/VALIDAÇÃO	prof./aluno	prof./aluno	prof./aluno

Fonte: Chaves e Espírito Santo (2015)

Nesse cenário, e de acordo com Chaves, Espírito Santo e Souza (2011), a *escolha do tema*, a *elaboração da situação-problema* e a *coleta de dados* constituem a interação. O levantamento de hipóteses, conjecturas e a seleção de variáveis correspondem ao momento de *simplificação dos dados*. A elaboração do modelo matemático ou a organização matemática da situação-problema correspondem à *tradução/ resolução do problema*. E a verificação da adequabilidade do produto do processo de Modelagem Matemática corresponde à *análise crítica da solução/validação*.

Na *Possibilidade 1* o professor assume no processo de Modelagem Matemática as competências de escolher o tema, problematizar, coletar e simplificar os dados, sendo mediador nas etapas seguintes, nas quais contará com a participação conjunta dos alunos. Neste sentido, o professor ajudará os alunos a elaborarem suas próprias hipóteses, testar suas conjecturas e descobrir por si só seus erros e acertos. Na *Possibilidade 2*, o que de diferente acontece é que o professor pode contar com a parceria dos alunos mais cedo, desde a coleta e simplificação dos dados, requerendo mais atenção do professor na mediação da pesquisa. Já na *Possibilidade 3* professor e alunos firmam uma parceria desde o início do processo, pela escolha do tema.

No LEMM, Braga (2015) ao desenvolver sua pesquisa de doutorado, na qual analisou atividades de Modelagem Matemática na perspectiva dos princípios da Teoria da Atividade de Engeström, assumiu como concepção:

a Modelagem Matemática configurada como um sistema de atividade que contempla um ambiente de experimentação favorável à aprendizagem de sujeitos por meio de interações com o objeto, os artefatos, as regras, a divisão do trabalho e a comunidade do sistema. (p. 42)

Braga (2015) em suas pesquisas e práticas de Modelagem Matemática conseguiu e consegue elaborar e desenvolver investigações com graduandos do curso de Matemática pesquisando temáticas características da região amazônica. Ao aproximarmos o trabalho desenvolvido por Braga (2015) com as possibilidades de Chaves e Espírito Santo (2011), a primeira construiu momentos que perpassaram as três possibilidades dos segundos. Ela elaborou atividades em que tinha maior controle ao trazer o tema, dados, variáveis e a partir daí

incluindo os graduandos como parceiros na investigação, configurando a *Possibilidade 1*. Também organizou atividades em que eram disponibilizados temas e os graduandos conforme aproximação ou interesse escolhiam, configurando a *Possibilidade 2*. Até atividades que os graduandos começavam a participar desde a ideia de que tema seria investigado por eles, configurando a *Possibilidade 3*.

As concepções analisadas são distintas no que tange ao local e nível que são aplicadas, superior ou básico, e se alteram conforme o contexto cultural, social e histórico dos pesquisadores/professores e dos alunos. No entanto, mesmo os autores imbuídos de diferentes modos de perceber, conceber e fazer Modelagem Matemática, foi possível identificar características comuns, que atravessam essas concepções e que influenciam nosso modo de perceber a Modelagem Matemática. Desta maneira ensejando adotá-las no ensino de Matemática em encontros síncronos em um AVA. Sendo elas: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo⁸.

2.2 Educação *online* e interações em um ambiente virtual de aprendizagem (AVA)

Segundo Giraldo, Caetano e Mattos (2012, p. 312) “o termo Educação a Distância representa uma variedade de modelos educacionais que possuem uma característica em comum: estudantes e professores separados fisicamente e interligados por meio de algum canal de comunicação.” Assim temos uma modalidade de educação, com complexidades próprias e especificidades. Além da separação física, professores e alunos também podem estar separados temporalmente, caracterizando modalidades de EAD síncronas e assíncronas⁹ (GIRALDO, CAETANO e MATTOS, 2012).

Como no ensino presencial, o ensino na EAD é organizado segundo componentes fundamentais, como conteúdos curriculares, interação com professores, com colegas e equipamentos, aplicações práticas e avaliação. Desta forma, essa modalidade de ensino consiste em um processo educacional planejado, em que o processo de ensino e aprendizagem acontece

⁸ Para exemplo de uma atividade desenvolvida de forma presencial segundo essas características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática veja Menezes (2019b).

⁹ Para Mercado (2009), comunicação síncrona acontece em tempo real, assíncrona em tempo diferido, e híbrida é uma combinação de comunicação síncrona e assíncrona.

em lugares e horários distintos, para a interação de professores e alunos, requerendo estratégias didáticas e de interação específica.

Nesse contexto temos a EAD como algo maior. Enquanto que o ensino remoto, educação online (EO), ensino virtual, educação virtual, educação remota, são modelos pedagógicos imersos na modalidade de ensino EAD, não sendo sinônimos e carregando especificidades, que as diferem a depender da estratégia e do tipo de interação requisitada. Bairral (2020) ao definir EO pontua o seguinte:

EAD não é sinônimo de educação *online* (EO). (...). Esta transita no imbricamento entre o real e virtual, comunicação síncrona e assíncrona, distante e perto, individual e coletivo, espaço formal e não formal de aprendizagem, todos mediados por tecnologias digitais em rede e que rompem com a comunicação de um para todos. Na EO os discursos são hipertextuais, a aprendizagem não é vista como transmissão, mas como práticas situadas e compartilhadas em ambientes pedagogicamente planejados para fins educacionais diversos, todos com mediação do professor ou de uma equipe que efetivamente construiu o seu *design*. (p. 198)

Ao definir EO, Bairral (2020) também pontua características de outro modelo de EAD, difundido nos últimos anos por cursos pensados e desenvolvidos em uma perspectiva de transmissão de conhecimentos, corroborando a afirmativa de Menezes (2020), que considera esse modelo de formação com foco em aulas gravadas, materiais e orientações disponibilizadas em um AVA. Não sendo muito diferente do ensino tradicional, amplamente utilizado na modalidade presencial.

Nesta configuração de EAD, Giraldo, Caetano e Mattos (2012) consideram que um bom AVA além de favorecer a comunicação entre os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem virtual, permite o armazenamento de conteúdos e atividades didáticas. Bem como permite a realização de fóruns de discussão, a entrega de trabalhos, a avaliação desses registros e a divulgação de notas, e publicação de mensagens e notícias.

Em se tratando de práticas de EO, Mercado (2009) pontua algumas vantagens, como a flexibilidade do ambiente de estudo, em que a atividade independe da geografia espacial e temporal em que se encontram alunos e professor. Neste contexto destaca também as diferentes modalidades interativas, nas quais se enquadram a interação dos alunos com os materiais didáticos oferecidos, a interação com o tutor, com os outros colegas e com o ambiente virtual. Sobre interações dos sujeitos com o ambiente virtual, Menezes e Bairral (2020) afirmam que essas interações podem acontecer em redes sociais (chats do *Facebook*, *WhatsApp* etc.), ou em AVA (Plataforma Moodle, Virtual Math Teams com GeoGebra - VMTcG, entre outros).

Entendemos interação, nesta tese, como “uma forma de comunicação (escrita, oral, gestual, pictórica, icônica etc.) estabelecida entre sujeito(s)-sujeito(s) ou entre indivíduo(s) e tecnologia(s)”. E também como um constructo, capaz de ajudar a compreender o aprendizado e o desenvolvimento profissional de sujeitos em determinados cenários, incluindo o virtual (BAIRRAL, 2015). Partindo de interações em um AVA podemos destacar cinco características organizadas por Souza e Bairral (2016), que podem auxiliar o professor na arquitetura do *design* de suas práticas em EO:

1. Favorecer a hipertextualidade e a multimodalidade discursiva, com a integração de linguagens diversas (sons, textos, imagens dinâmicas e estáticas, gráficos, mapas etc.).
2. Potencializar constantemente a comunicação interativa (síncrona e assíncrona).
3. Propor atividades formativas, que estimulem a construção do conhecimento a partir de situações-problema, nas quais o sujeito possa contextualizar e problematizar questões locais e globais do seu universo cultural.
4. Criar ambiências para a avaliação formativa, nas quais os saberes sejam construídos em um processo comunicativo constante de negociações e de tomada de decisões.
5. Favorecer conexões lúdicas e artísticas e incentivar navegações críticas, criativas e autorais. (SOUZA e BAIRRAL, 2016, p. 41).

Na EO não necessariamente é preciso ter um AVA, outros ambientes podem ser usados, a depender do *design* elaborado pelo professor para o ensino *online*. Por exemplo, Bustamante (2016), para desenvolver atividades de Modelagem Matemática usou grupos fechados no *Facebook*. Já Schroetter et al. (2016) desenvolveu suas atividades de Modelagem Matemática via *e-mail*. Tanto o *Facebook* quanto o *e-mail* não são ambientes com finalidades educacionais, no entanto serviram para esse propósito, conforme planejamento das pesquisadoras. Sobre essa especificidade de práticas de EO, Bairral (2020) pontua que:

Práticas em EO ocorrem em cenários diversos, alguns são denominados AVA. Um AVA não é um mero repositório. Disponibilizar aulas, textos, vídeos para que os sujeitos possam acessar, baixar e comentar pode ser uma estratégia pedagógica importante, mas ela não é suficiente se as atividades e o acompanhamento dos formadores não forem sistemáticos e interligados hipertextualmente a esses materiais. (p. 199)

A escolha do ambiente, a tarefa, as tecnologias, as estratégias em EO são elaboradas e acompanhadas pelo professor ou a equipe que efetivará as práticas. É importante ressaltar que não basta ter a tarefa perfeita sem um ambiente que ofereça condições para o seu desenvolvimento. Neste sentido, vamos ao encontro do que defende Bairral (2020), ao definir *design* não o resumindo a apenas uma tarefa, mas como:

(...) um sistema amplo, vivo e articulado, um ecossistema de ensino e de aprendizagem. Por mais que uma tarefa esteja bem planejada, se não houver um ambiente interativo de seu aceite, de pertencimento autêntico e de sua transformação, os silêncios, os distanciamentos e as aversões para aprender *online* continuarão. (p. 198)

No planejamento desse *design* o professor precisará antever possíveis caminhos de resolução, que o aluno ou o grupo de alunos irá tomar, e também possíveis equívocos que podem emergir, tanto em relação à tarefa, quanto ao ambiente escolhido para o desenvolvimento desta. Bairral (2020) nomeia esse exercício feito pelo professor, de antever possíveis desdobramentos do desenvolvimento da tarefa, no ambiente escolhido de antecipação pedagógica (AP), definindo-o como “uma ação docente, que busca evitar muitos atropelos que podem dificultar o aprendizado ou até mesmo causar o abandono do aprendiz. Problemas informáticos, didáticos, linguísticos, motivacionais etc., são sempre objetos de atenção na AP” (p. 199).

Compreender conceitos como EAD, EO, AVA, interação, *design*, AP influenciou nosso olhar em relação ao processo de ensino e aprendizagem *online*. Possibilitando assim enxergar potencialidades em configurações de práticas de EO, por favorecer o trabalho em grupo de professores e alunos, permitir diferentes caminhos na resolução de tarefas, requerer a organização de um ambiente *online* que favoreça a construção do conhecimento e a combinação de conhecimentos de todos os envolvidos. De certa forma essas características percebidas em práticas de EO conversam com as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática discutidas na Seção 2.1. Assim, na próxima seção descrevo como concebemos tarefas de Modelagem Matemática possíveis de serem desenvolvidas nos moldes de práticas da EO.

2.3 Tarefas de Modelagem Matemática pensadas para práticas de Educação Online

Como mencionado na seção 2.2, o *design* didático em um ambiente *online* não é composto apenas da tarefa. Ela é importante, no entanto, outros elementos como as estratégias assumidas pelo professor na mediação podem fazer com que os silêncios, distanciamentos, a sensação de pertencimento ou não, sejam evitados ou potencializados. Esses elementos (tarefas, estratégias, interações) do *design* precisam ser pensados a depender do ambiente virtual ou AVA, da dinâmica *online* ou híbrida (presencial e online), e do perfil dos alunos que farão parte desse ecossistema.

Para Bairral (2018) a tarefa é uma peça que constitui a atividade formativa (tarefa+interação+colaboração), em que esta se refere ao “exercício” a ser feito, enquanto que a atividade refere-se ao aceite e a efetivação dessa tarefa, ou seja, o caminhar. Por exemplo, o VMTcG¹⁰ é um AVA que dispõe de três espaços de interação *online* e síncrono, em que cada espaço tem potencial de enriquecer uma investigação, ao oferecer diferentes formas de comunicação, com diferentes linguagens: as construções no GeoGebra, as possibilidades de edição de textos e imagens no quadro branco, e os diálogos nos *chats*.

Porém, Bairral (2018) alerta que oferecer opções variadas de comunicação não é garantia de um processo interativo. Para o autor, “a tipologia das tarefas constitui elemento formativo importante no ambiente virtual, à medida que funciona como articuladora dos diferentes aspectos do conhecimento matemático” (BAIRRAL, 2018, p.43). Assim, cada contexto formativo exige tarefas diferenciadas e, conseqüentemente, deflagram uma atividade formativa diferente. Neste cenário, o autor, a partir de suas experiências com formação inicial de professores, reconhece que a elaboração de tarefas tem sido um desafio.

No contexto da Modelagem na Educação Matemática, a tarefa estimula “a colaboração e interação entre os alunos, professor e objetos investigados” (BRAGA, 2009). O termo “tarefa” para Silva e Oliveira (2012) é entendido como similar ao termo “atividade”. Dessa forma, as autoras destacam que é necessário a organização de um ambiente que contenha uma situação-problema e um planejamento da aula, e de estratégias para sua condução. Já para Prado, Silva e Santana (2013) “tarefa de Modelagem Matemática” é entendida como um ambiente de aprendizagem, em que os alunos são convidados a investigar matematicamente situações com referência na realidade, sendo essa definição um segmento da concepção de Modelagem Matemática de Barbosa (2001), discutida na seção 1.1.

Tanto Silva e Oliveira (2012) quanto Prado, Silva e Santana (2013) pontuam em suas definições sobre tarefas de Modelagem Matemática a necessidade de uma situação-problema. Os últimos acrescentam ainda que essa situação tenha referência na realidade. Sobre referência, Alrø e Skovsmose (2010) abordam diferentes formas de referências, que podem repercutir em diferentes tipos de ambiente de aprendizagem. Nesse contexto, Alrø e Skovsmose (2010) caracterizaram ambientes de investigação segundo três tipos de referências: a matemática pura (atividades puramente matemáticas), a semi-realidades (realidade construída, situação artificial), ao mundo real (realidade com elementos do contexto dos alunos).

¹⁰ Será apresentado no Capítulo 4

Prado, Silva e Santana (2013) elencaram três categorias de tarefas de Modelagem Matemática, considerando o Caso 1 de Barbosa (2001), discutido na seção 2.1, que variam em fechada, semifechada e aberta, explicitadas no Quadro 6.

Quadro 6 – Categorias de tarefas de Modelagem Matemática

	Fechada	Semifechada		Aberta
Conteúdos matemáticos	São indicados os conteúdos a serem utilizados.	São indicados os conteúdos a serem utilizados.	Não são indicados os conteúdos a serem utilizados.	Não são indicados os conteúdos a serem utilizados.
Manipulação dos dados	É indicado como os alunos deverão manipular os dados.	Não é indicado como os alunos deverão manipular os dados.	É indicado como os alunos deverão manipular os dados.	Não é indicado como os alunos deverão manipular os dados.
Estratégias de resolução	Não há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.	Há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.	Não há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.	Há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.
Solução	Há uma única solução.	Há possibilidade de soluções similares.	Há possibilidade de soluções similares.	Há possibilidade de diferentes soluções.
Enquadramento/Limitações e possibilidade de comunicação	Enquadramento mais forte: apresenta um controle das interações comunicativas centradas no professor, bem como limita a comunicação dialógica entre professor e alunos.	Variações entre o enquadramento mais forte e mais fraco: apresenta variações no controle de interações comunicativas, ora por parte do professor, ora por parte dos alunos, bem como limita e possibilita a comunicação dialógica entre o professor e alunos.		Enquadramento mais fraco: não apresenta um controle das interações comunicativas centradas no professor, bem como possibilita a comunicação dialógica entre professor e alunos.

Fonte: Prado, Silva e Santana (2013, p. 10)

A zona de conforto e a zona de risco assinaladas na base do Quadro 5 estão relacionadas com a atuação do professor no desenvolvimento das tarefas. Se ele tem mais controle, considerando situações conhecidas e previsíveis decorrentes da tarefa, o risco é menor. Assim, quanto menor o controle, maior a probabilidade de aparecer situações inesperadas, estando o professor preparado para enfrentá-las (PRADO, SILVA e SANTANA, 2013).

A partir do que foi exposto neste capítulo, consideramos para elaboração de tarefas de Modelagem Matemática a serem desenvolvidas nos moldes de práticas de EO, um *blend* do que foi pontuado por Bairral (2018) com o que foi pontuado por Braga (2015), Silva e Oliveira

(2012) e Prado, Silva e Santana (2013). Entendemos que o desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática figurará como uma atividade formativa, implementada de forma inteiramente *online* e síncrona no contexto desta pesquisa, na qual a tarefa é apresentada como proposta/convite de investigação de uma situação-problema, com potencial de deflagrar interações e trabalho colaborativo.

Dessa forma, as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática, as características de interação em um AVA, juntamente com as possibilidades dos espaços de interação de um AVA, permitiram organizar um *design* didático. Neste, as situações-problema (fechadas, semifechadas e abertas referenciados na matemática ou em semi-realidades) foram propostas por mim, na condição de professor (mediador), para serem investigadas matematicamente por estudantes, em um ambiente *online* e síncrono.

Assim como as características do processo de Modelagem Matemática, as interações em um AVA, o próprio AVA, a tarefa de Modelagem Matemática, o planejamento realizado pelo professor e a AP, no Capítulo 3 são discutidos conceitos que nos ajudaram a entender interações emergidas desse *design* didático. Ele foi planejado para o desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática nos moldes de práticas de EO, que são os papéis dos sujeitos (professor e aluno) e dos objetos matemáticos (conteúdos), investigados nesse ecossistema de ensino e aprendizagem.

CAPÍTULO 3

TEMAS MATEMÁTICOS, PODERES NATURAIS, CONSTRUCTOS PEDAGÓGICOS

Neste capítulo reunimos discussões teóricas voltadas para o conteúdo matemático, o aluno e o professor com potencial de auxiliar na compreensão de interações, no desenvolvimento inteiramente *online* e síncrono, de tarefas de Modelagem Matemática. Na primeira e segunda seção, apresentamos discussões acerca de temas matemáticos intrínsecos aos conteúdos matemáticos, e três aspectos da psique humana, consciência, emoção e comportamento, que impactam o contato do aluno com tópicos matemáticos.

Na terceira seção, discutimos o pensamento matemático segundo os seguintes poderes: imaginar e expressar o que é imaginado; particularizar/especializar e generalizar; conjecturar e convencer a si e aos outros; classificar e organizar. E na quarta seção, apresentamos constructos pedagógicos e estratégias pedagógicas úteis para pensar ações possíveis do professor no ensino de Matemática.

3.1 Temas matemáticos

Nesta seção apresentamos temas importantes que permeiam a Matemática e que servem para estabelecer conexões entre conteúdos matemáticos, que comumente são tratados nas aulas de Matemática de forma fragmentada. Mesmo em áreas da Matemática como a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, os conteúdos são apresentados para os alunos de forma desconectada, tanto internamente entre conteúdos de uma mesma área, quanto de conteúdos de áreas diferentes. Sendo esse trabalho isolado decorrente da supervalorização de técnicas de domínio do conteúdo (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Para Mason e Johnston-Wilder (2004) existem vários temas intrínsecos à Matemática, que foram identificados por pensadores diferentes ao longo dos séculos, que são úteis para revelar conexões ou elos entre conteúdos matemáticos que, de outra forma, poderiam passar despercebidos. São eles: *liberdade e limitação; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança*.¹¹

¹¹ Tradução literal de: *Freedom and Constraint, Doing and Undoing, Extending and Restricting, Invariance and Change* (JOHNSTON-WILDER & MASON, 2005, p.228-232).

Liberdade e limitação

Foster et al. (2005) consideram que em Matemática as limitações dos axiomas, leis e propriedades são necessárias para resolver problemas matemáticos. Neste sentido, Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que os problemas começam por algum objeto matemático (talvez um número, ou uma forma) indefinido ou arbitrário, no qual se impõe limitações, e de acordo com cada limitação, é possível saber se existe liberdade suficiente para que alguns objetos atendam a essa limitação. Utilizando objetos matemáticos como pontos e retas, Johnston-Wilder e Mason (2005) ilustram os temas *liberdade e limitação*:

Um ponto tem liberdade de estar em qualquer lugar no espaço; dois pontos distintos determinam um segmento de reta, sendo este livre para estar em qualquer lugar no espaço e ter qualquer comprimento (diferente de zero); um terceiro ponto, ponto médio dos dois primeiros, está limitado pelas escolhas feitas para esses dois primeiros pontos, ao passo que a livre escolha para um quarto ponto na reta tem certa liberdade, porém, está limitado a estar na reta. Essas observações triviais têm consequências de longo alcance. Configurações mais complicadas de pontos, retas, triângulos, círculos, e assim por diante produzem liberdades e limitações mais sofisticadas (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p.228-232, tradução nossa).

Os exemplos pontuados por Johnston-Wilder e Mason (2005) são simples, podemos imaginar colegas professores de Matemática não dando importância a isso, já que é algo que parece ser óbvio e por isso os alunos conseguiriam intuir sem precisar de explicação. Mas é justamente por causa desse tipo de pensamento, do “crer em obviedades que não precisam ser ensinadas”, que alunos passam pelo ensino fundamental e chegam ao ensino médio com lacunas em conteúdos básicos da Matemática.

Em Foster et al. (2005), os autores reconhecem que essas limitações são tão implícitas na Matemática que, na maioria das vezes, parecem quase que intuitivas. Conhecer, por exemplo, as propriedades de quadrados, retângulos, ajudaria a pensar no que acontece quando esses objetos são manipulados. Permitiria comparações ou observações sobre a álgebra envolvida, para se obter as medidas de suas diagonais ou as relações entre seus parâmetros. Assim, essas limitações gerais fornecem uma espinha dorsal para o aprendizado de Matemática (FOSTER et al., 2005).

Sobre construção e manipulação de formas geométricas, na intenção de trabalhar suas propriedades, Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que ambientes de Geometria Dinâmica são frutíferos na exploração das noções de *liberdade e limitação*, ao oferecerem analogias entre construção e raciocínio axiomático. De acordo com os autores, as construções dependem dos elementos e, portanto, criam dependências ou limitações. O raciocínio é baseado em suposições acordadas, análogas às escolhas livres nas construções. As deduções

subsequentes correspondem às limitações. Assim, trabalhar com *softwares* de Geometria Dinâmica pode oferecer aos alunos oportunidades de experimentar a estrutura de dependências de construção, correspondente à estrutura de cadeias de raciocínio, em que um resultado depende de resultados previamente deduzidos (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Para Johnston-Wilder e Mason (2005) a utilidade da busca dos temas liberdade e limitação, quando conteúdos matemáticos são abordados nas aulas, está em estimular os alunos na tomada de consciência sobre escolhas que podem fazer e incentivá-los a fazer essas escolhas. Permitindo, desta maneira, que eles sintam que estão envolvidos e participando das aulas, sendo esse sentimento de envolvimento e participação a principal fonte de motivação. Dessa forma, os autores entendem que explorar esses temas nas aulas, que são próprios dos conteúdos matemáticos, ajuda a fazer com que a disciplina seja vista como uma atividade construtiva, ao invés de uma coleção de técnicas para resolver problemas pré-determinados.

Fazendo e desfazendo

Para Mason (2018), os temas *fazer e desfazer* referem-se à reversão do que é conhecido e do que é procurado. Assim, dado determinado triângulo é possível construir e encontrar as medianas, alturas, bissetrizes, que são consideradas por Johnston-Wilder e Mason (2005) como um fazer, sendo pré-determinadas pelo triângulo dado. Todavia, cada um pode ser transformado em um desfazer, como exemplificam os autores sobre uma reversão do que pode ser solicitado aos alunos. Neste caso, ao invés de pedir para eles construírem as medianas de determinado triângulo, os autores sugerem que dadas as medianas (ou alturas, ou bissetrizes), se construa todos os triângulos possíveis.

Nesse contexto, Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que o fazer geralmente resulta em uma única resposta, como no caso do triângulo em que é possível construir as medianas, no entanto elas estão condicionadas ao triângulo dado. Por outro lado, o desfazer corresponde geralmente a toda uma classe de respostas, já que é oportunizado dimensões de liberdade para explorar, como no caso em que se apresenta as mediadas e é pedido para que se encontrem todos os triângulos possíveis.

Além das possibilidades de exploração, Johnston-Wilder e Mason (2005) destacam nos temas *fazer e desfazer* a solicitação de criatividade, já que é necessário mais discernimento e engenhosidade. Acrescentam, ainda, que uma boa maneira de proceder é tentar casos particulares (especializados), para detectar alguma estrutura comum subjacente (generalização).

Estendendo e restringindo

Do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental a noção de número dos alunos é ampliada a cada ano. Começa nos naturais, passando para os inteiros, racionais, até chegar aos reais. Assim, ao restringir ou estender a atenção – a restrição de domínios de funções ou a extensão de domínios para dimensões mais altas – a importação de definições pode ser enriquecida e os teoremas estruturais elucidados.

Nesse contexto se tem configurada pelos autores uma cadeia de objetos matemáticos em que a noção de subestruturas, subespaços, subgrupos, subcategorias, e outros sub, surge da restrição da atenção, e as técnicas para construir novos objetos a partir de anteriores fornecem exemplos de extensão (BADGER et al., 2012).

Na Geometria encontramos exemplos de casos específicos (restringir), que podem avançar para casos mais gerais (estender). Por exemplo, é possível chamar a atenção dos alunos para a ideia de quadrado, pontuando propriedades do quadrado, como quatro lados congruentes e ângulos retos. Dessa ideia é possível avançar para a ideia de losango, de retângulo, de paralelogramo. Um como sendo caso especial do outro, já que algo é um caso especial de outra coisa, quando todos os teoremas para o mais geral permanecem verdadeiros para a propriedade particular (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Assim, entendemos que ao usar um objeto matemático anterior para trazer a ideia do próximo, se está estendendo a atenção dos alunos, e ao focar em um objeto matemático em detrimento dos outros, se está restringindo a atenção dos alunos. Para Johnston-Wilder e Mason (2005) restringir é necessário para concentrar a atenção dos alunos em certos objetos. Enquanto que estender a atenção, permite aos alunos considerarem o intervalo de alterações possíveis de um parâmetro, conceito, tarefa, forma, e assim por diante, ajudando-os a considerar o alcance das mudanças possíveis.

Invariância e mudança

Para Mason (2018) a invariância em meio à mudança refere-se à situação em que algumas qualidades ou recursos podem mudar, enquanto outros, geralmente relações, permanecem inalterados. O autor entende que a maioria dos teoremas matemáticos pode ser proposta desta forma, e sugere que, geometricamente, vale a pena procurar pontos ou outros objetos que permaneçam invariáveis durante uma transformação, para reconstruir essa transformação. Por exemplo, em $\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$, a presença da letra A, permite entender que seu valor pode mudar, mas o 1 é considerado invariável (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Deste modo, Johnston-Wilder e Mason (2005) recomendam que para qualquer resultado geométrico ou teoremas, é útil questionar: o que é permitido alterar (dimensões de possível variação), de que maneira (alcance de mudança permitida), e o que permanece invariante. Os autores consideram que o que permanece invariável é geralmente uma relação, que pode ser tratada como propriedade e verificada em outras situações. A seguir ilustro essas indicações, aplicando-as no conceito de quadrado.

Em um quadrado, o que pode variar? As medidas dos lados. De que maneira? Considerando números naturais as medidas dos lados, podem variar entre 1, 2, 3, 4, 5 e assim por diante, podendo, a depender da extensão da atenção dos alunos, considerar outros domínios envolvendo outros conjuntos numéricos. Tendo isso definido e usando o GeoGebra pode-se construir o quadrado por meio de diferentes formas ou ferramentas específicas do programa que permite a construção de polígonos regulares. O que permanece invariante? Ângulos retos e lados congruentes. Então, nesse exemplo, o que permaneceu invariante foram elementos que definem o quadrado, podendo esta definição ser verificada em outras construções, como no losango, retângulo, paralelogramo.

Johnston-Wilder e Mason (2005) apontam no ser humano sentidos (ver, ouvir, tocar, cheirar, saborear), que funcionam detectando mudanças. No entanto, a mudança só faz sentido dentro de uma dualidade em que existe algo que não esteja mudando. Nesse cenário, muitas vezes é útil deixar de enfatizar o que está mudando, e passar a enfatizar o que permanece, e depois retomar para elementos ou características que estão mudando. Configurando assim, oportunidades de apreciar significados de uma coleção de objetos ou exemplos. Assim, fornece aos alunos, não simplesmente exemplos, mas exemplos escolhidos para mostrar diferentes aspectos que podem variar (dimensões de possível variação) e sugerir o intervalo em que podem mudar (alcance de mudança permitida).

Quatro temas matemáticos foram apresentados: *liberdade e limitação, fazer e desfazer, estender e restringir, invariância e mudança*. Para Johnston-Wilder e Mason (2005) esses temas não apenas permeiam a Matemática, mas frequentemente servem como elos de conexões entre tópicos aparentemente distintos, ou seja, aprender Matemática pode ser percebido como explorar a variedade de maneiras pelas quais esses temas são desenvolvidos e instanciados ou exemplificados em diferentes conceitos e tópicos matemáticos. Assim, entendemos, que por mais que os temas matemáticos discutidos nesta seção sejam pautados segundo ações do professor e dos alunos, os temas não remetem nem a um e nem a outro, pois são inerentes aos conceitos e aos tópicos matemáticos, sendo apenas expressos nas ações do professor e do aluno.

3.2 Estrutura de um tema: consciência, emoção e comportamento

Segundo Johnston-Wilder e Mason (2005) todo tópico matemático consiste de três vertentes que refletem uma estrutura da psique humana: consciência (aspectos cognitivos), emoção (aspectos afetivos) e comportamento (aspectos enativos). A relevância da discussão desses aspectos se dá pelo impacto que causam nos encontros dos alunos com os tópicos matemáticos.

Consciência

Quando pensamos em algo, por exemplo, em “cadeira”, essa palavra ressoa em cada pessoa de forma diferente. Alguns vão pensar na cadeira da sala de jantar de casa, outros na cadeira desconfortável da escola, outros vão lembrar-se de consertar a cadeira quebrada nas comemorações de final de ano. Enfim, para cada pessoa a palavra “cadeira” despertará um conjunto de associações próprio de seu contexto, ou seja, é o que “vem à mente” quando essa pessoa ouve a palavra “cadeira”.

No ambiente da sala de aula, de semelhante maneira, os alunos deparam-se com conceitos ou tópicos matemáticos, tais objetos ressoam nesses alunos trazendo associações de outras experiências. “Vem à mente” do aluno algum conhecimento despertado a partir do *start* produzido pelo contato com aquele conceito ou tópico matemático. Dessa forma, conceitos e tópicos matemáticos não são “ideias”, “definições” ou “técnicas”. Ao invés disso, as palavras são rótulos para uma complexa tapeçaria de pensamentos de imagens entrelaçadas, conexões e elos, práticas comportamentais e hábitos, emoções e excitações (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p. 232). Assim, o que “vem à mente” a partir do contato com determinado conceito matemático é entendido como consciência, e definido por Johnston-Wilder e Mason (2005) como “a totalidade de pensamentos, imagens, ideias, associações, tópicos relacionados e conceitos que vem à mente quando você encontra uma palavra ou uma ideia” (p. 232, tradução nossa).

Por exemplo, o que “vem à mente” do aluno quando ele se depara com o termo “Teorema de Pitágoras”? Ele pensa em triângulos? Ele pensa em triângulos retângulos? Ele pensa em uma relação que envolve os lados desse triângulo (catetos e hipotenusa)? Ou ele pensa no Pitágoras em uma perspectiva histórica, como um personagem da história? Percebam que mesmo o foco sendo o “Teorema de Pitágoras” outras consciências podem emergir, relacionadas ou não com o conceito que você deseja que seus alunos aprendam ou relembrem. Fazer esse exercício de supor possíveis consciências que podem vir à superfície das mentes dos

alunos nas aulas, pode orientar o professor a escolher como introduzir, desenvolver e concluir o trabalho em cada um dos tópicos matemáticos e a adaptar tarefas, para que os alunos consigam extrair o máximo possível dos conteúdos ensinados.

Mas nem sempre o que os alunos estão pensando sobre determinado conteúdo matemático está correto, de modo que nesses casos consciências são *ausências*. O que caracterizam essas *ausências*? Coisas que os alunos frequentemente esquecem, conceitos errôneos e interpretações errôneas, erros clássicos que os alunos parecem propensos a fazer (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p. 233).

As *ausências* apresentadas, no entanto, não são indicativos de que os alunos não sabem nada a respeito do que está sendo estudado. É comum o professor comunicar-se de uma forma e achar que a mensagem que ele está passando está chegando aos alunos de igual maneira como ele planejou. Às vezes as relações que os alunos estão fazendo estão indo em uma direção totalmente oposta às que o professor gostaria que eles fizessem. Neste sentido, Johnston-Wilder e Mason (2005) explicam que:

Os antropólogos cunharam a expressão “ausência de evidência não é evidência de ausência”. Em outras palavras, apenas porque um aluno não dá nenhuma evidência de estar ciente ou saber como fazer algo, isto não significa que ele não esteja ciente ou saiba como fazê-lo. Pode haver outras razões pelas quais isso não veio à mente ou foi descartado. Conseqüentemente, deve-se tomar cuidado para não atribuir ausências aos alunos, mas sim ao seu comportamento em um determinado momento. (p. 233, tradução nossa).

Até aqui vimos que consciências são aspectos cognitivos de cada pessoa. Nesse contexto, como o professor pode ter acesso a algo que é interno ao aluno? Incluir os alunos no planejamento das aulas, pedindo que eles construam/criem/registrem o que eles entendem sobre determinado conteúdo, pode ajudar o professor a acessar essas consciências, permitindo que ele se prepare para ensinar um tópico ou atualizar o sentido antes de ensiná-lo novamente. Seria uma avaliação diagnóstica, com a qual seria possível identificar *ausências* como erros e confusões experimentadas pelos alunos.

Emoção

Muitos conteúdos matemáticos foram sistematizados a partir de soluções para situações-problema da realidade, tendo assim todo um processo de investigação e construção de conhecimento, que preconizaram os conceitos e técnicas formais. Diante disso, quando tópicos matemáticos são ensinados nas escolas, toda essa construção subjacente é deixada de lado, restando uma supervalorização de conceitos e no domínio de técnicas desprovidas de significado para os alunos. Assim, o acesso à situação original que intrigou e levou alguém a

solucionar um determinado problema fica faltando, sendo aí que reside em potencial motivação (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Uma das formas de aflorar essa motivação nos alunos está relacionada ao fator surpresa, pois ser surpreendido por algo inflama o interesse, e se esse interesse for sustentado até que se torne uma chama, então os alunos “foram motivados” (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p.234).

A surpresa pode estar na experimentação de propriedades e relações matemáticas. Por exemplo, descobrir via experimentos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , verificar se o mesmo acontece com outras formas geométricas, descobrir se a fórmula do volume de uma esfera pode ser usada para calcular o volume de uma laranja. Enfim, buscar o interesse dos alunos na prática de experimentos. Isto não sendo algo com foco só nos alunos, o professor ao experimentar, ao testar formas de ensinar, consegue passar esse entusiasmo e motivar na hora que estiver ensinando, dessa forma, ao experimentar surpresa o professor está em uma posição melhor para estimular e motivar os alunos a experimentar e se surpreenderem (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

O contexto no qual os problemas emergem também pode ser aproveitado na intenção de invocar surpresa e esperar que os alunos exerçam seus poderes, ou seja, ajudar os alunos a relacionar os contextos em que os problemas típicos surgem à sua própria experiência. No entanto, Johnston-Wilder e Mason (2005) ponderam que a importância do contexto dos problemas não significa que a partir de então se deva basear o ensino apenas em problemas autênticos encontrados fora da escola, ou que se deva partir sempre de alguma situação prática.

O papel dos contextos significa torná-los realistas pelos alunos, capacitando-os a imaginar alguma situação, fazendo uso de alguma situação problemática autêntica, baseando-se em informações históricas ou colocando os alunos em algum contexto matemático, em que os problemas apareçam. Assim, “as emoções são evidentes quando os alunos percebem que uma situação é um caso especial de algo mais geral, ou quando várias situações são reveladas como exemplos de alguma ideia geral unificadora.” (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p.237, tradução nossa).

Comportamento

É comum na escola e até mesmo em suas casas os alunos serem cobrados a saber a tabuada, principalmente a multiplicação. Como se aprender tabuada fosse algo que dependesse somente do esforço do aluno e da dedicação dele em decorar todas aquelas repostas. No entanto, até o sexto ano do ensino fundamental, basicamente o currículo de Matemática gira em torno

de operações da tabuada, adição, subtração, multiplicação e divisão. Nesta conjuntura, nos perguntamos o quanto realmente os alunos sabem dessas operações? E se eles entendem essas operações e os problemas derivados delas como tabuada também, para além do “livreto” de colunas e linhas que na capa vem escrito o título “Tabuada”? Johnston-Wilder e Mason (2005) apontam que:

Aperfeiçoar uma técnica requer muito mais que simples repetição de comportamentos até que seja automatizada. Todo tópico envolve termos técnicos e frases ou frases que expressam relacionamentos e propriedades. Tornar-se familiarizado com esses termos técnicos significa não apenas ter uma noção do que eles significam, mas realmente fazer uso deles para expressar seu próprio pensamento. (p.237, tradução nossa).

Palavras novas vão surgir junto com os tópicos matemáticos, e esses significados precisam fazer sentido para os alunos. No sétimo ano, por exemplo, quando os alunos começam a ter contato com conteúdos algébricos como expressões e equações, e ouvem pela primeira vez a palavra “incógnita” e “variável”, a forma como o professor vai trabalhar esses significados determinará se aluno aprenderá de fato aquele conteúdo ou se vai dominar técnicas desprovidas de sentido, que o ajudaram a resolver exercícios semelhantes aos exemplos resolvidos pelo professor.

Apresentar novas palavras a partir de discussões genuínas, envolvendo a negociação de significado, é parte do processo de se chegar ao significado e à compreensão, e essas discussões só acontecem em espaços em que há uma manutenção de uma atmosfera de conjecturas¹² (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Nessa seção, apoiados em Johnston-Wilder e Mason (2005) conhecemos três vertentes, que refletem a estrutura da psique humana: consciência, emoção e comportamento, que impactam na forma como os alunos interagem com conteúdos matemáticos. A vertente da consciência, englobando ideias e pensamentos que “vêm à mente” no contato com determinado assunto, como temas matemáticos, imagens, diagramas, conexões com outros tópicos matemáticos e afins. Neste norteamto incluem-se também erros clássicos que os alunos cometem, seja quando não prestam atenção, ou baseados em *ausências* mais profundas como erros de interpretação.

A vertente emocional ou afetiva engloba, tanto situações problemáticas, que principiaram originalmente determinado tópico matemático ou algum de seus aspectos, quanto outras situações que os alunos possam apreciar. Assim como também as possibilidades que podem emergir de outras circunstâncias, indo além de aplicações para incluir situações nas

¹² Na seção 3.3 esse conceito será retomado e aprofundado.

quais maneiras de pensar mostram-se relevantes. A vertente do comportamento inclui um dos aspectos mais próximos dos tópicos matemáticos, os métodos e as técnicas com as quais se espera que os alunos dominem para resolver questões. No entanto, há maior relevância no comportamento do que nos métodos, por exemplo, todos os tópicos matemáticos envolvem o uso de termos, frases, frases especiais que orientam e demonstram maneiras relevantes de pensar.

Essas três vertentes – consciência, emoção e comportamento – estão intimamente entrelaçadas e fornecem uma estrutura que pode servir como um lembrete de aspectos a serem considerados pelo professor ao se preparar para ensinar qualquer tópico matemático. (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005). Os autores ainda afirmam que a maneira mais poderosa de envolver a atenção e envolvimento dos alunos é ativar essas três vertentes, e para que isso possa acontecer é necessário envolver os alunos na tomada de decisões e no uso de seus próprios poderes matemáticos, sendo esses poderes discutidos na próxima seção.

3.3 Pensamento matemático, poderes naturais e matemáticos

Sobre pensamento matemático Mason e Johnston-Wilder (2004) ressaltam que uma coisa é querer que os alunos desenvolvam seu pensamento matemático, outra coisa é ser mais preciso sobre o que isso significa. Os autores ponderam que os alunos que pensam ativamente sobre sua matemática, que desenvolvem hábitos mentais matemáticos, que usam suas forças naturais, terão melhor desempenho em dispositivos de avaliação como exames e testes, do que os alunos que são treinados em algumas técnicas e tipos de problemas típicos. Neste cenário, não ter um entendimento sobre o que é pensamento matemático, torna os objetivos em torno dele tão vazios quanto esses objetivos derivados de dispositivos tradicionais de avaliação.

Os autores consideram importante saber o que é o pensamento matemático, para não ser associado apenas ao contexto de solucionar problemas matemáticos, de se sair bem em provas, ou considerando a realidade do Brasil, de passar no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). O pensamento matemático desenvolvido nos/pelos alunos tem potencial para ajudá-los nesses objetivos mais pontuais, no entanto, pensar matematicamente não pode ser encarado como um fim em si mesmo.

O pensamento matemático é um processo pelo qual se aumenta a compreensão de mundo e se amplia as escolhas dos alunos. E que por ser uma maneira de proceder, possuem ampla aplicação, não apenas para problemas matemáticos ou científicos, mas de forma mais abrangente (MASON e JOHNSTON-WILDER, 2004, p. 154). Assim, deve-se pensar

matematicamente sobre processos matemáticos (MASON, BURTON e STACEY, 1982, p.viii), e sobre uso de poderes naturais dos alunos na criação de sentidos na Matemática e fora dela.

Mason (2005) esclarece que antes esses poderes eram promovidos como “processos” que contribuem para o pensamento matemático (MASON, BURTON e STACEY, 1982, p. viii), e que passou a nomeá-los como poderes naturais dos alunos, com intuito de chamar a atenção do professor e encontrar ressonância em sua experiência. Mason (2005) entende que as crianças demonstram possuir poderes naturais desde a mais tenra idade, pois demonstram localizar relações, propor propriedades, fazer e testar conjecturas. Elas naturalmente testam instâncias particulares de generalidades e naturalmente generalizam como, por exemplo, ao usar a linguagem gestual ou oral (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Johnston-Wilder e Mason (2005) entendem que as crianças dão sentido à sua experiência, na medida em que a criação de sentido envolve a formulação de “histórias”, para explicar experiências atuais integradas a experiências passadas, e que essa ação requer interpretação de acontecimentos atuais em termos de acontecimentos passados. Neste cenário o sentido se dá quando as crianças usam seus poderes naturais para coletar, classificar, assimilar, acomodar, rejeitar sensações (físicas ou imaginadas, lembradas ou construídas).

Mason (2004) pontua que para o professor conduzir os alunos a tomar iniciativas, envolvendo-se com ideias matemáticas, é necessária a elaboração de tarefas pedagógicas, que exijam dos alunos o uso dos seus poderes naturais de fazer sentido, partindo dessa ideia de poderes naturais usados pelas crianças na constituição de sentidos em experiências cotidianas. Também se levando em conta o contexto da escola, quando essas crianças, agora alunos, trazem esses poderes naturais para as aulas de Matemática.

Dessa forma, os poderes matemáticos são os poderes naturais explorados nas aulas de Matemática. Como são elementos vindos de fora da escola os alunos precisam sentir que esses poderes estão sendo considerados, usados, que são bem vindos às aulas, ao invés de serem suprimidos ou ignorados. Entre esses poderes: *imaginar e expressar o que é imaginado; particularizar/especializar e generalizar; conjecturar e convencer a si e aos outros; organizar e classificar*; estão envolvidos em toda a criação de sentido humano, mas formam um núcleo de fazer sentido matemático (MASON, 2004, p. 1).

Imaginar e expressar o que é imaginado

Sobre *imaginar e expressar o que é imaginado*, Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que toda criança é capaz de imaginar e esse poder é importante, porque é o principal meio de aproveitar as emoções, por exemplo, imaginar como você agirá ou será no futuro, ou

o que deveria ter feito no passado. Ao final de uma discussão quantas vezes não simulamos em nossas mentes maneiras diferentes de argumentar sobre determinado assunto ou uma resposta decisiva para encerrar a discussão? Ou quando fazemos planos futuros, imaginando como estaremos na nossa profissão ou na relação com uma pessoa que gostamos. Assim, é por meio da imaginação que as pessoas são capazes de contemplar o que não está no tempo presente.

Os autores trazem metáforas como “ver”, usada comumente pelas pessoas para se referirem ao que fazem em suas cabeças. Ou seja, “ver imagens em suas mentes” permite simular situações, traçar formas de agir sobre determinado contexto. No entanto, mesmo parte significativa da população não entendendo o que essas pessoas estão falando (pela dificuldade que se tem de transportar outra pessoa para uma situação que se imaginou), todo mundo possui a capacidade de imaginar e posteriormente desenhar ou descrever o que imaginou, expressar.

Desta maneira, por meio das imagens mentais, é possível ter acesso a uma ampla variedade de casos, incluindo o muito grande ou o muito pequeno, como por exemplo, a faixa de ângulos possíveis em um triângulo ou o intervalo de tamanhos possíveis nos lados de um triângulo. Sendo através do poder de imaginar que se acessa à generalidade.

Para os autores o domínio da Geometria mostra-se poderoso para desenvolver o poder de imaginar, e expressar para os outros o que se imaginou. Porém, mesmo parecendo em um primeiro momento simples descrever o que se imagina para terceiros, tal ação não é. Johnston-Wilder e Mason (2005), no contexto da sala de aula, destacam que aprender a descrever para si o que se imaginou é um exercício poderoso, pois fornece aos alunos algo que eles podem fazer, caso fiquem presos em alguma situação.

De que forma o poder de imaginar e expressar acaba sendo deixado de lado na aula de matemática? Identificamos em Mason (2007), que se os alunos trabalharem apenas com o que está presente a eles (objetos físicos, diagramas já desenhados, expressões simbólicas já formadas), eles provavelmente se sentirão sem poder. Agora, se os alunos forem convidados a imaginar o que não está presente, discernir detalhes, buscar relações, identificar propriedades e, acima de tudo, ir além do que está presente no mundo sensível, então seus poderes de imaginação serão usados frutuosamente ao invés de trivialmente.

Sobre a postura do professor, Johnston-Wilder e Mason (2005) sugerem que ele estimule os alunos com instruções no imperativo como imagine isso, faça isso ou faça aquilo. Após algumas instruções o professor pode dar uma pausa e posteriormente pedir aos alunos que descrevam o que imaginaram um para o outro. Assim, mediante diferenças que podem aparecer e representações que podem ser desenhadas, a negociação de interpretações para se chegar ao entendimento comum pode iniciar.

Particularizar/especializar e generalizar

A generalização está no cerne da matemática. De maneira complementar e oposta à generalização, Mason (2008) destaca outro poder, a particularização ou a especialização, pois “adotar uma atitude indutiva requer transitar das observações particulares às generalizações, ou seja, das mais concretas observações às mais sofisticadas generalizações” (POLYA, 1957 *apud* MASON, 2008, p. 63).

Mason, Burton e Stacey (1982) destacam o poder especializar em situações que podem acontecer no cotidiano, e entendem que os alunos quando encontram e se debruçam sobre uma situação concreta do cotidiano ou do contexto da matemática, eles se especializam no manuseio de objetos sensíveis ou matemáticos (desenhos geométricos, números, símbolos algébricos) desse caso particular.

Como exemplo de um caso particular, os autores trazem o contexto do “Armazém” e recomendam aos leitores¹³ que o melhor começo é trabalhar com uma pergunta: “Em um armazém, você obtém 20% de desconto, mas deve pagar um imposto de 15%. Qual você prefere ter calculado primeiro: desconto ou imposto?” (MASON, BURTON e STACEY, 1982, p. 1). Os autores entendem que as respostas podem ser encontradas ao serem testados valores e, dessa forma, os leitores ao anotarem cálculos e ideias vão desenvolvendo habilidades de pensamento. Nessa problemática os autores sugerem a compra de um item no armazém que custa £100 (cem libras esterlinas):

calcule o desconto: o desconto de £100 é de £20
 subtraia-o do preço: £100 - £20 = £80
 calcule o imposto: 15% de £80 é £12
 adicione o imposto para obter o preço final: £80 + £12 = £92 (MASON, BURTON e STACEY, 1982, p. 2)

Mason, Burton e Stacey (1982) sugerem formas de abordagens complementares, como o teste de valores de produtos reais, a construção de uma planilha, até que o leitor consiga perceber que o preço original do produto sempre será multiplicado por dois percentuais, o do desconto e do imposto, independente de quem será calculado primeiro:

(i) subtrair 20% de um preço é o mesmo que pagar 80%, ou seja, você paga 0,80 vezes o preço;
 (ii) adicionar 15% a um preço é o mesmo que pagar 115%, ou seja, você paga 1,15 vezes o preço.
 Então, por qualquer preço original de, digamos, £100, calculando desconto primeiro: você paga $1,15 \times (0,80 \times £100)$

¹³ Mason, Burton e Stacey (1982) apresentam situações-problemas que oportunize compreender os poderes de particularizar ou especializar e generalizar de forma mais ativa e reflexiva.

imposto primeiro: você paga $0,80 \times (1,15 \times \text{£}100)$ (MASON, BURTON e STACEY, 1982, p. 2-3)

Os autores preveem que o teste de valores com a construção da planilha, permitirá identificar que a ordem nesse caso não importa, já que o que está envolvido é a multiplicação do preço do produto por dois números (desconto e imposto). Dessa forma, generalizando ao assumir a letra “P” para o preço original do produto, o cálculo do:

desconto primeiro: você paga $1,15 \times 0,80 \times \text{£P}$
 imposto primeiro: você paga $0,80 \times 1,15 \times \text{£P}$
 e estes são sempre iguais. (MASON, BURTON e STACEY, 1982, p. 3)

Na situação do “Armazém”, Mason, Burton e Stacey (1982) propõem uma investigação na qual indicações para testes e para a construção de uma planilha permitiria observar valores fixos e valores que variavam, possibilitando a generalização da situação. Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que experimentar e expressar a generalidade é totalmente natural para os alunos, no entanto o que os autores questionam é se esses poderes estão sendo requeridos e desenvolvidos na aula de Matemática ou se estão sendo deixados de lado e se atrofiando pelo não uso.

Muitas situações do cotidiano envolvem relações geométricas. O uso do desenho geométrico ajuda a excluir elementos irrelevantes para que relações relevantes possam ser representadas. Esses elementos, muitas vezes irrelevantes são características da situação física, que não foram consideradas para a construção do seu desenho (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005). Dessa forma, reconhecer um desenho como captura da estrutura essencial de uma situação cotidiana é uma forma de generalização.

Para Johnston-Wilder e Mason (2005), aprender a reconhecer representações diferentes da mesma situação envolve um desenvolvimento sofisticado, desde comparar entre elementos distintos até reconhecer relações e perceber propriedades, que podem ou não se manter quando as condições variam. Assim, algo só pode ser percebido como uma propriedade quando os alunos tomam consciência do que é permitido variar e das dimensões da variação possível na situação.

Conjecturar e convencer a si e aos outros

A situação do “Armazém” produziu uma conjectura justificada a partir da generalização do resultado, em que Mason, Burton e Stacey (1982) intuitivamente levaram o leitor a entender que alterar a ordem do cálculo não alteraria o preço final. A ação de conjecturar fornece um pano de fundo para o raciocínio, que auxilia na justificação da hipótese. Depois que uma

conjectura é feita, como no caso do desconto e do imposto do “Armazém”, ela precisa ser contestada, testada e possivelmente modificada (MASON e JOHNSTON-WILDER, 2004).

Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que a conjectura é uma forma de trabalhar, no qual as ideias são desenvolvidas pelos alunos que pensam em voz alta ou explicitamente de outra maneira. Tudo que é dito, é pensado e testado por aqueles que estão ouvindo. As pessoas precisam de confirmações vindas de seus pares. Elas possuem incertezas e esperam obter ajuda de outras pessoas para articular o que pensam que estão “vendo” ou pensando.

Assim, uma atmosfera de conjectura enseja nos alunos expressarem hipóteses quando eles não têm certeza, e os alunos aproveitam essa oportunidade para ouvir outros pontos de vista, desencadeando modificações, ampliações, contraexemplos. Não cabendo nessa atmosfera afirmações como “isso está errado...”, pelo contrário, cultivam-se desafios como “eu convido você a modificar sua conjectura”, promovendo contrapontos (MASON e JOHNSTON-WILDER, 2004, p. 141).

Essa atmosfera não é potente somente no campo do ensino. Os matemáticos articulam-se melhor em uma atmosfera de pensamentos e suposições, na qual conjecturas são experimentadas e modificadas. As afirmações derivadas desses experimentos são usadas pelos matemáticos para convencer seus pares, que por sua vez sentem-se desafiados a encontrar “contraexemplos” para essas afirmações.

Dessa forma, o pensamento matemático é aprofundado por períodos de trabalho individual, fomentado pela especialização e pela generalização, seguido de ensaios de conjecturas do que foi imaginado em períodos de negociação coletiva, com a finalidade de encontrar maneiras de modificar o enunciado conjecturado, que bloqueiem contraexemplos (MASON, 2008).

Nessa maneira de trabalhar todos assumem a responsabilidade de dar sentido ao que é dito pelos outros, e qualquer um pode ser solicitado a explicar seu pensamento, isto é, tentar convencer os outros envolvidos. Para desenvolver esses poderes nos alunos, a escola pode contribuir ao gerar uma atmosfera de conjectura, considerando a importância social de se desenvolver uma maneira cuidadosa, ouvinte e desafiadora de se interagir com os outros alunos.

Classificar e organizar

Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que os seres humanos constroem sentido a partir da organização e classificação de experiências. Por exemplo, o consenso de não colocar para secar juntos roupas e pratos são formas de ordem importante no mundo material, sendo metáforas úteis para trabalhar nos mundos: mental, simbólico e social. A ação de classificar

exige que algumas características consideradas relevantes sejam enfatizadas em detrimento de outras, que são deixadas de lado.

A classificação e a organização de objetos são típicas de tarefas desafiadoras que estimulam as crianças. Mason (2008) exemplifica que a classificação de miçangas por cor e tamanho, ou então a classificação de blocos por cor, tamanho, espessura, cor e tamanho, cor e espessura etc., ocupam crianças por horas. Essas atividades são importantes na medida em que exercitam e desenvolvem o controle motor, ao mesmo tempo em que os levam a discriminar/ignorar/experimentar de acordo com atributos e associações particulares.

Em relação a esses poderes aplicados na Matemática: números são rapidamente classificados em pares e ímpares, de acordo com o último algarismo, ou então, ao dividir os números por dois, o que requer algum trabalho explícito. Como ocorre ao reconhecer e nomear polígonos segundo vértices e arestas, em que se apontam relações entre o número de vértices e o número de arestas, permitindo caracterizar a forma do polígono.

Dessa forma, Johnston-Wilder e Mason (2005) entendem que cada ato de ordenação envolve enfatizar algumas características (relevantes) e ignorar outras, o que requer a capacidade de discriminar qualidades (generalidades e propriedades), que estão sendo usadas para classificar. Tipicamente encontra-se tarefas de classificação em que aparecem representações numéricas ou geométricas, nas quais os alunos precisam dizer o que é um e o que é outro. Esse tipo de tarefa só mostra a perspectiva de quem elaborou a tarefa, não estando interessada nas experiências e nas representações trazidas pelos alunos. Nesse cenário entendo Johnston-Wilder e Mason (2005), quando apontam esse tipo de tarefa de classificação como ruins, para fazer com que os grupos de alunos expressem seus pensamentos uns aos outros e negociem diferentes maneiras de ver. Alguns discentes aprendem com os outros, meios de discernimento que antes não vinham à mente, outros encontram seu modo de perceber sendo apoiado ou confirmado.

Assim, os pares de poderes matemáticos discutidos até aqui, são poderes que podem ser invocados quando os sujeitos estão tentando dar sentido à Matemática, e que ao estimular os estudantes a usar e, conseqüentemente desenvolver esses poderes, o pensamento geométrico será promovido.

3.4 Constructos pedagógicos e estratégias pedagógicas

De acordo com Mason e Johnston-Wilder (2004), constructos pedagógicos e estratégias pedagógicas informam e constituem a prática de professores e educadores. Ambos podem ser

usados como distinções úteis para pensar sobre o ensino de Matemática em três momentos: no planejamento da aula ou de uma sequência delas; durante a aula, quando “vêm à mente” formas de ações possíveis; e na análise retrospectiva da aula, de modo a aprender com a prática (JOHSTON-WILDER e MASON, 2005, p. 245).

Sobre constructo pedagógico, Mason e Johnston-Wilder (2004) utilizam alguns conceitos como: fenômeno, rótulo e estrutura, para defini-lo no contexto da Educação Matemática. Assim, fenômeno, para os autores, é algo que se distingue do fluxo de eventos e é reconhecido como tendo acontecido anteriormente. O reconhecimento de um fenômeno envolve discernir alguma característica ou aspectos como (relativamente) invariável em meio a outras mudanças, como exemplificado pelos autores nas seguintes situações hipotéticas:

- primeira situação: uma criança usando um objeto físico para ajudá-la a pensar em uma pergunta;
- segunda situação: um professor faz uma pergunta à turma seguida de uma pausa, esperando que os alunos pensem sobre a questão, depois os convida a conversar com o colega ao lado sobre a questão, antes que eles contribuam para a discussão com toda a turma.

Ao considerar ambas as situações, no primeiro exemplo é possível reconhecer que “usar um objeto físico para ajudá-lo a pensar” é algo que as pessoas fazem naturalmente e que os professores podem incentivar. No segundo exemplo é possível reconhecer que o tempo de espera do professor após fazer uma pergunta é algo que pode servir como indicador da interação professor-aluno.

Nesses cenários, na intenção de facilitar a referência para práticas ou pesquisas futuras, os fenômenos são rotulados. No primeiro caso, poderia ser “o uso de aparelhos ou objetos manipuláveis”, e no segundo caso, “o tempo de espera”. O rótulo traz o fenômeno à existência como um objeto de pensamento, que pode ser discutido e negociado entre os pares, permitindo que professores e/ou pesquisadores investiguem o que está envolvido no fenômeno, o que o torna eficaz, o que a eficácia pode significar, o que os alunos experimentam, os *links* para outros aspectos do ensino e aprendizagem, dentre outros.

De acordo com Mason e Johnston-Wilder (2004), o constructo pedagógico é experimentado como uma consciência e indicado por um rótulo para uma distinção, que foi e pode ser feita. É uma abstração da experiência de um fenômeno, podendo ser um rótulo para o fenômeno em si, ou para algo que explique o fenômeno. Sendo geralmente associado a alguma ação que possui componentes físicos (uma prática em sala de aula), mentais (reconhecimento, teorização) e emocionais (estímulo, julgamento).

O rótulo torna-se constructo pedagógico no uso por terceiros, e por isso, de tempos em tempos é necessário experimentar novamente a consciência subjacente. Deve-se ter cuidado de não tratar rótulo e constructo pedagógico como sinônimos, já que ambos podem tratar de um mesmo fenômeno. No entanto, em momentos distintos, o rótulo é cunhado por um professor e/ou pesquisador, mas se não teve impacto, não foi usado por outros, não serviu de referência para outros, não foi experimentado como consciência de ninguém além daquele que o criou, não chegou, dessa forma, a ser constructo pedagógico.

Quando se tem um conjunto de constructos pedagógicos a respeito de determinado fenômeno, Mason e Johnston-Wilder (2004) os entendem como partes de uma estrutura. Por exemplo, sobre o processo de Modelagem Matemática de Bassanezi (2012) é possível inferir que as etapas definidas por Bassanezi (2012) são rótulos. Ao serem reconhecidos e usados como referências por outros professores e/ou pesquisadores tornam-se constructos pedagógicos, e que esse conjunto de constructos pedagógicos compõem a estrutura do processo de Modelagem Matemática desse autor.

Os rótulos atuam como gatilhos de consciência imediata para que, no meio de uma situação, surja alguma possibilidade associada a um ou mais constructos pedagógicos. Como muitos constructos pedagógicos estão implícitos e estão abaixo da superfície da consciência imediata, trazê-los à superfície os abre para validação, modificação e até substituição. A tomada de consciência, a adoção e a adaptação de estruturas eficazes permitem aos professores discernir os fenômenos mais de perto, distingui-los com mais sensibilidade, perceber mais do que seriam capazes sem os rótulos das estruturas.

Podemos considerar, partindo da ideia de constructos pedagógicos, que o estudo das concepções que realizamos no Capítulo 2, pensando no desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática em práticas de EO inteiramente *online* e síncrona, trouxe-nos à mente pontos comuns que identificamos nas concepções estudadas. Assim permitindo que cunhássemos rótulos para o nosso entendimento de tarefa de Modelagem Matemática a ser desenvolvida em um AVA, como indicado na Figura 2.

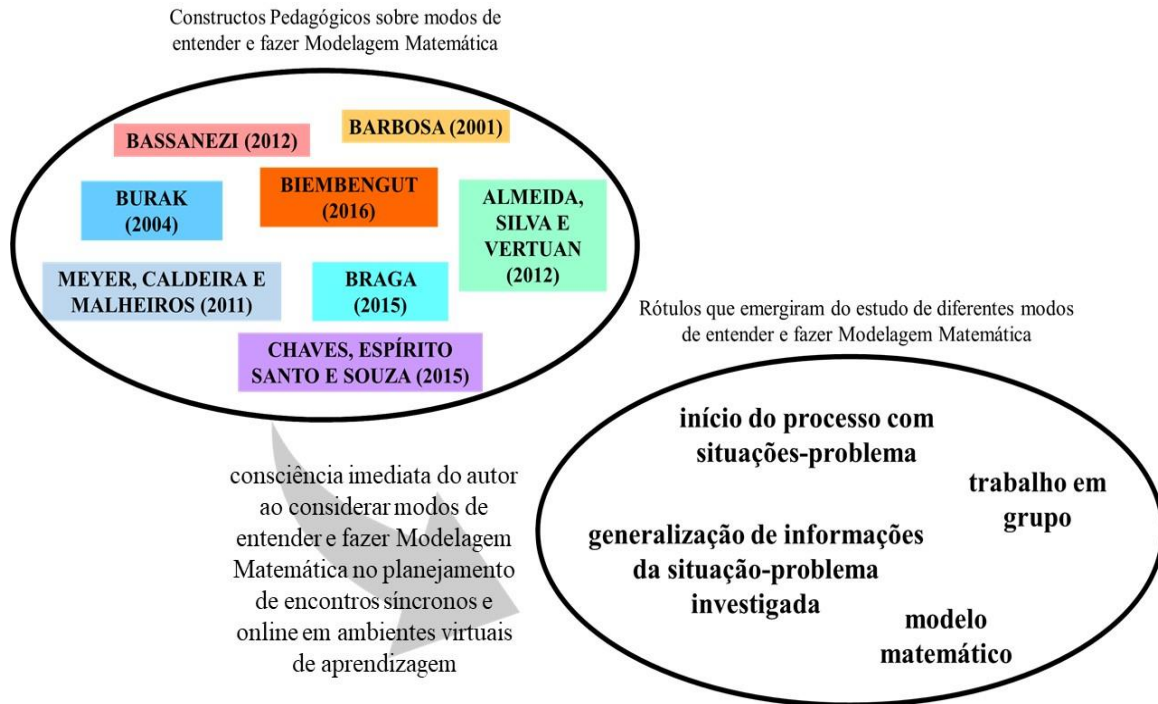


Figura 2 – Características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática
 Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Então, principiando dos constructos pedagógicos analisados em referência a concepções de Modelagem Matemática, pautamos características comuns dessas concepções possíveis de serem aplicadas em práticas de EO. Desta maneira definimos rótulos para momentos do desenvolvimento inteiramente *online* e síncrono de tarefas de Modelagem Matemática. As características que pautamos ainda são rótulos, pois ninguém além de quem as criou, no caso nós, as utilizou em outros contextos, em outras pesquisas, ou seja, ainda não teve impacto e apropriação desses rótulos por terceiros.

Para Mason e Johnston-Wilder (2004) o contato com trabalhos de autores que introduziram ou desenvolveram um constructo pedagógico específico, além de ser informativo, fornece acesso às vozes originais, criando uma referência valiosa para professores e/ou pesquisadores. Desta forma, os autores entendem que o acesso a esses constructos pedagógicos tem potencial de embasar professores e/ou pesquisadores quando do desenvolvimento de uma prática, porque dependendo do contexto, acontecimentos podem servir como gatilhos a esses professores e/ou pesquisadores, trazendo à tona, como consciência imediata, estratégias pedagógicas que se configuram como uma resposta ao acontecimento.

Não julgamos necessário especificar cada constructo pedagógico apresentado por Johnston-Wilder e Mason (2005), por não ser foco deste trabalho, já que entendemos como mais pertinente para a tese as estratégias pedagógicas derivadas desses constructos

pedagógicos. Para os autores as estratégias pedagógicas são consciências imediatas dos professores e/ou pesquisadores que emergem na experiência, no momento que a prática de ensino e/ou pesquisa está acontecendo, embasadas nas interpretações dos constructos pedagógicos considerados, passíveis dessa forma, de adaptação, modificação, substituição.

Johnston-Wilder e Mason (2005) apresentam nove estratégias pedagógicas, inferidas por eles, de acordo com as interpretações que fizeram de alguns constructos pedagógicos, e que foram usadas e sugeridas ao longo do livro “Desenvolvendo o pensamento geométrico”. São elas:

diga o que vê

Como o próprio rótulo atribuído por Johnston-Wilder e Mason (2005) para essa estratégia sugere, o *diga o que vê* refere-se a quando o professor apresentar um exercício ou um exemplo trabalhado, e pedir que os alunos digam o que estão vendo, sem usar termos técnicos ou tentando parecer inteligente. Para os autores essa estratégia ajuda os alunos a absorver o todo, a discernir detalhes e a aprender com os detalhes que os outros discerniram.

Pedir que cada aluno diga apenas uma coisa, permite que a turma contribua com algo, sem ser necessário apontar para fulano ou ciclano, deixando os alunos confortáveis a se manifestarem por vontade própria. Fazer isso pode fortalecer o controle dos alunos sobre suas imagens mentais, bem como exercitar suas descrições verbais do que está presente em suas atenções.

mesmo e diferente

Outra pergunta útil ao pensamento matemático que pode ser feita aos alunos, é o que eles veem como o mesmo ou o diferente na comparação de dois ou mais objetos. Esses objetos podem ser números, problemas, diagramas, objetos físicos, sequências de números ou objetos, e assim por diante. O objetivo com essa questão é chamar a atenção dos alunos para características dos objetos que mudam e aquelas que permanecem as mesmas, não mudando, e sugerido uma relação estrutural. Essa estratégia fornece a base para o exercício dos poderes de especialização e generalização, e reforça o tema matemático invariância em meio a mudança. (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p. 253)

Outro e outro

Pedir aos alunos que construam um determinado objeto segundo certas limitações, e a partir disso, pedir outro, e depois outro, sabendo que não serão desafiados a fazerem algo mais complicado do que fora feita na primeira construção. Por exemplo, construir um polígono que

tenha quatro lados e ângulos retos. O aluno pode de imediato construir um quadrado, em seguida ao ser desafiado a construir outro, construir um retângulo, e desafiado novamente, construir um losango. Então, partindo das restrições iniciais o aluno terá uma classe de polígonos que oportunizará discernir, relacionar e perceber propriedades. Pedir objetos que enfrentam restrições cada vez mais restritivas, permite aos alunos apreciar o impacto sobre a liberdade de escolha que restrições adicionais provavelmente terão, apoiando assim, sua percepção do que é uma variável (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p. 253).

de quantas maneiras?

Essa estratégia refere-se à elaboração de exercícios, problemas, tarefas. Sugerindo ao professor, que ao invés de propor tarefas usando comandos usuais em livros didáticos como “você pode encontrar...?” ou simplesmente “encontre uma...”, usar termos mais desafiadores e estimulantes como “de quantas maneiras você pode...?”. Johnston-Wilder e Mason (2005) entendem que a questão colocada de forma mais aberta convida os alunos à procura de múltiplas abordagens e reforça aspectos criativos e construtivos do pensamento geométrico, ao passo que encontrar uma única “resposta correta” restringe suas possibilidades, reforçando uma imagem inadequada do que a matemática realmente é.

transforme um fazer em um desfazer

Essa estratégia remete diretamente ao tema matemático *fazer e desfazer*, na qual Johnston-Wilder e Mason (2005) entendem que a maioria das tarefas, por mais rotineiras que sejam, podem ser transformadas em tarefas desafiadoras, que exigem criatividade e discernimento, ao converter um fazer em um desfazer. Por exemplo, “encontre todos os quadriláteros que têm um paralelogramo dado, como o paralelogramo dos pontos médios” (p.254). Os autores entendem que muitas vezes isso pode levar a múltiplas soluções e a necessidade de uma construção ou criação que estaria ausente, se simplesmente fosse pedido que o aluno “encontrasse um paralelogramo com vértices nos pontos médios de um quadrilátero previamente dado”.

andaimes e enfraquecimento

Sobre andaimes, Johnston-Wilder e Mason (2005) pontuaram que se trata do apoio do professor por meio de comandos nas suas aulas, por exemplo, chamando a atenção para características que variam e as que não variam em determinado objeto, ou então pedindo para os alunos explicarem o que veem sobre determinada situação. Nesse cenário, com o passar do tempo, os alunos passarão a pensar por eles próprios, sem precisarem das provocações do

professor. Assim, os comandos do professor vão enfraquecendo progressivamente, garantindo autonomia dos alunos e evitando que eles tornem-se dependentes desses comandos para realizar as atividades.

exemplos construídos pelos alunos

A autonomia promovida progressivamente nos alunos fará com que em determinado momento os alunos não se satisfaçam mais em completar uma tarefa, e passem a produzir exemplos próprios, que ilustrem suas proezas na solução de uma classe de problemas. Nesse ponto, os alunos estarão fazendo sentido global, já que começaram a educar suas consciências a perceber o tópico como um todo, e não apenas como treinamento de comportamento na mecânica das técnicas. Perceber o geral no específico permite que os alunos consigam, a partir de uma propriedade específica, expressar uma classe de objetos geométricos, permitindo reconstruir a propriedade e suas consequências em alguma ocasião futura. (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

desviar a atenção para automatizar

Esta estratégia refere-se à especialização do aluno segundo graus de domínio e atenção em determinadas tarefas. Os alunos especialistas serão capazes de ao aplicar a técnica de resolução não pensar na técnica em si, e sim na solução e na repercussão dessa solução no contexto da tarefa. Dessa forma, a atenção do aluno não estará mais na aplicação de técnicas, que serão executadas de forma automática, afastando a atenção dele do fazer e aproximando-a para o que dizem os resultados obtidos com o fazer sobre a tarefa em questão. Dessa forma, Johnston-Wilder e Mason (2005) ponderam que passar de novato para especialista significa integrar a técnica de modo que a execução dela requeira cada vez menos atenção, permitindo que mais atenção seja direcionada para objetivos maiores.

o ensino de técnicas

Sobre essa estratégia, Johnston-Wilder e Mason (2005) sugerem que por mais tentador que seja ao professor isolar uma técnica e depois ensiná-la aos alunos por meio de exemplos e muitos exercícios, o mais adequado seria o contrário. Deve estimular a consciência dos alunos a identificarem uma pergunta como sendo um tipo de problema pertencente a uma classe de problemas, capacitando-os assim, a avaliar qual técnica seria a mais adequada de ser usada para responder a pergunta. Os autores consideram que se os alunos forem conduzidos, por meio de tarefas adequadamente edificadas, a construir métodos viáveis e eficientes para si próprios

(geralmente por meio de discussões e reflexões), é provável que eles se lembrem da técnica ou consigam reconstruí-las quando necessário.

As estratégias pedagógicas apresentadas por Johnston-Wilder e Mason (2005) são frutos de suas práticas ancoradas nos constructos pedagógicos que eles selecionaram. Dessa forma é possível ver como elas provocam os alunos no sentido de torná-los mais ativos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e, gradualmente fazendo-os protagonistas desse processo.

Percebemos nas estratégias pedagógicas apresentadas uma aproximação com ações do professor, no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Tais como querer saber as propostas dos alunos para abordar uma situação-problema, chamar a atenção do aluno para características da situação-problema até então não observadas, desafiar os alunos a apresentarem mais de uma solução, a testarem diferentes caminhos. Assim como investigarem diferentes situações-problema, para empregar nelas técnicas matemáticas, e não decorar técnicas matemáticas para serem repetidas em outros exemplos similares.

Não trouxemos outros trabalhos para contribuir nas discussões das estratégias pedagógicas, contextualizando-as somente com o trabalho de Johnston-Wilder e Mason (2005), por entendermos que essas estratégias pedagógicas estão condicionadas aos constructos pedagógicos, considerados pelos autores para/no ensino de Geometria.

De todo modo, entendemos que para pensar o ensino de Geometria no contexto das tarefas de Modelagem Matemática, desenvolvidas em um ambiente *online* e síncrono, as estratégias pedagógicas podem ser úteis para traçar aproximações ou serem gatilhos para observar outras estratégias pedagógicas, próprias das mediações de tarefas de Modelagem Matemática em um AVA. Neste sentido, no Capítulo 4 apresentamos aspectos metodológicos que caracterizaram a pesquisa desta tese, inclusive a opção por objetos matemáticos da área de Geometria, escolhidos como foco das tarefas de Modelagem Matemática, elaboradas para serem desenvolvidas de forma *online* e síncrona, em práticas de EO.

CAPÍTULO 4

ORGANIZAÇÃO E MÉTODO DA PESQUISA

Neste capítulo, descreveremos como se deu a organização e o desenvolvimento de um curso *online* e síncrono de Modelagem Matemática no ambiente virtual de aprendizagem Virtual Math Teams com GeoGebra (VMTcG), evidenciando as tarefas abordadas, o contexto dos encontros, e os estudantes do curso. Partindo desse cenário de investigação, apresentaremos o delineamento da pesquisa, destacando o tipo de pesquisa quanto à: abordagem, análise dos dados e quanto aos procedimentos.

4.1 O curso “Interações e estratégias de modelagem no ambiente VMT com GeoGebra”

O contexto em que se deu a produção dos dados para a pesquisa foi o curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, apresentado como projeto de extensão, submetido à Pró-Reitoria de Extensão (PROEXT) da UFRRJ, Campus Seropédica/RJ. A equipe do curso foi composta pelo coordenador, professor da UFRRJ que orientou a elaboração, proposição e execução do curso, pelo autor deste trabalho, que estava em período sanduíche na UFRRJ atuando na elaboração, organização e mediação das sessões do curso, também por um mestrando da UFRRJ, que cuidou da criação das salas virtuais e do cadastro dos estudantes no ambiente VMTcG e por um graduando bolsista da iniciação científica da UFRRJ que também atuou como mediador nas sessões.

O curso teve carga horária de 20 horas e foi realizado com graduandos de Matemática no segundo semestre de 2018. Para o curso foram elaboradas cinco tarefas desenvolvidas em seis sessões. Cada tarefa era matematicamente independente uma da outra, com foco em tópicos de Geometria Plana (Quadro 7) e no desenvolvimento de características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática como estratégia para abordar e resolver situações-problema (Quadro 8).

Quadro 7 - Tópicos de Geometria Plana

SESSÕES	TAREFAS	CONCEITOS MATEMÁTICOS
1	Quadrado	Propriedades do quadrado
2	Estação de Bombeamento	Mediatriz e Circuncentro
3	Polígono ABCDE	Perímetro, teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos; funções em intervalos determinados
4	Caminhando com Carol	Ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre pontos, e velocidade.
5	Propondo uma nova tarefa	Os estudantes apontam conteúdos matemáticos para serem trabalhados nas abas quadro branco e GeoGebra do VMTcG
6		

Fonte: Projeto de Extensão, 2018

Quadro 8 – Características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática

SESSÕES	TAREFAS	ABORDAGENS
1	Quadrado	Propor formas de construir o quadrado; construir argumentos; justificar argumentos; validar argumentos.
2	Estação de Bombeamento	Entender o problema; discutir possibilidades de abordagens do problema; discutir possibilidades matemáticas para resolução do problema; encontrar resposta ou respostas para o problema; justificar a resposta ou as respostas encontradas para o problema; validar a resposta ou as respostas encontradas para o problema. Modificar a resposta ou as respostas encontradas para o problema.
3	Polígono ABCDE	
4	Caminhando com Carol	
5 6	Propondo uma nova tarefa	Traçar um roteiro que privilegie características do processo de Modelagem Matemática baseada nas vivências das tarefas anteriores.

Fonte: Projeto de Extensão, 2018

A divulgação do curso se deu por grupos do *WhatsApp* do GEMM e do GEPETICEM. Para inscrição foi divulgado o *link* de um formulário *online*, disponível no *Formulários Google* com perguntas pessoais e acadêmicas como: nome, idade, *e-mail*, número de *WhatsApp*, curso e universidade. E perguntas referentes ao contexto do curso, como o nível de conhecimento com o GeoGebra e de onde os estudantes acessariam o ambiente VMTcG. O *Formulário Google* também foi usado como ferramenta avaliativa, por meio de formulários disponibilizados durante e ao final do curso.

Foram ofertadas trinta vagas e se inscreveram no curso quarenta e sete participantes. Desses, foram indeferidas três inscrições, duas, de professores já formados, que ia de encontro ao público alvo definido para o curso, e uma, de um graduando que não possuía *WhatsApp* para comunicação, e que não respondeu os *e-mails* referentes a sua disponibilidade de horário para participar do curso. Assim, o universo inicial e válido de inscritos no curso foi de quarenta e quatro estudantes (trinta e três do estado do Pará e onze do estado do Rio de Janeiro).

A partir da quantidade de inscritos foram disponibilizadas treze opções de horários, distribuídos de segunda a sábado nos turnos da manhã, tarde e noite, podendo os estudantes escolher até duas opções. Com as opções de horários escolhidas foram formados onze grupos variando de três, quatro e cinco estudantes. Assim, o critério para a composição dos grupos se deu exclusivamente pela coincidência de horários escolhidos pelos estudantes.

No decorrer do curso a quantidade de estudantes foi diminuindo, as justificativas variaram entre dificuldade em conciliar o curso com atividades do dia a dia, dificuldade de acesso a computadores, à *internet* e à linguagem de programação JAVA, sem a qual não era possível acessar às salas do VMTcG. Outros estudantes não informaram seus motivos, deixando apenas de responder às tentativas de contato por *WhatsApp* e *e-mail*. As desistências são evidenciadas no infográfico da Figura 3.

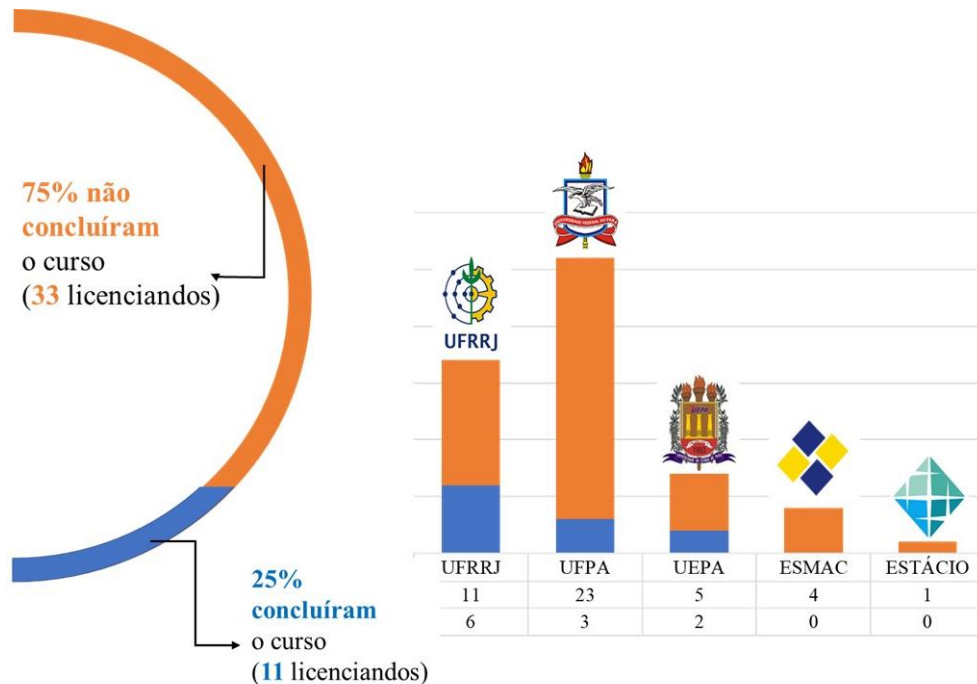


Figura 3 – Infográfico com o quantitativo de estudantes inscritos e desses os que concluíram o curso

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Na Figura 3 apresentamos um paralelo entre o quantitativo de estudantes inscritos, e desses, o quantitativo de estudantes que concluíram o curso. Ainda no planejamento e elaboração do curso era esperada a desistência de alguns estudantes, por isso não optamos por uma seleção inicial dos inscritos, considerando experiências já vivenciadas e também com base no que já vinha sendo apontado por outros autores. Em Malheiros (2008), dos vinte e três professores de Matemática inscritos, somente quinze cursaram todo o cronograma do curso, em Pereira (2015), dos sete professores de Matemática estudantes, um não concluiu e em Bustamante (2016), dos vinte professores de Matemática inscritos, quinze finalizaram e foram aprovados no curso. No entanto, a quantidade elevada de desistentes do curso no VMTcG, superou a margem esperada.

Números próximos a este, mesmo em um contexto totalmente diferente e considerando inscritos e escolhidos para o curso, só foram percebidos no trabalho de Ferreira (2010), que de cinquenta e seis professores interessados em participar do curso foram selecionados doze. Não se deve entender a retomada desses trabalhos como uma tentativa de comparar com as desistências ocorridas no curso descrito nesta seção. Contudo, ao mesmo tempo, é curioso o elevado índice de evasão de um curso na modalidade à distância, síncrono, voltado para estudantes, quando comparado aos índices de evasão de cursos na modalidade à distância, assíncronos ou híbridos, voltado para formação continuada de professores. O alto índice de

desistência não foi impeditivo para a realização do curso. Mantiveram-se onze estudantes distribuídos em três grupos que realizaram as sessões planejadas.

4.2 O contexto das sessões e os grupos de estudantes

As sessões aconteceram no VMTcG e duravam em média duas horas, sendo uma sessão por semana. Nesse ambiente *online* os estudantes interagiam nos espaços quadro branco, GeoGebra, e *chat*, como apresentados na Figura 4.

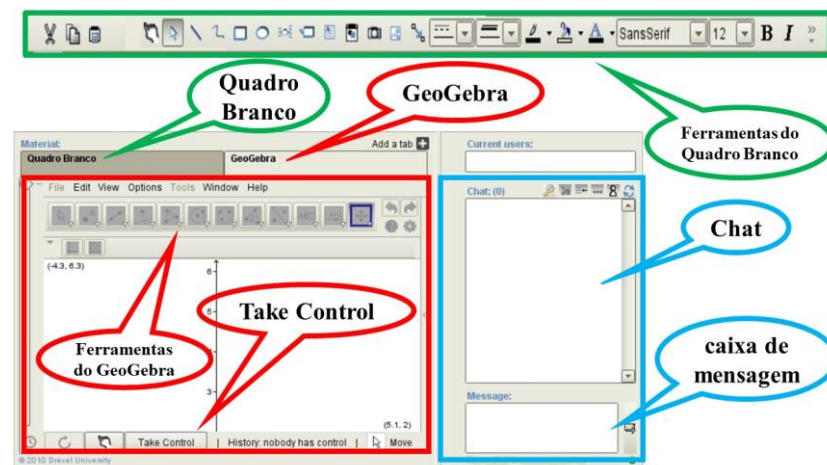


Figura 4 – Elementos dos espaços de interação do VMTcG
Fonte: VMTcG, 2018¹⁴

As ferramentas da aba quadro branco eram semelhantes às de editores de textos conhecidos, como o *Word*. Nela os estudantes interagiam simultaneamente escrevendo textos, construindo formas, escolhendo o tipo e tamanho da fonte, inserindo figuras, dentre outras interações. A versão do GeoGebra no VMT estava em língua inglesa e os estudantes não manipulavam suas ferramentas simultaneamente, o uso se restringia a um estudante por vez, e para usá-lo era preciso que o estudante clicasse a tecla “*take control*”. A coordenação de interações dos estudantes no quadro branco e GeoGebra se dava por meio de mensagens trocadas no *chat*.

Os estudantes do curso só ficavam sabendo das tarefas nos dias dos encontros no VMTcG. Como eles não tinham experiência anterior nesse tipo de curso e de cenário *online* a tarefa do “quadrado” foi pensada para ambientação (familiarização) dos estudantes com as ferramentas do VMTcG. As duas últimas sessões foram de culminância das atividades do curso, com a tarefa “propondo uma nova tarefa”. Dessa forma, para a tese nos ocupamos das três

¹⁴ Até 2018 era necessário fazer o *download* da sala do VMTcG no computador do usuário, que precisava ter instalado a linguagem JAVA. A partir de 2019 o ambiente foi remodelado para um sítio na internet (<https://vmt.mathematicalthinking.org/>), não precisando mais ser baixado, e podendo ser acessado a partir de um navegador (Internet Explorer, Google Chrome, Firefox, Safari, entre outros).

tarefas de Modelagem Matemática em que os licenciados precisaram trabalhar em grupos para solucionar as situações-problema das tarefas: “estação de bombeamento”, “polígono ABCDE”, e “caminhando com Carol”.

Inicialmente consideramos para esta pesquisa os grupos de estudantes que concluíram o curso. O Grupo 5, na sessão 1, era composto por três estudantes: Pedro, Zeca e Paula. Na sessão 2, com a desistência de alguns estudantes de outros grupos, os estudantes Ana e Caco foram realocados para esse grupo. Porém, nas sessões seguintes, o estudante Caco desistiu e o Grupo 5 foi consolidado com quatro estudantes: Ana, Pedro, Zeca e Paula¹⁵, como mostra a Figura 5.

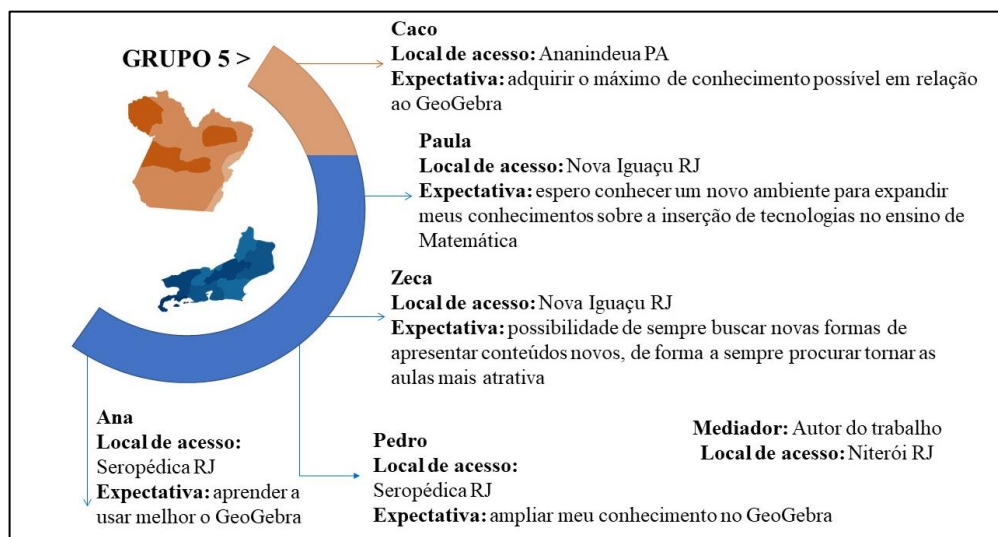


Figura 5 – Perfil dos estudantes do Grupo 5
Fonte: Formulário de inscrição dos estudantes, 2018

O Grupo 7, inicialmente fechado em três estudantes, passou por algumas mudanças diante da desistência de alguns, havendo realocação de estudantes de outro grupo, consolidando o Grupo 7 com os estudantes: João, Cris e Marta, conforme mostra a Figura 6.

¹⁵ nomes fictícios

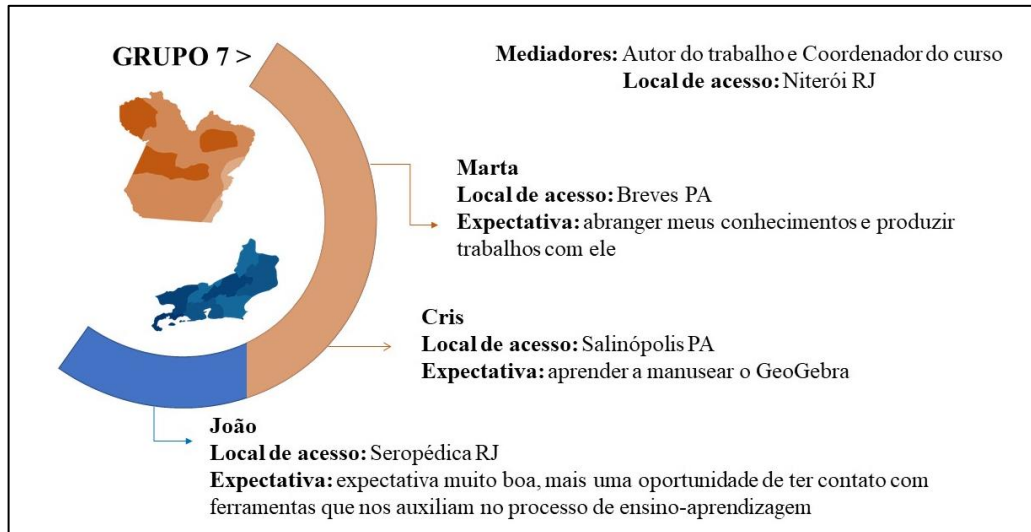


Figura 6 – Perfil dos estudantes do Grupo 7
Fonte: Formulário de inscrição dos estudantes, 2018

O Grupo 9 não estava conseguindo ter uma regularidade de encontros, já que a primeira sessão coincidiu com um feriado e os estudantes iniciais acabaram desistindo. Porém, estudantes de outros grupos extintos entraram em contato com interesse no horário do Grupo 9, e dessa forma, consolidamos esse grupo com os estudantes: José, Cezar, André e Vanessa, como apresentado na Figura 7.

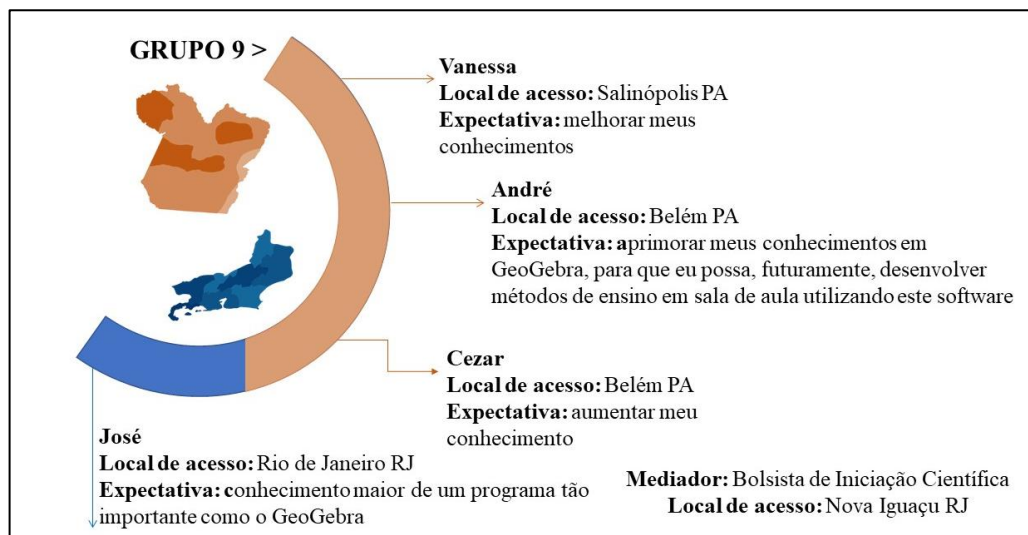


Figura 7 – Perfil dos estudantes do Grupo 9
Fonte: Formulário de inscrição dos estudantes, 2018

Em um segundo momento, os conceitos de constructos pedagógicos e estratégias pedagógicas fizeram-nos considerar para análise as sessões nas quais o autor da tese foi mediador durante todo o curso. Assim, o universo de análise foi reduzido, focando nas sessões do Grupo 5. Essa decisão se deu mediante a possibilidade de analisar o impacto dos constructos pedagógicos (dinâmica do processo de Modelagem Matemática e práticas de EO) de um único

mediador (autor da tese), nas suas estratégias pedagógicas sinalizadas nas sessões do VMTcG. Na seção sobre análise dos dados produzidos retomaremos as razões que embasaram essa escolha.

4.3 Tipo de pesquisa

A abordagem metodológica deste estudo é qualitativa, com vista a responder à questão de investigação de forma indutiva, a partir da análise dos dados produzidos no curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG” (BOGDAN e BIKLEN, 1994). Para Alves-Mazzotti (1999) “sugestões para o planejamento de estudos qualitativos não é fácil” (p. 147). A autora refere-se ao fato de que, ao contrário de pesquisas quantitativas em que se tem traçado os procedimentos a serem realizados, o mesmo não acontece com pesquisas qualitativas, pois “as investigações qualitativas, por sua diversidade e flexibilidade, não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de casos”. Assim, cada pesquisa e seu respectivo plano para realizá-la varia conforme os interesses do pesquisador para com o fenômeno reconhecido no contexto investigado.

Sobre investigações de cunho qualitativo Bodgan e Biklen (1994, p. 47) entendem que “a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal”. Percebemos essa característica nos trabalhos de Malheiros (2008), Santana (2010) e Ferreira (2010), ao entenderem que o pesquisador ao fazer uso de abordagens qualitativas assume como objetivo compreender de que forma, pessoas em um determinado contexto pensam e agem. Pereira (2015) endossa o protagonismo do pesquisador, afirmando que “o pesquisador é considerado o instrumento principal que busca elucidar questões educativas.” (p. 81).

Sobre a elaboração dessas questões, Goldenberg (2004) esclarece que o primeiro passo para formular um problema de pesquisa é torná-lo concreto e explícito, sendo possível por meio da imersão sistemática no assunto, do estudo da literatura existente, da discussão com pessoas que acumularam experiência prática no campo de estudo. Partindo desse repertório, entendemos que a participação em coletivos como o LEMM, o GEMM e o GEPETICEM ajudaram no aprofundamento teórico e prático de constructos pedagógicos de Modelagem Matemática e de práticas de EO, permitindo a elaboração da questão de investigação mencionada na introdução e que aqui retomamos:

Que/Como interações apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática em um ambiente virtual de aprendizagem online?

A questão de investigação relaciona uma vertente prática por meio do *design* de EO, na qual se propõe o desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática de forma *online* e síncrona no VMTcG. Isto, com uma vertente de pesquisa, na qual o fenômeno “interações” surge nesse ecossistema interligando os sujeitos: conteúdos matemáticos, mediador, estudantes. A relação entre essas duas vertentes, a prática (contexto) e a pesquisa (interrogação) mostra-se também nos objetivos – descritos a seguir – assumidos neste estudo:

- Compreender, no plano teórico (temas, poderes, estratégias), interações que emergem do desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática, de forma *online* e síncrona no VMTcG;
- Explicar como interações entre os conteúdos matemáticos, mediador e estudantes apareceram no desenvolvimento *online* e síncrono de tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG;
- Caracterizar o papel do *design* de EO como uma prática *online* e síncrona de Modelagem Matemática, que prima por fomentar interações entre os conteúdos matemáticos, o mediador e os estudantes.

Entendemos esse estudo qualitativo como sendo uma pesquisa do tipo intervenção pedagógica (DAMIANI et al., 2013), pois envolveu a participação do pesquisador/autor deste trabalho a partir da sua mediação nas sessões do VMTcG com os estudantes, promovendo interações constantes entre todos os sujeitos envolvidos e investigados (mediador, estudantes, conteúdos matemáticos). De acordo com Damiani et al (2013), a intervenção pedagógica

[..] é definida como uma pesquisa que envolve o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI et al., 2013, p. 1)

Partindo dessa definição tarefas de Modelagem Matemática foram planejadas e implementadas ensejando interações dos sujeitos da pesquisa em um contexto pouco explorado no qual as tarefas foram desenvolvidas de forma síncrona e *online* visando o desenvolvimento cognitivo de todos sujeitos envolvidos, e requerendo do pesquisador/autor criatividade no diálogo traçado com concepções de Modelagem Matemática, conceitos de Educação Online,

interações segundo temas, poderes e estratégias, úteis para implementação da intervenção e para avaliação, compreensão, reflexão da intervenção implementada.

4.4 Instrumentos de produção de dados

Para Alves-Mazzotti (1999) investigações qualitativas são multimetodológicas. Essa característica permite ao pesquisador seguir ou criar diferentes caminhos metodológicos para seus estudos, dependendo de seu contexto de pesquisa. Partindo disso, existe um leque de procedimentos e instrumentos de produção de dados disponíveis, como: observação, entrevistas, documentos.

Carmo e Ferreira (2008, p.117) consideram que “feita a observação, torna-se indispensável o seu rápido registro sob pena de perder informações valiosas”. Considerando que o autor da tese mediu as sessões do Grupo 5, ao final de cada sessão ele fazia resumos das sessões em um diário, pontuando acontecimentos considerados pertinentes para a pesquisa, como: estratégias de resolução assumidas pelos estudantes, reviravoltas que mudavam os rumos das discussões, problemas de conexão e de conectividade dos estudantes, entre outros.

Práticas de EO, não necessariamente precisam ser desenvolvidas em um AVA, no entanto, o estudo apresentado nesta tese teve a produção de dados ocorrida no VMTcG. Dessa forma todos os registros dos estudantes nos espaços de interação quadro branco, GeoGebra e *chat* ficavam disponíveis nas salas, mesmo terminada as sessões, podendo ser acessados por qualquer um dos estudantes com *login* e senha cadastrados nas referidas salas.

Neste contexto, os dados dessa pesquisa foram produzidos¹⁶ pelos estudantes nas sessões de tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG – materializados nos *chats* das sessões e nas construções realizadas no quadro branco e no GeoGebra – e reconhecidos pelo pesquisador, por meio de observações e anotações no diário de pesquisa, possibilitando posterior análise tanto das observações, quanto dos registros guardados nas salas do VMTcG.

4.5 Análise dos dados produzidos

Para análise dos dados produzidos fiz uso das fases de observação crítica de *chats* de Menezes e Bairral (2020), a saber: a *Fase 1* refere-se ao planejamento do chat; a *Fase 2* refere-

¹⁶ Entendo que os dados considerados para esta pesquisa “foram produzidos nos eventos em que os grupos de participantes desenvolveram modelagem, sendo estes fontes primárias de dados, ou seja, dados produzidos especialmente para esta pesquisa e não tomados de outras pesquisas ou de outros documentos.” (BUSTAMANTE, 2016, p. 80).

se à análise no coletivo; a *Fase 3* refere-se à análise personalizada; e a *Fase 4* refere-se à meta-análise do processo, como especificado no esquema da Figura 8.

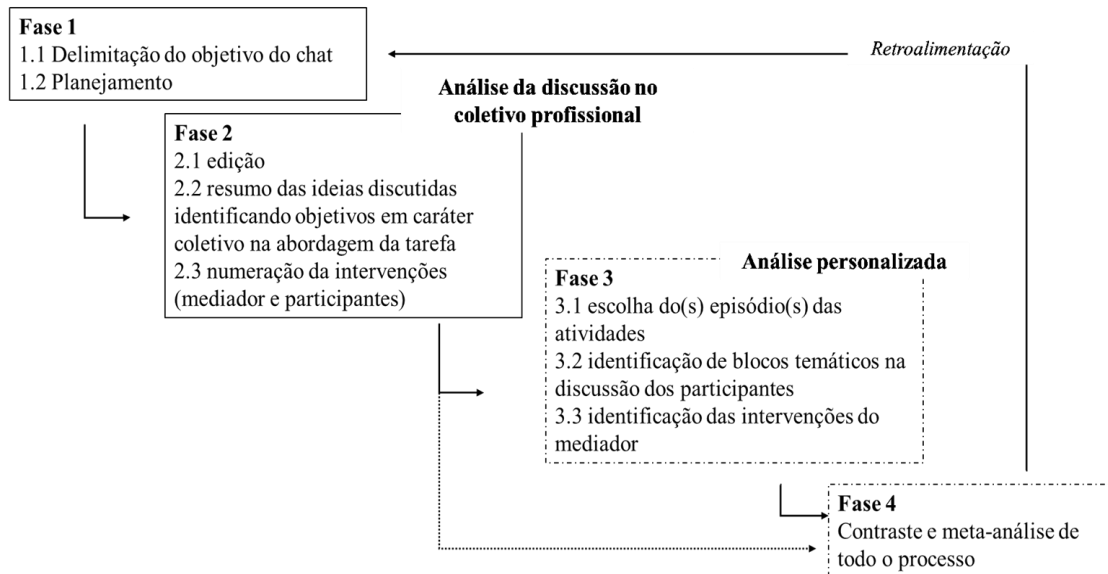


Figura 8 – Processo de análise do chat
Fonte: Menezes e Bairral (2020)

Com as *Fases 1* e *2* foi possível descrever como se deu o planejamento e o desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG, destacando as ideias dos estudantes na abordagem das tarefas, as interações entre os estudantes e o mediador, e o número de intervenções dos estudantes e do mediador durante as sessões. A realização dessas fases vai ao encontro do que pontuam Bogdan e Biklen (1994), sobre a investigação qualitativa ser descritiva. Paralelo a essas fases e de maneira mais específica, na *Fase 3* foi possível agrupar em blocos temáticos episódios pertinentes para na *Fase 4* esses episódios serem analisados, segundo os conceitos discutidos nos capítulos teóricos (temas, poderes e estratégias).

No contexto do curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMT com GeoGebra” apontei os conteúdos matemáticos, os estudantes do curso, e os mediadores, que interagiram no desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática, em um ambiente *online* e síncrono. Considerando esse cenário, na época da construção dos capítulos teóricos e da organização das análises segundo as *Fases 1, 2* e *3*, tínhamos em mente possíveis relações, a serem traçadas na *Fase 4*. Tais como os conteúdos matemáticos, tópicos de Geometria Plana, relacionados com os temas matemáticos, as interações dos estudantes, estudantes do curso de Matemática, relacionadas com os poderes matemáticos, e as interações dos mediadores, equipe executora do curso, relacionadas com as estratégias pedagógicas.

No entanto, o aprofundamento teórico mostrou que não era possível observar as interações do mediador, participante, e conteúdo de forma isolada, pois quando discutidos e

exemplificados os papéis dos conteúdos matemáticos dos estudantes e do professor, respectivamente, a partir de temas matemáticos, poderes matemáticos e estratégias pedagógicas, percebíamos que as interações aconteciam de forma articulada. A manifestação de temas matemáticos dependia das interações do professor e dos estudantes, a manifestação de poderes matemáticos dependia das interações do professor e do conteúdo matemático, a manifestação das estratégias pedagógicas dependia das interações dos estudantes e do conteúdo matemático. Assim, uma das ideias que usamos em nossa investigação é o entendimento de que para analisar interações do professor, do estudante e do conteúdo matemático em um determinado ambiente, é necessário articular três tipos de interações, estratégias pedagógicas, poderes matemáticos e temas matemáticos.

O aprofundamento de ideias teóricas sobre temas matemáticos, poderes matemáticos e estratégias pedagógicas (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005), (MASON e JOHNSTON-WILDER, 2004), (FOSTER et al., 2005), (MASON, 2018), (BADGER et al., 2012), (MASON, BURTON e STACEY, 1982), (MASON, 2005), (MASON, 2004); (MASON, 2007), (MASON, 2008) ajudaram na construção de um modelo teórico, base para análise de interações entre conteúdos matemáticos, estudantes e professor, desencadeadas segundo o ambiente do *design* considerado. Veja na Figura 9.

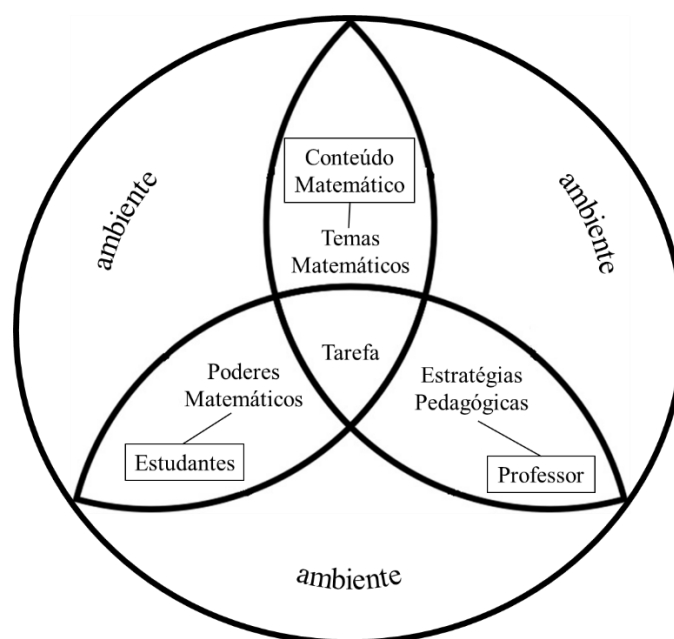


Figura 9 – Modelo base do diagrama de análise de interações
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Para o contexto da tese, os espaços e relações disponíveis no diagrama de análise de interações acomodam os sujeitos e os conceitos teóricos abordados. Alocamos os sujeitos professor, estudantes e conteúdo matemático, relacionando-os segundo o referencial teórico

adotado, os temas matemáticos, poderes matemáticos, estratégias pedagógicas. A região interna da circunferência representa o ambiente no qual as interações aconteceram. No centro localizamos a tarefa como geradora de todas as interações no ambiente, já que as tarefas tornam possível as interações entre professor e estudantes (MASON e JOHNSTON-WILDER, 2004) e conseqüentemente, interações entre eles e os conteúdos matemáticos intrínsecos às tarefas.

O diagrama de análise de interações pode ser usado em outros contextos (presencial, *online*, híbrido), considerando outras referências teóricas, a depender das escolhas do pesquisador/professor e também modificado de acordo com o enfoque desejado. No entanto, precisamos ponderar que quando se está em um ambiente físico, como a sala de aula, o professor tem como observar as interações dos alunos naquele ambiente. Fato que é diferente quando essas interações acontecem em um *design* de EO, totalmente *online*, na qual o professor não tem controle em quais outros espaços os alunos estão interagindo além do ambiente virtual considerado. Conforme o contexto deste estudo, adaptamos o diagrama de análise de interações, como mostra a Figura 10.

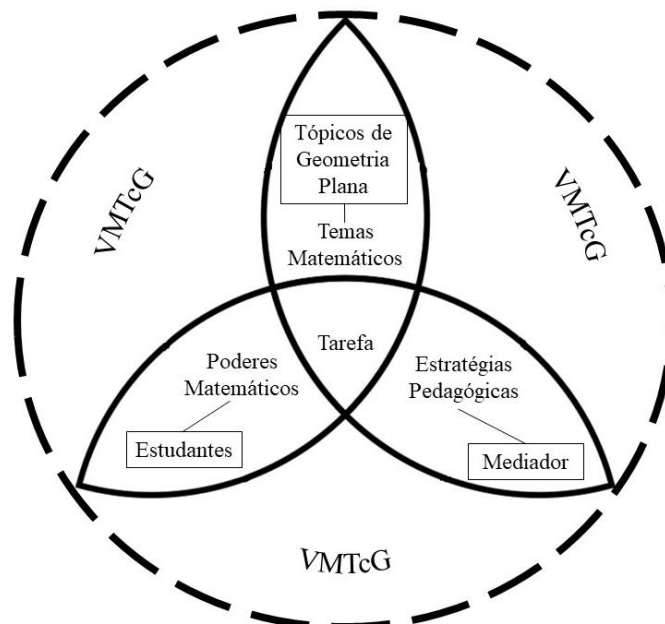


Figura 10 – Diagrama de análise de interações do curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Para análise das sessões do curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, o ambiente considerado foi o VMTcG, e a circunferência que o delimita aparece tracejada por não podermos controlar as interações dos sujeitos envolvidos. Podendo acontecer de simultaneamente outros espaços estarem sendo usados. O mediador/pesquisador elaborou junto com a equipe do curso o *design* dessa prática de EO. Neste sentido suas estratégias

pedagógicas estavam imersas nos constructos pedagógicos sobre a dinâmica do processo de Modelagem Matemática, e sobre os conceitos e características de práticas de EO.

Esse aspecto foi determinante para a escolha de sessões que foram mediadas por ele, para que no momento de analisar as estratégias pedagógicas de sua mediação, a partir de interações com os conteúdos matemáticos e com os estudantes, fosse possível relacioná-las com os constructos pedagógicos, que lhe foram base no decorrer de sua vida acadêmica para este estudo. Outros mediadores carregaram consigo diferentes estratégias pedagógicas, derivadas de outros constructos pedagógicos, que não poderíamos acessar nas análises, apenas supor de forma superficial.

Não gostaríamos que entendessem a disposição dos elementos que constituem o ecossistema do diagrama de análise de interações de forma rígida, pelo contrário, a dinâmica que apresentamos é mutável e maleável. No entanto, esses aspectos infelizmente não podem ser imprimidos em uma figura bidimensional, mas da forma como está nos foi útil para analisar os dados produzidos na intenção de cumprir os objetivos estabelecidos, e responder nossa questão de investigação.

CAPÍTULO 5

A TAREFA ESTAÇÃO DE BOMBEAMENTO

Este capítulo é dedicado à apresentação e análise da tarefa Estação de Bombeamento, desenvolvida pelo Grupo 5 no VMTcG. Para isso usamos as fases de análise de *chats* de Menezes e Bairral (2020). A *Fase 1* refere-se ao planejamento e construção/adaptação das tarefas. As *Fases 2 e 3* são referentes aos reconhecimentos do pesquisador, na organização de resumos e seleção de episódios, para serem analisados na *Fase 4*, na qual apoiados no referencial teórico fizemos uma meta-análise de todo o processo, utilizando nessa etapa, o diagrama de análise de interações.

5.1 Planejamento e objetivos da tarefa Estação de Bombeamento

O planejamento não se concentrou apenas no *chat*, considerando que o encontro *online* e síncrono no VMTcG permitia outros espaços de interação, para os estudantes se expressarem. Dessa maneira pensamos nos encontros, segundo os três espaços de interação, o *chat* e as abas, quadro branco e GeoGebra. Neste cenário entendemos que o *chat* destacava-se por ser a ferramenta que os estudantes utilizariam na coordenação de ações, nas outras abas do VMTcG. Para o planejamento consideramos características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática, como situações-problema com referência em semi-realidades ou na matemática pura, parceria do mediador e dos licenciandos, generalização das informações da situação investigada e o modelo matemático. Consideramos também conceitos de EO, dentre eles características de interação em um AVA de Souza e Bairral (2016).

A tarefa Estação de Bombeamento foi elaborada pelo autor da tese, juntamente com o coordenador do curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMT com GeoGebra”, a partir do seguinte problema:

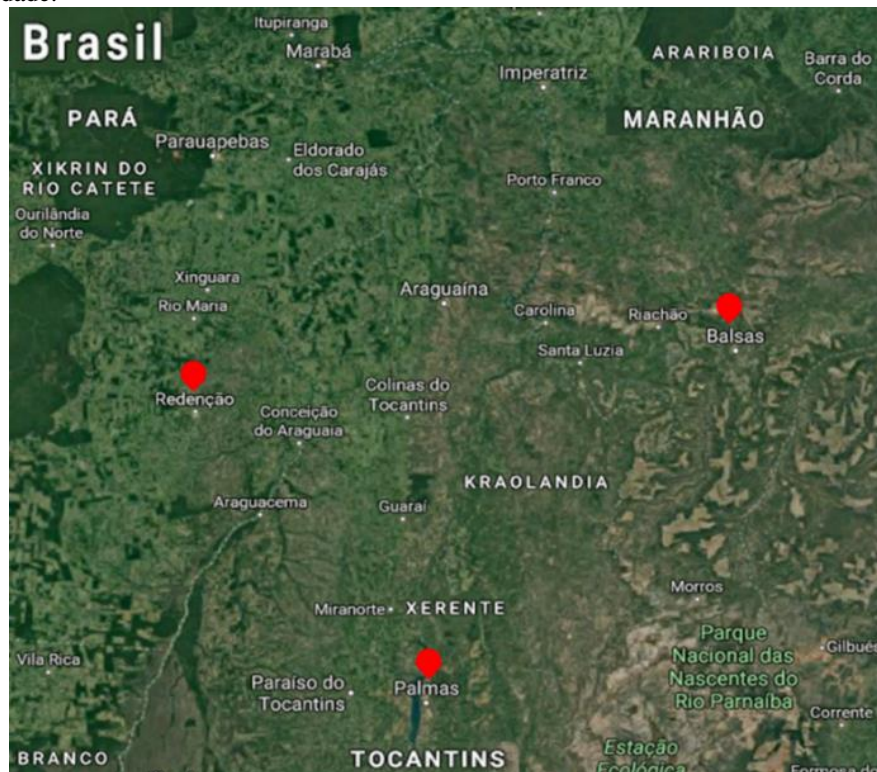
O problema do oleoduto: Os proprietários de um oleoduto dado abaixo planejam construir uma estação de bombeamento no oleoduto para levar óleo a dois grandes clientes. Para minimizar o custo de construção de linhas da estação de bombeamento para ambos os clientes, eles desejam localizar a estação de bombeamento ao longo do oleoduto de forma que a distância do segundo cliente à estação de bombeamento seja minimizada. Encontre a localização da estação de bombeamento. Justifique sua resposta. (O PIPELINE ..., s.d. tradução nossa¹⁷)

¹⁷ The Pipeline Problem: The owners of a pipeline given below plan to construct a pumping station on the pipeline to pipe oil to two major customers. To minimize the cost of constructing lines from the pumping station to both customers, they wish to locate the pumping station along the pipeline so that the distance from the second customer to the pumping station is minimized. Find the location of the pumping station. Justify your answer.

O problema do oleoduto combinado com as ideias discutidas no artigo de Brito e Almeida (2015), acerca do conceito de mediatriz aplicado à elaboração do diagrama de Voronoi¹⁸ permitiu-nos adaptar a situação-problema da tarefa apresentada no Quadro 9:

Quadro 9 – Tarefa Estação de Bombeamento

Tarefa: Os proprietários de um oleoduto planejam construir uma estação de bombeamento para transportar óleo para três clientes em três cidades. Na tentativa de minimizar o custo de construção das linhas da estação de bombeamento até os clientes eles desejam localizar a estação de bombeamento em uma determinada região em que as distâncias das cidades dos clientes até a estação sejam as mesmas. No mapa abaixo estão localizadas as cidades dos três clientes. Se vocês fossem responsáveis pelo projeto da construção dessa estação de bombeamento, como encontrariam a localização ideal dessa região para construí-la? Analisem e proponham uma possibilidade.



Fonte: Curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, 2018

A tarefa foi planejada para que os licenciandos trabalhassem os conceitos de mediatriz e circuncentro. O objetivo que imaginamos para os grupos era que eles localizassem onde poderia ser construída uma estação de bombeamento, a partir de três cidades em uma determinada região. No entanto, em se tratando da imprevisibilidade do processo de

¹⁸ Esse diagrama consiste numa representação geométrica obtida na divisão de uma região em um conjunto de áreas de abrangência estabelecendo relações de proximidades entre si. Por exemplo, relações de proximidade entre uma empresa com seus concorrentes ou de uma unidade de serviço público com as outras unidades que prestam o mesmo tipo de serviço. Determinar a área de abrangência de hospitais, escolas, polícia ou bombeiro é importante para melhorar a acessibilidade da população aos serviços, garantir uma igualdade na distribuição dos recursos além de reduzir os custos e otimizar a utilização de equipamentos e serviços. (BRITO e ALMEIDA, 2015, p. 9)

Modelagem Matemática esse objetivo poderia se cumprir, poderia ser modificado durante o andamento da sessão, ou os estudantes poderiam assumir outro objetivo.

5.2 Episódios do Grupo 5 no desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento

A sessão aconteceu no dia 16/10/2018, com todos os estudantes reunidos. Zeca, Pedro e Paula já se conheciam da sessão de ambientação, Ana e Caco vieram de grupos que não prosseguiram no curso, sendo essa a primeira sessão de Ana no ambiente VMTcG, e a primeira sessão de Caco com outros estudantes nesse ambiente, já que na sua ambientação estiveram na sala apenas ele e o mediador.

A sessão estava prevista para iniciar às 19:00 horas. O mediador foi o primeiro a *logar* (18:41:10h), seguido das estudantes Ana (18:41:10h) e Paula (18:43:11h). Considerando que não eram 19:00 horas ainda, Ana foi convidada pelo mediador para interagir nos espaços do VMTcG enquanto esperavam os outros estudantes. A partir das 19:00 horas os outros estudantes foram *logando* na sala virtual: Caco (19:00:01h), Pedro (19:03:35h) e Zeca (19:13:56). Após o mediador postar na aba quadro branco a tarefa Estação de Bombeamento (Quadro 8), Pedro foi o primeiro a sugerir propostas, no entanto precisou ser provocado pelo mediador:

Mediador (19:16:08h): Analisem e vamos começar a propor formas de solucionar o problema.¹⁹

Pedro (19:19:19h): Eu pensei em algo, porém não sei se é a solução mais adequada.

Mediador (19:19:31h): Exponha.

Mediador (19:19:38h): Não temos soluções adequadas.

Pedro (19:19:42h): Pensei em tratar as três cidades como vértices de um triângulo e após isso encontrar o circuncentro, seria ele então o local onde seria instalada a estação de bombeamento.

Pedro ao explicar sua proposta trouxe para discussão da abordagem da tarefa os conceitos de “vértices de um triângulo”, e destacou o “circuncentro” como uma possível resposta para o lugar geométrico da estação de bombeamento. Provocados pelo mediador Zeca e Caco sinalizaram estarem convencidos pelo raciocínio de Pedro. Já Paula apresentou uma outra proposta, trazendo para a discussão os conceitos “pontos médios” e “perpendiculares”:

Mediador (19:20:00h): O que os outros acham?

Caco (19:20:31h): Eu estava pensando nessa possibilidade também.

Zeca (19:20:53h): Eu também pensei nisso.

Caco (19:21:33h): Que olhando para o mapa seria mais ou menos em Kraolandia.

¹⁹ Reproduzimos as interações com correções de Português, e expandindo contrações própria de ambiente *online* (“tbm” para também, “vc” para você, “s” para sim, “pq” para porque, e assim por diante), por entender que essas correções não afetaram a análise e o foco da investigação. Todos esses registros foram capturados pelo VMTcG.

Paula (19:21:41h): Eu pensei em ligar os pontos formando um triângulo e depois marcar os pontos médios de cada lado, daí traçar uma perpendicular a cada lado que passa pelos pontos médios.

Mediador (19:21:59h): Ana?

Ana (19:23:20h): Pensei também sobre o circuncentro.

Antes de aprofundar as propostas apresentadas por Pedro e Paula, o mediador questionou se as informações da tarefa haviam sido compreendidas. Os estudantes afirmaram ter entendido a tarefa, e Paula reconheceu que a parte que não tinha entendido foi sanada pela pesquisa da palavra “oleoduto” no *Google*:

Mediador (19:23:13h): As proposições estão ótimas! Mas antes de passarmos para esses testes, gostaria de saber se vocês entenderam o problema, se tem algum termo, alguma palavra, algo que não ficou claro?

Pedro (19:23:40h): Acho que quanto ao problema em si eu consegui entender

Paula (19:24:01h): Eu não sabia o que era oleoduto, mas aí pesquisei

Ana (19:24:07h): Também entendi o problema

Mediador (19:24:24h): Ótimo Paula! No Google?

Zeca (19:24:43h): Sim

Paula (19:24:50h): Sim

Até o momento os estudantes estavam analisando e propondo a partir do que havia sido postado no quadro branco. O mediador perguntou então se as propostas poderiam ser testadas na aba GeoGebra, e partindo disso os estudantes começaram a discutir a possibilidade de migrar a imagem com as três cidades do quadro branco para o GeoGebra, e sobre a necessidade de se fazer isso para solucionar a tarefa:

Pedro (19:27:02h): Tem como colocar figura no GeoGebra? Pensei em fazer “por cima” da foto

Pedro (19:27:20h): Pra ver nela onde vai ficar a estação de bombeamento.

Mediador (19:27:35h): Não tem como colocar ela no GeoGebra.

Pedro (19:27:41h): Poxa!

Mediador (19:27:52h): Será que precisamos da figura?

Mediador (19:28:01h): O que vocês acham?

Ana (19:28:17h): Podem ser pontos quaisquer, não?

Pedro (19:28:35h): Criar três pontos quaisquer?

Ana (19:28:47h): Acho que sim.

Pedro (19:28:57h): Pensei nisso também.

Caco (19:29:05h): Acho que precisamos sim, pois temos que saber a localização de cada cliente.

Nesse ponto é perceptível uma tensão nas discussões entre a proposta de generalizar a situação de Ana, que foi apoiada por Pedro, e o posicionamento contrário de Caco. As explicações de Ana e Pedro sobre seus posicionamentos desencadearam o apoio de Zeca sobre

o que pontuou Caco, que por sua vez, desencadeou apoio de Paula à proposta de generalização de Ana e Pedro:

Mediador (19:29:47h): Pedro e Ana, por que acham que podem ser pontos quaisquer?

Pedro (19:30:13h): Acho que meu pensamento foi mais pro lado de generalizar a ideia do circuncentro.

Zeca (19:30:40h): Se for pontos quaisquer,

Zeca (19:30:46h): não vamos considerar as cidades

Zeca (19:30:50h): que é o foco.

Paula (19:31:44h): Mas criando pontos quaisquer no GeoGebra depois dá pra “modelar” (não sei se é o termo certo) pra localização das cidades.

Zeca (19:32:06h): aí já foge ao meu conhecimento rsrs

Ana (19:32:26h): Acho que a questão proposta foi um exemplo qualquer pra sabermos se conseguiríamos realizar a atividade.

Paula (19:32:32h): ou teríamos que ter as coordenadas dos pontos das cidades.

Ana (19:32:53h): por isso acho que podemos generalizar.

O grupo ficou dividido, de um lado Ana, Pedro e Paula, que defendiam a generalização das informações do problema, e do outro lado, Caco e Zeca, que defendiam o foco nas informações da imagem do mapa, com a localização das três cidades. Nesse cenário o mediador conseguiu convencer Caco e Zeca da generalização, ao chamar a atenção dos estudantes para o seguinte:

Mediador (19:33:08h): Aproveitando o que vocês colocaram pergunto: se funcionar para três pontos quaisquer, funcionaria para as três cidades?

Zeca (19:33:22h): Ah!

Zeca (19:33:22h): Então sim.

Caco (19:33:31h): Sim.

Ana (19:33:38h): Sim.

Pedro (19:33:46h): A ideia sim.

Mediador (19:34:02h): Paula?

Paula (19:35:26h): Acredito que sim.

Na aba GeoGebra Ana tomou a liderança e começou a fazer as construções, considerando três pontos quaisquer para encontrar o circuncentro. Lembrando que no GeoGebra do VMT apenas um participante por vez pode manuseá-lo, os outros estudantes Paula, Pedro, Caco e Zeca observavam o que Ana construía, como é possível observar na Figura 11.

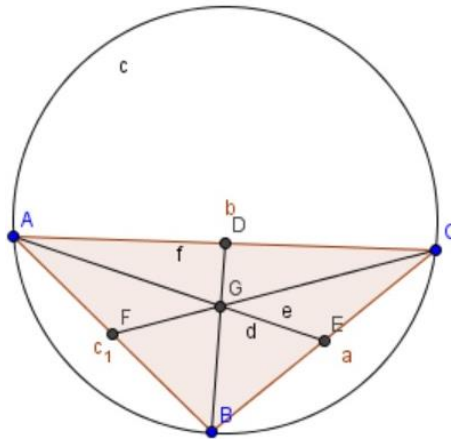


Figura 11 – Construção do “circuncentro” de Ana
Fonte: VMTcG, 2018

Pedro foi o primeiro a confrontar Ana com uma pergunta sobre a construção do circuncentro, desencadeando reações do mediador e dos outros estudantes:

Pedro (19:42:40h): Uma dúvida: para marcar o circuncentro os segmentos que passam pelo ponto médio não deveriam ser perpendiculares aos lados do triângulo?

Ana (19:43:20h): Verdade, Pedro

Mediador (19:43:24h): O ponto g da figura é o circuncentro?

Paula (19:43:46h): Não.

Pedro (19:43:52h): Não.

Ana (19:43:53h): Acho que o ideal seria construir um outro triângulo com os vértices A e C comuns.

Mediador (19:44:13h): por que Ana?

Ana (19:44:36h): na aula de construções geométricas aprendi isso ...rsrs

Mediador (19:44:41h): rsrs

Mediador (19:44:55h): Qual o conceito de circuncentro que vocês conhecem?

Ana (19:45:08h): Encontro das mediatrizes.

Zeca (19:45:17h): Encontro das mediatrizes.

Paula (19:45:19h): É o encontro das mediatrizes.

Pedro (19:45:38h): Interseção das mediatrizes.

Caco (19:45:37h): Isso encontro das mediatrizes.

Pedro constatou uma confusão na construção de Ana, e a contrapôs perguntando/afirmando sobre retas perpendiculares traçadas nos pontos médios dos lados do triângulo. Essa pergunta/afirmação foi aceita por Ana e aguçada pelo mediador que inquiriu sobre o ponto “g” encontrado ser o circuncentro. Os estudantes Pedro e Paula, que propuseram o circuncentro, responderam que não. Ana ainda considerava acrescentar mais um triângulo com vértices comuns em “A” e “C”, referindo-se a aprendizados adquiridos na disciplina de construção geométrica do curso de Matemática, mas não convenceu os outros estudantes, como mostra a Figura 12.

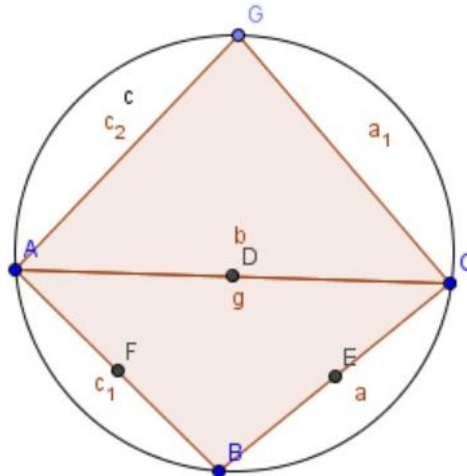


Figura 12 – Tentativa de Ana de construir o circuncentro
Fonte: VMTcG, 2018

Ana e os outros estudantes foram unânimes na resposta ao mediador sobre o circuncentro ser determinado pelo encontro das mediatrizes. No entanto, a primeira construção de Ana (Figura 11) remeteu a outro ponto notável do triângulo, o baricentro, determinado pela intersecção das medianas. A segunda construção (Figura 12), influenciada por suas lembranças de aulas da disciplina de construção geométrica não convenceu os outros estudantes e nem mesmo a própria Ana, que acabou pedindo ajuda do grupo.

Ana (19:47:10h): Deu ruim gente kk

Paula (19:47:56h): Posso tentar?

Mediador (19:47:57h): Tudo bem Ana!

Mediador (19:48:09h): Claro Paula!

Paula aproveitou a construção de Ana e traçou as mediatrizes nos pontos médios dos lados do triângulo, como apresentamos na Figura 13.

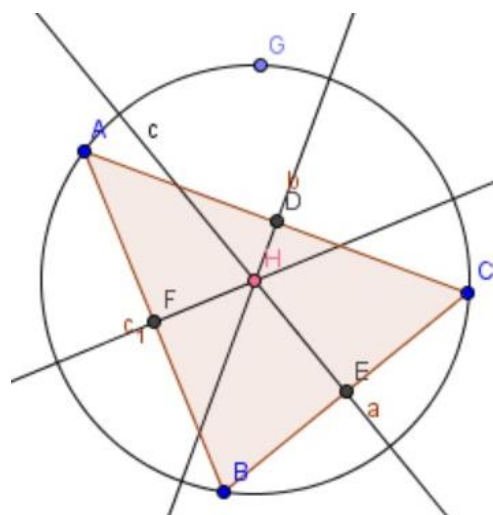


Figura 13 – Construção de Paula
Fonte: VMTcG, 2018

O ponto “H” destacado na construção de Paula convenceu os outros de que esse ponto era o circuncentro do triângulo ABC, revelando que os estudantes buscaram outras fontes para rememorar o conceito de circuncentro.

Pedro (19:49:44h): Arrasou, Paula!

Zeca (19:50:04h): Show!

Mediador (19:50:16h): Então esse ponto H é o circuncentro?

Paula (19:50:55h): Acredito que sim

Pedro (19:50:59h): Sim

Pedro (19:51:13h): Bom, que eu lembre acho que é isso mesmo rs

Ana (19:51:53h): Acho que é isso mesmo

Zeca (19:51:58h): Sim

Paula (19:52:27h): Eu não lembrava da definição do circuncentro, quando pensei em fazer, eu estava pensando em marcar os pontos médios dos lados e depois traçar a perpendicular.

Mediador (19:52:27h): Entendi Paula! Então primeiro veio a construção e depois o conceito?!

Pedro (19:53:15h): Confesso que também tive que pesquisar a definição do circuncentro pra confirmar a ideia que eu estava tendo.

Pela segunda vez temos a menção de pesquisas paralelas durante a sessão. Paula foi a primeira a mencionar a pesquisa sobre “oleoduto”, seguida de Pedro, que partilhou a pesquisa sobre “circuncentro” para confirmar seu entendimento. Paula também partilhou que auxiliada pela construção no GeoGebra foi relembando o conceito de circuncentro, especializando-se auxiliada pelas ferramentas do VMTcG e de pesquisas no *Google*.

Com a construção do circuncentro feita por Paula, o mediador começou a fazer provocações sobre o ponto H responder à investigação da estação de bombeamento.

Mediador (19:53:57h): Mas e agora? Tarefa concluída?

Ana (19:54:45h): Tem como fazer alguma construção dessa no quadro branco?

Pedro (19:54:48h): Fizemos uma generalização do problema.

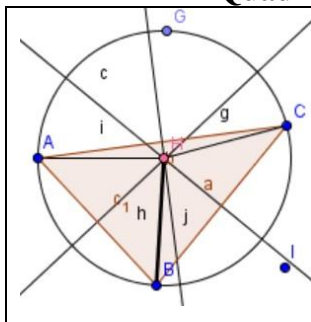
Zeca (19:54:48h): O ponto H é equidistante dos pontos A B e C né?!

Mediador (19:55:27h): Será? Não sei; Tem como mostrar isso?

Zeca (19:55:47h): Ele tem que ser o centro da circunferência.

Enquanto o mediador e Zeca interagiam no *chat*, Paula no GeoGebra estava com alguma dificuldade o que estava sendo dito por Zeca, respondendo também ao mediador com suas construções ligando o ponto H aos vértices do triângulo, como mostra o Quadro 10.

Quadro 10 – Resposta de Paula e do Mediador no GeoGebra



Paula (19:59:03h): Esse GeoGebra daqui me engana muito, eu me enrolo às vezes com ele

Pedro (19:59:19h): Eu também kkk

Paula (19:59:27h): Mas acho que assim dá pra ver que a distância é a mesma.

Zeca (19:59:35h): Sim.

Zeca (19:59:37h): Dá pra ver?!

Zeca (19:59:39h): Tá show

Fonte: VMTcG, 2018

Como Paula estava com dificuldades de identificar as medidas dos segmentos que ela construiu do ponto H até os vértices A, B e C, o mediador inseriu essas medidas e movimentou a construção provocando manifestações dos estudantes, como podemos observar na sequência de construções da Figura 14.

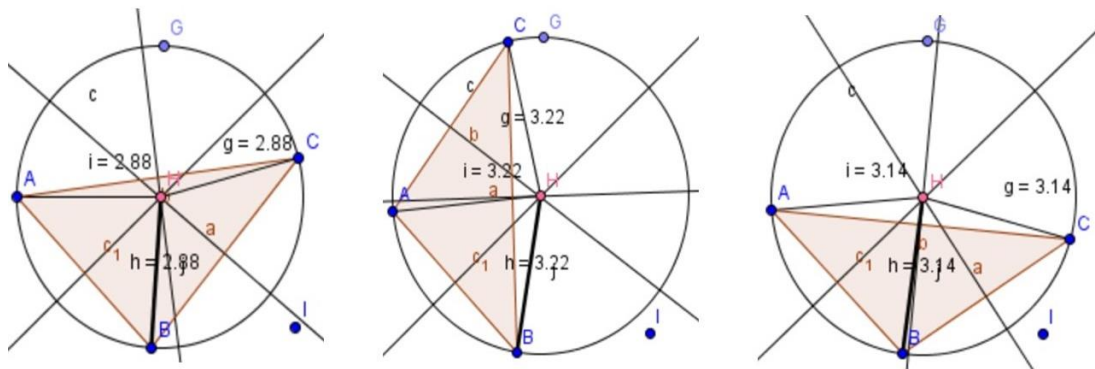


Figura 14 – Manipulações do Mediador no GeoGebra

Fonte: VMTcG, 2018

Zeca (20:00:33h): Agora está mais claro,

Zeca (20:00:34h): ainda,

Zeca (20:00:44h): sim.

Mediador (20:01:16h): Acabou?

Zeca (20:01:39h): Acabou.

Pedro (20:02:03h): Não sei, tá parecendo muito fácil kkkk

Pedro (20:02:19h): Geralmente quando eu sinto isso eu estou deixando passar algo kkk

Paula (20:02:24h): Acho que pra fazer mais alguma coisa iríamos precisar das coordenadas das cidades.

Pedro (20:02:34h): Sim, pensei nisso também.

Paula (20:02:50h): Toda vez que ele pergunta se tem certeza eu leio o enunciado em busca de outra coisa.

Ana (20:03:02h): Sim... rs

Pedro (20:03:04h): Eu, o mesmo.

Zeca (20:03:38h): Ué, falta mais alguma coisa?

Ao chamar a atenção sobre a conclusão ou não da tarefa, o mediador provocou nos estudantes incertezas sobre algum detalhe que possa ter sido esquecido. No entanto, eles chegaram a uma resposta matemática para o problema, o que faltava na visão do mediador era retornar àquela resposta para a situação do problema, e o mediador questionou/direcionou usando elementos do contexto da tarefa Estação de Bombeamento.

Mediador (20:03:54h): Então, se o responsável do projeto usar como estratégia o que vocês fizeram aqui, ele encontra o ponto onde construir a estação?

Zeca (20:04:14h): Se ele tiver as coordenadas das cidades creio que sim.

Mediador (20:04:28h): Entendi.

Mediador (20:04:57h): E olhando o que vocês construíram e olhando a imagem com as três cidades vocês não chutam mais ou menos onde a estação pode ser construída?

Para responder o mediador Paula manipulou a construção no GeoGebra, colocando os vértices do triângulo em posições próximas aos pontos das cidades marcados no mapa, fazendo com que os estudantes estimassem o local da construção da estação de bombeamento, como exposto no Quadro 11.

Quadro 11 – Estimativas dos estudantes

Zeca (20:05:49h): Kraolandia

Zeca (20:05:51h): Meu chute

Ana (20:05:58h): Eu chutaria a Kraolandia

Pedro (20:06:12h): Eu acho que mais ou menos próximo de Guarai

Paula (20:06:35h): Acho que perto das Colinas do Tocantins

Pedro (20:06:41h): Isso, por aí

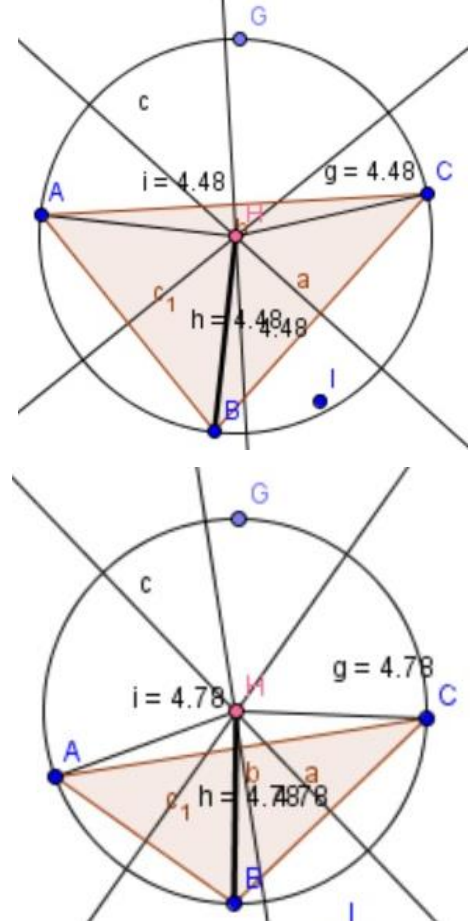
Pedro (20:07:12h): Acho que é ali entre Colinas do Tocantins e Guarai

Caco (20:07:39h): Eu acho que entre Colinas do Tocantins e Kraolandia

Fonte: VMTcG, 2018, e elaboração do autor da tese (2021).

As respostas dos estudantes pontuaram cidades específicas ou regiões entre cidades. Zeca e Ana responderam Kraolandia, enquanto que Paula, Pedro e Caco responderam localizações entre cidades ou próximo de alguma cidade. Com essas respostas, o mediador fez outros questionamentos complementares, e mais uma vez Paula foi manipulando a construção no GeoGebra, de acordo com os novos questionamentos, como mostra o Quadro 12.

Quadro 12 – Manipulações de Paula paralelas a interações no *chat*



Mediador (20:08:12h): Ficaria dentro do triângulo formado pelas três cidades?

Zeca (20:08:24h): Sim.

Pedro (20:08:26h): Sim.

Paula (20:08:27h): Sim.

Ana (20:08:33h): Sim.

Caco (20:08:39h): Sim.

Mediador (20:08:56h): Isso é regra ou funciona nesse contexto?

Pedro (20:09:09h): Funciona nesse caso.

Zeca (20:09:12h): Não é regra não.

Pedro (20:09:16h): Porque o ponto poderia ficar fora.

Ana (20:09:21h): Nesse caso.

Fonte: VMTcG, 2018

O mediador continuou com indagações diante das respostas dos estudantes, porém mudou o foco, da construção do circuncentro no GeoGebra para informações dadas pela situação-problema, fazendo-os pensar sobre variáveis que afetariam a solução encontrada na construção do GeoGebra, e sobre informações presentes ou não no enunciado da situação-problema.

Mediador (20:10:36h): Ainda sobre o contexto da tarefa, vocês acham que os proprietários minimizariam custos da construção da estação?

Mediador (20:11:43h): Construindo ela a uma mesma distância das cidades

Zeca (20:11:47h): Acho que sim.

Pedro (20:11:49h): Acho que sim.

Ana (20:11:56h): Acho que sim.

Zeca (20:11:58h): Mas depende do trajeto também.

Pedro (20:12:02h): Otimização não é muito minha praia ... kkk

Paula (20:12:04h): Acho que sim.

Mediador (20:12:16h): Como assim Zeca?

Zeca (20:15:10h): Sei não, foi só um palpite, não sei se existem variáveis contra.

Mediador (20:15:33h): O que os outros acham sobre essa possibilidade aberta pelo Zeca?

Pedro (20:16:16h): Não entendi bem.

Mediador (20:17:08h): Zeca, explica melhor o que você pensou.

Paula (20:17:13h): Eu entendi o que ele disse como se fosse algo do tipo, a gente consegue encontrar um ponto equidistante das cidades, porém estamos considerando retas e nem sempre pode ser possível fazer um caminho reto.

Pedro (20:17:27h): Hum...

Pedro (20:17:29h): Verdade.

Paula (20:18:20h): mas acredito que esse ponto está sendo desconsiderado no enunciado. Pelo menos eu entendi que tivesse desconsiderado.

Caco (20:18:47h): Como se trata de tubulações feitas para transportar petróleo, pode ser que em algum ponto do trajeto essas tubulações não podem seguir em linha reta.

Caco (20:19:10h): Considerando o ambiente.

Zeca (20:19:34h): Isso Paula.

Zeca (20:19:40h): Mas no enunciado não comenta disso.

Zeca (20:19:46h): Por isso não dá pra saber.

Paula (20:20:19h): Mas ele fala sobre a distância ser a mesma.

Zeca (20:20:44h): Sim.

Zeca (20:21:13h): Mas o mediador disse

Zeca (20:21:17h): Sobre minimizar custo,

Zeca (20:21:19h): então

Mediador (20:22:00h): Porque entra na questão geográfica

Mediador (20:22:07h): liberações ambientais.

Mediador (20:22:26h): Quando estávamos lá no GeoGebra não tinha essas variáveis.

Pedro (20:22:36h): Verdade.

Ana (20:23:04h): Verdade.

Paula (20:23:06h): Sim, verdade.

Com as intervenções do mediador os estudantes conscientizaram-se de elementos da situação-problema, que foram simplificados quando analisadas as propostas no GeoGebra, que reapareceram quando eles trouxeram a solução para o contexto da situação-problema. No entanto, o mediador levantou incertezas sobre a solução encontrada, ponderando se ela garante o mínimo de gastos almejado pelos proprietários do oleoduto, e retomou a construção de Ana no início da sessão, ao confundir a construção do baricentro com a do circuncentro.

Mediador (20:23:41h): Ana no início da construção encontrou um ponto determinado pelas medianas. Se a tarefa não considerasse essa mesma distância da estação para as três cidades, o ponto encontrado pela Ana economizaria custos?

Zeca (20:24:41h): Ela tinha encontrado o baricentro?

Zeca (20:24:49h): Não lembro.

Pedro (20:24:51h): Acho que não tanto,

Pedro (20:25:04h): ou sim, não sei...

Zeca (20:25:08h): Acho que não.

Pedro (20:25:09h): Fiquei meio confuso.

Paula (20:25:26h): Eu não lembro também.

Paula (20:25:58h): Mas se fosse possível fazer um caminho reto, acho que economizaria.

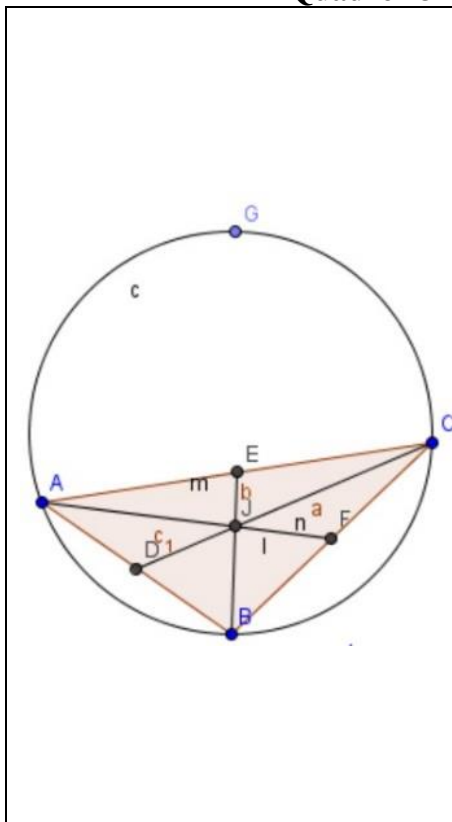
Mediador (20:26:49h): Ana, lembra do que você fez no início? Conseguiria fazer de novo?

Mediador (20:27:01h): pra tirarmos essa dúvida?

Ana (20:27:11h): Sim, só um instante.

Ana não respondeu de imediato como fizeram os outros estudantes. A participante pediu um momento do *chat* e foi para a construção feita por Paula na aba GeoGebra, desfez a construção do circuncentro e retomou sua construção do baricentro: Ponto J. Com essa retomada a participante respondeu ao mediador e aos estudantes, trazendo para a discussão elementos conceituais das medianas e da distância do baricentro até os vértices. Veja o Quadro 13.

Quadro 13 – Retomado do conceito de baricentro



Ana (20:29:55h): Pelo que eu me lembro, acho que a distância do vértice pro baricentro tem $2/3$ da medida das medianas né?

Zeca (20:31:05h): Não lembro, não.

Ana (20:31:05h): BJ tem $2/3$ da medida de BE, por exemplo.

Ana (20:32:38h): E como não necessariamente a distância das cidades são iguais, então J não estaria equidistante dos vértices.

Mediador (20:33:13h): Mas então, considerando linhas retas e sem considerar a mesma distância como regra, o baricentro reduziria mais gastos que o circuncentro?

Pedro (20:34:51h): Não sei, não consigo concluir que sim ou que não

Ana (20:35:08h): Também não consigo concluir ... kkk

Paula (20:35:43h): Não consigo chegar a uma conclusão.

Zeca (20:35:55h): Pra proposta

Zeca (20:35:58h): não serve, pois

Zeca (20:36:04h): distâncias iguais.

Paula (20:36:18h): Pode marcar os dois no mesmo desenho pra gente ter como comparar?

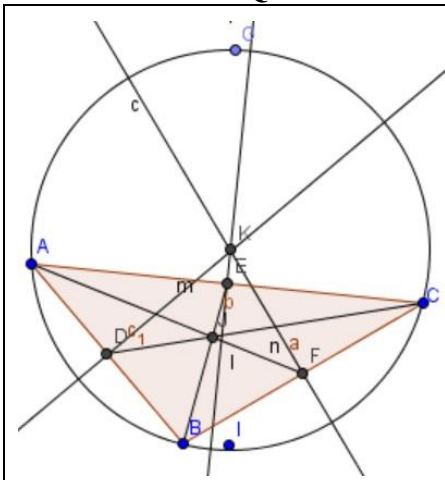
Caco (20:36:18h): Não consigo chegar a essa conclusão também.

Mediador (20:36:27h): Pode sim!

Fonte: VMTcG, 2018

Paula, com o propósito de reconstruir o circuncentro na construção do baricentro de Ana, para comparar as distâncias desses pontos até os vértices, recebeu ajuda na manipulação de ferramentas do GeoGebra, como percebemos no Quadro 14

Quadro 14 – Colaboração na manipulação do GeoGebra



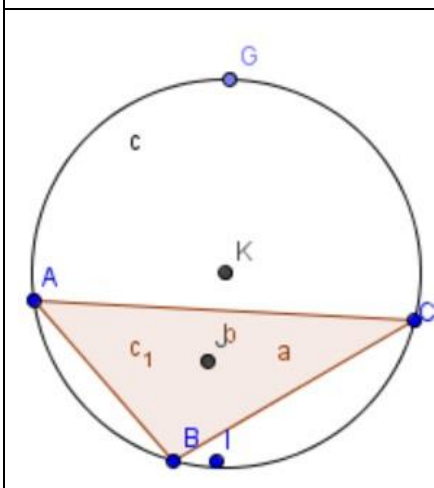
Paula (20:37:19h): O ruim é que como não dá pra esconder, fica um pouco poluído.

Ana (20:37:37h): Dá sim,

Ana (20:37:38h): aliás

Ana (20:37:39h): acho que dá.

Paula (20:38:08h): Eu não consegui achar.



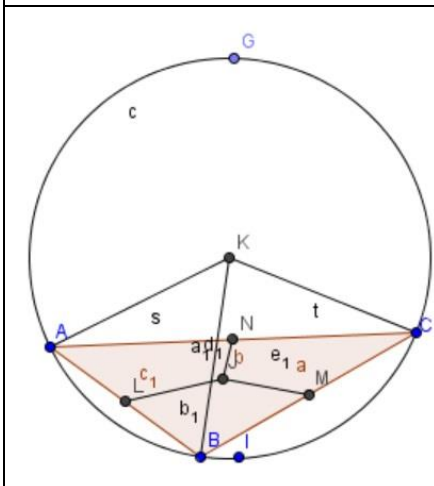
Ana (20:39:05h): Prontinho

Paula (20:39:28h): Como você fez, Ana?

Ana (20:39:55h): Clica com o botão direito no objeto

Ana (20:40:49h): e depois clica na opção show object.

Paula (20:40:59h): Ah, sim!



Mediador (20:41:15h): E agora para saber qual apresenta menores medidas?

Mediador (20:41:28h): J baricentro ou K circuncentro?

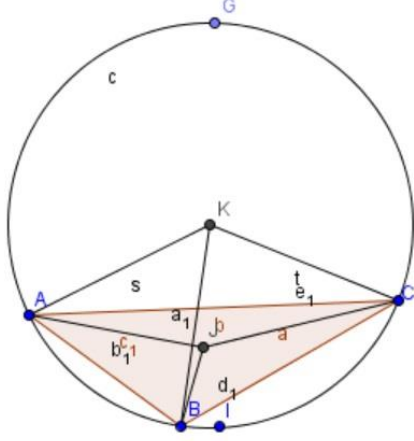
Paula (20:42:37h): Baricentro,

Paula (20:42:40h): eu acho.

Paula (20:42:48h): K é o circuncentro.

Pedro (20:42:55h): Paula, os segmentos partindo de J não deveriam ir até os vértices?

Paula (20:43:09h): Sim, eu me perdi. Desculpa.



Ana (20:43:27h): Eu acho que quanto maior a distância maior será o custo né?

Paula (20:44:00h): Onde tem a ferramenta distância?

Ana (20:44:09h): No caso, o circuncentro sempre estará a mesma distância, então o gasto seria proporcional a 3X, por exemplo.

Mediador (20:44:18h): Angle.

Mediador (20:44:31h): Distance or length.

Paula (20:44:49h): Ah, sim,

Paula (20:44:53h): obrigada!

Ana (20:44:55h): Mas o baricentro está a 2/3 do valor da mediana distante dos vértices.

Paula (20:45:35h): Eu acho que o baricentro gastaria menos, mas só serviria se considerássemos distâncias diferentes.

Pedro (20:45:42h): Sim.

Ana (20:47:12h): O baricentro está sempre dentro do triângulo certo?

Zeca (20:47:33h): Sim.

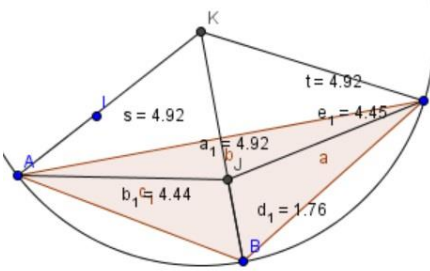
Ana (20:47:34h): Então, as distâncias nunca serão muito absurdas,

Ana (20:47:48h): enquanto o circuncentro pode ser que seja.

Fonte: VMTcG, 2018.

Nos momentos finais dessa sessão o mediador identificou as medidas das medianas e das mediatrizes, possibilitando aos estudantes chegarem a conclusões sobre a resolução da tarefa, como mostra o Quadro 15.

Quadro 15 – Encaminhamentos finais da sessão



Mediador (20:49:28h): Coloquei as medidas.

Mediador (20:50:20h): Então, se vocês fossem os responsáveis do projeto e considerando o que vocês acabaram de constatar, o que vocês fariam para os proprietários?

Paula (20:51:41h): Dependendo das condições do terreno, falaria que era melhor a distância J, pois economizaria mais.

Paula (20:51:46h): Eu acho...

Zeca (20:52:12h): É, considerando um terreno uniforme, circuncentro.

Pedro (20:52:19h): Também acho. Usando o ponto J as distâncias são menores, logo se imagina que haverá um gasto menor.

Ana (20:52:40h): Sim...

Mediador (20:53:18h): Caco, como você argumentaria?

Ana (20:55:10h): No caso, eu acho que depende da distância das cidades pra sabermos qual usaríamos.

Zeca (20:55:48h): Verdade.

Zeca (20:55:52h): Sim, mas no geral

Zeca (20:56:02): acho que o circuncentro seria mais certo

Fonte: VMTcG, 2018

As respostas de Zeca mostram um apego às informações da situação-problema, não o deixando perceber que ao desconsiderar a condição de ter distâncias iguais das cidades até o local de construção da estação de bombeamento o projeto ficaria mais barato. Enquanto que Paula, Pedro e Ana entraram no consenso que o ponto J tornava a construção menos onerosa. No entanto, nos momentos finais da sessão Ana retomou a necessidade de se saber a distância real entre as cidades.

Mediador (20:56:19): Vocês acham que ter a distância das cidades, ou as coordenadas, interfere no que vocês fariam aos proprietários?

Pedro (20:56:29): Acho que não.

Mediador (20:56:34h): Por que?

Ana (20:56:50h): Acho que sim...

Pedro (20:56:57h): Ah não, perdão

Pedro (20:57:01h): li errado a pergunta.

Paula (20:57:19h): Acho que interferia.

Pedro (20:57:23h): Sim, porque aí poderia ser analisado qual método seria mais adequado e mais econômico.

Mediador (20:58:01h): mas não saber a distância não impediu vocês de analisarem. Impediria vocês de argumentarem qual melhor opção?

Paula (20:58:03h): E também o terreno.

Mediador (20:58:40h): Ou não, se tem melhor opção ... rrsrs

Zeca (20:58:58h): Circuncentro.

Mediador (21:02:20h): Ou na Matemática é uma coisa e quando vamos pro contexto as suas condições acabam impedindo de ter certezas?

Pedro (21:03:27h): A gente pode ter até ideias de como seria a forma mais econômica, porém na prática isso estaria sujeito a um conjunto de variáveis, que estamos desconsiderando aqui.

As ideias discutidas na sessão giraram em torno de objetivos pontuais, que desenvolvidos de forma coletiva pelas interações dos estudantes, do mediador e dos conteúdos matemáticos no ambiente VMTcG, configuraram episódios que mostraram o caminho percorrido até a(s) resposta (s) para a situação-problema investigada, como sintetizamos no Quadro 16.

Quadro 16 – Síntese das Fases 2 e 3 de análise do *chat* da sessão 2

FASE 2		
2.1	Edição	Sessão 2 do Grupo 5 realizada no dia 16/10/2018
2.2	Resumo das ideias discutidas, identificando objetivos em caráter coletivo na abordagem da tarefa	Associação de conteúdos matemáticos com as informações da situação-problema; simplificação e priorização de informações do contexto da situação-problema para o contexto matemático; comparação dos conceitos de circuncentro e baricentro; ajuste de resposta (s) matemática (s) encontrada (s) para o contexto da situação-problema investigada.

2.3	Numeração de intervenções (mediador e participantes)	Mediador (94); Paula (55); Ana (58); Caco (18); Pedro (59); Zeca (63)
FASE 3		
3.1	Escolha do(s) episódio(s) das atividades	Episódio 1: transição da aba quadro branco para a aba GeoGebra; episódio 2: <i>ausências</i> sobre o conceito de circuncentro e o uso de pesquisas na internet; episódio 3: volta da solução encontrada para o contexto da situação-problema
3.2	Identificação de blocos temáticos na discussão dos participantes	
3.3	Identificação das intervenções do mediador	Encorajando os estudantes a se expressarem; convidando os estudantes a opinarem; elogiando e se certificando se os estudantes entenderam a situação-problema; esclarecendo impasses de ideias com perguntas; identificando confusões conceituais com perguntas; manipulando construções no GeoGebra estimulando respostas dos estudantes

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

5.3 Episódios do Grupo 5 no diagrama de análise de interações

Nesta seção utilizamos o diagrama de análise de interações nos episódios frutos do desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento, pelos estudantes do Grupo 5 no VMTcG. Dessa forma, buscamos identificar nas interações dos conteúdos matemáticos, dos estudantes e do mediador de cada episódio os temas matemáticos, os poderes matemáticos e as estratégias pedagógicas que emergiram.

Episódio 1(EP1): transição da aba quadro branco para a aba GeoGebra

No convite feito pelo mediador (*analisem e vamos começar a propor formas de solucionar o problema*)²⁰: a palavra “vamos” indica inclusão dele na investigação, assumindo o papel de parceiro dos estudantes. A palavra “formas” indica que ele considerou diferentes caminhos para solucionar o problema, mesmo o comando da situação-problema solicitando apenas uma possibilidade. Feito o convite, o mediador aguardou. As interações iniciais do mediador mostram estratégias como: parceria, chamar atenção para mais de uma solução, aguardar.

O estudante Pedro pensou em algo, mas não queria apresentar ao grupo com receio de não ser a solução mais adequada. O mediador o motivou (*exponha, não temos soluções adequadas*) tentando deixá-lo confortável, o que fez Pedro apresentar o que tinha pensado (*pensei em tratar as três cidades como vértices de um triângulo e após isso encontrar o circuncentro, seria ele então o local onde seria instalada a estação de bombeamento*). Da parte de Pedro identificamos referências aos poderes imaginar e expressar o que tinha pensado. No

²⁰ Trechos retirados do chat foram colocados entre parênteses e itálico.

entanto, para que ele expressasse, o mediador precisou garantir que o ambiente estava aberto a propostas, indicando estratégias como: querer saber o que o participante estava pensando, promover um espaço acolhedor de propostas.

Na proposta de Pedro identificamos o uso de outro par de poderes, o classificar e organizar. Partindo das três cidades-clientes da tarefa, o participante as fez sentido no contexto matemático, entendendo-as como vértices de um triângulo e sugerindo encontrar o circuncentro, que no contexto da situação-problema, Pedro julgava ser o local a ser construída a estação de bombeamento. Para organizar o participante precisou classificar as informações da situação-problema, priorizando umas em detrimento de outras.

Como o mediador já tinha motivado Pedro a interagir expressando sua proposta de solução, ele aproveitou a proposta de Pedro, para pedir a opinião dos outros estudantes. Caco, Zeca e Ana afirmaram terem pensado em algo similar, enquanto que Paula apresentou sua proposta (*eu pensei em ligar os pontos formando um triângulo e depois marcar os pontos médios de cada lado, daí traçar uma perpendicular a cada lado que passa pelos pontos médios*). A proposta de Paula conversa com a de Pedro, à medida que Paula sequenciou matematicamente a proposta de Pedro, indicando como encontrar o circuncentro, e dessa forma, Paula organizou e classificou.

Nas propostas de Pedro e de Paula temos transferências de sentidos das informações da situação-problema para objetos matemáticos, repercutindo na liberdade desses objetos. Os vértices associados às cidades-clientes fixadas no mapa, não podendo ser movimentadas, influenciou na liberdade de construção dos segmentos de retas dos lados da área triangular. Estes, no contexto da situação-problema, foram associados às distâncias entre as cidades-clientes, que por sua vez limitaram as construções das mediatrizes, pois elas se intersectarão no lugar geométrico circuncentro, que segundo a hipótese dos estudantes é o lugar da construção da estação de bombeamento. Observar as limitações impostas aos objetos matemáticos pela situação-problema mostra o potencial da tarefa em restringir a atenção dos estudantes para os conceitos de mediatrizes e de circuncentro.

As propostas de Pedro e Paula foram elogiadas pelo mediador, e antes de serem aprofundadas pelo grupo, o mediador quis saber dos estudantes se havia alguma dúvida sobre o contexto da situação-problema. Os estudantes responderam que a entenderam, e Paula acrescentou que no início não sabia o significado da palavra “oleoduto”, fazendo-a pesquisar no *Google*.

As interações do mediador mostram-se interessadas no entendimento da situação-problema pelos estudantes, e Paula demonstrou estar confortável a ponto de compartilhar de

forma espontânea com o grupo que consultou a *internet*, para saber o significado de uma palavra. Novamente percebemos o interesse do mediador em querer saber o que os estudantes estavam pensando sobre o contexto da situação-problema. Já a pesquisa de Paula mostrou seu interesse em inteirar-se sobre a situação-problema, fazendo uso do poder particularizar/especializar, fundamentando dessa forma seu entendimento sobre o contexto da situação-problema, e potencializando uma posterior generalização.

A situação-problema na aba quadro-branco limitava as construções dos estudantes, que ficavam presos às cidades-clientes, marcadas no mapa. Neste cenário, o mediador questionou o grupo sobre a possibilidade de testar as propostas de Pedro e Paula na aba GeoGebra. O mediador direcionou as investigações para o GeoGebra, visando ampliar as interações dos alunos. Desse questionamento, que mascarava a intenção do mediador de ir para o GeoGebra, surgiu o primeiro impasse no grupo, usar pontos quaisquer no GeoGebra ou usar as localizações das cidades-clientes do mapa.

O mediador quis saber dos motivos que levaram Pedro e Ana a defender o uso de pontos quaisquer no GeoGebra. Pedro justificou, dizendo ter optado pela generalização do circuncentro, enquanto que Ana ponderou que a situação-problema era um exemplo qualquer, com objetivo de verificar se os estudantes eram capazes de solucioná-la.

As justificativas não convenceram Caco e Zeca, que replicaram os argumentos. Para Caco era necessário encontrar as localizações das cidades-clientes, e Zeca corroborando Caco, argumentou que se considerassem pontos quaisquer, não estariam considerando as cidades-clientes, que eram o foco da situação-problema. Paula tomou partido de Pedro e Ana e argumentou que ao usar pontos quaisquer no GeoGebra, posteriormente seria possível modelar para a localização das cidades, caso contrário, pelas propostas de Caco e Zeca, era necessário saber as coordenadas referentes às marcações das cidade-clientes do mapa.

Nos argumentos de Pedro, Ana e Paula foi possível identificar o uso do poder particularizar/especializar, com potencial para o desenvolvimento do poder generalizar, pois os estudantes mostraram domínio sobre elementos da situação-problema, que permitia transitar do caso específico para o geral. No entanto, eles faziam parte de um grupo e precisavam convencer Caco e Zeca, que estavam irredutíveis no entendimento de que era necessário solucionar a situação-problema, considerando apenas as informações dadas no mapa.

O mediador já tinha um partido tomado, no entanto não podia dizer que um lado ou outro estava errado, e dessa forma usando os argumentos de Pedro, Ana e Paula, questionou (*se funcionar para três pontos quaisquer, funcionaria para as três cidades do mapa*). Assim convenceu a todos sobre o uso de três pontos quaisquer no GeoGebra. O mediador, com a

intenção de explorar outros espaços do VMTcG e de ampliar as liberdades possíveis para os objetos matemáticos – vértices de um triângulo, segmentos de seus lados, e o circuncentro –, direcionou os estudantes com perguntas que convenceram Caco e Zeca.

De acordo com o diagrama de análise de interações da Figura 15, as estratégias pedagógicas adotadas pelo mediador desencadearam o uso de poderes matemáticos dos/nos estudantes. Os temas matemáticos emergiram dos objetos matemáticos, reconhecidos pelos estudantes, sendo expressos nas suas interações. O *Google* também figurou como suporte de Paula, sendo a única a compartilhar ter o consultado para descobrir o significado da palavra “Oleoduto”.

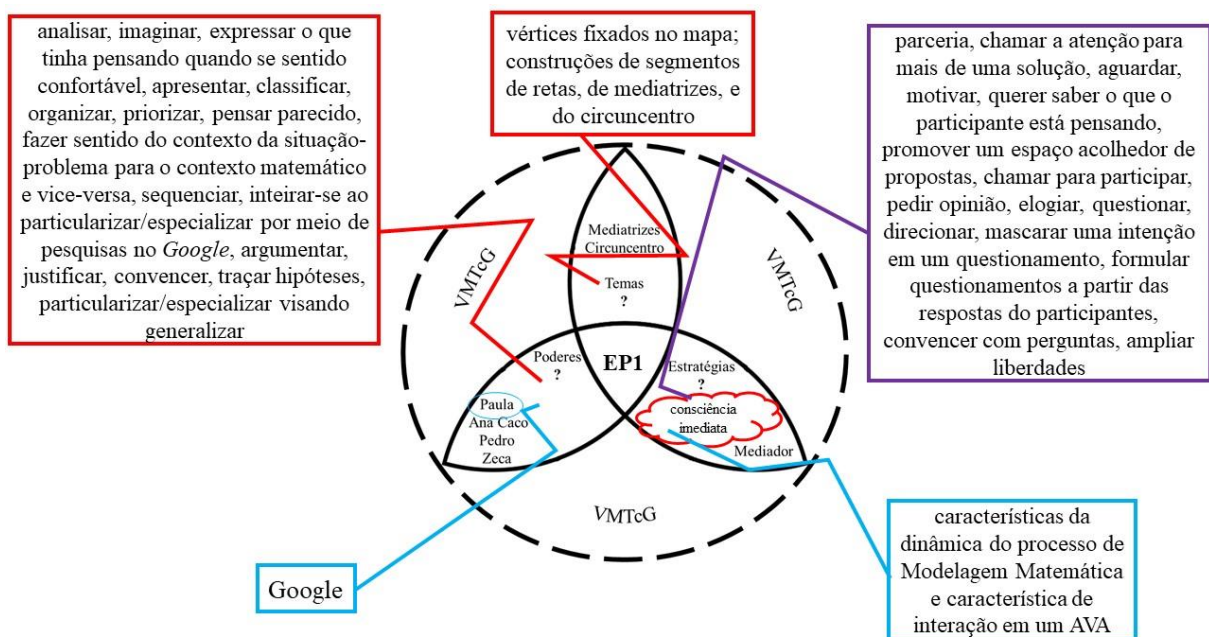


Figura 15 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Estação de Bombeamento (EP1)
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Episódio 2 (EP2): ausências sobre o conceito de circuncentro e o uso de pesquisas na internet

No GeoGebra Ana assumiu o controle enquanto os outros estudantes e o mediador observavam. As propostas de Pedro e Paula eram referentes à construção do circuncentro e Ana defendia essa proposta, já que pensou algo parecido (*pensei também sobre o circuncentro*). No entanto, Ana não construiu o circuncentro, ao invés dele, construiu medianas que resultaram em outro ponto notável do triângulo, o baricentro. Nas interações de Ana, a participante testou a proposta acordada pelo grupo no GeoGebra, e especializou-se enquanto construía, sendo esse processo de construção, uma síntese do uso do poder generalizar.

A consciência imediata de Ana sobre o circuncentro remeteu a uma construção equivocada, já que aspectos que ela julgava ser do circuncentro, na verdade eram de outro ponto

notável, indicando assim, uma *ausência* conceitual sobre aspectos do circuncentro. Johnston-Wilder e Mason (2005), ao definirem consciências imediatas como sendo a consciência do sujeito sobre algo, apontaram que em determinadas situações o que vai vir à mente do aluno sobre algo, pode não ser apropriado, ou estar errado, e que pode ser desautorizado, já que as consciências nesses casos são *ausências* percebidas naquele momento.

Pedro desautorizou a construção de Ana, no entanto, a forma como ele fez isso, tira todo o sentido pejorativo original dessa palavra. Pedro colocou em evidência a *ausência* de Ana com uma dúvida/afirmação (*Uma dúvida: para marcar o circuncentro os segmentos que passam pelo ponto médio não deveriam ser perpendiculares aos lados do triângulo?*), que por sua vez, convenceu Ana do seu equívoco (*verdade, Pedro*). Pedro, na forma como agiu, pareceu imitar o mediador, usando de questionamentos para expressar seu ponto de vista.

O mediador encerrou esse tópico sobre a construção de Ana questionando se o Ponto G encontrado remetia ao circuncentro, obtendo a resposta *não* dos estudantes Pedro e Paula. Ana, consciente do seu equívoco, apresentou outra proposta de construção do circuncentro (*acho que o ideal seria construir um outro triângulo com os vértices A e C comuns*). O mediador a questionou sobre o porquê dessa proposta, e Ana confessou ter aprendido na aula de construções geométricas.

A *ausência* de Ana não foi algo ruim para o grupo, pelo contrário, foi usada pelos outros estudantes e pelo mediador como pano de fundo para suas interações. Ajudou também a evidenciar outros objetos matemáticos, passíveis de serem considerados ou não, para a resolução da situação-problema, estendendo a possibilidade de encontrar outros pontos notáveis no triângulo, variando de um caso específico para outro caso específico. O mediador, por outro lado, nesse episódio não aproveitou a *ausência* de Ana para discutir limitações do baricentro no contexto da situação-problema com os estudantes. Talvez isso tenha ocorrido, por eles, o grupo, estarem focados na construção e testagem do circuncentro para solucionar a situação-problema.

Como Ana apresentou essa *ausência* ao construir o baricentro ao invés do circuncentro, o mediador quis saber qual o conceito de circuncentro dos estudantes. O mesmo entendimento repetiu-se em todas as respostas, (*encontro/intersecção das mediatrizes*), incluindo a de Ana, que tentou reproduzir o que aprendera em uma aula no curso de graduação, mas não conseguiu, pedindo ajuda para o grupo. Paula ofereceu ajuda, assumiu o controle do GeoGebra, e construiu o circuncentro seguindo os passos delimitados por ela no início da sessão. Paula pôde experimentar sua proposta no GeoGebra, e partindo das limitações iniciais da construção de

Ana (*pontos médios de um triângulo inscrito em uma circunferência qualquer*), traçou as mediatrizes, encontrando o circuncentro.

No momento em que Paula traçou as mediatrizes nos pontos médios construídos por Ana, o circuncentro estava localizado fora da área triangular. Assim, Paula marcou esse ponto com a letra H, e passou a movimentá-lo e conforme ela movimentava o Ponto H, o diâmetro da circunferência alterava e em consequência o triângulo inscrito nela, mostrando triângulos em que o Ponto H ficava dentro, fora, em diferentes lugares da área interna e externa de diferentes triângulos.

As interações de Ana e Paula no GeoGebra evidenciam construções compartilhadas, já que Ana começou e Paula concluiu. Quando focamos no fazer de Paula, temos ela construindo o circuncentro a partir das limitações da construção de Ana, e em seguida ao movimentar o circuncentro (Ponto H), Paula mostrou uma variedade de triângulos possíveis para o circuncentro construído. Assim, a participante ao fazer encontrou o Ponto H, e ao movimentá-lo, e desfazer a construção de Ana, apresentou uma classe de triângulos possíveis para aquele circuncentro. No entanto, a consciência imediata do mediador não o permitiu desenvolver esses temas matemáticos expressos nas construções e manipulações de Paula.

A construção de Paula foi comemorada pelos estudantes Pedro (*arrasou, Paula!*) e Zeca (*show*), e para concluir e validar essa construção o mediador perguntou se o Ponto H era o circuncentro, e os estudantes reconheceram que sim. Paula compartilhou que não lembrava da definição do circuncentro (*quando pensei em fazer, eu estava pensando em marcar os pontos médios dos lados e depois traçar perpendiculares*). É interessante como a participante descreveu o processo, mas não o reconheceu como sendo a definição de circuncentro, mostrando assim, uma *ausência* que considerava ter, mas que na verdade, ela não tinha, pois ao fazer, ela conseguiu construir o circuncentro, e essa construção era a definição que ela julgava não saber.

Pedro também compartilhou que não lembrava da definição de circuncentro, levando-o a pesquisar no *Google* para confirmar o que estava pensando. Pela segunda vez pesquisas no *Google* foram mencionadas, no início da sessão com Paula compartilhando que tinha pesquisado sobre a palavra “oleoduto”, e agora Pedro. Essas interações em outros ambientes mostram que os estudantes precisavam antes de propor ao grupo, convencer/confirmar a si próprios das ideias que estavam tendo.

Como apontado no diagrama de análise de interações da Figura 16, no episódio 2 a *ausência* de Ana amplificou o uso de poderes pelos estudantes, ao mesmo tempo em que as estratégias do mediador, que também foram influenciadas por essa *ausência*, diminuíram em

relação ao episódio 1. Outro elemento do diagrama afetado foram os temas matemáticos que, apoiados no GeoGebra puderam expandir para além dos já enfatizados no episódio 1. Nesse episódio emergiram consciências de aulas de construção geométrica de Ana e pesquisas de Pedro no *Google*, que serviram de apoio para suas interações no grupo.

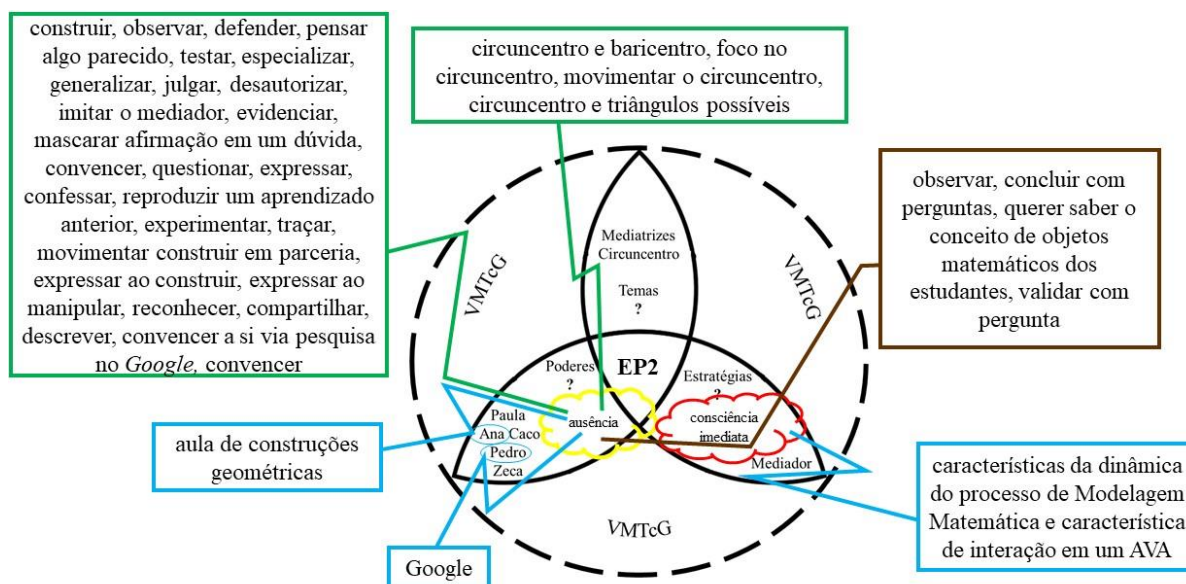


Figura 16 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Estação de Bombeamento (EP2)
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Episódio 3 (EP3): retomada da solução encontrada para o contexto da situação-problema

Com a construção do circuncentro o mediador levantou questionamentos sobre essa resposta para situação-problema (*mas e agora? tarefa concluída*). Pedro considerou já terem generalizado o problema e Zeca, corroborando a resposta de Pedro, afirmou que o ponto H era equidistante dos vértices do triângulo inscrito na circunferência. Mas o mediador não se convenceu, e quis de Zeca a prova de que aquele ponto era realmente equidistante dos vértices (*será? não sei? tem como mostrar isso?*). As interações do mediador, provocando os estudantes a provarem que a resposta era aquela, mesmo as distâncias não estando identificadas na construção, trouxe dúvidas para o grupo. Com as interações de Paula tentaram provar para o mediador que aquela era a resposta mais adequada para a situação-problema. Até então a atenção dos estudantes estava no circuncentro, um ponto notável específico do triângulo.

Paula não conseguiu identificar as medidas, e o mediador visando um objetivo maior, ajudou a participante e identificou as distâncias entre o Ponto H e os vértices. Nesse caso, saber ou não saber usar ferramentas do GeoGebra não era o foco, fazendo o mediador considerar mais importante para o grupo as conclusões a serem tiradas da identificação das medidas. Além das identificações o mediador movimentou o Ponto H apresentando ao grupo uma variedade de triângulos, permitindo observar a variação das medidas de distância dos vértices ao ponto.

Ao levantar questionamentos (*acabou?*), o mediador provocou incertezas nos estudantes (*Pedro: não sei, tá parecendo muito fácil kkkk, geralmente quando eu sinto isso eu estou deixando passar algo kkk; Paula: toda vez que ele pergunta se tem certeza eu leio o enunciado em busca de outra coisa; Ana: sim rsrs; Zeca: ué, falta mais alguma coisa?*). No entanto, ele foi mais diretivo e pediu que os estudantes, considerando a construção no GeoGebra, inferissem uma resposta para a possível localização da construção da estação de bombeamento no mapa.

Paula posicionou os vértices do triângulo o mais próximo possível da posição das localizações das cidades-clientes no mapa. A partir disso os estudantes responderam locais específicos ou regiões entre cidades. A construção do circuncentro pelo grupo e as respostas derivadas dela eram coerentes com o que se pedia na situação-problema. Os estudantes conseguiram fazer sentido matemático para generalizar, e com a generalização sintetizada na construção do circuncentro eles conseguiram retornar o objeto matemático para a situação-problema e fazer sentido, segundo aspectos da tarefa Estação de Bombeamento. Resultando, assim, em hipóteses de locais possíveis para a construção da estação (*Zeca: Kraolandia; Ana: Kraolandia; Paula: perto das Colinas do Tocantins; Pedro: entre Colinas do Tocantins e Guaráí; Caco: entre Colinas do Tocantins e Kraolandia*).

As respostas não garantiram certezas, pois como bem Paula e Zeca pontuaram, para que eles pudessem fazer mais era necessário saber as coordenadas da cidade. Mas isso não era foco da tarefa, que restringiu sua investigação a trabalhar os conceitos de mediatrizes e circuncentro, e as definições foram trabalhadas. O circuncentro na tarefa foi o modelo matemático encontrado pelo grupo. Foi o produto da generalização que eles fizeram dos aspectos da situação-problema, que permitiu interpretar e propor soluções. Johnston-Wilder e Mason (2005) apontam que muitas situações do cotidiano envolvem relações geométricas e que o uso do desenho geométrico ajuda a excluir elementos irrelevantes, para que as relações relevantes possam ser representadas.

O mediador tomando como referência o que tinha acontecido até então na sessão, expandiu e problematizou os objetivos e o enunciado da situação-problema. A princípio usando características do circuncentro do contexto matemático, para o contexto da situação-problema (*o circuncentro ficaria dentro do triângulo formado pelas três cidades? é regra ou funciona nesse contexto?*). Em seguida, usando elementos que tinham sido desconsiderados pelos estudantes na construção do modelo matemático (*vocês acham que os proprietários minimizariam os custos da construção da estação?*), trazendo outros objetos matemáticos para serem avaliados pelo grupo (*Ana no início da construção encontrou um ponto determinando pelas medianas*).

A movimentação anterior do mediador no circuncentro mostrou aos estudantes que as medidas das distâncias, quando o circuncentro era interno ao triângulo, eram menores que as medidas das distâncias quando era externo. Desta forma todos concordaram que para a estação de bombeamento o circuncentro precisava ser interno, mas que isso não era uma regra do circuncentro, funcionando apenas para aquele contexto (*Pedro: funciona nesse caso; Zeca: não é regra não; Pedro: porque o ponto poderia ficar fora; Ana: nesse caso*). As movimentações do circuncentro no GeoGebra convenceram os estudantes.

Sobre reduzir ou não os gastos, Zeca apontou que isso dependeria do trajeto. No entanto, quando interpelado pelo mediador, Zeca não conseguiu explicar de forma clara. Paula auxiliou Zeca, explicando que tinha entendido o que ele tinha apontado (*eu entendi o que ele disse, como se fosse algo do tipo, a gente consegue encontrar um ponto equidistante das cidades, porém estamos considerando retas, e nem sempre pode ser possível fazer um caminho reto*). Caco contextualizou o entendimento de Paula com elementos que não estavam diretamente no comando da situação-problema, mas que o contexto sugeria a existência (*como se trata de tubulações feitas para transportar petróleo, pode ser que em algum ponto do trajeto essas tubulações não poderão seguir em linha reta*). A situação-problema da estação de bombeamento produziu uma generalização justificada na construção do circuncentro pelo grupo. Neste ponto da sessão os estudantes interagiram entre eles, de modo a um dar sentido ao que era dito pelo outro.

Os questionamentos levantados pelo mediador não estavam no comando da situação-problema, e os estudantes reforçavam isso (*Caco: considerando o ambiente; Zeca: isso Paula, mas no enunciado não comenta disso, por isso não dá pra saber*), como se quisessem que o mediador entendesse que havia essas possibilidades de interpretação, mas que eles não tinham sido cobrados na tarefa da construção da estação de bombeamento. Por outro lado, o mediador queria que os estudantes questionassem o circuncentro no sentido dos custos, se estes realmente seriam minimizados ao considerarem a estação de bombeamento a uma mesma distância das três cidades.

As respostas dos estudantes deram conta de questionar o contexto da construção do circuncentro, ao compararem um cenário ideal quando construído no Geogebra ao cenário da situação-problema. O mediador reforçou essa comparação (*Porque entra na questão geográfica, liberações ambientais, quando estávamos no GeoGebra não tinha essas variáveis*), mesmo ainda não alcançado o ponto que queria discutir, que era o circuncentro como redutor de gastos. O mediador então direcionou ainda mais sobre o uso do circuncentro para minimizar custos, e contextualizou seus questionamentos retomando a *ausência* de circuncentro de Ana

na construção do baricentro (*se a tarefa não considerasse essa mesma distância da estação para as três cidades, o ponto encontrado por Ana economizaria custos*).

Ana, respondendo ao mediador, desfez a construção de Paula e refez sua construção de baricentro, Ponto J. A estudante justificou a limitação do baricentro em relação à condição da situação-problema de localizar a estação a uma mesma distância das cidades-clientes, usando aspectos conceituais sobre as medianas, para mostrar ao mediador a impossibilidade de se usar o baricentro (*BJ tem $\frac{2}{3}$ da medida de BE, por exemplo; e como necessariamente as distâncias das cidades são iguais, então J não estaria equidistante dos vértices*). Mesmo trazendo aspectos matemáticos específicos sobre as medidas das medianas do baricentro, Ana não conseguiu reconhecê-lo como opção para minorar os custos, atendo-se à condição imposta pelo comando da situação-problema.

Como os estudantes não conseguiam chegar a uma conclusão sobre os questionamentos do mediador, Paula, para efeito de comparação, pediu para construir o circuncentro junto com o baricentro e, novamente auxiliada por Ana e também por Pedro, construíram o circuncentro no mesmo triângulo que estava o baricentro. Com isso, Ana conseguiu justificar o baricentro como sendo mais viável para diminuir custos (*eu acho que quanto maior a distância maior será o custo né?; o circuncentro sempre estará a mesma distância, então o gasto seria proporcional a 3 vezes, por exemplo; mas o baricentro está a $\frac{2}{3}$ do valor da mediana distante dos vértices; o baricentro sempre está dentro do triângulo certo?; então as distâncias nunca serão muito absurdas; enquanto o circuncentro pode ser que seja*). Suas justificativas começaram a influenciar nas opiniões dos outros estudantes, como identificado no posicionamento de Paula (*eu acho que o baricentro gastaria menos, mas só serviria se considerássemos distâncias diferentes*), caracterizando assim, o uso por Ana dos poderes conjecturar e convencer a si e aos outros.

A tarefa restringia a atenção dos alunos aos conceitos de mediatrizes e circuncentro, e dessa forma as interações entre os estudantes fez surgir a *ausência* de Ana, estendendo a possibilidade de solução da situação-problema para outro ponto notável do triângulo. Dessa forma, as interações do mediador, subsidiadas por consciências imediatas surgidas na sessão, o embasou para discutir a *ausência* de Ana, que por sua vez fez Ana justificar respostas usando restrições referentes a relações de comprimento entre as medianas do baricentro. Em meio a restringir e estender características do circuncentro e baricentro, estas puderam ser analisadas segundo possibilidades de variação, e dessas sendo considerado as que podiam ser pautadas pelas liberdades e limitações da situação-problema e das intervenções do mediador.

Percebido a inclinação de Paula mobilizada pelas justificativas de Ana, como fizera antes, priorizando objetivos maiores e não a técnica, o mediador identificou as medidas das distâncias do baricentro e do circuncentro aos vértices. Com isso os estudantes discutiram sobre possibilidades do baricentro, Ponto J, do circuncentro, Ponto K, segundo características da situação-problema. Paula, Pedro e Ana consideraram que dependendo da condição do terreno, o Ponto J economizaria mais, já que usando o Ponto J as distâncias são menores. Zeca também considerou a uniformidade do terreno e avaliou o circuncentro mais viável.

Por estar no campo das divagações, Ana entendia que para ter certeza de que ponto usar, J ou K, somente sabendo as coordenadas das cidades. Mas, como as localizações reais da cidade não foram pensadas para esta tarefa, e como o mediador já tinha conseguindo atingir objetivos da tarefa e outros que surgiram durante a mediação, ele encaminhou a sessão para o seu final.

Esse episódio exigiu mais provocações do mediador, que as embasou segundo duas fontes, dos seus constructos pedagógicos e da *ausência* de Ana, tendo consciência imediata que subsidiaram suas estratégias pedagógicas nas intervenções, fazendo com que os estudantes usassem poderes para questionar, replicar, justificar, convencer. Essas movimentações do mediador e dos estudantes deflagraram mais temas matemáticos pertinentes aos pontos notáveis circuncentro e baricentro, e as características da situação-problema da estação de bombeamento. Tudo isso em meio a lembranças de aulas no curso de graduação e pesquisas no *Google*, somados as possibilidades dos espaços de interação do VMTcG, como retratado no diagrama de análise de interações da Figura 17.

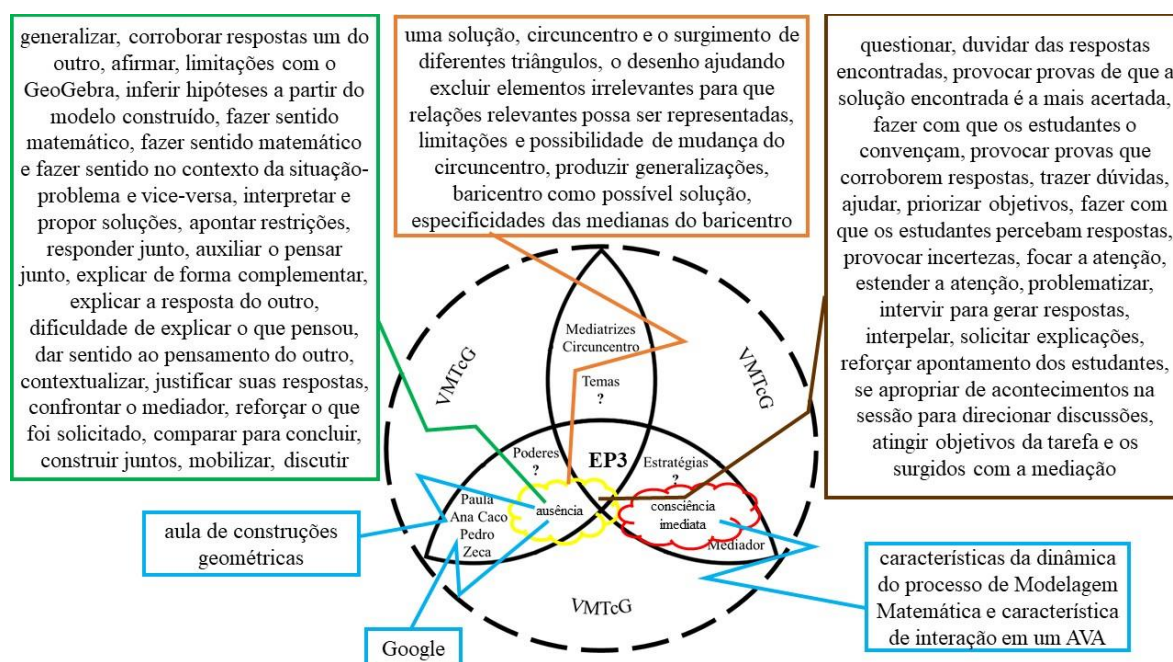


Figura 17 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Estação de Bombeamento (EP3)

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Considerando os três episódios descritos e analisados do desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento foi possível enxergar as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática destacadas no Capítulo 2: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

Inicialmente os estudantes foram apresentados a tarefa Estação de Bombeamento que apresentava uma situação-problema referenciada em uma semi-realidade na qual os estudantes investigaram uma realidade construída, ou melhor, uma situação artificial que provocou discussões sobre a construção de uma estação de bombeamento considerando a localização de três cidades reais pertencentes a três estados brasileiros.

O trabalho em grupo é uma característica comum de práticas de Modelagem Matemática e de práticas de Educação Online, e na tarefa Estação de Bombeamento foi observado que os estudantes juntamente com a mediação do professor conseguiram a partir de suas interações propor, negociar, argumentar sobre os rumos da investigação.

A passagem do contexto da situação-problema investigada para o contexto matemático no GeoGebra configurou a generalização de informações resultando em uma primeira solução matemática que atendia a situação-problema proposta pela tarefa, pois foi encontrado o ponto notável circuncentro que era equidistante aos vértices do triângulo (cidades-clientes). No entanto, a discussão trazida pelo mediador para que os estudantes observassem aspectos para além do que estava proposto na situação-problema apresentada, já que mesmo encontrando um ponto equidistante as cidades, isso não garantiria economia para os clientes, por outro lado, o encontro das medianas (baricentro) discutido no desenvolvimento da tarefa não era equidistante as três cidades, porém, apresentava menor custo, se somadas as distâncias do baricentro às cidades consideradas, e desta forma, maior economia para os clientes. Além dessas questões, outras envolvendo aspectos geográficos dos estados, questões ambientais forma fomentadas.

Nesse contexto entendemos os pontos notáveis circuncentro e baricentro como modelos matemáticos pois permitiram aos estudantes responderem a situação-problema investigada por dois caminhos, o circuncentro atendendo a condição de estar a uma mesma distância das três cidades e isso não sendo indicio de economia para os clientes, e o baricentro com distâncias diferentes, mas, podendo atender a característica de economizar gastos. Ambos os pontos notáveis construídos refletem capturas dos estudantes das estruturas essenciais da situação-problema investigada.

CAPÍTULO 6

A TAREFA POLÍGONO ABCDE

Este capítulo é dedicado à apresentação e análise do Grupo 5, só que dessa vez no desenvolvimento da tarefa “polígono ABCDE”. Para isso, usei as *Fases* de Menezes e Bairral (2020). As *Fases 1, 2 e 3* ajudaram-me na organização, descrição e seleção de episódios, para na *Fase 4* usar o diagrama de análise de interações e encontrar estratégias, poderes e temas que emergiram na investigação dessa tarefa.

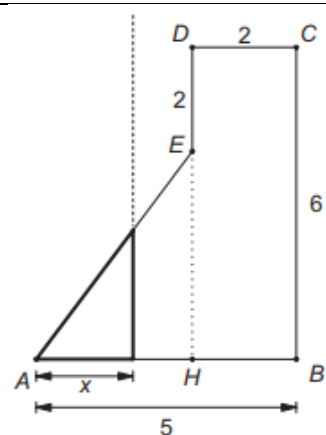
6.1 Planejamento e objetivos da tarefa Polígono ABCDE

A tarefa “polígono ABCDE” foi adaptada de uma questão do projeto nacional da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Na questão original ações diretivas como “calcule”, “escreva as expressões” e “esboce o gráfico” foram requeridas, o que respectivamente incidia em repostas para cada item pedido. O aspecto da questão original que me fez escolhê-la para o curso foi a necessidade de movimentação de um segmento sobre um polígono. Contudo, para que essa movimentação acontecesse o aluno precisaria imaginar ou desenhar dois ou mais desenhos, de acordo com a posição do segmento sobre o polígono.

Nesse contexto, entendendo que a questão original poderia ser trabalhada usando o GeoGebra, a tarefa “polígono ABCDE” foi adaptada para que os licenciandos trabalhassem com os conceitos de perímetro, teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, funções em intervalos determinados, usando a aba GeoGebra do VMT. O objetivo dos grupos era encontrar uma função $f(x)$ que relacionasse os perímetros de dois polígonos formados pelo corte vertical de um segmento de reta, como exposto no Quadro 17.

Quadro 17 – Tarefa Polígono ABCDE

Tarefa: a figura mostra um polígono ABCDE, em que todos os lados, exceto AE, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura. Considerem, agora, uma reta vertical distante x do vértice A, com $0 < x \leq 5$. Ela divide o polígono ABCDE em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda. Considerem a função f que associa a cada valor de x o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo, $f(3)$ é o perímetro do triângulo AHE, enquanto $f(5)$ é o perímetro do polígono ABCDE. Analisem possibilidades de $f(x)$ para $0 < x \leq 3$ e para $3 < x \leq 5$. Essas possibilidades poderiam ser representadas graficamente? Qual representação vocês propõem?



Fonte: Curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, 2018

6.2 Episódios do Grupo 5 no desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE

A sessão aconteceu no dia 23/10/2018, combinada para iniciar as 19:00 horas. Os estudantes foram entrando na sala, primeiro Pedro (18:40:39h), seguido de Ana (18:41:23h), Paula (18:52:05h), do mediador (18:56:25h), e do Zeca (19:10:36h). O participante Caco não continuou no curso. De maneira semelhante às sessões anteriores o mediador iniciou a sessão disponibilizando a tarefa na aba quadro branco, no entanto a tarefa proposta apresentava mais questionamentos que as anteriores, evidenciando um certo receio nos estudantes de proporem soluções:

Mediador (19:10:12h): Vocês acham que essa tarefa exige mais que a anterior?²¹

Pedro (19:10:26h): Um pouquinho... rs

Paula (19:10:35h): Eu acho que sim.

Zeca (19:10:36h): Não sei fazer.

Ana (19:10:43h): Também acho que sim.

O mediador, diante da falta de interações dos estudantes provocou-os a compartilhar o que estavam pensando, revelando ações individuais fora do VMTcG, na abordagem da tarefa:

Mediador (19:12:56h): Quem sabe compartilhando não surja outras ideias capazes de ajudar.

Pedro (19:13:40h): Eu estou rabiscando um papel aqui pra ver se estala algo na mente.

Mediador (19:13:58h): Mas em que pensou?

Pedro (19:14:33h): Pensei em tentar enxergar um possível “padrão” entre as áreas dos polígonos.

Mediador (19:15:39h): Do polígono inteiro ou dos polígonos formados pela reta vertical Pedro?

Pedro (19:15:51h): Dos polígonos formados pela reta vertical.

No diálogo entre Pedro e o mediador evidencia-se um direcionamento do participante para encontrar um padrão que sugerisse uma função ou as funções, relacionando os perímetros dos dois polígonos formados pelo segmento de reta vertical. No entanto, esse direcionamento para um determinado conteúdo pareceu ter camuflado as outras informações da situação-problema, o que fez o mediador questionar aproximações dos estudantes com as ideias apresentadas na tarefa.

Mediador (19:17:47h): A tarefa dá muitas informações. Qual ideia vocês têm mais proximidade?

Ana (19:19:11h): Pensando: hoje tá difícil ...kk

Paula (19:20:03h): Estou tentando pensar em algo, quando corta em passando em EH forma um triângulo pitagórico e um retângulo, talvez seja por isso que ele quebre o intervalo ali, não sei.

Paula (19:20:23h): Hoje tá mais complicado.

²¹ Reproduzimos as interações com correções de Português, e expandindo contrações própria de ambiente *online* (“tbm” para também, “vc” para você, “s” para sim, “pq” para porquê, e assim por diante), por entender que essas correções não afetaram a análise e o foco da investigação. Todos esses registros foram capturados pelo VMTcG.

Pedro (19:21:03h): Estou pensando nesse lado também, Paula.

Pedro (19:21:14h): Algo de Semelhança de Triângulos.

Enquanto isso, o participante Zeca não conseguiu encontrar-se nas discussões, tendo entrado por último na sessão e encontrando a tarefa já apresentada, o participante foi logo avisando “não sei fazer (19:10:36h)”, seguido de algumas entradas como “estou aqui lendo e relendo (19:14:31h)”, “tentando ...rs (19:14:36h)”. Até que em determinado momento no *chat* ao interagir com Paula e com o mediador o participante Zeca começou a contribuir mais nas discussões do grupo.

Zeca (19:21:28h): Eu não entendi,

Zeca (19:21:46h): como assim $f(3)$?

Paula (19:22:10h): Quando o valor de x é igual a 3,

Paula (19:22:28h): o comprimento.

Zeca (19:22:50h): Pow,

Zeca (19:22:28h): então tá meio fora de proporção...?

Pelo desenho estático do polígono ABCDE , o participante Zeca não entendeu que a reta vertical era móvel, variando entre os intervalos AH e AB. No entanto, para ele a reta estava proporcionalmente errada, considerando que deveria estar no ponto H para que x fosse igual a 3. Diante dessa confusão o mediador questionou Zeca:

Mediador (19:23:26h): A proporção influencia tendo os valores assinalados na figura?

Zeca (19:23:35h): Pra eu entender?

Zeca (19:23:37h): Sim.

Zeca (19:23:40h): Desculpa.

Mediador (19:23:40h): Não precisa pedir desculpa.

Ana não havia se manifestado muito na sessão sobre a resolução da tarefa até então. Porém, diferente da abordagem de Pedro, que propôs relacionar as áreas dos dois polígonos formados pela reta vertical e da abordagem de Paula, que propôs investigar o triângulo pitagórico e o retângulo, formados quando a reta vertical está no segmento EH, Ana sugeriu a abordagem do polígono como um todo, para encontrar uma função que expressasse seu perímetro.

Ana (19:27:33h): Se o x for menor ou igual a três, também pensei sobre semelhança de triângulos, mas se x for maior que três teremos que o perímetro será os lados do triângulo AHE + $(2+2+6 + Y)$, certo?

Ana (19:28:05h): Sendo $Y = X-3$.

Pedro (19:30:31h): Eu tentei também encarar o segmento AE como um pedaço de uma função,

Pedro (19:30:54h): só não tenho certeza se isso vai ajudar muito.

Ana (19:31:26h): No caso eu errei lá em cima, o segmento DC não seria completo, a menos que $x=5$,

Ana (19:31:46h): eu não entendi muito bem o que fazer, o que a questão exige.

Diante do impasse dos estudantes o mediador apontou nas propostas de Ana caminhos para a resolução da tarefa:

Mediador (19:31:59h): E esse perímetro não indica nada útil?

Pedro (19:34:03h): Não consigo pensar em nada.

Mediador (19:34:39h): E o raciocínio de Ana sobre semelhança de triângulos?

Zeca (19:36:50h): O perímetro do triângulo parece que vai crescer proporcionalmente à distância da reta.

Mediador (19:38:05h): Mesmo a tarefa dizendo que de $f(3)$ é perímetro do polígono AHE? e o mesmo de $f(5)$?

Zeca (19:38:39h): Acho que só até $x=3$.

Paula (19:39:36h): Acho que a função mudaria de comportamento em $x=3$, mas não sei qual mudança. Nem qual comportamento teria antes.

Paula (19:40:25h): Eu não entendi muito bem se tenho que relacionar o polígono da direita com a esquerda ou cada um separado com o x .

Mediador (19:40:58h): A reta vertical se comporta de acordo com os intervalos?

Ana (19:41:02h): Em $x=3$ o perímetro vai ser justamente o perímetro do triângulo AHE, se $x>3$ o perímetro vai ser o perímetro de AHE + alguma coisa.

Ana (19:41:56h): Acho que é sempre com o da esquerda, Paula

Paula (19:42:15h): Ah, sim.

Ana (19:42:24h): Eu acho ...rs

Paula (19:42:33h): Esse tá difícil.

Pedro (19:42:54h): Bastante kk

Zeca (19:43:05h): Com $x>3$ será o perímetro do triângulo AHE mais o perímetro do retângulo, que será $12 + 2x$?

Ana (19:43:21h): Porque se $x=5$, o polígono da esquerda vai ser justamente o ABCDE e não será nada à direita.

Até então os estudantes não tinham investigado a situação-problema na aba GeoGebra, diante dos argumentos postos pelos estudantes, o mediador os incentivou a analisar a figura com o GeoGebra:

Mediador (19:43:29h): Colocar a figura no GeoGebra não ajudaria a pensar?

Ana (19:43:55h): Dá pra transferir a imagem para lá?

Pedro (19:44:19h): Talvez.

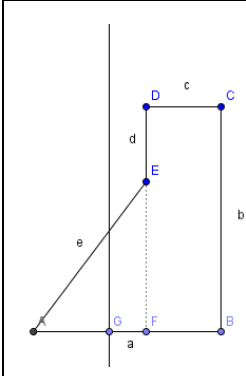
Mediador (19:44:22h): Se temos as medidas não dá de construir?

Pedro (19:44:30h): Acho que dá pra construir.

Ana (19:44:41h): Vamos construir, então! rs

Zeca assumiu o controle do GeoGebra, mas não conseguindo traçar a figura ofereceu o controle ao grupo, sendo assumido por Pedro, que conseguiu traçar o polígono ABCDE, como exposto no Quadro 18.

Quadro 18 – Construção do polígono ABCDE



Pedro (19:50:50h): Acho que é mais ou menos isso,
Pedro (19:51:00h): a construção.
Zeca (19:51:30h): Sim.
Zeca (19:51:34h) Acho que é isso, também.
Mediador (19:51:46h): A reta vertical fica solta na figura ou fixa?
Pedro (19:52:06h): Tá solta.
Zeca (19:52:08h): Tem q ficar solta.
Pedro (19:52:15h): Dá pra mover ela movendo o ponto G.

Fonte: VMTcG, 2018

Com o polígono ABCDE construído e com quase uma hora de duração da sessão o mediador assumiu uma postura mais diretiva em seus questionamentos, impondo dessa forma um ritmo de perguntas e repostas que dinamizou as interações no *chat* entre os estudantes, Ana e Zeca:

Mediador (19:55:14h): Saber que todas as retas do polígono ABCDE exceto AE são verticais ou horizontais é importante para resolver o problema?

Pedro (19:56:19h): Não consigo decidir se sim ou não ...kk

Paula (19:57:05h): Não sei dizer também. kk

Ana (19:57:17h): Acho que sim, porque no caso de $x > 3$, saberemos a distância de F pra X.

Zeca (19:57:55h): Sim,

Zeca (19:58:33h): porque quando a reta variar em $x > 3$, o comprimento será o mesmo.

Zeca (19:58:41h): Antes disso não.

As indicações do mediador fizeram com que os estudantes percebessem que os intervalos assinalados no polígono ABCDE correspondiam a uma sentença da função $f(x)$. Paralelo a essas discussões no *chat*, as estudantes Paula e Ana manipulavam a reta vertical centrada no ponto G, conforme o Quadro 19.

Quadro 19 – Interações no *chat* e na aba GeoGebra

Mediador (20:02:02h): Vocês acham que será uma função? para os dois intervalos?

Zeca (20:02:52h): Não.

Zeca (20:02:56h): É uma para cada.

Pedro (20:03:40h): Acho que se fizermos uma restrição de domínio e definirmos com mais de uma sentença conseguimos montar uma função sim.

Zeca (20:04:16h): A verdade, dá pra ser uma com 2 sentenças.

Paula (20:04:31h): Sim, eu acho que vai ser com duas sentenças.



Fonte: VMTcG, 2018

Como os estudantes concordaram que a função $f(x)$ teria duas sentenças, com subdomínios determinados pelos intervalos indicados na situação-problema, o mediador

direcionou as discussões para encontrar a sentença referente ao intervalo $0 < x \leq 3$, usando a abordagem de semelhanças de triângulos sugerida por Ana.

Mediador (20:10:22h): No intervalo de 0 a 3 penso que podemos seguir pela ideia de Ana sobre semelhanças de triângulo.

Paula (20:11:03h): Definir a sentença da função nesse intervalo?

Mediador (20:11:20h): Daria de fazer?

Paula (20:12:01h): Então, eu não consegui relacionar o valor de x com o perímetro não.

Mediador (20:13:56h): O perímetro seria do triângulo menor, certo?

Zeca (20:14:31h): Como assim, triângulo menor?

Mediador (20:15:03h) A reta vertical forma q figura à esquerda?

Paula (20:15:07h): Eu teria que ter retornado o valor do perímetro de qualquer triângulo que eu construísse ali naquele intervalo, não?

Zeca (20:15:35h): Sim.

Paula (20:15:41h): Então pra qualquer distância entre 0 e 3 a função ia ter que retornar perímetro triângulo formado,

Paula (20:15:58h): porém não sei fazer essa relação.

A participante Paula não considerou que havia um triângulo com lados identificados, que poderia ser usado como semelhante a qualquer outro

formado pela reta vertical no intervalo $0 < x \leq 3$, o triângulo AFE tinha os lados AF e FE identificados com valores dados pela própria situação-problema, cabendo encontrar a medida do lado AE. Para isso, Pedro sugeriu que usassem o Teorema de Pitágoras, no entanto essa ideia confundiu mais ainda os outros estudantes.

Pedro (20:17:10h): Poderia usar o Teorema de Pitágoras e também usar o segmento AE como “pedacinho” de uma função.

Ana (20:19:23h): Que confuso.

Zeca (20:19:41h): Entendi mais ou menos.

Pedro (20:20:06h): Bastante. kk

Paula (20:21:39h): Sim.

Paula (20:22:18h): Tipo, eu não consigo relacionar a função ao desenho.

O mediador direcionou ainda mais as discussões, trocando questionamento por afirmações, mesmo assim os estudantes não conseguiram encontrar a sentença de $f(x)$ quando $0 < x \leq 3$. Talvez a forma como o mediador estava fazendo as abordagens acabou confundindo os estudantes, reforçando a ideia de que não seria possível aplicar semelhança de triângulos, já que eles entendiam que x sempre variaria entre 0 e 3, no entanto, x poderia ser igual a 3. Pedro parecia ter entendido isso, fixando sua atenção no lado AE:

Mediador (20:23:57h): Bom, o x é o lado do triângulo que não vamos descobrir, pois sempre vai variar no intervalo.

Mediador (20:24:02h): E os outros lados?

Pedro (20:24:48h): A altura eu tentaria encarar como imagem do ponto x através de uma função que passa pelo segmento AE.

Zeca (20:26:18h): Mas no caso do triângulo, todos os lados vão variar.

Paula (20:26:33h): Sim.

Paula (20:26:45h): Como ia resultar na soma depois?

Pedro (20:27:08h): Verdade.

Mediador (20:27:22h): Sim, mas pra achar os lados, temos que fixar a barra em algum momento, não?

Mediador (20:28:25h): Não é igual ao perímetro do polígono formado à esquerda da barra?

Pedro (20:29:35h): Sim.

Ana (20:30:37h): Sim.

Mediador (20:31:14h): Se acharmos os lados, achamos $f(x)$?

Pedro (20:31:45h): Se somarmos os lados sim.

Os estudantes não estavam conseguindo concluir a tarefa, e acredito que a ideia de função trazida no enunciado, a tentativa dos estudantes de enxergar um padrão, e o posicionamento do mediador direcionando para a solução conhecida da situação-problema original (ANEXO 00), acabaram minando opções de resolução da tarefa, como se evidencia nas interações finais no *chat*:

Paula (20:38:46h): Eu estou tentando fazer uma lista de pontos pra ver se encontro alguma coisa.

Mediador (20:40:20h): Como assim, Paula?

Paula (20:42:31h): Eu estava tentando colocar no GeoGebra os valores de x e os perímetros associados, mas não estou obtendo nenhuma conclusão.

Paula (20:42:59h): Tá se assemelhando com um comportamento exponencial.

Mediador (20:43:01h): Tipo querendo identificar um padrão?

Paula (20:43:11h): Acredito que não seja por esse caminho.

Paula (20:43:13h): Sim.

Mediador (20:43:49h): O q os outros acham sobre esse caminho da Paula?

Pedro (20:44:02h): Eu tinha tentado pensar dessa forma também,

Pedro (20:44:13h): mas também não consegui concluir nada.

Ana (20:44:39h): Também não consegui chegar a uma conclusão

Mediador (20:46:59h): Ana, como você pensou a semelhança de triângulos? Você tentou aplicar?

Mediador (20:47:09h): Independente de função.

Ana (20:49:41h): $AF/FE = AG/AH$.

Ana (20:49:50h): Olhando para o GeoGebra.

Mediador (20:52:48h): não seria $AF/AG = FE/GH$?

Mediador (20:53:02h): E assim com o outro lado?

Ana (20:53:40h): Isso, isso!

A sessão pelo horário acabou sem ter uma resolução acordada entre os estudantes do grupo. As ideias, os caminhos, as abordagens matemáticas foram discutidas e avaliadas, no entanto não foi o suficiente para se chegar a um consenso. Nesta sessão, foi evidenciado tensões entre a visão do mediador e dos estudantes, em parte acreditamos que pelo direcionamento de abordagem trazido pela própria tarefa, como apresentado no Quadro 20.

Quadro 20 – Síntese das Fases 2 e 3 de análise do *chat* da sessão 3

FASE 2		
2.1	Edição	Sessão 3 do Grupo 5 realizada no dia 23/10/2018
2.2	Resumo das ideias discutidas, identificando objetivos em caráter coletivo na abordagem da tarefa	Entender a relação entre o comprimento x com o perímetro dos polígonos formados à esquerda da reta vertical, transferir o desenho da tarefa para ser construída no GeoGebra, entender que os intervalos indicavam sentenças da função $f(x)$; distinguir medidas do comprimento x , que variavam de medidas fixas ($x = 3$ e $x = 5$), procurar padrões das medidas dos lados dos polígonos e dos seus perímetros que indicassem o tipo função
2.3	Numeração de intervenções (mediador e participantes)	Mediador (58); Paula (32); Ana (29); Pedro (38); Zeca (39)
FASE 3		
3.1	Escolha do(s) episódio(s) das atividades	Episódio 1: situação-problema fechada em conteúdos específicos, direcionando as abordagens; episódio 2: conflitos de interesses de resolução entre os estudantes e o mediador
3.2	Identificação de blocos temáticos na discussão dos participantes	
3.3	Identificação das intervenções do mediador	Direcionando os estudantes para resolução da situação-problema

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

6.3 Episódios do Grupo 5 no diagrama de análise de interações

Nesta seção, como feito no Capítulo 5, utilizamos o diagrama de análise de interações nos três episódios selecionados do desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE pelo Grupo 5 no VMTcG.

Episódio 1 (EP1): situação-problema fechada em conteúdos específicos direcionando às abordagens

Diferente da tarefa Estação de Bombeamento, que era baseada em uma semi-realidade e não trazia no seu enunciado explicitamente objetos matemáticos a ser utilizados, a tarefa Polígono ABCDE trazia uma situação-problema referenciada na própria Matemática, com indicações de resolução por meio dos objetos matemáticos perímetro e função. A tarefa foi adaptada de uma questão da OBMEP, em que a reta vertical poderia ser movimentada a partir da sua construção no GeoGebra, admitindo que os estudantes pudessem inferir que ao

movimentar essa reta a medida do comprimento x alterava, permitindo encontrar uma função relacionando o perímetro dos polígonos formados para cada intervalo considerado. No entanto, os estudantes encontraram dificuldades em entender a tarefa, gerando silêncios na sessão.

O mediador começou a chamar a atenção dos estudantes para a tarefa (*podemos analisar e tentar entender para propor formas de resolver*). Percebendo a pouca interação, questionou se os estudantes estavam achando a tarefa difícil em relação a da sessão anterior (*vocês acham que essa tarefa exige mais que a anterior?*), sendo unanimidade entre eles que sim. O mediador tentou criar uma atmosfera de conjecturas, na qual os estudantes ao compartilharem o que estavam pensando pudessem juntos pensar em uma forma de abordar a situação-problema.

Pedro foi o primeiro a expressar o que estava pensando, mas antes compartilhou que estava rabiscando no papel para ver se “estalava” algo na mente. A ideia de Pedro girava em torno de enxergar um padrão entre as áreas dos polígonos. O mediador direcionando a atenção do estudante para a reta vertical questionou se ele estava considerando a área do polígono inteiro ou dos polígonos formados pela reta vertical. Pedro confirmou que estava considerando os polígonos formados pela reta vertical, o que mostrou ao mediador que a reta não estava sendo deixada de lado.

Como a situação-problema apresentava muitas informações relacionando diferentes objetos matemáticos, o mediador restringiu o olhar dos estudantes para aspectos matemáticos do enunciado, que eles tinham maior aproximação. Nesse momento Paula compartilhou o que estava pensando sobre a posição da reta vertical, quando estava no segmento EH, separando a figura em dois polígonos, um triângulo pitagórico e um retângulo.

Pedro corroborando a ideia de Paula acrescentou estar pensando em algo nessa linha de raciocínio, com algo de Semelhança de Triângulos. Mas como as interações estavam basicamente acontecendo no *chat*, sem uso do quadro branco e nem do GeoGebra, as ideias não eram aprofundadas, nem pelos estudantes e nem pelo mediador, sendo apenas lançadas como possibilidades.

O estudante Zeca desde o início mostrou-se negativo sobre tentar solucionar a situação-problema. Quando o mediador questionou se a tarefa exigia mais que a anterior, sua resposta foi enfática, em dizer que não sabia fazer. Com as interações entre o mediador com os outros estudantes acontecendo, Zeca começou a interagir sobre aspectos que não entendeu do enunciado (*eu não entendi, como assim $f(3)$*), sendo auxiliado por Paula, que explicou que o $f(3)$ referia-se ao comprimento x , quando x era igual a 3. E Zeca não entendeu que a reta vertical, que determinava o comprimento de x era móvel, fazendo com que ele pensasse que houvesse um erro de proporção em relação à medida da base do polígono, que era 5.

O mediador, por outro lado, poderia ter retomado essa característica da reta vertical, no entanto a pergunta sobre a influência da proporção, no entendimento da situação-problema, fez com que Zeca a recebesse como crítica, respondendo que a proporção influenciava para seu entendimento e pedindo desculpa por isso. O mediador tentou reconectar-se com o estudante, dizendo que não precisava pedir desculpas, mas não houve naquele momento um retorno dele para as ideias que estavam sendo apresentadas.

A estudante Ana foi a última a se manifestar sobre como poderia abordar a situação-problema, nas interações do mediador ela sempre respondia que estava pensando, conseguindo sistematizar as informações e gerar algumas expressões relacionando o comprimento x no intervalo de 0 a 3, e tentando construir uma expressão que abarcasse o perímetro de todo o polígono considerando outra variável, o Y . (*Se o x for menor ou igual a três, também pensei sobre semelhança de triângulos, mas se x for maior que três teremos que o perímetro será os lados do triângulo $AHE + (2+2+6 + Y)$, certo? sendo $Y = X-3$*).

A proposta de Ana trazia mais força para a proposta de Paula e de Pedro, mas as dificuldades dos estudantes eram perceptíveis e ganham mais força, do que aprofundar as ideias que eles estavam tendo, algebrizar uma situação geométrica os deixava confusos, e o mediador não conseguiu suprir as necessidades dos estudantes.

Na figura da situação-problema o x era o lado do polígono que variava dentro de dois intervalos. Pedro mencionou que tentou encarar o segmento AE como um pedaço da função, não explicando muito bem como fez isso, mas concluiu que fazer isso poderia não ajudar muito. Ana, mesmo apresentando dúvidas, ainda era a que mais estava entendendo a dinâmica da figura e da movimentação da reta vertical, que repercutia nos valores associados ao comprimento x (*no caso eu errei, lá em cima, o segmento DC não seria completo, a menos que $x=5$*). Ana em suas inquietações acabou apontando o que estava faltando para que eles conseguissem propor algo mais concreto para a situação, no caso um direcionamento (*eu não entendi muito bem o que fazer, o que a questão exige*). Essa sensação de estar à deriva de Ana, que também pode ser percebida nas interações dos outros estudantes, pode ter como motivo as muitas perguntas da situação-problema e também aspectos da mediação.

No diagrama de análise de interações da Figura 18 podemos observar como os silêncios provocados nesse episódio, pelo enunciado da situação-problema da tarefa e pelas interações do mediador, afetaram as interações dos estudantes.

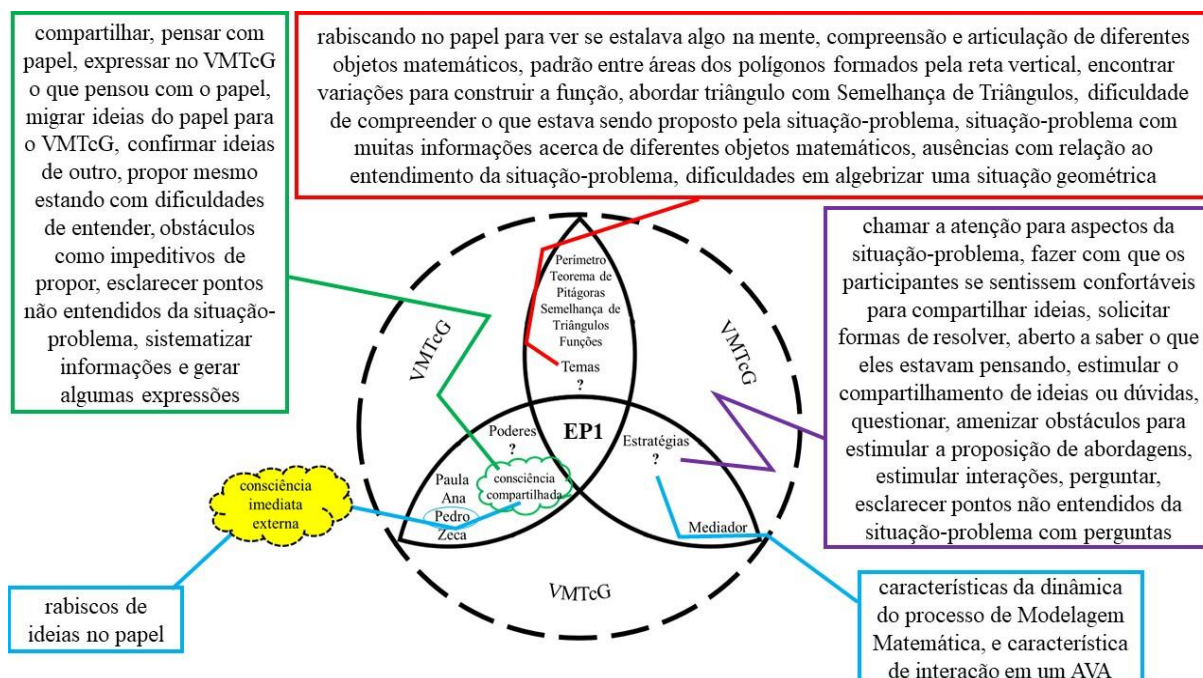


Figura 18 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Polígono ABCDE (EP1)
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Episódio 2 (EP2): conflitos de interesses de resolução entre os estudantes e o mediador

O mediador, partindo das proposições de Ana, chamou a atenção dos estudantes para a relação que a situação-problema propunha, entre o comprimento x e o perímetro dos lados dos polígonos formados à esquerda da reta vertical (*e esse perímetro não indica nada útil?*). Pedro, que liderava as apresentações de proposições nas sessões anteriores, expressou não conseguir pensar em nada. O mediador, tentando minorar o tempo sem interações, focou mais ainda na proposta de Ana sobre o objeto matemático que poderia ser útil para encontrar os lados e calcular o perímetro $f(x)$ (*e o raciocínio de Ana sobre semelhança de triângulos?*).

Nessa última investida do mediador, Zeca, que não interagira desde a tensão formada por causa do entendimento equivocado de proporção do comprimento x , respondeu que o perímetro do triângulo cresceria proporcionalmente à distância da reta. O mediador limitou a resposta de Zeca de acordo com os intervalos considerados pelo enunciado (*mesmo a tarefa dizendo que $f(3)$ é perímetro do polígono de AHE? e o mesmo de $f(5)$?*), e o estudante entendeu que o perímetro do triângulo teria seu valor máximo somente até $x = 3$.

Essas observações entre o mediador e Zeca fez Paula observar algo sobre $f(x)$ quando o comprimento x passa de 3. Segundo a estudante, o comportamento de $f(x)$ mudaria, no entanto ela não soube explicar qual mudança e qual comportamento teria antes. A estudante ainda não entendia que a função $f(x)$ era o perímetro do polígono à esquerda da reta vertical, e que as medidas dos lados variavam em função do comprimento x . Ao contrário de Ana, que mesmo

em alguns momentos dizendo que a tarefa estava difícil, entendia que quando o comprimento x era igual a 3 o perímetro seria do triângulo AHE, quando a reta vertical passava de 3 o perímetro seria o perímetro de AHE + alguma coisa. E tirou uma das dúvidas de Paula sobre considerar o polígono à esquerda ou da direita em relação à reta vertical (*acho que é sempre o da esquerda, Paula; porque se $x = 5$, o polígono da esquerda vai ser justamente o ABCDE e não será nada à direita*).

A ideia de Ana fazia mais sentido, mesmo apresentando um equívoco na interpretação do perímetro do polígono quando x passasse de 3, pois a partir do momento que a reta vertical estivesse no intervalo $3 < x \leq 5$ o lado do triângulo HE, que se unia ao lado do retângulo não seria mais considerado no perímetro do polígono inteiro contido no intervalo $0 < x \leq 5$, pois o polígono formado não seria mais um triângulo, seria um híbrido dos lados do triângulo e do retângulo. Zeca, corroborando essa interpretação de Ana, também entendia que com o comprimento de x maior que 3 o perímetro seria a soma dos lados do triângulo AHE mais o perímetro do retângulo, e ainda complementou essa ideia com a expressão $12 + 2x$, não explicando de onde e como ele chegou nessa generalização.

A generalização de Zeca ratificava a possibilidade de os estudantes estarem usando outros espaços para expressar seus pensamentos. Pedro já tinha compartilhado que estava rabiscando no papel. Mas como o mediador não tinha certeza que isso estava acontecendo e nem tinha como impedir que os estudantes buscassem testar conjecturas em seus lugares de acesso, ele propôs a construção do polígono ABCDE no GeoGebra. Dessa forma, possibilitando aprofundar as ideias apresentadas e assim chamar a atenção dos estudantes, para interagirem coletivamente no VMTcG com a movimentação da reta vertical, que evidenciava a variação do comprimento x . A construção foi feita por Pedro, e conforme enunciado, a reta vertical foi deixada móvel, para que pudesse ser movimentada conforme os intervalos previstos.

No polígono ABCDE o único lado que não tinha medida conhecida era o que ficava na posição oblíqua, os outros estavam na posição vertical e horizontal. Partindo disso o mediador apontou essa característica, para que os alunos encontrassem a medida até então desconhecida (*Saber que todas as retas do polígono ABCDE exceto AE são verticais ou horizontais é importante para resolver o problema?*). No entanto, a pergunta do mediador não teve o resultado esperado, pelo contrário, evidenciou mais dúvidas dos estudantes.

O mediador tentou outra abordagem, perguntando aos alunos se eles consideravam que seria apenas uma função para os dois intervalos. O participante Zeca disse que seria uma função para cada. Pedro foi mais detalhista na explicação, ao falar de restrição de domínio e de duas

sentenças para a função $f(x)$, o que acabou fazendo Zeca perceber que seria apenas uma função, mas com duas sentenças.

Com foco na sentença do intervalo $0 < x \leq 3$ o mediador mais uma vez retomou a ideia de Ana, que também já tinha sido mencionada por Pedro, de usar Semelhança de Triângulos para determinar os lados em função do comprimento x , e definir o perímetro correspondente a essa primeira sentença de $f(x)$. Paula não conseguia enxergar $f(x)$ como perímetro a ser determinado pelos lados dos triângulos, que variavam conforme o comprimento de x considerado nesse intervalo.

Já sobre a medida desconhecida do polígono ABCDE, o segmento de reta oblíquo, Pedro sugeriu encontrar usando o Teorema de Pitágoras, por considerar esse segmento parte da função. Ainda assim, as estudantes não conseguiam conectar-se a essa ideia. Zeca tinha entendido mais ou menos a proposição de Pedro, Ana achou confuso e Paula não conseguia relacionar uma função com aquele desenho. O grupo não conseguia acordar um plano para seguir, mesmo os objetos matemáticos aparecendo em suas proposições, as dúvidas sobre a tarefa eram maiores e sobrepujavam o uso desses objetos.

O mediador diante do tempo da sessão que estava acabando direcionou ainda mais as intervenções, tentando ao menos encontrar a sentença da função $f(x)$ correspondente ao intervalo $0 < x \leq 3$. Como Pedro já tinha mencionado encontrar o segmento AE, que nesse intervalo corresponde à hipotenusa do triângulo, o mediador apontou o x como o lado do triângulo que variava conforme a movimentação da reta vertical e direcionou o foco para os outros dois lados. Todavia, o mediador não conseguiu fazer com que os estudantes entendessem que todos os lados iriam variar de acordo com o comprimento de x , sendo justamente essa variação entendida pelos estudantes, como impeditivo para determinar o perímetro que na situação correspondia a função $f(x)$ (*Zeca: Mas no caso do triângulo, todos os lados vão variar; Paula: Sim, como ia resultar na soma depois? Pedro: verdade*).

Nos momentos finais da sessão Paula compartilhou estar fazendo uma lista de pontos, na qual relacionava valores de x a perímetros resultantes desses valores, tentando partir de números, da aritmética para a álgebra, ao identificar um padrão nos números listados. Fazendo isso a estudante observou um comportamento exponencial, no entanto Pedro compartilhou que já tinha tentado pensar por essa forma, mas que não tinha conseguido concluir nada. Em um último momento o mediador tentou trazer Ana para sua ideia de semelhança de triângulos, se ela tinha tentado esse caminho, mesmo que sozinha no seu local de acesso, mas não houve retorno. A sessão foi encerrada sem encontrar uma solução para a situação-problema da tarefa Polígono ABCDE.

Como podemos observar na Figura 19, nesse episódio evidencia-se algumas consequências resultantes da configuração da situação-problema da tarefa Polígono ABCDE e da forma como o mediador conduziu a sessão. Os silêncios e os espaços fora do VMTcG fizeram com que não houvesse trabalho em grupo e as interações dos estudantes acabaram sendo na maioria das vezes individuais, resultando em compartilhamentos superficiais no VMTcG, que geraram mais dúvidas e repercutiram na não finalização da tarefa.

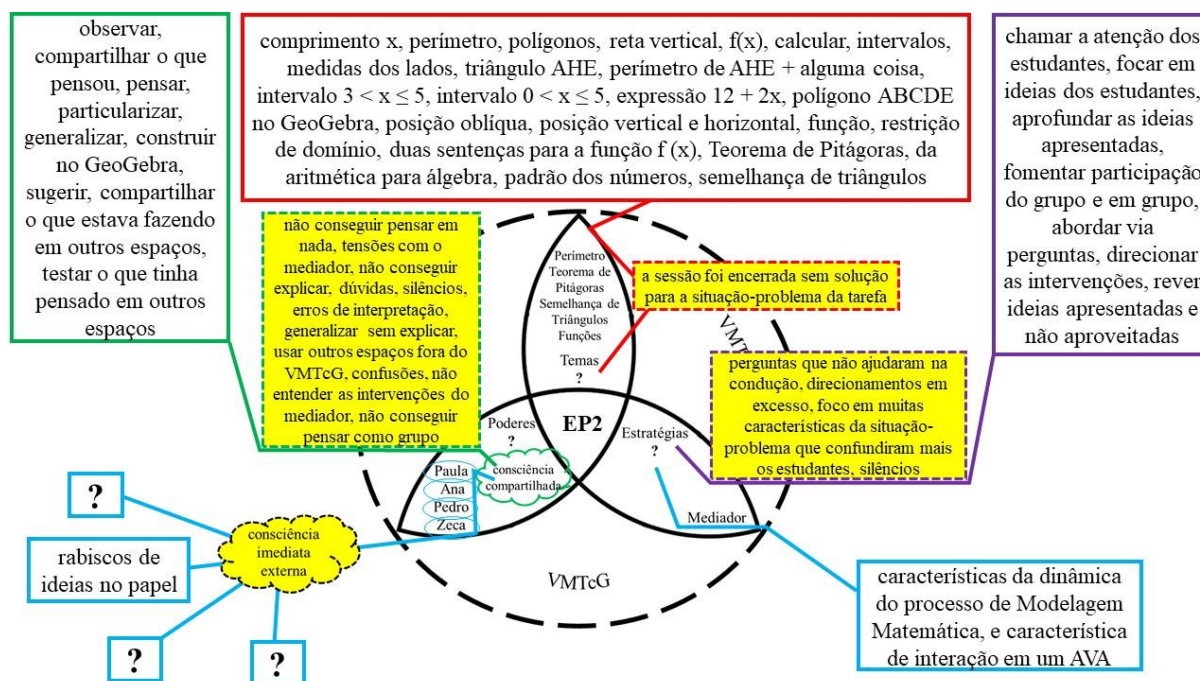


Figura 19 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na tarefa Polígono ABCDE (EP2)

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Considerando os dois episódios descritos e analisados do desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE também possível enxergar as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática destacadas no Capítulo 2: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

Inicialmente os estudantes foram apresentados a tarefa Polígono ABCDE que apresentava uma situação-problema referenciada na matemática na qual os estudantes investigaram uma situação-problema puramente matemática na qual foi investigada uma relação algébrica entre a medida do comprimento x com o perímetro do polígono de acordo com o intervalo considerado.

O trabalho em grupo aconteceu, mais em muitos momentos houve silêncios na sessão que nos fez inferir que os estudantes estavam individualmente tentando encontrar uma solução para a situação-problema. Os estudantes deram indícios de generalizações com suposições de funções que poderiam explicar a variação do comprimento x em relação ao perímetro do polígono. Nesta sessão os estudantes não conseguiram encontrar um modelo matemático para a situação-problema investigada.

CAPÍTULO 7

A TAREFA CAMINHANDO COM CAROL

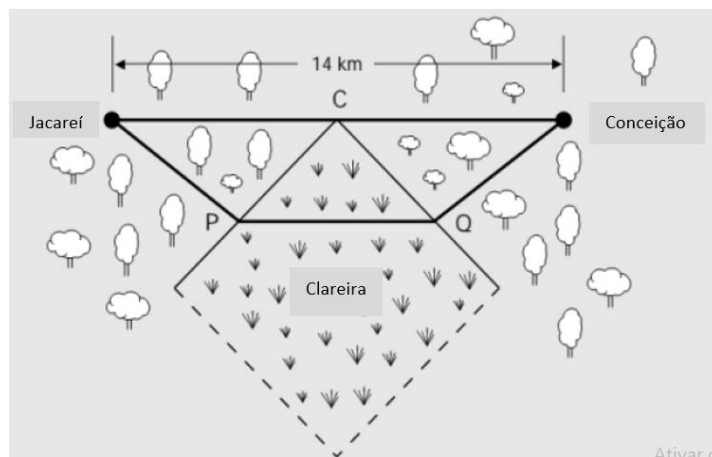
Com este capítulo encerro a tríade de tarefas descritas e discutidas neste trabalho. Aqui apresento interações do Grupo 5 no desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol no ambiente *online* VMTcG. Como já falado nos Capítulos 5 e 6, as descrições e discussões foram delimitadas pelas *Fases 1, 2 e 3* de análise de *chats*, com as quais foi possível selecionar episódios para na *Fase 4* usar o diagrama de análise de interações do mediador, dos estudantes e dos conteúdos matemáticos que emergiram do desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol.

7.1 Planejamento e objetivos da tarefa Caminhando com Carol

A tarefa Caminhando com Carol foi adaptada de uma atividade encontrada no trabalho de Brito, Oliveira e Milani (2015). Não foram feitas grandes modificações no comando da situação-problema, pois ela já tinha características de investigação, que ensejavam nos estudantes discutir possibilidades de abordagem e de conteúdos matemáticos. As mudanças foram no contexto, nos nomes dos vilarejos (de Ardale e Brushwood para Jacareí e Conceição), no termo escrito em inglês (de *square clearing* para clareira), e no nome da personagem da situação-problema (de Kim para Carol), conforme apresentado no Quadro 21.

Quadro 21 – Tarefa Caminhando com Carol

Tarefa: Carol está planejado fazer uma caminhada de Jacareí até Conceição. O itinerário em linha reta, cuja distância é de 14 km, a obrigará a atravessar uma região de relevo acidentado e cheia de arbustos. Entretanto, há um grande descampado quadrangular, cujo lado mede 7 km, localizado conforme ilustra a figura a seguir. O canto C desse descampado é o ponto médio do itinerário em linha reta de modo que a diagonal do descampado está contida na mediatriz desse itinerário. Carol segue uma rota parecida com a que mostrada da figura a seguir, atravessando o descampado de P até Q paralelamente ao itinerário em linha reta.



Encontrem e descrevam uma rota na qual Carol gaste o menor tempo possível. Considerem que a velocidade da caminhada na região acidentada e cheia de arbustos é de 1 km/h e que no descampado a velocidade é de 5 km/h.

O desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol foi planejado para que os licenciandos trabalhassem com os conceitos de ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre pontos, e velocidade. O objetivo dos grupos era encontrar um caminho em que Carol fosse de Jacareí até Conceição no menor intervalo de tempo possível.

7.2 Episódios do Grupo 5 no desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol

A sessão aconteceu no dia 30/10/2018, por volta das 19:00 horas. Pedro entrou primeiro na sala (18:48:52h), seguido de Ana (18:49:49h), Paula (18:51:45h), do mediador (18:56:30h), e por último, do estudante Zeca (19:04:54h). As interações iniciais começaram com o mediador e o convencimento dos estudantes para expressarem os seus entendimentos acerca da situação-problema da tarefa.

Mediador (19:11:29h): Então, o que acharam da tarefa, como podemos resolver?²²

Pedro (19:12:35h): Estou pensando, ainda “estou no escuro” kkkk

Mediador (19:13:03h): Seria interessante falar coisas que não foram entendidas e que deixam vocês no escuro.

Pedro (19:13:32h): Estou pensando em tentar encontrar as medidas dos lados da figura.

Pedro (19:13:42h): Mas não sei se isso será 100% útil.

Mediador (19:14:13h): Pensa em fazer isso aqui no quadro branco, aí no papel, ou no GeoGebra?

Pedro (19:14:53h): Inicialmente pensei em usar um papel e depois aplicar a ideia (se ela surgir) aqui.

Mediador (19:15:25h): Você não acha que sozinho pode não perceber coisas que talvez o grupo perceba?

Pedro (19:15:42h): Talvez.

Mediador (19:16:15h): A tarefa dá condições de ser construída no GeoGebra?

Mediador (19:16:35h): Paula e Zeca, algo a acrescentar?

Pedro (19:17:09h): Pensei em tentar aplicar o desenho no GeoGebra.

Zeca (19:17:22h): Eu estou rabiscando.

Mediador (19:17:49h): Vamos lá pro GeoGebra, então Pedro.

Paula (19:18:50h): Eu estou pensando. Pensei em achar as medidas também.

Zeca (19:19:09h): De Jacareí até o ponto c mede 7km,

Zeca (19:19:50h): quando ela anda fora do quadrado, ela anda a 1km/h certo?

Zeca (19:20:02h): E dentro, 5km/h.

Os estudantes Pedro e Ana pensaram na identificação das medidas da figura. A sugestão do uso da aba GeoGebra foi aceita por Pedro, mas logo depois o estudante desistiu de fazer a construção, assumindo o controle a estudante Paula. O estudante Zeca estava tentando entender

²² Reproduzimos as interações com correções de Português, e expandindo contrações próprias de ambiente *online* (“tbm” para também, “vc” para você, “s” para sim, “pq” para por que, e assim por diante), por entender que essas correções não afetaram a análise e o foco da investigação. Todos esses registros foram capturados pelo VMTcG.

a situação-problema, e Ana teve dificuldade com sua conexão, o *chat* não atualizava, as construções no GeoGebra demoravam a aparecer, afetando sua participação na sessão.

Pedro (19:20:02h): Desisto do GeoGebra, estava me embolando todo.

Mediador (19:20:25h): Por que se embolando, Pedro?

Paula (19:20:34h): Vou tentar fazer algo

Paula (19:20:40h): no GeoGebra.

Pedro (19:20:54h): Eu não estava conseguindo fazer a figura kk

Zeca (19:22:14h): Acho que ela deve procurar andar ao máximo que puder no descampado, pois é mais rápido por lá, mas de forma que ela não acabe extrapolando.

Zeca (19:22:39h): A menor distância até P é uma linha reta.

Zeca (19:23:29h): Pra mim a forma que ela vai gastar menos tempo é de Jacaréi até P, de P até Q, e de Q até Conceição.

Mediador (19:25:05h): Você chegou a um valor Zeca?

Mediador (19:27:44h): O que vocês acharam desse caminho proposto pelo Zeca?

Zeca (19:27:52h): Na mão não consigo.

Mediador (19:27:59h): Será que existe só uma opção?

Pedro (19:28:09h): Se eu entendi bem é basicamente o que eu estava pensando também.

Zeca (19:28:37h): Esse caminho eu pensei, porque se o descampado é mais rápido, você vai tentar chegar nele o mais rápido, por isso tem que pegar uma reta.

Zeca (19:28:45h): Mas assim.

Paula (19:28:55h): Sim, sim, eu fiquei em dúvida, porque ele pede pra gente achar o caminho, mas aí o caminho meio que já está traçado lá.

Zeca (19:29:02h): Pelo GeoGebra talvez dê pra conseguir os valores das distâncias.

Mediador (19:29:08h): Ok. Mas como podemos determinar o tempo mais curto?

Zeca (19:29:08h): E calcular assim o tempo.

Mediador (19:29:25h): Sim, podemos tentar.

Ana (19:29:40h): O segmento PQ é paralelo ao AB né?

Pedro (19:29:48h): Se a gente encontrar as distâncias podemos usar a fórmula da velocidade pra encontrar o tempo.

Zeca (19:29:55h): Sim.

As observações dos estudantes sobre possíveis abordagens foram coadunando em objetivos similares, a hipótese de que quanto maior for o tempo de Carol no descampado mais rápido será o percurso, a intenção de identificar as medidas para calcular o tempo, e a compressão de que a situação-problema apontou os caminhos possíveis, fora ou dentro do descampado. Esses objetivos repercutiram na necessidade do GeoGebra para identificar essas medidas, calcular o tempo, e decidir pelo percurso mais rápido.

Durante as interações no *chat*, a estudante Paula estava construindo a figura no GeoGebra e questões sobre sua construção foram surgindo com os outros estudantes e com o mediador.

Paula (19:30:06h): O problema pra mim tá sendo essa distância.

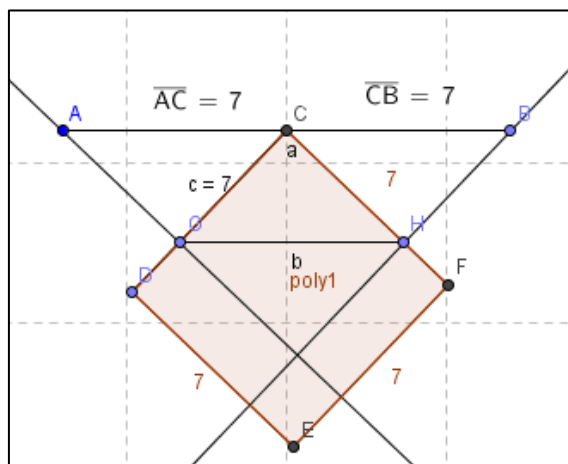


Figura 20 – Construção de Paula da figura da tarefa
Fonte: VMTcG, 2018

Paula (19:31:52h): Acho que seria ali no ponto G e H, porque parece ângulos de 90 graus formado lá na figura.

Ana (19:33:12h): Tirei os eixos porque estava poluindo, ok gente?

Paula (19:33:35h): Tudo bem.

Paula mexendo na posição do quadrado acabou excluindo a figura por completo da aba GeoGebra, tendo que refazê-la. Nesse momento o mediador, considerando a observação da estudante sobre o ângulo formado ser de 90 graus, questionou-a sobre essa afirmação:

Mediador (19:36:41h): O que não entendi é por que Paula tu considera esse ângulo de 90° , só porque acha que é próximo?

Paula (19:37:19h): Não sei se é 90 mesmo, mas parece.

Ana (19:37:54h): Que ângulo?

Zeca (19:38:25h): ?

Paula (19:39:04h): O da imagem do problema, formado por

Paula (19:39:29h): Jacaré P C

Mediador (19:40:15h): No caso o ângulo P?

Paula (19:40:39h): Sim.

Em um determinado momento as atenções dos estudantes e do mediador voltaram-se para as dificuldades encontradas por Paula na reconstrução da figura no GeoGebra, para deixá-la com as exatas medidas propostas na tarefa.

Zeca (19:38:25h): O que você está construindo Paula?

Paula (19:49:58h): Tipo, eu acho que aquela reta ali que tá passando pelo polígono, tem que passar no meio dele, mas eu não consigo vincular o ponto C com a reta pra ficar certinho.

Paula (19:50:14h): Eu estou tentando construir o desenho aqui.

Zeca (19:50:38h): Ah boto fé!

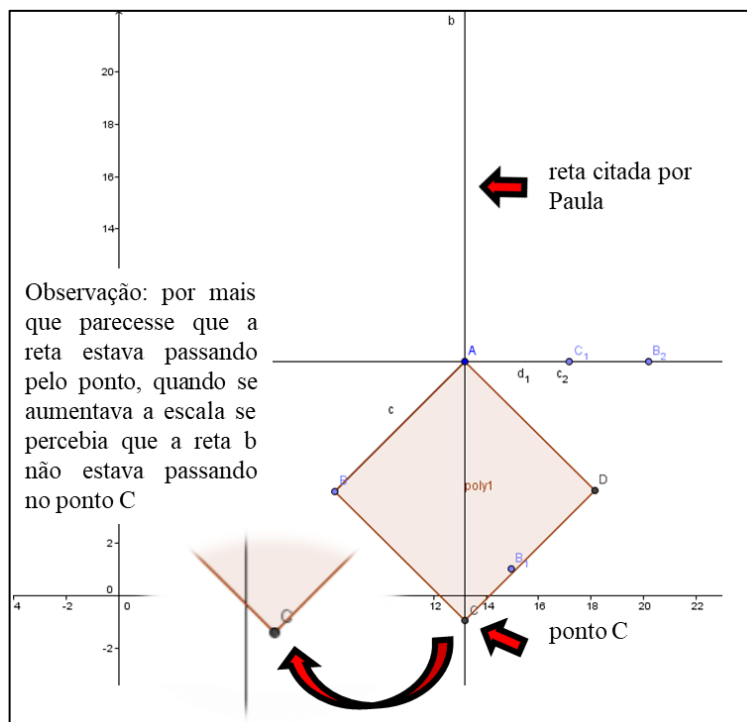


Figura 21 – Reconstrução de Paula da figura da tarefa
Fonte: VMTcG, 2018

O mediador tentou convencer os estudantes de que as medidas poderiam variar, minimizando a necessidade de serem as medidas exatas da imagem da tarefa. Mas suas inserções foram ignoradas por Paula, que continuou tentando ajustar a figura e pelos outros estudantes que continuaram a ajudá-la.

Mediador (19:50:44h): Se não tem como determinar uma medida exata, por que não tentam medidas aleatórias, de acordo com posição eventual das retas. Afinal o GeoGebra mostra os valores?

Zeca (19:51:02h): Se você jogar o desenho

Zeca (19:51:11h): com as medidas que a gente já tem

Zeca (19:51:14h): que são 7 do lado

Zeca (19:51:23h): e 14 da reta,

Zeca (19:51:36h): mas o problema é na hora de fazer o trapézio né,

Zeca (19:53:03h): Paula?!

Paula (19:53:10h): Oi!

Zeca (19:53:19h): A reta PQ é paralela à reta JC,

Zeca (19:53:22h): certo?

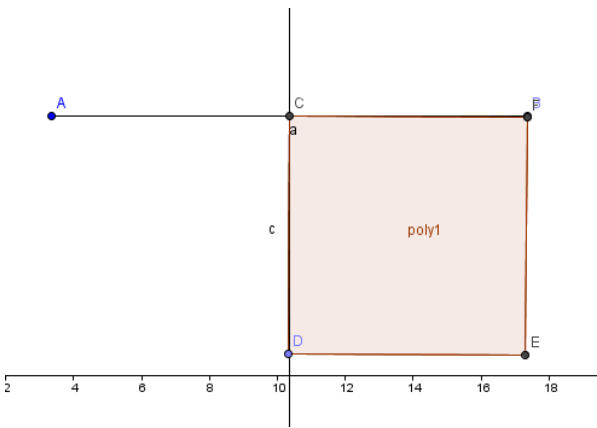
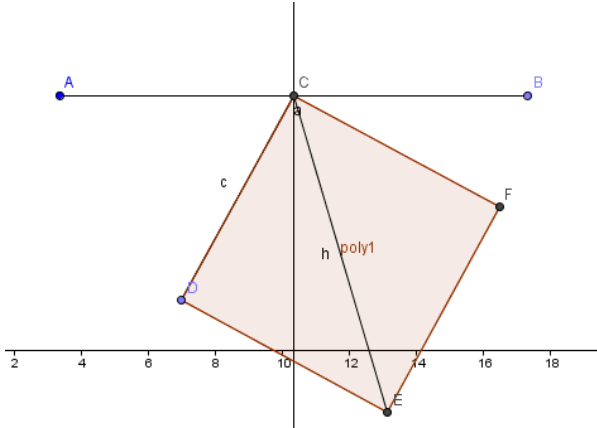
Paula (19:53:34h): Péra aí!

Mediador (19:53:35h): A trajetória de Carol saindo de Jacaréi pode tocar o lado do quadro em qualquer parte e temos valores distintos dependendo da trajetória, isso não permite ter uma noção, ou de certa forma parece errado fazer isso de acordo com informações da tarefa?

Paula (19:53:46h): Eu tinha esquecido do segmento de 14.

Zeca auxiliando Paula na construção sugeriu algumas formas de traçar a figura no GeoGebra, como mostra o Quadro 22:

Quadro 22 – Interações entre Paula e Zeca

construções de Paula na aba GeoGebra	interações no chat entre Zeca e Paula
	<p>Zeca (19:53:58h): Se você</p> <p>Zeca (19:54:08h): traçar as duas retas paralelas</p> <p>Zeca (19:54:25h): e traçar a mediatriz de JC (o estudante retomou a reta do caminho Jacareí até Conceição nomeando-a por JC, mas na construção o segmento de reta AB)</p> <p>Zeca (19:54:30h): a construção sai</p> <p>Zeca (19:54:39h): tendeu? (contração da palavra 'entendeu')</p> <p>Paula (19:55:04h): Eu não estou achando onde tem a mediatriz.</p> <p>Zeca (19:55:23h): Na dúvida</p> <p>Zeca (19:55:25h): faz manual,</p> <p>Zeca (19:55:31h): traça duas circunferências</p> <p>Zeca (19:55:40h): tlgd? (abreviação da expressão 'ta ligado?', que seria semelhante a 'entendeu?')</p> <p>Paula (19:56:11h): Entendi.</p>
	<p>Zeca (19:57:23h): Aí, o segmento de reta que separa a mediatriz exatamente em duas partes iguais</p> <p>Zeca (19:57:28h): vai ser nosso segmento PQ (novamente retomando nomenclaturas para os segmentos da figura original)</p> <p>Zeca (19:57:33h): depois disso</p> <p>Zeca (19:57:40h): ligar os pontos.</p>

Fonte: VMTcG, 2018

A estudante Paula interagiu com Zeca no *chat*, mas suas construções não seguiram os passos citados por ele. Os elementos foram aparecendo, como no caso da mediatriz, no entanto foram usados e construídos no contexto do planejamento de Paula para a construção da figura. No quadro, as figuras estáticas não permitem mostrar que a diagonal CE é móvel, tendo movimento de pêndulo, por isso a dificuldade de Paula em fixar o ponto E na mediatriz que corta o segmento AB.

O problema de conexão de Ana, que afetou atualizações do *chat* e na aba GeoGebra, resultou em tensões entre o mediador e o estudante Zeca:

Ana (19:57:47h): Gente, SOS! (SOS usado pela estudante solicitando ajuda)

Ana (19:58:21h): Estou vendo várias coisas aqui no GeoGebra, mas entendendo nada! kkk

Mediador (19:58:33h): Qual a urgência Ana?

Zeca (19:58:49h): kkk, também não estou entendendo.

Mediador (19:59:43h): Zeca por tudo que tu tá falando e propondo tu não tá entendendo?

Zeca (19:59:50h): Eu estou.

Mediador (19:59:52h): Será?

Zeca (20:00:00h): Só não estou entendendo o desenho do GeoGebra lá,

Zeca (20:00:02h): pow! (*indicando indignação?*)

Mediador (20:00:06h): Ah tá!

Zeca (20:00:13h): Mas o que eu estou falando pra mim faz sentido...

Zeca (20:00:14h): rs

Mediador (20:00:35h): Ana, você só não está entendendo o que eles estão fazendo no GeoGebra ou outra coisa?

Ana (20:01:49h): Minha internet está ruim, aí não consigo acompanhar as mensagens, e a construção também tá difícil de entender ...kk

Mediador (20:01:59h): Não sei Zeca, você acha que tem coerência?

Zeca (20:02:16h): Acho...

Zeca (20:02:20h): não sei...

Zeca (20:02:25h): parece que sim.

As interações entre o mediador e Zeca mostraram algumas confusões que surgiram entre eles. O problema de Ana com a conexão ficou em segundo plano, sendo o estopim para discussões que giraram em torno do que tinha acontecido antes entre o mediador, Zeca e Paula. O não entendimento de Zeca remetia ao que ele estava propondo que Paula fizesse para construir a figura e não estava sendo realizado pela estudante. A provocação do mediador aconteceu por ter sido deixado de lado por Zeca e Paula, quando tentou chamar a atenção para que eles se preocupassem com medidas genéricas, ao invés de investir tanto tempo na construção exata da figura.

Essas interações culminaram na conclusão da construção da estudante Paula, que acabou convencendo tanto o mediador, que defendia o uso de medidas genéricas, quanto os estudantes que queriam medidas exatas para poder solucionar a situação-problema.

Paula (20:02:32h): Eu nem sei se entendi o problema, porque pelo o que eu entendi a construção vai ser mais ou menos assim, porém eu não estou sabendo como deixar o quadrado na posição certa.

Mediador (20:03:32h): Vocês não acham que estão preocupados muito mais em deixar a construção perfeita do que traçar rotas possíveis para problema? Será que teremos somente uma rota?

Zeca (20:04:07h): Eu acho que vou tentar

Zeca (20:04:10h): uma rota aqui.

Pedro (20:04:18h): É porque “pra mim” eu não consigo imaginar outra solução se eu não tiver as medidas.

Pedro (20:04:31h): E meu problema está exatamente em conseguir as medidas.

Zeca (20:04:48h): Sim

Paula (20:07:27h): Acho que seria algo assim.

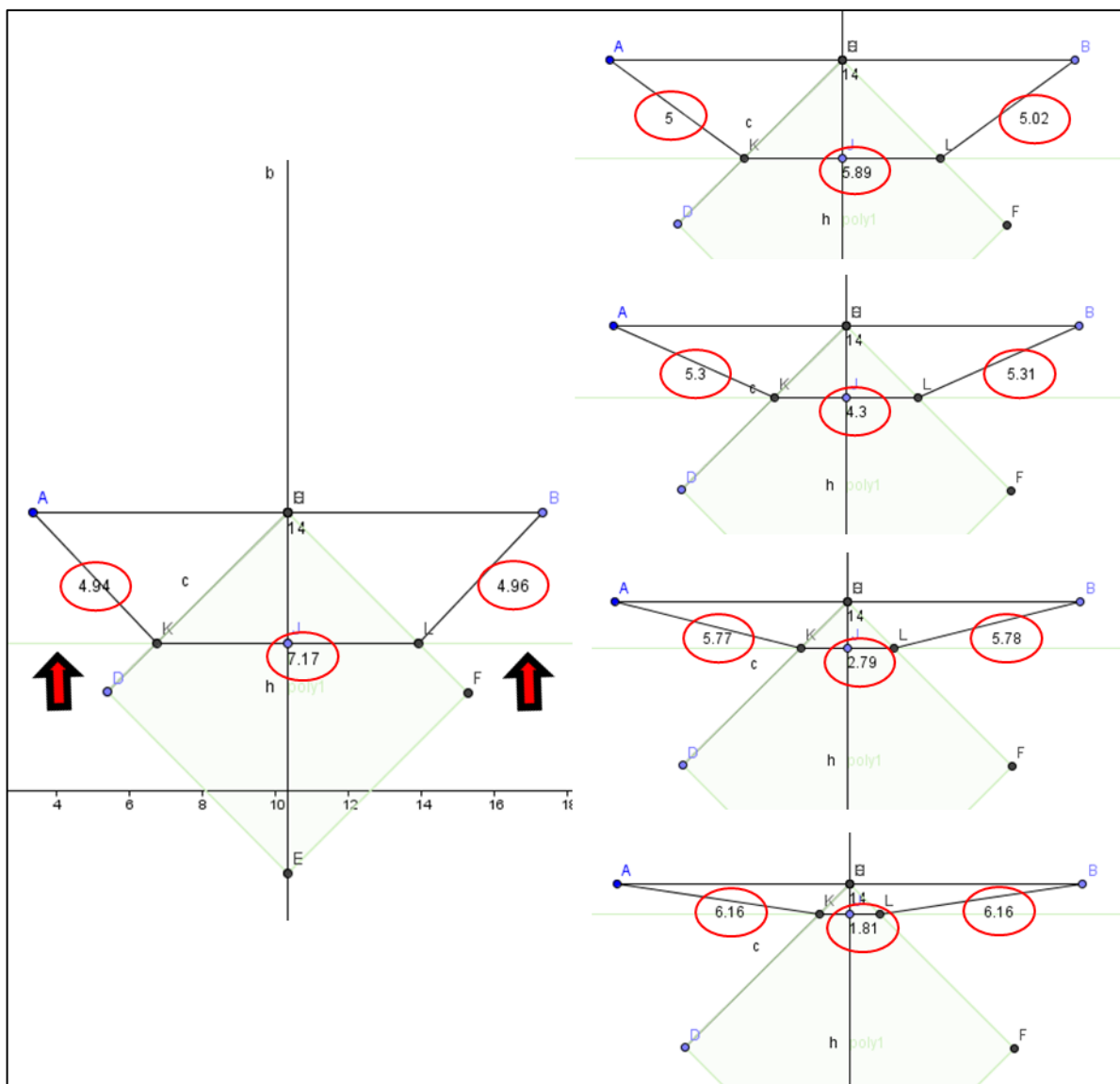
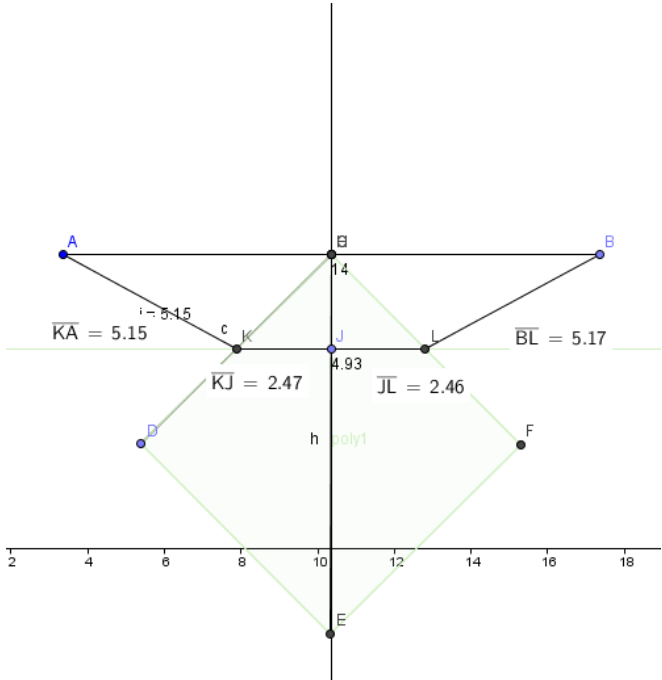


Figura 22 – Movimentação das trajetórias na construção de Paula
Fonte: VMTcG, 2018

Paula construiu uma figura em que a reta paralela ao segmento AB contendo o segmento KL, ao ser movimentada alterava as medidas das trajetórias que passavam pelo descampado quadrangular. O mediador percebendo que a construção remetia justamente ao que estava defendendo até então, a análise de possibilidades de distintas trajetórias com medidas variando, parabenizou a estudante e destacou na construção as medidas dos segmentos que variavam, como mostra o Quadro 23:

Quadro 23 – Manipulações, inserções e apontamentos do mediador e de Paula

Manipulação e inserção do mediador na construção de Paula	Apontamentos de Paula sobre a construção enquanto o mediador manipula e acrescenta na sua construção
	<p>Mediador (20:07:47h): Que legal Paula!</p> <p>Zeca (20:07:57): Pode crer!</p> <p>Mediador (20:08:02h): Dessa forma tu passa por todas as possibilidades de rotas.</p> <p><i>Paula deixou o controle e o mediador assumiu</i></p> <p>Paula (20:08:27h): Mas eu acho que a posição do meu quadrado tá errada.</p> <p><i>mediador tentou identificar os segmentos</i></p> <p>Paula (20:09:05h): Ele diz que a diagonal tem que tá na mediatriz, mas eu não consegui fazer isso.</p> <p><i>mediador identificou os segmentos KA e BL</i></p> <p>Paula (20:09:41h): Então não tá certinho.</p> <p><i>mediador identificou os segmentos KJ e JL</i></p> <p>Paula (20:11:12h): Tanto, que tá dando diferença nos valores que deveriam ser iguais, tipo AK e BL.</p>

Fonte: VMTcG, 2018

Como em sessões anteriores a estudante Ana apresentava um domínio do GeoGebra do VMTcG, o mediador solicitou sua ajuda para centralizar a mediatriz na diagonal da área quadrangular, mas ela não estava mais conectada na sessão. Mesmo a construção estando com medidas diferentes nos lados opostos do descampado quadrangular, já que a mediatriz não estava centrada na diagonal, os estudantes focaram em encontrar o caminho em que Carol gastasse o menor tempo usando a fórmula da velocidade.

Mediador (20:11:31h): Ana você não consegue traçar essa mediatriz?

Pedro (20:12:00h): Paula, você é um gênio!

Mediador (20:14:50h): Partindo dessa construção da Paula, surge alguma ideia nova pra determinar esse caminho mais curto?

Pedro (20:15:53h): Não sei.

Pedro (20:16:27h): Acho que agora podemos aplicar a fórmula pra ver qual é o caminho mais rápido.

Zeca (20:16:37h): Ué?!!

Mediador (20:17:28h): Que formula é essa?

Pedro (20:17:47h): Pensei em usar a da velocidade

Pedro (20:18:00h): Não sei se estou pensando no que deve ser feito na real.

Zeca (20:18:22h): A fórmula vai ser 1km/h vezes o número de km vezes 2 mais 5km vezes o número de km tipo isso?

Mediador (20:19:10h): Vai ser isso Ana, Pedro, Paula?

A proposta de resolução de Zeca referiu-se à soma das distâncias percorridas fora do descampado BL e KA com as distâncias percorridas dentro do descampado JL e KJ, multiplicado pelas respectivas velocidades fora (1km/h) e dentro (5km/h) do descampado, no caso:

$BL = KA = X$ (medidas fora do descampado)

1km/h vezes X vezes 2 (1)

$JL = KL = Y$ (medidas dentro do descampado)

5km/h vezes Y (2)

Logo:

$(1 \text{ vezes } X \text{ vezes } 2) + (5 \text{ vezes } Y)$ (3)

O questionamento do mediador fez surgir outros caminhos de resolução para a situação-problema. Pedro trouxe a fórmula da velocidade média e Paula focou no percurso que formava 90 graus ao adentrar a área quadrangular.

Pedro (20:19:44h): Para descobrir o tempo, teríamos que dividir o deslocamento pela velocidade média, não?

Paula (20:19:50h): Eu não entendi.

Paula posicionou o percurso na construção

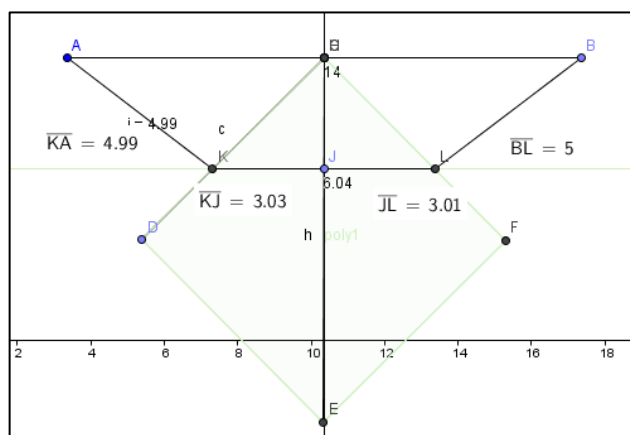


Figura 23 – Resposta de Paula

Fonte: VMTcG, 2018

Paula (20:22:12h): Acho que o menor tempo seria quando ela fizesse o caminho que tá agora.

Zeca (20:22:36h): Faz sentido.

Paula (20:22:45h): Tipo, 5km até a área, 6km lá dentro e 5km depois de novo,

Paula (20:23:22h): que é quando os caminhos fora da área formam ângulos de 90 graus com os lados do polígono.

Zeca (20:25:11h): Era nesse ponto que eu imaginei que seria também.

Mediador (20:25:54h): Ana e Pedro estão acompanhando o raciocínio de Zeca e Paula?

Pedro (20:26:01h): Mais ou menos.

Pedro (20:26:18h): Estou tentando ver essa questão de ângulo de 90 graus ainda.

Zeca (20:28:39h): Sim, sim.

Paula (20:29:34h): Não deu 90. Eu achei que era 90, mas não sei se tá dando errado pela a construção tá mal feita ou se me enganei mesmo.

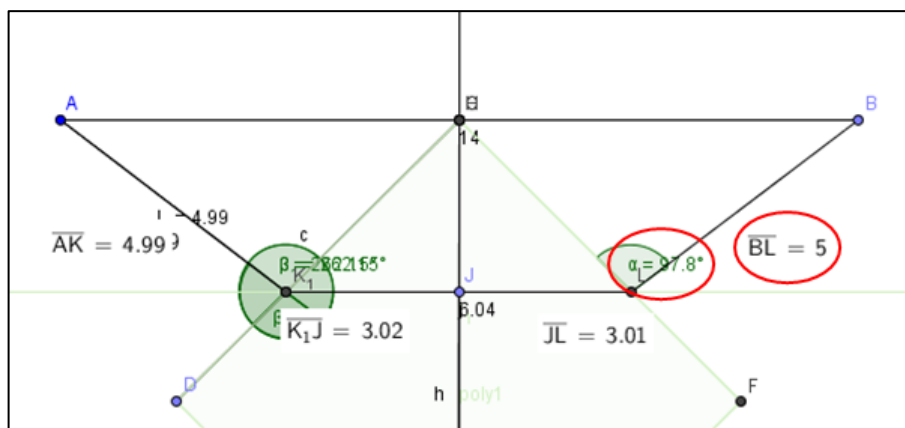


Figura 24 – Ajuste de Paula para encontrar ângulo de 90 graus
Fonte: VMTcG, 2018

Paula (20:30:27h): Desisto, não sei marcar ângulos.

Pedro (20:30:30h): Entendi.

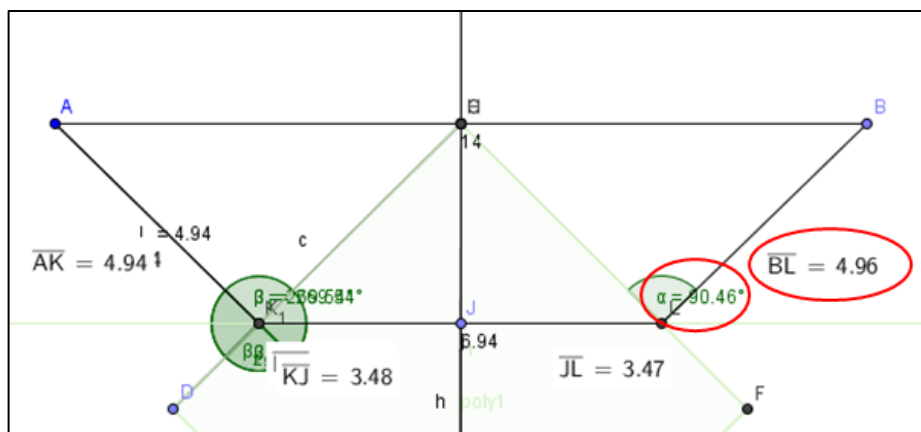


Figura 25 – Reajuste de Paula para encontrar ângulo de 90 graus
Fonte: VMTcG, 2018

A distorção causada nas medidas por conta da imperfeição da construção mostrou variedades de aproximações do ângulo defendido por Paula. Para a estudante, o percurso com menor tempo é aquele que forma um ângulo reto, ao tocar no lado do descampado quadrangular. Nesse contexto, a estudante convenceu os outros estudantes dessa hipótese, mesmo não conseguindo representá-la na construção, porém, o mediador continuou a questionar essa hipótese, começando pela afirmação de Pedro, que não estava entendendo o porquê do ângulo de 90 graus e posteriormente as manipulações de Paula afirmou no *chat* que tinha entendido:

Mediador (20:31:15h): Sobre o que Pedro?

Pedro (20:31:55h): A explicação da Paula sobre a dedução de que fosse 90.

Mediador (20:34:04h): Mas e sobre a dúvida dela, é um erro de construção ou não existe esse ângulo de 90°?

Paula (20:35:00h): Eu ainda acho que é um de 90.

Zeca (20:35:03h): Pra mim seria um ângulo de 90 também,

Zeca (20:35:18h): pode ser a angulação que ficou um pouco tortinha.

Paula (20:36:02h): Eu acho também.

Mediador (20:38:12h): O que na tarefa os fazem pensar q é 90° e considerando isso como contornaremos isso?

Pedro (20:39:11h): Acho que foi o apelo visual que levou a essa dedução.

Paula (20:39:15h): Porque seria a menor distância para ela chegar até a parte onde pode andar mais rápido.

Zeca (20:39:37h) Porque a menor distância é a reta perpendicular.

Pedro (20:39:52h): Sim, e a questão da menor distância também.

A justificativa de Zeca merecia mais atenção, já que ele afirmou que a menor distância seria uma perpendicular, porém não foi pontuada pelos estudantes e nem pelo mediador naquele momento. Por outro lado, as justificativas de Paula e Pedro fizeram sentido para o grupo, já que a menor distância saindo de Jacareí até a área quadrangular era 5km. Quando se movimentava a reta paralela que seccionava a área quadrangular em dois pontos, os valores ficavam acima de 5km, o que resultaria em mais tempo que Carol passaria fora daquela área a uma velocidade de 1 km/h. Desta forma, quando se tinha uma distância de 5km o ângulo formado com essa área era próximo de 90 graus, o que não se pode ter certeza, mas que foi acordado como sendo 90 graus por todos, incluindo o mediador.

Mediador (20:41:15h): Ok! E diante da construção que já temos, como poderíamos calcular esse menor percurso considerando esse ângulo de 90°?

Pedro (20:42:06h): Relações métricas no triângulo retângulo?

Pedro (20:42:15h): Esquece.

Pedro (20:42:23h): Acho que falei besteira.

No questionamento do mediador nota-se um erro que sugestionou Pedro, já que o objetivo dos estudantes não era encontrar o menor percurso, e sim o percurso que levaria menor tempo indo de uma cidade a outra. Seguindo esse entendimento os estudantes propuseram e se ajudaram para encontrar o menor tempo via regra de três e usando as medidas da construção de Paula:

Zeca (20:42:27h): Regra de três.

Mediador (20:45:11h): Então, regra de três tá funcionando?

Paula (20:45:45h): Eu acho que funciona.

Paula (20:46:00h): Calcula as partes de fora e depois a de dentro.

Zeca (20:46:13h): Isso!

Zeca (20:47:49h): Mil metros está para 494 metros, assim como 60 min está para x.

Zeca (20:47:55h): Concordam?

Paula (20:49:07h): Seria 4940 metros, não?

Zeca (20:49:23h): Só se eu converti errado.

Zeca (20:49:29h): São 2 casas ou três?

Zeca (20:49:47h): Se for 3 tá certo.

Paula (20:49:48h): 3.

Zeca (20:49:53h): Isso aí, então.

Paula (20:50:13h): Eu pensei em fazer assim também, mas não fiz as contas.

Zeca (20:50:17h): Aí depois faz com 4960,

Zeca (20:50:30h): a parte do quadrado

Zeca (20:50:42h): é $3,48 + 3,47$?

Zeca (20:51:51h): Aí depois, 5000 está para 6950,

Zeca (20:51:58h): 60 está para x.

Zeca (20:54:07h): Nos meus cálculos

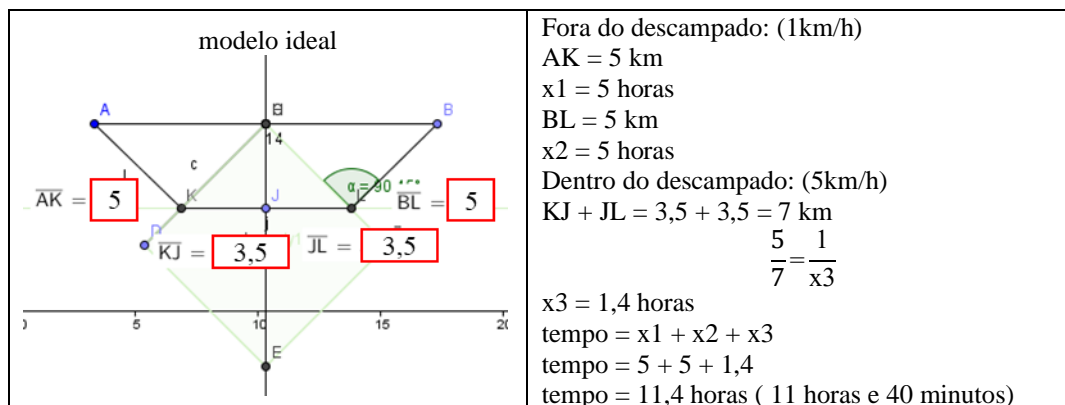
Zeca (20:54:21h): deu 677,4 minutos no total.

Zeca (20:54:33h): E acreditamos ser o melhor trajeto.

No processo de resolução de Zeca, o estudante aplicou regra de três para descobrir os tempos nas distâncias percorridas fora do descampado quadrangular, em que Carol anda a uma velocidade de 1km/h, e dentro do descampado quadrangular, em que Carol anda a uma velocidade de 5 km/h. O estudante optou por converter para metros, evitando trabalhar com as medidas decimais da construção de Paula. Partindo da construção de Paula e dos cálculos de Zeca é possível traçar um paralelo, caso a construção estivesse do jeito que Paula queria resultando medidas exatas, conforme apresentado no Quadro 24:

Quadro 24 – Comparando respostas obtidas pelo modelo construído e pelo modelo ideal

<p style="text-align: center;">modelo construído</p>	<p>Fora do descampado: (1km/h) $AK = 4,94 \text{ km} \times 1000$ $AK = 4940 \text{ metros}$ $\frac{1000}{4940} = \frac{60}{x_1}$ $x_1 = 296,4 \text{ minutos}$</p> <hr/> <p>$BL = 4,96 \text{ km} \times 1000$ $BL = 4960 \text{ metros}$ $\frac{1000}{4960} = \frac{60}{x_2}$ $x_2 = 297,6 \text{ minutos}$</p> <hr/> <p>Dentro do descampado: (5km/h) $KJ + JL = 3,48 + 3,47 = 6,95 \text{ km} \times 1000$ $KL = 6950 \text{ metros}$ $\frac{5000}{6950} = \frac{60}{x_3}$ $x_3 = 83,4 \text{ minutos}$ $\text{tempo} = x_1 + x_2 + x_3$ $\text{tempo} = 296,4 + 297,6 + 83,4$ $\text{tempo} = 677,4 \text{ minutos (11 horas e 29 minutos)}$</p>
--	--



A construção de Paula tinha problemas na execução, mas ela permitiu, como assinalado no Quadro 24, encontrar valores próximos aos que seriam gerados por modelo ideal. Não houve tempo de fazer essa comparação na sessão, e também não foi discutido o percurso em linha reta de Jacareí até Conceição, que de qualquer forma levaria mais tempo (14 horas) do que a reposta encontrada pelos estudantes.

Mesmo Zeca apresentando a resposta como “nossa”, referindo-se à ação conjunta com Paula, o mediador questionou se a resposta encontrada era um consenso do grupo. Assim, foi possível identificar que o estudante Pedro também teve problemas de conexão, o que dificultou a sua compreensão do que estava sendo feito, levando-o, dessa maneira, a questionar o uso da regra de três:

Mediador (20:55:38h): É um consenso Pedro e Paula?

Paula (20:56:05h): Eu acredito que sim.

Pedro (20:56:30h): Estou tentando entender a questão da regra de três ainda, porque a internet aqui está caindo muito, aí as mensagens estão demorando pra carregar.

Pedro (20:56:39h): Mas pelo pouco que eu li creio ser o caminho.

Mediador (20:57:49h): Como garantir que esse é o caminho mais curto, é o que vocês encontraram?

Zeca (20:57:52h): A gente sabe

Zeca (20:58:05h): que em 1 hora ele corre 1km,

Zeca (20:58:34h): aí a gente faz pra 4,94 km

Zeca (20:58:38h): e vê o tempo.

Zeca (20:58:41h): Entendeu?

Zeca (20:58:43h): Assim com todos.

Paula (20:59:31h): Eu acredito que seja, porque depois e antes desse ponto, se gastaria mais tempo fora da zona onde pode andar mais rápido.

A justificativa de Paula mostrou um entendimento mais claro sobre encontrar um percurso no qual Carol ficasse menos tempo fora do descampado quadrangular, do que sua

justificativa sobre o ângulo de 90 graus, que não foi contextualizado segundo características da situação-problema.

Nos momentos finais da sessão o mediador reportou-se a Pedro sobre seu entendimento, e também aos estudantes sobre a tarefa, já que na tarefa “polígono ABCDE” todos pareceram frustrados, por não encontrarem uma solução.

Mediador (21:00:18h): Pedro, ainda com problemas? Quer falar algo?

Pedro (21:00:29h): Oi,

Pedro (21:00:46h): estou demorando a aparecer por conta da internet.

Mediador (21:00:57h): Entendo.

Pedro (21:01:43h): Entendi a rota sugerida, a questão de ela ser a mais rápida creio que possa ser explicada também pela regra de três.

Mediador (21:04:49h): Ok gente, acho que nosso encontro foi bastante produtivo hoje.

Mediador (21:04:53h): O que acharam?

Pedro (21:05:27h): Achei o problema interessante, porém de muita reflexão.

Paula (21:06:17h): Eu achei um problema interessante e mais fácil que o da última sessão.

O estudante Zeca não pôde responder por problemas com sua conexão. A sessão foi encerrada com a situação-problema da tarefa Caminhando com Carol solucionada. Como resposta a frustração dos estudantes na tarefa “polígono ABCDE”, e para promover sua auto avaliação no curso, o mediador enviou para os estudantes uma síntese das tarefas trabalhadas até então, com resumos sobre objetivos pretendidos, com eles no desenvolvimento das tarefas. Veja Quadro 25.

Quadro 25 – Síntese das Fases 2 e 3 de análise do chat da sessão 4

FASE 2		
2.1	Edição	Sessão 4 do Grupo 5 realizada no dia 30/10/2018
2.2	Resumo das ideias discutidas identificando objetivos em caráter coletivo na abordagem da tarefa	Identificação das medidas da figura formada pelo percurso, construção e reconstrução dos percursos da figura da tarefa, solução da situação-problema, argumentação sobre a solução encontrada.
2.3	Numeração de intervenções (mediador e participantes)	Mediador (71); Paula (57); Ana (15); Pedro (48); Zeca (96)
FASE 3		
3.1	Escolha do(s) episódio(s) das atividades	Episódio 1: objetivos e necessidades acordadas pelos estudantes; episódio 2: dois momentos da construção na aba GeoGebra, com todas as possibilidades de percurso
3.2	Identificação de blocos temáticos na discussão dos participantes	
3.3	Identificação das intervenções do mediador	Perguntando sobre ideias para resolução da situação-problema; direcionando os encaminhamentos da sessão; discordando da prioridade dada a construção dos percursos da figura da tarefa; aceitando o caminho escolhido pelos estudantes; requerendo <i>feedbacks</i> dos estudantes sobre a tarefa investigada na sessão.

Fonte: VMTcG, 2018

7.3 Episódios do Grupo 5 no diagrama de análise de interações

Foram dois os episódios selecionados para serem analisados, segundo o diagrama de análise de interações. Nesta seção apresentamos interações do mediador, dos estudantes e dos conteúdos matemáticos associados às estratégias pedagógicas, aos poderes matemáticos e aos temas matemáticos.

Episódio 1(EP1): *objetivos e necessidades acordados pelos estudantes para abordagem da tarefa*

A sessão começou com os estudantes conhecendo a situação-problema da tarefa Caminhando com Carol, no quadro branco. O mediador quis saber as ideias dos estudantes, não dando margem para que o interesse deles se voltasse para ações individuais em seus locais de acesso. Pedro disse estar pensando (*ainda estou no escuro*), mas logo em seguida apresentou uma proposta de abordagem (*encontrar as medidas dos lados da figura*).

O mediador, considerando a experiência da sessão da tarefa Polígono ABCDE, indagou o estudante sobre onde ele testaria sua abordagem, se no quadro branco, no papel, ou no GeoGebra. Foi a primeira vez que o mediador considerou abertamente no grupo um espaço de interação fora do VMTcG, e Pedro confirmou o uso desse espaço descrevendo que primeiro tentaria no papel e depois aplicaria no VMTcG. Mas o mediador contra-argumentou, questionando se o trabalho em grupo não ajudaria o estudante a perceber coisas que talvez sozinho não conseguisse. Nesse meio tempo Zeca já estava rabiscando algo no papel, e Paula dizia estar pensando e que tinha pensado parecido com Pedro, em primeiro achar as medidas dos lados da figura.

Ir para o GeoGebra foi algo perguntado pelo mediador ao grupo e não houve restrição quanto a essa ideia. No GeoGebra Pedro tentou construir a figura. Não conseguindo passou o comando para Paula. Nesse meio tempo Zeca estava informando no grupo o que estava pensando ao rabiscar no papel sobre as informações dadas no enunciado da situação-problema (*acho que ela deve procurar andar ao máximo que puder no descampado, pois é mais rápido por lá, mas de forma que ela não acabe extrapolando*). A interpretação de Zeca indicava que Carol deveria ficar mais tempo no descampado do que fora dessa área. O mediador perguntou aos outros estudantes o que acharam. Pedro respondeu estar pensado parecido e Paula achou estranho o enunciado pedir que se encontre um caminho, sendo que a figura já deixa isso explícito.

Zeca com seus rabiscos não conseguiu chegar a valores numéricos e reconheceu a necessidade do GeoGebra, para encontrar as medidas do percurso. O mediador quis garantir

que os estudantes tinham entendido o enunciado da situação-problema, pois o foco não era encontrar as medidas do caminho, e sim a partir dessas medidas encontrar o caminho mais curto (*ok, mas como podemos determinar o tempo mais curto?*). Pedro, em resposta ao mediador, traçou um caminho para solucionar a questão (*Se a gente encontrar as distâncias podemos usar a fórmula da velocidade pra encontrar o tempo*). A estudante Ana, por causa de problemas na conexão não conseguiu colaborar, conseguindo questionar apenas se os segmentos de retas PQ e AB da figura eram paralelas.

Desta forma, tivemos nos 30 minutos de sessão desdobramentos que coadunaram em hipóteses, objetivos, compreensões e na necessidade de usar o GeoGebra para solucionar a situação-problema. Como podemos observar nas interações do diagrama de análise de interações da Figura 26.

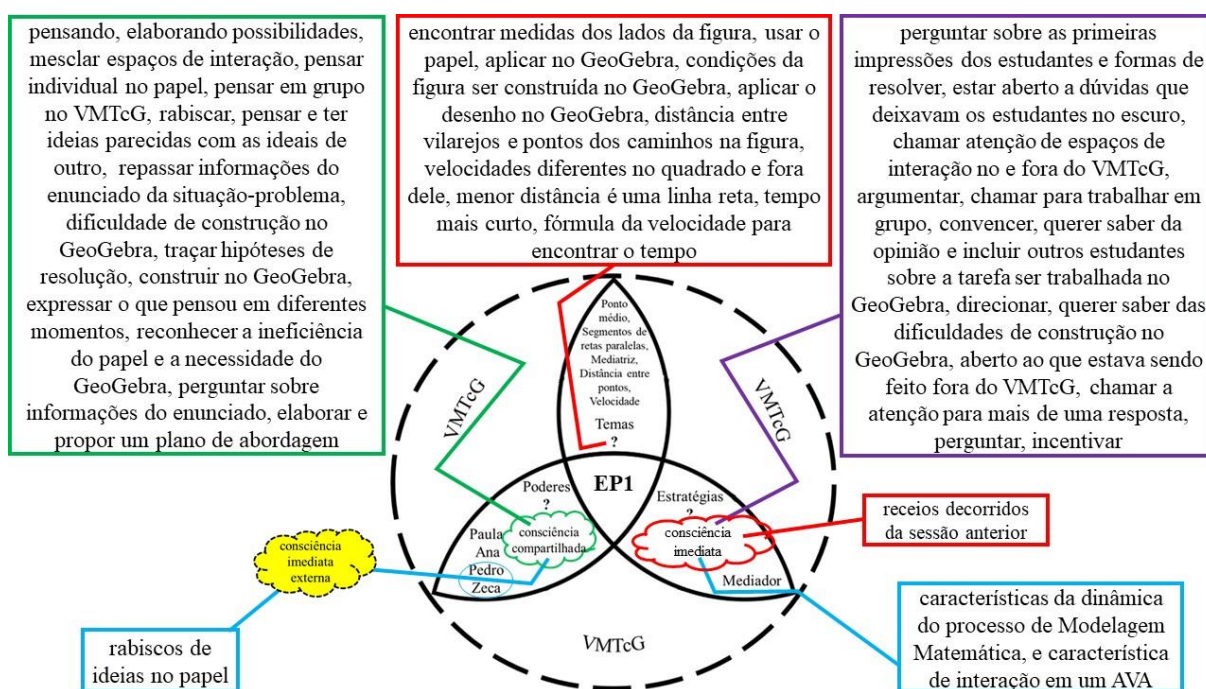


Figura 26 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na Caminhando com Carol (EP1)

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Episódio 2 (EP2): dois momentos da construção na aba GeoGebra com todas as possibilidades de percurso

Paula construiu a figura no GeoGebra e visualmente começou a considerar que o percurso que tocava os lados da área quadrangular formava, ao tocá-la, ângulos de 90 graus, o que a estudante entendeu como sendo o menor percurso (*porque parece ângulos de 90 graus formado lá na figura*). O mediador procurou entender o porquê de Paula achar isso, mas a estudante não tinha certeza, só estava compartilhando o que pensava. Em meio a isso Ana

retirou os eixos das coordenadas x e y do próprio GeoGebra, para deixar o ambiente menos poluído.

A sessão ficou dividida entre dois objetivos: o objetivo do mediador de não focar tanto na construção da figura no GeoGebra, que já estava feita, e que a partir dela, na visão do mediador, os estudantes tinham como inferir respostas para a solução-problema; e o objetivo de Paula, que queria refazer a figura para que ela ficasse com medidas exatas.

O objetivo do mediador justificava-se no receio de essa fixação na construção da figura desgastasse a sessão, de forma semelhante como aconteceu na sessão anterior, e ao final o grupo não conseguir concluir a tarefa. A opção de Paula, de reconstruir a figura auxiliada por Zeca, e ambos pararem de interagir com o mediador, fez com que o mediador assumisse uma postura mais ríspida frente às interações dos estudantes.

Em determinado momento, contudo, Paula passou a ignorar também as contribuições de Zeca, que direcionava pelo *chat* como Paula poderia reconstruir a figura, enquanto ela testava sua hipótese de traçar uma mediatriz no percurso horizontal, que ligava os dois vilarejos, e nessa mediatriz posicionar a área quadrangular da figura. Em um primeiro momento, visualmente considerando a escala que ela estava trabalhando, parecia que a mediatriz cortava a área quadrangular exatamente no meio, passando precisamente por uma das diagonais da figura. No entanto, quando ampliava a figura e a escala diminuía, a mediatriz não estava centralizada na diagonal da área quadrangular.

A explosão do mediador aconteceu quando Ana pediu ajuda, pois as falhas na conexão não estavam atualizando os espaços no VMTcG. Então ela via uma coisa sendo conversada no *chat*, e outra sendo feita no GeoGebra. Nesse momento, Zeca mencionou que também não estava entendendo nada, já que ele falava um caminho e Paula seguia outro. O mediador entendeu que as dificuldades dos estudantes eram no entendimento da situação-problema, só que no caso de Ana as dificuldades estavam nas atualizações do ambiente devido à conexão, e no caso de Zeca era pela visão de Paula de fazer do jeito dela.

Paula finalizou a construção, mas sua dificuldade em deixar a área quadrangular na posição certa fez o mediador novamente cogitar e alertar os estudantes no perigo de focar em um único percurso, ao replicar exatamente da figura da tarefa no GeoGebra, ao invés de considerar outras rotas. Pedro reforçou a necessidade de eles saberem as medidas para poder inferir resposta, sendo apoiado por Zeca.

A postura do mediador mudou quando Paula apresentou sua construção, na qual o segmento de reta, que ficava na área quadrangular, podia ser movimentado e, dessa forma, quando ela movimentava esse segmento as medidas do percurso variavam, mostrando todas as

possibilidades viáveis de medidas, para determinar o tempo mais curto, considerando a área quadrangular. Nesse momento o mediador percebeu que a construção da estudante Paula remetia justamente ao que ele vinha falando sobre considerar outras rotas de percursos. O mediador pensou que Paula estava fazendo uma réplica estática da figura da tarefa, sendo surpreendido pelas características dinâmicas da construção, que atendia ao que ele queria que os estudantes fizessem desde o início.

O mediador perguntou se Ana não conseguia contribuir com a construção de Paula, e centralizar a diagonal da área quadrangular na mediatriz, mas Ana não respondeu, provavelmente por causa da conexão. Mesmo a construção de Paula apresentando erros de construção, o mediador perguntou aos estudantes se com ela era possível determinar o caminho mais curto. Pedro indiretamente corrigiu o mediador sobre o foco da situação-problema, que não se tratava de caminho mais curto, sugerindo aplicar a fórmula da velocidade para ver qual o caminho mais rápido, mesmo não tendo certeza disso (*não sei se estou pensando no que deve ser feito na real*).

Zeca propôs uma forma de encontrar o caminho mais curto, multiplicando o espaço percorrido fora do descampado por 1km/h, e o espaço dentro do descampado por 5 km/h. O mediador perguntou se Ana, Pedro e Paula concordavam. Ana não respondeu, Pedro apontou que para descobrir o tempo, o grupo teria que dividir o deslocamento pela velocidade média. Paula, considerando medidas aproximadas das dadas por sua construção, apontou que o caminho mais curto seria aquele no qual os segmentos do percurso formavam ângulos de 90 graus com a área quadrangular. Assim resultando em duas medidas de 5 km correspondente a parte do percurso fora da área quadrangular, e 6 km correspondente ao segmento interno a área quadrangular.

As tentativas de Paula de posicionar os segmentos do percurso formando ângulos de 90 graus com a área quadrangular mudou a medida do segmento interno à área quadrangular, que de 6 km se aproximou mais de 7 km. Como a estudante não conseguia fixar, formando exatamente esses ângulos, o mediador começou a questionar o grupo se o fato de não encontrar os ângulos se devia ao erro apresentado pela construção, ou eles não existiam. Zeca concordava com Paula, que era erro da figura. Pedro entendia que o apelo visual acabou fazendo-os perceberem que talvez ali se formava ângulos de 90 graus e confirmando a hipótese de Paula de que, quando os segmentos formavam esses ângulos, ou se aproximavam, o caminho para Carol chegar até a área quadrangular e andar mais rápido era menor.

Com as respostas dos estudantes o mediador mudou a tática, resolveu considerar também que os segmentos formavam com a área quadrangular 90 graus. Partindo dessa

assertiva acordada pelo grupo, o mediador inquiriu como calcular o menor percurso. Pedro, influenciado pelos ângulos retos, sugeriu usar o Teorema de Pitágoras, percebendo logo após propor, que esse caminho não resultaria em nada, já que as medidas foram identificadas usando ferramentas do GeoGebra.

Zeca sugeriu usar Regra de três e Paula concordou. O mediador perguntou se daria certo por esse caminho, e Zeca foi explicando os cálculos que ele tinha feito no papel, chegando ao tempo de 677,4 minutos, considerando as medidas reais da figura. O que em horas é equivalente a 11 horas e 29 minutos. O mediador perguntou se os outros estudantes concordavam com a resposta encontrada por Zeca e eles confirmaram. Pedro teve mais dificuldade de acompanhar, pois assim como Ana, começou a ter problemas de conexão, mas também concordou com a resposta encontrada por Zeca.

O mediador, encaminhando para o encerramento da sessão e mais uma vez confundindo em trocar caminho curto com tempo mais rápido, perguntou como eles tinham certeza de que aquela era a resposta certa. Zeca ensaiou uma resposta, mas Paula argumentou que quanto mais tempo Carol ficasse no descampado, mais tempo ela gastaria, sendo o percurso escolhido por eles o que Carol fica menos tempo fora do descampado.

Para concluir, o mediador quis saber sobre o que eles tinham achado da tarefa. Os únicos presentes e que responderam foram Paula e Pedro. Pedro achou interessante, mesmo exigindo muita reflexão, enquanto que Paula também achou a tarefa interessante e mais fácil do que a tarefa da sessão anterior. Infelizmente a conexão de Ana, Pedro e Zeca no VMTcG comprometeu muito suas participações na sessão, de Ana durante toda ela, e de Pedro e Zeca nos momentos finais. Veja a Figura 27.

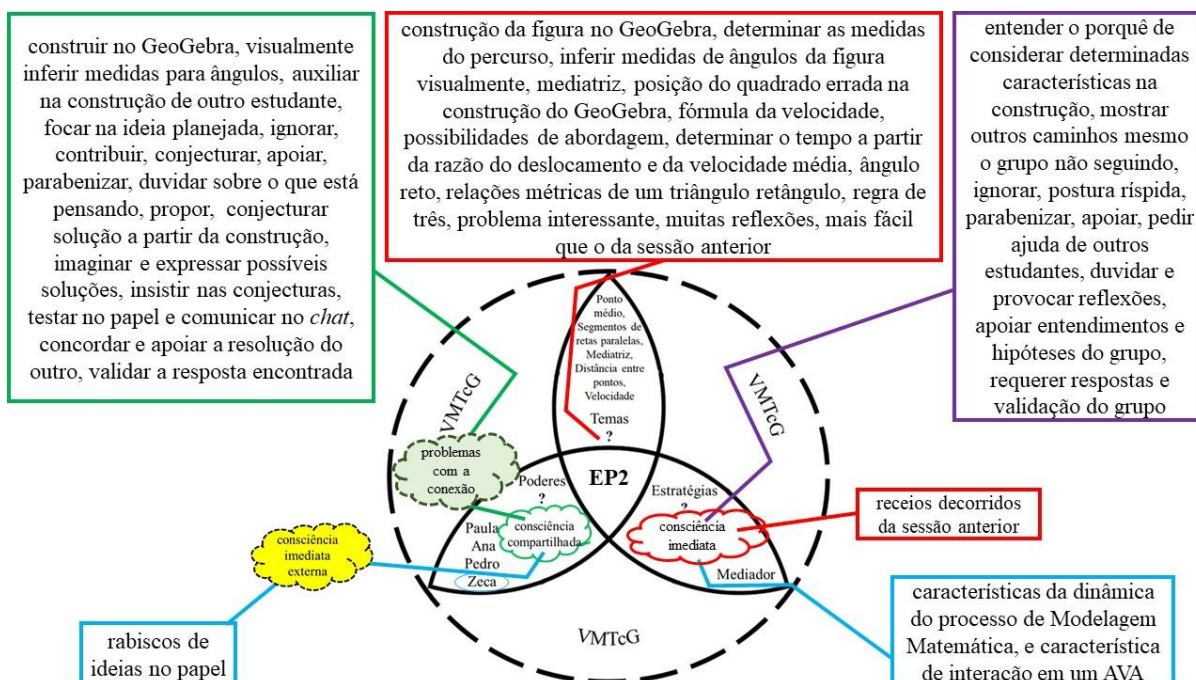


Figura 27 – Diagrama de análise de interações do Grupo 5 na Caminhando com Carol (EP2)
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Considerando os dois episódios descritos e analisados do desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol foi possível enxergar as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática destacadas no Capítulo 2: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

Inicialmente os estudantes foram apresentados a tarefa Caminhando com Carol que apresentava uma situação-problema referenciada em uma semi-realidade na qual os estudantes também investigaram uma realidade construída que provocou discussões sobre possibilidades de caminhos a serem percorridos em menor tempo por Carol de Jacareí até Conceição considerando a passagem por um descampado quadrangular ou em linha reta alterando a velocidade a depender do caminho escolhido.

Mesmo sendo uma sessão afetada por problemas de conectividade os estudantes que permaneciam na sessão trabalharam em grupo opinando na forma de proceder do outro, argumentando em favor da ideia do outro, e na negociação de abordagens com o mediador.

A passagem do contexto da situação-problema investigada para o contexto matemático no GeoGebra configurou a generalização das informações pois os estudantes conseguiram construir uma figura geométrica dinâmica que permitia observar todos os caminhos possíveis a

serem percorridos por Carol de um vilarejo a outro e assim encontrar o caminho a ser percorrido em menor tempo.

Nesse contexto entendemos essa construção como o modelo matemático encontrado pelos estudantes pois a partir da movimentação da figura os estudantes conseguiram comparar diferentes possibilidades de caminhos, encontrando o que eles consideram mais eficiente para Carol percorrer em menor tempo. Assim, entendemos também essa construção como uma captura de características essenciais dos caminhos possíveis de serem percorridos na situação-problema investigada.

CAPÍTULO 8

DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos discussões e interpretações dos resultados obtidos com o diagrama de análise das interações, produzidos no desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG: Estação de Bombeamento, Polígono ABCDE e Caminhando com Carol.

8.1 Estratégias pedagógicas, poderes matemáticos e temas matemáticos emergidos da tarefa Estação de Bombeamento

O desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento no VMTcG possibilitou interpretações sobre dados produzidos e sistematizados nos diagramas de análise de interações dos episódios 1, 2 e 3 do Capítulo 5. Dessa forma, nesta seção articulamos estratégias pedagógicas para as interações do mediador, poderes matemáticos para as interações dos estudantes e temas matemáticos para as interações dos tópicos de Geometria Plana.

Interações do mediador como estratégias pedagógicas

O mediador apresentou maior frequência de interações no início da sessão, como apontado no episódio 1, e ao final, como apontado no episódio 3. Dessa forma foi possível traçar aproximações entre as interações do mediador, com estratégias pedagógicas apresentadas por Johnston-Wilder e Mason (2005), como apresenta a Figura 28.

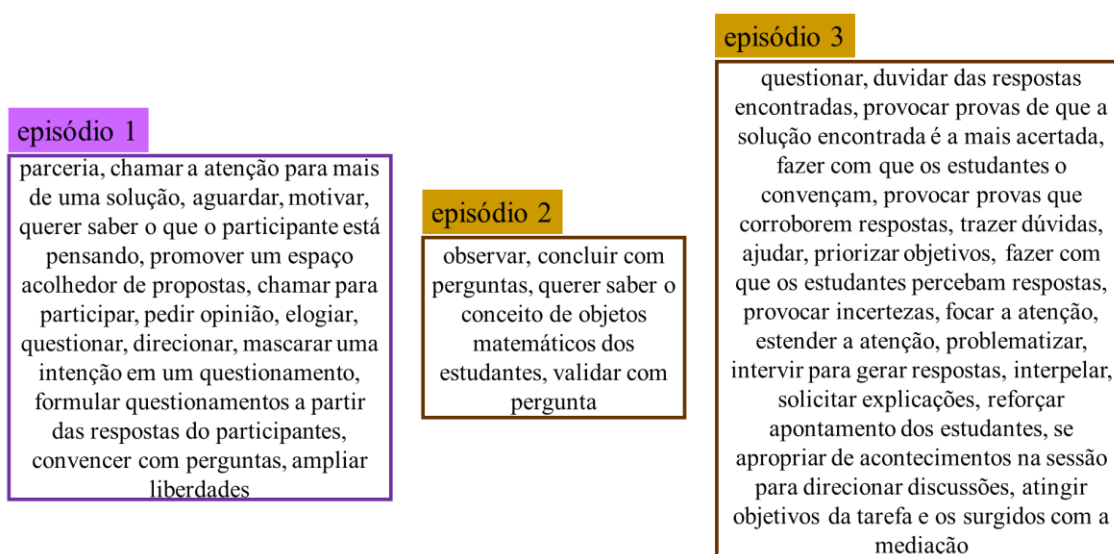


Figura 28 – Interações do mediador na tarefa Estação de Bombeamento
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Identificamos na estratégia *diga o que vê* aproximações com as interações: *querer saber o que os estudantes estavam pensando, promover um espaço acolhedor de propostas, querer saber os conceitos de circuncentro dos estudantes, solicitar explicações*. Nesse contexto, os estudantes puderam contribuir expressando o que estavam pensando, e o mediador conseguiu desenvolver estratégias que reforçassem uma atmosfera de conjecturas. Além do que, ao pedir que os alunos expressassem seus pontos de vista, o mediador fortaleceu o controle dos estudantes sobre suas imagens mentais e as descrições delas no *chat*.

O episódio 1 foi marcado por interações do mediador na forma de questionamentos: *questionar, mascarar uma intenção em um questionamento, formular questionamentos a partir das respostas dos estudantes, convencer com perguntas, concluir com perguntas, validar com perguntas, trazer dúvidas, provocar incertezas, problematizar*. Esse modo de interagir foi assimilado pelos estudantes, por exemplo, quando Pedro desautorizou a construção de Ana, ou quando os estudantes não tinham certeza sobre o que estavam propondo ou sobre o que o outro participante propunha.

Essa assimilação das estratégias do mediador pelos estudantes mostrou que eles foram se habituando e apropriando-se da forma como o mediador interagia. Assim, percebemos aproximações com a estratégia *andaimes e enfraquecimento*, pois os estudantes ao compreenderem a dinâmica de interações do mediador, passaram a intervir de forma similar e por conta própria, como se constatou na diminuição de interações do mediador no episódio 2.

A estratégia *desviar a atenção para automatizar* esteve presente nas interações: *priorizar objetivos, focar a atenção, atingir objetivos da tarefa e os surgidos com a mediação*. No caso da tarefa Estação de Bombeamento, essa estratégia desenrolou-se em momentos em que identificar medidas de segmentos de retas com ferramentas do GeoGebra não eram mais importantes do que as respostas a serem alcançadas, com as medidas identificadas. Nesses casos, o mediador tomava o controle do GeoGebra para si e identificava as medidas dos segmentos de retas, visando o avanço das discussões e chamando a atenção dos estudantes para aspectos da tarefa, que pudessem ajudá-los a solucionar a situação-problema.

Outra estratégia identificada foi *o ensino de técnicas* nas seguintes interações do mediador: *chamar a atenção para mais de uma solução, ampliar liberdades, duvidar das respostas encontradas, provocar provas de que a solução encontrada é a mais acertada, fazer com que os estudantes o convençam, provocar provas que corroborem respostas, fazer com que os estudantes percebam respostas, intervir para gerar respostas*.

Compreendemos que essas interações estimularam as consciências dos estudantes, ao perceberem a situação-problema da tarefa como pertencentes a uma classe de problemas, sendo

capacitados a escolher dentre os pontos notáveis existentes de um triângulo, a técnica mais adequada para a abordagem da situação-problema, no caso o circuncentro ou o baricentro. Para essa estratégia, a tarefa construída foi de suma importância, pois permitiu ao mediador orientar os estudantes a construir métodos viáveis, em meio a discussões, reflexões e argumentações.

As interações do mediador no desenvolvimento da tarefa aproximam-se da forma como a literatura descreve o papel do professor em atividades de Modelagem Matemática, e também das indicações de interação em AVA de Souza e Bairral (2016). Sendo evidenciadas em interações como: *mostrar-se parceiro dos estudantes na investigação, aguardar propostas dos estudantes antes de propor as suas, chamar para participar, observar, entre outras.*

Essas associações reforçam o uso de consciências imediatas do mediador, que surgiram das relações feitas entre o que estava acontecendo durante a sessão, com o contato anterior do mediador com os constructos pedagógicos do processo de Modelagem Matemática. Estes, sintetizados nas características da dinâmica desse processo, e com os constructos pedagógicos das interações em um AVA, com os quais foram potencializadas constantemente comunicações interativas síncronas no quadro branco, no GeoGebra, no *chat*. Constituindo assim, um ecossistema de ensino e aprendizagem no qual saberes críticos, criativos e autorais foram construídos em meio a argumentações, negociações e tomadas de decisão.

Interações dos estudantes como poderes matemáticos

Como as interações no VMTcG não eram independentes, as interações do mediador repercutiram nas interações dos estudantes,. Assim sendo possível relacioná-las a poderes matemáticos, descritos por Johnston-Wilder e Mason (2005). A partir dos diagramas de análises utilizados nos três episódios, podemos observar na Figura 29 as interações dos estudantes.

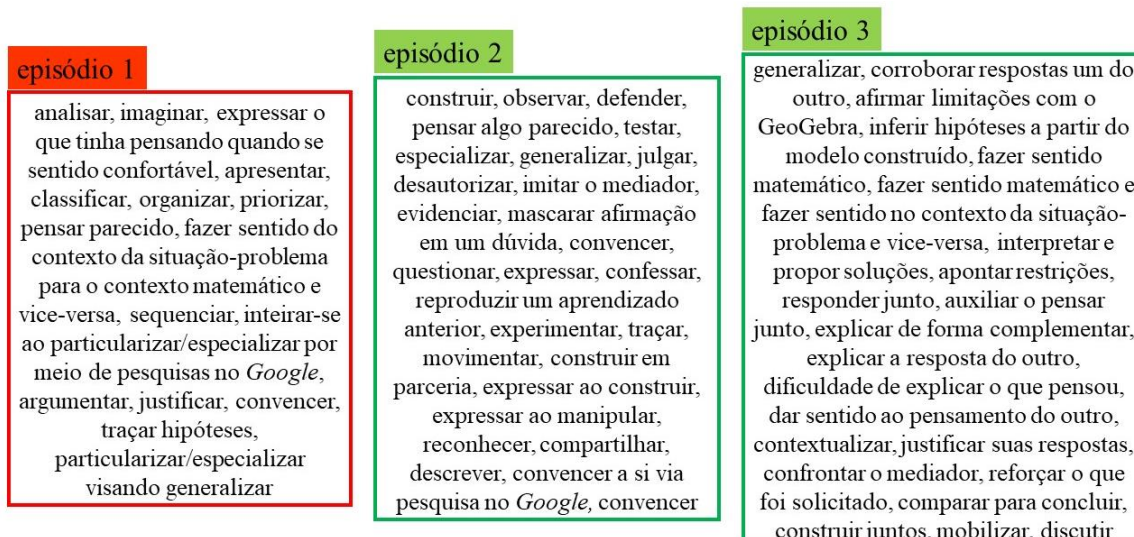


Figura 29 – Interações dos estudantes na tarefa Estação de Bombeamento

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

As estratégias adotadas pelo mediador repercutiram nas interações dos estudantes. Sendo assim, ao pedir que eles descrevessem o que estavam pensando (*diga o que vê*), os estudantes fizeram uso dos poderes *imaginar e expressar o que é imaginado*, como se percebe nas interações: *imaginar, expressar o que tinha pensando quando se sentiu confortável, apresentar, pensar parecido ou algo parecido, confessar, expressar ao construir, expressar ao manipular, descrever, auxiliar o pensar junto, explicar de forma complementar, explicar a resposta do outro, dificuldade de explicar o que pensou*.

Identificar o poder *imaginar* em um ambiente *online* foi possível por meio das descrições dos alunos, que sempre aludiam a expressões como “não sei se o que pensei é adequado” ou “pensei em algo”, ou seja, os próprios estudantes falavam sobre o uso desse poder. Era comum em alguns momentos as descrições das imagens mentais dos estudantes não serem entendidas. Como quando Zeca falou algo sobre o trajeto influenciar nos gastos, e o mediador não conseguiu entender, pedindo que fosse mais claro. Também, quando Ana queria construir outro triângulo com vértices comuns a A e C para construir o circuncentro, e o mediador não entendendo, questionou-a do porquê de se fazer isso.

Então, nem sempre foi fácil transportar o mediador para a situação que os estudantes imaginaram. No entanto, na investigação da tarefa Estação de Bombeamento com as interações do mediador, os estudantes foram aprimorando suas descrições, constituindo um ambiente no qual um participante conseguia explicar o que o outro estava pensando. Assim como, quando Paula explicou para o mediador o que Zeca havia imaginado, porém, não estava conseguindo expressar de forma mais clara. O uso dos poderes *imaginar e expressar o que é imaginado* alicerçou o uso de outros poderes matemáticos pelos estudantes, no desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento.

Os poderes *particularizar/especializar e generalizar* foram identificados nas descrições dos estudantes, evidenciando um pensamento indutivo, que permitia a eles transitarem do contexto da situação-problema, para possíveis generalizações no GeoGebra. Como assinaladas nos diagramas de análise de interações: *fazer sentido do contexto da situação-problema para o contexto matemático, inteirar-se ao particularizar/especializar por meio de pesquisas no Google, particularizar/especializar visando generalizar, desautorizar, reproduzir um aprendizado anterior, experimentar, fazer sentido matemático e fazer sentido no contexto da situação-problema e vice versa, interpretar e propor soluções, explicar a resposta do outro, dar sentido ao pensamento do outro, contextualizar*.

A *generalização das informações da situação-problema* foi uma das características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática que filtramos de diferentes concepções “do

que é” e de “como faz” Modelagem Matemática. Dessa forma, o uso dos poderes *particularizar/especializar e generalizar* são naturalmente estimulados nos alunos, quando do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática. Assim, as estratégias assumidas pelo mediador convergiram para que os estudantes pudessem investigar a situação-problema usando pontos notáveis de um triângulo, e que a partir dessas construções dos pontos no GeoGebra, fosse possível elaborar soluções que fizessem sentido no contexto inicial da situação-problema investigada.

Uma estratégia adotada pelo mediador que pode ser tomada como exemplo, foi a *desviar a atenção para automatizar*, já que o mediador trabalhou com graus de especialização dos estudantes. Privilegiando, deste modo, chamar a atenção para aspectos da tarefa, que pudessem oferecer resultados mais significativos para a resolução da situação-problema, em detrimento de técnicas derivadas do uso de ferramenta no GeoGebra para identificar medidas.

Nesse contexto, as marcações no mapa, a disposição das localizações das cidades-clientes, as construções no GeoGebra e as discussões, argumentações, contestações, desautorizações, possibilitaram a generalização da situação, primeiro com o circuncentro, e depois com o baricentro.

Para Johnston-Wilder e Mason (2005) muitas situações do cotidiano envolvem relações geométricas. Assim, entendo que construções geométricas no GeoGebra ajudaram os estudantes a excluir elementos irrelevantes (coordenadas das localizações das cidades), para que relações relevantes pudessem ser representadas (estruturas geométricas que permitissem encontrar o local da construção da estação de bombeamento solicitado pela situação-problema).

Na tarefa Estação de Bombeamento as generalizações resultaram nos modelos matemáticos circuncentro e baricentro, que permitiram aos estudantes inferir compreensões para o local da construção da estação de bombeamento. O circuncentro quando considerado exatamente o que estava sendo solicitado pelo comando da situação-problema e o baricentro, quando os limites impostos foram removidos. Desta forma, reconhecer as construções do circuncentro e do baricentro como captura da estrutura essencial da problemática, da tarefa Estação de Bombeamento foi uma forma de generalização.

Essa situação-problema produziu conjecturas justificadas, a partir da generalização da estrutura que relacionava a localização das três cidades e a localização da construção da estação de bombeamento. Assim, reconhecer o circuncentro como a técnica possível para solucioná-la foi a primeira conjectura a ser contestada, testada, modificada, resultando no uso dos poderes matemáticos já citados e no uso dos poderes *conjecturar e convencer a si e aos outros*. Também como identificados nas interações: *traçar hipóteses, construir, defender, testar, julgar,*

desautorizar, evidenciar, convencer, convencer a si via pesquisa no Google, corroborar respostas um do outro, inferir hipótese a partir do modelo construído, interpretar e propor soluções, apontar restrições, confrontar o mediador, reforçar o que foi solicitado, discutir.

A conjectura do circuncentro descrita por Pedro e Paula, e apoiada pelos outros estudantes, foi a forma encontrada pelo grupo para trabalhar a situação-problema. A partir daí tudo que foi pensando, expresso, construído precisou ser testado, avaliado, considerado ou descartado. Mas, isso não foi possível por causa de um ou dois estudantes, mas pela colaboração de todos. Os estudantes não tinham certezas sobre o que propunham. Tanto que suas propostas na maioria das vezes eram seguidas de um ponto de interrogação, mostrando a necessidade do outro em corroborar, ao se convencer daquilo que estava sendo proposto, e fazer com que o participante proponente se convencesse da própria proposta, trabalhando sua confiança.

Para que os estudantes pudessem expressar essas conjecturas de modo a oportunizar serem avaliados pelo grupo, o mediador precisou fazer com que eles se sentissem confortáveis para propor e para receber críticas. Criando assim, uma atmosfera de proposições, na qual os estudantes em momento algum receberam como resposta do mediador ou de outros estudantes afirmativas como “isso está errado”, “não é assim que se faz”, “você não aprendeu isso”. De maneira oposta a cada conjectura apresentada, a hipótese era tomada como pano de fundo e analisada pelo grupo, sendo adotada, ou rejeitada, mas de forma a não inibir novas proposições.

Exemplos de conjecturas que convenceram os estudantes aconteceu no episódio 1 quando Zeca e Caco não queriam considerar pontos quaisquer, sendo convencidos pelos argumentos de Pedro, Ana, Paula e do mediador, que se a proposta do circuncentro valesse para pontos quaisquer, poderia ser replicada no contexto da situação-problema. Essa tensão entre conjecturas podia ter sido encerrada de outra forma, sobre a alegação de que “éramos maioria, e que faríamos daquele jeito”, e nessa hipótese os outros dois estudantes não teriam opções de recusar. Mas ações como essas não são próprias de uma atmosfera de conjecturas, e assim, funcionando como grupo, mesmo que um participante se oponha a algo, ele vai ser ouvido, sua proposta vai ser avaliada, e a partir daí o grupo ou convencerá ou será convencido.

Outro exemplo de destaque no desenvolvimento da tarefa foi a *ausência* de Ana, pontuada nos episódios 2 e 3, que ao construir o baricentro no lugar do circuncentro oportunizou outro pano de fundo para o raciocínio do grupo, além do circuncentro. Assim, os estudantes e o mediador discutiram, argumentaram, avaliaram, compararam, levando parte do grupo a considerar que para economizar custos na construção da estação de bombeamento, desconsiderando a condição das distâncias iguais, o baricentro seria uma opção mais viável do que o circuncentro.

Além de convencer uns aos outros, pesquisas no *Google* também foram consideradas por Paula e Pedro, para alicerçarem suas propostas. Dessa maneira os estudantes compartilharam que fizeram as pesquisas para confirmarem ideias que estavam pensando, convencendo-os a si primeiro, para poderem convencer aos outros. Pode ser que outros estudantes também fizeram uso dessas pesquisas, mas os únicos que compartilharam foram Paula e Pedro.

Os últimos poderes identificados foram os de *organizar e classificar*, exemplificados nas interações: *classificar, organizar, sequenciar, evidenciar, movimentar, reconhecer, descrever, explicar*. Para fazer propostas os estudantes precisaram organizar informações da situação-problema mentalmente, e a partir disso classificar ao expressarem o que pensaram. Por exemplo, Pedro e Paula consideraram a disposição das marcações das cidades no mapa, e as classificaram com vértices de um triângulo. As distâncias das cidades foram consideradas como os lados da área triangular determinada pelos vértices, e nesse contexto a proposta do circuncentro, poderia ser o local a ser construída a estação de bombeamento. Para poder fazer essas relações, os estudantes precisaram considerar aspectos da situação-problema, que para eles eram relevantes, pelas conexões que estabeleceram com os ferramentais matemáticos que dispunham, em detrimento de outros aspectos que foram deixados de lado.

Interações dos tópicos de Geometria Plana como temas matemáticos

O elo que conectou mediador e estudantes na investigação no VMTcG foi a tarefa Estação de Bombeamento. Dessa forma foi possível observar temas matemáticos intrínsecos à tarefa e aos conteúdos matemáticos, que foram aproveitados ou não pelo mediador e pelos estudantes, na investigação da situação-problema. Considerar interações de tópicos de Geometria Plana pode parecer estranho, já que são abstrações, mas entendemos que ao provocarem interações nos outros, esses tópicos estão interagindo, sendo essas interações expressas reciprocamente com o mediador e os estudantes.

Desse modo, consideramos interações estabelecidas entre: mediador e estudantes, estudantes e estudantes, mediador e VMTcG, estudantes e VMTcG, mediador e circuncentro, mediador e baricentro, estudantes e circuncentro, estudantes e baricentro. Isto, entre outras configurações nas quais mediador, estudantes, VMTcG e os tópicos de Geometria Plana relacionaram-se na investigação da tarefa Estação de Bombeamento. Veja as interações capturadas pelos diagramas de análise de interações na Figura 30.

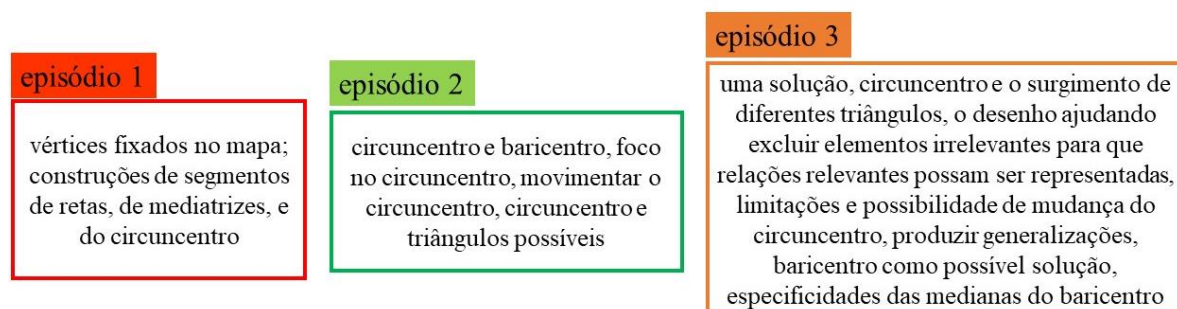


Figura 30 – Interações das mediatrizes e do circuncentro na tarefa Estação de Bombeamento
 Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

O mediador ao usar a estratégia de querer saber a proposta de Pedro, fez Pedro e Paula expressarem e classificarem o que tinham imaginado e organizado em suas mentes. Evidenciando, deste modo, *liberdades e limitações* dos objetos matemáticos associados a aspectos da situação-problema. Assim, as *limitações* das localizações das cidades-clientes, associados a *vértices fixados no mapa* repercutia na *liberdade* das *construções de segmentos de retas, mediatrizes e do circuncentro*. Essas *limitações* também foram observadas nas construções de Ana e Paula, pois Paula construiu as mediatrizes e marcou o circuncentro a partir das construções de circunferência, pontos e triângulo de Ana, de tal modo que as construções de Paula estavam limitadas às construções de Ana.

As *limitações* intrínsecas à tarefa evidenciaram o seu potencial em *restringir* a atenção dos estudantes para os objetos matemáticos, para os quais a tarefa foi elaborada, mediatrizes e circuncentro. O que não impediu os estudantes de expressarem liberdades desses objetos matemáticos, quando houve a migração dos pontos fixos do mapa para pontos quaisquer no GeoGebra.

Essa mudança de espaço permitiu, por exemplo, que Ana ao expressar sua *ausência*, *estendesse* os conceitos de pontos notáveis de um triângulo, do circuncentro para o baricentro. Permitiu também a Paula ao *fazer* o circuncentro, limitada às construções de Ana, *desfazer* essas construções ao movimentar o circuncentro construído, e dessa forma *estender* os conceitos do específico para o geral, ou seja, das mediatrizes e do circuncentro para uma variedade de triângulos possíveis. Dessa forma, migrar do quadro branco para o GeoGebra oportunizou aos estudantes experimentar liberdades de aspectos da tarefa e dos objetos matemáticos usados.

Os temas matemáticos *liberdade e limitação, fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo*, observados e expressos nas interações do mediador e dos estudantes, explicam muitas das interações identificadas nos diagramas de análise de interações: *uma solução ou duas, circuncentro e o surgimento de diferentes triângulos, o desenho ajudando excluir elementos irrelevantes para que relações relevantes pudessem ser representadas, limitações e*

possibilidade de mudança do circuncentro, produzir generalizações, baricentro como possível solução, especificidades das medianas do baricentro, entre outras.

Na tarefa Estação de Bombeamento a atitude indutiva dos estudantes não conflitou com o pensamento dedutivo característico da visão clássica euclidiana. Pois os estudantes, nas primeiras conjecturas já consideraram uma estrutura, o circuncentro, baseados em suposições acordadas entre eles, encontro das mediatrizes. O GeoGebra permitiu que os estudantes experimentassem a estrutura de dependências de construção correspondente à estrutura de cadeias de raciocínio. Assim, partindo da estrutura principal conjecturada, as deduções subsequentes corresponderam às limitações, em que a ideia de circuncentro como solução para a situação-problema dependia de resultados previamente deduzidos: construção do triângulo, marcação dos pontos médios, marcação das perpendiculares nos pontos médios, e marcação do circuncentro como encontro das mediatrizes.

Que/Como poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento síncrono da tarefa Estação de Bombeamento no ambiente online VMTcG?

O desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento no VMTcG figurou como uma atividade formativa *online* e síncrona, na medida em que os estudantes aceitaram o convite de investigar uma situação-problema, referenciada na semi-realidade da construção de uma estação de bombeamento, a partir da localização de três cidades em uma determinada região.

Em grupo, estudantes e mediador formaram uma parceria no uso de conteúdos matemáticos, que resultaram nas generalizações circuncentro e baricentro. Dessa maneira os estudantes e o mediador conseguiram capturar a estrutura essencial de uma situação-problema, resultando em modelos matemáticos, que permitiram ao grupo inferir respostas de acordo com características do enunciado da situação-problema.

Observamos também que o trabalho colaborativo dos estudantes, do mediador, e dos conteúdos matemáticos deflagrou poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos, apresentados na Figura 31.

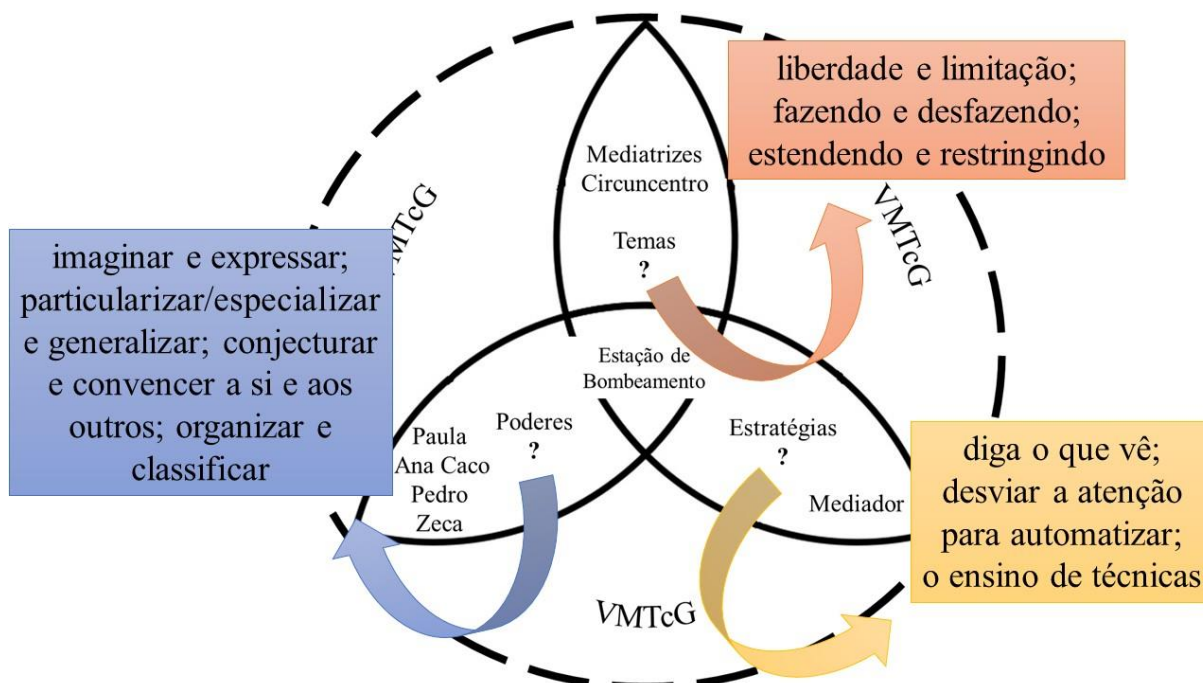


Figura 31 - Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Estação de Bombeamento no VMTcG
 Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Reconhecemos, partindo das interações identificadas no desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática, que a manifestação dos poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos aconteceu por causa de aspectos da tarefa Estação de Bombeamento, elaborada e desenvolvida no VMTcG, como:

- as mediatrizes e o circuncentro não foram indicados no comando da situação-problema, muito menos os outros conteúdos que emergiram na sessão, o baricentro e as medianas;
- não foi indicado como os estudantes deveriam conduzir a investigação, pois as discussões foram debatidas, avaliadas, negociadas, aceitas, recusadas pelo grupo;
- houve possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução, como observado na *ausência* de Ana, que permitiu discutir o ponto notável derivado dos encontros das medianas de um triângulo inscrito em uma circunferência qualquer;
- houve opções de estratégias, resolução e solução;
- o controle das interações comunicativas não esteve centrado no mediador, oportunizando aos estudantes apresentarem e defenderem seus posicionamentos, bem como contestarem argumentos do mediador, caracterizando dessa forma, uma comunicação dialógica entre mediador e estudantes.

Essa combinação repercutiu nas interações dos estudantes fazendo-os usar seus poderes matemáticos, que em consonância com as estratégias pedagógicas do mediador, expressaram os temas matemáticos intrínsecos à tarefa Estação de Bombeamento. Isto porque estavam em

potência e foram desenvolvidos em meio a essa combinação de poderes matemáticos e estratégias pedagógicas nos espaços do VMTcG, revelando uma dependência entre as interações dos estudantes, do mediador e dos conteúdos matemáticos.

8.2 - As estratégias pedagógicas, os poderes matemáticos, e os temas matemáticos emergidos da tarefa Polígono ABCDE

Como feito na seção 8.1, o desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE no VMTcG permitiu, com base nos conceitos de Johnston-Wilder e Mason (2005) sobre estratégias pedagógicas, poderes matemáticos e temas matemáticos, interpretar interações do mediador, dos estudantes e dos tópicos de Geometria Plana, sistematizadas nos diagramas de análise de interações dos episódios 1 e 2 do Capítulo 6.

Interações do mediador como estratégias pedagógicas

As interações do mediador no desenvolvimento da tarefa aconteceram de forma repetitiva. Constantemente o mediador precisou mostrar-se presente/atuante no sentido de evitar os silêncios, que desde o início da sessão até seu término foram recorrentes. Na Figura 32 podemos perceber as interações do mediador na condução da tarefa.

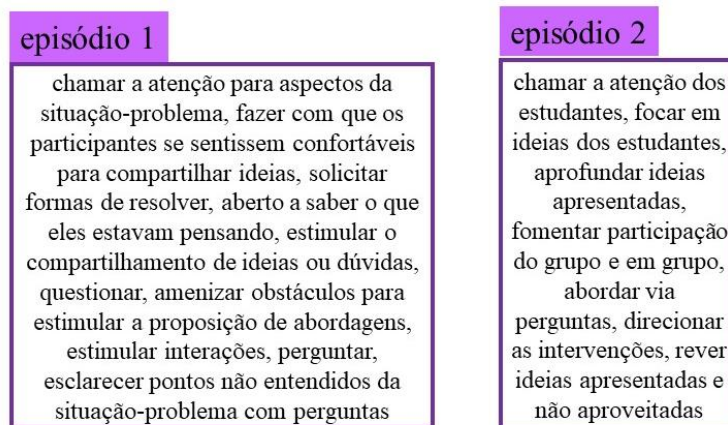


Figura 32 – Interações do mediador na tarefa Polígono ABCDE
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Como as interações entre os estudantes não estavam acontecendo, o mediador interveio para que eles compartilhassem propostas sobre como abordar a tarefa. Observamos a estratégia *diga o que vê* nas seguintes interações do mediador: *fazer com que os estudantes se sentissem confortáveis para compartilhar ideias, solicitar formas de resolver, mostrar-se aberto a saber o que eles estavam pensando, estimular o compartilhamento de ideias ou dúvidas*. Mesmo a todo momento o mediador provocando para que os estudantes compartilhassem com o grupo o que estavam pensando, eles sentiam-se inseguros na apresentação das suas ideias.

O mediador ainda não tinha experimentado uma situação parecida com esse grupo, já que tanto na tarefa de ambientação, quanto na tarefa Estação de Bombeamento, a proatividade coletiva em relação à abordagem das situações colocadas, era uma característica forte do Grupo 5. O mediador nesse novo contexto, em relação à forma de trabalhar com um grupo que se mostrava menos propositivo, assumiu como estratégia focar em elementos do enunciado da situação-problema, que pudessem ajudar os estudantes a enxergar que o comprimento x era a medida do polígono, que variava conforme o intervalo considerado, e que a função $f(x)$ era o perímetro do polígono dependente da variável x . Assim, identificamos aproximações com a estratégia *mesmo e diferente* com as seguintes interações: *chamar atenção dos estudantes para aspectos da situação-problema, esclarecer pontos não entendidos da situação-problema com perguntas*.

O mediador esforçou-se para que houvesse uma *atmosfera de conjecturas*, na qual os estudantes se sentissem confortáveis em compartilhar ideias, como percebemos nas interações: *questionar, amenizar obstáculos para estimular a proposição de abordagens, estimular interações, perguntar, esclarecer pontos não entendidos da situação-problema com perguntas*. Essas interações geraram respostas, que na maioria das vezes era seguida de dúvidas, e logo eram abandonadas pelos estudantes, não sendo aprofundadas. Fato que novamente fazia o mediador intervir para: *aprofundar ideias apresentadas, fomentar participação do grupo e em grupo, abordar via perguntas, direcionar as intervenções, rever ideias apresentadas e não aproveitadas*.

Interações dos estudantes como poderes matemáticos

As interações dos estudantes durante a sessão foram tímidas, seguidas de ideias, mas também de muitas dúvidas. A coletividade na busca por respostas que era presente nas tarefas anteriores não aconteceu nesta sessão. Os estudantes tinham dificuldades de desenvolver suas ideias e de contribuir nas ideias do outro. Veja as interações dos estudantes na Figura 33.

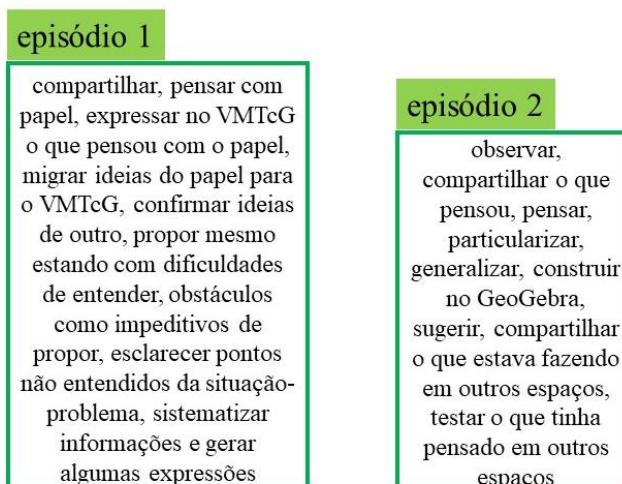


Figura 33 – Interações dos estudantes na tarefa Polígono ABCDE

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Incentivados pelo mediador os estudantes foram apresentando suas ideias, inicialmente a partir do que estavam fazendo de maneira individual em seus locais de acesso. Pedro rabiscando no papel para “estalar” algo na mente, depois Paula, seguida de Ana. Dessa forma, identificamos aproximações com os pares de poderes *imaginar e expressar* nas seguintes interações dos estudantes: *compartilhar, pensa com papel, expressar no VMTcG o que pensou com o papel, migrar ideias do papel para o VMTcG, propor mesmo estando com dificuldades de entender, compartilhar o que pensou, compartilhar o que estava fazendo em outros espaços, testar o que tinha pensado em outros espaços.*

Nas interações dos estudantes era comum apresentarem ideias de abordagens seguidas de dúvidas e de confirmações negativas, que por aquele caminho não seria possível concluir nada, ou não resultaria em nada apropriado para a tarefa. Os silêncios combatidos pelo mediador davam lugar a interações individuais dos estudantes em seus locais de acesso, como Pedro, que confessou estar rabiscando no papel. Então tínhamos consciências emergindo em diferentes momentos e espaços. Primeiro, com o enunciado da situação-problema, já que eles conheciam no início da sessão. Segundo, interagindo de forma individual, como no caso de Pedro, a partir de rabiscos no papel e que, provavelmente estava acontecendo o mesmo com os outros estudantes. Terceiro, quando os estudantes compartilhavam para o grupo no *chat* do VMTcG o que tinham pensando, testado e concluído no papel. Assim, até as ideias serem expressas no VMTcG, muito já havia se perdido nesses momentos e espaços externos ao ambiente *online* comum aos estudantes e ao mediador.

Houve também a situação do estudante Zeca, que não se sentiu confortável em expressar o que tinha pensando, após questionar a posição da reta vertical no polígono, fazendo-o crer

que a posição que ela estava não configurava x naquele ponto igual a 3, em relação ao total do lado do polígono que media 5. A forma como o mediador o interpelou, mesmo não sendo sua intenção, fez com que o estudante ficasse um bom tempo sem interagir com o grupo. Mesmo nesse contexto, ainda percebemos o uso dos poderes *conjecturar e convencer a si e aos outros* em algumas interações, que configuraram uma atmosfera de conjecturas: *confirmar ideias de outro, esclarecer pontos não entendidos da situação-problema, sugerir*.

Os estudantes apontavam caminhos de abordagem, que poderiam resultar em uma generalização da situação-problema investigada. No entanto, as ideias e os conteúdos matemáticos apareciam seguidos de dúvidas e de confirmações individuais, que aquele caminho não resultava em nada. Então, era comum um estudante compartilhar que estava inclinado a fazer algo, e vir outro e dizer que já tinha ido por aquele caminho e não tinha encontrado nada. Só que o fazer desses estudantes era individual e fora do VMTcG, não permitindo que o grupo avaliasse até que ponto aquele caminho não era frutífero, ou o que poderia ser feito para que aquele caminho resultasse em algo, configurando assim *obstáculos como impeditivos de propor*, obstáculos principalmente relacionados a aspectos do enunciado da situação-problema proposta.

Algumas tentativas de *generalização* foram apresentadas por Ana, Zeca e Paula. As de Ana e Zeca eram semelhantes, para Ana o perímetro do polígono era o perímetro do triângulo mais alguma coisa. Já para Zeca, além de comungar dessa interpretação de Ana, apresentou a generalização $12 + 2x$, no entanto não explicou como chegou nessa expressão. Em um caminho diferente, a estudante Paula, tentando encontrar um padrão que explicasse o comportamento dos dados para poder inferir uma função, mencionou estar tentando colocar no GeoGebra valores numéricos para diferentes posições da reta vertical, que alterassem o comprimento de x e os receptivos perímetros. No entanto, essa ideia de generalização da situação-problema já havia sido tentada por Pedro, que afirmou não ter conseguido concluir nada.

Nessas tentativas, nenhuma das conjecturas propostas pelos estudantes foi aprofundada, muitas ideias surgiram, mas nem os estudantes e nem o mediador conseguiu aprofundar essas ideias, transformando-as em pano de fundo de discussões. Assim concluímos que em certos pontos os estudantes usaram o poder de *especializar/particularizar* sobre aspectos do enunciado da situação-problema, como apontadas nas seguintes interações: *sistematizar informações e gerar algumas expressões, observar, particularizar, generalizar, construir no GeoGebra*. Contudo, não conseguiram compreender suficientemente aspectos que permitissem ultrapassar o caso particular anunciado na tarefa, para poderem usar o poder *generalizar*, que permitiria o entendimento mais geral da situação-problema investigada.

Interações dos tópicos de Geometria Plana como temas matemáticos

Os conteúdos matemáticos que foram foco da tarefa Polígono ABCDE foram: Perímetro, Teorema de Pitágoras, Semelhança de Triângulos e Funções. Esses conteúdos foram mencionados e testados pelos estudantes e pelo mediador para resolução da tarefa gerando as interações apresentadas na Figura 34.

episódio 1

rabiscando no papel para ver se estalava algo na mente, compreensão e articulação de diferentes objetos matemáticos, padrão entre áreas dos polígonos formados pela reta vertical, encontrar variações para construir a função, abordar triângulo com Semelhança de Triângulos, dificuldade de compreender o que estava sendo proposto pela situação-problema, situação-problema com muitas informações acerca de diferentes objetos matemáticos, ausências com relação ao entendimento da situação-problema, dificuldades em algebrizar uma situação geométrica

episódio 2

comprimento x , perímetro, polígonos, reta vertical, $f(x)$, calcular, intervalos, medidas dos lados, triângulo AHE, perímetro de AHE + alguma coisa, intervalo $3 < x \leq 5$, intervalo $0 < x \leq 5$, expressão $12 + 2x$, polígono ABCDE no GeoGebra, posição oblíqua, posição vertical e horizontal, função, restrição de domínio, duas sentenças para a função $f(x)$, Teorema de Pitágoras, da aritmética para álgebra, padrão dos números, semelhança de triângulos

Figura 34 – Interações dos conteúdos matemáticos na tarefa Polígono ABCDE
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

O enunciado da situação-problema mencionava objetos matemáticos a serem usados na solução. Mas o objeto matemático que predominou foi a ideia de função gerando dificuldades em conseguir enxergar uma relação, que pudesse ser expressa na forma de função. Essas dificuldades estavam presentes em interações como: *dificuldade de compreender o que estava sendo proposto pela situação-problema, situação-problema com muitas informações acerca de diferentes objetos matemáticos*. A ideia do comprimento x variar conforme movimentação da reta vertical, e dessa forma influenciar no perímetro do polígono ABCDE, envolvia muitos objetos matemáticos da Geometria. Necessitando, portanto, de *compreensão e articulação de diferentes objetos matemáticos*, levando os estudantes a buscar fora do VMTcG, *rabiscando no papel para ver se estalava algo na mente*, formas de solucionar a situação-problema.

Entendemos que houve demora na passagem da figura do polígono do quadro-branco para o GeoGebra. Isto considerando que o principal motivo de adaptar a tarefa do Polígono ABCDE foi a possibilidade de movimentar a reta vertical no GeoGebra, o que acabou minando muitas propostas que os estudantes compartilhavam, por elas ficarem no ar, sem poderem ser testadas usando as ferramentas do GeoGebra. Somada a essa demora, a tarefa em si já trazia

uma problemática na sua essência, na qual os estudantes precisavam algebrizar uma situação-problema da área da Geometria.

Essa mudança das discussões do quadro branco para o GeoGebra poderia ter sido feita pelo próprio mediador. Mas em uma abordagem diferente, ele preferiu ver até que ponto os estudantes iriam com as discussões no quadro branco, até perceberem a necessidade de usar o GeoGebra, o que não aconteceu. Assim, da mesma forma coube ao mediador sugerir essa mudança de espaço.

Ao considerar trabalhar a construção do polígono no GeoGebra, o mediador poderia ter chamado a atenção para a variação do comprimento x e sua relação para determinar o perímetro do polígono ABCDE. Deste modo pressupondo que visualmente os estudantes conseguiriam observar que a variação do comprimento x interferiria na medida dos lados do polígono, o que permitiria traçar uma função $f(x)$.

Até certo ponto das discussões no *chat* essas características foram levantadas, mas já tinha passado algum tempo e todos estavam frustrados com o não avanço no desenvolvimento da tarefa. Ao não focar nas construções, o mediador perdeu a oportunidade de invocar os temas matemáticos *invariância e mudança* no GeoGebra, de modo a ajudar os estudantes a enxergar essas relações entre o comprimento x e o perímetro do polígono ABCDE, fazendo-o apenas no chat, e não conseguindo.

O mediador tinha uma visão de solução para a situação-problema da tarefa Polígono ABCDE, e de certa forma essa visão acabou inviabilizando que outras alternativas fossem discutidas, analisadas, aceitas ou descartadas. Como, por exemplo, no início da sessão quando o estudante Pedro propôs relacionar áreas dos polígonos formados pela reta vertical, na tentativa de observar variações entre estas, e enxergar um padrão para construir uma função.

O mediador encarou a proposição de Pedro como uma *ausência* na interpretação das informações do enunciado, que em momento algum mencionou áreas e sim perímetro. Ainda tentou saber mais sobre essa proposta, mas acabou direcionando as interações da sessão para outro rumo, mais próxima da ideia de resolução que ele tinha.

O mediador baseou-se na solução do problema original, que serviu de apoio/fundamento para a adaptação da tarefa Polígono ABCDE, na qual os estudantes usariam o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida correspondente ao lado oblíquo do polígono. Usariam, então, Semelhança de Triângulos para encontrar a expressão de $f(x)$ correspondente ao intervalo $0 < x \leq 3$, e depois encontraria a outra expressão de $f(x)$ para o intervalo $3 < x \leq 5$.

Esta linha de raciocínio fez com que o mediador se agarrasse a propostas próximas desse caminho, não aceitando algo diferente, como no caso da ideia de Pedro, que merecia ser

discutida, ter recebido opiniões dos outros estudantes, que poderiam aceitá-la para investigar a situação-problema, ou recusá-la. Enfim, o grupo foi privado de refletir sobre essa possibilidade. Não queremos dizer que o caminho de Pedro resultaria em uma solução para a situação-problema, mas queremos pontuar que merecia ser melhor discutida, até mesmo em caso negativo, para mostrar ao estudante o porquê dessa proposta não ser o caminho mais eficiente para a investigação.

A proposta que mais se aproximou da linha de pensamento do mediador foi a da estudante Ana, com a qual o mediador enfatizou para ser avaliada pelo grupo, e nos momentos que se entendeu que seriam duas sentenças para a função, considerando os dois intervalos. Porém, quando Zeca apresentou uma generalização para essa abordagem da situação-problema, $12 + 2x$, esta não foi discutida, nem pelos outros estudantes e nem pelo mediador, para tentar entender de onde e como Zeca tinha chegado à esta expressão.

Com as propostas de Ana o grupo avançou mais na abordagem da tarefa, no entendimento de restrição de domínio para as duas expressões relacionadas aos dois intervalos. Assim, aproveitando os temas matemáticos *estender e restringir*, o mediador vendo o tempo da sessão esgotar-se, focou na ideia de Ana para encontrar pelo menos a expressão correspondente ao intervalo $0 < x \leq 3$, restringindo o domínio de parte do polígono e, conseqüentemente da função $f(x)$. No entanto, não conseguindo concluir o que planejou.

Ao final da sessão outra possibilidade apareceu, a proposta de Paula de tentar observar padrões ao marcar valores para a posição da reta vertical no polígono, comprimento de x , e seus respectivos perímetros. Todavia, ao não se atentar para as limitações do domínio contidas nos intervalos considerados, a estudante percebeu um comportamento exponencial, o que a levou a crer que esse não era o caminho. Pedro também compartilhou com o grupo, direcionando a Paula que tinha pensado parecido e que também não tinha concluído nada. O mediador trouxe a ideia de Paula para as discussões do grupo, no entanto com o tempo da sessão esgotando-se não houve avanços.

Que/Como poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento síncrono da tarefa Polígono ABCDE no ambiente online VMTcG?

No desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE, na qual foi investigada uma situação-problema referenciada na própria matemática, observamos e identificamos interações e colaboração entre sujeitos (estudantes, mediador, conteúdos matemáticos) e entre os sujeitos com os espaços do VMTcG e de fora desse ambiente *online*. Configurando assim uma atividade

formativa desenvolvida de forma *online* e síncrona, resultando nas estratégias, poderes e temas apontados na Figura 35.

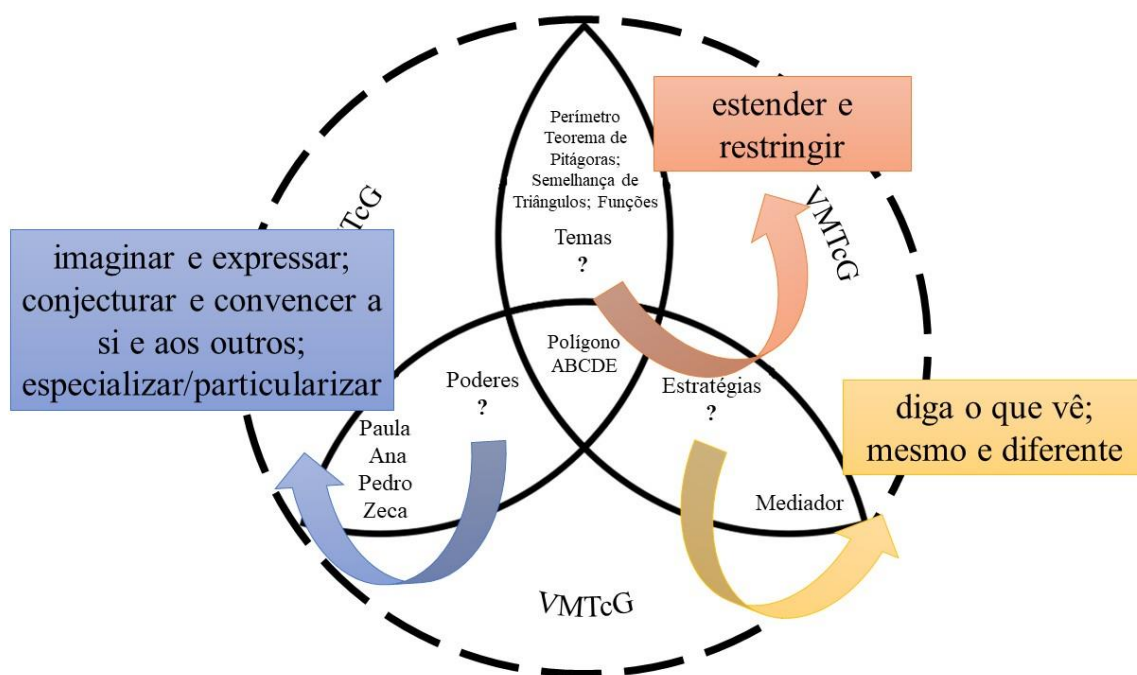


Figura 35 – Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Polígono ABCDE no VMTcG
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

A tarefa de Modelagem Matemática, a forma como o mediador conduziu a sessão, e os espaços de interação adotados pelos estudantes, reverberaram no uso de estratégias pedagógicas e de poderes matemáticos, e no aparecimento de temas matemáticos, como percebemos em aspectos da tarefa e da sua condução, em que:

- foram indicados os conteúdos matemáticos a serem utilizados na investigação;
- o enunciado e algumas intervenções do mediador indicaram como os estudantes deveriam conduzir a abordagem da situação-problema;
- surgiram outras possibilidades de resolução, no entanto o mediador tentou conduzir para uma única estratégia;
- houve encaminhamentos para uma única solução;
- houve uma condução mais forte do mediador, já que apresentou um controle maior das interações comunicativas, e mesmo não sendo sua intenção, o mediador contribuiu para que não houvesse uma comunicação dialógica entre ele e os estudantes, e entre os estudantes.

Esses aspectos da tarefa Polígono ABCDE e da forma como foi conduzida e investigada aproxima-se de tarefas de Modelagem Matemática fechadas. No entanto, entendemos que não

existiu um sistema de causa e efeito, no sentido de que usar uma tarefa de Modelagem Matemática fechada repercutiu no não uso de poderes e estratégias e no não aparecimento de temas, potencializando impeditivos como os apontados na Figura 36.

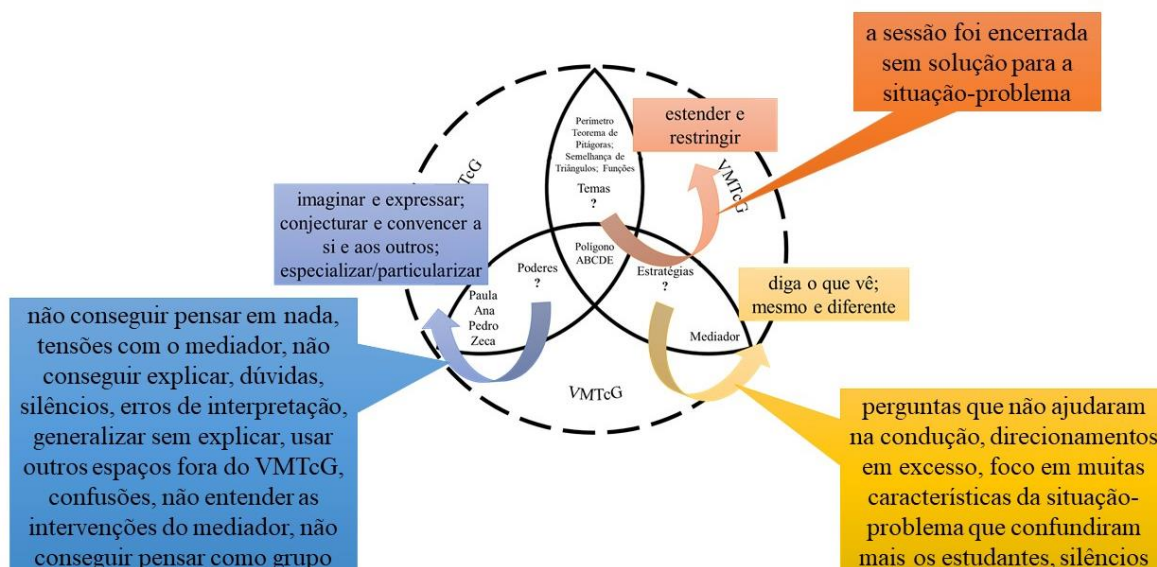


Figura 36 – Impeditivos do uso de poderes e de estratégias, e no aparecimento de temas no desenvolvimento da tarefa Polígono ABCDE no VMTcG

Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Os estudantes foram surpreendidos com a tarefa Polígono ABCDE, mas essa surpresa não foi suficiente para motivá-los durante a sessão para solucioná-la em grupo. Os estudantes não conseguiram exercer seus poderes sobre o contexto da situação-problema, pois não houve identificação desse contexto com suas experiências. Desta forma, entendemos que a falta de associações e ideias da parte dos estudantes foram minando o interesse inicial e o trabalho em grupo, despertado pela surpresa de não conhecer a tarefa da sessão, ocasionando silêncios no VMTcG, e o uso individual de outros espaços de interação nos locais de acesso dos estudantes.

Essa falta de identificação com o contexto da tarefa por parte dos estudantes também afetou as estratégias do mediador. As características de mediação advindas da Modelagem Matemática e das interações em um AVA comungam do papel do professor como orientador e parceiro dos estudantes. Dessa forma, no início da sessão temos o mediador deixando os estudantes mais soltos para poderem apresentar ideias próprias, e nos momentos finais, ao perceber que a tarefa não seria concluída, temos o mediador assumindo uma postura mais diretiva, afastando-se das estratégias iniciais.

O não uso dos poderes matemáticos e das estratégias pedagógicas repercutiu no não aparecimento de temas matemáticos. Nas análises reconhecemos os temas matemáticos liberdade e limitação, estender e restringir, invariância e mudança, em potência na tarefa

Polígono ABCDE, que poderiam ter sido aproveitados nas estratégias pedagógicas do mediador, favorecendo o uso de poderes matemáticos dos estudantes e permitindo encontrar uma solução ou soluções para a tarefa. Todavia, entendemos que a tarefa era ambiciosa no sentido de trazer muitos objetos matemáticos e muitas perguntas para serem trabalhadas em uma única sessão. Dessa forma, necessitando de mais uma sessão, ou então de uma reestruturação do enunciado da situação-problema, ao invés de considerar dois intervalos, trazer para os estudantes a investigação de apenas um.

Assim, concluímos que a ambição da tarefa repercutiu na motivação dos estudantes, afetando o uso de poderes e o trabalho em grupo no VMTcG. Dessa maneira, fazendo com que o mediador adotasse uma postura mais diretiva na condução da investigação da tarefa, afastando-o das estratégias pedagógicas fundadas na dinâmica de atividades de Modelagem Matemática e de interações em um AVA, e não permitindo concluir a tarefa Polígono ABCDE.

8.3 As estratégias, os poderes e os temas emergidos da tarefa Caminhando com Carol

A sessão 4 da tarefa Caminhando com Carol veio depois de uma sessão na qual os estudantes não conseguiram conectar-se com o contexto da tarefa Polígono ABCDE. Também o mediador não conseguiu amplificar estratégias pedagógicas para estimular o uso ou uma maior frequência de uso, dos poderes matemáticos dos estudantes, contribuindo para o não aparecimento nas interações do mediador e dos estudantes, de temas matemáticos. Esses desdobramentos da sessão anterior afetaram a condução do mediador, que conseqüentemente influenciou a abordagem dos estudantes repercutindo na não conclusão da tarefa.

Com esta experiência percebemos mudanças no mediador, na sua condução da investigação da tarefa Caminhando com Carol, afetando a abordagem dos estudantes e o uso de conteúdos matemáticos, como percebemos nas interações capturadas pelos diagramas de análise de interações dos episódios 1 e 2 do Capítulo 7.

Interações do mediador como estratégias pedagógicas

O mediador assumiu uma postura para evitar silêncios diante das dúvidas dos estudantes. Dessa forma, foi sondando-os sobre formas de abordagem, equilibrando para não focar mais em uma proposta do que em outra, e pela primeira vez reconhecendo o uso por parte dos estudantes de espaços de interações externos ao VMTcG. Na Figura 37 é possível perceber essa nova tônica na condução da sessão adotada pelo mediador.

episódio 1	episódio 2
perguntar sobre as primeiras impressões dos estudantes e formas de resolver, estar aberto a dúvidas que deixavam os estudantes no escuro, chamar atenção de espaços de interação no e fora do VMTcG, argumentar, chamar para trabalhar em grupo, convencer, querer saber da opinião e incluir outros estudantes sobre a tarefa ser trabalhada no GeoGebra, direcionar, querer saber das dificuldades de construção no GeoGebra, aberto ao que estava sendo feito fora do VMTcG, chamar a atenção para mais de uma resposta, perguntar, incentivar	entender o porquê de considerar determinadas características na construção, mostrar outros caminhos mesmo o grupo não seguindo, ignorar, postura ríspida, parabenizar, apoiar, pedir ajuda de outros estudantes, duvidar e provocar reflexões, apoiar entendimentos e hipóteses do grupo, requerer respostas e validação do grupo

Figura 37 – Interações do mediador na tarefa Caminhando com Carol
 Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

A estratégia *diga o que vê* foi usada pelo mediador para descobrir o que os estudantes estavam pensando, e analisar como eles estavam se sentindo em relação à tarefa Caminhando com Carol. Assim, o mediador perguntou *o que eles acharam da tarefa, como seria possível resolver*, pediu que o estudante Pedro falasse sobre *o que ele pensou e sobre o que o estava deixando no “escuro”*. Pedro, como aconteceu nas duas sessões anteriores, foi o primeiro a propor. Ao contrário do que fez antes, o mediador não esperou os estudantes decidirem ir para o GeoGebra, questionou em que espaço Pedro testaria sua conjectura, e ainda normalizou o uso do papel, protagonista da tarefa Polígono ABCDE.

Sem deixar a discussão centrada em Pedro, o mediador chamou a atenção dos outros estudantes conectados no VMTcG, Zeca e Paula sobre a proposta de Pedro e sobre a possibilidade de construção no GeoGebra. O mediador mostrou-se aberto para o uso de outros espaços, porém deixou claro seu posicionamento sobre a construção ser feita no GeoGebra, no sentido de que permitiria que o grupo avaliasse o que estava sendo feito, podendo observar algo que Pedro, por exemplo, não conseguiria sozinho rabiscando no papel. O mediador quis trazer o GeoGebra para ser o espaço principal de testar ideias, tirando-o do espaço secundário que os estudantes o colocaram de aplicar ideias testadas no papel.

Pedro convenceu-se e foi construir no GeoGebra, Zeca foi para o papel. Ambos tiveram essa liberdade de testar suas propostas. Nesse sentido observamos que o mediador fez uso da estratégia *de quantas maneiras?*, pois colocou seu ponto de vista, mas não invalidou outros caminhos externos ao GeoGebra, que poderiam ser percorridos na abordagem da situação-problema da tarefa.

Nesta postura ficou evidenciada nas interações em que o mediador: *chamou a atenção para espaços de interação do VMTcG e fora dele, argumentou, convenceu parte dos estudantes sobre seu ponto de vista em favor do trabalho em grupo, incluiu outros estudantes, instigando opiniões sobre a proposta de Pedro, direcionou, quis saber ao certo o que estava acontecendo fora do VMTcG*. O uso dessa estratégia perdurou nas interações do GeoGebra em questionamentos do mediador que emergiram das dificuldades de Pedro na construção da figura no GeoGebra, e das hipóteses de resolução apresentadas por Zeca, como observados nas interações do episódio 1: *querer saber das dificuldades de construção no GeoGebra, chamar a atenção para mais de uma resposta, perguntar, incentivar*.

Em determinado momento da sessão os estudantes Paula e Zeca resolveram seguir o que estavam fazendo, ignorando os direcionamentos do mediador. O mediador então esperou para ver aonde os estudantes chegariam. Mesmo de forma indireta e apostando mais na sua proposta, observamos aproximações das interações do mediador com a estratégia *andaimas e enfraquecimento*, considerando que os estudantes seguiram o que pensaram por conta própria, à revelia do que foi proposto pelo mediador. Interações do mediador que favoreceram essa autonomia dos estudantes estiveram presentes quando ele buscou *entender o porquê de considerar determinadas características na construção* e não os privou de testar suas conjecturas, mesmo não sendo o que ele tinha em mente. Mas nem todas as interações do mediador foram nessa intenção, o medo de um impasse e de acontecer com a tarefa Caminhando com Carol o mesmo que aconteceu com a tarefa Polígono ABCDE, fez o mediador reagir a essa autonomia dos estudantes em alguns momentos, de forma não tão amistosa, assumindo uma postura um pouco ríspida.

O mediador ao favorecer essa autonomia, mesmo não sendo o que melhor o satisfizesse, permitiu que os alunos construíssem uma figura própria, não sendo apenas uma réplica da figura que foi apresentada no quadro branco, mas uma construção dinâmica, permitindo e satisfazendo o que a princípio queria/propunha o mediador, do olhar sobre como multiplicar possibilidades de soluções. Ao perceber isso o mediador *parabenizou, incentivou, apoiou, pediu contribuições de outros estudantes* para aperfeiçoar a construção realizada.

Enfim, a estratégia *exemplos construídos pelos alunos* foi usada na medida em que as interações do mediador, nessa sessão e em sessões anteriores, possibilitaram aos estudantes fazerem sentido global acerca de aspectos da tarefa. Assim não os restringindo a reproduzir e considerar apenas o que estava traçado na figura estática, apresentada no quadro branco.

A contrariedade do mediador referente à construção de Paula esteve mais relacionada à estratégia de *desviar a atenção para automatizar*, assim em seu entendimento a construção não

era mais importante do que começar a pensar em como determinar o caminho mais rápido a ser percorrido por Carol, por isso interações do mediador no sentido de: *mostrar outros caminhos, mesmo o grupo não seguindo*. No entanto, o mediador não tinha entendido a construção da estudante, pois pensavam em algo estático, enquanto que ela o surpreendeu com uma construção que fazia o que queria, que era mostrar todas as possibilidades de percurso possíveis, permitindo inferir qual percurso mais rápido a ser percorrido por Carol.

A proposta da tarefa Caminhando com Carol é uma tarefa que não prima por exercitar uma técnica em específico, ou seja, o mediador no planejamento pensou em quais conteúdos poderiam ser trabalhados com a tarefa, mas em momento algum da condução da sessão alguma técnica foi privilegiada em relação à outra. Dessa forma temos a estratégia referente ao *ensino de técnicas*, já que os estudantes foram conduzidos pelas interações do mediador de *duvidar e provocar reflexões, apoiar entendimentos e hipóteses do grupo, requerer respostas e validação do grupo*; ajudando-os dessa forma por meio dessas discussões e reflexões na construção de métodos viáveis e eficientes, para abordar e solucionar a situação-problema. Nesse prisma, primeiro os estudantes reconheceram o contexto da tarefa, para depois aplicarem técnicas de construção no GeoGebra e técnicas de conteúdos matemáticos.

Interações dos estudantes como poderes matemáticos

A nova tônica adotada pelo mediador na condução da investigação da tarefa Caminhando com Carol refletiu nas interações dos estudantes, retomando o uso em grupo de espaços no VMTcG, e possibilitando o uso ou o aumento da frequência de utilização dos poderes matemáticos dos estudantes. Veja na Figura 38 as interações dos estudantes capturadas nos diagramas de análise de interações dos episódios 1 e 2 do Capítulo 7.

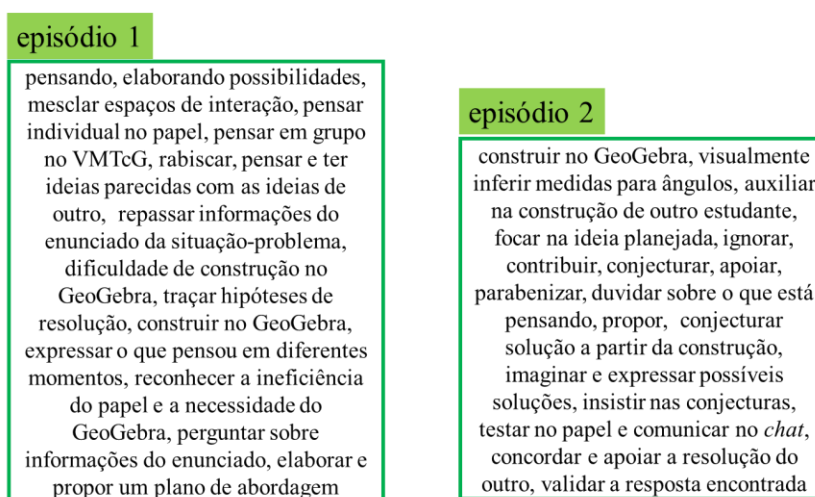


Figura 38 – Interações dos estudantes na tarefa Caminhando com Carol
 Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

Pedro e Zeca foram os primeiros a expressar suas ideias para a abordagem da tarefa. Respondendo às investidas do mediador, Pedro propôs encontrar as medidas dos lados da figura, primeiro queria fazer no papel sem aplicar no GeoGebra, convencido pelo mediador optou por usar primeiro o GeoGebra. Paula, depois também disse estar pensando em algo parecido com o que apresentou Pedro. Zeca, por outro lado, foi “falando em voz alta” no chat informações do enunciado da situação-problema e decidiu testar suas ideias no papel, em seu local de acesso.

Nesse contexto inicial temos os poderes *imaginar e expressar o que é imaginado* nas interações: *pensando, elaborando possibilidades, mesclar espaços de interação, pensar individual no papel, pensar em grupo no VMTcG, rabiscar, pensar e ter ideias parecidas com as de outro, repassar informações do enunciado da situação-problema.*

Pedro trouxe como propôs encontrar as medidas dos lados da figura que descrevia, possíveis percursos para Carol, e Zeca, após seus rabiscos inferiu a hipótese de que Carol precisa chegar o mais rápido até o descampado quadrangular. Mas ambos concordaram em identificar as medidas e usando o GeoGebra, e quem assumiu a função de construir a figura foi a estudante Paula, que ajudou Pedro que estava com dificuldades. Paula construiu, apoiada por Zeca uma estrutura que sintetizava todas as possibilidades de percurso do enunciado, em que era possível verificar a variação das medidas dos lados conforme se movimentava um dos percursos dentro da área quadrangular, convencendo todos com isso, inclusive o mediador, da importância daquela construção para análise de possibilidades de resolução da tarefa.

Assim, Paula ao conjecturar possibilidades e efetivar o que estava pensado, convenceu a si e aos outros da necessidade da construção dos percursos para a investigação da situação-problema. Os momentos antes da decisão coletiva de construir a figura no GeoGebra até a estudante Paula terminar sua construção e convencer a todos, demandaram discussões na investigação, promovendo reflexões, posicionamentos, que refletiram no uso dos poderes de *conjecturar e convencer a si e aos outros*, em vários momentos e vindo de diferentes estudantes. Como na ideia de abordagem de Pedro, na hipótese oriunda dos rabiscos de Zeca e na construção dos percursos no GeoGebra de Paula. Onde puderam ser capturadas nas interações: *dificuldade de construção no GeoGebra, traçar hipóteses de resolução, construir no GeoGebra, expressar o que pensou em diferentes momentos, reconhecer a ineficiência do papel e a necessidade do GeoGebra, perguntar sobre informações do enunciado, elaborar e propor um plano de abordagem, construir no GeoGebra, visualmente inferir medidas para ângulos, auxiliar na construção de outro estudante, focar na ideia planejada, ignorar, contribuir, conjecturar, apoiar, parabenizar.*

Entendemos a construção de Paula no GeoGebra como a generalização da situação-problema proposta pela tarefa. Sendo essa generalização usada como pano de fundo para inferir respostas para determinar o caminho mais curto de Carol. O grupo ter conseguido chegar nesse nível de sofisticação mostra o uso dos poderes *particularizar/especializar*, nos quais as informações do enunciado, juntamente com a figura estática que o acompanhava foram absorvidos e entendidos. Isto, para que pudesse resultar em uma *generalização*, que conseguiu capturar a essência da estrutura, constituindo as possibilidades de percursos de Carol sair de um vilarejo para outro em menor tempo.

Neste cenário a estudante Paula conseguiu visualizar o que poderia variar da figura e, partindo dessa interpretação, conseguiu chegar em estrutura dinâmica, que mesmo com erros de construção, não abalou sua importância nos rumos da investigação.

A construção efetivada pela estudante Paula permitiu ao grupo identificar as medidas dos lados do percurso, que era a proposta de Pedro, e avaliar a hipótese de Zeca de que quanto mais rápido Carol chegasse ao descampado quadrangular, mais rápido seria o percurso. A construção virou pano de fundo para as discussões e para encontrar soluções, e mais uma vez os estudantes Paula, com a hipótese do encontro do percurso com o descampado quadrangular formar ângulos de retos, e Zeca, com a proposta de usar regra de três para calcular e encontrar o percurso com menor tempo a ser percorrido por Carol, puderam utilizar os poderes a seguir relacionados. *Conjecturar e convencer a si e aos outros*, como percebemos nas interações: *duvidar sobre o que está pensando, propor, conjecturar solução a partir da construção, imaginar e expressar possíveis soluções, insistir nas conjecturas, testar no papel e comunicar no chat, concordar e apoiar a resolução do outro, validar a resposta encontrada*.

Outros poderes que surgiram em diferentes momentos e foram usados pelos estudantes de *organização e classificação*. Em vários momentos, para o avanço ou abandono de uma ideia os estudantes enfatizaram características da construção. Por exemplo, Paula visual e posteriormente manipulando a construção da figura no GeoGebra, inferiu que os ângulos formados pelo encontro e saída da área quadrangular formavam ângulos retos, como seccionava os lados daquela região. Por outro lado, Daniel analisando e enfatizando esses ângulos retos considerou usar o Teorema de Pitágoras, abandonando essa ideia logo em seguida, porque as ferramentas do GeoGebra identificavam os lados dos triângulos retângulos formados pelos percursos da figura. Assim, a cada ato de *ordenação* dos estudantes, eles precisaram enfatizar características relevantes (ângulos retos) e ignorar outras (outras formações em que não se encontrava ângulos retos). O que exigiu deles a capacidade de discriminar qualidades (propriedades, teoremas, generalidades), usadas para *classificar*.

Interações dos tópicos de Geometria Plana como temas matemáticos

Os conteúdos matemáticos pensados pelo mediador para serem discutidos com a tarefa Caminhando com Carol foram ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre ponto, velocidade. As estratégias pedagógicas de condução da sessão do mediador e o uso de poderes matemáticos dos estudantes repercutiu no aparecimento de temas matemáticos relacionados à tarefa e aos conteúdos matemáticos mencionados. Como podemos observar nas interações dos episódios 1 e 2 do Capítulo 7, apresentadas na Figura 39.

episódio 1	episódio 2
encontrar medidas dos lados da figura, usar o papel, aplicar no GeoGebra, condições da figura ser construída no GeoGebra, aplicar o desenho no GeoGebra, distância entre vilarejos e pontos dos caminhos na figura, velocidades diferentes no quadrado e fora dele, menor distância é uma linha reta, tempo mais curto, fórmula da velocidade para encontrar o tempo	construção da figura no GeoGebra, determinar as medidas do percurso, inferir medidas de ângulos da figura visualmente, mediatriz, posição do quadrado errada na construção do GeoGebra, fórmula da velocidade, possibilidades de abordagem, determinar o tempo a partir da razão do deslocamento e da velocidade média, ângulo reto, relações métricas de um triângulo retângulo, regra de três, problema interessante, muitas reflexões, mais fácil que o da sessão anterior

Figura 39 – Interações dos conteúdos matemáticos na tarefa Caminhando com Carol
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

O objeto matemático apresentado na tarefa Caminhando com Carol foi a estrutura que mostrava dois percursos, estando limitada inicialmente a esses dois percursos. Transpor essa forma geométrica para o GeoGebra acrescentou uma liberdade de observar possibilidades de percursos, que permitiram aos estudantes observar ângulos, medidas, que antes não era possível, com a figura estática postada no quadro branco. Nesses casos temos os temas matemáticos *liberdade e limitação* reconhecidos nas interações: *construção da figura no GeoGebra, determinar as medidas do percurso, inferir medidas de ângulos da figura visualmente, mediatriz, posição do quadrado errada na construção do GeoGebra.*

Outros temas matemáticos que percebemos na construção da figura no GeoGebra referem-se ao *fazer e desfazer* da figura original, solicitando da estudante criatividade de aproveitar elementos e conceitos matemáticos, que ajudaram a tornar a construção dinâmica e possibilitar observar diferentes percursos. Assim, trazer conceitos como traçar uma mediatriz no segmento de reta, que liga o vilarejo a Jacaré até Conceição, sem passar pelo descampado quadrangular, e ainda deixando o segmento paralelo, que passa pelo descampado quadrangular podendo ser movimentado, necessitou de Paula mais discernimento e engenhosidade, permitiu que o grupo percebesse nesse caso particular uma estrutura comum subjacente (generalização).

Outros temas matemáticos acessados pela movimentação do segmento paralelo, que passa pelo descampado quadrangular são *invariância e mudança*. Em que foi possível observar as medidas dos percursos, variando e fortalecendo a hipótese de que os pontos dos segmentos

que tocavam a área quadrangular e que formavam ângulos de 90 graus produziam medidas de segmentos mais curtos de entrada e saída do descampado quadrangular.

Este dinamismo e essas observações permitiram ao grupo traçar abordagens que encaminharam para a conclusão da tarefa. Assim percebidas nas interações: *fórmula da velocidade, possibilidades de abordagem, determinar o tempo a partir da razão do deslocamento e da velocidade média, ângulo reto, relações métricas de um triângulo retângulo, regra de três, problema interessante, muitas reflexões, mais fácil que o da sessão anterior.*

Que/Como poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento síncrono da tarefa Caminhando com Carol no ambiente online VMTcG?

No desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol, os estudantes orientados pelo mediador investigaram o percurso mais curto a ser percorrido por Carol, de Jacareí até Conceição. Nesse contexto emergiram interações do mediador como estratégias pedagógicas, interações dos estudantes como poderes matemáticos, e expressões nas interações do mediador e dos estudantes emergiram interações da tarefa e dos conteúdos matemáticos, como temas matemáticos, conforme apresentado na Figura 40.

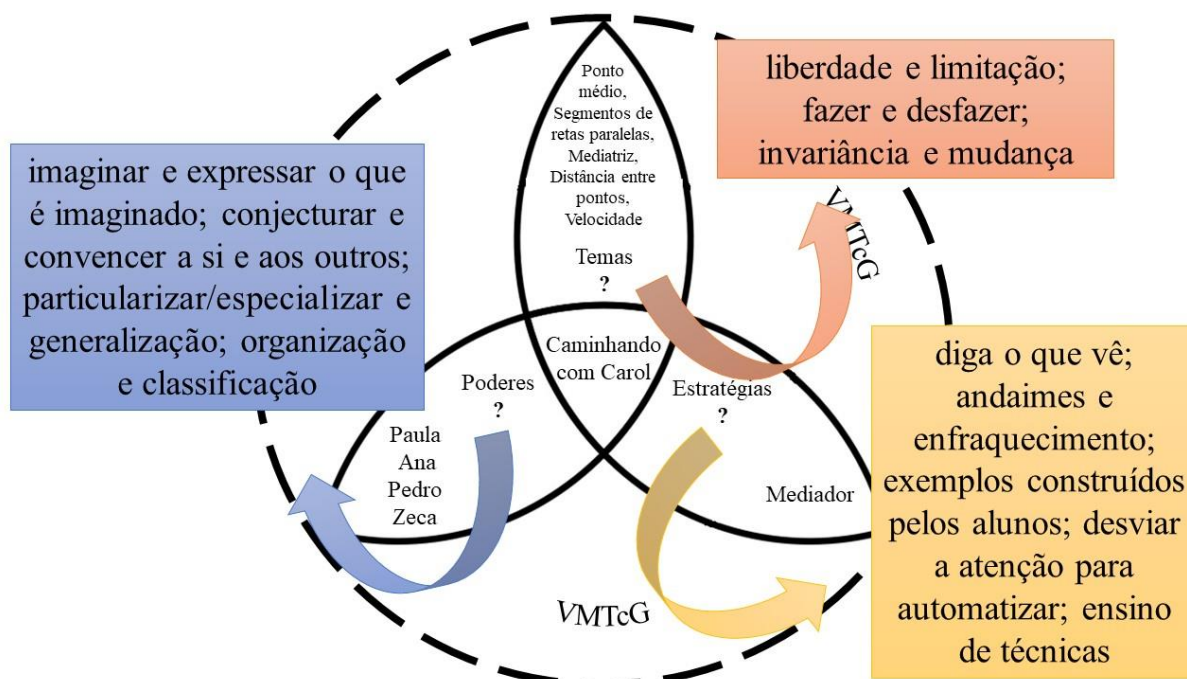


Figura 40 – Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Caminhando com Carol no VMTcG
Fonte: Elaboração do autor da tese (2021)

A tarefa de Modelagem Matemática Caminhando com Carol iniciou com uma situação-problema, que permitia investigar e comparar dois percursos, para descobrir qual deles Carol

podia realizar em menor tempo. A construção dos percursos de forma dinâmica no GeoGebra permitiu encontrar um modelo matemático, proporcionando ao grupo avaliar qual o percurso mais rápido. Nesse contexto pontuamos aspectos da tarefa e da condução do mediador como:

- não foram indicados os conteúdos matemáticos a serem utilizados na investigação;
- não foi indicado como os estudantes deveriam conduzir a investigação da situação-problema;
- houve mais de uma possibilidade de resolução, sendo todas analisadas, negociadas, aceitas ou descartadas pelo grupo;
- com a construção da figura no GeoGebra e a possibilidade de movimentação dos segmentos, foi possível avaliar muitas possibilidades de percurso, sendo escolhido uma única solução;
- a forma de condução da investigação pelo mediador oscilou entre um controle maior nas interações comunicativas na investigação e uma maior liberdade, para que os estudantes pudessem avaliar e tomar decisões próprias, dessa forma a condução do mediador em certos momentos limitou e em outros possibilitou a comunicação entre ele e os estudantes.

Os aspectos identificados na tarefa e na condução do mediador caracterizam uma tarefa de Modelagem Matemática semifechada, em que os estudantes investigaram uma situação-problema fictícia e conseguiram construir uma estrutura, o modelo matemático, que permitiu ao grupo avaliar qual a solução apropriada para responder a problemática da tarefa Caminhando com Carol.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção encaminhamos o texto para os momentos finais, retomando os três objetivos para que ao final possamos responder à questão de investigação, que adotamos como norteadora deste trabalho. O primeiro objetivo tratou de *compreender, no plano teórico (temas, poderes, estratégias), interações que emergem do desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática de forma online e síncrona no VMTcG*. O segundo objetivo tratou de *explicar como interações entre os conteúdos matemáticos, mediador e estudantes apareceram no desenvolvimento online e síncrono de tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG*.

Para explicar sobre esses objetivos retomamos características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática, consideradas para a elaboração e desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática de forma síncrona, no ambiente *online* VMTcG: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

O início das sessões foi marcado com os estudantes conhecendo as tarefas, duas situações-problema fictícias, referenciadas na realidade (Estação de Bombeamento e Caminhando com Carol) e uma referenciada na Matemática (Polígono ABCDE). O primeiro impacto dos estudantes com as tarefas sempre abria caminho para o mediador usar a estratégia *diga o que vê* e em resposta os estudantes usarem os poderes de *expressar o que eles tinham imaginado*. Esses poderes e essa estratégia aconteciam mais nos momentos iniciais das sessões, no entanto perguntar aos estudantes o que eles tinham em mente era constante nas interações do mediador, durante o desenvolvimento das tarefas.

A generalização de informações da situação-problema investigada acontecia quando os estudantes levavam as informações dos enunciados para construir objetos e formas no GeoGebra. Na tarefa Estação de Bombeamento e na tarefa Caminhando com Carol, elementos do contexto dos enunciados foram lidos no GeoGebra como objetos da Geometria Plana, gerando ao final construções, que dentro do desenvolvimento das tarefas repercutiram como modelos matemáticos, possibilitando repostas para solucionar as situações-problema das tarefas. Assim, vemos os usos dos poderes *particularizar/especializar* em momentos que os estudantes estavam buscando entender e se apropriar dos contextos das situações-problema e conseguiram por meio das construções de objetos matemáticos – circuncentro e baricentro na

tarefa Estação de Bombeamento e os percursos na tarefa Caminhando com Carol – abstrair compreensões que os levaram a solucionar as situações-problema.

Os poderes de *organizar e classificar* também são percebidos nas construções do GeoGebra, já que os estudantes ao organizarem as informações dos enunciados das tarefas Estação de Bombeamento e Caminhando com Carol, enfatizaram características que consideraram importantes para investigação e passaram a ignorar outras. Permitindo que eles discriminassem propriedades usadas para classificar.

O modelo matemático resultante desse processo, diferente do que comumente vemos como produto de atividades de Modelagem Matemática, foram os objetos matemáticos e as formas construídas no GeoGebra, pois representaram a situação investigada. Isto, na medida em que reconhecemos as construções dos pontos notáveis, circuncentro e baricentro, e dos percursos com segmentos móveis, como sendo capturas dos estudantes das estruturas essenciais da situação-problema, envolvendo o local da construção de uma estação de bombeamento e o percurso a ser realizado em menor tempo por Carol, dessa forma revelando o poder dos estudantes de *generalizar*.

A construção dos modelos matemáticos permitiu o uso de outros poderes pelos estudantes, como as compreensões que a manipulação dos modelos construídos no GeoGebra fez emergir conjecturas, e com isso a defesa dos estudantes de convencer uns aos outros sobre possíveis soluções para a conclusão da tarefa, usando os poderes matemáticos *convencer a si e aos outros*.

Na tarefa Polígono ABCDE, contextualizada com elementos da própria Matemática, os estudantes mostraram em momentos das discussões, entender a dinâmica da situação-problema. No entanto, as dúvidas que acompanhavam esses momentos de clarezas acabavam minando a possibilidade de avançar, ou seja, os estudantes não conseguiram migrar desses momentos de *particularização/especialização* sobre a tarefa para uma compreensão geral dela, não resultando em uma *generalização*. Assim, o grupo não conseguiu sistematizar um modelo matemático, que explicasse ou permitisse que os estudantes tirassem conclusões, que conduzissem à investigação da tarefa.

É pertinente ressaltar, que na relação estabelecida entre estudantes e mediador nesses momentos do desenvolvimento das tarefas, evidenciou-se uma parceria assumida entre eles, em que os poderes usados pelos estudantes eram amplificados ou contraídos pelas estratégias usadas pelo mediador.

Na tarefa Estação de Bombeamento o mediador identificou as medidas na construção dos pontos notáveis no GeoGebra, com o objetivo de os estudantes perceberem e compararem

a variação das medidas da construção do circuncentro e do baricentro. Neste momento, saber usar as ferramentas do GeoGebra não era mais importante do que as interpretações decorrentes dessa identificação. Assim entendemos o uso da estratégia *desviar a atenção para automatizar*, ou seja, *automatizar* o uso de ferramentas na identificação das medidas, para *desviar a atenção* para características que o mediador acreditou serem mais importantes. A forma como essa mediação se deu, via discussões e reflexões, levou os estudantes a construir métodos que eles consideraram eficientes para abordar o contexto da situação-problema. Dessa maneira, fazendo-os emergir consciências imediatas, focados nos contextos e não em técnicas, configurando a partir dessa mediação, juntamente com características intrínsecas da tarefa, o uso da estratégia *o ensino de técnicas*.

Por outro lado, na tarefa Polígono ABCDE o mediador não conseguiu avançar muito nas discussões e por isso foi necessário que ele fosse mais incisivo na mediação, no sentido de não deixar o foco e os direcionamentos na responsabilidade dos estudantes. É interessante perceber como na tarefa da Estação de Bombeamento os estudantes conseguiram uma autonomia que não se manteve nessa.

Neste contexto de mais dúvidas do que certezas, o mediador não conseguiu fazer com que os estudantes trabalhassem em grupo. A estratégia *diga o que vê* algumas vezes foi interpretada como crítica por alguns estudantes. Mesmo nos momentos finais da sessão, em que o mediador assumindo posturas muito diretivas e usando a estratégia *mesmo e diferente*, ao movimentar a reta vertical e mostrar a variação do comprimento x , os estudantes já estavam desgastados, não sendo produzido muito mais do que fazer com que eles expressassem suas dúvidas.

Ao considerar/comparar as experiências nas sessões anteriores o mediador conseguiu ponderar na mediação da tarefa Caminhando com Carol, entre ter um certo controle e direcionamento, principalmente no início da sessão e, em alguns momentos, deixou os estudantes livres para fazerem e efetivarem suas escolhas mostrando assim, o uso das estratégias *andaimes e enfraquecimento*.

Os direcionamentos dados pelo mediador para a construção dos percursos no GeoGebra, no qual ele usou a estratégia *exemplos construídos pelos alunos*, permitiu aos estudantes perceberem o geral no específico, conseguindo partir de características do enunciado da situação-problema para uma construção, que permitia observar todas as possibilidades de percurso, que passava pelo descampado quadrangular. Favorecendo, ainda que o mediador e a tarefa permitissem o uso da estratégia *o ensino de técnica*, em que os estudantes foram conduzidos com discussões e reflexões, a construir métodos viáveis e eficientes. Desta forma

não restringindo ao aprendizado isolado de técnicas específicas e privilegiando o contexto da tarefa. A partir desse contexto os estudantes trouxeram à tona consciências imediatas sobre objetos matemáticos, que ajudaram nos encaminhamentos da investigação.

Na tarefa Caminhando com Carol, porém, nem todas as estratégias usadas pelo mediador tiveram seus propósitos alcançados, como na situação em que o mediador tentou *desviar a atenção* da construção dos percursos no GeoGebra, para que os estudantes pensassem em possibilidades de resolução. Assim, considerando o foco que houve na construção do Polígono ABCDE, o mediador tentou *automatizar* a construção dos percursos da tarefa Caminhando com Carol no GeoGebra, para que o grupo focasse nas discussões. O que fez o mediador modificar sua postura foi perceber a movimentação dos segmentos na construção da estudante Paula, e que com esse dinamismo era possível discutir todas as possibilidades de percursos.

Os temas matemáticos puderam ser percebidos expressos nos poderes matemáticos dos estudantes e nas estratégias pedagógicas do mediador, a partir de características dos enunciados das situações-problema das tarefas, e dos conteúdos matemáticos usados na investigação. Os temas *liberdade e limitação* foram percebidos nas construções das tarefas Estação de Bombeamento e Caminhando com Carol, realizadas pelos estudantes.

Na primeira tarefa, os estudantes tiveram *limitações* de trabalhar com a imagem do mapa e as marcações das três cidades. A partir do momento que os estudantes transportaram características do mapa para o GeoGebra tiveram a *liberdade* de manipular e construir os pontos notáveis circuncentro e baricentro.

Na segunda tarefa, os estudantes também tiveram a oportunidade de transferir uma figura estática, que indicava dois percursos, para o GeoGebra, que possibilitou a *liberdade* de manipular o segmento que passava pelo descampado quadrangular, o que deu ao grupo subsídios para analisar todas as possibilidades de percursos possíveis de serem percorridos em menor tempo.

Os temas *fazendo e desfazendo* também estiveram presentes nas construções do GeoGebra. Na tarefa Estação de Bombeamento Ana construiu o baricentro e posteriormente Paula, em cima da construção de Ana, desfez o baricentro e construiu o circuncentro. As movimentações que as estudantes fizeram com esses pontos notáveis, permitiu ao mediador fazer questionamentos sobre o circuncentro e o baricentro ficarem dentro da região triangular ou fora. Se aquilo era uma regra ou era característica da situação-problema da tarefa. Nessas discussões e movimentações foi percebido também o uso dos poderes *estender e restringir*, na medida em que a partir da construção do ponto notável baricentro, os estudantes discutiram

suas propriedades e em seguida, partindo para a discussão de outro ponto notável, o circuncentro, e as discussões de suas propriedades.

Já na tarefa Polígono ABCDE observamos o uso dos temas *estender e restringir* nas estratégias do mediador. Primeiro o mediador, chamando a atenção para os polígonos formados à esquerda da reta vertical, limitados entre dois intervalos de $0 < x \leq 3$ e $3 < x \leq 5$, e posteriormente vendo a sessão não avançando, restringiu os intervalos, focando e chamando a atenção dos estudantes para o polígono à esquerda da reta vertical, compreendido no intervalo $0 < x \leq 3$.

Na tarefa Caminhando com Carol a estudante Paula fez os percursos no GeoGebra, e as características de sua construção permitiam *desfazer* a posição do segmento interno à região quadrangular. Dessa maneira oportunizando ao grupo discutir sobre o percurso e o toque dos segmentos de entrada e saída da região quadrangular, formando ângulos retos.

Assim, quando os estudantes movimentavam o segmento interno à região quadrangular, os segmentos de entrada e saída alteravam suas medidas. Quando essas medidas estavam indicando 5, os ângulos formados entre os segmentos de entrada e saída com a região quadrangular aproximavam-se de 90 graus. Permitindo, deste modo, que os alunos concluíssem essa posição como sendo a que indicava o menor tempo a ser percorrido por aquele percurso, e essas interações com a construção revelam o aparecimento de outros temas a *invariância e mudança*.

Acreditamos que nossas discussões acerca das interações do mediador como estratégias pedagógicas, das interações dos estudantes como poderes matemáticos, e das interações dos conteúdos matemáticos como temas matemáticos, mostraram que compreendemos e explicamos como as interações emergiram no desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática, no ambiente *online* VMTcG.

Assim, passamos para a discussão do terceiro e último objetivo elencado, que tratou de *caracterizar o papel do design de EO como uma prática online e síncrona de Modelagem Matemática, que prima por fomentar interações entre os conteúdos matemáticos, o mediador e os estudantes*.

Para discutir sobre esse objetivo retomamos o conceito de *design*, que neste trabalho foi entendido como um sistema amplo, vivo e articulado, um ecossistema de ensino e de aprendizagem. Considerando esse ecossistema como um grupo formado por estudantes e o mediador, que interagiram entre si e com o ambiente *online* VMTcG. Para esse ecossistema foram planejadas tarefas de Modelagem Matemática, das quais analisamos três neste texto: Estação de Bombeamento, Polígono ABCDE e Caminhando com Carol. Tarefas de Modelagem

Matemática pensadas como uma atividade formativa, na qual uma tarefa é apresentada como proposto/convite de investigação de uma situação-problema, com potencial de deflagrar interações e trabalho colaborativo. Assim, sob essas lentes discutimos características dessas tarefas incorporadas ao ecossistema de ensino e aprendizagem.

A tarefa Estação de Bombeamento apresentou uma situação-problema aberta, no sentido de admitir mais de uma solução, referenciada na realidade dos estudantes, não indicando conteúdos matemáticos e nem formas de abordagens, estratégias, resoluções, soluções. O quadro branco serviu como apoio para postagem da tarefa, o *chat* colaborou nas discussões, reflexões, negociações juntamente com o GeoGebra, no qual as construções em seu espaço permitiram que os estudantes embasassem suas conjecturas.

A condução do mediador permitiu autonomia dos alunos na tomada de decisões e nos direcionamentos para a construção dos modelos matemáticos e das respostas derivadas deles. Configurando, dessa maneira, uma condução mais fraca do mediador, não centrando a comunicação dialógica nele e sim nos estudantes, e favorecendo o trabalho colaborativo. Neste cenário, observamos que os estudantes aceitaram o convite de investigação da situação-problema deflagrando poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos.

A tarefa/atividade Polígono ABCDE apresentou uma situação-problema fechada, admitindo uma única solução, com referência na própria Matemática, indicando conteúdos matemáticos, o que influenciou as intervenções do mediador, que encaminhou os estudantes para a resolução que ele conhecia. Os estudantes ficaram bastante tempo discutindo estratégias e dúvidas no *chat* e observando a figura no GeoGebra. Ficando desgastados quando o mediador começou a direcioná-los na forma de resolver a questão, a partir da construção do GeoGebra. Configurando assim, uma condução forte do mediador, não permitindo uma comunicação dialógica entre os estudantes, que passaram a usar espaços para testar suas conjecturas fora do VMTcG, de forma individual, minando o trabalho colaborativo e a conclusão da tarefa.

Neste contexto, os poderes matemáticos não foram amplificados pela complexidade da tarefa, que não permitiu que os estudantes se conectassem com ela, e pela forma como o mediador conduziu a sessão, com estratégias pedagógicas que não surtiram efeito nas interações dos estudantes. Diante dos poucos poderes matemáticos e das estratégias pedagógicas do mediador, não foi possível observar temas matemáticos que poderiam ter ajudado o mediador na condução da sessão.

A tarefa Caminhando com Carol apresentou uma situação-problema semifechada. Admitia uma única solução, referenciada na realidade dos estudantes, não indicando conteúdos matemáticos a serem utilizados. Inicialmente os dois percursos apresentados permitiam

descobrir qual poderia ser percorrido em menor tempo, no entanto isso mudou a construção dinâmica realizada no GeoGebra, o que mudou o tom da investigação e das intervenções do mediador, que teve uma mediação configurando uma condução, variando entre momentos mais fortes e mais fracos. Deste modo, possibilitando uma comunicação dialógica entre os estudantes nas reflexões, conjecturas, negociações, validações e o trabalho colaborativo.

Dessa forma, os estudantes puderam exercer seus poderes matemáticos aceitando e investigando a situação-problema da tarefa, e a partir das estratégias pedagógicas adotadas pelo mediador, de não deixar os estudantes tão livres como na tarefa Estação de Bombeamento e nem tão soltos como na do Polígono ABCDE, encontrando um meio termo na condução da sessão.

No desenvolvimento das três tarefas no VMTcG, características da tarefa de Modelagem Matemática e a condução adotada pelo mediador repercutiram no uso de poderes matemáticos pelos estudantes e no aparecimento e uso de temas matemáticos, ambos podendo ser ampliados ou contraídos pelos espaços de interações do VMTcG.

Com esses três objetivos conseguimos sintetizar uma tese para responder a questão de investigação: *Que/Como interações apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática em um ambiente virtual de aprendizagem online?*

Tarefas de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma síncrona em um ambiente online constituem uma atividade formativa profícua para a manifestação de estratégias pedagógicas, poderes matemáticos e temas matemáticos. No entanto, a manifestação dessas interações está condicionada a características da situação-problema proposta na tarefa, as possibilidades e ferramentas dos espaços de interação do ambiente online, e a condução adotada pelo mediador. Assim, os três condicionantes repercutirão nas estratégias pedagógicas adotadas pelo mediador, no uso de poderes matemáticos pelos estudantes, e no uso e desenvolvimento de temas matemáticos intrínsecos à situação-problema investigada e aos conteúdos matemáticos adotados.

A pesquisa que embasou esta tese foi desenvolvida durante o ano de 2018, antes do período pandêmico que estamos vivenciando desde 2020. Este trabalho apresenta contribuições no sentido de permitir discutir uma proposta de Modelagem Matemática articulada em uma prática de Educação *Online* que potencializou processos de ensino e de aprendizagem colaborativo e crítico, mostrando-se como mais uma opção a ser considerada quando professores de matemática e alunos são privados de interagir presencialmente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 2ed. Belo Horizonte – MG: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências sociais. In: ALVESMAZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Thomson, 2 ed, 1999.

BADGER M. S., SANGWIN C. J., HAWKES T. O., BURN R. P., MASON J., POPE S. **Teaching Problem-solving in Undergraduate Mathematics**. Coventry, England: Coventry University, 2012.

BAIRRAL, M. A. Algumas postagens para sair provisoriamente do ambiente, mas para potencializar a educação *online*. In: BAIRRAL, M. A. (Org.). **Ambiências e redes online: interações para ensino, pesquisa e formação docente**. 1ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 197-207.

BAIRRAL, M. A. **Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distância**. 2ed. Seropédica/RJ: Edur, 2018.

BAIRRAL, M. A. Pesquisas em educação matemática com tecnologias digitais: algumas faces da interação. **Perspectivas da Educação Matemática**. N. 18, v. 8, 2015. p. 485-505.

BARBOSA, J. C. A dinâmica das discussões dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Recife: SBEM, 2006. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a Modelagem Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e a perspectiva sócio-crítica. In: Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática, 2., 2003, Santos. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2003. CD-ROM.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores**. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP. Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Temas e modelos**. Campinas, SP: UFABC, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, São Paulo, 2000.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. v. 39.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Modelagem matemática no ambiente virtual de ensino e aprendizagem: alguns encaminhamentos. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 10, 2017, Maringá/PR. **Anais...** Maringá/PR, 2017.

BRAGA, R. M. **Aprendizagem em modelagem matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da teoria da atividade de Engeström**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2015, 133 f.

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias**. 2009. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina/PR, **Anais...** Londrina/PR, 2004.

BURAK, D. **Modelagem matemática**: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. 1987. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

BUSTAMANTE, J. E. G. **Modelagem matemática na modalidade online**: análise segundo a teoria da atividade. 2016. 213f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP. Rio Claro, 2016.

CARMO, H. & FERREIRA, M. **Metodologia da investigação**: guia para autoaprendizagem. Lisboa: Universidade Aberta, 2008.

CHAVES, M. I. A.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J.; e BISOGNIN, E. (Org.) **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**, Londrina: EDUEL, 2011, p. 161-179.

CHAVES, M. I. A.; ESPIRITO SANTO, A. O. Modelagem Matemática: uma concepção e várias possibilidades. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Ano 21, n.30. Rio Claro: UNESP, 2008.

COSTA, P. O. **Educação on-line na Universidade**: o processo de ensinar e aprender cálculo na era das tecnologias digitais. 2010. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Uberlândia, 2010.

DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação** (45), 57-67. 2013.

DRESCH, A; LACERDA, D. P.; ANTUNES JUNIOR, J. A. V. **Design Science Research: método de pesquisa para avanço da ciência e tecnologia**. Porto Alegre: Bookman, 2015.

FERREIRA, C. R. **Modelagem matemática na Educação Matemática: contribuições e desafios à formação continuada de professores na modalidade Educação a distância Online**. 2010. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Ponta Grossa, 2010.

FERREIRA, C. R.; BURAK, D. Modelagem Matemática: uma experiência com a formação continuada de professores utilizando a educação a distância online. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador/BA, **Anais...** Salvador/BA, 2010.

FERREIRA, C. R.; BURAK, D. Considerações Iniciais sobre um Curso de Modelagem Matemática em Ambientes Virtuais. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 6, 2009, Londrina/PR. **Anais...** Londrina/PR, 2009.

FOSTER C., GALLIGAN L., MACKRELL K., MASON J., MELVILLE A., PIGGOTT J., RODD M., WATSON A. Freedom and Constraint. **Mathematics Teaching**, 191, June, 2005. p. 37-40.

FREITAS, J. de F. R. B.; OREY, D. C.; ROSA, M. Propondo a Modelagem Matemática como um Ambiente Virtual de Aprendizagem. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 10, 2017, Maringá/PR. **Anais...** Maringá/PR, 2017.

FREJD, P.; BERGSTEN, C. Professional modellers conceptions of the notion of mathematical modeling - Ideas for education. **ZDM Mathematics Education**, 2018.

GALLEGUILLOS, J. Proposta e resolução de um problema de modelagem na Educação Matemática online. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo/SP. **Anais...** São Paulo/SP, 2016.

GALLEGUILLOS, J.; BORBA, M. D. C. Expansive movements in the development of mathematical modeling: analysis from an activity theory perspective. **ZDM Mathematics Education**, 2018.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

JOHNSTON-WILDER, S.; MASON, J. **Developing Thinking In Geometry**. USA: SAGE, 2005.

MALHEIROS, A. P. dos S. Projetos de Modelagem em um curso de formação on-line. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4, 2009, Taguatinga/DF. **Anais...** Taguatinga/DF, 2009.

MALHEIROS, A. P. dos S. **Educação Matemática online: a elaboração de projetos de modelagem**. 2008. 186 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP. Rio Claro, 2008a.

MALHEIROS, A. P. dos S. Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem. **Bolema - Revista Boletim de Educação Matemática** (V. 21), 2008b.

MASON, J. Combining Geometrical Transformations: a meta-mathematical narrative. In: ZAZKIS R.; HERBST P (Eds). **Scripting approaches in mathematics education: Mathematical dialogues in research and practice**. Switzerland: Springer International, 2018. p. 21-52.

MASON, J. Making Use of Children’s Powers to Produce Algebraic Thinking. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.) **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum. New York, 2008. p57-94.

MASON, J. Hyper-learning from hyper-teaching: what might the future hold for learning mathematics from & with electronic screens? **Interactive Educational Multimedia** 14, 2007. p19-39. (refereed e-journal) 14 (April)

MASON, J. Frameworks for Learning, Teaching and Research: theory and practice. In **Frameworks that Support Research and Learning: proceedings of PME-NA**. Roanoke: Virginia, 2005. p. 9-29.

MASON, J. A Phenomenal Approach to Mathematics. Paper presented at Working Group 16, **ICME**, Copenhagen, 2004.

MASON, J. **Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing**. London, Routledge, 2002.

MASON, J. BURTON, L. & STACEY, K. **Thinking Mathematically**, Addison Wesley, London, 1982.

MASON, J., & JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. Milton Keynes, England: Open University Press, 2004.

MATUCHESKI, S. Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem. **Bolema - Revista Boletim de Educação Matemática** (V. 26), 2012.

MENEZES, R. O. Mapeamento em Dissertações e Teses de Atividades de Modelagem Matemática Desenvolvidas na Modalidade a Distância. In: 39 Reunião Nacional ANPEd, 2019, Niterói-RJ. **Anais da 39 Reunião Nacional ANPEd**, 2019a.

MENEZES, R. O. BNCC e Modelagem Matemática: relato de uma atividade desenvolvida com uma turma do 6º ano do ensino fundamental. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 11. **Anais...**Belo Horizonte-MG: 2019b.

MENEZES, R. O. Formação inicial do professor que ensina matemática: proposta de um modelo de ensino *online* e síncrono no ambiente VMTcG. In: BAIRRAL, M. A. (Org.). **Ambiências e redes online**: interações para ensino, pesquisa e formação docente. 1ed. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 137-152.

MENEZES, R. O.; BAIRRAL, M. A. Interações em um ambiente de aprendizagem *online* e síncrono: que tarefa propor com o GeoGebra?. **Revista Paradigma**, v. 41 (Nº Extra 2), 2020. p. 277-304.

MERCADO, L. P. Integração de mídias nos espaços de aprendizagem. **Em Aberto**, Vol.: 22, Nº 79. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Nacionais Anísio Teixeira (Inep). Brasília, Janeiro de 2009.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

OREY, D. C.; ROSA, M. Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 50, n. 1-2, p. 173-185, 2018.

PARRA-ZAPATA, M. M. et al. Participación de profesores en un ambiente de formación online. Un estudio en modelación matemática. **Educación Matemática**, v. 30, n. 1, p. 185–212, 1 abr. 2018.

PARRA-ZAPATA, M. M., Rendón-Mesa, P. A., Molina-Toro, J. F., Sánchez-Cardona, J., Ocampo-Arenas, M. C., Villa-Ochoa, J. A. Participación de profesores en un ambiente de formación online. Ejemplo de un diseño en modelación matemática. **Revista Virtual Universidad Católica del Norte**, 50, p. 3-20, 2017.

PEREIRA, R. S. G. **A educação a distância e a formação continuada de professores de matemática**: contribuições de um contexto formativo para a base de conhecimento docente (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/Presidente Prudente, 2015.

PRADO, A. S.; SILVA, L. A.; SANTANA, T. S. Uma Análise Bernsteiniana de Tarefas de Modelagem Matemática no Caso 1. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 7. **Anais...**Santa Maria: 2013.

RANDOLPH, J. J. A Guide to Writing the Dissertation Literature Review. **Practical Assessment Research Evaluation**. vol.14, 2009.

ROSA, M. **From reality to mathematical modeling: A proposal for using ethnomathematical knowledge**. College of Education. Sacramento, CA: California State University, Sacramento (CSUS), 2000.

SANTANA, T. Analisando aspectos da organização de um curso de Modelagem a distância: uma contribuição para o debate da pedagogia on-line na educação matemática. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 8, 2013, Santa Maria/RS. **Anais...** Santa Maria/RS, 2013.

SANTANA, T. **Avaliação discente de um curso de modelagem matemática à distância.** 2010. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências), Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2010.

SCHROETTER, S. M.; STAHL, N. S.; CHRYSOSTOMO, C. S.; DUNCAN, C. R. A escrita e o pensamento matemático no ambiente virtual utilizando a modelagem matemática: experiência de uma turma de 9ºano. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, p. 373-396, 2016.

SILVA, L. A; OLIVEIRA, A. M. P. As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro (SP), 2012.

SOUZA, R. M. de; BAIRRAL, M. A. Acessar ou Interagir? Uma Análise em Disciplinas da Licenciatura em Matemática no Cederj. **EAD em Foco**, v. 6, p. 39-49, 2016.

STAHL, N. S. P. **O ambiente e a Modelagem Matemática no ensino do cálculo numérico.** Campinas-SP. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2003.