UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ALAILSON SILVA DE LIRA

APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS ENTRE AS OBRAS *RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL* E *THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES* A PARTIR DA ANÁLISE DE CONTEÚDO

BELÉM-PA
2022

ALAILSON SILVA DE LIRA

APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS ENTRE AS OBRAS *RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL* E *THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES* A PARTIR DA ANÁLISE DE CONTEÚDO

Texto apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará para defesa de doutorado orientado pelo professor Doutor João Cláudio Brandemberg Quaresma.

BELÉM-PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L768a Lira, Alailson Silva de.

Aproximações e Distanciamentos entre as obras Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal e Théorie des Fonctions Analytiques a partir da Análise de Conteúdo / Alailson Silva de Lira. — 2022. 165 f.: il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2022.

1. História da Matemática. 2. Cálculo Infinitesimal. 3. Joseph - Lagrange. 4. Lazare Carnot. 5. Análise de Conteúdo. I. Título.

CDD 510.7

ALAILSON SILVA DE LIRA

APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS ENTRE AS OBRAS *RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL* E *THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES* A PARTIR DA ANÁLISE DE CONTEÚDO

Data: 31/03/2022

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
ICEN/PPGECM – IEMCI (UFPA)
Orientador

____
Prof. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Membro Interno – PPGECM – IEMCI (UFPA)

____
Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales
Membro Interno – PPGECM – IEMCI (UFPA)

____
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Membro Externo – DMEI – PPGEM (UEPA)

____
Prof. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias
Membro Externo – UNAMA/UEPA

____
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Membro Externo – DMEI – PPGEM (UEPA)

BELÉM-PA

2022

A Cristo Jesus, autor e consumador da minha fé.
Aos meus pais, Rui e Lenira.
À minha noiva, Telma Lobato.

AGRADECIMENTOS

A Deus, **Eterno** e **Soberano**, pela sua graça e misericórdia que me concede todos os dias, pois dEle, por Ele e para Ele são todas as coisas.

Ao **VERBO**, que se fez carne, habitou entre nós, e se entregou como **sacrifício** a fim de me dar a vida, para que assim reinasse a sua paz dentro de mim, e isso é o que me faz saber: **Esperar** nEle **é** sempre **Caminhar**.

À minha mãe, Lenira, e ao meu pai, Rui, pela paciência e apoio durante toda a minha vida.

À minha amada noiva Telma Lobato, que esteve comigo na caminhada de mestrado e, agora, de doutorado;

Ao meu orientador e amigo, João Cláudio Brandemberg, pela paciência, dedicação, conselhos, incentivos e pelos puxões de orelha necessários.

Ao amigo Miguel Chaquiam, por participar de toda a minha vida acadêmica, pessoal e por todas as contribuições feitas desde a graduação até aqui.

Ao amigo e pastor Natanael Cabral, pelas orações, conselhos e por participar da minha vida pessoal e acadêmica.

Aos membros do grupo de pesquisa GEHEM pelo acolhimento antes, durante e depois do mestrado e por todas as contribuições realizadas durante o doutorado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de incentivo para que este trabalho pudesse ser realizado.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho.

Que eu te conheça, ó conhecedor de mim, que eu te conheça, tal como sou conhecido por ti.
Confissões – Agostinho de Hipona

RESUMO

No período do século XVIII, diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal (CI). Entre os expoentes desse contexto, destacaram-se Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) e Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823). Assim, como questão de pesquisa, o presente trabalho suscitou o seguinte problema: que pontos de aproximação e distanciamento as obras *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (RMCI), de 1813, de Lazare Carnot, e *Théorie des Fonctions Analytiques* (TFA), de 1813, de Lagrange, apresentam no que concerne aos conceitos do Cálculo Infinitesimal? Para respondê-la, utilizamo-nos dos aportes metodológicos da análise de conteúdo, bem como percorremos as etapas estabelecidas em Bardin (2016), adaptadas para esta pesquisa. Logo, esta tese teve por objetivo comparar, com base na análise de conteúdo, as aproximações e os distanciamentos entre as obras RMCI e TFA. Com isso, percebemos, como aproximações, que ambos realizam descrições sobre seus conceitos e definições e envolvem os mesmos problemas com os infinitesimais no que concerne às quantidades infinitamente grandes e infinitamente pequenas. Como distanciamentos, observamos que os elementos centrais no trabalho de Lagrange são as funções e séries, e apenas o método algébrico encontra-se em discussão, enquanto, no trabalho de Carnot, estão presentes as quantidades infinitamente pequenas e a teoria da compensação de erros, além de se conceber o uso dos infinitesimais sem se desconsiderarem os outros métodos.

Palavras-chave: História da Matemática. Cálculo Infinitesimal. Joseph Lagrange. Lazare Carnot. Análise de conteúdo.

ABSTRACT

In the 18th century period, several mathematicians contributed to the development of Infinitesimal Calculus (IC). Among the exponents of this context, Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) and Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823) stood out. Thus, as a research question, the present work raised the following problem: what points of closeness and distance do the works *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (RMCI), of 1813, by Lazare Carnot, and *Théorie des Fonctions Analytiques* (TFA), of 1813, by Lagrange, present, concerning the concepts of the Infinitesimal Calculus? To answer it, we used the methodological contributions of content analysis as well as the steps established in Bardin (2016), adapted for this research. Therefore, this thesis aimed to compare, based on content analysis, the approximations and detachments between the works RMCI and TFA. With this, we realized, as approximations, that both perform descriptions about their concepts and definitions and involve the same problems with the infinitesimals about the infinitely large and infinitely small quantities. As detachments, we observe that the central elements in Lagrange's work are functions and series and only the algebraic method is under discussion, while in Carnot's work infinitely small quantities and the theory of error compensation are present, and it conceives the use of infinitesimals without disregarding the other methods.

Keywords: History of Mathematics. Infinitesimal Calculus; Joseph Lagrange; Lazare Carnot; Content analysis.

RÉSUMÉ

Au cours du XVIIIe siècle, plusieurs mathématiciens ont contribué à l'élaboration du calcul infinitésimal (CI). Parmi les représentants de ce contexte, Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) et Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 - 1823) se distinguent. Ainsi, en tant que question de recherche, le présent travail a soulevé le problème suivant : quels points d'approche et de distance les ouvrages Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal (RMCI) de 1813 de Lazare Carnot et Théorie des Fonctions Analytiques (TFA) de 1813 de Lagrange présentent-ils, concernant les concepts du Calcul Infinitésimal ? Pour y répondre, nous avons utilisé les apports méthodologiques de l'Analyse de Contenu et sommes passés par les étapes établies dans Bardin (2016), adaptées pour cette recherche. Par conséquent, cette thèse visait à comparer, sur la base d'une analyse de contenu, les approximations et les distanciations entre les œuvres RMCI et TFA. Avec cela, nous nous sommes rendu compte, par approximation, que les deux effectuent des descriptions sur leurs concepts et définitions et impliquent les mêmes problèmes avec les infinitésimaux sur les quantités infiniment grandes et infiniment petites. Comme distances, nous observons que les éléments centraux dans le travail de Lagrange sont les fonctions et les séries et seulement la méthode algébrique est en discussion, tandis que dans le travail de Carnot sont présents les quantités infiniment petites, la théorie de la compensation des erreurs, en plus de concevoir l'utilisation des infinitésimaux sans négliger les autres méthodes.
Mots clés: Histoire des mathématiques. Calcul Infinitésimal. Joseph-Lagrange . Lazare Carnot. Analyse du contenu.

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

LISTA DE TABELAS E QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Análise de Conteúdo
AD	Análise Documental
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CA	Categoria Algébrica
CE	Categoria Epistemológica
CG	Categoria Geométrica
CI	Cálculo Infinitesimal
COPAM	Congresso Pan-Amazônico de Matemática
CT	Categoria Textual
DMEI	Departamento de Matemática, Estatística e Informática
EAD	Educação a Distância
EPAEM	Encontros Paraenses de Educação Matemática
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
RMCI	*Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*
SECTAM	Secretaria Estadual de Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente
SEMA	Secretaria Estadual do Meio Ambiente
SIPEMAT	Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
SNHM	Seminário Nacional de História da Matemática
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TFA	*Théorie des Fonctions Analytiques*
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFPA	Universidade Federal do Pará
UNAMA	Universidade da Amazônia

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Na área da História da Matemática, estão os estudos relacionados a diversos temas ligados ao ensino, à Filosofia, à metodologia, à Sociologia, à História etc. Nesses estudos, busca-se refletir sobre problemas e conceitos relativos a uma determinada época, apresentando diferentes visões das áreas especificadas.

Nesse sentido, a História da Matemática, segundo Miorim e Miguel (2011), possui importância e contribuição no ensino, ao mostrar a Matemática como uma criação humana; as necessidades práticas, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; as conexões entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; a curiosidade estritamente intelectual que leva à generalização e à extensão de ideias e teorias; as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Um estudo importante nessa área são os textos[1] originais produzidos por matemáticos e suas contribuições nas diversas áreas. Muito embora os trabalhos originais fossem quase "inacessíveis" para grande parte dos pesquisadores, fato apontado por Baroni e Nobre (1999), com o desenvolvimento da tecnologia e da internet, parte das fontes originais foi digitalizada e publicada nos principais sites das bibliotecas internacionais, contribuindo com o estudo das fontes primárias.

Ao observar essas fontes, o pesquisador poderá identificar o desenvolvimento, os acertos, as dificuldades e os métodos referentes à ampliação e à pesquisa de um dado conceito. Nessa perspectiva, admitimos que analisar os trabalhos dos matemáticos em suas fontes principais está relacionado também à obtenção de elementos matemáticos, filosóficos, sociais e culturais que os rodeiam, além da busca de conteúdos referentes a seus influenciadores.

[1] Nesta pesquisa, "textos" ou "trabalhos" de matemáticos são tratados como sinônimos.

Entre os diversos temas em Matemática que podem ser abordados, estão os trabalhos envolvendo o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal (CI) e seus questionamentos sobre quantidades infinitamente pequenas. As dificuldades nessas questões estavam em como tratar, conceituar ou definir as quantidades infinitamente pequenas e as quantidades infinitamente grandes.

A partir do estudo a respeito desse tema, encontramos conteúdos como o conceito de função, séries, limites, continuidade e descontinuidade, compensação de erros, infinitesimais etc., temas esses que percorreram grande parte dos séculos XVII e XVIII. Também se destacam matemáticos nesses períodos, como Isaac Newton (1643 – 1727), Gottfried Leibniz (1646 – 1716), Johan Bernoulli (1667 – 1748), Leonhard Euler (1707 – 1783) Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), Pierre Laplace (1749 – 1827), Adrien Legendre (1752 – 1833), Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823) e Sylvester Lacroix (1765 – 1843). Assim, observa-se a abrangência e pertinência do tema junto a uma vasta gama de possibilidades de estudos.

Entre os textos desenvolvidos no século XVIII, estão a *Théorie des Fonctions Analytiques* (TFA), de Joseph-Louis Lagrange, e as *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal (*RMCI), de Lazare Nicolas Marguerite Carnot. Ambos publicados na França em duas edições, a primeira em 1797, com ampliações nas segundas edições, lançadas em 1813. Esses dois trabalhos, de acordo com Bell (2019), tratam-se dos últimos esforços do século XVIII para esclarecer e trazer solidez ao cálculo.

A partir dos dois textos escolhidos, apontamos a seguinte questão norteadora: ***que pontos de aproximação e distanciamento as obras Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal, de Lazare Carnot, e Théorie des Fonctions Analytiques, de Lagrange, apresentam no que concerne aos conceitos do Cálculo Infinitesimal?***

Uma forma de analisar as fontes elencadas pode ser por meio da Análise de Conteúdo (AC), estabelecida no trabalho de Bardin (2016), em que apresenta aspectos dessa análise. Entre os elementos constituintes dessa metodologia, estão a pré-análise, exploração do material e interpretação dos resultados. Na pré-análise, realizou-se breve leitura dos textos ou documentos escolhidos a fim de traçar os objetivos, as hipóteses e a criação de categorias. A exploração do material compôs toda a aplicação dos elementos da pré-análise no texto escolhido para, posteriormente, possibilitar a interpretação dos resultados (ver capítulo 2).

Para responder à questão, traçamos o objetivo de **analisar os trabalhos de Lazare Nicolas Marguerite Carnot e de Joseph-Louis Lagrange, respectivamente, em *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* e em *Théorie des Fonctions Analytiques*, ambos publicados em 1813, na perspectiva da análise de conteúdo.** Seguem-se também nossos objetivos específicos:

- Descrever traços biográficos tendo em vista as correlações em seus trabalhos.
- Categorizar, com base na análise de conteúdo, os capítulos selecionados.
- Comparar o conteúdo das obras destacadas a partir das categorias.
- Identificar aproximações e distanciamentos das obras selecionadas a partir das categorias estabelecidas.

Desde a escolha dos trabalhos, a questão norteadora foi delimitada a partir do projeto dos professores João Cláudio Brandemberg e Iran Abreu Mendes sobre trabalhos voltados ao cálculo, dada a importância das obras elencadas para discussão, bem como também a partir da análise de conteúdo como forma de categorizar os elementos pertencentes aos textos dos matemáticos escolhidos.

Para responder à questão e aos objetivos, este trabalho foi composto em duas partes. Na primeira, abordamos o limiar e os traços da pesquisa a partir da formação acadêmica (capítulo um), bem como o uso da AC na visão de Bardin (2016), abrangendo suas etapas de desenvolvimento, a criação de categorias, seguida dos direcionamentos e da justificativa voltados a esta pesquisa referente à área da História da Matemática (capítulo dois).

Como forma de compreender alguns processos de desenvolvimento do CI no século XVIII, tratamos sobre o avanço do Cálculo Infinitesimal (capítulo três), seguido dos traços biográficos dos autores selecionados como forma de estabelecer alguns processos e direcionamentos dos trabalhos dos matemáticos utilizados em uma das etapas da AC (capítulo quatro).

Na segunda parte desta pesquisa, discutimos os textos de Lagrange e Carnot a partir dos seus capítulos iniciais, relacionando-os na Categoria Textual

(CT), Categoria Epistemológica (CE), Categoria Algébrica (CA) e Categoria Geométrica (CG), (capítulos cinco e seis), buscando as aproximações e distanciamentos a partir dessas categorias (capítulo sete).

Assim, colocamo-nos sob a tese de que as aproximações e os distanciamentos dos conteúdos constantes nos trabalhos de Lazare Carnot em *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, de 1813, e de Joseph-Louis Lagrange em *Théorie des Fonctions Analytiques*, de 1813, são decorrentes das influências de outros matemáticos do século XVIII.

Iniciamos nosso trabalho, na primeira parte, trazendo o limiar da pesquisa e traçando a relevância do tema bem como da metodologia estabelecida.

PARTE I

Limiar da pesquisa

Sobre a análise de conteúdo de Bardin

Algumas discussões sobre o Cálculo Infinitesimal do século XVIII

Traços biográficos de Lagrange e Carnot

CAPÍTULO 1 - LIMIAR DA PESQUISA

Neste capítulo, apresento o desenvolvimento da minha[2] trajetória acadêmica e profissional voltada para pesquisas relacionadas à História da Matemática, pois considero que o limiar e os traços de uma pesquisa doutoral iniciam-se no decorrer da formação acadêmica.

A minha trajetória acadêmica iniciou no ano de 2008 no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade da Amazônia (UNAMA), onde fiz parte do programa de monitoria das disciplinas intituladas “Matemática” e “Cálculo Diferencial e Integral” – na modalidade presencial e de Educação a Distância (EAD). Atuei na elaboração de materiais didáticos para a educação básica e como professor no projeto de extensão “Aprender Ensinando e Ensinando a Aprender Matemática”. Em 2009, ingressei no mesmo curso na Universidade do Estado do Pará (UEPA) por meio do processo seletivo de transferência externa. Embora tenha mudado de instituição, continuei no Projeto de Extensão, pois foi a participação, tanto na monitoria quanto nesse projeto, que proporcionou, inicialmente, a experiência profissional no âmbito da educação básica e do ensino superior.

O interesse voltado à pesquisa na área da História da Matemática e da Educação Matemática iniciou em 2008, quando participei dos trabalhos desenvolvidos pelo professor Miguel Chaquiam, referentes à história de instituições de ensino e de professores que ensinaram Matemática.

No ano seguinte, com a realização do VIII Seminário Nacional de História da Matemática (VIII SNHM), em Belém, Pará, participei como membro da Comissão Organizadora Local, ouvinte de palestras, debates e apresentações de trabalhos que mostravam a importância da História da Matemática no ensino de Matemática; da preservação de acervos; das memórias de personagens e instituições de ensino. Entre essas experiências, citarei a conferência do professor Ubiratan D´Ambrosio, “Matemática ao longo da história: novas direções impulsionadas pelas guerras”. Nesse trabalho, D´Ambrósio mostrou a evolução da Matemática ao longo da história atrelada às guerras e seu desenvolvimento.

[2] Este capítulo será escrito em primeira pessoa do singular, uma vez que se trata da minha trajetória acadêmica e profissional e das motivações para esta pesquisa doutoral.

Além dessa palestra, houve também a mesa intitulada "Escola de Engenharia do Pará: História e Ensino", mediada pelo professor Ruy Guilherme de Almeida Castro e que tinha, como debatedores, os professores José Maria Filardo Bassalo, Manuel Leite Carneiro e Rui dos Santos Barbosa, que tinha por objetivo discutir a inserção da história de uma instituição de ensino superior, situada na região e no contexto nacional.

Em 2010, acompanhando os trabalhos relacionados ao cientista paraense Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha, presenciei todo o processo de doação do acervo de Guilherme de La Penha, constante na biblioteca da Secretaria Estadual de Meio Ambiente (SEMA), antiga Secretaria Estadual de Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente (SECTAM), para o acervo pessoal do professor Miguel Chaquiam.

Além disso, participei ativamente como membro da Comissão Organizadora dos Encontros Paraenses de Educação Matemática (EPAEM). Ainda em 2010, por meio de votação em assembleia geral da SBEM-PA, ocorrida no final do encontro, foi aprovada a minha entrada como membro da Diretoria regional da SBEM-PA, estreitando ainda mais os laços que possuía com a Educação Matemática e com a História da Educação Matemática.

Quando se aproximou o término do meu curso de graduação, a partir de 2012, desenvolvi o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) na área de História da Matemática, com a temática "*A evolução do conceito de função segundo Guilherme de La Penha*", em que foram analisadas e confrontadas as fontes documentais geradas por La Penha e por outros autores sobre a evolução do conceito de função e sobre o matemático Leonhard Euler. Esse trabalho foi premiado no ano de 2014 em primeiro lugar como "*melhor TCC 2013*" da UEPA.

No ano de 2013, fui convidado pelo professor Natanael Freitas Cabral a participar do Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino da Matemática (GEHEM) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Nesse ano, foi debatido o livro *Lecciones de Historia de las Matemáticas*, de H. Wussing, momento em que se discutiu a respeito da importância de como fatos históricos permeiam e influenciam a Matemática (esse fato foi evidenciado anteriormente por D´Ambrosio no VIII SNHM).

Ainda nesse ano, o IX EPAEM adotou o tema "EPAEM: 15 anos de História", no qual apresentei a comunicação científica, na modalidade de comunicação oral, sob o título “Uma História da Evolução do Conceito de Função”. Esse estudo teve o foco central na historiografia brasileira da ciência, voltada para a vida e a obra de um matemático-físico paraense, com vistas à divulgação da produção acadêmica de Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha e à apresentação de uma visão histórica sobre a sua compreensão relacionada ao conceito de função.

Com a aprovação no processo seletivo do mestrado pelo PPGECM, veio o interesse em saber como ocorreu o desenvolvimento dos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades em Belém, e as suas atualizações curriculares. Assim, na dissertação defendida em 2016, orientada pela professora Maria José de Freitas Mendes, descrevi os processos que levaram à criação de cada uma das Licenciaturas em Matemática em funcionamento na Universidade Federal do Pará (UFPA), Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Universidade da Amazônia (UNAMA), além de caracterizar mudanças, atualizações e vigências dos seus Projetos Pedagógicos.

Como justificativa, considerei o primeiro trabalho mostrando os três cursos em conjunto; a percepção de sua importância social para a região metropolitana de Belém; as contribuições na formação de um professor/pesquisador em Matemática; poucos registros históricos relativos às Licenciaturas em Matemática no estado do Pará e a construção de uma história e de uma preservação da memória relativa aos cursos acima citados.

Nos anos de 2017 e 2018, como professor substituto da UEPA, vinculado ao Departamento de Matemática, Estatística e Informática (DMEI), orientei e organizei trabalhos relacionados à História da Matemática e à Educação Matemática. Por exemplo, em 2017, apresentei um minicurso no EPAEM intitulado “História, contos e lendas para o ensino de matemática”, o qual serviu de base à orientação de um trabalho de conclusão de curso intitulado “Matemática em Histórias, Contos e Lendas: possibilidades de uso em sala de aula”.

Além disso, durante as aulas ministradas como professor da disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar I, expus fatos relacionados ao desenvolvimento histórico do conceito de função e como poderíamos conceituá-la sem a necessidade da teoria dos conjuntos. Para isso, foi necessário destacar o matemático Leonhard Euler como um dos pioneiros no referido conceito; com isso, foram apresentados, durante as aulas, dificuldades e obstáculos históricos e epistemológicos de alguns matemáticos no desenvolvimento do conceito de função. Tal fato culminou no artigo apresentado no 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em

Educação Matemática (SIPEMAT) sob o título “Obstáculos epistemológicos na história do conceito de função: uma visão preliminar”, publicado nos anais do citado evento.

Logo, observa-se, a partir do exposto, que os trabalhos produzidos e a vivência durante minha trajetória acadêmica e profissional sempre estiveram relacionados e direcionados às temáticas envolvendo a História da Matemática e/ou Educação Matemática. Assim, o desenvolvimento da pesquisa doutoral culminou no caminho que leva, especificamente, para a História da Matemática.

Em 2018, com a aprovação no processo seletivo Doutoral pelo PPGECM, os professores João Cláudio Brandemberg e Iran Abreu Mendes, com base em seus projetos relacionados ao Cálculo e/ ou à História do Cálculo, sugeriram, como ponto norteador para uma tese, os estudos de alguns trabalhos de matemáticos que escreveram sobre o Cálculo Infinitesimal, entre os quais se destacam Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) com *Note sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (*Notas Sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal*); Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823) com sua *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (*Reflexões sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal*) e o trabalho de René Guénon com *Principios del Calcul Infinitesima*” (*Princípios do Cálculo Infinitesimal*).

Com isso, escolhi como metodologia para a pesquisa a análise de conteúdo como forma de realizar os estudos dos conteúdos constantes no trabalho. Esta apresenta etapas iniciais a serem desenvolvidas durante o processo de análise. como a pré-análise, a exploração do material e a interpretação dos resultados.

Diante disso, iniciei a investigação por fontes bibliográficas que, de alguma forma, pudessem tê-los discutidos. Assim, foram encontrados diversos trabalhos que biografam e discutem os autores e suas diversas obras em um dado sentido e direcionamento.

No decorrer da busca por materiais sobre o assunto, desenvolvi artigos relacionados ao tema, apresentando, no Congresso Pan-Amazônico de Matemática (COPAM), trabalho intitulado “O conceito de Função: uma visão euleriana” e os trabalhos publicados no Boletim Cearense de História da Matemática (BOCEHM), denominados “Sobre o Cálculo Infinitesimal: alguns aspectos do século XVIII” e “O Conceito de função na Teoria das Funções Analíticas de Joseph-Louis Lagrange” (BOCEHM), além do trabalho “Manuel Jacinto Nogueira da Gama (1765 – 1847): o discurso do tradutor em textos históricos de Matemática” (Revista Brazilian Journal of Development).

Nas investigações, encontrei a tradução portuguesa realizada por Manuel Jacinto Nogueira da Gama da obra RMCI, de 1797, de Lazare Carnot. E, com isso, também foi identificada uma tradução de outra obra de Lagrange, que versa a respeito do CI, intitulada *Théorie des Fonctions Analytiques*" (*Teoria das Funções Analíticas*), de 1797.

A partir da AC, mais especificamente na pré-análise (leitura flutuante), identifiquei similaridades quanto ao RMCI e TFA referentes às datas, aos locais de publicações das edições e às traduções. Também percebi que, após 1797, foram publicadas, em 1813, a segunda edição dessas obras. Assim, optei pelas obras *Teoria das funções Analíticas* e *Reflexões sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal* de 1813.

Assim, o limiar da pesquisa apontou para meu desenvolvimento acadêmico e profissional, pautando como vertente o estudo na área da História da Matemática e/ou da Educação matemática.

Para compor este trabalho, no próximo capítulo, apresentarei a análise de conteúdo na visão de Bardin (2016), bem como suas características e aplicações na História da Matemática, de modo a subsidiar o andamento desta pesquisa.

CAPÍTULO 2 - SOBRE A ANÁLISE DE CONTEÚDO DE BARDIN

Neste capítulo, descrevemos a Análise de Conteúdo (AC) na visão de Bardin (2016), bem como seus aspectos e fundamentos, para assim apresentá-la como possibilidade de uso na História da Matemática. Por fim, discutimos sobre o direcionamento e a justificativa desta pesquisa a partir dessa possibilidade.

A análise de conteúdo é uma metodologia aplicada em diversos campos e áreas do conhecimento, sendo utilizada tanto em pesquisas de cunho quantitativo quanto nas de cunho qualitativo. Suas características e as diferentes abordagens foram desenvolvidas dentro das Ciências Sociais, no decorrer do século XIX, voltadas aos estudos relacionados às “comunicações” focadas no conteúdo da mensagem.

Segundo Triviños (1987), sua consolidação remonta ao ano de 1948, com a publicação da obra intitulada *The Analysis of Communication Content*, de B. Berelson, em que o autor mostra regras e conteúdo de análise. Mais tarde, buscou-se aprofundamento dos princípios da AC, o que acarretou seu aperfeiçoamento como instrumento de pesquisa.

No intuito de esclarecer tal diversificação, Bauer e Gaskell (2013) apresentam uma tabela com algumas definições da AC com base em alguns autores:

Quadro 1 – Algumas definições da Análise de Conteúdo

A semântica estatística do discurso político (Kaplan, 1943: 230). A técnica de pesquisa para a descrição objetiva, sistemática e quantitativa do conteúdo manifesto da comunicação (Berelson, 1952: 18). Toda técnica para fazer inferências através da identificação objetiva e sistemática de características específicas de mensagens (Holsti, 1969: 14). Processamento da informação em que o conteúdo da comunicação é transformado, através da aplicação objetiva e sistemática de regras de categorização (Paisley, 1969). Uma técnica de pesquisa para produzir inferências replicáveis e práticas partindo dos dados em direção a seu contexto (Krippendorff, 1980: 21). Uma metodologia de pesquisa que utiliza um conjunto de procedimentos para produzir inferências válidas de um texto. Essas inferências são sobre emissores, a própria mensagem, ou a audiência da mensagem (Weber, 1985: 9).

Fonte: Bauer e Gaskell (2013, p. 192).

A diversificação no conceito da AC nos mostra a contínua ampliação nos estudos e a aplicação em várias áreas do conhecimento. Logo, de acordo com Moraes (1999), a AC constitui-se como uma importante metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda a classe de documentos e textos, conduzindo descrições sistemáticas e atingindo significados de compreensão em um nível além da leitura comum.

A obra que constituiu o desenvolvimento das técnicas foi o trabalho de Laurence Bardin, intitulado *L'Analyse de Contenu*, publicado no ano de 1977[3] em Paris. De acordo com Triviños (1987), foi nessa obra que o método apresentou, em detalhes, seus conceitos fundamentais, bem como seu emprego e princípios. Assim sendo, a escolha de Bardin (2016) para o desenvolvimento de nossa pesquisa se deve a um arcabouço completo e ampliado de elementos que podemos utilizar na AC.

A seguir, descreveremos algumas características da AC na visão de Bardin, a fim de esclarecer o leitor sobre esse tópico, que será utilizado na comparação das obras elencadas de Carnot e Lagrange.

2.1 Característica da análise de conteúdo na visão de Bardin

A AC está relacionada a mensagens encontradas em discursos políticos, entrevistas, materiais jornalísticos, documentos ou outros textos escritos etc. Esses campos são as fontes sobre a qual o pesquisador se debruçará a fim de extrair elementos para o seu objetivo de pesquisa. Bardin (2016) apresenta a AC como

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/percepção (variáveis inferidas) dessa mensagem (BARDIN, 2016, p. 48).

Os procedimentos no uso da AC percorrem cinco características fundamentais. A primeira delas é o **CAMPO**, correspondente aos elementos da comunicação apresentados no início deste subcapítulo. Sua escolha se faz necessária de modo a delinear o caminho que o pesquisador percorrerá, seja na área jornalística, de discurso ou de documentos e textos.

A característica do **PROCEDIMENTO ANALÍTICO** consiste na descrição do objeto a ser analisado, bem como na divisão em categorias de classificação ou fragmentação criadas a partir da perspectiva do pesquisador. De acordo com Aróstegui (2006):

[3] Neste trabalho, utilizaremos a edição traduzida e ampliada em 2016.

> [...] quanto mais minuciosa for a base categorial, quer dizer, quanto maior for o número de unidades de análise, e mais desagregante for o critério de divisão do texto empregado, mais completa será a análise, mais completa e mais rica de possibilidades (ARÓSTEGUI, 2006, p. 527).

Em consonância com o referido procedimento, realiza-se o tratamento de informações presentes na mensagem através da análise, da decomposição em categorias e da organização das características e suas relações.

A **INFERÊNCIA** para a AC está ligada à dedução de elementos, que podem ser retirados da mensagem sem que, a partir da observação inicial, estejam claramente explícitos. Bardin (2016) a apresenta como sendo algo intermediário entre a descrição (enumeração das características do texto) e a interpretação (significado dado às características) para, assim, permitir responder a questionamentos caracterizados nesse processo.

Uma outra característica presente na AC está relacionada à **LINGUÍSTICA** e à relação com a mensagem a qual se propõe externalizar. Desse modo, a AC “procura conhecer aquilo que está por detrás das palavras sobre as quais se debruça” (BARDIN, 2016, p. 50). Logo, a linguística pode ser uma ferramenta por meio da qual a AC busca o conteúdo das palavras.

Um último aspecto apontado é a relação com a **ANÁLISE DOCUMENTAL**. De acordo com Bardin (2016), a análise documental corresponde a operações que objetivam representar o conteúdo de um documento. Definição corroborada por Aróstegui (2006), que a define como “[...] um conjunto de princípios e de operações técnicas que permite estabelecer a fiabilidade e adequação de certo tipo de informações para o estudo e explicação de um determinado processo histórico” (AROSTEGUI, 2006, p. 508).

As operações realizadas por esse método correspondem aos recortes de informações, divisões em categorias e representações semelhantes a algumas formas da AC. Entretanto, Santos (2012) apresenta um quadro com as diferenciações entre esses dois elementos, observadas em Bardin (2016):

Quadro 2 – Diferenças entre AC e AD na visão de Bardin

Análise Documental (AD)	Análise do Conteúdo (AC)
Foca-se em documentos; Classificação – Indexação;	Foca-se em mensagens (comunicações); Categorial-temática (é apenas uma das possibilidades de análise);

Objetivo: representação condensada da informação para consulta e armazenagem.	Objetivo: manipulação de mensagens para confirmar os indicadores que permitam inferir sobre outra realidade que não a da mensagem.

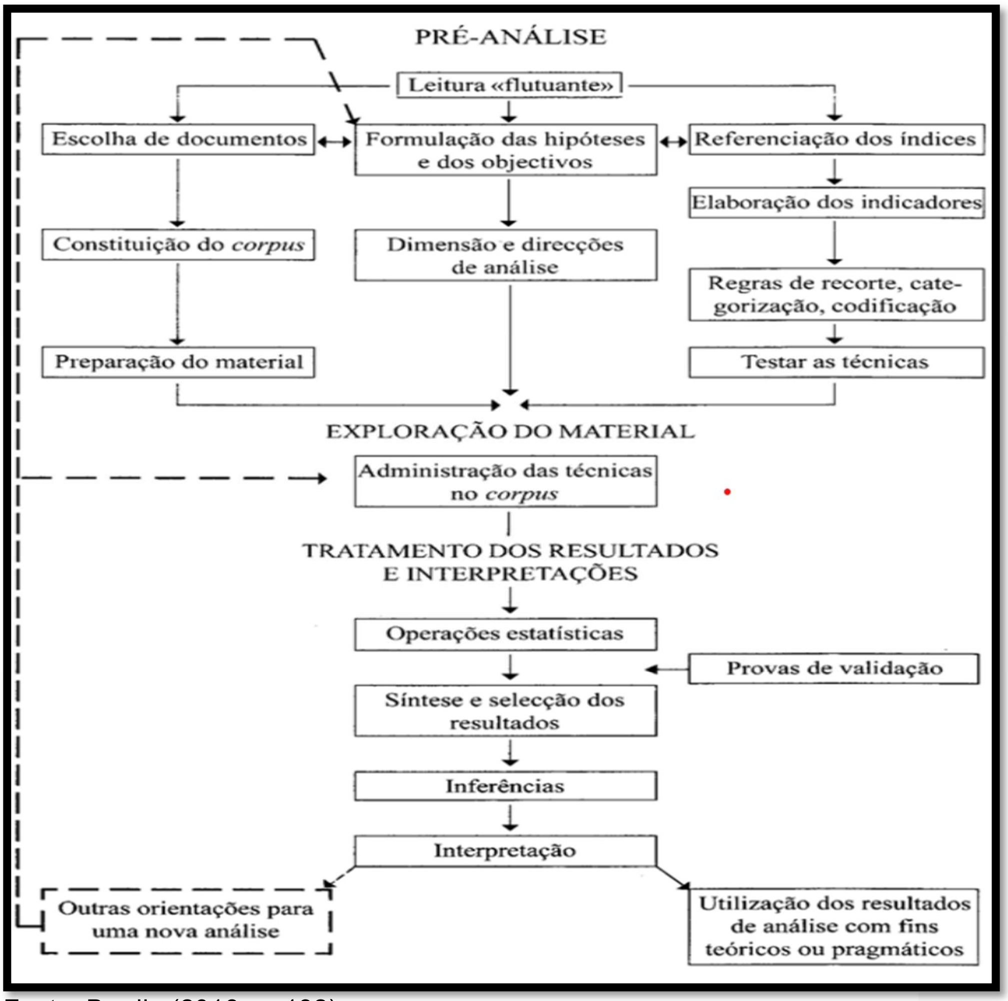
Fonte: Santos (2012, p. 383).

Desse modo, pode-se observar a AD como uma fase preliminar na análise de documento, ou seja, ambas se complementam em processos de estudos a priori. Estabelecidas as características da AC, discorreremos acerca de suas etapas.

2.2 Etapas da análise de conteúdo em Bardin

Com as características da AC elencadas, faz-se necessário apresentar os critérios de organização mostrados em Bardin (2016). Trata-se de três etapas organizadas: pré-análise, exploração do material e interpretação dos resultados conforme apontado na figura 1.

Figura 1 – Desenvolvimento de uma Análise de Conteúdo



Fonte: Bardin (2016, p. 132).

Cada etapa possui procedimentos a serem seguidos e que podem ser moldados a partir do interesse ou da pesquisa a ser desenvolvida. Sendo assim, descreveremos a seguir alguns dos processos adotados por Bardin (2016) pertencentes a esta pesquisa.

2.2.1 Pré-análise

Corresponde à operacionalização e à sistematização das ideias iniciais a partir do referencial teórico escolhido, ou seja, organização do material para a composição do *corpus* da pesquisa (material coletado).

Segundo Bardin (2016), essa fase leva o pesquisador à condução de um esquema preciso de operações sucessivas e também promove a delimitação do campo da pesquisa. De acordo com Silva e Fossá (2015), são estabelecidos indicadores para a interpretação das informações coletadas, mas, para isso, faz-se necessário seguir alguns procedimentos:

a) Realização d*a* ***Leitura Flutuante*** no sentido de estabelecer o primeiro contato com os documentos a serem analisados, partindo de impressões e orientações, ou seja, cria-se familiaridade com o texto. Essa leitura deve ser ampla e faz-se necessária à tomada de decisão inicial sobre quais materiais estarão alinhados aos objetivos da pesquisa.

b) Realização da ***Escolha do Documento***, desenvolvendo a definição do *corpus* da análise seguido de escolhas, seleções e regras. Estas seguem, de acordo com Cavalcante *et al*. (2014), critérios de validade qualitativa, como a *Regra da Exaustividade*. De acordo com esse critério, nenhum documento pode ser deixado de fora, ou seja, utilizam-se todos os documentos disponíveis que foram encontrados na pesquisa. Na *Regra da Homogeneidade,* os documentos não devem apresentar singularidades, isto é, devem referir-se ao mesmo tema. No que tange à *Regra da Pertinência,* estabelece-se a adequação e o alinhamento dos documentos aos objetivos da análise. *Regra da Representatividade* estipula que se deve utilizar um número elevado de dados e, assim, efetuar uma amostra, desde que o material possibilite isso.

c) Realização da ***Formulação das Hipóteses e Objetivos*** necessários à pesquisa e alinhados às regras estabelecidas na escolha do documento.

d) Realização da ***Elaboração dos Indicadores** e **Índices,*** cuja finalidade é retirar elementos essenciais da mensagem e efetuar recortes no texto.

e) Realização da **Preparação do Material**, padronizando e classificando por equivalência a fim de facilitar a manipulação na análise.

2.2.2 Exploração do material

Uma vez realizadas as tarefas pertencentes à pré-análise, caminha-se para a fase de construção das operações de codificação, ou seja, a criação de categorias. Para isso, é necessário transformar os recortes ou seleções (indicadores e índices) por meio da enumeração, classificação ou criando **Unidades de Registro** (UR).

Este último refere-se à segmentação (palavras, temas, documentos e textos etc.) do conjunto de textos para a análise. Realizando tais passos, criam-se, a partir de então, as categorias que se reúnem em grupos de elementos com título genérico a partir de características comuns. Assim:

> A categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação, e em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos. [...] o critério de categorização pode ser semântico (categorias temáticas: por exemplo, todos os temas que significam a ansiedade ficam agrupados na categoria "ansiedade", enquanto que os que significam a descontração ficam agrupados sob o título conceitual "descontração"), sintático (os verbos, os adjetivos), léxico (classificação das palavras segundo o seu sentido, com emparelhamento dos sinônimos próximos) e expressivo (por exemplo, categorias que classificam as diversas perturbações da linguagem (BARDIN, 2016, p. 147).

A compreensão das categorias criadas a partir da UR se deve a um outro elemento chamado de **Unidade de Contexto** (UC), que corresponde a elementos maiores que a UR. Conforme aponta Oliveira (2008),

> são unidades de compreensão da unidade de registro e corresponde [sic] ao segmento da mensagem cujas dimensões são maiores do que aquelas da unidade de registro. São segmentos de texto que permitem compreender a significação das unidades de registro, recolocando-as no seu contexto, tratando-se sempre de uma unidade maior do que a UR. Ex. a frase para a palavra, o parágrafo para o tema (OLIVEIRA, 2008, p. 571).

Na exploração do material, são necessários a organização e o desenvolvimento de tudo o que foi realizado na pré-análise de forma estruturada, para que o pesquisador consiga obter resultados de sua pesquisa.

2.2.3 Interpretação dos resultados

A última etapa se dedica tanto à descrição quanto à busca de elementos capazes de corroborar os direcionamentos e objetivos dados no início da pesquisa. O tratamento dos resultados ocorre a partir da inferência (característica presente nesta etapa) e torna-se um ponto essencial à análise.

Leite (2017) destaca a AC como a procura por responder "o que o texto expressa" e, para isso, investe tanto na descrição quanto na interpretação, buscando inferir elementos a partir do texto. Um ponto importante destacado nesse polo é a existência de operações estatísticas (observar a figura 1), entretanto, como este trabalho está voltado ao método qualitativo, não se faz necessário explicá-las, pois não fará parte do campo da pesquisa.

As três etapas constituem elementos essenciais da AC e que podem ser adaptadas, de acordo com Bardin (2016), a partir da pesquisa a ser realizada. Diante do exposto, demonstraremos, a seguir, as ideias do trabalho da AC de Bardin (2016), apresentando sua importância para a História e aplicando-a à História da Matemática.

2.3 Análise de conteúdo e seu uso na História da Matemática

Consideramos a História como realidade inteligível que busca apresentar ou relatar fatos observados a partir de um recorte temporal, de fragmentos de acontecimentos ou de fenômenos reais do passado. Também pode ser designada no sentido de investigação histórica, com seus resultados e consequências.

Assim, podemos entendê-la como sendo uma "reconstrução do passado", manifestando características intrínsecas a cada fato. Ao falar-se em História, é necessário compreender o processo descrito acima como imbricado de fatores humanos em todas as suas perspectivas. Nesse sentido, Bloch (2002) entende a História como ciência do homem em sociedade no tempo, de natureza dinâmica, voltada ao indivíduo e a suas relações dentro de um dado contexto.

De acordo com Bloch (2002, p.79), "tudo quanto o homem diz ou escreve, tudo quanto fabrica, tudo em que toca, pode e deve informar a seu respeito", ou seja, o ser humano passa a produzir História a partir do momento em que se envolve na produção do conhecimento. Essa produção gera informações e novos conhecimentos, auxiliando as futuras formas de pensar.

Todo esse processo apresenta uma série de fatos históricos que permitem percorrer caminhos que levam a uma determinada conclusão ou consequência. Logo, consideramos os fatos históricos os resultados de avaliações e interpretações que dependem do/da interesse/visão do pesquisador e são encontrados em cartas, diários, blocos de apontamentos, autobiografias, jornais, revistas, pareceres, atas, processos, manuscritos de apontamentos, livros históricos, etc.

A busca por esses objetos (cartas, jornais, revistas, etc.), obrigatoriamente requerida pelos fatos históricos, também é documento histórico. Para Karnal e Tatsch (2009), esse registro é parte importante do campo conceitual de atuação do historiador e da amplitude de sua busca. Logo, “documento histórico seria uma folha (ou várias folhas) de papel escrito por alguém importante. Um exemplo clássico dessa concepção de documento seria a carta escrita por Pero Vaz de Caminha e que relata o \`descobrimento´ do Brasil” (KARNAL; TATSCH, 2009, p. 10).

Os documentos históricos fazem parte das fontes. Assim, de acordo com Kragh (2001), a fonte é uma relíquia do passado que expressa informações a respeito de si própria, cabendo ao historiador[4] transformar a relíquia em uma fonte através da sua interpretação, ou seja, a relíquia se torna fonte quando se dispõe a revelar informações através de hipóteses. Aróstegui (2006) também define fonte histórica: “[...] todo aquele material, instrumento ou ferramenta, símbolo ou discurso intelectual, que procede da criatividade humana, através do qual se pode inferir algo acerca de uma determinada situação social no tempo” (ARÓSTEGUI, 2006, p. 491).

Fatos históricos, documentos históricos e fontes históricas requerem responder a um problema ou questionamento. Para isso, neste trabalho, utilizamos a AC como um processo que visa responder aos documentos a partir dos critérios estabelecidos anteriormente. De acordo com Constantino (2002):

> Análise de conteúdo pode vir a ser, para o historiador, um eficiente conjunto de técnicas, em abordagem interdisciplinar, muito desenvolvido pelos recentes avanços no campo da comunicação. Tem como primeiro objetivo buscar sentido ou sentidos no texto e fundamenta-se nos pressupostos da concepção dinâmica da linguagem, entendida como construção real de cada sociedade e como expressão da existência humana; elaborando e desenvolvendo representações, em todos os momentos históricos (CONSTANTINO, 2002, p. 188).

---

[4] Os termos “historiador” e “pesquisador” usados aqui são considerados, para este trabalho, como sinônimos, pois possuem as mesmas características.

O texto histórico é um documento importante utilizado pela AC e, de fato, é destacado nos trabalhos envolvendo essa metodologia. A partir do exposto, percebe-se que o uso da AC na História pode ser empregado utilizando-se de todo o arcabouço explicitado, sendo adaptado conforme o interesse, direcionamento e campo do pesquisador. Essa ideia é corroborada por Bauer e Gaskell (2013) quando afirmam que o uso de textos pode ser moldado, a fim de fornecer resposta às perguntas do pesquisador.

Logo, a partir do pesquisador e de sua influência, percebe-se a existência de interpretações possíveis, desde a escolha do tema proposto à investigação até as respostas encontradas, passando pelos documentos históricos considerados como questões propostas. Ou seja, a AC pode ser compreendida, segundo Moraes (1999), como uma interpretação pessoal por parte do pesquisador, relacionada à percepção dos dados, sem estabelecer limites por parte das técnicas, cabendo a ele, o pesquisador, delimitá-las em função dos fundamentos que o orientam. Dessa forma:

> Análise de Conteúdo é metodologia que pode ser utilizada através de várias técnicas, ou da livre combinação dessas, em perspectiva interdisciplinar, sendo amplas as possibilidades de escolha, tornam-se técnicas viáveis com relação a diversos propósitos, ou a diferentes níveis e tipos de formação dos historiadores (CONSTANTINO, 2002, p. 194).

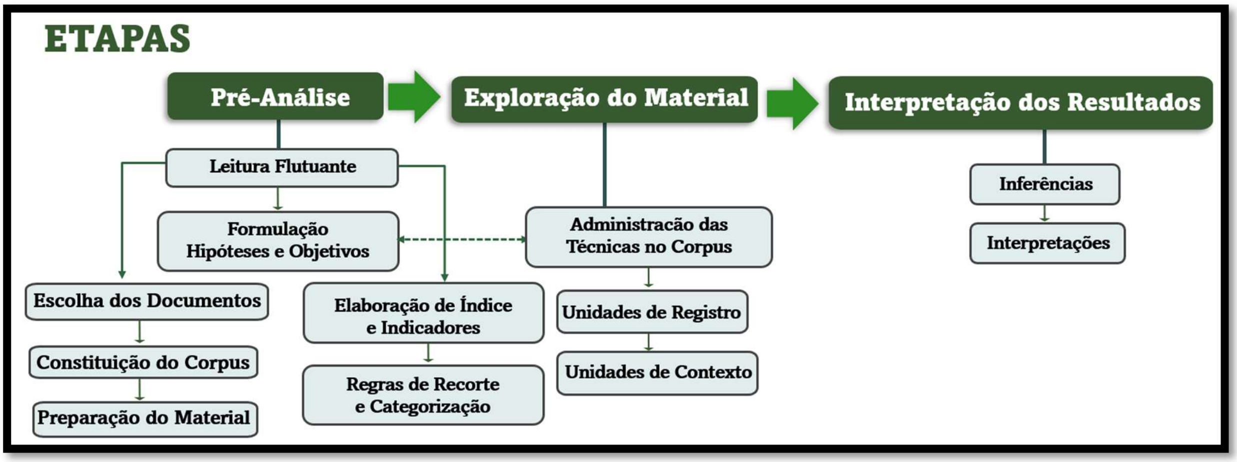
Com isso, estabelece-se que a metodologia da AC se torna relevante para o uso na História. Logo, podemos ampliar seu emprego na História da Matemática, voltado à exploração de trabalhos escritos de matemáticos, pois, de acordo com Sad e Silva (2008), a pesquisa em História da Matemática não difere de outras áreas do conhecimento envolvendo a aplicação de diferentes metodologias, como mapeamento de informações, análise de conteúdo, análise de discursos, história oral etc.

Portanto, conforme dimensionamos, o uso da AC na História da Matemática torna-se uma possibilidade em textos de matemáticos que devem seguir as etapas estabelecidas neste capítulo, além de adaptá-las de acordo com os objetivos de análise.

Em nossa busca por trabalhos que discorressem sobre o uso dessa metodologia na História da Matemática, acessamos os periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), bem como seu catálogo de dissertações e teses, buscando por trabalhos que utilizassem o método de AC e sua associação com a História da Matemática. Assim, as seguintes chaves de busca foram utilizadas: “Análise de Conteúdo e História da Matemática”; “Análise de Conteúdo e Matemática”. Portanto, como resultado, não se observaram teses ou dissertações que relacionassem a História da Matemática e a AC em uma pesquisa qualitativa.

Com isso, realizamos uma reestruturação e adaptação voltada para a História da Matemática, desenvolvida conforme critérios definidos e explorados anteriormente, culminando na produção do quadro apresentado a seguir.

Quadro 3 – Desenvolvimento da AC para a História da Matemática



Fonte: Adaptado de Bardin (2016).

As etapas, bem como seus elementos, permanecem exercendo as mesmas características apresentadas por Bardin (2016). Assim sendo, para o uso na História da Matemática, com relação à pré-análise, a escolha dos documentos deve estar baseada em uma breve leitura para a seleção do(s) texto(s) que será(ão) empregado(s) e se ele(s) será(ão) utilizado(s) totalmente ou parcialmente. A escolha dos documentos, a formulação das hipóteses e dos objetivos, a constituição do *corpus* e a preparação do material seguem o estabelecido.

Para a elaboração dos índices e indicadores, busca-se verificar a exposição da teoria no texto, ou seja, como o tema em questão está organizado (indicadores), visando direcionar aos objetivos e às hipóteses.

No que diz respeito aos recortes, podem ser destacados a partir dos capítulos, dos parágrafos, das linhas, ou de um conjunto destas que servirá como unidade de registro.

Na segunda etapa, atinente à exploração do material como unidades de contexto, podemos, a partir da leitura inicial, estabelecer os traços biográficos do autor, tendo em vista mostrar as correlações do trabalho em análise, contexto histórico social, político etc., pois um dado conceito matemático sempre fará parte de um campo conceitual com significado para sua época e que evolui dentro de um contexto histórico presente nos trabalhos dos matemáticos e em seus discursos através de suas correspondências e textos na tentativa de explicar ou apresentar seus posicionamentos frente a assuntos pertinentes a suas épocas.

Schubring (2005) ressalta esses aspectos ao afirmar que o estudo de um texto a respeito de conceitos matemáticos não deve ser restrito às suas definições básicas, mas seu significado deve ser explorado a partir do escopo e do contexto do próprio autor, ou seja, a partir do estudo de um trabalho, fazendo-se necessário o uso de outros elementos, como os traços biográficos e contextuais do autor, evitando, assim, isolá-lo. Dessa forma, pode-se entendê-lo como pertencente a uma comunidade matemática cooperativa. Portanto, para um entendimento completo do tema escolhido, pode-se, a partir disso, usar os elementos citados como unidades de contexto.

As categorias podem aparecer a partir das percepções realizadas na leitura inicial e confirmadas nas leituras seguintes. Nesse sentido, Bardin (2016) estabelece que a sua realização impõe a investigação da similaridade que cada componente do texto tem em comum com o outros.

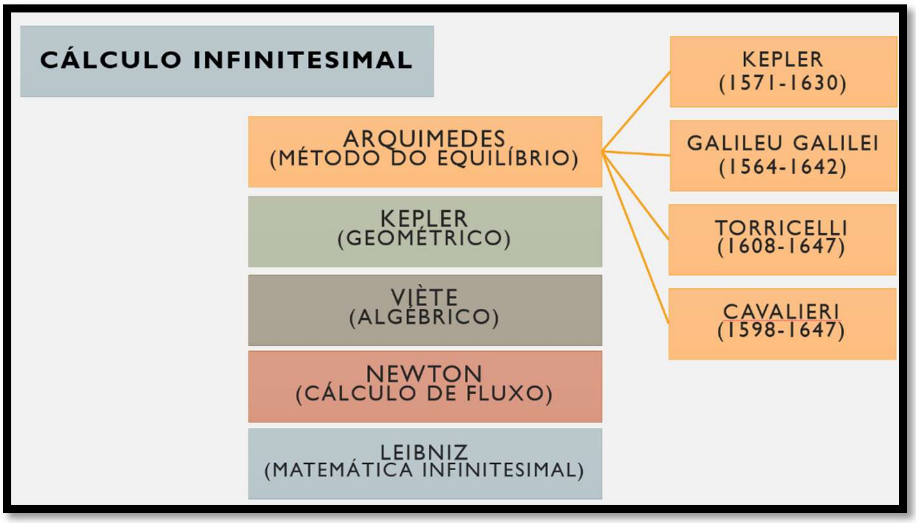
As histórias da Matemática, de acordo com Saito (2015), sempre foram escritas em diferentes épocas e contextos que, de alguma forma, atendiam às contingências do período. Com isso, o referido autor procura estudar os elementos pertencentes à História da Matemática a partir do que considera como "historiografia atualizada", realizando uma reconstituição histórica para olhar o passado sob a perspectiva do passado. Assim:

> Historiadores da matemática, que desenvolvem seus estudos baseados em tendências historiográficas atualizadas, tem insistido na necessidade de se compreender o processo da construção do conhecimento matemático por meio de acurada investigação, não só das diferentes técnicas e conteúdos matemáticos, mas também das circunstâncias nas quais tais técnicas e conteúdos foram elaborados. Para tanto, os historiadores nas últimas décadas, procuram reformular suas questões, fazendo novas perguntas ao passado a partir de diferentes fontes documentais (SAITO, 2015, p. 26).

Nesse sentido, podemos entender que, em um dado período, um texto histórico matemático foi escrito visando estabelecer certo sentido para o enfrentamento de um dado problema e, por conseguinte, possuiu seu significado para a época. Por exemplo, no estudo do cálculo, o trabalho de Euclides, de acordo com Boyer (1993), desempenhou um papel importante para o estudo dos infinitos matemáticos, o que mais tarde foi utilizado nas ideias básicas do trabalho de Newton e aprimorado no século XIX.

Também podemos destacar os métodos infinitesimais desenvolvidos e aprimorados durante o desenvolvimento do cálculo. É o caso do método desenvolvido por Arquimedes e aprimorado por seus sucessores, conforme destacado no quadro a seguir

Quadro 4 – Infinitesimais



Fonte: Elaborado a partir de Wussing (1998).

No quadro 4, identifica-se que cada matemático buscou desenvolver estudos relacionados ao cálculo infinitesimal voltado a suas particularidades. Estabelecidos os elementos pertencentes à AC e efetuadas as adaptações voltadas para a História da Matemática, realizaremos, a seguir, a aplicação dessa metodologia para o nosso objeto de estudo.

2.4 Questão de pesquisa

Conforme discorrido nas considerações iniciais a respeito do tema escolhido, "Cálculo Infinitesimal", e dos autores e obras destacados, procuramos, então, efetuar buscas bibliográficas sobre o tema em exame, relacionadas aos autores especificados. Percebemos que vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do CI, conforme apontamos inicialmente, a saber: Isaac Newton (1643 – 1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Johan Bernoulli (1667 – 1748), Leonhard Euler (1707 – 1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827), Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823), Sylvester François Lacroix (1765 – 1843), etc.

Além disso, nos estudos referentes ao tema, encontramos os conteúdos como o conceito de função, séries, infinitesimais, limites, continuidade e descontinuidade, permitindo desenvolver artigos sobre o desenvolvimento do CI, destacando Lira e Brandemberg (2018a, 2018b). Dessa forma, observa-se que o tema em apreço se torna pertinente a partir de uma gama de trabalhos que o aborda. E tanto o trabalho de Lazare Carnot quanto o trabalho de Lagrange fizeram parte desse processo de desenvolvimento do CI, consoante apontado por Bell (2019):

> Os últimos esforços dos matemáticos do século XVIII para desmistificar infinitesimais e banir as dúvidas persistentes sobre a solidez do cálculo apareceram ambos em França, em 1797. Estas foram a *Théorie des Fonctions Analytiques* do grande matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e as *Reflexões sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal* do matemático e "organisateur de la victoire" da Revolução Francesa, Lazare Carnot (1753-1823) (BELL, 2019, p. 84, tradução nossa).

Nesta esteira, a partir das duas obras, surgiu a seguinte questão norteadora***: que pontos de aproximação e distanciamento as obras Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal de Lazare Carnot e Théorie des Fonctions Analytiques de Lagrange apresentam no que concerne aos conceitos do Cálculo Infinitesimal?***

Na tentativa de responder à questão, buscamos o uso da AC – realizadas as adaptações necessárias conforme apontado anteriormente –, destacada como item importante que pode ser utilizado na História da Matemática, especificamente em documentos e textos. Com isso, constata-se, a partir do exposto no capítulo anterior, que esta é uma pesquisa de cunho qualitativo, dispondo da AC, pois evidencia características e organização presentes de acordo com o destacado por Leite (2017):

> é possível identificar que, ao pensarmos em pesquisa qualitativa, tratamos de descrição, de interpretação, de uma busca pela compreensão... de situações, de fatos, de fenômenos, de documentos. E é nesse ponto de procedimentos

> que a Análise de Conteúdo se constitui como pressuposto teórico de análise (LEITE, 2017, p. 541).

Apontada a importância do tema, caracterizado o tipo de pesquisa e definido o uso da AC com base nas adaptações, definimos então o objetivo da tese a partir da pré-análise especificada no subcapítulo seguinte.

Ressalta-se, consoante apontado anteriormente, a não identificação de trabalhos cujo tema seja a AC na História da Matemática. Assim, também a partir do banco de dados da CAPES e do seu catálogo de dissertações e teses, não foram encontrados trabalhos relacionados à comparação entre as duas obras mencionadas utilizando as seguintes chaves de busca: “Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal”; “Reflexões Sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal”; Theoríe des Fonctions Analytiques”; “Teoria das Funções Analíticas”; “Análise de Conteúdo e Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal”; “Análise de Conteúdo e Theoríe des Fonctions Analytiques”.

Isso posto, o ineditismo desta pesquisa encontra-se pautado na adaptação da AC voltada para a História da Matemática e em sua aplicação para as obras elencadas.

2.5 Etapas constituintes da pesquisa

Nesta etapa, caminhamos para o desenvolvimento da pesquisa a partir dos elementos elencados na AC com as adaptações realizadas para a aplicação dos textos escolhidos.

2.5.1 Pré-análise

Selecionadas as duas obras, ***Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*** **(RMCI)** de Lazare Carnot e **Théorie des Fonctions Analytiques (TFA)** de Joseph Lagrange, foi observada a existência de duas edições:

- RMCI com primeira edição publicada em 1797 e segunda edição em 1813 na França.
- TFA com primeira edição publicada em 1797 e segunda edição em 1813 na França.

Baseados em nossa *leitura flutuante,* que consistiu em uma breve leitura e em traduções de ambos os documentos das duas edições das obras, optamos pelas últimas edições de 1813, por considerarmos serem as edições modificadas, ampliadas e definitivas de ambos os autores a respeito do tema em questão.

Em nossa primeira impressão, percebemos, nos dois textos de Lagrange e Carnot, a divisão em conteúdos iniciais referentes ao CI, seguindo com suas aplicações, ou seja, de maneira geral, o trabalho de TFA está dividido, além da introdução, em mais três partes, sendo a primeira relacionada à exposição da teoria, seguida pela segunda parte com aplicações na geometria e, por fim, a mecânica. O RMCI, por sua vez, apresenta a exposição da teoria seguida por uma revisão dos métodos infinitesimais.

Esses elementos servirão como nossos indicadores e, a fim de delimitarmos nossa pesquisa, selecionamos, então, as duas primeiras partes de ambos os textos. Mais especificamente, em TFA, selecionamos sua introdução e seus dois primeiros capítulos, enquanto, em RMCI, optamos pelo primeiro capítulo. Essas partes foram selecionadas por apresentarem aportes fundamentais para o andamento do restante da obra do autor.

Além disso, percebe-se, ainda, o caminhar de ambos os autores para temas voltados a sua formação e que estavam sendo discutidos pela comunidade científica da época. Nesse sentido, fez-se necessário abordar traços biográficos dos dois autores a fim de delimitar o tema e o direcionamento dados em seus trabalhos, além de situar o século XVIII como um momento do desenvolvimento do CI.

Dessa forma, estabelecemos o objetivo de **analisar os trabalhos de Lazare Nicolas Marguerite Carnot e de Joseph-Louis Lagrange, respectivamente, em *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* e *Théorie des Fonctions Analytiques*, ambos publicados em 1813, na perspectiva da análise de conteúdo.** Seguem-se também nossos objetivos específicos:

- Descrever traços biográficos, tendo em vista as correlações em seus trabalhos.
- Categorizar, com base na análise de conteúdo, os capítulos selecionados.
- Comparar o conteúdo das obras destacadas a partir das categorias.
- Identificar aproximações e distanciamentos das obras selecionadas a partir das categorias estabelecidas.

Assim, traçamos a tese de que **as aproximações e distanciamentos dos conteúdos constantes nos trabalhos de Lazare Carnot em *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, de 1813, e de Joseph Lagrange em *Théorie des Fonctions Analytiques*, de 1813, são decorrentes das influências de outros matemáticos do século XVIII.**

Realizada a leitura flutuante, escolhidos os documentos, destacados os indicadores e formulados os objetivos e hipóteses, seguimos, então, para a etapa de exploração do material.

2.5.2 Exploração do material

Esta etapa foi aplicada na segunda parte deste trabalho por ser considerada como elemento essencial à pesquisa. Entretanto, devemos elencar os direcionamentos abordados posteriormente. Nos recortes, foi identificado que tanto o TFA quanto o RMCI contêm enumeração dos trechos no decorrer do texto ou de uma ideia (contendo vários parágrafos). Em vista disso, utilizou-se desses fragmentos textuais com o fito de realizar os recortes, criando as Unidades de Registros.

Com relação às Unidades de Contextos, criamos dois capítulos sobre o desenvolvimento do CI e os traços biográficos, possibilitando compreender alguns processos e direcionamentos apresentados nos textos dos matemáticos.

As categorias foram elaboradas a partir da nossa leitura flutuante, emergindo então: a **Categoria Textual (CT),** pois foram identificados o uso de linguagem corrente nos trabalhos, mais especificamente, explicações relacionadas ao CI; **Categoria Epistemológica (CE)**, a qual abarca a identificação pelos autores de reflexões de cunho histórico e filosófico do conceito matemático voltado ao CI, ou seja, neste conjunto, fazem-se presentes os elementos constitutivos que subsidiam seus trabalhos; **Categoria *Algébrica (CA)***, visando identificar os elementos algébricos, por exemplo, equações pertencentes aos trabalhos; **Categoria Geométrica (CG),** contemplando a identificação, a descrição e o desenvolvimento dos elementos geométricos.

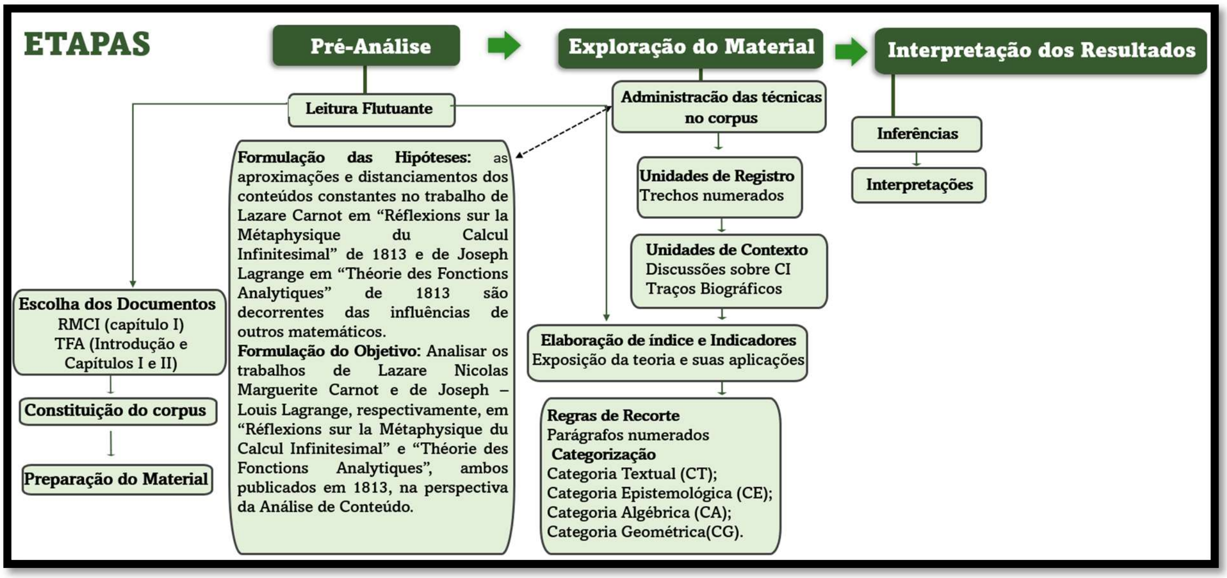
Estabelecidas as categorias, passa-se então para sua identificação nos recortes dos textos selecionados, tratando, por fim, da interpretação dos resultados.

2.5.3 Interpretação dos resultados

Nesta etapa, as categorias definidas possibilitaram a identificação das aproximações e dos distanciamentos com base nas inferências e interpretações, consequentemente, respondendo a nossa questão e hipótese de pesquisa.

Definidos os elementos, seguido todo o arcabouço da AC e realizadas as adaptações e os encaminhamentos, compomos, a partir de Bardin (2016), o desenvolvimento da AC no uso dos dois textos selecionados e estruturados conforme o quadro a seguir:

Quadro 5 – Aplicação da adaptação da Análise de Conteúdo em RMCI e TFA



Fonte: Adaptado de Bardin (2016).

Identifica-se, ante o exposto, que os elementos essenciais da AC estão presentes nessa adaptação de Bardin (2016), efetuada a fim de realizar a comparação entre TFA e RMCI.

No capítulo seguinte, discutiremos sobre a visão do CI no século XVIII para mostrar os elementos constitutivos do desenvolvimento da escrita nos livros especificados.

CAPÍTULO 3 - ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O CÁLCULO INFINITESIMAL NO SÉCULO XVIII

Neste capítulo, apresentamos algumas discussões sobre o progresso do CI, a partir do século XVIII, observada a concepção dos infinitesimais do ponto de vista algébrico para o seu aperfeiçoamento. Consideramos que os conteúdos presentes neste tema passaram por métodos e assuntos diversos, servindo como aportes aos textos dos autores trabalhados nesta pesquisa, em especial, os infinitesimais e o conceito de função.

A análise, até o século XVIII, desenvolveu-se através de ferramentas analíticas como métodos para resolver problemas de natureza geométrica e física, ou seja, o Cálculo estava voltado para encontrar áreas, tangentes, problemas, comprimentos e velocidade sobre curvas. As bases de estudos do CI se estabeleceram a partir de Arquimedes em seu método do equilíbrio[5]. Consequentemente, os resultados e procedimentos usados passaram a servir de influência, pois foram sendo mostrados nos trabalhos de Johannes Kepler (1571 – 1630), Galileu Galilei (1564 – 1642), Evangelista Torricelli (1608 – 1647) e Boaventura Cavalieri (1598 – 1647).

Logo, de acordo com Wussing (1998), os focos desses problemas seguiram, com os mecânicos-físicos, relacionados à queda livre, ao movimento dos planetas e aos processos de movimento e movimento acelerado. Os problemas de natureza geométrico-mecânica são pertinentes ao cálculo de áreas de volumes e à determinação de centros de gravidade de superfície e sólidos. Por fim, aparecem os estritamente geométricos, relacionados ao estudo de curvas, superfícies e sólidos, problemas de natureza abstrata, entre os quais se inclui a questão das tangentes.

Além destes, os assuntos algébricos, o método da exaustão, a teoria do indivisível e a aritmetização propiciaram condições para a consolidação dos métodos infinitesimais depois do ano de 1660 através do trabalho de Isaac Newton, com o cálculo de fluxo, e de Gottfried Leibniz, sobre a Matemática

[5] "Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos" (EVES, 2004, p.422).

Infinitesimal. Estes souberam combinar o conhecimento de seus predecessores, dando direcionamento ao CI. Entretanto, convém observar que, até este momento, o desenvolvimento do CI esteve atrelado a abordagens analíticas para resolução de problemas de geometria e Física.

Em Newton (1643 – 1727), o CI emerge, de acordo com Bottazzini (1986), motivado pelo movimento dos corpos – ponto central de suas pesquisas e de seu cálculo de fluxo –, oferecendo um instrumento matemático para descrever variações em magnitudes fluentes.

Portanto, Newton reputava uma variável, linhas retas e planos como algo com movimento contínuo, denominando-o de *fluyente*, enquanto ao resultado deste movimento dá o nome de *fluxión.* Com isso, Newton obteve sucesso no cálculo de áreas, comprimentos e tangentes a curvas, evitando um elemento controverso que pairava sobre os matemáticos – o caso dos infinitamente pequenos. De acordo com Gracián (2011), Newton, em seus cálculos, considerava o uso das quantidades infinitamente pequenas desnecessário, com todas as contradições a priori. Assim sendo, muito embora Newton tentasse evitá-las, elas estiveram presentes em seu trabalho.

Leibniz (1646 – 1716) entra em cena interessado pelos estudos de linhas curvas e tangentes (geometria), culminando com a elaboração de conceitos e métodos (por exemplo, o método da diferenciação) fundamentais do cálculo[6]. Para Struik (1992), o desenvolvimento do Cálculo de Leibniz possuía algumas imprecisões no que diz respeito aos seus *dx* e *dy*, que representavam quantidades finitas e, outras vezes, quantidades menores, mas não nulas.

De certo, percebe-se até aqui que o CI estava se configurando, provisoriamente, em termos de forma e conteúdo. Podemos observar que tanto Newton quanto Leibniz possuíam uma questão conflituosa no tocante à ideia dos infinitesimais, a sua magnitude e, consequentemente, à ideia de continuidade.

De acordo com Carvalho e D´Ottaviano (2006), as concepções de Newton e Leibniz quanto a essas entidades se diferenciaram. Para Leibniz, os infinitésimos estavam associados com a lógica e a metafísica, enquanto, em Newton, apresentavam conexões com a Física e os fenômenos naturais. No que

[6] O trabalho de Leibniz intitulado *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, Itemque Tangentibus, qua nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur, et Singulare pro illi Calculi Genus* continha os símbolos “dy” e “dx”, bem como as regras de diferenciação.

diz respeito à ideia de continuidade, Roque (2012) afirma que Newton deduzia a continuidade das propriedades físicas, em última instância, da continuidade do decorrer do tempo. Por outro lado, Leibniz exprimia a lei de continuidade em termos metafísicos e matemáticos.

Esses conflitos desencadearam diversos trabalhos que buscavam de alguma forma sanar essas dúvidas com relação ao conceito, como o que seria a ideia de “infinitesimal” ou de “quantidades infinitamente pequenas”, como o caso do filósofo Berkeley e dos matemáticos Euler, d’Alembert, Maclaurin, Lagrange e Carnot (discussões sobre esses pensadores serão expostas nos capítulos 5 e 6).

Na tentativa de evitar eventuais problemas, em 1784, Lagrange[7] sugeriu, como proposta à academia de Berlim, um concurso sobre o “infinito matemático” com o seguinte enunciado:

> A utilidade que derivamos da matemática, a estima que temos por eles e a honrosa denominação de ciências exatas por excelência que lhes damos, devem-se à clareza de seus princípios, o rigor de suas demonstrações e a precisão de seus teoremas.
> Para assegurar esta bela parte do nosso conhecimento da continuação destas preciosas vantagens, pedimos uma teoria clara e precisa do que é chamado Infinito em Matemática.
> Sabemos que a geometria alta faz uso contínuo do infinitamente grande e infinitamente pequeno. No entanto, os geômetras e até os antigos analistas evitaram cuidadosamente tudo o que se aproxima do infinito e os grandes analistas modernos admitem que os termos magnitude infinita são contraditórios.
> A Academia, portanto, deseja que expliquemos como deduzimos tantos teoremas verdadeiros de uma suposição contraditória, e para indicar um princípio seguro, em uma palavra verdadeiramente matemática, capaz de ser substituído pelo infinito, sem fazer com que as pesquisas enviadas por esse meio sejam muito difíceis ou muito longas. É necessário que esta questão seja tratada com toda a generalidade e com todo o rigor, clareza e simplicidade possíveis (BERLIN, 1786, p. 12–14, tradução nossa).

Os textos enviados para o concurso, de certa forma, não agradaram à comissão, que alegou falta de clareza, rigor e resolução quanto ao questionamento de “como no cálculo se deduziram tantos resultados corretos a partir de suposições contraditórias”. O trabalho que mais se aproximou do que a academia estava propondo e que foi o vencedor do prémio foi o do matemático

[7] Lagrange foi diretor dessa academia no período de 1766 a 1787.

suíço Simon L'Huillier (1790-1840), intitulado *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérleurs*.

Entre os trabalhos que também concorreram em Berlim, estava o de Lazare Carnot, intitulado *Sur la Théorie de l'Infini Mathématique*, servindo de aporte para todos os seus textos posteriores a respeito desse tema. De acordo com Grabiner (1981), o concurso de Berlim trouxe como consequência o desenvolvimento do Cálculo no sentido de exposição, estrutura e resultados de fundamentos e questionamentos que foram submetidos para esse concurso. É o caso do trabalho de L'Hullier, citado anteriormente, publicado no ano de 1787, seguido do trabalho denominado *Réfléxions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* de Lazare Carnot, publicado em 1797, com sua segunda edição em 1813. Assim sendo, destaca-se que

> desde estes, a própria Théorie de Lagrange, foram os únicos grandes livros com estes objetivos publicados no continente no século XVIII, Lagrange foi diretamente responsável pelas principais manifestações continentais setecentistas do novo interesse pelas fundações como um respeitável problema matemático (GRABINER, 1981, p. 322, tradução nossa).

Tanto TFA quanto RMCI participam desse movimento de constituição e desenvolvimento do CI. Ainda no século XVIII, as dificuldades teóricas na compreensão do CI trouxeram a necessidade do surgimento de novos elementos e procedimentos para compor a visão dos infinitesimais. Tem-se, nesse sentido, o desenvolvimento dos conceitos de função e de séries, destacando-se, nesses assuntos, os matemáticos Leonhard Euler e Joseph Lagrange, respectivamente.

3.1 Uma visão algébrica do Cálculo Infinitesimal: sobre as funções

O desenvolvimento do CI se apresenta em três períodos identificados por Fraser (1989) e Roque (2012). O período geométrico diz respeito ao desenvolvimento do CI até o século XVIII, e sua base está assentada em um conjunto de métodos analíticos com o objetivo de resolver problemas de geometria e Física, ou seja, existia uma concepção geométrica. Mais tarde, esses métodos passaram por uma refinação das técnicas, surgindo um período algébrico, predominante no século XVIII, no qual se estabeleceu o tratamento das funções e séries, possuindo como expoente o matemático Leonhard Euler e

Joseph Lagrange. Já o período clássico inicia-se no século XIX com os escritos de Augustin Cauchy (1789 – 1857).

A transição entre o primeiro e o segundo período se dá por uma necessidade, conforme apontado por Correia (1999):

> Com o tempo, à medida que os problemas enfrentados se tornavam mais complicados, a origem geométrica das fórmulas foi-se esbatendo, e os matemáticos foram concentrando a sua atenção na refinação das técnicas que permitiam a manipulação cada vez mais intrincada dessas fórmulas. A primazia da curva deu lugar à primazia da fórmula (CORREIA, 1999, p. 9).

Ainda de acordo com Correia (1999), a ideia de transição da primazia da curva para a primazia da fórmula iniciou-se em Newton, em 1669, no trabalho intitulado *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*, publicado em 1711, cujo principal objeto de estudo eram fórmulas do tipo y = f(x), introduzidas sem quaisquer tipos de considerações geométricas.

A palavra “função” aparece, de acordo com Youschkevitch (1976a), no manuscrito de Leibniz (1646-1716), em 1676, denominado *Método da Tangente Inversa ou sobre Funções*[8]. Tal trabalho estava relacionado à designação de um objeto geométrico associado a uma curva[9], ou seja, as funções, até este momento, eram somente expressões analíticas de grandezas e variáveis geométricas.

A necessidade de conceituar as grandezas definidas por expressões analíticas foi se acentuando tanto que, enquanto investigava o problema de isoperímetros[10], o qual consiste em minimizar a área delimitada por uma curva, Johann Bernoulli (1667-1748), professor de Leonhard Euler (1707-1783), chamou-lhes de "funções": “Definição. Chamamos uma função de uma magnitude variável a uma quantidade composta de qualquer maneira a partir desta grandeza variável e de constantes” (YOUSCHKEVITCH, 1976b, p. 60, tradução nossa). Entretanto, foi somente com o trabalho de Euler em *Introdução*

---

[8] *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*.
[9] Os problemas relacionados à curva estavam ligados à geometria analítica (problemas anteriores ao cálculo). Assim, em um dado problema e a partir da curva, queríamos encontrar uma tangente ou uma quadratura (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, liv. 228).
[10] Em *Remarques sur ce qu’on a Donné Jusqu’ici de Solutions de Problèmes sur les Isopérimètres*.

em Análise dos Infinitos[11], publicado em 1748, em duas partes, que o conceito de função passou a exercer um papel importante na análise.

Nessa obra, Euler apresenta sua definição de função da seguinte forma: “uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer dessa quantidade variável e de quantidades constantes” (EULER, 1748 apud LIRA, 2013, p. 47). No decorrer do trabalho, Euler não apresenta o seu significado do que seria “expressão analítica”, entretanto explicita que tais expressões são compostas por cálculos envolvendo as quatro operações algébricas, além de raízes, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas, derivativas e integrais. Assim, classifica as funções como sendo algébricas ou transcendentes; de valor único ou de multivalores; implícitas ou explícitas.

A análise como teoria formal das funções ganhou elementos importantes tratados nos trabalhos de Euler. Entre eles, podemos destacar os seguintes aspectos: foi um dos primeiros a utilizar as funções trigonométricas como proporções numéricas e tratou as funções como série de potências do tipo $\mathbf{A + B.z + C.z^2 + D.z^3 + \ldots}$, porém foi incapaz de demonstrá-las, lançando um desafio para que, se alguém tivesse alguma dúvida, ela deveria ser solucionada no decorrer do desenvolvimento de uma outra função.

Embora Euler tenha dado o pontapé inicial sobre o conceito de função, ele reconhecia as carências de sua definição e, a partir disso, volta-se à noção presente não explicitamente e que estaria desconexa de qualquer expressão analítica.

Essa noção geral utilizada por Euler retratava a ideia de correspondência entre partes de elementos, cada qual pertencente a seu próprio conjunto de valores das quantidades variáveis. Com isso, a noção de relação foi inserida de forma explícita, apresentando o conceito de função em uma forma universal e abstrata, publicada em 1755, no seu *Institutiones Calculi Differentialis*.

> Se algumas quantidades dependem de tal forma de outras quantidades que, se as últimas variam as primeiras também o fazem, então as primeiras quantidades são chamadas funções das últimas. Esta denominação é da mais ampla natureza e compreende cada método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x representa uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x de um modo qualquer ou são por ele

[11] *Introductio in Analysin Infinitorum*.

> determinadas, são chamadas funções dele (EULER, 1748 apud LIRA, 2013, p. 47).

Agora, segundo Euler, não se trata de expressões analíticas, mas de uma relação arbitrária entre quantidades variáveis. Também se percebe um conceito mais formal e que, por conseguinte, foi seguido por vários matemáticos. De maneira geral, de acordo com Ferraro (2008), o conceito de função do século XVIII continha, efetivamente, tanto a ideia de dependência ou relação entre as variáveis, como a ideia de expressão analítica. Uma função foi concebida como a expressão analítica de uma relação entre quantidades gerais: era um par constituído por uma relação entre quantidades e pela fórmula que expressava analiticamente essa relação.

Não só as noções de expressões analíticas e as relações entre quantidades não estavam em contraste entre si, como estavam estreitamente interligadas. Uma expressão analítica era uma função, uma vez que significava uma relação entre quantidades. Ainda de acordo com Ferraro (2008), uma relação entre quantidades só podia ser objeto de estudo em análise à medida que fosse expressa por uma expressão ou fórmula analítica.

O conceito explicitado por Euler exerceu grande influência positiva no restante do desenvolvimento subsequente da Matemática, pois, no século XVIIII, os matemáticos trabalhavam com expressões e funções de forma global. Assim, todos os procedimentos do CI eram considerados válidos em sua generalidade, ou seja, não existia preocupação no comportamento dessas expressões para certos valores das variáveis.

O século XVIII também foi um período de desenvolvimento das investigações relacionadas às séries concomitantes ao conceito de função. Estas estavam atreladas a quadraturas de curvas e a algumas funções logarítmicas. Um dos impulsionadores também foi o matemático Euler, escrevendo a expressão analítica como uma série de potências, conforme destacamos anteriormente. Assim, ele estabeleceu que todo o tipo de função algébrica e algumas funções transcendentes poderiam ser escritas através de série de potências. A partir disso, observa-se que a álgebra se estabelece no desenvolvimento do CI.

Além de as séries finitas estarem atreladas ao CI, havia também a consideração das séries infinitas. De acordo com Correia (1999), os métodos algébricos de desenvolvimento das séries poderiam ser estendidos de operações finitas da aritmética para os processos infinitos. Esse fato estava baseado no princípio de continuidade estabelecido por Leibniz:

> A partir das vastas investigações do período, é possível isolar certas ideias principais que eram características das visões avançadas sobre o assunto. Séries infinitas nunca foram introduzidas arbitrariamente; elas derivavam de expressões que se formaram, elas próprias, em muitos passos finitos, utilizando os processos da álgebra comum e do cálculo diferencial e integral (FRASER, 1989, p. 321, tradução nossa).

Lagrange utiliza essa concepção do conceito de função, estabelecida por Euler e o trabalho de séries, mais especificamente as de Taylor, para seu trabalho em TFA, a fim de apresentar o cálculo como uma abordagem algébrica, tentando, assim, evitar as questões infinitesimais.

Entendemos, a partir dessas discussões sobre a análise, que existe uma dualidade tanto da abordagem infinitesimal quanto da abordagem algébrica, em que ora se aproximam, ora se contrapõem dependendo de quem (qual matemático) levará essas discussões adiante.

Com isso, no capítulo seguinte, apresentaremos traços biográficos dos dois matemáticos que discorreram, nos seus trabalhos, sobre as abordagens citadas anteriormente. Tais traços biográficos se fazem necessários com o intuito de apresentar elementos epistemológicos que subsidiaram e influenciaram o andamento dos dois textos que serão apresentados posteriormente.

CAPÍTULO 4 - TRAÇOS BIOGRÁFICOS

A seguir, apresentaremos os traços biográficos de Joseph-Louis Lagrange e de Lazare Nicolas Marguerite Carnot como forma de observar suas implicações epistemológicas nas obras.

O século XVIII, com o advento da Revolução Industrial, presenciou um grande desenvolvimento científico e intelectual. Na França, além desses fatores, houve também o impulsionamento gerado pelas ideias iluministas, seguidas pela Revolução Francesa.

Os matemáticos da França, como Gaspard Monge, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Lazare Nicolas Marguerite Carnot, Nicolas Condorcet e Jean le Rond d'Alembert, foram os grandes responsáveis pelo desenvolvimento do conhecimento nesse período. Além disso, as instituições científicas apoiavam a pesquisa em Matemática, buscando, através de publicações, encontros e prêmios, prestígio em meio à comunidade.

Também foram criadas, nesse período, as *École Polytechnique* com o intuito de formar engenheiros e técnicos para fins militares. Assim, os mais prestigiados matemáticos foram chamados para lecionar, e entre eles estava Lagrange, responsável por dirigir a comissão da reforma de pesos e medidas que foi concluída em 1799.

Essas *Écoles* baseavam seus cursos na Matemática pura e aplicada. Com isso, os cursos possuíam disciplinas como Análise, em conjunto com a Mecânica e a Geometria Descritiva. Por conseguinte, os professores eram responsáveis por ministrar palestras, escrever livros e textos nos seus cursos. De acordo com Bottazzini (1986), muitos métodos e resultados novos apareceram primeiro nas páginas dos manuais escolares, o que gerou um grande número de tratados sobre a Matemática superior, motivados pela exigência do ensino das *Écoles* Francesas.

Desse modo, esses fatos propiciaram à França alcançar "uma posição de liderança no campo da investigação físico-matemática. Podia gabar-se de um número impressionante de cientistas do mais alto nível, a ponto de Paris ter se tornado referência fundamental para qualquer matemático" (BOTTAZZINI, 1986, p. 47).

Lagrange e Carnot vivenciaram esse período na França e obtiveram destaques a partir de sua formação. A seguir, abordaremos os traços biográficos desses dois matemáticos.

4.1 Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)

De família de origem Francesa, nascido em 1736 em Turim, na Itália, pouco se sabe sobre a vida pessoal de Lagrange, entretanto sua história como pesquisador e acadêmico apresenta diversos detalhes e esteve, em sua maioria, voltada ao estudo e ao ensino da Matemática.

Figura 2 – Joseph Lagrange

Fonte: Pepe (2014, p. 4).

Segundo Gilispie (2009a), podemos dividir a vida acadêmica de Lagrange em três momentos e lugares distintos: o primeiro estabelecido em sua cidade natal no período entre 1736 a 1766. Nesse período, Lagrange emerge como um professor, estudioso e cuidadoso em suas atividades. Designado ao estudo do Direito por seu pai, o matemático, nessa seara, não obteve sucesso. Foi na Universidade de Turim que ele descobriu o interesse por ciências e Matemática, pelas quais imediatamente teve apreço e, assim, prosseguiu lendo os trabalhos *Calculo Integralium* de Johann Bernoulli, o *Mechanica* de Euler, os dois primeiros livros *Principia* de Newton, *Traité de Dynamique* de d'Alembert, *Traité du Calcul Integral* de Bougainville, este último composto dentro do grupo de d'Alembert e dos enciclopedistas.

Em 1754, abordou, em seu primeiro trabalho, de maneira puramente analítica, o estudo da monografia de Euler, denominado *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes, Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Lattissimo Sensu Accepti (Método para Encontrar Linhas Curvas que Gozam da Propriedade de Máximo e Mínimo, ou Solução do Problema Isoperimétrico Estendido no Sentido mais Amplo.*). A posteriori, a abordagem estabelecida no primeiro trabalho foi classificada como "método de variação", o qual foi comunicado a Euler por meio de carta, em 1755, despertando o seu interesse por essa técnica.

Tal feito levou Lagrange a ser nomeado como professor da Real Escola de Artilharia em 1755, aos 19 anos de idade. Mais tarde, junto com outros jovens cientistas, criou uma sociedade científica (1757) que, posteriormente, tornou-se a Real Academia de Ciências de Turim, cujo objetivo era a publicação de uma miscelânea em francês e latim nos moldes da miscelânea *Berolinensia*.

As publicações em três volumes foram lançadas nos anos de 1759, 1762 e 1766 e, em seu primeiro volume, Lagrange publicou *Recherches sur la Méthode de Maximis et Minimis (Pesquisa sobre o Método dos Máximos e dos Mínimos); Sur l'Intégration d'une Équation Différentielle à Différences Finies, qui Contient la Théorie des Suites Récurrentes* (*Sobre a Integração de uma Equação Diferencial a Diferenças Finitas Contendo a Teoria das Sequências Recorrentes*)*; Recherches sur la Nature et la Propagation du Son* (*Pesquisa sobre a Natureza e a Propagação do Som*). Este último tem um grau maior de importância, dada a riqueza de detalhes, o que o fez tornar-se alvo de debates à época.

De acordo com Pepe (2014), em seu segundo volume, aparecem os seguintes artigos: *Essai d'une Nouvelle Méthode pour Déterminer les Maxima et les Minima des Formules Intégrales Indéfinies* (*Ensaio sobre um Novo Método para Determinar os Máximos e Mínimos das Fórmulas Integrais Indefinidas*); *Nouvelles Recherches sur la Nature et la Propagation du Son* (*Novas Pesquisas sobre a Natureza e a Propagação do Som*).

Este último é uma continuação e um aprimoramento do trabalho feito no primeiro volume da miscelânea e, consoante Pepe (2014), possui uma contribuição importante nos estudos de problemas físico-matemáticos, constituindo uma parte fundamental da obra do autor. Além disso, o capítulo fundamental da teoria dos desenvolvimentos em séries trigonométricas destacou-se tanto no século XVIII quanto posteriormente, gerando importância sobre o esclarecimento do conceito de função e no tocante à estrutura dos capítulos fundamentais da Análise.

No terceiro volume, encontra-se o *Solution de Différents Problèmes de Calcul Integral* (*Solução de Problemas Diversos de Cálculo Integral*).

Esses arcabouços de trabalhos de Lagrange, de acordo com Belhoste (2014), levam-no a alcançar lugar de destaque na sociedade intelectual da Europa. Fato corroborado pelas correspondências pelas quais se comunicava com Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Laplace e Condorcet.

O desenvolvimento, o empenho e a maturidade na Matemática fazem com que, em 1766, aceite o cargo de diretor da classe de Matemática da Academia de Berlim, Alemanha (cargo deixado por Euler ao se mudar para São Petersburgo). As exigências desse trabalho estavam voltadas, exclusivamente, às suas pesquisas, ou seja, não possuía obrigações docentes.

Nesses pouco mais de 20 anos em que permaneceu em Berlim, Lagrange publicou trabalhos em várias áreas, quais sejam: mecânica celeste, teoria dos fluidos, aritmética, álgebra, teoria dos números e cálculo das probabilidades. Entre os trabalhos desse período, podemos destacar: *Nouvelle Solution du Problème du Mouvement de Rotation d'un Corps de Figures Quelquonque qui N'est Animé par Aucune Force Accélératrice* (*Nova Solução do Problema de Rotação de um Corpo com uma Forma Qualquer Não Impulsionado por Nenhuma Força de Aceleração*); *Percussion des Fluides* (*Percussão dos Fluidos*); *Sur la Résolution des Équations Numériques* (*Da Resolução das Equações Numéricas*); *Traité de la Résolution des Équations Numériques de Tous les Degrés* (*Tratado sobre a Resolução de Equações Numéricas de Todos os Graus*).

Em 1787, Lagrange deixa Berlim em direção a Paris para tornar-se *pensionnaire vétéran* da Academia de Ciências de Paris que, mais tarde, vem a ser abolida pelo movimento político ocorrido na França (1793). Entretanto, essas turbulências fazem com que Lagrange volte à atividade de ensino em Matemática elementar e análise e, consequentemente, resultaram em trabalhos publicados posteriormente, destacando-se as *Leçons Élémentaires sur les Mathématique Données à l'École Normale* (*Lições Elementares de Matemática*

Dadas à Escola Normal); *Theorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel, Dégagés de Toute Considération d'Infiniment Petits, d'Évanouissans, de Limites et de Fluxions, et Réduits à l'Analyse Algébrique des Quantités Finies* (*Teoria das Funções Analíticas Contendo os Princípios do Cálculo Diferencial, Desvinculados a Partir de Qualquer Consideração de Infinitamente Pequeno, Evanescente, Limites e Fluxões, e Reduzidos à Análise Algébrica de Quantidades Finitas*); *Leçons sur le Calcul des Fonctions* (*Lições sobre o Cálculo das Funções*).

A vida de Lagrange esteve centrada no desenvolvimento de pesquisas e no ensino. Rodeado de matemáticos importantes e influentes da época, soube posicionar-se e, de acordo com Gillispie (2009a), preservou sua originalidade com suas generalizações, sistematizações e aprofundamentos das ideias de seus antecessores. Podemos considerá-lo também como um cidadão europeu, conforme apontado por Belhoste (2014):

> Através de sua carreira europeia, em três capitais, o matemático de Turim personificou o modelo do cientista cosmopolita sem Estado que parecia caracterizar o século do Iluminismo. Ele pensou e agiu como um cidadão europeu, ignorando as fronteiras e rivalidades entre os poderes [...] Ele correspondia, geralmente em francês, com todos os grandes matemáticos da Europa. Apesar de manter um contato epistolar com seu país de origem, ele privilegiou as conexões com a elite acadêmica de Paris, naquela época o centro de gravidade da "República das Letras" em todo o continente (BELHOSTE, 2014, p. 27, tradução nossa).

Considerado como "a alta pirâmide da Matemática" por Napoleão, seu excelente desenvolvimento científico se dava pela sua regularidade e seriedade em seus estudos, pois seguia as regras identificadas por Pepe (2014):

> 1) Sempre estudava apenas um trabalho de cada vez; 2) quando encontrava dificuldades, abandonava momentaneamente para retomá-la mais tarde; 3) Não deixava de lado um livro que havia escolhido sem tê-lo assimilado completamente; 4) Nunca estudou os grandes tratados sobre Análise, mas se limitou a consultá-los quando precisava, habituando-se a eles apenas ao encontrar um método novo ou curioso; 5) Sempre buscou entender porque os autores tinham seguido um caminho ou outro; 6) Lia os trabalhos com caneta na mão, refazendo os cálculos e praticando os problemas que encontrava; 7) na medida do possível, tentou formar suas próprias teorias sobre os pontos essenciais; 8) Teve o cuidado de voltar frequentemente a considerações geométricas muito adequadas para dar força e clareza ao raciocínio; 9) Nunca terminava de trabalhar sem se dar uma tarefa

> para o dia seguinte: este, a exemplo de Frederico II da Prússia, para superar a preguiça humana natural (PEPE, 2014, p. 6, tradução nossa).

Lagrange manteve sua atividade científica, revisando seus trabalhos até sua morte, em março de 1813. Outras informações podem ser encontradas na cronologia de Caparrini (2014a), que se encontra anexada (Anexo A) a esta pesquisa.

4.2 Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753 – 1823)

A partir das buscas pelas pesquisas biográficas, observa-se que vários autores biografam Lazare Carnot. Entre eles estão seu filho, Carnot (1861), Reinhard (1994), Gillispie e Youschkevitch (1979), Schubring (2005), Gilispie (1996) e Gillispie e Pisano (2012). Nesse sentido, as informações apresentadas neste traço biográfico serão importantes para o direcionamento da pesquisa, sem pretensões de informações aprofundadas sobre a vida do personagem em questão, considerando a existência de outras biografias citadas anteriormente, que podem fornecer detalhes e outros direcionamentos sobre o autor. Além disso, inserimos, em anexo (Anexo A), uma cronologia disponível em Paoli (1996) com algumas informações importantes sobre a vida de Lazare Carnot, bem como fatos relacionados ao seu contexto histórico-social.

Figura 3 – Lazare Carnot

Fonte: Carnot (1861)

Lazare Nicolas Marguérite Carnot nasceu em 13 de maio de 1753 em Borgonha na França. Seus estudos iniciaram no *collège* oratoriano de Autun, com estudos clássicos ou de "humanidades". De acordo com Gillispie e Youschkevitch (1979), os estudos eram seguidos de um internato ou faculdade e, posteriormente, poderiam convergir tanto para a Universidade (estudos de Direito, Medicina ou Teologia) quanto para escolas militares ou navais. No ano de 1769, Carnot escolheu a carreira de engenheiro militar e, assim, preparou-se sozinho para o exame de admissão na *École du Génie de Mézières*. Entretanto, não conseguiu acesso e, por isso, seu pai o enviou a Paris para continuar os estudos necessários em uma das melhores escolas preparatórias privadas no exame de admissão dirigido por Louis-Siméon de Longpré (1737 – 1812). Nesse período, Carnot conhece Charles Bossut (1730 – 1814) e d'Alembert, personagens que, para Gillispie e Youschkevitch (1979), influenciaram Carnot em sua maneira de pensar sobre problemas mecânicos. Ainda nesse período, conforme Schubring (2005), Carnot afasta-se de sua religião católica e passa a abraçar as ideias do Iluminismo, fato que influenciou seu posicionamento político.

Com sua aprovação na Escola de Engenharia de Mézières, em janeiro de 1771, seguindo por dois anos, Carnot passa a ser aluno de Gaspard Monge (1746 – 1818). Entretanto, consoante Gillispie (2007) e Schubring (2006), não há fatos que comprovem sua aproximação científica, pois, muito embora a Matemática estivesse próxima, suas abordagens se distanciavam. Enquanto Carnot apresentava os problemas com a marca de um engenheiro, ocupando-se mais com fundamentos e operações, Monge afastava-se desse posicionamento. Além disso, pode-se inferir, com lastro nos autores citados, a ausência de fatos que comprovem que Monge tenha se interessado pelo trabalho de Carnot nas áreas da Mecânica ou da Matemática, ou que ele tenha realizado qualquer coisa para expandir seu público e vice-versa.

Após a saída de Mézières, em 1772, passou a servir em várias guarnições, como a de Calais (cidade do norte da França), Cherbourg, Béthune, Arras e Saint-Omer. Nesta última, dedicou seu tempo livre aos trabalhos científicos sobre Mecânica, Matemática e estratégia militar em ensaios preparados para concurso do tipo regular, organizado pelas sociedades eruditas do século XVIII. Sua primeira submissão foi *Essai sur les Machines en Général* (*Ensaios sobre* *as Máquinas em Geral*), em 1783, inaugurando, de acordo com Gillispie (2007), a literatura francesa na engenharia mecânica com menção honrosa. Com isso, Carnot passa a, continuamente, participar de concursos científicos escrevendo seus trabalhos, seja na área da Matemática, da Mecânica ou das estratégias militares.

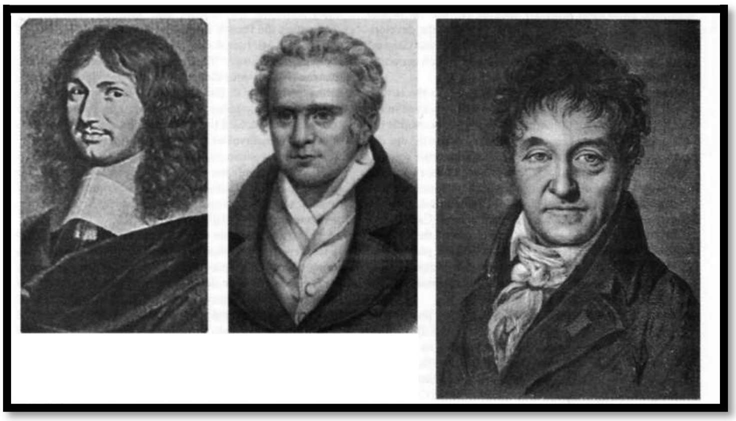
Éloge de Vauban (*Elogios a Vauban*) foi seu trabalho com maior reconhecimento, escrito em 1784 para participar da chamada da Académie de Dijon, cujo tema daquele ano versava sobre a carreira do fundador do Real Corpo de Engenheiros, o Marechal de Vauban, na área da fortificação – Carnot ganhou o prémio.

Entre sua carreira acadêmica e militar, Carnot desempenhou funções militares e políticas na Revolução Francesa. O limiar para o surgimento da sua perspectiva política ocorre devido a dois fatores, consoante Schubring (2005) e Gillispie e Youschkevitch (1979): o sucesso de *Éloge de Vauban* despertou o interesse de autores militares que buscavam prestigio político e social, ou seja, o Iluminismo trouxe um excesso de intelectuais, fazendo Carnot perder o interesse por publicações nesse período; a não aceitação de seu casamento por parte do pai de sua noiva, que o considerava de *status* social inferior, o que ocasionou a prisão de Carnot por conduta irregular. Consequentemente, toma partido por parte dos plebeus, realizando campanha por uma reforma militar.

Em meio à Revolução Francesa e à explosão de diversos movimentos, Carnot é eleito, em 1791, para a Assembleia Legislativa, iniciando, assim, sua carreira política, que vai até 1797, momento no qual ocorre um golpe de Estado que objetivava a retomada da monarquia por parte da oposição. Carnot é obrigado a fugir para a Suíça e, em seguida, para a Alemanha, retornando, em 1799, como ministro de Guerra de Napoleão. Cabe destacar que Carnot sempre foi amante da República e deixava claro seu repúdio pela monarquia. Esse fato o leva a renunciar em 1800 e a fugir novamente para a Alemanha, falecendo em 1823.

Considerado um "organizador de vitórias", Carnot figurou entre os mais imponentes da tradição republicana francesa, ao lado de Gaspard Monge e de Jean-Baptiste Colbert (1619 – 1813) – figura 4. Nesse sentido, a partir dos estudos realizados, constata-se que Carnot influenciou e foi influenciado por diversos personagens no decorrer de sua vida. Paoli (1996) afirma que Carnot foi influenciado por dois modelos de conceito de economia: o de Colbert e o de Leibniz (1646 – 1716).

Figura 4 – Personagens da República Francesa



Fonte: Paoli (1996, p. 15).

Na esteira desses conceitos, o desenvolvimento da sociedade somente ocorreria através de estudos científicos e da inovação de tecnologias, ou seja, as descobertas científicas deveriam estar atreladas às tecnologias. Com isso, durante o período em que Carnot exerceu sua carreira política, convocou os maiores cientistas da época, como o matemático Alexandre Vandermonde (1735 - 1796), o engenheiro e geômetra Gaspard Monge – citado anteriormente –, o químico Jean-Antoine Chaptal (1756 – 1832), o industrial e metalurgista Jean-Claude Perrier e os químicos Claude Berthollet (1748 – 1822), Victor Dupin e Antoine-François de Fourcroy (1755 – 1809). Todos da Mézières, cujo objetivo era a reorganização militar, educacional e econômica.

Na área educacional, podemos citar a criação da *École Polytechnique*, onde, junto com Monge, formou os melhores cientistas. Além disso, ambos colaboraram para o surgimento de novas gerações de cientistas republicanos, como Joseph Fourier (1768 – 1830), Jean Poncelet (1788 – 1867), Michel Chasles (1793 – 1880), Gustav Dirichlet (1805 – 1859), Carl Jacobi (1804 - 1851), e dos inventores Wilhelm Weber (1804 – 1891) e Alessandro Volta, de Abel, de Crelle.

A partir dos estudos bibliográficos, observa-se que as produções de Carnot relacionadas à Matemática foram menores que os trabalhos sobre Mecânica e Física. A seguir, é apresentado o quadro com seus principais escritos científicos:

Quadro 6 – Principais escritos científicos de Carnot

TÍTULO	ANO
Mémoire sur la théorie des machines pour concourir au prix de 1779 proposé par l'Académie Royale des Sciences de Paris Memória sobre a teoria das máquinas para concorrer ao prêmio de 1779 proposto pela Academia Real das Ciências de Paris	1778
Mémoire sur la théorie des machines pour concourir au prix que l'Académie Royale des Sciences de Paris doit adjuger en 1781 Memória sobre a teoria das máquinas para competir pelo prêmio que a Academia Real de Ciências de Paris concederá em 1781	1780
Essai sur les machines en général Ensaio sobre máquinas em geral	1783
Lettre sur les aérostats Carta sobre aeróstatos	1784
Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, ouvrage destiné à concourir au prix qu'a proposé l'Académie Royale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Berlin, pour l'année 1786. Dissertação sobre a teoria do infinito matemático, obra destinada a concorrer ao prêmio proposto pela Academia Real das Ciências, Artes e Letras de Berlim, para o ano de 1786	1785
De nouvelles idées sur la métaphysique du calcul infinitésimal Novas ideias sobre a metafísica do cálculo infinitesimal	1786 ~ 1788
Réflexions sur la métaphysiques du calcul infinitésimal Reflexões sobre a metafísica do cálculo infinitesimal	1797
Œuvres mathématiques du citoyen Carnot Trabalhos matemáticos do cidadão Carnot	1797
« Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut, contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie», dans BOSSUT Ch., Cours de mathématiques, géométrie et application de l'algèbre à ta géométrie "Carta do cidadão Carnot ao cidadão Bossut, contendo algumas novas visões sobre trigonometria", em BOSSUT Ch., Cours de mathématiques, géométrie et application de l'algèbre à ta géométrie	1800
De la corrélation des figures de géométrie Sobre a correlação de figuras geométricas	1801
Géométrie de position à l'usage de ceux qui se destinent à mesurer tes terrains Geometria de posição para o uso daqueles que pretendem medir seu terreno	1803
Principes fondamentaux dc l'équilibre et du mouvement Princípios fundamentais de equilíbrio e movimento	1803
Rapport fait (avec Lacroix) la classe de l'Institut de France, 22 Nivôse an II sur le « Mémoire sur une nouvelle notation d´algèbre descriptive » Relatório feito (com Lacroix) para a classe do Institut de France, 22 Nivôse ano II sobre "Memória sobre uma nova notação de álgebra descritiva"	1804
Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales.	1806

Memória sobre a relação entre as respectivas distâncias de quaisquer cinco pontos no espaço, seguida de um ensaio sobre a teoria dos transversais	
Rapport (avec Berthollet) ... sur la machine appelée Pyréolophore Relatório (com Berthollet) ... sobre a máquina chamada Pyreolophore	1806
Rapport (avec Charles, Montgolfier et Prony) sur la nouvelle machine à feu de M. Cagniard Relatório (com Charles, Montgolfier e Prony) sobre a nova máquina de incêndio por M. Cagniard	1809
De la défense des places fortes Sobre a defesa das fortificações	1810
Rapport (avec Monge et Prony) ... sur la nouvelle machine hydraulique de M. Lingois Relatório (com Monge e Prony) ... sobre a nova máquina hidráulica da M. Lingois	1812
Rapport (avec Périer et Prony) ... sur les machines hydrauliques de l'invention de M. Mannoury Relatório (com Périer e Prony) ... sobre as máquinas hidráulicas inventadas por M. Mannoury	1812
Rapport (avec Périer et Prony) ... sur les Moulins de Mannoury d'Ectot Relatório (com Périer e Prony) ... sobre os moinhos de Mannoury d'Ectot	1813
Réflexions sur la métaphysiques du calcul infinitésimal Reflexões sobre a metafísica do cálculo infinitesimal	1813
Rapport (avec Sané et Poinsot) ... sur le « Mémoire sur la Stabilité des corps flottants » Relatório (com Sané e Poinsot) ... sobre o "Memorando sobre a Estabilidade dos Corpos Flutuantes"	1814
Mémoire sur ta fortification primitive pour servir de suite au traité de la défense des places fortes Memorando sobre sua fortificação primitiva para servir de sequência ao tratado de defesa das fortificações	1823
Réflexions sur les principes généraux de l'analyse finie Reflexões sobre os princípios gerais da análise finita	-

Fonte: Gillispie e Youschkevitch (1979, adaptado).

A partir do apresentado, nota-se, em Carnot, o distanciamento de trabalhos voltados para os estudos da Matemática, buscando desenvolver trabalhos relacionados a aplicações na engenharia. Tal fato pode ser corroborado pelo exercício de sua profissão como um “engenheiro-militar” e como político.

Conforme podemos perceber nas leituras dos traços biográficos, Lagrange pode ser descrito como um professor, pesquisador acadêmico e científico que se corresponde com grandes matemáticos, entre eles Leonhard Euler e que, ainda assim, preservou sua originalidade, permitindo-se criticar, generalizar, sistematizar e aprofundar as ideias de seus antecessores. Além disso, percebe-se uma continuidade em seus trabalhos e a busca de sempre revisar sua literatura.

Em Carnot, constata-se um cientista e político com grande parte dos trabalhos voltados a aplicações na engenharia e, muito embora não possuísse as nuances e a visão que um professor adquire na escrita de trabalhos científicos, sempre esteve disposto a realizar revisões em suas obras com o intuito de aprimorá-las.

Para nossa pesquisa, as discussões a respeito dos traços biográficos se fazem necessárias como elementos importantes para a compreensão do desenvolvimento do texto, tanto de Lagrange quanto de Carnot. Na segunda parte deste trabalho, iniciaremos os estudos referentes à composição e à categorização das duas obras selecionadas.

PARTE II

Théorie des Fonctions Analytiques

Réflexions sur le Métaphysique du Calcul Infinitésimal

Aproximações e distanciamentos

Considerações finais

CAPÍTULO 5 - THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Neste capítulo, abordamos a composição da obra selecionada de Lagrange, bem como realizamos a inserção de aspectos da obra referentes à introdução e aos capítulos I e II nas categorias elencadas. Os capítulos selecionados são relevantes por apresentarem os fundamentos de todo o trabalho desse matemático.

O século XVIII foi o momento no qual as ideias referentes ao CI afloraram. As academias interessadas nesse assunto dedicavam concursos de prêmios referentes à metafísica do cálculo e a questões infinitesimais. Os escritos de Lagrange relacionados ao CI foram redigidos no ápice desse movimento (1768-1787), garantindo a ele uma reputação na Europa em vida e tornando-o presente nesse movimento. De acordo com Gillispie (2009b), esse período também é destacado pelos trabalhos de cálculo diferencial e integral de Euler, o que configura um momento importante para o desenvolvimento da análise.

Assim, a primeira edição de TFA foi publicada em 1797 com as ideias enfatizadas neste trabalho e explicitadas em seu próprio título: *Théorie des Fonctions Analytiques, Contenant les Principes du Calcul Différentiel, Dégagés de Touté Consideration d'Infiniment Petits, d'Evanouissans, de Limites et de Fluxions, et Réduité a l'Analyse Algébrique des Quantités Finies* (*Teoria das Funções Analíticas Contendo os Princípios do Cálculo Diferencial, Desvinculados a Partir de Qualquer Consideração de Infinitamente Pequeno, Evanescente, Limites e Fluxões, e Reduzidos à Análise Algébrica de Quantidades Finitas*). O objetivo principal de seu trabalho era a não utilização de métodos infinitesimais para, com isso, realizar a redução a métodos puramente algébricos, bem como a suas relações operacionais. Assim, de maneira geral, a TFA

> aponta para a tentativa de reduzir qualquer função real à forma polinomial, de modo a limitar o uso não só de funções transcendentais (e números), mas também de funções irracionais e fracionárias. Este duplo uso sugere que a teoria de Lagrange é algébrica na medida em que realiza uma redução da análise (tanto finita como infinitesimal) à álgebra, e retrata esta última como um campo elementar de estudo, no qual toda a matemática deve ser baseada (FERRARO; PANZA, 2012, p. 99, tradução nossa).

As ideias do trabalho estavam atreladas, segundo Bottazzini (1986), à necessidade de fornecer aos alunos da *École Polytechnique* um livro-texto. Tal fato o estimulou a publicar suas aulas intituladas de TFA, seguidas de suas *Leçons sur des Calcul des Fonctions* (*Lições sobre o Cálculo de Funções*), um complemento do TFA, o que mais tarde faria com que muitos dos trechos dessas obras fossem incorporados a textos didáticos, como é o caso dos estudos das tangentes de curvas e superfícies e do “resto de Lagrange” no desenvolvimento das funções em séries de Taylor.

Além disso, o trabalho foi traduzido para algumas línguas, incluindo o português, cuja tradução foi realizada por Manuel Jacinto Nogueira da Gama, em 1798, por considerar importante e essencial traduzi-lo para esse idioma, fato que despertou a curiosidade dos matemáticos portugueses. Em 1813, foi publicada uma segunda edição após a morte de Lagrange, devidamente ampliada por ele. Desse modo, debruçar-nos-emos sobre a análise dessa última versão de seu trabalho.

5.1 Composição da obra

O trabalho de Lagrange está dividido em introdução, com ideias historiográficas fundamentais do Cálculo, e mais três partes: a primeira diz respeito à exposição da teoria e seu uso na análise; a segunda contém as aplicações da teoria das funções à geometria; e, por último, a terceira, que trata da Mecânica. Para nosso trabalho, analisaremos a introdução e a sua primeira parte, especificamente os capítulos I e II, por considerarmos que os elementos essenciais para o desenvolvimento do restante da obra do autor estão contidos nesses três primeiros capítulos.

Os trechos em cada parte se encontram enumerados, exceto a sua introdução. Assim, realizamos a enumeração desses trechos introdutórios a partir da organização de suas ideias, a fim de incluí-los nas regras de recorte organizadas em I_1, I_2, I_3, ..., I_9. Logo, os trechos ficaram organizados da seguinte forma:

Quadro 7 – Organização dos trechos em TFA

Théorie des Fonctions Analytiques (TFA)		
DIVISÃO	**CAPÍTULOS**	**TRECHOS**
Introdução	-	9

Primeira parte	16	95
Segunda parte	14	87
Terceira parte	7	47

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação ao conteúdo constante no trabalho, ele encontra-se organizado conforme o sumário abaixo

Quadro 8 – Sumário da TFA de 1813

IX	Valores singulares que não estão incluídos nas equações primitivas completas. Equações primitivas singulares.	92
X	O uso de funções derivadas na análise, e a determinação de constantes arbitrárias. Aplicação à soma das sequências e à solução das equações de terceiro grau.	101
XI	ONDE apresentamos a equação primitiva de uma equação da primeira ordem em que as variáveis são separadas, mas não obtemos diretamente as funções primitivas de cada um dos dois membros. Propriedades notáveis destas funções primitivas.	110
XII	O desenvolvimento das funções de duas variáveis. Suas funções derivadas. Notação destas funções e das condições que elas devem satisfazer. Lei geral entre os termos do desenvolvimento de uma função de várias variáveis, e aqueles que resultam do desenvolvimento destes termos propriamente ditos.	125
XIII	Onde apresentamos o caminho para desenvolver as funções de qualquer número de variáveis em uma série acabada, e composta de tantos termos quantos quisermos, e para ter o valor dos restos.	134
XIV	Equações derivadas de uma equação entre três variáveis. Funções arbitrárias que entram em equações primitivas completas entre três variáveis.	139
XV	Fórmula notável para o desenvolvimento em série de qualquer função do desconhecido z na equação z = x + yfz.	146
XVI	Método geral para encontrar a equação primitiva de uma equação de primeira ordem entre várias variáveis, quando as funções derivadas são lineares, e para encontrar a equação primitiva de qualquer equação de primeira ordem entre três variáveis.	152

Fonte: Lagrange (1813, tradução nossa).

A partir dos elementos apresentados em seu sumário, conseguimos identificar a existência de conteúdos que foram discutidos no século XVIII, por exemplo, séries e conceito de função, discutidos no capítulo 3 deste trabalho.

A ideia estabelecida por Lagrange não é de produzir novos resultados, mas de apresentar novos fundamentos a partir dos resultados conhecidos. Tais fundamentos e resultados podem ser observados no decorrer de vários textos de Lagrange e são apresentados no trabalho de Ferraro e Panza (2012), cujos resultados podem ser verificados em anexo (Anexo C).

A seguir, iniciamos nossa inserção do TFA nas categorias elencadas anteriormente (Capítulo 2), a saber: **Categoria Textual (CT); Categoria**

Epistemológica (CE); Categoria Algébrica (CA) e **Categoria Geométrica (CG)**.

5.2 TFA – Introdução

Nesta primeira parte do TFA, Lagrange apresenta os fundamentos e as bases de seu trabalho, bem como expõe aspectos históricos referentes ao desenvolvimento do CI, ou seja, no decorrer de toda a sua introdução, ele apresenta pressupostos históricos e epistemológicos como forma de subsidiar e justificar seu trabalho. Para isso, utiliza-se de conceitos como o de função, método da compensação de erros e teoria de fluxão. Trata este último de forma crítica, a fim de justificar a relevância de sua teoria.

Os quadros a seguir retratam as numerações e categorias que foram organizadas conforme os trechos do texto. O tratamento estabelecido para sua introdução (incluindo suas definições) encontra-se em formato textual. Com isso, as duas categorias mais presentes nessa introdução são a CT e a CE.

Como ponto de partida, Lagrange apresenta o conceito de função a partir de alguns fatos históricos referentes a ele.

Quadro 9 – TFA trechos I_1 – I_2

Trecho	Texto	Categoria
I_1	Uma função de uma ou mais quantidades é qualquer expressão do cálculo em que essas quantidades entram de alguma forma, combinadas ou não com outras quantidades que são consideradas como valores dados e invariáveis, enquanto as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, em funções, apenas são consideradas aquelas quantidades que são consideradas variáveis, sem levar em conta as constantes que podem ser combinadas nelas. A palavra função foi usada pelos primeiros analistas para se referir, em geral, às potências da mesma quantidade. Desde então, o significado da palavra função foi estendido para incluir qualquer quantidade que seja formada em qualquer outra quantidade. Leibnitz e os Bernoulli foram os primeiros a utilizá-la neste sentido geral, e agora é geralmente adotado.	**CT** **CE**
	Quando a variável de uma função é atribuída a qualquer aumento, acrescentando a esta variável	

I_2	uma quantidade indeterminada, podemos pelas regras normais da álgebra, se a função for algébrica, desenvolvê-la de acordo com as potências desta indeterminação. O primeiro termo do desenvolvimento será a função proposta, que será chamada a função primitiva; os termos seguintes serão formados por diferentes funções da mesma variável, multiplicadas por sucessivas potências indeterminadas. Estas novas funções dependerão unicamente da função primitiva da qual são derivadas, e podem ser chamadas funções derivadas. Em geral, qualquer que seja a função primitiva, algébrica ou não, ela pode sempre ser desenvolvida ou supostamente desenvolvida da mesma forma, e assim dar origem a funções derivadas As funções consideradas deste ponto de vista, constituem uma análise de tipo superior à análise ordinária, pela sua generalidade e pelas suas múltiplas utilizações; e veremos neste trabalho que a análise que é vulgarmente chamada transcendental ou infinitesimal, é basicamente apenas a análise das funções primitivas e derivadas, e que os cálculos diferenciais e integrais são, estritamente falando, apenas o cálculo destas mesmas funções	**CT** **CE**

Fonte: Lagrange (1813, tradução nossa).

Lagrange inicia seu trabalho apresentando seu conceito de função. De acordo com ele, funções podem ser consideradas como expressões que possuem quantidades. Para Ferraro e Panza (2012), a palavra "quantidade" é usada para se referir a quantidades algébricas, enquanto a ideia de "expressão do cálculo" pode ser tomada como quantidades, ou seja, as funções de Lagrange são expressões, na medida em que são designadas como quantidades algébricas, e as quantidades podem ser empregadas como expressões.

A essência textual do trabalho desse matemático referente ao conceito de função caracterizada na definição explicitada por Euler[12] 40 anos antes e seu significado corresponde àquilo que grande parte dos matemáticos compreendiam: uma quantidade formada de qualquer forma por outras quantidades[13]. Essa exposição, por parte de Lagrange, representa, em nossas

---

[12] Em sua *Introductio in Analysin Infinitorum*, Euler expande funções elementares em séries de potências (ver Capítulo 4 deste trabalho).

[13] Johann Bernoulli foi um dos primeiros a definir função a partir dessa ideia.

categorias, fundamentos históricos pertencentes ao CE, pois afere que os conceitos adotados estão de acordo com a corrente de pensamento da época, consoante o que Lagrange assegura como “geralmente adotado” (trecho I_1).

Além disso, observa-se que o conceito de função se torna o ponto de partida para toda sua teoria, pois todos os elementos mostrados em sua obra trabalharão com funções e, no decorrer dela, identificará que, para toda e qualquer função, sempre será possível expandi-la em uma série de potência.

No trecho seguinte (I_2), a partir do acréscimo de uma certa quantidade indeterminada e de sucessivas operações algébricas nas funções, como resultado, essa operação é denominada por Lagrange de funções primitivas. Consequentemente, os próximos termos serão funções da variável anterior com suas potências, designadas como funções derivadas.

Ainda nesse trecho, Lagrange mostra sua preocupação em organizar as bases do cálculo a partir de regras algébricas. Com isso, nos parágrafos em tela, a partir de sua compreensão matemática, ele considera que o desenvolvimento do CI pode ser aplicado de maneira algébrica e, para isso, realiza uma série de argumentos de cunho histórico sobre as questões infinitesimais e os obstáculos encarados pelos matemáticos para o aprimoramento dessa ideia (trechos I_3 – I_5).

Quadro 10 – TFA trechos I_3 – I_5

Trecho	Texto	Categoria
I_3	Os primeiros geómetras que utilizaram o cálculo diferencial, Leibnitz, os Bernoulli, o l’Hôpital, etc., basearam-no na consideração de quantidades infinitamente pequenas de diferentes ordens, e na suposição de que se pode olhar e tratar como iguais, aquelas quantidades que diferem entre si apenas por quantidades infinitamente pequenas em relação a elas. Contentavam-se em chegar pelos procedimentos deste cálculo de uma forma rápida e segura com resultados exatos, e não se preocupavam em demonstrar os seus princípios. Aqueles que os seguiram, Euler, d'Alembert, etc., procuraram compensar esse defeito, mostrando, por aplicações particulares, que as diferenças que deveriam ser infinitamente pequenas devem ser absolutamente nulas e que suas relações, as únicas quantidades que realmente entram no cálculo, nada mais são do que os limites das relações de diferenças finitas ou indefinidas.	**CT** **CE**

I_4	Mas ele acaba por concordar que esta ideia, embora correta em si mesma, não é suficientemente clara para servir de princípio a uma ciência cuja certeza deve ser baseada em provas, e acima de tudo para ser apresentada a iniciantes; Além disso, parece-me que, tal como no cálculo diferencial, tal como é utilizado, se considera e calcula as quantidades infinitamente pequenas ou supostamente infinitamente pequenas, a verdadeira metafísica deste cálculo consiste no fato de que o erro resultante desta falsa suposição é retificado ou compensado pelo erro resultante dos próprios procedimentos do cálculo, segundo o qual apenas quantidades infinitamente pequenas da mesma ordem são retidas na diferenciação. Por exemplo, ao olhar para uma curva como um polígono com um número infinito de lados cada um infinitamente pequeno, e cuja extensão é a tangente da curva, fica claro que se está a fazer uma suposição errada; mas o erro é corrigido no cálculo pela ausência das quantidades infinitamente pequenas. Isto pode ser facilmente visto em exemplos, mas talvez fosse difícil fazer uma demonstração geral do mesmo.	**CE** **CG**
I_5	Newton, para evitar a suposição de infinitamente pequeno, considerou as quantidades matemáticas como geradas pelo movimento, e procurou um método para determinar diretamente as velocidades ou, melhor dizendo, a razão das velocidades variáveis com as quais essas quantidades são produzidas; Segundo ele, isso é chamado de método de fluxões ou cálculo de fluxo, porque ele chamou essas velocidades de fluxões de quantidades. Este método ou esse cálculo concorda com a substância e com as operações, com o cálculo diferencial, e difere apenas pela metafísica que parece realmente mais clara, porque todo mundo tem ou acredita ter uma ideia de velocidade. Mas, por um lado, introduzir movimento em um cálculo que possui apenas quantidades algébricas para seu objeto é introduzir nele uma ideia estranha e que obriga a olhar para essas quantidades como 'duas linhas atravessadas por um móvel; por outro, devemos admitir que nem sequer temos uma ideia clara do que é a velocidade de um ponto a cada instante, quando essa velocidade é variável; e podemos ver pelo tratado acadêmico de Maclaurin sobre fluxões, quão difícil é demonstrar rigorosamente o método de fluxões e quantos artifícios específicos devem ser usados para demonstrar as diferentes partes desse método.	**CT** **CE**

	O próprio Newton, no seu livro de Princípios, preferiu, como mais curto, o método das últimas razões das quantidades evanescentes; e é aos princípios deste método que se reduzem, em última análise, as demonstrações relacionadas com o dos fluxos. Mas este método tem, tal como o dos limites acima mencionados, que é propriamente apenas uma tradução algébrica, a grande desvantagem de considerar as quantidades no estado em que deixam, por assim dizer, de ser quantidades; pois embora a relação de duas quantidades seja sempre bem concebida desde que permaneçam finitas, esta relação já não oferece à mente uma ideia clara e precisa, assim que os seus termos se tornam simultaneamente nulos e nulos.	

Fonte: Lagrange (1813, p. 2, tradução nossa).

Introduzir bases algébricas para a análise leva Lagrange a discutir sobre concepções anteriores, entre as quais está o método da compensação de erros (método mostrado por Carnot em RMCI) e o método de fluxões de Newton.

Essas considerações com as quantidades infinitamente pequenas eram o modo como os matemáticos trabalhavam o CI. Entretanto, de acordo com Lagrange, não era possível demostrar por quais meios percorreram para chegar aos seus resultados e, na tentativa de resolver esse problema, partiam para aplicações particulares. É o caso de Euler, Leibniz, Newton, etc., conforme apontado por Caparrini (2014b):

> Os primeiros métodos propostos pelos matemáticos para fundamentar o Cálculo Infinitesimal foram insuficientes, às vezes absurdos. Leibniz (1684) trabalhava com quantidades tão pequenas que poderiam ser consideradas nulas. Newton (1687) imaginou pontos e linhas em movimento. Euler (1755) acreditava que a relação 0/0 poderia ser uma quantidade diferente de zero. D'Alembert (1765) afirmou que o Cálculo Infinitesimal era baseado no conceito de um limite, mas não elaborou sobre esta intuição. Cauchy (1821) trabalhava sistematicamente com limites, mas estes limites ainda não estavam bem formalizados e não se baseavam em nenhuma teoria de números reais (CAPARRINI, 2014b, p. 56, tradução nossa).

Ainda para Lagrange, o método de fluxões estabelecido por Newton apresentava dificuldades no uso dos infinitesimais, pois considerava as quantidades geradas por movimento com o objetivo de fugir de “suposições infinitesimais” e, consequentemente, acabavam por introduzir “ideia estranha” nas estabelecidas (ver trecho I_5). Assim sendo, o entendimento quanto ao uso da ideia de "quantidades" é o elemento que causa estranheza em Lagrange.

Ele também cita o trabalho de MacLaurin (1698 – 1746), intitulado *Tratise on Fluxion,* de 1742, corroborando o mesmo pensamento de Newton, conforme aponta Bottazzini (1986):

> O Tratado de Maclaurin sobre Fluxos (1742), acrescenta Lagrange, mostra muito bem como é difícil tornar este método rigoroso. É por isso que no Principia Newton preferiu substituir por fluxões o método das relações finais entre quantidades evanescentes, um método que, segundo Lagrange, tem os mesmos defeitos de obscuridade e imprecisão que o dos limites (BOTTAZZINI, 1986, p. 49, tradução nossa).

Logo, Lagrange apresenta fundamentos que denotam a necessidade de elementos que o convençam das bases fundamentais para o cálculo.

Quadro 11 – TFA trechos I_6 – I_9

Trecho	Texto	Categoria
I_6	É para evitar estas dificuldades, que um hábil Geometrista inglês, que fez na análise de descobertas importantes, propôs nos últimos tempos, substituir o método dos fluxos até agora escrupulosamente seguido por todos os geómetras ingleses, por outro método puramente analítico, e análogo ao método diferencial, mas no qual, em vez de utilizar apenas as diferenças infinitamente pequenas ou zero das quantidades variáveis, utiliza-se primeiro valores diferentes dessas quantidades, que são depois igualadas, depois de se ter feito desaparecer a divisão do fator de que essa igualdade faria desaparecer o zero. Por este meio, evitam-se quantidades infinitamente pequenas e evanescentes; mas os procedimentos e aplicações de cálculo são embaraçosos e antinaturais, e é preciso concordar que esta forma de tornar o cálculo diferencial mais rigoroso nos seus princípios, faz com que perca as suas principais vantagens, a simplicidade do método e a facilidade de operações. Ver a obra intitulada: the residual analysis a new branch of the Algebric art, de John Landen, Londres, 1764, bem como o discurso publicado pelo mesmo autor em 1758 sobre o mesmo assunto. Estas variações na forma de estabelecer e apresentar os princípios de cálculo diferencial, e mesmo na denominação deste cálculo, mostram, parece-me, que a verdadeira teoria não tinha sido	**CT** **CE**

	compreendida, embora as regras mais simples e convenientes para o funcionamento do mecanismo de operações tivessem sido encontradas primeiro. Mais considerações sobre este assunto são dadas na primeira lição sobre o cálculo das funções. (leçon sur le calcul des fonctions)	
I_7	Num papel impresso entre os da Academia de Berlim, de 1772, e cujo tema era a analogia entre diferenciais e potências positivas, e entre integrais e potências negativas, defendi que a teoria do desenvolvimento de funções em série continha os verdadeiros princípios do cálculo diferencial; livre de qualquer consideração de infinitamente pequenos ou limites, e demonstrei por este teorema de Taylor, que é o fundamento do método de série, e que tinha sido demonstrado apenas com a ajuda deste cálculo, ou considerando diferenças infinitamente pequenas. Desde então, Arbogast apresentou uma dissertação à Academia das Ciências em que a mesma ideia é exposta com desenvolvimentos e aplicações que lhe pertencem. Mas como o autor ainda não publicou nada sobre este assunto, e tendo-me encontrado empenhado por circunstâncias particulares no desenvolvimento dos princípios gerais de análise, lembrei-me das minhas velhas ideias sobre as de cálculo diferencial, e fiz novas reflexões tendentes a confirmá-las e generalizá-las; foi isto que deu origem a este Escrito, que estou determinado a publicar apenas para a consideração da sua futilidade para aqueles que estudam este importante ramo de análise.	**CT** **CE**
I_8	Além disso, pode parecer surpreendente que esta forma de considerar o cálculo diferencial não tenha sido oferecida mais cedo aos geómetras, e especialmente que tenha escapado de Newton, inventor do método de série e do método fluxion. Mas observaremos a este respeito que Newton tinha de fato inicialmente utilizado apenas a simples consideração de séries para resolver o terceiro problema do segundo livro de Princípios, no qual procura a lei da resistência necessária para que um corpo pesado descreva livremente uma determinada curva, um problema que depende naturalmente do cálculo diferencial ou fluxional. Sabe-se que Jean Bernoulli encontrou esta solução falsa, comparando-a com a que resulta do cálculo diferencial; e o seu sobrinho, Nicolas, afirmou que o erro provinha do fato de Newton ter tomado o terceiro termo da série convergente em que reduziu	**CT** **CE**

	a ordenada da curva dada, para o segundo diferencial desta ordenada, e o quarto para o terceiro diferencial, em vez do facto de, segundo as regras do cálculo diferencial, estes termos serem, apenas metade, o outro apenas a sexta parte dos mesmos diferenciais. (Ver as Memórias da Academia das Ciências, de 1711, e o volume I das Obras de Jean Bernoulli). Newton, sem responder, abandonou completamente o seu primeiro método, e deu na segunda edição dos Princípios, uma solução diferente para o mesmo problema, baseada no próprio método do cálculo diferencial. Desde então, não se falou mais sobre a aplicação do método da série a este tipo de problemas, apenas para alertar para o mal-entendido em que Newton tinha caído, e para fazer sentir a necessidade de ter em conta a observação de Nicolas Bernoulli. (Ver a Enciclopédia, nos artigos diferenciais, forças.) Mas mostraremos que este mal-entendido não provém da substância do método, mas simplesmente do fato de Newton não ter tido em conta todos os termos a que era necessário atender; e corrigiremos desta forma a sua primeira solução, à qual nenhum dos comentadores dos Princípios fez referência.	
I_9	O objetivo deste Livro é dar a teoria das funções, consideradas como primitivas e derivadas; resolver por esta teoria, os principais problemas de análise, geometria e mecânica, que dependem do cálculo diferencial; e dar por este meio, à solução destes problemas, todo o rigor das demonstrações dos Antigos.	**CT** **CE**

Fonte: Lagrange (1813, tradução nossa).

A partir do seu panorama histórico, Lagrange cita outros dois matemáticos que aplicaram diferentes métodos dos utilizados, Landen (1719-1790) e Arbogast, que, para ele, correspondem à direção correta no desenvolvimento da análise (algébrica), principalmente na Inglaterra.

Este último, Arbogast, é apontado como influenciador de sua TFA (trecho I_7), ou seja, o trabalho desse matemático, que nunca foi publicado, intitulado *Mémoire sur la Nature des Fonctions Arbitraires qui Entrent dans les Intégrales des Équations Différentielles Partielles* (*Memória Sobre a Natureza das Funções Arbitrárias que Integram os Integrais das Equações Diferenciais Parciais*), serviu como aporte inicial para seu trabalho, contendo, principalmente, o desenvolvimento das séries de Taylor. Nesses trechos finais, Lagrange mostra a importância das funções para o cálculo diferencial e realiza a indicação de seu outro trabalho, intitulado *Leçon sur le Calcul des Fonctions* (*Lições sobre Cálculo de Função*), que corresponde a um comentário e complemento de TFA.

Muito embora algumas ideias pertencentes ao desenvolvimento dos infinitesimais estivessem corretas, para Lagrange, elas careciam de provas, ou seja, os fundamentos necessitavam de elementos sólidos para avançar. Essa perspectiva é elencada no decorrer de sua introdução, na qual estabelece críticas às bases fundamentais da análise. De acordo com Grabiner (1981), qualquer surgimento de novos fundamentos ao CI deveria responder às críticas estabelecidas por Lagrange em sua TFA.

Realizado seu passeio historiográfico e epistemológico, Lagrange, em seu capítulo primeiro, realiza o seu modelo de desenvolvimento voltado ao CI.

5.3 TFA – Primeira Parte – Capítulo I

Neste primeiro capítulo, Lagrange prossegue apresentando o desenvolvimento de uma função a partir de série de potências e estabelece nomenclaturas que serão utilizadas no decorrer de seu trabalho.

Quadro 12 – TFA trechos 1 – 7

Trecho	Texto	Categoria
1	Designaremos em geral pela característica f ou F, colocada em frente de uma variável, qualquer função desta variável, ou seja, qualquer quantidade dependente desta variável, e que varia com ela de acordo com uma dada lei. Assim, fx ou Fx irá designar uma função da variável x; mas quando quisermos designar a função de uma quantidade já composta desta variável, como x^2, $a+bx$, etc., enclausuraremos esta quantidade entre dois parênteses. Assim, fx irá designar uma função de x, $f(x^2)$, $f(a + bx)$, etc. irá designar funções de x^2, $a + bx$, etc. Para marcar uma função de duas variáveis independentes, tais como x, y, vamos escrever $f(x, y)$, e assim por diante. Quando quisermos utilizar outras características para marcar funções, teremos o cuidado de as alertar para elas. Portanto, consideremos uma função fx de qualquer variável x. Se, em vez de x, colocarmos $x + i$ em y, sendo i qualquer quantidade indeterminada,	**CT** **CA**

	tornar-se-á $f(x+i)$, e pela teoria das séries, podemos desenvolvê-la numa série desta forma $fx+pi+qi^2+ri^3+etc.,$ em que as quantidades p, q, r etc., coeficientes das potências de i, serão novas funções de x, derivadas da função primitiva x, e independentes da indeterminada i.	
2	Mas para não avançarmos nada gratuitamente, começaremos por examinar a própria forma da série que deve representar o desenvolvimento de qualquer função fx, quando substituímos $x+i$ por x, e que assumimos que deve conter apenas potências inteiras e positivas de i. Esta suposição é de fato verificada pelo desenvolvimento das várias funções conhecidas; mas ninguém, tanto quanto sei, tentou demonstrá-la a priori; o que, no entanto, me parece ainda mais necessário, uma vez que há casos particulares em que ela não pode ter lugar. Além disso, o cálculo diferencial refere-se expressamente a esta mesma suposição, e os casos que são exceções são precisamente aqueles em que este cálculo foi acusado de estar em falta. Em primeiro lugar demonstrarei que na série resultante do desenvolvimento da função $f(x+i)$, não pode haver potência fracionária de i, a menos que seja atribuído x a valores particulares. De fato, é claro que os radicais de i só poderiam vir dos radicais contidos na função primitiva fx, e é claro ao mesmo tempo que a substituição de $x+i$ em vez de x, não poderia aumentar ou diminuir o número destes radicais, nem alterar a sua natureza, desde que x e i sejam quantidades indeterminadas. Por outro lado, sabemos pela teoria das equações, que cada radical tem tantos valores diferentes quanto as unidades do seu expoente, e que cada função irracional tem, portanto, tantos valores diferentes quanto podemos fazer combinações dos diferentes valores dos radicais que contém. Assim, se o desenvolvimento da função $f(x+i)$ pudesse conter um termo da forma $ui^{m/n}$ a função fx seria necessariamente irracional, e teria consequentemente um certo número de valores diferentes, que seriam os mesmos para a função $f(x+i)$, bem como para o seu desenvolvimento. Mas este desenvolvimento sendo representado pela série $fx+pi+qi^2+etc.+ui^{m/n}+etc.,$	**CT** **CE** **CA**

	cada valor de *fx* combinaria com cada um dos n valores do radical $\sqrt[n]{i^m}$; para que a função expandida *f(x + i)* tivesse mais valores diferentes do que a mesma função não desenvolvida, o que é absurdo. Esta demonstração é geral e rigorosa, desde que *x* e *i* permaneçam indeterminados; mas deixaria de o ser, se se desse *x* valores determinados; pois seria possível que estes valores eliminassem alguns radicais em *fx*, que, no entanto, poderiam permanecer em *f(x + i)*. Examinaremos a seguir (cap. IV) estes casos particulares e as consequências que deles decorrem.	
3	Tendo assim sido assegurada a forma geral do desenvolvimento da função *f(x + i)*, vejamos mais especificamente em que consiste este desenvolvimento, e o que cada um dos seus termos significa. Primeiro, vemos que se procurarmos nesta função o que é independente da quantidade i, só temos de fazer *i =0*, o que o reduz a *fx*. Assim, fx é a parte de *f(x+i)*, que permanece quando a quantidade i se torna zero; de modo que *f(x+i)* será igual a *fx* , mais uma quantidade que deve desaparecer quando *i = 0*, e que consequentemente será, ou pode ser presumivelmente, multiplicada por uma potência positiva de *i*: e como acabámos de demonstrar que no desenvolvimento de *f(x+i)*, não se pode introduzir nenhuma potência fracionária de *i*, segue-se que a quantidade em questão só pode ser multiplicada por uma potência positiva e inteira de i; será portanto da forma *iP* , sendo *P* uma função de *x* e *i*, que não se tornará infinita quando *i=0*. Teremos assim $$f(x+i)=fx+iP;$$ portanto *f(x + i) - fx = iP* e portanto divisível por i; uma vez terminada a divisão, teremos $$P=\frac{f(x+i)-fx}{i}$$ Agora, sendo *P* uma nova função de *x* e *i*, podemos igualmente separar dela o que é independente de *i*, e que consequentemente não desaparece quando *i* torna-se nula. Assim, que p seja o que se torna *P* quando temos *i = 0*, p será uma função de *x* sem *i*; e por um raciocínio semelhante ao anterior, provamos que *P = p + iQ*, sendo *iQ* a parte de *P*, que se torna nula quando	**CT** **CA**

$i = 0$, e Q sendo uma nova função de x e i, que não se torna infinita quando $i = 0$.

Teremos assim $P - p = iQ$, e consequentemente divisível por *i*; uma vez terminada a divisão, teremos

$$Q = \frac{P - p}{i}$$

Que q o valor de Q, ao fazer $i = 0$, seja uma função de x sem i, e a parte de Q, que se torna nula quando i se torna nula, será como acima a partir daí formado iR, sendo R uma função de x e i, que não se tornará infinita quando $i = 0$, e que será encontrada ao dividir $Q - q$ por *i* e assim por diante.

Teremos, por este processo,

$$f(x+i) = fx + iP, P = p + iq, Q = q + iR, R = r + iS, etc$$

substituindo, portanto, sucessivamente

$$f(x+i) = fx + iP = fx + ip + i^2Q = fx + ip + i^2q + i^3R = \text{etc.};$$

que dará para o desenvolvimento de $f(x + i)$, uma série da forma que assumimos no início.

4

Digamos, por exemplo, $fx = \frac{1}{x}$, teremos

$$f(x+i) = \frac{1}{x+i};$$

Portanto

$$iP = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = -\frac{i}{x(x+i)};\quad P = -\frac{1}{x(x+i)};\quad p = -\frac{1}{x^2};$$

$$iQ = -\frac{1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x+i)};\quad Q = \frac{1}{x^2(x+i)};\quad q = \frac{1}{x^3};$$

$$iR = \frac{1}{x^2(x+i)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{i}{x^3(x+i)};\quad R = -\frac{1}{x^3(x+i)};\quad r = -\frac{1}{x^4};$$

etc.;

por isso, teremos

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^2(x+i)};$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^3} - \frac{i^3}{x^3(x+i)} = \text{etc.},$$

como resultado da atual divisão.

Tomemos novamente como exemplo a função irracional √x. Assim, teremos

$$fx = \sqrt{x},\quad f(x+i) = \sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP;$$

CA

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Portanto

$$iP = \sqrt{(x+i)} - \sqrt{x} = \frac{i}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};$$
$$P = \frac{1}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}}; \quad p = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

Assim teremos, por exemplo, desta forma,

$$iQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{(x+i)}}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]}$$
$$= -\frac{i}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2};$$
$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}; \quad q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}};$$
$$iR = Q - q = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{i - 2x + 2\sqrt{x} \times \sqrt{x+i}}{4x[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}$$
$$= \frac{i}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{x}}{4x[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3};$$
$$R = \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3}; \quad r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}};$$

etc.

Esta última série é a que se encontra pela extração atual da raiz quadrada ou pela fórmula binomial.

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}$$
$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3} i^3$$
$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{etc.}$$
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>**5**</td>
<td>
Seria difícil realizar estas operações em funções irracionais mais complicadas. mas ao eliminar as irracionalidades no que diz respeito à quantidade i, a aplicação do método já não será difícil.

Assim, utilizando o exemplo anterior, vamos começar pela equação

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP,$$

que sendo elevado ao quadrado para liberar o i abaixo do sinal de radical, torna-se após a divisão por i,

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2;$$

fazendo $i = 0$, P torna-se p, e nós temos

$$1 = 2p\sqrt{x}; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
</td>
<td>**CA**</td>
</tr>
</table>

	Assim, faremos $P = p + iQ$, que sendo substituído, teremos, após a divisão por i, $$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2Q^2.$$ Fazendo $i = 0$, Q torna-se q; por isso temos $$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0;$$ de onde se tira $$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}.$$ Assim, faremos $Q = q + iR$, e assim por diante. Podemos, de fato, encontrar os valores de p, q, r, etc. de uma forma mais eficiente, fazendo imediatamente a equação $$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.};$$ fazendo o quadrado para obter a quantidade i abaixo do sinal, e depois comparando os termos afetados pelos mesma potência de i, para que esta quantidade possa permanecer indeterminada, como supomos; mas o método anterior tem a vantagem de apenas desenvolver a série tanto quanto quisermos e de dar o valor exato do resto. De facto, se quiséssemos, por exemplo, parar no segundo termo pi, teríamos Qi^2 para o valor do restante, e poderíamos determinar Q resolvendo a equação em Q. No exemplo acima, esta equação é $$i^2Q^2 + Q\left(2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x} = 0,$$ para o resolver de tal forma que a expressão de Q não apresente a quantidade i no denominador, basta fazer $Q=1/V$, o que reduzirá a equação a esta forma, $$V^2 + 4V(2x\sqrt{x} + i\sqrt{x}) + 4xi^2 = 0,$$ de onde se tira $$V = -4x\sqrt{x} - 2i\sqrt{x} \pm 4x\sqrt{(x+i)};$$ e uma vez que Q não deve tornar-se infinito quando $i = o$ (art. 3), V não deve tornar-se nulo no	

	mesmo caso; consequentemente, o sinal inferior do radical deve ser tomado; assim $$V = -2\sqrt{x(2x+i)} - 4x\sqrt{(x+i)},$$ E a partir daí $$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x(2x+i)} + 4x\sqrt{(x+i)}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\left[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}\right]^2},$$ Como superior. O mesmo será usado em todos os casos semelhantes.	
6	Mas a principal vantagem do método que expusemos consiste em mostrar como as funções p, q, r, etc. resultam da função principal fx e, sobretudo, em que prova que os restantes iP, iQ, iR etc. são quantidades que devem se tornar zero quando $i = o$; da qual extraímos esta importante consequência, que na série $fx + pi + qi^2 + ri^3$ etc. que surge da expansão de $f\ (x + i)$, podemos sempre tomar i pequeno o suficiente para que qualquer termo seja maior que a soma de todos os termos que o seguem; e que isso também deve ocorrer para todos os valores menores de i. Porque uma vez que os restos de IP, iQ, IR, etc. são funções de i que se tornam nulas, pela própria natureza da expansão, quando $i = 0$, segue-se que, considerando a curva da qual i seria a abcissa, e uma dessas funções a ordenada, esta a curva cruzará o eixo na origem da abscissa; e a menos que este ponto seja um ponto singular, que só pode ocorrer para valores particulares de x, pois é fácil ser convencido disso com um pouco de reflexão e por um raciocínio análogo ao artigo 2; o curso da curva será necessariamente contínuo a partir deste ponto; portanto ele se aproximará do eixo pouco a pouco antes de cortá-lo e, consequentemente, se aproximará dele em uma quantidade menor do que qualquer quantidade dada; de modo que sempre podemos encontrar uma abscissa i correspondendo a uma ordenada menor que uma determinada quantidade; e então qualquer valor menor de i também responderá, para ordenadas menores que: a quantidade dada. Podemos portanto tomar i pequeno o suficiente, sem ser nulo, para que iP seja inferior a **f**x , ou para que iQ seja inferior a p, ou para que iR seja inferior a q, e assim por diante; e portanto para que i^2Q seja inferior a ip, ou para que i^3R seja inferior a i^2q, etc.; portanto, desde (art. 3), $$iP = ip + i^2q + i^3r + \text{etc.}, \quad i^2Q = i^2q + i^3r + \text{etc.}, \quad i^3R = i^3r + \text{etc.},$$	**CA**

	segue-se que me pode sempre ser dado um valor suficientemente pequeno para que cada termo da série $fx + ip + i^2q + i^3r + etc.$ seja maior do que a soma de todos os termos subsequentes; e então qualquer valor de i menor do que este irá sempre satisfazer a mesma condição. Este teorema deve ser considerado como um dos princípios fundamentais da teoria que nos propomos desenvolver; é tacitamente assumido no cálculo diferencial e de fluxo; e é aqui que podemos dizer que estes cálculos dão o maior impulso, especialmente na sua aplicação a problemas geométricos e mecânicos. As dúvidas que possam subsistir sobre a demonstração deste teorema, porque o procedimento que utilizámos para encontrar os restos iP, iQ, iR, etc. só é aplicável às funções algébricas, serão esclarecidas no capítulo V, onde daremos a expressão geral destes restos, e a forma de determinar os seus limites.	
7	Note-se, além disso, que o método que acabamos de apresentar para encontrar sucessivamente os termos da série que representa uma função de $x + i$, desenvolvida de acordo com os potências de i, só pode ser aplicado em geral ao desenvolvimento de uma função de x e i, na medida em que esta função é passível de ser reduzida a uma série que prossegue de acordo com os potências positivas e inteiras de i. Pelo raciocínio do Artigo 2, pelo qual provámos que qualquer função de $x+i$ é, em geral, susceptível desta forma, não poderia ser aplicada a qualquer função de x e i. Mas nos casos em que esta redução é possível, pode-se sempre aplicar à série: resultante do desenvolvimento de acordo com as potências ascendentes de i, a consequência que daí retirámos no artigo anterior, nomeadamente, que a quantidade de i pode ser tomada suficientemente pequena para que qualquer termo da série seja maior do que todos os que se lhe seguem, tomados em conjunto.	**CA** **CE**

Fonte: Lagrange (1813, tradução nossa).

Neste capítulo, Lagrange retorna com sua definição de função, estabelecida em sua introdução. Assim sendo:

> Lagrange toma claramente sua definição para ser inteiramente consistente com este significado "geralmente

> adotado"; ou seja, ele a toma para ser consistente com a ideia de que uma função é uma "quantidade formada de qualquer forma a partir de outra quantidade", como Johann Bernoulli tinha declarado [...] (FERRARO; PANZA, 2012, p. 105, tradução nossa).

Nessa perspectiva, Lagrange discorre sobre a expansão de toda e qualquer função com base em uma série de potência. Consequentemente, para garantir essa generalidade, de acordo com Botazzini (1986), Lagrange mostra que, quando x e i permanecem indeterminados, a série não pode conter potências fracionárias ou negativas de i. No entanto, ainda de acordo com Botazzini (1986), e este é o ponto decisivo, não existe de fato qualquer prova da existência de tal expansão para uma dada função, e sim o caso de a série conter apenas potências positivas de i (trechos 1 a 5).

Nos trechos seguintes, Lagrange comenta as vantagens do seu desenvolvimento, segundo o qual funções primitivas resultam em outras funções e, com isso, as quantidades dessas funções podem se tornar zero quando se admite i = 0, surgindo da expansão de f(x + i), tornando i pequeno o suficiente. Por consequência, qualquer termo torna-se maior que a soma de todos os outros para valores menores de i.

Lagrange demostra sua TFA de forma sistematizada e racional no que diz respeito ao conhecimento da análise. A partir do trecho 7, essa sistematização se torna perceptível, destacando conceitos que irão surgindo durante o seu desenvolvimento. Ainda a partir do trecho citado, a categoria textual (CT), embora presente, não se destaca tanto quanto a algébrica (CA), por ser extremamente necessária para a compreensão de todo o arcabouço de sua ideia, ou seja, o que foi estruturado conceitualmente de forma textual. Lagrange, neste capítulo, expõe matematicamente.

5.4 TFA – Primeira Parte – Capítulo II

Os elementos constantes neste capítulo estabelecem conceitos fundamentais para o desenvolvimento posterior do cálculo.

Trecho	Texto	Categoria(s)
8	Vimos que o desenvolvimento de $f(x+i)$ dá origem a várias outras funções p, q r, etc., todas derivadas da função principal fx, e nós fornecemos o caminho para encontrar essas funções em casos particulares. Mas	**CT** **CA**

para estabelecer uma teoria sobre este tipo de funções, devemos buscar a lei geral de sua derivação.

Para isso, tomemos a fórmula geral

$$f(x+i) = fx+pi+qi^2+ri^3+ \text{etc.}$$

e suponha que o x indeterminado se torne $x+o$ o sendo qualquer quantidade indeterminada independente de i; é aparente que $f(x+i)$ se tornará $f(x+i+o)$, e é visto ao mesmo tempo que se teria o mesmo resultado simplesmente colocando $i+o$ no lugar de i em $f(x+i)$. Portanto, o resultado também deve ser o mesmo, ou colocando i + o em vez de i na série fx +pi+ qi^2+ri^3+ etc., ou colocando x+ o em vez de x.

A primeira substituição dará

$$fx + p(i+o) +q(i+o)^2+r(i+o)^3+\text{etc.} ;$$

Nomeadamente, desenvolvendo as potências de i+o, e escrevendo, por simplicidade, apenas os dois primeiros termos de cada potência, pois a comparação destes termos será suficiente para as determinações de que precisamos,

$$fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+ \text{etc.} ;$$
$$+ po + 2qio +3ri^2o+4si^3o+ \text{etc.}$$

Para fazer a outra substituição, deixe $fx + f'xo +$ etc., $p + p'o$ + etc. $q'o + \text{etc.}$, $r + r'o + \text{etc}$. Se colocarmos $x+o$ para x, e considerarmos no desenvolvimento somente aqueles termos que contêm a primeira potência de o , fica claro que a mesma fórmula se tornará

$$fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+ \text{etc.} ;$$
$$+f'xo+ p'io +qi^2o+r'i^3o+ \text{etc}$$

Como estes dois resultados devem ser idênticos, quaisquer que sejam os valores de i e o, teremos, comparando os termos afetados por o, i^2o, etc., os seguintes resultados

$$p =f'x,\ 2q =p',\ 3r=q',4s=r',\text{etc}$$

Agora, como $f'x$ é a primeira função derivada de fx, é claro que p' é a primeira função derivada de p, que q' é a primeira função derivada de q, r' a primeira função derivada de r, e assim por diante. Portanto, se, por simplicidade e uniformidade, designarmos por $f'x$ a primeira função derivada de fx, por $f''{,}x$ a primeira função derivada de $f'x$, por $f'''x$ a primeira função derivada de Px e assim por diante, teremos

	$$\begin{array}{llll} & p = f'x, & \text{et de là} & p' = f''x; \\ \text{donc} & q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}, & \text{et de là} & q' = \frac{f'''x}{2}; \\ \text{donc} & r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2.3}, & \text{et de là} & r' = \frac{f^{iv}x}{2.3}; \\ \text{donc} & s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{iv}x}{2.3.4}, & & s' = \frac{f^{v}x}{2.3.4}; \end{array}$$ e assim por diante. Portanto, substituindo esses valores na expansão da função *f(x + i)*, temos $$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2.3}i^3 + \frac{f^{iv}x}{2.3.4}i^4 + \text{etc.}$$ Esta nova expressão tem a vantagem de mostrar como os termos da série dependem uns dos outros, e especialmente quando sabemos como formar a primeira função derivada de qualquer função primitiva, podemos formar todas as funções derivadas que a série contém.	
9	9. Vamos chamar a função *fx*, *função primitiva*, com respeito às funções *f'x*, *f''x*, etc. que dela derivam, e vamos chamar estas, funções derivadas, com respeito a esta. Também chamaremos a primeira função derivada de *f''x*, uma função primitiva; a segunda função derivada de *f''x*, uma segunda função; a terceira função derivada de *f'''x*, uma terceira função, e assim por diante. Da mesma forma, se for assumido que *y* é uma função de *x*, nós denotaremos suas funções derivadas por *y'*, *y'', y'''*, etc., de modo que *y* sendo uma função primitiva, *y''* será sua função principal, *y''* será sua segunda função, *y'''* a terceira função, e assim por diante. Para que x se torne *x+i*, *y* se torne $$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \text{etc.}$$ Assim, desde que tenhamos uma forma de obter a função principal de qualquer função primitiva, teremos, pela simples repetição das operações, todas as funções derivadas e, consequentemente, todos os termos da série que resulta do desenvolvimento da função primitiva. Além disso, desde que se conheça o cálculo diferencial, deve-se ver que as funções derivadas *y'*, *y''*, *y'''*, etc., em relação a *x*, coincidem com as expressões $$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{etc.}$$	**CT** **CE** **CA**

Fonte: Lagrange (1813, tradução nossa).

O coeficiente p(x) da linearidade dessa expansão foi definido como “função derivada” ou derivada. Assim, de acordo com Fraser (2005):

> f'(x) é uma nova função de x com uma forma algébrica bem definida, diferente, mas relacionada com a forma da função original f(x). Note que esta concepção é muito diferente da do cálculo moderno, no qual a derivada de f(x) é definida a cada valor de x por um processo limite. No cálculo moderno, a relação da derivada com sua função principal é especificada em termos de correspondências definidas de forma definitiva a cada valor do continuum numérico (FRASER, 2005, p. 261, tradução nossa).

Nesse desenvolvimento, Lagrange descreve suas notações f’(x); f’’(x); f’’’(x) como termos dos coeficientes das expansões, além de inserir o termo *“function derivée*”. Essas notações e terminologias, de acordo com Grabiner (1981) e Caparrini (2014b), foram adotadas universalmente e, com isso, estabeleceram novas bases rigorosas para o cálculo no século XIX a partir de sua TFA.

De acordo com Caparrini (2014b), o desenvolvimento do cálculo de Lagrange tem algumas vantagens sobre os modelos conhecidos na época. O conhecimento preliminar do cálculo diferencial não é assumido, os infinitesimais não são usados, e as derivadas aparecem naturalmente. Acima de tudo, as derivadas de Lagrange são funções, não relações entre diferenciais.

Ao final do Trecho 9, nota-se que Lagrange apresenta a notação utilizada por Leibniz para mostrar que tanto a sua nova notação quanto a de Leibniz são equivalentes. Traz, assim, novamente, o seu desenvolvimento histórico, apresentado em sua introdução.

Não houve dúvidas quanto à necessidade de os fundamentos do CI serem puramente analíticos e, após a publicação de TFA, novos resultados surgiram, como o caso do trabalho de Cauchy sobre análise algébrica.

5.5 TFA – Sobre as categorias analisadas

Conforme exposto, as Categorias Textuais (CT), Epistemológica (CE), Algébrica (CA) e Geométrica (CG) foram elencadas no decorrer dos trechos da Introdução e dos Capítulos I e II, no intuito de identificar esses elementos nos trechos da TFA. Logo, três categorias surgiram no decorrer do trabalho de Lagrange:

5.5.1 – Categoria Textual (CT)

Ao longo de seu texto, Lagrange discorre textualmente sobre as bases históricas conceituais a respeito da Análise, bem como destaca sua compreensão a respeito de elementos conceituais pertencentes ao cálculo.

Assim sendo, essa categoria está presente em todos os capítulos categorizados (alguns mais que outros), incluindo, em alguns trechos, as definições ou conceitos matemáticos. Ou seja, a forma textual também era utilizada para as definições matemáticas.

O uso textual nas definições e conceitos não era algo exclusivo de Lagrange, mas pode ser identificado em trabalhos de matemáticos do século XVIII. O fato de essa categoria ocorrer se dá pelo fato de que, à época, a Matemática infinitesimal estava em fase de construção tanto em questões conceituais quanto em simbólicas e, portanto, ainda não possuía elementos considerados universais para uso.

5.5.2 - Categoria Epistemológica (CE)

A necessidade de maior rigor para o CI levou a comunidade matemática a buscar alternativas que suprissem as dificuldades. No que diz respeito aos infinitesimais, o conceito dos infinitamente grandes e infinitamente pequenos, bem como suas operações, tornaram-se um problema difícil. Uma das tentativas na busca por resoluções desse problema foi o concurso de prêmio em Berlim, consoante descrito no Capítulo 3.

A TFA é identificada como uma dessas alternativas, conforme apontado por Lagrange ao final de sua introdução (I_9). Lagrange utiliza essa categoria – CE –, apresentando diversos conteúdos e direcionamentos históricos no decorrer dos capítulos analisados.

Por exemplo, o capítulo da introdução pode ser organizado da seguinte forma: com o conceito de função e suas bases conceituais, breves citações de contribuições de matemáticos, conceitos das funções primitivas e derivadas, crítica quanto ao uso dos infinitesimais nos trabalhos que dizem respeito a Newton e a Leibniz, acertos quanto ao uso das quantidades infinitamente pequenas (método analítico) no trabalho do matemático inglês John Laden como contraponto ao de Newton, identificação do método analítico para o CI como a verdadeira teoria, suposições quanto ao não uso desse método e objetivos do trabalho.

À vista disso, podemos identificar, em TFA, exigências de bases conceituais mais sólidas pela comunidade científica, expansão de trabalhos em diversos métodos, presentes nesse período, os quais buscavam responder aos questionamentos dos infinitesimais para resolução na área do cálculo, que estavam presentes nesse período, além do desenvolvimento de notações.

5.5.2 – Categoria Algébrica (CA)

A categoria está presente a partir do primeiro capítulo em forma textual, identificada no desenvolvimento do conceito de função, função primitiva e função derivada.

Todo o desenvolvimento descrito na introdução passa a ser clarificado a partir do Capítulo I e também constitui toda e qualquer função como uma construção por meio de série de potência do tipo: $fx + pi + qi^2 + ri^3 + etc.$ E, a partir de sucessivas operações dessa série, encontra os termos dessa série que, segundo ele, representa uma função do tipo $f(x + i)$.

No Capítulo II, Lagrange estabelece as derivações das funções, expondo as notações $f'x$ como sua primeira derivada de fx; $f''x$, a primeira derivada de $f'x$; $f'''x$, a primeira derivada de $f''x$; etc. Da mesma maneira, denota as derivadas de uma função como sendo y', y'', y''', etc., com as notações como formas de facilitar as manipulações algébricas que ocorrem no desenvolvimento de um cálculo. A partir da TFA, Cajori (1993) aponta para uma linha de desenvolvimento algébrico relacionado ao CI, como, por exemplo, o trabalho de Foncenex (1734 – 1799) Lacroix e Arbogast.

Entendemos essa categoria como essencial ao trabalho de Lagrange, pois é a partir dela que toda a TFA irá se desenvolver, ou seja, um método algébrico para o CI.

5.5.3 Categoria Geométrica (CG)

Esta última categoria que elencamos aparece unicamente no trecho I_4, em que Lagrange apresenta as dificuldades no método da compensação de erros como forma de estabelecer as críticas a Newton sobre as quantidades geradas por movimento. Assim sendo, Lagrange identifica esse método como "[...] embora correta em si mesma, não é suficientemente clara para servir de princípio a uma ciência cuja certeza deve ser baseada em provas, e acima de tudo para ser apresentada a iniciantes” (LAGRANGE, 1813, p. 5, tradução nossa).

Dessarte, o direcionamento dado para TFA está no método puramente algébrico, conforme identificamos nos capítulos categorizados neste trabalho.

CAPÍTULO 6 - RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Neste capítulo, seguimos os mesmos passos traçados no capítulo anterior, destacando Carnot com sua obra RMCI.

O trabalho de Lazare Carnot ganhou destaque tanto na França quanto em diferentes países. Fato corroborado pelas traduções feitas em sua primeira edição para o português[14] (1798), alemão (1800), inglês (1800 – 1801), italiano (1803) e russo (1823).

A primeira edição foi publicada em 1797, de acordo com Schubring (2005), algumas semanas depois da *Théorie des Fonctions Analytiques* de Lagrange e depois do primeiro volume do trabalho[15] de Lacroix, formando, assim, um contraponto particularmente ao trabalho de Lagrange, que queria encontrar uma análise sem o conceito do limite e dos infinitamente pequenos.

Carnot concorreu ao prêmio de Berlim na tentativa de responder aos questionamentos propostos pela academia com o trabalho *Dissertation sur la Théorie de l'Infini Mathématique*. Derivado do mesmo trabalho, submeteu um texto que não foi avaliado em 1788 à academia de Dijon, chamado *De Nouvelles Idées sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*. Nesse momento, Carnot estava vivendo um período agitado de sua vida profissional e política, por isso o respectivo texto permaneceu inalterado até sua publicação em 1797, sob o título *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*. Tal fato pode ser observado no "aviso" apresentado no início da primeira edição do seu livro:

> **Há alguns anos**, o autor dessas Reflexões **escreveu-as na forma em que são apresentadas hoje.** Ele agora está encarregado do cuidado, cuja importância não lhe permite reconsiderar suas primeiras declarações; mas como todos anunciam que a cultura da Matemática irá retomar um novo crescimento, pensou-se que pode ser útil dar a conhecer uma Memória onde a Metafísica do Cálculo Diferencial é discutida com grande profundidade e precisão, e onde os vários pontos de referência são reunidos. visão em que esta Metafísica é apresentada (CARNOT, 1797, p. 3, grifo nosso, tradução nossa).

[14] A edição portuguesa foi traduzida pelo brasileiro Manuel Jacinto Nogueira da Gama (conhecido também como barão de Baependi), mesmo tradutor da obra de Lagrange.

[15] O primeiro volume de *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* surgiu em 1797.

A partir dos trabalhos apresentados anteriormente na sua biografia, observa-se que Carnot estava sempre reeditando e republicando seus trabalhos com mudanças significativas. Em 1813, é lançada a segunda edição ampliada de *Réflexions*. Segundo Gillispie (2009),

> Carnot revisou e ampliou uma segunda edição para publicação em 1813 e essa versão tornou a ser periodicamente publicada em Paris, mais recentemente em 1921. Seu livro reconheceu francamente as dificuldades suscitadas pela análise infinitesimal para o senso comum e, embora ficasse reservado às reformas iniciadas por Cauchy, Bolzano e Gauss. Para assentar o cálculo infinitesimal em bases rigorosas, a justificação de Carnot obviamente atendeu, durante bem mais de um século, às necessidades de um público que queria compreender o uso que ele mesmo fazia do cálculo (GILLISPIE, 2009a, p. 410).

Para este trabalho, analisaremos a segunda edição, de 1813, considerando ser essa a versão final do trabalho de Carnot, pois, muito embora existam outras edições, como a de 1823, a de 1860, etc., estas foram reedições publicadas após sua morte e que não possuíram alterações.

6.1 Composição da obra

O RMCI está estruturado em três capítulos: o primeiro contém os princípios gerais da análise; o segundo estabelece a redução a um algoritmo, através da invenção do cálculo diferencial e integral; e o último realiza uma comparação com os outros métodos, como o método de exaustão, o indivisível e o indeterminado etc.

Assim como em TFA, os trechos dos capítulos encontram-se numerados e organizados da seguinte forma:

Quadro 13 – Organização dos trechos em RMCI

Réflexion sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal		
Divisão	**Trechos**	**Quantidades**
Capítulo 1	1 – 38	38
Capítulo 2	39 – 105	66
Capítulo 3	106 – 174	68
Notas	1 – 20	20

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação ao conteúdo constante no trabalho, ele está organizado conforme o sumário abaixo:

Quadro 14 – Sumário de RMCI de 1813

Fonte: Carnot (1813, tradução nossa).

A partir dos elementos apresentados no sumário, percebe-se a existência de vários assuntos discutidos durante o século XVIII (assim como em TFA) e retomados por Carnot para mostrar a importância do CI e saber, segundo ele, “o verdadeiro espírito da análise infinitesimal”. A fim de direcionar para o objetivo da nossa pesquisa, realizamos a análise do Capítulo I por se tratar dos elementos essenciais que impulsionarão o andamento do trabalho de Carnot.

A seguir, realizamos os recortes dos trechos pertencentes ao primeiro capítulo, inserindo-os nas categorias criadas a priori.

6.2 RMCI – Capítulo I

Inicialmente, o autor explana sobre o que será encontrado no trabalho a partir de seus três capítulos. Com isso, trabalha o assunto do âmbito mais geral (primeiro capítulo) para os mais específicos, apresentando, conceituando, definindo e exemplificando seus respectivos métodos. Além disso, cada trecho ou ideia é constituído das enumerações, conforme mostrado no quadro anterior (Quadro 12).

O primeiro capítulo do trabalho compõe-se de 38 trechos que fazem parte do recorte efetuado. Nesse capítulo, Carnot apresenta e enaltece os princípios da análise infinitesimal, bem como as dificuldades de conceituar elementos pertencentes ao CI. Estes também fizeram parte da comunidade matemática e filosófica da época.

Na tentativa de esclarecer alguns conceitos, Carnot define o que, para ele, seria uma quantidade infinitamente pequena em Matemática. Para responder ao seu questionamento, utiliza-se de uma nota de rodapé e, assim, constatamos alguns elementos que subsidiarão o desenvolvimento do restante de seu trabalho: compensação de erros, equações auxiliares, quantidade infinitamente pequena.

Ademais, percebeu-se que o desenvolvimento das definições e das exemplificações é, em grande parte, textual. Nos quadros seguintes, iniciamos a categorização de seu trabalho

O quadro abaixo apresenta o início do seu trabalho:

Quadro 15 – RMCI trechos 1 – 2

Trechos	Texto	Categoria(s)
1	Não há nenhuma descoberta que tenha produzido nas ciências matemáticas uma revolução tão feliz e tão rápida como a da análise infinitesimal; nenhuma forneceu meios mais simples ou mais eficazes de penetrar no conhecimento das leis da natureza. Ao decompor, por assim dizer, corpos até seus elementos, parece ter indicado sua estrutura interna e organização; mas como tudo o que é extremo escapa aos sentidos e à imaginação, nunca fomos capazes de formar mais do que uma ideia imperfeita desses elementos, uma espécie de	**CT** **CE** **CA**

	seres singulares, que às vezes desempenham o papel de quantidades verdadeiras, às vezes devem ser tratados como absolutamente nulos, e que parecem, por suas propriedades equivocadas, manter o meio termo entre a grandeza e o zero, entre a existência e o nada**1**. Felizmente esta dificuldade não impediu o progresso da descoberta: existem certas ideias primitivas que deixam sempre alguma confusão na mente, mas cujas primeiras consequências, uma vez desenhadas, abrem um campo vasto e fácil de explorar. Tal pareceu ser a ideia do infinito, e vários geômetras fizeram o uso mais feliz dela, que talvez não a tivessem aprofundado; contudo, os filósofos não ficaram satisfeitos com uma ideia tão vaga; quiseram voltar aos princípios; mas viram-se divididos nas suas opiniões, ou melhor, na sua forma de considerar os objetos. O meu objetivo neste documento é juntar estes diferentes pontos de vista, mostrar as suas relações, e propor novas relações.	
Notas de rodapé do trecho 1	**1** Eu falo aqui de acordo com as vagas ideias comumente adotadas das chamadas quantidades infinitesimais, quando não nos preocupamos em examinar sua natureza; mas, na verdade, nada é mais simples do que a noção exata desses tipos de quantidades. O que, de fato, é uma quantidade infinitamente pequena em matemática? Nada além de uma quantidade que pode ser tão pequena quanto quisermos, sem sermos obrigados a variar os que estamos procurando. Quais são as quantidades em uma curva, por exemplo, cujo relação queremos obter? Eles são, independentemente dos parâmetros, as coordenadas, normais, subtangentes, raios de curvatura, etc. Bem, dx e dy são quantidades infinitamente pequenas, não porque sejam consideradas muito pequenas, o que é bastante indiferente, mas porque são consideradas capazes de se tornarem ainda menores, por menor que seja a princípio, sem que sejamos obrigados a mudar nada no valor das outras quantidades que acabamos de mencionar, e que são aquelas cuja relação estamos buscando. Ora, resulta desta definição única que toda quantidade infinitamente pequena pode ser desprezada no decorrer do cálculo, com respeito àquelas mesmas quantidades com as quais nos relacionamos, sem o resultado da. O cálculo não	**CT** **CA** **CG**

	pode de forma alguma ser afetado. De fato, ao negligenciar, por exemplo, no decorrer do cálculo dx ou dy, por comparação com qualquer uma das quantidades cuja relação é procurada, como x ou y, o erro cometido é tão pequeno quanto nós queremos isso, já que estamos sempre encarregados de fazer o dx e dy tão pequeno quanto quisermos. Portanto, se o resultado permanecer afetado por esse erro, poderíamos atenuá-lo tanto quanto desejarmos, diminuindo os valores de dx e dy: portanto, esse resultado necessariamente conteria dx ou dy, ou algumas de suas funções. ; O que não é, como sabemos, e o que não pode ser, já que essas quantidades não fazem parte daquelas cuja relação queremos obter: elas entram no cálculo apenas como auxiliares, e esse cálculo é visto como terminado, somente a partir do momento em que todos esses auxiliares forem eliminados. É portanto nesta dupla propriedade, 1º de sempre poder ser feito tão pequeno quanto se deseja; 2º poder sê-lo sem ser obrigado a alterar ao mesmo tempo o valor das quantidades cuja relação se quer encontrar, que consiste no verdadeiro caráter das quantidades infinitamente pequenas. É por falta de atenção à segunda dessas propriedades, que foi deixada por tanto tempo sem uma resposta direta e satisfatória, as objeções capciosas, que tantas vezes foram renovadas contra a exatidão do método leibnitziano. Pois não é uma resposta direta, limitar-se a mostrar em cada caso particular, a conformidade dos resultados deste método com os de outros métodos rigorosos, tais como o da exaustão, o dos limites, ou o da álgebra comum: É fugir à dificuldade e rejeitar, por assim dizer, entre os métodos secundários, aquele que deve ocupar o primeiro lugar, tanto pelo rigor de sua doutrina, que neste aspecto, não cede a nenhum outro, como pela simplicidade de seu procedimento, pelo qual, inquestionavelmente, conquista todos os procedimentos conhecidos até hoje.	
2	A dificuldade de expressar exatamente por equações as diferentes condições de um problema, e de resolver estas equações, pode ter dado origem à ideia de Cálculo Infinitesimal. Quando é demasiado difícil, de fato, encontrar a	**CT** **CE** **CA**

	solução exata de uma questão, é natural tentar pelo menos aproximar-se o mais possível, desprezando as quantidades que dificultam as combinações se se prevê que estas quantidades desprezadas só podem, devido ao seu pequeno valor, produzir um ligeiro erro no resultado do cálculo. É assim, por exemplo, que uma vez que é difícil descobrir as propriedades das curvas, ter-se-á imaginado que são polígonos com um grande número de lados. Se concebermos, por exemplo, um polígono regular inscrito num círculo, é visível que estas duas figuras, embora nunca possam tornar-se idênticas, se assemelham cada vez mais à medida que o número de lados do polígono aumenta, que os seus perímetros, as suas superfícies, os sólidos formados pelas suas rotações em torno de um dado eixo, as linhas análogas conduzidas dentro ou fora destas figuras, os ângulos formados por estas linhas, etc., são, se não forem respectivamente iguais, pelo menos serão tanto mais próximo a igualdade. Quanto maior for o numero de lados Daí que, supondo que este número de lados seja realmente muito grande, poderão sem erro apreciável, atribuir ao círculo circunscrito as propriedades que descobrimos pertencer ao polígono inscrito. Além disso, cada um dos lados deste polígono diminui evidentemente de tamanho, à medida que o número destes lados aumenta; e consequentemente, se supomos que o polígono é realmente de um número muito grande de lados, podemos também dizer que cada um deles é realmente muito pequeno. Isto posto, se por acaso no decorrer de um cálculo surgir uma circunstância particular, na qual as operações poderiam ser muito simplificadas, desprezando, por exemplo, um desses pequenos lados em comparação com uma determinada linha dada, como o raio, ou seja, o raio, empregando no cálculo esta linha em vez de uma quantidade que seria igual à soma feita desta linha e do lado pequeno em questão, é claro que isto poderia ser feito sem inconvenientes, pois o erro que resultaria só poderia ser extremamente pequeno, e não mereceria que se procurasse conhecer seu valor.	**CG**

Fonte: Carnot (1813, tradução nossa).

A priori, Carnot apresenta a análise infinitesimal como um elemento importante e eficaz para as ciências matemáticas. Assim, em seu texto, o propósito é de aproximar os pontos de vista matemáticos e filosóficos no cálculo infinitesimal, relacionados a algumas noções chamadas de “ideias primitivas”, exemplificando com a ideia de quantidades infinitamente pequenas.

Tal fato deve-se pelo fato de o título de seu trabalho conter o termo chamado “metafísica”. Nesse sentido, Carnot precisa esclarecer tais ideias, apresentando sua visão quanto ao que ele compreendia sobre as quantidades infinitamente pequenas, bem como seu significado.

Carnot ainda expõe uma forma de encontrar a solução exata para seu cálculo a partir do método de aproximação, considerando erros que ele mesmo admitia deliberadamente a fim de facilitar os cálculos. Esse erro decorria de a suposição de uma curva ser considerada equivalente a um polígono com uma quantidade de lados muito curtos.

Para Gillispie (2009b), a compensação de erros que justificava o cálculo não significava nem aproximação de elementos retilíneos por uma curva, por um método de exaustão, nem o cancelamento do erro por algum balanço entre o excesso e a falta. Logo, os procedimentos realizados reduziriam o erro ao aceitável ou ao mínimo e, com isso, a compensação eliminaria o erro e tornaria os procedimentos da análise rigorosos.

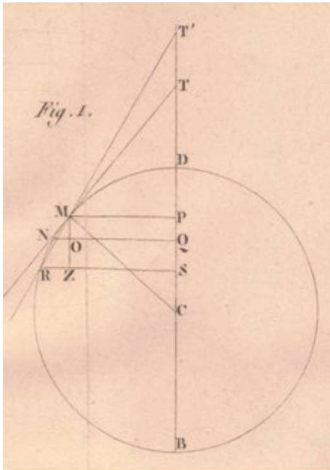
A apresentação e as discussões quanto às dificuldades no desenvolvimento das questões infinitesimais eram a forma de demonstrar a condução de seu método de compensação de erros. Para esclarecer ainda mais esse método, Carnot exemplifica seus cálculos conforme exposto nos trechos (3 – 11) a seguir:

Quadro 16 – RMCI trechos 3 – 11

Trecho	**Texto**	**Categoria(s)**
3	Proponha-se, por exemplo, quer se pretenda levar uma tangente ao ponto M da circunferência MDB (Fig 1)	**CA** **CG**

Seja C o centro do círculo, DCB o eixo; supondo a abscissa $DP = x$, a ordenada correspondente $MP=y$, e TP a subtangente procurada.

Para encontrá-la, vamos considerar o círculo



como um polígono de um número muito grande de lados; Seja MN uma destes lados, prolongado até o eixo; será evidentemente a tangente em questão, já que esta linha não passa no interior do polígono; vamos baixar o MO perpendicular no NQ, paralelo ao MP, e vamos nomear pôr ***a*** o raio do círculo; este posto, vamos obviamente ter $MO:NO::TP:MP$ ou

$$\frac{MO}{NO} = \frac{TP}{y}$$

Além disso, a equação da curva para o ponto M, $yy = 2ax - xx$, será para o ponto N

$$(y + NO)^2 = 2a\,(x + MO) = (x + MO)^2$$

Retirando desta equação a primeira, encontrada para o ponto M, e feita as reduções, temos $\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO}$

Igual a este valor de $\frac{MO}{NO}$ àquele encontrado acima, e multiplicando-se por y, temos

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$$

Se MO e NO fossem conhecidos, teríamos o valor procurado de TP; contudo, estas quantidades MO e NO são muito pequenas, dado que são cada uma menos que o lado MN, que por hipótese é ela própria muito pequena. Por conseguinte (2) estas quantidades podem ser desprezadas sem erros significativos em comparação com as quantidades

	$2y$ e $2x\text{-}2a$ a que são adicionadas. Então a equação é deduzida em $TP = \frac{y^2}{a-x}$ como convinha achar-se	
4	Se este resultado não for absolutamente correto, é pelo menos evidente que na prática pode ser considerado assim, uma vez que as quantidades MO, NO são extremamente pequenas; mas alguém que não tem ideia da doutrina do infinito talvez ficasse muito surpreso se lhe dissessem que a equação $TP = \frac{y^2}{a-x}$ não só está muito próxima da verdadeira, como é perfeitamente exata; no entanto, é algo que é fácil de verificar procurando TP, de acordo com este princípio que a tangente é perpendicular a extremidade do raio; pois é evidente que os triângulos semelhantes CPM, MPT dão CP :MP ::MP : TP ; de onde se deduz $TP = \frac{MP}{CP} = \frac{y^2}{a-x}$, como acima.	**CT** **CA** **CG**
5	Como segundo exemplo, suponhamos que estamos a falar de encontrar a área de superfície de um determinado círculo. Consideremos novamente esta curva como um polígono regular de um grande número de lados; a área de qualquer polígono regular é igual ao produto do seu perímetro por metade da perpendicular conduzida do centro para um dos lados; portanto, sendo o círculo considerado como um polígono de um grande número de lados, a sua área deve ser igual ao produto da sua circunferência por metade do raio; uma proposição tão exata como o resultado acima achado	**CT** **CG**
6	Ainda que possam julgar-se vagas, e pouco exatas estas duas expressões de *muito grande* e *muito pequeno*, ou as suas equivalentes, possam aparecer, é claro a partir dos dois exemplos anteriores se deduz sua utilidade nas combinações matemáticas, e o quanto seu uso pode facilitar a solução das várias questões que forem propostas; pois, uma vez admitida a sua noção, todas as curvas, bem como o círculo, podem ser consideradas como polígonos com um grande número de lados, todas as superfícies podem ser divididas em muitas faixas ou zonas, todos os corpos em corpúsculos, todas as quantidades, numa palavra, podem ser decompostas em partículas do mesma espécie. Daqui nascem muitas relações, e novas combinações, e pelo exemplo	**CT** **CE**

	acima exposto se pode facilmente julgar suas utilidades, e recursos que deve ministrar ao cálculo a introdução destas quantidades	
7	Mas a vantagem destes métodos é muito mais considerável do que se esperava inicialmente, pois decorre dos exemplos relatados que o que inicialmente era considerado como um mero método de aproximação leva, pelo menos em alguns casos, a resultados perfeitamente exatos. Seria, portanto, interessante poder distinguir aqueles onde isto acontece, e reduzir a eles todos os outros quanto for possível, e assim mudar este método de aproximação para um cálculo perfeitamente e exato e rigoroso. Este é o objetivo de uma análise infinitesimal.	**CT** **CE**
8	Portanto, vejamos primeiro como na equação $TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$ encontrado (3), pode ser que desprezando MO e NO não tenha alterado a precisão do resultado, ou melhor, como este resultado se tornou correto pela supressão destas quantidades, e porque não era correto antes. Agora, podemos simplesmente justificar o que aconteceu na solução do problema acima, observando que a hipótese a partir da qual começamos a ser falsos, uma vez que é absolutamente impossível que um círculo possa alguma vez ser considerado como um verdadeiro polígono, qualquer que seja o número de lados, esta hipótese deve ter resultado em algum erro na equação $$TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$$ E que o resultado $TP = \frac{y^2}{a-x}$ é, no entanto, certamente exato, como se prova pela comparação dos dois triângulos *CPM*, *TPM*, *MO* e *NO* na primeira equação, e teve mesmo de ser negligenciado para retificar o cálculo, e destruir o erro que tinha sido causado pela falsa suposição a partir da qual tinha começado.	**CA** **CG**
9	O resultado exato $TP = \frac{y^2}{a-x}$ só foi, portanto, obtido por compensação de erro; e esta compensação pode ser ainda mais sensível ao tratar o exemplo acima referido de uma forma ligeiramente diferente,	**CA** **CG**

	ou seja, ao considerar o círculo como uma curva verdadeira, e não como um polígono. Para o fazer, por um ponto *R*, tomado arbitrariamente a qualquer distância do ponto *M*, ou conduzir a linha *RS* paralela à *MP*, e pelos pontos *R* e *M* desenhar a *RT* secante'; teremos obviamente *T'P :MP::MZ :RZ*, e portanto *T'P*, ou TP + T'T = $MP\frac{MZ}{RZ}$. Dito isto, se imaginarmos que o RS se move paralelamente a si próprio aproximando-se continuamente do *MP*, é visível que o ponto *T′* irá ao mesmo tempo aproximar-se cada vez mais do ponto *T′*, e que podemos, portanto, fazer a linha *T′ T* tão pequena quanto quisermos, sem que a proporção estabelecida acima deixe de se verificar. Portanto, se eu negligenciar esta quantidade de *T'T* na equação que acabo de encontrar, o resultado será um erro na equação $TP = MP\frac{MZ}{RZ}$ ao qual o primeiro será então reduzido; mas este erro pode ser atenuado tanto quanto se desejar, fazendo com que o RS se aproxime do MP tanto quanto for necessário: ou seja, a proporção dos dois membros desta equação difere tão pouco quanto se desejar da proporção de igualdade. Da mesma forma temos $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$ e esta equação é perfeitamente precisa, qualquer que seja a posição do ponto *R*, ou seja, quaisquer que sejam os valores de *MZ* e *RZ*. Mas quanto mais próximo o *RS* se aproximar do MP, mais pequenas serão estas linhas *MZ* e *RZ*, e portanto, se forem negligenciadas no segundo membro desta equação, o erro resultante na equação $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x}$, à qual será então reduzida, pode, tal como a primeira, ser feito tão pequeno quanto se julgue adequado. Assim sendo, sem ter em conta erros que poderei sempre atenuar o quanto quiser, trato as duas equações $TP = MP\frac{MZ}{RZ}$ e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x}$ que acabo de encontrar como se fossem perfeitamente exatas uma e a outra; substituindo assim na última	

	o valor de $\frac{MZ}{RZ}$ retirado da outra, tenho como resultado $TP = \frac{y^2}{a-x}$ como acima. Este resultado é perfeitamente correto, uma vez que é consistente com o obtido pela comparação dos triângulos CPM, MPT; e no entanto as equações $TP = y\frac{MZ}{RZ}$ e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ das quais foi derivado, estão certamente ambas erradas, uma vez que a distância de RS a MP não foi assumida como sendo zero, ou mesmo muito pequena, mas igual a alguma linha arbitrária. Portanto, é necessário que os erros se tenham compensado mutuamente, comparando duas equações erradas	
10	Aqui está, então, o fato dos erros compensados bem adquiridos e bem provados; trata-se agora de explicá-los, de procurar o sinal em que se reconhece que a compensação tem lugar em cálculos semelhantes ao anterior, e os meios de a produzir em cada caso particular. Contudo, basta notar que os erros nas equações $TP = y\frac{MZ}{RZ}$ e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ podem ser feitos tão pequenos quanto se queira, o erro que ocorreria se houvesse um na equação resultante $TP = \frac{y^2}{a-x}$, poderia também ser feito tão pequeno quanto se queira, e que dependeria da distância arbitrária das linhas MP, RS. Contudo, não é este o caso, uma vez que o ponto M passa ou deve passar a tangente, dado que não há quantidade arbitrária a, x, y, TP nesta equação, pelo que não pode haver erro nesta equação. Daí resulta que a compensação de erros que estavam nas equações $TP = y\frac{MZ}{RZ}$ e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, se exprime no resultado, pela ausência das quantidades *MZ*, *RZ* que causaram esses erros ;e que, portanto, após ter introduzido estas quantidades no cálculo para facilitar a expressão das condições do problema, e tendo-as tratado nas equações que as expressaram, como nulas em comparação com as quantidades propostas, a fim de simplificar estas equações, basta eliminar estas mesmas quantidades das equações onde ainda	**CA**

	podem ser encontradas, para remover os erros que elas tinham causado, e obter um resultado perfeitamente preciso.	
11	O inventor foi assim levado à sua descoberta por um raciocínio muito simples: Se, em vez de uma quantidade proposta, ele poderia dizer, substituo no cálculo outra, que não lhe seja igual, resultara em um erro qualquer; mas se a diferença entre as quantidades utilizadas uma para a outra for arbitrária, e se eu a poder fazê-la tão pequena quanto quiser, este erro não será prejudicial; poderia mesmo cometer vários erros semelhantes ao mesmo tempo sem qualquer desvantagem, uma vez que continuarei sempre mestre no grau de precisão que desejo dar aos meus resultados. Há mais do que isso; pode acontecer que estes erros se compensem mutuamente, para que os meus resultados sejam perfeitamente exatos. Mas como pode esta compensação ser feita, e em qualquer caso? Isto é o que um pequeno pensamento nos pode ter levado a descobrir; de fato, como o inventor pode ter dito, suponhamos por um momento que a compensação desejada tem lugar, e vejamos com que sinal ela se deve manifestar no resultado do cálculo. Ora, o que deve naturalmente ter acontecido é que as quantidades que causaram estes erros desapareceram, e os erros também; para estas quantidades como MZ, RZ tendo por hipótese valores arbitrários, não devem entrar nas fórmulas ou resultados que não são, e que se tornaram exatos por suposição, dependem apenas, não da vontade do calculador, mas da natureza das coisas de que se propôs encontrar a relação expressa por estes resultados. Assim, o sinal de que a compensação desejada está a ter lugar é a ausência das quantidades arbitrárias que produziram estes erros; e, por conseguinte, para efetuar esta compensação, é apenas uma questão de eliminar estas quantidades arbitrárias. Tentemos agora dar a estas ideias o grau de precisão e generalidade que elas exigem.	**CA** **CT**

Fonte: Carnot (1813, tradução nossa).

Para justificar o método estabelecido incialmente, Carnot utiliza-se do desenho de uma tangente a um círculo em um ponto m. O sistema principal, o *design* do sistema, inclui particularmente o círculo. Para resolver o problema, um sistema auxiliar é formado, tornando o círculo um polígono com muitos lados, em que aumentar ou diminuir o número de lados leva à aproximação do sistema auxiliar ao sistema principal. No decorrer de seu texto, Carnot, a partir desse sistema, mostra equações que derivam de outras equações a partir da compensação de erros. Dessa maneira, as vantagens do uso do método da compensação de erros tornam-se um método exato com possíveis generalizações.

Este não era um método novo, pois o primeiro a propor esse tipo de sistema foi o filosofo clérigo George Berkeley (1685 – 1753), em seu trabalho chamado *The Analyst* (1734), no qual realiza críticas às ideias de Newton e Leibniz sobre os infinitesimais.

Carnot generaliza o exemplo, afirmando que a teoria dos infinitos deve ser um cálculo da compensação de erros, pois, muito embora os resultados encontrados pareçam aproximações, são resultados exatos. Schubring (2005) destaca:

> Substituir o círculo por um polígono já apresenta um erro. Mas esse erro nas equações é compensado diretamente pelo segundo erro introduzido, negligenciando as quantidades arbitrariamente pequenas no e mo [...] A solução do problema é introduzir algumas quantidades indeterminadas. Isso permite que alguns erros sejam cometidos, desde que sejam mantidos arbitrariamente pequenos. Uma vez que estes indeterminados tenham sido eliminados durante o curso das operações, pode-se ter certeza de que os erros cometidos foram compensados, e o resultado exato foi alcançado (SCHUBRING, 2005, p. 342, tradução nossa).

Entretanto, para Panza (1992), se o exemplo (trechos 4 ao 9) mostra um caso em que a compensação ocorre de fato, não há garantia, em princípio, de que o mesmo procedimento levará, em todos os casos, ao resultado desejado e pode, portanto, ser conduzido à necessidade de comprovação. Logo, a partir do reconhecimento a posteriori da correção de um resultado, deve-se passar à justificação da validade geral do método.

Tal validade geral, de acordo com Carnot (1813), tornar-se-ia o objetivo da análise infinitesimal. Em Berkeley e Carnot, vê-se a sustentação para o uso da compensação de erros, e, de acordo com Schubring (2005), as abordagens estabelecidas foram corroboradas também a partir de um comentário de Lagrange em *Note sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (*Notas sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal*):

> É aqui como no método do infinitamente pequeno, onde o cálculo também retifica de si mesmo as falsas suposições que alguém faz ali. Pode-se imaginar, por exemplo, que uma curva é um polígono de infinitos lados pequenos, sendo que cada um deles sendo prolongado se torna uma tangente à curva. Essa suposição é realmente falsa, pois o lado pouco prolongado nunca pode ser outro senão um verdadeiro secante; mas o erro é destruído por outro erro, que é introduzido no cálculo negligenciando como quantidades nulas que, de acordo com a suposição, são infinitamente pequenas (LAGRANGE, 1877, p. 598, tradução nossa).

As exemplificações, em grande parte geométricas no texto de Carnot, sempre passam por conceitos ou definições que foram estabelecidas a priori. Ainda nesse contexto, Carnot, a partir do exemplo, afirma a importância da utilização dos termos “muito grande” e “muito pequeno” para facilitar a análise.

Após os estabelecimentos das ideias essenciais, RMCI passa a trazer rigor a essas ideias, apresentando as definições, teoremas e corolários, conforme veremos a seguir:

Quadro 17 – RMCI trechos 12 – 23

Trecho	Texto	Categoria(s)
12	**DEFINIÇÕES** As quantidades são geralmente diferenciadas em quantidades constantes e variáveis. As quantidades que são chamadas *constantes* ou determinadas são aquelas cujos valores são assumidos como fixas; e as que são chamadas variáveis ou *indeterminadas* são aquelas às quais é possível atribuir sucessivamente valores diferentes. Mas deve ser observado que a expressão de quantidades variáveis não pode ser tomada num sentido absoluto, porque uma quantidade pode ser mais ou menos indeterminada, mais ou menos arbitrária; e é precisamente sobre os vários graus de indeterminação a que a quantidade em geral é susceptível que repousa toda a análise, e mais particularmente este ramo que é chamado *análise infinitesimal.*	**CT** **CE**
13	Divido todas as quantidades admitidas num cálculo em três classes. 1º. As que são determinadas e invariáveis pela natureza da própria questão. 2º. As que são variáveis no início, depois assumem valores determinados por convenções ou hipóteses subsequentes. 3º. Finalmente, aqueles que devem permanecer sempre indeterminados.	**CT** **CA**

	Da primeira destas três classes são o que se chama constantes ou dados, tais como parâmetros em curvas. Do segundo são as variáveis ordinárias, tais como as coordenadas das curvas, subtangentes, normais etc., às quais são atribuídos determinados valores quando precisamos descobrir as suas propriedades ou relações. Da terceira são as que são mais ou menos independentes das duas primeiras classes, e que também permanecem mais ou menos arbitrárias, até que o cálculo esteja completamente terminado, e por esta razão chamarei sempre *quantidades variáveis*. Mas embora as quantidades desta terceira classe permaneçam sempre variáveis, não são por isso inteiramente arbitrárias, e tal como as simples variáveis que compõem a segunda classe estão ligadas às constantes que compõem a primeira, por equações ou condições de algum tipo, em virtude das quais só podem variar de acordo com certas leis, assim também as quantidades que são sempre variáveis estão ligadas às variáveis e dados ordinários, tanto pelas condições da própria questão como pelas hipóteses sobre as quais o cálculo é estabelecido, de modo que elas próprias só podem variar de acordo com certos modos.	
14	Chamo uma quantidade infinitamente pequena, qualquer quantidade que seja considerada como continuamente decrescente, para que possa ser feita tão pequena quanto se deseje, sem ser obrigada para esse fim a variar aqueles cuja relação se procura. Quando queremos encontrar a relação de certas quantidades propostas, algumas constantes, outras variáveis, consideramos o sistema geral como tendo atingido um determinado estado que consideramos fixo: depois comparamos este sistema fixo com outros estados do mesmo sistema, que são considerados como aproximando-se continuamente do primeiro, até que se diferenciam tão pouco quanto desejamos. Estes outros estados do sistema são, portanto, a rigor, apenas sistemas auxiliares, que são postos em jogo para facilitar a comparação entre as partes do primeiro. As diferenças nas quantidades que correspondem umas às outras entre todos estes sistemas podem, portanto, ser consideradas tão pequenas quanto se deseja, sem alterar nada nas quantidades que compõem o primeiro sistema, e que são aquelas	**CT** **CE** **CA**

	cuja relação é procurada. Estas diferenças são portanto da natureza das quantidades a que chamamos infinitamente pequenas: uma vez que são consideradas como continuamente decrescentes, e como podendo tornar-se tão pequenas quanto desejamos, sem que por isso sejamos obrigados a mudar nada no valor daqueles cuja relação procuramos. A unidade dividida por uma quantidade infinitamente pequena é chamada uma quantidade infinita ou infinitamente grande. Sob o nome de quantidades infinitesimais, entendemos quantidades infinitas e aquelas que são infinitamente pequenas. A análise infinitesimal nada mais é do que a arte de empregar quantidades infinitesimais de forma auxiliar, a fim de descobrir as relações que existem entre as quantidades propostas.	
15	Em primeiro lugar, vemos que, como simples auxiliares, todas estas quantidades chamadas infinitesimais e as suas funções devem necessariamente ser excluídas dos resultados do cálculo. Uma vez que estes resultados devem ser a expressão das relações prescritas pelas condições da questão proposta, só podem conter as quantidades entre as quais essas relações existem. Por conseguinte, as quantidades que foram utilizadas apenas de forma auxiliar não devem continuar a ser incluídas. Só foram utilizados no início do cálculo para facilitar a expressão das condições; mas uma vez que este objeto tenha sido cumprido, não podem permanecer nas fórmulas, pelo que devem necessariamente ser eliminados. Além disso, é da sua essência que só podem ser utilizados a título auxiliar, uma vez que a sua natureza deve ser sempre variável, mesmo quando as quantidades cujo resultado do cálculo deve exprimir a relação recebem valores definitivos; se estivessem neste resultado, fá-lo-iam variar quando ele deve permanecer fixo; e, de facto, os resultados desta nova análise não podem ser diferentes dos da análise ordinária; portanto, como esta não admite quantidades infinitesimais, é necessário que as que podem ser admitidas na outra acabem sempre por ser eliminadas.	**CT** **CA**
	Vemos do acima exposto que as quantidades chamadas infinitamente pequenas em Matemática	

16	não são quantidades que são atualmente zero, nem mesmo quantidades que são atualmente inferiores a tais ou tais grandezas determinadas, mas apenas quantidades para as quais as condições da questão proposta e as hipóteses sobre as quais o cálculo é estabelecido, permitem permanecer variáveis, até que o cálculo seja inteiramente concluído, diminuindo continuamente, até que se tornem tão pequenas quanto se quer, sem que se seja obrigado a alterar ao mesmo tempo os valores daqueles dos quais se quer obter a relação. É só nisto que reside o verdadeiro carácter das quantidades a que demos o nome de infinitamente pequenas, e não na tenuidade com que o seu nome parece implicar que elas são realmente dotadas, nem na absoluta nulidade que lhes poderíamos atribuir; e a noção, como vemos, é perfeitamente simples, e livre de qualquer ideia vaga ou controversa.	**CT** **CA**
17	Para evitar circunlocuções, entenderei no seguinte sob o nome de quantidades designadas, todas aquelas que compõem as duas primeiras classes das quais falámos (13), ou seja, todas aquelas que são sujeitas à análise ordinária, e das quais se pretende obter a relação ou que podem entrar no resultado do cálculo. Pelo contrário, chamarei quantidades não designadas, todas aquelas que compõem a terceira classe, ou seja, aquelas que permanecem sempre variáveis, e que são, por conseguinte mais ou menos independentes das que compõem as duas primeiras classes. Assim, é entre as quantidades não designadas que se deve contar as quantidades infinitesimais, e de acordo com as definições dadas acima, é fácil ver que as quantidades infinitamente pequenas não passam de quantidades não designadas, que são consideradas para diminuir gradual e simultaneamente, até se tornarem tão pequenas quanto se quer.	**CT**
18	Vamos aplicar tudo o que acabou de ser dito ao exemplo já discutido. O raio MC dado (fig.1), é uma quantidade determinada, desde o início pela própria natureza da questão; assim é designado, e da primeira classe das que falamos (13). As linhas DP, MP, TP, MT, são inicialmente variáveis, e só se tornam determinadas pela hipótese subsequente de que a tangente deve passar pelo ponto M; mas uma vez feita esta hipótese, todas estas quantidades devem ser consideradas como fixas, até ao fim do cálculo:	**CT** **CG**

	Assim são também designadas quantidades, e da segunda classe das que falamos (13), estas mesmas quantidades que são as coordenadas, a tangente e a subtangente da curva no ponto M, compõem assim com a constante *MC*, e as que são funções de algum tipo, o sistema geral de quantidades designadas, ou seja, aquelas cuja relação é procurada, e que só elas podem entrar no resultado do cálculo, ou fazer o sujeito de álgebra comum. Pelo contrário, as linhas *DQ NQ*, *TQ, T'Q*, *MZ*, *RZ*, etc., não são funções. Pelo contrário, as linhas *DQ NQ*, *TQ*, *T'Q*, *MZ*, *RZ* , etc. são aquelas a que chamámos quantidades não designadas, e que formam a terceira classe que mencionámos (15), porque são sempre variáveis: pois como continuamos sempre mestres em fazer *MZ* e *RZ* tão pequenas quanto queremos, sem alterar o valor das quantidades designadas de que falámos acima; estas quantidades *MZ*, *RZ*, são das que chamamos infinitamente pequenas, e as outras *DQ*, NQ, TQ, *T'P*, *T'Q*, que são obviamente funções destas quantidades infinitamente pequenas, também permanecem sempre variáveis, e consequentemente, são das que chamamos quantidades *não designadas.*	
19	Diz-se que quaisquer duas quantidades são *infinitamente pouco diferentes* uma da outra, quando o quociente de uma pela outra difere da unidade apenas por uma quantidade infinitamente pequena. Diz-se que uma quantidade é infinitamente pequena em relação a outra quantidade, quando o quociente da primeira pela segunda é uma quantidade infinitamente pequena: e inversamente então diz-se que a segunda é infinita ou infinitamente grande em relação à primeira. Vemos por isso que uma quantidade, mesmo uma quantidade infinitamente pequena, pode ser infinitamente grande em relação a outra quantidade; e que, inversamente, uma quantidade, mesmo uma quantidade infinitamente grandes, pode ser infinitamente pequena em relação a outra quantidade. Pois se supusermos que x, por exemplo, é uma quantidade infinitamente pequena, x^2 será uma quantidade infinitamente pequena em relação à primeira, mesmo que a primeira seja ela própria infinitamente pequena, uma vez que a razão entre a segunda e a primeira é x, o que por hipótese é uma quantidade infinitamente pequena.	**CT** **CA**

	Do mesmo modo, se X representar uma quantidade infinitamente grande, será, no entanto, infinitamente pequena em relação a X^2, uma vez que o quociente deste último pelo primeiro será X, que por hipótese é uma quantidade de	
20	Esta observação dá lugar a uma distinção entre quantidades infinitesimais em diferentes ordens. Se x, por exemplo, for tomado para representar uma quantidade infinitamente pequena da primeira ordem, x^2 será uma quantidade infinitamente pequena da segunda ordem, x^3 uma quantidade infinitamente pequena da terceira ordem: e assim por diante. Da mesma forma, se X for tomado para representar uma quantidade infinitamente grande da primeira ordem, x^2 será uma quantidade infinitamente grande da segunda ordem, X^3 uma quantidade infinitamente grande da terceira ordem: e assim por diante. Diz-se que duas quantidades de qualquer ordem são da mesma ordem quando a sua relação é uma quantidade finita. Sempre que duas quantidades de qualquer ordem forem adicionadas, ou subtraídas uma da outra, Pune será infinitamente pequena em relação à outra, esta será chamada a quantidade principal, e a outra quantidade acessória. Assim, por exemplo, na soma $X + x$, das quantidades mencionadas, X é a quantidade principal, e x é a quantidade incidental; e na soma x $+ x^2$, x é a quantidade principal, e x^2 é a quantidade incidental.	**CT** **CA**
21	Como é importante que os vários conceitos dados acima se tornem familiares, iremos entrar em mais alguns detalhes sobre este assunto. O objetivo de qualquer cálculo se reduz a encontrar as relações que existem entre certas quantidades propostas; mas a dificuldade de encontrar essas relações imediatamente obriga a recorrer ao intermediário de algumas outras quantidades que não fazem parte do sistema proposto, mas que, por sua conexão com a primeira, podem servir como intermediários entre elas. O primeiro passo consiste, portanto, em expressar as relações que todos têm em comum, após o que as que são introduzidas apenas como auxiliares são eliminadas do cálculo, a fim de obter, entre as quantidades propostas isoladamente, as relações imediatas que se desejava descobrir. O primeiro	**CT** **CA**

	passo consiste, portanto, em expressar as relações que todos têm em conjunto, após o que as que são introduzidas apenas como auxiliares são eliminadas do cálculo, a fim de obter, entre as quantidades propostas isoladamente, as relações imediatas que se desejava descobrir. Quando entre estas quantidades auxiliares há algumas de tal natureza que se pode fazê-las todas de uma só vez, sem ao mesmo tempo variar as quantidades propostas; esta circunstância dá origem a simplificações acidentais muito importantes, e são precisamente estas simplificações que deram origem àquele ramo de cálculo que é chamado de análise infinitesimal; que nada mais é do que a arte de escolher auxiliares semelhantes, os mais adequados de acordo com os diferentes casos, de utilizá-los da forma mais vantajosa, para expressar as condições das diversas questões, e depois eliminar essas mesmas quantidades, de modo que somente as quantidades cujas relações se quisesse conhecer permanecessem nas fórmulas.	
22	Dito isto, concebamos qualquer sistema de quantidades, algumas constantes, algumas variáveis, e encontremos qualquer relação ou relação entre elas. Para estabelecer o nosso raciocínio, comecemos por considerar o sistema geral em algum estado determinado que consideraremos como fixo. Examinemos as relações que existem entre as várias quantidades deste sistema fixo; são estas quantidades e as que dependem exclusivamente delas que chamamos quantidades designadas (17). Consideremos agora o sistema proposto em qualquer novo estado diferente do primeiro, e uma vez que cada uma das quantidades que o compõem é apenas uma quantidade auxiliar, uma vez que este novo estado é imaginado apenas para encontrar mais facilmente as relações das quantidades que compõem o primeiro, chamemos a este novo estado do sistema, sistema auxiliar. Vamos finalmente conceber que este sistema auxiliar se aproxime gradualmente do sistema fixo, de modo a que todas as quantidades auxiliares que compõem o primeiro se aproximem simultaneamente das quantidades designadas que lhes correspondem no sistema fixo; tanto assim que se é mestre em assumir as suas respectivas diferenças, todas ao mesmo tempo que se é	**CT** **CA**

	pequeno como se quer; estas respectivas diferenças serão aquilo a que chamámos quantidades infinitamente pequenas (14). Uma vez que as quantidades deste segundo sistema são puramente auxiliares, não podem entrar no resultado do cálculo, uma vez que este resultado é apenas a expressão das relações que existem entre aqueles que compõem o primeiro; daí decorre que as quantidades infinitamente pequenas de que acabámos de falar, e todas as suas funções, devem necessariamente ser excluídas deste mesmo resultado.	
23	Agora pergunto-me o que teria acontecido, se no decurso do cálculo tivéssemos encontrado uma quantidade constante, e uma destas quantidades infinitamente pequenas somadas, e considerando que esta última pode ser assumida tão pequena quanto quisermos, enquanto a outra não muda, desprezando-a para simplificar o cálculo, por não ter importância em relação à primeira. A conclusão natural seria provavelmente que o erro assim causado poderia ser sempre tão pequeno quanto se desejasse, diminuindo cada vez mais o valor arbitrário da quantidade desprezada. Mas para que isto aconteça, este valor arbitrário em si ou algumas das suas funções devem entrar no resultado deste cálculo: caso contrário, não teria qualquer influência sobre ele e não poderia, portanto, servir para o retificar pela sua diminuição sucessiva. Assim, se não se encontrar lá, é uma prova de que o erro terá retificado a si mesmo: pois de acordo com o progresso do cálculo, se ainda existisse, só poderia ser infinitamente pequeno; mas não pode ser assim, uma vez que não há "erro" no cálculo. de quantidade infinitamente pequena no resultado: por conseguinte, o erro cometido no decurso do cálculo deve ter desaparecido de alguma forma, e é isto que as propostas seguintes demonstrarão rigorosamente.	**CT** **CA**

Fonte: Carnot (1813, tradução nossa).

A partir do trecho 12, Carnot apresenta uma série de definições, de forma não só a complementar sua ideia referente ao cálculo infinitesimal, mas também para proporcionar um certo respaldo e rigor matemático.

Neste sentido, o autor distingue e define as relações entre quantidades em três classes: a primeira trata das quantidades constantes ou determinadas, cujo valor é assumido como fixo e estabelecido com base na natureza do próprio problema; a outra aborda a classe das quantidades "inicialmente variáveis", que, embora supostamente indeterminadas na formulação do problema, recebem uma determinação no decorrer de sua solução; a última se refere à classe das quantidades que ele chama de "variáveis", as quais permanecem indeterminadas até a conclusão definitiva do "cálculo". É essa última classe que pertence àquelas quantidades geralmente chamadas infinitamente pequenas, que não devem ser consideradas como muito pequenas ou nulas.

Após o estabelecimento das diferenciações entre classes, Carnot trabalha com uma espécie de "sistema". Esse sistema é apresentado com quantidades fixas e variáveis e, assim, o matemático realiza comparações com essas quantidades a partir de uma figura geométrica. De acordo com Schubring (2005),

> [...] sistema é o conceito básico de análise para Carnot que serve como um substituto para o conceito de função, que ainda não era aplicado em geral como um conceito básico. Embora Carnot utilize o conceito de variáveis, este é secundário em relação ao do sistema. Assim, a compreensão da matemática por Carnot ainda é dominada pelo modelo tradicional de geometria, com as suas figuras (estáticas) como principal objeto de estudo (SCHUBRING, 2005, p. 335, tradução nossa).

O uso de dois "sistemas", um fixo e outro "modificado", que ele chama de auxiliar, também era praticado como forma de comparação. De acordo com Carnot, o sistema modificado se aproximaria continuamente do primeiro sistema "tão pouco como se desejar". Após as percepções das diferenças entre esses dois sistemas, as quantidades pertencentes ao sistema auxiliar deveriam ser descartadas (ver trecho 14).

Ainda nessa discussão sobre sistemas, Carnot mais uma vez define o que para ele seria uma quantidade infinitamente pequena (trecho 14 e 16) para, assim, redefinir as suas classes, chamando as duas primeiras de *quantidades designadas*, e a última, de *não designadas*.

De acordo com Gillispie (2009a), essas últimas quantidades chamadas de *não designadas* poderiam tornar-se muito pequenas a critério do matemático e se relacionavam com as quantidades da segunda classe por um sistema de equações, enquanto estas últimas se relacionavam com as quantidades da primeira classe por um outro sistema de equações.

Para clarificar suas definições e teorias, o autor passa então a exemplificá-las e, em seguida, a demonstrá-las a partir de princípios, corolários e teoremas, conforme os trechos abaixo.

Quadro 18 – RMCI trechos 24 – 38

Trecho	Texto	Categoria(s)
24	**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL** *Duas quantidades não arbitrárias podem diferir uma da outra apenas por uma quantidade não arbitrária.* Demonstração. Uma vez que as duas quantidades propostas não são arbitrárias, nada pode ser alterado para nenhuma delas; portanto, também nada pode ser alterado para a sua diferença: portanto, a diferença não é arbitrária. O que tinha de ser demonstrado.	**CT**
25	**PRIMEIRO COROLÁRIO** *Duas quantidades não-arbitrárias são rigorosamente iguais uma à outra, a partir do momento que a sua alegada diferença pode ser assumida como sendo tão pequena quanto queremos que seja.* De fato, que P e Q sejam as duas quantidades não arbitrárias propostas; acabámos de ver, que a sua diferença não pode ser arbitrária: não pode, portanto, ser assumida tão pequena quanto se quer, o que é contra a hipótese. Portanto, esta alegada diferença não existe. Assim, as duas quantidades propostas P, Q, são rigorosamente iguais.	**CT**
26	**COROLÁRIO II** *Para ter a certeza de que duas quantidades designadas são estritamente iguais, é suficiente provar que a sua diferença, se existir, não pode ser uma quantidade designada.* As quantidades designadas são quantidades não arbitrárias; portanto, a sua diferença não pode ser arbitrária: portanto, essa diferença é necessariamente uma quantidade designada; portanto, para provar que essa diferença não existe, e que consequentemente as quantidades são iguais, é suficiente provar que se existisse, não poderia ser uma quantidade designada.	**CT**

27	**COROLÁRIO III** *qualquer valor que possa ser feito tão aproximado quanto se desejar à verdadeira quantidade que representa, sem necessidade de alterar nenhum dos dois, é necessariamente e rigorosamente preciso.* De fato, logo que não haja necessidade de alterar nem a quantidade proposta nem o seu valor, a fim de tornar o último tão aproximado quanto se deseja ao primeiro, ou seja, para que possam diferir um do outro tão pouco quanto se deseja, ambos podem ser considerados como fixos, e, portanto, como não arbitrários. Portanto, no caso do corolário II. Portanto, são necessariamente e rigorosamente iguais.	**CT**
28	**COROLÁRIO IV** *Qualquer quantidade que se possa supor tão pequena quanto se queira, pode ser desprezada como absolutamente nula, em comparação com qualquer outra quantidade que não possa ser tão pequena quanto se queira; sem que os erros que assim possam surgir no decurso do cálculo possam afetar o resultado, desde que todas as quantidades arbitrárias sejam eliminadas.* De fato, ignorando como absolutamente zero, as quantidades que podem ser assumidas como Tão pequenos quanto se queira, quando são adicionados ou subtraídos a outros que não podem ser assumidos como pequenos como se quer, é óbvio que os erros que podem surgir no decurso do cálculo ou afetar o resultado podem ser assumidos como tão pequenos quanto se quer; portanto, permanecerá neste resultado algo arbitrário, o que é contra a hipótese, uma vez que se assume que todas as quantidades arbitrárias são completamente eliminadas.	**CT**
29	**COROLÁRIO V** *Qualquer quantidade cuja relação com outra quantidade possa ser considerada tão pequena quanto desejado, pode ser desprezada como absolutamente nula em comparação com esta última, sem que os erros a que isto possa dar origem no decurso do cálculo afetem os resultados, desde que todas as quantidades arbitrárias sejam eliminadas.*	**CT**

	Este corolário é apenas uma extensão do anterior. No corolário IV, assumiu-se que as quantidades em comparação com as quais se pode ignorar as outras, não podem, elas próprias, ser tão pequenas quanto se quer; mas no corolário v, assume-se que ambas podem ser feitas tão pequenas quanto se quer, mas que a proporção de uma para a outra também pode ser assumida como sendo tão pequena quanto se quer; então, seja qual for a natureza destas quantidades, digo que se pode ignorar, em relação às outras, aquelas cuja proporção em relação a estas últimas pode ser considerada tão pequena quanto se deseje: e a demonstração é a mesma que para o corolário IV, pois é óbvio que se alguns erros viessem a surgir destas supressões, ter-se-ia sempre o controlo de atenuá-los tanto quanto se desejaria, quer no decurso do cálculo, quer no seu resultado: mas isto não pode acontecer em relação a este último, uma vez que, desde então, algo de arbitrário teria de ser introduzido, o que é contra a hipótese, uma vez que todas as quantidades arbitrárias são supostamente eliminadas.	
30	As propostas anteriores contêm toda a teoria da análise infinitesimal: pois são precisamente estas quantidades que, segundo as hipóteses em que se baseia o cálculo, podem ser feitas tão pequenas quanto se quer, enquanto as outras quantidades do sistema geral não podem, a que chamámos infinitamente pequenas, e que podem por isso ser desprezadas no decurso do cálculo, como vimos acima, sem que o resultado seja afetado. Leibnitz, que primeiro deu as regras do cálculo infinitesimal, estabelece-o sobre este princípio; que se pode tomar à vontade um para o outro, duas magnitudes finitas que diferem um do outro apenas por uma quantidade infinitamente pequena. Este princípio tinha a vantagem de ser extremamente simples e de ser de aplicação muito fácil. Foi adotado como uma espécie de axioma, e contentou-se em considerar estas quantidades infinitamente pequenas como inferiores a todas aquelas que podem ser apreciadas ou apreendidas pela imaginação. Este princípio logo fez maravilhas nas mãos do próprio Leibnitz, dos irmãos Bernoulli, do L'Hôpital, etc., e foi adotado como uma espécie de axioma. Leibnitz não estava, contudo, imune a objeções: Leibnitz foi censurado por, em primeiro lugar, utilizar a expressão de quantidades infinitamente pequenas sem as ter previamente	**CT** **CE** **CA**

definido; em segundo lugar, por deixar alguma dúvida sobre se considerava o seu cálculo como absolutamente rigoroso, ou como um simples método de aproximação.

O ilustre autor e os homens famosos que tinham adotado a sua ideia contentaram-se em demonstrar pela solução dos problemas mais difíceis, a fecundidade do princípio, a concordância do seu resultado com os da análise ordinária, e a ascendência que deu aos novos cálculos.

Estes sucessos multiplicados provaram vitoriosamente que todas as objecções eram apenas ilusórias, mas estes estudiosos não lhes responderam diretamente, e o cerne da dificuldade permaneceu.

Há verdades que atingem primeiro todas as mentes certas, mas cuja rigorosa demonstração, no entanto, há muito escapa às mais habilidosas.

“M. Leibnitz, diz d'Alembert, envergonhado com as objeções que ele achava que poderiam ser feitas a quantidades infinitesimalmente pequenas, como considerado pelo cálculo diferencial, preferiu reduzir seus infinitesimais a ser apenas incomparáveis, o que arruinaria a precisão geométrica dos cálculos.”

Mas se Leibnitz estava errado, seria apenas formando dúvidas sobre a exatidão da sua própria análise, se ele realmente tivesse essas dúvidas, o que não parece de modo algum provável, e ele pudesse responder:

1º. Perguntam-me o que significa a expressão de quantidades infinitesimais, e eu digo-vos que não me refiro a seres metafísicos e abstratos, como esta expressão abreviada parece indicar, mas quantidades reais e arbitrárias, que podem tornar-se tão pequenas quanto eu desejar, sem que eu seja obrigado a variar ao mesmo tempo as quantidades com as quais eu tinha proposto encontrar a relação.

2º. Pergunta-me se os meus cálculos são perfeitamente exatos e rigorosos; afirmo que sim, pois consegui eliminar as quantidades infinitesimais de que acabei de falar, e reduzi-las para conter apenas quantidades algébricas comuns. Até agora, considero os meus cálculos como um método simples de aproximação. Aqueles que, a fim de conciliar o rigor do cálculo, em todo o decurso das operações, com a simplicidade do meu algoritmo, imaginaram considerar quantidades infinitamente pequenas como absolutamente zero, não dispensam a eliminação de que acabo de falar; e

	sem questionar a correção da sua metafísica, observo que nada ganham comigo no que diz respeito à simplicidade dos procedimentos, que são sempre os mesmos, e que encontram outra dificuldade; isto é, que todos os termos das suas equações desaparecem ao mesmo tempo; de modo que só têm zeros para calcular, e trazem-nos de volta indeterminados de 0 a 0 para combinar. Não valeria tanto como as minhas quantidades infinitesimais, como as tinha proposto pela primeira vez, ou seja, consideradas menos do que qualquer tamanho imaginável? Os zeros puros são mais fáceis de conceber? Ao olhar para as minhas inestimáveis quantidades como quimérico, não poderiam ser comparadas umas com as outras, bem como estes zeros puros? Concebe melhor uma quantidade imaginária, tal como em a√(-1), do que uma quantidade inestimável? E ainda assim, hesita em dizer que o relatório de a√(-1) a b√(-1) é a/b? A matemática não está cheia de tais enigmas? E não são estes enigmas o que essencialmente distingue a análise da síntese, e mesmo o que fornece ao primeiro aqueles recursos preciosos de que o segundo carece? Se eu lhe perguntar qual é o significado de uma equação em que existem expressões imaginárias, como no caso irredutível do terceiro grau, responderá que esta equação só pode servir para conhecer os verdadeiros valores do desconhecido quando, por alguma transformação, se conseguiu eliminar as quantidades imaginárias: Respondo-lhe o mesmo pelas minhas inestimáveis quantidades; utilizo-as apenas como auxiliares; concordo que o meu cálculo é rigorosamente tão exato como quando consegui eliminá-las todas; até lá não está terminado, e não é susceptível de aplicação. O seu é mais assim antes de o ter purgado de todos os seus zeros? Além disso, no meu Numa nova forma de considerar a questão, ou seja, considerando as minhas quantidades auxiliares, não tão infinitamente pequenas absolutas, mas apenas indefinidamente pequenas, faço uma análise sem qualquer discussão, faço dela um método, não de aproximação, mas de compensação; ou seja, um método que combina a facilidade de um simples cálculo de aproximação com a precisão dos métodos mais rigorosos, e demonstro que não é nada mais do que o método de exaustão reduzido a um algoritmo. Sei que pode	

	ser complementado pelo próprio método da exaustão, pelo método dos limites, ou mesmo pela única álgebra vulgar; mas é necessário saber se estes outros são ou não. Os métodos combinam na mesma medida que os meus, simplicidade e fertilidade. Refiro-me aqui aos ilustres topógrafos que propõem muitos outros métodos em teoria, mas que na prática fazem uso do meu.	
31	Mas embora seja bom pôr de lado as subtilezas que seriam mais susceptíveis de dificultar o progresso da ciência do que de lhe dar uma melhor base, é, no entanto, necessário estabelecer firme e diretamente os princípios em que nos apoiamos e os procedimentos que empregamos. Para que a primeira condição a ser preenchida em Matemática seja exata; a segunda é que seja a mais clara e simples possível. Há pessoas, por exemplo, que acreditam ter estabelecido suficientemente o princípio da análise infinitesimal quando se bate neste raciocínio: é óbvio, dizem, e admitido por todos, que os erros aos quais os procedimentos de análise infinitesimal dariam origem, se houvesse, sempre poderiam ser assumidos como sendo tão pequenos quanto se desejava. Também é óbvio que qualquer erro que possa ser assumido como sendo tão pequeno quanto se deseja, é nulo: como pode ser assumido como sendo tão pequeno quanto se deseja, pode ser assumido como sendo 0; portanto, os resultados da análise infinitesimal são rigorosamente exatos. Este raciocínio, plausível à primeira vista, é, no entanto, nada menos que justo; pois é falso dizer que, porque somos capazes de cometer um erro tão pequeno quanto desejamos, podemos, por essa razão, torná-lo absolutamente nulo. Por exemplo (fig.1), a equação $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ encontrada (9) é uma equação que está constantemente errada, embora se possa cometer o erro tão pequeno quanto se queira, diminuindo as quantidades MZ, RZ ; porque para este erro desaparecer por completo, seria necessário reduzir estas quantidades MZ, RZ ao 0 absoluto; mas depois a equação seria reduzida a $\frac{0}{0} = \frac{y}{a-x}$ uma equação que não se pode dizer que seja precisamente falsa, mas que é insignificante, uma vez que 0/0 é uma quantidade indeterminada. Encontramo-nos assim na alternativa necessária, ou para cometer um erro, por pequeno que seja, ou para nos depararmos com uma fórmula que nada	**CT** **CG**

	aprende; e este é precisamente o cerne da dificuldade, na análise infinitesimal.	
32	Outras pessoas limitam-se a olhar para as quantidades chamadas infinitamente pequenas, como incomparáveis, no sentido de que um grão de areia, por exemplo, é incomparável na sua pequenez com todo o globo terrestre; pois então, dizem, os erros cometidos são inestimáveis e devem, consequentemente, ser totalmente desprezados no resultado do cálculo. Mas a análise infinitesimal prevista desta forma seria apenas um método de aproximação, embora seja perfeitamente sabido que é absolutamente rigoroso. Esta comparação do grão de areia com o globo terrestre pode ser útil, contudo, para facilitar a expressão das condições do problema, ao indicar o que pode ser desprezado. Mas nas equações finais, o próprio erro do grão de areia já não deve permanecer. Teve de desaparecer, pelo próprio fato de ter sido cometido, não só no decurso do cálculo, mas várias vezes em direções opostas, de modo que foi feita uma compensação necessária, que é indicada de certa forma nestas equações finais através da eliminação de todas as quantidades arbitrárias.	**CT** **CE**
33	Creio ter demonstrado suficientemente a precisão dos princípios da análise infinitesimal Leibnitzian, mas para facilitar a sua aplicação, creio que devo apresentá-los sob uma luz ligeiramente diferente. Chamo uma equação imperfeita, qualquer equação que não se tenha mostrado rigorosamente precisa, mas cujo erro, se existir, pode ser assumido como sendo tão pequeno quanto se quer; ou seja, para a tornar perfeitamente precisa, é suficiente substituir as quantidades que entram nela, ou para apenas algumas delas, outras quantidades que diferem infinitamente pouco das mesmas. Segundo esta definição, é evidente que as equações imperfeitas podem ser sujeitas a várias transformações, sem as privar do carácter de equações imperfeitas, tais como, por exemplo, transpor os termos de um membro para o outro; multiplicar ou dividir estes dois membros por quantidades iguais; ou elevá-los às mesmas potenciais, ou retirar deles as mesmas raízes.	**CT** **CA**

	Muito mais, pode-se, em vez das quantidades arbitrárias que entram nelas, substituir outras que diferem infinitamente pouco delas, desprezar as quantidades infinitamente pequenas em relação às quantidades finitas, e mais geralmente as quantidades acessórias em relação às quantidades principais; sem que estas equações percam alguma vez, por esta razão, o seu carácter primitivo de equações que são pelo menos imperfeitas, e que podem finalmente ser encontradas como exatas pela compensação de erros. Mas o que é importante notar é que estes erros acumulados, em vez de se afastarem cada vez mais do objetivo, que é o de trazer estas equações imperfeitas de volta à precisão absoluta, como parece acontecer primeiro, servem, pelo contrário, para a conduzir pelo caminho mais curto e mais simples, porque ao descartar assim sucessivamente estes acessórios inconvenientes, com a única atenção de nunca descartar as equações em questão do seu carácter principal, consegue-se finalmente libertá-los absolutamente de qualquer consideração de infinito, pela eliminação completa de tudo o que era arbitrário; e que apenas as quantidades das quais se pretendia obter a relação permanecem. Dito isto, toda a teoria do infinito pode ser considerada como contida no teorema seguinte.	
34	**TEOREMA** *Para ter certeza de que uma equação é necessariamente e rigorosamente exata, é suficiente garantir:* *1º. Que foi deduzido de equações verdadeiras ou pelo menos imperfeitas, por transformações que não as retiraram do caráter de, pelo menos, equações imperfeitas.* *2º. Que não contém mais nenhuma quantidade infinitesimal, ou seja, qualquer quantidade diferente daquelas para as quais foi proposto encontrar a relação.* Dem. Uma vez que, por hipótese, as transformações que foram feitas nas equações de onde começámos, não lhes retiraram o carácter de equações, ou pelo menos imperfeitas; estas equações só podem ser afetadas por erros que podem ser feitos tão pequenos quanto queremos que sejam.	**CT** **CA**

	Mas, por outro lado, estas equações já não podem ser aquelas a que chamei imperfeitas; pois só podem existir entre quantidades que contenham algo arbitrário; pois pela sua própria definição, pode assumir-se que o erro é tão pequeno quanto se quer. Agora, por hipótese, todas as quantidades arbitrárias são eliminadas, uma vez que apenas permanecem aquelas cuja relação se propõe encontrar. Assim, as novas equações não podem estar absolutamente erradas, ou seja, afetadas por erros que não podem ser cometidos tão pequenos quanto desejamos, nem por aqueles a que chamei imperfeitos. Portanto, são necessariamente e rigorosamente exatas. Isso tinha de ser demonstrado.	
35	**PRIMEIRO COROLÁRIO** Que as equações em questão sejam expressas por símbolos algébricos, ou que sejam complementadas por propostas expressas em linguagem corrente; a manifestação precedente tem sempre lugar. Se, portanto, para se chegar à solução de qualquer questão, se estabelece a sua razão - significa em propostas tais que os erros que poderiam resultar delas são tão pequenos quanto se deseja, e que finalmente, com consequências semelhantes, chega-se a propostas que estão livres de qualquer consideração do infinito, e consequentemente de qualquer quantidade arbitrária; estas últimas propostas serão necessariamente e rigorosamente exatas.	**CT** **CA**
36	Decorre do teorema e corolário anteriores que a análise infinitesimal é reduzida a três pontos, o que, rigorosamente observado, só pode conduzir a resultados perfeitamente exatos, e pelos meios mais simples que conhecemos, nomeadamente 1º. Expressar as condições da questão proposta, quer por equações exatas, quer pelo menos por equações imperfeitas, ou por propostas equivalentes. 2º. Transformar estas equações ou propostas de várias maneiras, sem nunca as fazer perder o seu carácter primitivo de equações pelo menos imperfeitas. 3º. Dirigir estas transformações, para a eliminação completa de quantidades infinitesimais e de quaisquer funções dessas mesmas quantidades, de modo a obter os resultados completos do cálculo.	**CT** **CA**

37	Ao concluir esta exposição da doutrina da compensação, penso que posso ser honrado pela opinião do grande homem, cuja recente perda, *Lagrange,* é deplorada pelo mundo erudito. Eis como se expressa sobre este assunto na última edição da sua *Teoria das Funções Analíticas.* “Parece-me que, tal como no cálculo diferencial tal como é utilizado, se considera e calcula as quantidades infinitamente pequenas ou supostamente infinitamente pequenas, a verdadeira metafísica deste cálculo consiste no facto de que o erro resultante desta falsa suposição é retificado ou compensado pelo erro resultante dos próprios procedimentos do cálculo, segundo o qual apenas quantidades infinitamente pequenas da mesma ordem são retidas na diferenciação. Por exemplo, ao olhar para uma curva como um polígono com um número infinito de lados, cada um infinitamente pequeno, e cuja extensão é a tangente da curva, fica claro que é feita uma suposição errada; mas o erro é corrigido no cálculo pela omissão das quantidades infinitamente pequenas. Isto é facilmente mostrado em exemplos, mas seria, talvez, difícil dar uma demonstração geral.” Aqui está toda a minha teoria resumida com mais clareza e precisão do que eu poderia dar a mim mesmo. Seja ou não difícil dar uma demonstração geral, a verdadeira metafísica da análise infinitesimal, como é usada, e como todos os geômetras concordam que deve ser usada para facilitar os cálculos, não é menos, segundo o ilustre autor que acabo de citar, o princípio da compensação de erros; e acredito, além disso, que nada falta, nem na exatidão nem na generalidade da demonstração que dei.	**CT** **CE**
38	O que precede ainda contém apenas os princípios gerais de análise infinitesimal, e aplicá-los-emos a alguns exemplos particulares, antes de mostrarmos como estes princípios gerais foram reduzidos a um algoritmo por Leibnitz, o que lhes conferiu o carácter de um cálculo regular. Assim, o que dissemos ainda pertence apenas à síntese e à análise ordinária, mas esta nova síntese já é por si só - mesmo muito importante e muito luminosa; e se os antigos a tivessem possuído, em vez do método de exaustão que ela suplanta, teriam simplificado muito o seu trabalho, e provavelmente teriam levado as suas descobertas muito mais longe do que o fizeram: pois estavam a usar a sua força para	**CE**

	ultrapassar dificuldades que são imediatamente ultrapassadas pela própria noção de infinito. Quanto ao uso que a análise algébrica comum pode fazer da mesma noção, para além do seu próprio algoritmo, se se quiser saber que uso pode ser feito dela, basta ler a introdução à Análise do Infinito de Euler, e ficaremos surpreendidos com o poder de tal instrumento, numa mão habilidosa.	

Fonte: Carnot (1813, tradução nossa).

A partir do exposto, no primeiro capítulo, percebe-se que o trabalho traz uma série de levantamentos, discussões e uma tentativa de esclarecimento quanto a algumas questões conflituosas da época, como é o caso do conceito dos infinitamente pequenos. De acordo com Bell (2019), o objetivo de Carnot não era excluir os infinitesimais, mas despojar o conceito de todo o vestígio de vagueza ou obscuridade e, para tentar alcançar isso, o matemático francês concebe os infinitesimais como quantidades variáveis (ver trecho 14).

A inserção de um sistema auxiliar para facilitar o cálculo que continha quantidades não designadas que posteriormente deveriam ser eliminadas traz para ele a ideia de “equações imperfeitas” (trecho 33). As que tinham quantidades designadas foram chamadas de “completas” ou “perfeitas”.

Assim, de acordo com Gillispie (2009a), a arte do cálculo infinitesimal para Carnot consistia em transformar equações completas sem solução em equações incompletas manejáveis, e essa manipulação do cálculo deveria ser de forma a eliminar do resultado todas as quantidades não designadas, e a ausência dessas quantidades provaria a sua correção.

Também no decorrer do texto, o autor traz desencadeamentos históricos para sua discussão, por exemplo, a compreensão de Leibniz sobre os infinitamente pequenos. Para Leibniz, podem-se tomar duas quantidades finitas, diferindo uma da outra apenas por quantidade infinitamente pequena. Tal compreensão torna-se parecida com a ideia apresentada por Carnot a respeito desse elemento, no decorrer do texto do Capítulo 1. Assim sendo, em Carnot, de acordo com Gillispie (2009a)

> De fato, como Carnot deixou claro numa incursão histórica, sua doutrina da compensação de erro foi uma tentativa de combinar as vantagens analíticas do método leibniziano dos infinitesimais com o

> rigor do método newtoniano dos limites, ou da primeira e última razões de quantidades que tendem a zero.(GILLISPIE, 2009a, p. 517)

Lagrange também é citado (trecho 37) como forma de corroborar as ideias contidas em RMCI. Entretanto, conforme observamos em TFA, o trabalho de Lagrange não estabelece o método de compensação de erros como algo efetivamente viável para o CI.

6.3 RMCI – Sobre as categorias analisadas

Conforme constatamos, as Categorias Textual, Epistemológica, Algébrica e Geométrica foram instituídas no decorrer do texto de RMCI no intuito de estratificar esses elementos em cada trecho.

A partir do apresentado, podemos verificar alguns elementos e ideias participantes do Capítulo 1 das RMCI

a) Categoria Textual (CT) e Epistemológica (CE)

Nessas duas categorias, temos que o RMCI possui como CT as reflexões e ideias metafísicas quanto à análise infinitesimal, o que pode ser percebido no breve desenvolvimento histórico das dificuldades de compreensão acerca dos infinitamente pequenos.

Também se ressalta que os elementos como exemplos, definições e teoremas seguem, em grande parte, em forma de texto, o que mostra a tentativa de Carnot de ser o mais objetivo textualmente a respeito do tema a que se propõe a examinar, como, por exemplo, as definições sobre as quantidades infinitamente pequenas, o uso de um sistema geométrico para exemplificar suas ideias e a teoria ou o método de compensação de erros. Esses elementos são apresentados em forma de descrição e, de acordo com Gillispie e Youschkevitch (1979), essa forma descritiva é, em alguns momentos, rigorosa e, em outros, vaga, pois relaciona-se ao conhecimento que o autor possuía a respeito do CI.

A CE está presente em alguns momentos do trabalho e no grande esforço de Carnot para explicar o que seriam quantidades infinitamente pequenas com mais de três definições somente nessa primeira parte. Isso se deve ao momento no qual esses elementos estavam em destaque, pois estavam envoltos em questões conflituosas com matemáticos e filósofos.

Os resultados afloravam de diversas percepções. De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), Newton e Leibniz introduziram concepções distintas para essas entidades: os infinitésimos de Leibniz estão fortemente associados com a lógica e a metafísica, enquanto os infinitésimos de Newton apresentam forte motivação e conexão com a Física e os fenômenos naturais. Bell (2019) também destaca que Euler tratava os infinitesimais como zeros formais, ou seja, com quantidades fixas; d'Alembert, por outro lado, seguiu o conceito de Newton e concebeu em termos do conceito de limite, rejeitando a ideia de infinitesimais como quantidades fixas.

O filosofo Berkeley teceu as críticas mais sustentadas quanto ao uso dos infinitesimais, partindo da ideia de considerá-los como "pedra fundamental[16]. Por conseguinte, estabelece seu método de compensação de erros na tentativa de explicar uma correção ao CI, o que posteriormente foi utilizado na obra de Carnot.

A exposição aos infinitamente pequenos ganha mais uma definição em l'Hôpital[17] ao estabelecer:

> I. Quantidades variáveis são aquelas que aumentam ou diminuem continuamente; e quantidades constantes ou permanentes são aquelas que continuam as mesmas enquanto outras variam.
> II. A parte infinitamente pequena pela qual uma quantidade variável é continuamente aumentada ou diminuída é chamada de diferencial dessa quantidade (L'HÔPITAL, apud BELL, 2019, p. 71, tradução nossa).

A tentativa de normalizar conceitos como o infinito leva a diversas abordagens para os tratamentos desses entes. A própria academia de Berlim, de acordo com Schubring (2005), considerava o conceito de infinito como "contraditório". Ainda assim, Carnot o considerava como simples e exato.

A fim de justificar toda a sua teoria em bases sólidas e rigorosas, Carnot traz um recorte de TFA de Lagrange para corroborar sua teoria, o que nos mostra a completa noção de Carnot sobre o caminhar do desenvolvimento do CI.

b) Categoria Algébrica (CA) e Geométrica (CG)

---

[16] Item VI do seu livro *The Analyst*, de 1734.
[17] *Analyse des Infiniments Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*.

Diferentes equações são apontadas no decorrer do trabalho, mas a CA é evidenciada nas equações percebidas em dois momentos: o primeiro quando Carnot expõe o seu método de aproximação e de compensação de erros em que se utiliza de equações como forma de explicitar as ideias estabelecidas inicialmente. A outra forma em que a CA está presente é quando Carnot destaca sua definição sobre quantidades infinitamente pequenas e com isso exemplifica com a manipulação de equações que derivam de outras equações. A CG está presente especificamente na parte inicial onde equações são atreladas à CG, referindo-se à figura 1, conforme identificamos no trecho número 1.

A partir do exposto, identificamos elementos do texto que fazem parte das categorias criadas. Assim, no próximo capítulo, discorreremos sobre as aproximações e distanciamentos presentes nas duas obras discutidas durante este trabalho.

CAPÍTULO 7 - APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS

Neste capítulo, discutimos sobre as aproximações e distanciamentos dos trechos das obras TFA (introdução, primeiro e segundo capítulo) e RMCI (primeiro capítulo), que foram categorizadas nos capítulos anteriores.

Estas fazem parte de um arcabouço de trabalhos pertencentes ao século XVIII, período de grande movimento e afloramento intelectual. Tanto a TFA quanto a RMCI partilham de um grau de similaridade quanto a suas publicações: suas primeiras edições foram publicadas em 1797 na França, traduzidas para o português em 1796 por Manuel Jacinto Nogueira da Gama; suas segundas edições surgiram em 1813 na França.

No que tange aos traços biográficos, podemos apontar Lagrange como pesquisador, astrônomo e professor. Enquanto Carnot, como pesquisador, engenheiro e político. Com isso, em nossos estudos, percebemos que ambos carregam em seus textos elementos participantes de sua formação. Por exemplo, em TFA, tem-se o olhar de um professor que busca transmitir seu conhecimento (novo método analítico). Tal fato corrobora por ser um texto voltado ao ensino para a escola politécnica. Em Carnot, encontramos tanto o olhar de um pesquisador quanto o de um engenheiro e militar preocupado com a forma de desenvolvimento das questões filosóficas, mas também em esclarecer conceitos e definições.

Entretanto, os dois pesquisadores partilham o interesse pelas aplicações de seus trabalhos à mecânica, ou seja, buscavam aplicar os conhecimentos em suas áreas de interesse.

De maneira geral, também percebemos que os trabalhos mencionados foram frutos de pesquisa e/ou ensino na tentativa de esclarecer e buscar novas ferramentas para o estudo do CI. Assim sendo, sempre buscavam revisões em seus trabalhos escritos, fato justificado pelas suas reedições. A seguir, apresentamos as aproximações e distanciamentos observados nas obras que foram discutidas neste trabalho no decorrer das categorias.

7.1 Aproximações entre TFA e RMCI

Conforme destacamos, foram criadas quatro categorias elencadas no decorrer dos capítulos selecionados, a saber: Categoria Textual (CT), Categoria Epistemológica (CE), Categoria Algébrica (CA) e Categoria Geométrica (CG).

Em nossos estudos, identificamos, com base nas categorias CT e CE, que os textos recorrem a elas para explicar seus desenvolvimentos históricos do CI, bem como seus direcionamentos com suas definições e conceitos.

Também entendemos, nesta categoria, o questionamento proposto pela academia de Berlim e o problema referente ao conceito do infinitamente pequeno e do infinitamente grande. Logo, apontamos que tanto TFA quanto RMCI foram obras derivadas dessas discussões em relação ao CI, ou seja, ambas tentavam responder a essa problemática e estavam abarcadas nas mesmas dificuldades com os infinitesimais, conforme apontamos nos capítulos anteriores.

Por conseguinte, os assuntos dos textos de nossos estudos foram moldados no decorrer do século XVIII, pois as temáticas eram as que estavam sendo discutidas pela comunidade científica (matemáticos, físicos, filósofos etc.), conforme observado nas discussões em TFA e RMCI.

Além disso, essas discussões também já estavam sendo tratadas por Lagrange e Carnot em outros trabalhos, por exemplo, antes de TFA, Lagrange dissertou, em 1772, com seu trabalho *Sur une Nouvelle Espèce de Calcul Relatif la Différentiation des Quantités Variables* (*Sobre um Novo Tipo de Cálculo Relativo à Diferenciação das Quantidades Variáveis*). De acordo com Botazzini (1986), esse trabalho discutia os princípios do cálculo de forma sistemática, sem, entretanto, realizar qualquer referência a infinitesimais, quantidades evanescentes, diferenciais ou limites. Em vez disso, mostrava a necessidade de reduzir o cálculo a manipulações algébricas de quantidades finitas.

Carnot também discute sobre os infinitesimais a partir dos trabalhos *Dissertation sur la Théorie de l'Infini Mathématique* (*Dissertação sobre a Teoria do Infinito Matemático*), de 1786, e *De Nouvelles Idées sur la Métaphysique du Calcul Infinitésima*l (*Novas Ideias sobre a Metafísica do Cálculo Infinitesimal*), publicado entre 1786 e 1788, que fora tratado nos capítulos anteriores do nosso trabalho.

Assim sendo, os métodos direcionados tanto em TFA quanto em RMCI não eram novos, mas apontavam para uma tentativa de generalização quanto ao rigor matemático que precisavam para a época. Para realizar esse percurso, também utilizam da CE para abordar questões metafísicas quanto à clareza dos infinitesimais.

Prosseguindo rumo aos seus conceitos principais, no decorrer do texto, apresentam a visão dos geômetras no desenvolvimento das questões infinitesimais por meios geométricos, citando os matemáticos l'Hôpital, Bernoulli e Leibniz (TFA e RMCI trechos l_3 e 30 respectivamente).

Com relação às categorias CA e CG, estão presentes na exemplificação do método de aproximação como elemento viável para as questões. Quanto aos infinitesimais, como forma de validação, exemplificam com um polígono com um determinado número de lados. Além disso, para Carnot, o método de aproximação, considerado rigoroso, poderia ser reduzido para conter quantidades algébricas comuns (TFA e RMCI trechos l_4 e 30 respectivamente).

7.2 Distanciamentos entre TFA e RMCI

Os distanciamentos, no tocante às categorias CT e CE, podem ser verificados nas abordagens explicitadas durante o texto inicial. Em Lagrange, o texto possui, além do desenvolvimento histórico, críticas quanto ao estudo dos infinitesimais. Assim sendo, TFA está organizado em conteúdo histórico referente ao desenvolvimento do CI, bem como às críticas a esse conteúdo, conceitos como o de função, função derivada e primitiva, definições, breve exposição conceitual do que foi realizado e a afirmação de que tudo na análise se constitui como função.

Entretanto, em Carnot, o foco inicial estava em responder questionamentos referentes aos pressupostos filosóficos dos infinitesimais. Logo, em RMCI, o autor discorre inicialmente sobre a importância do desenvolvimento dos infinitesimais, sobre questões conceituais acerca de uma quantidade infinitamente pequena, sobre método da compensação de erros e sua exemplificação.

Nas categorias CA e CG, os distanciamentos são evidentes. Para Lagrange, o método correto para o desenvolvimento do CI é puramente analítico e, com isso, seu direcionamento é para que todo o CI pudesse ser resolvido pelas funções, mais especificamente através da teoria das séries de Taylor. Em Carnot, o foco do trabalho está contido na generalização voltada para o método das compensações de erros e, dessa maneira, faz-se uso da geometria (exemplificado em Berkeley) como forma de exemplificação inicial.

Lagrange também expõe o uso da geometria e do método da compensação de erros em sua exemplificação, entretanto identifica como um método que não é "suficientemente claro para servir de princípios a uma ciência cuja certeza deve ser baseada em provas" (trecho I_4). Com isso, para Lagrange, os geômetras apresentavam ideias equivocadas quanto ao estudo dos infinitesimais.

Entretanto, para Carnot, os geômetras fizeram um bom uso quanto à compreensão dos infinitesimais. Em seguida, discorre a respeito do seu método de compensação de erros, afirmando que todos os métodos, seja de Newton, Leibniz ou Lagrange, são métodos derivados da compensação de erros.

O posicionamento de Lagrange a esse respeito está em discordância com Carnot, pois afirma que a análise deve ser constituída de funções, mais especificamente, na teoria das séries de Taylor.

Tanto as aproximações quanto os distanciamentos estiveram embasados nos seguintes fatores: em seus contextos históricos e epistemológicos, no desenvolvimento de um conceito ou definição matemática e, por fim, em exemplificações, sejam algébricas ou geométricas. Logo, os textos carregam em si aspectos das influências que os autores receberam. No caso de Lagrange, identificamos a influência de Euler, d'Alembert e Arbogast; e, em Carnot, encontramos Leibniz, Berkeley e Lagrange.

Também notamos que as duas obras serviram de influência para trabalhos de outros matemáticos. Em TFA, temos o trabalho de Cauchy, intitulado de *Análise Matemática* e, em RMCI, temos o estudo de M. Charles Freycinet (1871 – 1885), denominado *Análise Infinitesimal, Estudos sobre a Metafísica do Cálculo Superior*.

Como forma de estratificar as aproximações e distanciamentos relacionados, elaboramos o quadro a seguir com recortes de alguns trechos das obras em que podemos constatar essas aproximações e distanciamentos:

Quadro 19 – Aproximações e distanciamentos entre TFA e RMCI

Categorias	Aproximações	Distanciamentos
CT	• **Descrições sobre seus conceitos e definições** **TFA** Uma função de uma ou mais quantidades é qualquer expressão do cálculo em que essas quantidades entram de alguma forma, combinadas ou não com outras quantidades que são consideradas como valores dados e invariáveis, enquanto as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis (trecho I_1). [...] Quando a variável de uma função é atribuída a qualquer aumento, acrescentando a esta variável uma quantidade indeterminada, podemos pelas regras normais da álgebra, se a função for algébrica, desenvolvê-la de acordo com as potências desta indeterminação (trecho I_2) **RMCI** O que, de fato, é uma quantidade infinitamente pequena em matemática? Nada além de uma quantidade que pode ser tão pequena quanto quisermos, sem sermos obrigados a variar os que estamos procurando. (trecho 1 nota de rodapé) Quando é demasiado difícil, de fato, encontrar a solução exata de uma questão, é natural tentar pelo menos aproximar-se o mais possível, desprezando as	**TFA** • **Texto histórico crítico quanto ao CI** [...] Contentavam-se em chegar pelos procedimentos deste cálculo de uma forma rápida e segura com resultados exatos, e não se preocupavam em demonstrar os seus princípios. (trecho I_3) Estas variações na forma de estabelecer e apresentar os princípios de cálculo diferencial, e mesmo na denominação deste cálculo, mostram, parece-me, que a verdadeira teoria não tinha sido compreendida, embora as regras mais simples e convenientes para o funcionamento do mecanismo de operações tivessem sido encontradas primeiro. (trecho I_6) **RMCI** • **Texto histórico metafísico abordando questões conceituais** [...] O ilustre autor e os homens famosos que tinham adotado a sua ideia contentaram-se em demonstrar pela solução dos problemas mais difíceis, a fecundidade do princípio, a concordância do seu resultado com os da análise ordinária, e a ascendência que deu aos novos cálculos.

	quantidades que dificultam as combinações se se prevê que estas quantidades desprezadas só podem, devido ao seu pequeno valor, produzir um ligeiro erro no resultado do cálculo (trecho 2) • **Desenvolvimento histórico direcionado aos conceitos e às definições** **TFA** A palavra função foi usada pelos primeiros analistas para se referir, em geral, às potências da mesma quantidade. Desde então, o significado da função da palavra foi estendido para incluir qualquer quantidade que seja formada em qualquer outra quantidade. Leibnitz e os Bernoulli foram os primeiros a utilizá-lo neste sentido geral, e agora é geralmente adotado (trecho I_1) [...] Os primeiros geómetras que utilizaram o cálculo diferencial, Leibnitz, os Bernoulli, o l’Hôpital, etc., basearam-no na consideração de quantidades infinitamente pequenas de diferentes ordens, e na suposição de que se pode olhar e tratar como iguais, aquelas quantidades que diferem entre si apenas por quantidades infinitamente pequenas em relação a elas. (I_3) **RMCI** [...] Tal pareceu ser a ideia do infinito, e vários geômetras fizeram o uso mais feliz dela, que talvez não a tivessem	Estes sucessos multiplicados provaram vitoriosamente que todas as objeções eram apenas ilusórias, mas estes estudiosos não lhes responderam diretamente, e o cerne da dificuldade permaneceu. (trecho 30). Outras pessoas limitam-se a olhar para as quantidades chamadas infinitamente pequenas, como incomparáveis, no sentido de que um grão de areia, por exemplo, é incomparável na sua pequenez com todo o globo terrestre; pois então, dizem, os erros cometidos são inestimáveis e devem, consequentemente, ser totalmente desprezados no resultado do cálculo. Esta comparação do grão de areia com o globo terrestre pode ser útil, contudo, para facilitar a expressão das condições do problema, ao indicar o que pode ser desprezado. Mas nas equações finais, o próprio erro do grão de areia já não deve permanecer. Teve de desaparecer, pelo próprio fato de ter sido cometido, não só no decurso do cálculo, mas várias vezes em direções opostas, de modo que foi feita uma compensação necessária, que é indicada de certa forma nestas equações finais através da eliminação de todas as quantidades arbitrárias. (trecho 32)

	aprofundado; contudo, os filósofos não ficaram satisfeitos com uma ideia tão vaga; quiseram voltar aos princípios; mas viram-se divididos nas suas opiniões, ou melhor, na sua forma de considerar os objetos. (trecho 1) A dificuldade de expressar exatamente por equações as diferentes condições de um problema, e de resolver estas equações, pode ter dado origem à ideia de Cálculo Infinitesimal. (trecho 2)	
CE	• **Os trabalhos derivam das discussões a partir do prêmio de Berlim** **Lagrange** Como membro correspondente da Academia Real de Ciências e Letras de Berlim (ver anexo A) propôs o concurso sobre o infinito matemático (ver capítulo 3) **Carnot** Enviou a sua dissertação sobre a teoria do infinito matemático, destinada a concorrer ao prêmio proposto pela Academia Real das Ciências, Artes e Letras de Berlim, para o ano de 1786 (ver quadro 6, capítulo quatro)	**TFA** • **Apresenta influências de Euler, Taylor e d'Alembert** A palavra função foi usada pelos primeiros analistas para se referir, em geral, às potências da mesma quantidade. Desde então, o significado da função da palavra foi estendido para incluir qualquer quantidade [...]neste sentido geral, e agora é geralmente adotado. (trecho I_1) [...] demonstrei por este teorema de Taylor, que é o fundamento do método de série, e que tinha sido demonstrado apenas com a ajuda deste cálculo, ou considerando diferenças infinitamente pequenas. (trecho I_7) • **Afirma que os geômetras se equivocaram quanto às ideias iniciais do CI**

	• **Abrangem os mesmos problemas com os infinitesimais sobre as quantidades infinitamente grande e infinitamente pequenas** **TFA** [...] basearam-no na consideração de quantidades infinitamente pequenas de diferentes ordens, e na suposição de que se pode olhar e tratar como iguais, aquelas quantidades que diferem entre si apenas por quantidades infinitamente pequenas em relação a elas.(trecho I_3) **RMCI** às vezes desempenham o papel de quantidades verdadeiras, às vezes devem ser tratados como absolutamente nulos, e que parecem, por suas propriedades equivocadas, manter o meio termo entre a grandeza e o zero, entre a existência e o nada. Felizmente esta dificuldade não impediu o progresso da descoberta: existem certas ideias primitivas que deixam sempre alguma confusão na mente, mas cujas primeiras consequências, uma vez desenhadas, abrem um campo vasto e fácil de explorar (trecho 1) • **As obras são tentativas de generalização quanto aos seus conteúdos**	Os primeiros geómetras que utilizaram o cálculo diferencial, Leibnitz, os Bernoulli, o l'Hôpital, etc., basearam-no na consideração de quantidades infinitamente pequenas de diferentes ordens, e na suposição de que se pode olhar e tratar como iguais, aquelas quantidades que diferem entre si apenas por quantidades infinitamente pequenas em relação a elas. Aqueles que os seguiram, Euler, D'Alembert etc., procuraram compensar esse defeito, mostrando, por aplicações particulares, que as diferenças que deveriam ser infinitamente pequenas devem ser absolutamente nulas e que suas relações, as únicas quantidades que realmente entram no cálculo, nada mais são do que os limites das relações de diferenças finitas ou indefinidas. (trecho I_3) Mas ele acaba por concordar que esta ideia, embora correta em si mesma, não é suficientemente clara para servir de princípio a uma ciência cuja certeza deve ser baseada em provas, e acima de tudo para ser apresentada a iniciantes (trecho I_4) **RMCI** • **Apresenta influência de L'Hullier, Berkeley e Leibniz**

	TFA [...] As funções consideradas deste ponto de vista, constituem uma análise de tipo superior à análise ordinária, pela sua generalidade e pelas suas múltiplas utilizações; e veremos neste trabalho que a análise que é vulgarmente chamada transcendental ou infinitesimal, é basicamente apenas a análise das funções primitivas e derivadas, e que os cálculos diferenciais e integrais são, estritamente falando, apenas o cálculo destas mesmas funções (trecho l_2) **RMCI** Aqui está toda a minha teoria resumida com mais clareza e precisão do que eu poderia dar a mim mesmo. Seja ou não difícil dar uma demonstração geral, a verdadeira metafísica da análise infinitesimal, como é usada, e como todos os geômetras concordam que deve ser usada para facilitar os cálculos, não é menos, segundo o ilustre autor que acabo de citar, o princípio da compensação de erros; e acredito, além disso, que nada falta, nem na exatidão nem na generalidade da demonstração que dei.(trecho 37) • **O RMCI apresenta a TFA como uma vertente para o estudo do CI** **RMCI**	Leibnitz, que primeiro deu as regras do cálculo infinitesimal, estabelece-o sobre este princípio (trecho 30) Este princípio logo fez maravilhas nas mãos do próprio Leibnitz, dos irmãos Bernoulli, do L'Hôpital, etc., e foi adotado como uma espécie de axioma. Leibnitz não estava, contudo, imune a objeções • **Afirma que os geômetras fizeram um bom uso quanto ao desenvolvimento dos infinitesimais** Tal pareceu ser a ideia do infinito, e vários geômetras fizeram o uso mais feliz dela[...] (trecho 1) Este princípio logo fez maravilhas nas mãos do próprio Leibnitz, dos irmãos Bernoulli, do L'Hôpital, etc., e foi adotado como uma espécie de axioma. Leibnitz não estava, contudo, imune a objeções

	Ao concluir esta exposição da doutrina da compensação, penso que posso ser honrado pela opinião do grande homem, cuja recente perda, *Lagrange,* é deplorada pelo mundo erudito. Eis como se expressa sobre este assunto na última edição da sua *Teoria das Funções Analíticas.* (trecho 37) • **Os textos fizeram parte de constantes revisões** Tanto a **TFA** quanto a **RMCI** foram republicadas conforme apresentamos nos capítulos iniciais de cada obra (capítulos cinco e seis) • **As obras contêm influências de matemáticos** **TFA** Num papel impresso entre os da Academia de Berlim, de 1772, e cujo tema era a analogia entre diferenciais e potências positivas, e entre integrais e potências negativas, defendi que a teoria do desenvolvimento de funções em série continha os verdadeiros princípios do cálculo diferencial; livre de qualquer consideração de infinitamente pequenos ou limites, e demonstrei por este teorema de Taylor, que é o fundamento do método de série, e que tinha sido demonstrado apenas com a ajuda deste cálculo, ou considerando diferenças infinitamente pequenas. Desde então, Arbogast apresentou uma dissertação à Academia das Ciências em que a mesma ideia é exposta	

	com desenvolvimentos e aplicações que lhe pertencem. Mas como o autor ainda não publicou nada sobre este assunto, e tendo-me encontrado empenhado por circunstâncias particulares no desenvolvimento dos princípios gerais de análise, lembrei-me das minhas velhas ideias sobre as de cálculo diferencial, e fiz novas reflexões tendentes a confirmá-las e generalizá-las; foi isto que deu origem a este Escrito, que estou determinado a publicar apenas para a consideração da sua futilidade para aqueles que estudam este importante ramo de análise. (trecho I_7) **RMCI** Proponha-se, por exemplo, quer se pretenda levar uma tangente ao ponto *M* da circunferência *MDB* [...] (trecho 3) - proposto por Berkeley em *The Analyst.* Leibnitz, que primeiro deu as regras do cálculo infinitesimal, estabelece-o sobre este princípio [...] (trecho 30) • **Apresentam algumas questões metafísicas** **TFA** Além disso, parece-me que, tal como no cálculo diferencial, tal como é utilizado, se considera e calcula as quantidades infinitamente pequenas ou supostamente infinitamente pequenas, a verdadeira metafísica deste cálculo consiste no fato de que o erro resultante desta falsa suposição é retificado ou compensado pelo erro resultante dos próprios	

	procedimentos do cálculo, segundo o qual apenas quantidades infinitamente pequenas da mesma ordem são retidas na diferenciação (trecho I4) **RMCI** Tal pareceu ser a ideia do infinito, e vários geômetras fizeram o uso mais feliz dela, que talvez não a tivessem aprofundado; contudo, os filósofos não ficaram satisfeitos com uma ideia tão vaga; quiseram voltar aos princípios; mas viram-se divididos nas suas opiniões, ou melhor, na sua forma de considerar os objetos. O meu objetivo neste documento é juntar estes diferentes pontos de vista, mostrar as suas relações, e propor novas relações. (trecho 1)	
CA	• **A CA está presente em algumas exemplificações** **TFA** Do trecho 1 em diante da primeira parte do capítulo 1: Portanto, consideremos uma função fx de qualquer variável x. Se, em vez de x, colocarmos $x + i$ em y, sendo i qualquer quantidade indeterminada, tornar-se-á $f(x + i)$, e pela teoria	**TFA** • **Generalização com o método puramente algébrico/analítico** • **Os elementos centrais em TFA são as funções e séries, consequentemente tudo na análise se constitui como função**

	das séries, podemos desenvolvê-la numa série desta forma *fx+pi+qi²+ri³+etc.*, em que as quantidades p, q, r etc., coeficientes das potências de i, serão novas funções de x, derivadas da função primitiva x, e independentes da indeterminada i. (trecho 1). Do trecho 8 em diante da primeira parte do capítulo 2: [...] tomemos a fórmula geral $f(x+i) = fx+pi+qi2+ri3+ etc.$ e suponha que o x indeterminado se torne $x+ o$ o sendo qualquer quantidade indeterminada independente de i; é aparente que $f(x + i)$ se tornará $f(x + i + o)$, e é visto ao mesmo tempo que se teria o mesmo resultado simplesmente colocando $i + o$ no lugar de i em $f(x +i)$. Portanto, o resultado também deve ser o mesmo, ou colocando i + o em vez de i na série fx +pi+ qi²+ri³+ etc., ou colocando x+ o em vez de x. A primeira substituição dará $fx + p(i+o) +q(i+o)^2+r(i+o)^3+etc.$;	[...] a análise que é vulgarmente chamada transcendental ou infinitesimal, é basicamente apenas a análise das funções primitivas e derivadas, e que os cálculos diferenciais e integrais são, estritamente falando, apenas o cálculo destas mesmas funções (trecho I2) O objetivo deste Livro é dar a teoria das funções, consideradas como primitivas e derivadas; resolver por esta teoria, os principais problemas de análise, geometria e mecânica, que dependem do cálculo diferencial; e dar por este meio, à solução destes problemas, todo o rigor das demonstrações dos Antigos. (trecho I9). • **Preocupa-se com o método analítico** É para evitar estas dificuldades, que um hábil Geometrista inglês, que fez na análise de descobertas importantes, propôs nos últimos tempos, substituir o método dos fluxos até agora escrupulosamente seguido por todos os geómetras ingleses, por outro método puramente analítico (trecho I6) **RMCI** • **Generalização para método da compensação de erros** • **Os elementos centrais em RMCI são as quantidades infinitamente pequenas e a teoria da compensação de erros**

		• **Preocupação com os infinitamente pequenos** Aqui está toda a minha teoria resumida com mais clareza e precisão do que eu poderia dar a mim mesmo. Seja ou não difícil dar uma demonstração geral, a verdadeira metafísica da análise infinitesimal, como é usada, e como todos os geômetras concordam que deve ser usada para facilitar os cálculos, não é menos, segundo o ilustre autor que acabo de citar, o princípio da compensação de erros; e acredito, além disso, que nada falta, nem na exatidão nem na generalidade da demonstração que apresentei. (trecho 37) Assim, o que dissemos ainda pertence apenas à síntese e à análise ordinária, mas esta nova síntese já é por si só - mesmo muito importante e muito luminosa; e se os antigos a tivessem possuído, em vez do método de exaustão que ela suplanta, teriam simplificado muito o seu trabalho, e provavelmente teriam levado as suas descobertas muito mais longe do que o fizeram: pois estavam a usar a sua força para ultrapassar dificuldades que são imediatamente ultrapassadas pela própria noção de infinito. (trecho 38)

		• **Todos os métodos são derivados da compensação de erros** Pois não é uma resposta direta, limitar-se a mostrar em cada caso particular, a conformidade dos resultados deste método com os de outros métodos rigorosos, tais como o da exaustão, o dos limites, ou o da álgebra comum: É fugir à dificuldade e rejeitar, por assim dizer, entre os métodos secundários, aquele que deve ocupar o primeiro lugar, tanto pelo rigor de sua doutrina, que neste aspecto, não cede a nenhum outro, como pela simplicidade de seu procedimento, pelo qual, inquestionavelmente, conquista todos os procedimentos conhecidos até hoje.(trecho 1)
CG	• **Desenvolvem uma visão geométrica quanto aos infinitesimais.** **TFA** [...] Por exemplo, ao olhar para uma curva como um polígono com um número infinito de lados cada um infinitamente pequeno, e cuja extensão é a tangente da curva, fica claro que se está a fazer uma suposição errada; mas o erro é corrigido no cálculo pela ausência das quantidades infinitamente pequenas. Isto pode ser facilmente visto em exemplos, mas talvez fosse difícil fazer uma demonstração geral do mesmo. (trecho I_4) **RMCI**	**TFA** • **Exposição geométrica quanto ao equívoco do método da compensação de erros** [...] fica claro que se está a fazer uma suposição errada; mas o erro é corrigido no cálculo pela ausência das quantidades infinitamente pequenas. (trecho I_4) **RMCI** • **Exposição geométrica para corroborar o método da compensação de erros**

	• **Geômetras citados: L'Hôpital, Bernoulli e Leibniz** **TFA** Os primeiros geómetras que utilizaram o cálculo diferencial, Leibnitz, os Bernoulli, o l'Hôpital, etc., basearam-no na consideração de quantidades infinitamente pequenas de diferentes ordens, e na suposição de que se pode olhar e tratar como iguais, aquelas quantidades que diferem entre si apenas por quantidades infinitamente pequenas em relação a elas.(trecho I$_3$) **RMCI** Este princípio logo fez maravilhas nas mãos do próprio Leibnitz, dos irmãos Bernoulli, do L'Hôpital, etc., e foi adotado como uma espécie de axioma. Leibnitz não estava, contudo, imune a objeções (trecho 30) • **A exemplificação de um polígono com curvas está presente nos dois textos** **TFA** [...] Por exemplo, ao olhar para uma curva como um polígono com um número infinito de lados cada um infinitamente pequeno, e cuja extensão é a tangente da curva, fica claro que se está a fazer uma suposição errada;	O meu objetivo neste documento é juntar estes diferentes pontos de vista, mostrar as suas relações, e propor novas relações. (trecho 1)

	mas o erro é corrigido no cálculo pela ausência das quantidades infinitamente pequenas. Isto pode ser facilmente visto em exemplos, mas talvez fosse difícil fazer uma demonstração geral do mesmo. (trecho I_4) **RMCI** É assim, por exemplo, que uma vez que é difícil descobrir as propriedades das curvas, ter-se-á imaginado que são polígonos com um grande número de lados. Se concebermos, por exemplo, um polígono regular inscrito num círculo, é visível que estas duas figuras, embora nunca possam tornar-se idênticas, se assemelham cada vez mais à medida que o número de lados do polígono aumenta, que os seus perímetros, as suas superfícies, os sólidos formados pelas suas rotações em torno de um dado eixo, as linhas análogas conduzidas dentro ou fora destas figuras, os ângulos formados por estas linhas, etc., são, se não forem respectivamente iguais, pelo menos serão tanto mais próximo a igualdade. Quanto maior for o numero de lados Daí que, supondo que este número de lados seja realmente muito grande, poderão sem erro apreciável, atribuir ao círculo circunscrito as propriedades que descobrimos pertencer ao polígono inscrito.(trecho 2)	

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir das categorias, as aproximações e distanciamentos ficam evidentes na relação com elementos do desenvolvimento do CI e nas compreensões conceituais a respeito dos temas expostos em cada texto.

Em Lagrange, o trabalho aponta para o método algébrico como forma de se desvencilhar das questões infinitesimais. Carnot, por sua vez, buscava explanar e trazer os infinitesimais a um certo esclarecimento e, para isso, utilizava, de acordo com Gillispie (2009a), uma tentativa de combinar analiticamente o método de Leibniz dos infinitesimais com o de Newton dos limites.

Ambos os trabalhos, como consequência, tiveram seu grau de divulgação e importância frente aos métodos da época e são alguns dos últimos esforços do século XVIII para tentar desmistificar e clarificar as dúvidas quanto aos infinitesimais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme apresentado nesta pesquisa, podemos identificar a AC como metodologia a ser utilizada na comparação dos textos de Lagrange e Carnot a partir das categorias elaboradas durante o processo da leitura flutuante e do desenvolvimento histórico contextual e biográfico.

Nesse sentido, entendemos que a AC é uma ferramenta utilizada em diversas áreas e, à medida que as etapas forem sendo concluídas, junto com a leitura dos textos selecionados, as categorias passarão a emergir naturalmente, dependendo do pesquisador para a realização dos direcionamentos frente aos objetivos e às hipóteses.

À vista disso, em nossa leitura flutuante, escolhemos então analisar em TFA e RMCI somente os capítulos iniciais. A escolha destes se justifica por exercerem papel elementar no desenvolvimento do restante do trabalho de Lagrange e Carnot. Com isso, em TFA, o capítulo da introdução, bem como os capítulos I e II fazem parte do elemento central do trabalho de Lagrange, enquanto, em RMCI, é o capítulo I que representa esse papel.

Logo, nosso objetivo foi comparar os trabalhos a partir da análise de conteúdo, destacando aproximações e distanciamentos dos conteúdos apontados nos trabalhos de Lazare Nicolas Marguerite Carnot em *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, de 1813, e de Joseph-Louis Lagrange em *Théorie des Fonctions Analytiques*, também de 1813.

Conforme destacamos anteriormente, as Categorias Textual, Epistemológica, Algébrica e Geométrica foram criadas a partir da leitura flutuante, com o auxílio das discussões sobre o CI no século XVIII (capítulo 3) e dos traços biográficos (capítulo 4). Desse modo, podemos perceber que as categorias criadas a partir da AC fazem parte das aproximações e dos distanciamentos presentes nos dois textos dos matemáticos.

Entre as categorias elaboradas, a que resulta em maior aproximação é a CE, por expor questões pertencentes à comunidade matemática discutidas naquele período, a saber: a compreensão das quantidades infinitamente pequenas; quantidades infinitamente grandes; estudos do CI relacionados ao trabalho de Newton e Leibniz, conforme verificado tanto nos textos de Lagrange e Carnot quanto no Capítulo 3 desta pesquisa.

Nos distanciamentos, as categorias CA e CG são evidentes por serem o tratamento diferencial de cada um dos trabalhos, ou seja, em TFA, Lagrange aborda seu texto de maneira algébrica, enquanto, em RMCI, Carnot discorre a partir de considerações geométricas.

Consequentemente, tanto Lagrange quanto Carnot possuíam diferentes perspectivas quanto ao desenvolvimento do CI, visto que, para Lagrange, o desenvolvimento geométrico estava equivocado, enquanto, em Carnot, o uso da geometria, segundo ele, trouxe ao CI um momento “mais feliz”.

Apesar das diferenças, ambos partilhavam da questão principal, qual seja, o desenvolvimento da análise ou tentativa de esclarecimento conceitual. Portanto, podemos considerar que o objetivo de nosso trabalho foi alcançado ao apresentar as aproximações e os distanciamentos constantes nas obras e estratificá-los no quadro (quadro 18).

A hipótese estabelecida considerou que as aproximações e os distanciamentos dos conteúdos constantes no trabalho de Lazare Carnot em *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, de 1813, e de Joseph Lagrange em *Théorie des Fonctions Analytiques*, taambém de 1813, são decorrentes das influências de outros matemáticos.

Como resultado, identificamos não só os matemáticos que, de alguma forma, estavam presentes nos dois trabalhos, mas também aqueles que carregavam correntes de pensamento filosóficas e acadêmicas.

Em TFA, as influências são destacadas com Euler, d’Alembert, Arbogast e Taylor. E, conforme situamos, Lagrange queria estabelecer um trabalho estritamente algébrico, sem considerar as quantidades infinitamente pequenas, ou seja, buscou a algebrização da análise em decorrência de grande parte de os materiais de estudo do século XVIII, na França, serem direcionados ao ensino nas escolas politécnicas – a própria TFA foi desenvolvida durante aulas ministradas por Lagrange. Tal fato leva, por conseguinte, à discussão e aos desdobramentos de novos métodos para o ensino.

Em RMCI, as influências são percebidas em L’Hullier, Leibniz e Berkeley. Dessa forma, tanto matemáticos quanto filósofos constituíram o aporte de Lazare Carnot em seu trabalho. Nas questões metafísicas que rodeavam a Matemática, Carnot tenta esclarecer trazendo o método da compensação de erros e conduzindo a definição do que ele compreende sobre quantidades infinitamente pequenas. Em nossa análise, essa definição é apresentada mais de três vezes durante o primeiro capítulo como forma de eliminar qualquer dúvida quanto a essa questão.

Portanto, a respeito da hipótese apresentada, podemos identificar, em ambos os textos, que não só houve influência de matemáticos, mas de filósofos e, em um certo nível, influência social, pois, no decorrer de seus textos iniciais, os dois matemáticos tentam responder aos questionamentos da sociedade científica.

Em nossa pesquisa, encontramos diversos trabalhos que discutem tanto Lagrange, com sua TFA, quanto Carnot, com RMCI. Entretanto, durante a pesquisa, não identificamos dissertações e teses que realizam as aproximações e distanciamentos das obras elencadas nem que utilizam da AC em textos/trabalhos de matemáticos. Assim sendo, o ineditismo de nossa tese encontra-se embasado nesses dois pontos especificados.

As dificuldades quanto ao desenvolvimento desta pesquisa estão relacionadas aos poucos artigos ou livros em língua portuguesa que discutem as obras de Carnot e Lagrange ou que versam de alguma forma sobre o desenvolvimento do cálculo, ou seja, grande parte dos acervos, como livros e artigos relativos ao tema, está escrita nas línguas inglesa, francesa, italiana e alemã. Portanto, persistimos também na tradução de alguns artigos ou partes de livros como forma de compor nosso trabalho.

No que diz respeito a pesquisas que versam sobre o uso da AC na História da Matemática, não foram constatados trabalhos que exploram essa metodologia do ponto de vista qualitativo, portanto esperamos, a partir desta tese, que essa questão possa ser ampliada para novos trabalhos.

Para mais, as categorias aqui externadas podem ser utilizadas não só em novos textos de outros matemáticos, mas também em qualquer documento histórico com conteúdo relacionado à Matemática, por exemplo, manuais escolares, artigos de matemáticos etc.

A pesquisa desenvolvida mostrou como os elementos constitutivos do CI se entrelaçam a partir dos seus conteúdos, períodos, influências matemáticas, influências sociais e nas próprias categorias criadas nesta tese. Dessa forma, uma das contribuições pessoais e profissionais que destacamos é a compreensão da matemática como um campo amplo com diferentes perspectivas e visões acerca de um dado conteúdo, seja do ponto de vista da própria Matemática, seja sob o prisma epistemológico e filosófico.

Por conseguinte, o ensino também estará sujeito a essa visão, levando o professor a buscar métodos e formas de ensinar um dado conteúdo, seja no ensino básico ou no superior. Tal fato é evidenciado no desenvolvimento do TFA do próprio Lagrange ao buscar um novo método para o prosseguimento na pesquisa do Cálculo Infinitesimal.

REFERÊNCIAS

ARÓSTEGUI, J. **A pesquisa histórica: teoria e método**. Bauru, São Paulo: EDUSC, 2006. p. 592

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. Em: BICUDO, M. A. V. (Ed.). . **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

BAUER, M. W.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

BELHOSTE, B. When an academician becomes professor: the case of Joseph-Louis Lagrange. **Lettera Matematica**, v. 2, n. 1–2, p. 25–34, 2014.

BELL, J. L. **The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics**. Cham: Springer International Publishing, 2019. v. 82

BERLIN, A. DER W. **Noveaux Mémories de l´Academie royale des sciences et belles-lettres 1784**. Berlin: C.F.Voss, 1786.

BLOCH, M. **Apologia da história, ou, O ofício de historiador**. Rio de Janeiro: Zahar, 2002.

BOTTAZZINI, U. **The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer, 1986.

BOYER, C. B. (BENJAMIN). **Calculo**. São Paulo (SP): Atual, 1993.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. New York: Dover Publications, 1993. v. 2

CAPARRINI, S. Joseph-Louis Lagrange: essential timeline. **Lettera Matematica**, v. 2, n. 1–2, p. 93–96, 2014a.

CAPARRINI, S. Lagrange e i fondamenti dell'Analisi. **Lettera Matematica Pristem**, v. 88, n. 1–2, p. 56–58, mar. 2014b.

CARNOT, H. L. **Mémories sur Canot par son fils**. Paris: Pagnerre, 1861.

CARNOT, L. N. M. **Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal**. 1. ed. Paris: Duprat, 1797.

CARNOT, L. N. M. **Réflexions sur la Méthaphysique du calcul infinitésimal**. Paris: V. Coucier, 1813.

CARVALHO, T. F. D.; D'OTTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156**, v. 8, n. 1, p. 13–43, 2006.

CAVALCANTE, R. B.; CALIXTO, P.; PINHEIRO, M. M. K. Análise de Conteúdo: considerações gerais, relações com a pergunta de pesquisa, possibilidades e limitações do método. **Informação & Sociedade: Estudos**, v. 24, n. 1, 30 abr. 2014.

CONSTANTINO, N. S. DE. Pesquisa histórica e análise de conteúdo: pertinência e possibilidades. **Estudos Ibero-Americanos**, v. 28, n. 1, p. 183–194, 31 dez. 2002.

CORREIA, J. M. T. **A Evolução do Conceito de Função na Segunda Metade do Século XVIII**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática)—Porto: Universidade do Porto, 1999a.

FERRARO, G. **The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s**. New York, NY: Springer New York, 2008.

FERRARO, G.; PANZA, M. Lagrange's Theory of Analytical Fonctions and his Ideal of Purity of Method. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 66, p. 95–197, 2012.

FRASER, C. G. The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th century. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 39, n. 4, p. 317–335, 1989.

FRASER, C. G. Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, first edition (1797). Em: **Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940**. [s.l.] Elsevier, 2005. p. 258–276.

GILLISPIE, C. C. (ED.). **Dicionário de biografias científicas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009a. v. 1

GILLISPIE, C. C. (ED.). **Dicionário de biografias científicas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009b. v. 2

GILLISPIE, C.; YOUSCHKEVITCH, A. P. **Lazare Carnot Savant Et Sa Contribution a la Theorie de L'Infini Mathematique**. Paris: Librarie Philosophique J. Vrin, 1979. p. 323

GRABINER, J. V. Changing Attitudes Toward Mathematical Rigor: Lagrange and Analysis in the Eighteenth and Nineteenth Centuries. Em: JAHNKE, H. N.; OTTE, M. (Eds.). . **Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1981. p. 311–330.

GRACIÁN, E. **Un descubrimiento sin fin: el infinito matemático**. Barcelona: RBA, 2011.

KARNAL, L.; TATSCH, F. G. Documento e História: a memória Evanescente. Em: BASSANEZI, C. B.; DE LUCA, T. R.; MARTINS, A. L. (Eds.). . **O historiador e suas fontes**. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2009. p. 9–28.

LAGRANGE, J. L. DE. **Théorie des Fonctions Analytiques**. Paris: Courcier, 1797.

LAGRANGE, J. L. DE. **Théorie des Fonctions Analytiques**. Paris: Courcier, 1813.

LAGRANGE, J. L. DE. **Oeuvres de Lagrange**. Paris: M. J.-A. Serret, 1877. v. septième

LEITE, R. F. Revista Pesquisa Qualitativa. **A perspectiva da análise de conteúdo na pesquisa qualitativa: algumas considerações**, v. 5, n. 9, p. 539–551, dez. 2017.

LIRA, A. S. DE. **A Evolução do Conceito de Função segundo Guilherme de La Penha**. Belém: Universidade do Estado do Pará, 2013.

LIRA, A. S. DE; BRANDEMBERG, J. C. Sobre o Cálculo Infinitesimal: alguns aspectos do século XVIII. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 5, n. 14, p. 289–298, 25 ago. 2018.

LIRA, A. S. DE; BRANDEMBERG, JOÃO CLÁUDIO. O conceito de função: visão e influência Euleriana. **Congresso Pan-Amazônico de Matemática: Caderno de resumos**, p. 159, 2018.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. **História na Educação Matemática: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: autêntica editora,2011**. 2. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2011.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Revista Educação**, v. 22, n. 37, p. 7–32, 1999.

OLIVEIRA, D. C. DE. Análise de conteúdo temático-categorial: uma proposta de sistematização. **Rev. enferm. UERJ**, p. 569–576, 2008.

PANZA, M. **La forma della quantità: Analisi algebrica e analisi superiore: il problema dell'unità della matematica nel secolo dell'illuminismo.** [s.l.] Société Française d'Historie des Sciences et des Techniques, 1992. v. tomo I

PAOLI, D. DE. Lazare Carnot's grand strategy for political victor. **EIR:Executive Intelligence Review**, v. 23, n. 38, p. 14–31, 1996.

PEPE, L. Lagrange (1736–1813): una vita per la Matematica. **Lettera Matematica Pristem**, v. 88, n. 1–2, p. 4–14, mar. 2014.

PISANO, R.; GILLISPIE, C. C. **Lazare and Sadi Carnot: a scientific and filial relationship**. New York: Springer, 2012.

REINHARD, M. R. **Le grand Carnot: Lazare Carnot, 1753-1823**. Paris: Hachette, 1994.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. São Paulo: Zahar, 2012. p. 512

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SAD, L. A.; SILVA, C. M. S. DA. Reflexões Teórico-metodológicas para Investigações em História da Matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 30, p. 27–46, 6 out. 2008.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SANTOS, F. M. DOS. ANÁLISE DE CONTEÚDO: A VISÃO DE LAURENCE BARDIN. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 383–387, 29 maio 2012.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition**. New York: Springer-Verlag, 2005.

SILVA, A. H.; FOSSÁ, M. I. T. ANÁLISE DE CONTEÚDO: EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA TÉCNICA PARA ANÁLISE DE DADOS QUALITATIVOS. **Qualitas Revista Eletrônica**, v. 16, n. 1, 6 maio 2015.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A., 1998. p. 345

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p. 37–85, 1976b.

ANEXO A - CRONOLOGIA DE JOSEPH-LOUIS LAGRANGE

Lett Mat Int (2014) 2:93-96; DOI 10.1007/s40329-014-0046-0

Joseph-Louis Lagrange: linha do tempo essencial

Sandro Caparrini

Publicado online: 6 junho 2014

Centro P.RI. St. EM, Comercial da Universita Luigi Bocconi 2014

Resumo

Uma linha do tempo da vida e obra de Lagrange.

Palavras-chave: Lagrange. Matemática do Século XVIII. Biografia Científica

1 1736

25 de Janeiro: nascido em Turim, no número 29 do que é hoje Via Lagrange, primogênito de onze filhos. Seu pai, Giuseppe Francesco Lodovico, doutor em jurisprudência pela Universidade de Turim, é tesoureiro do Reale Intendenza delle Fabbriche e Fortificazioni; sua mãe, Teresa Gros, é a única filha de um rico médico de Cambiano (Piemonte). No registro de nascimento, seu nome é dado como Giuseppe Lodovico Lagrangia; em letras que ele geralmente assinou seu nome De La Grange. Em seus primeiros anos, ele foi educado em particular.

2 1750

Matriculou-se na Universidade de Turim, onde se dedica ao estudo do direito. Enquanto isso, ele começa a frequentar a biblioteca da universidade para promover seus estudos preferidos em matemática. Ele lê obras de Wolf, Newton, Agnesi, d'Alembert e Euler. Ele participa das aulas de física ministradas por Giambattista Beccaria e as de Matemática por Filippo Antonio Revelli.

3 1754

13 de Julho: escreve para Giulio Carlo da Fagnano, matemático de Pesaro, uma carta na qual desenvolve a analogia entre a fórmula binomial e diferenciais de alta ordem do produto de duas funções.

23 de Julho: publica seu primeiro trabalho, o Lettera di Luigi de La Grange Tournier torinese all'illustrissimo signor conte Giulio Carlo da Fagnano.

Lê Methodus inveniendi (1744), de Euler, a primeira tentativa de um tratamento sistemático de problemas variacionais.

4 1755

12 de Agosto: escreve a Euler de seus próprios métodos analíticos para resolver problemas de variação, que mais tarde seriam conhecidos como o cálculo das variações.

6 de Setembro: Euler responde, elogiando calorosamente seu método. 26 de setembro: é nomeado assistente do curso de matemática na Escola Real de Artilharia em Turim.

5 1756

5 de Outubro: é eleito um membro correspondente da Academia Real de Ciências e Letras de Berlim.

6 1757

Juntamente com o químico G. A. Saluzzo di Monesiglio e o médico G. F. Cigna, ele fundou uma "Sociedade Privada" com o objetivo de promover pesquisas nos campos das ciências matemática e natural.

7 1758

Primeiro contato epistolar com D'Alembert.

8 1759

Publicação do primeiro volume da Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis, contendo três memórias de Lagrange, incluindo o "Recherches sur la nature et la propagation du son" em que ele toma uma posição na disputa sobre cordas vibrantes.

9 1762

Publicação do segundo volume da Miscellanea (1760-1761). Este contém o "Essai d'une nouvelle me'thode pour de'terminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", onde ele expõe seu próprio cálculo de variações, e o "Application de la méthode prédente á la solution de différents Problémes de Dynamique", no qual ele generaliza o princípio de menor ação de Maupertuis e Euler.

10 1763

Novembro: sai de Turim pela primeira vez para uma viagem pela Europa. Ele deveria chegar a Londres, mas foi obrigado a interromper suas viagens por causa da doença. Sua estadia em Paris é rica em encontros e experiências: entre outros, ele conhece os matemáticos Clauraut, d'Alembert, Fontaine e Condorcet, e vê novamente o físico Nollet, que ele havia conhecido anteriormente em Turim.

11 1764

Maio: retorna a Turim depois de parar brevemente em Ferney para encontrar Voltaire.

Ele é premiado pela Academia de Ciências de Paris por sua "'Recherches sur la libration de la Lune" (publicado em 1777). Ao longo de sua carreira, Lagrange ganharia este prêmio cinco vezes.

12 1766

No "Recherches sur les inégalités des satélites de Júpiter causées par leur attraction mutuelle" ele examina o problema de n corpos.

Em Berlim, Euler deixa seu cargo de diretor da Classe de Matemática da Academia e retorna a São Petersburgo. D'Alembert aproveita a situação para recomendar Lagrange ao rei da Prússia, Frederico II.

21 de agosto: deixa Turim para Berlim, passando por Paris (onde ele se encontra novamente com D'Alembert), Londres e Hamburgo. Ele chega a Berlim em 27 de outubro.

6 de novembro: está instalado na Academia de Ciências de Berlim como diretor da Classe de Matemática.

13 1767

Setembro: casa-se com sua prima Vittoria Conti (1747-1783).

14 1770

Publica no Proceedings of the Berlin Academy o "Réflexions sur la résolution algébrique des équations", que marcam o início de estudos modernos sobre a resolução de equações algébricas.

15 1772

20 de Maio: é eleito membro estrangeiro da Academia de Ciências de Paris.

16 1783

4 de agosto: morte de sua esposa.

18 de Setembro: morte de Euler.

29 de Outubro: morte de D'Alembert.

17 1786

Após a morte de Frederico II (17 de agosto), algumas mudanças feitas na Academia induzem Lagrange a temer por seu futuro em Berlim. O Conde

Mirabeau, em uma missão diplomática para Berlim, o convence a se mudar para Paris.

18 1787

18 de Maio: deixa Berlim.

13 de Junho: primeira vez que a presença de Lagrange é registrada na Academia de Ciências de Paris.

29 de Julho: torna-se um pensionista que concorreu à Academia, um título que lhe permite participar de todos os votos.

19 1788

12 de Janeiro: é nomeado diretor da Academia de Paris para 1788.

5 de Abril: apresenta à Academia uma cópia da analitique méchanique, publicada em Paris, mas escrita durante seu período em Berlim.

20 1789

4 de Julho: faz parte de uma delegação para parabenizar o astrônomo Bailly por seu papel como presidente da Assembleia Nacional.

21 1790

27 de Outubro: juntamente com Laplace, Borda, Condorcet e Tillet, é convocado para fazer parte da Comissão de Pesos e Medidas.

22 1791

Novembro: é nomeado um membro do Bureau de
Consulta des arts et des métiers.

23 1792

Março: por alguns meses é um dos três administradores de la Monnaie.

31 de Maio: casa-se com Renée-Franc İoise-Adélaide Le Monnier (1767-1833), filha do astrônomo Pierre Charles e sobrinha de Guillaume, protomedicus ao rei.

24 1793

8 de Agosto: a Convenção ordena a supressão de todas as academias, e em particular da Academia de Ciências. Lagrange, assim, perde sua anuidade.

6 de Setembro: a Convenção ordena a prisão de todos os cidadãos de países em guerra com a França. Uma exceção é feita para Lagrange graças à sua habilidade em cálculos balísticos.

25 1794

17 de Janeiro: juntamente com Berthollet, é nomeado membro da Comissão de Educação Pública.

9 de novembro: é nomeado professor no École Normale.

26 1795

24 de Maio: realiza sua primeira lição no público École centrale des Travaux (que mais tarde se tornaria o École Politécnica).

Publica o Cinq leccions données á l'Ecole normale de l'an III, sobre questões de matemática elementar. 25 de Junho: é nomeado, com Laplace, um membro do Bureau des longitudes (que toma o lugar do Observatório suprimido).

27 de dezembro: é eleito presidente da Classe de Ciências Matemáticas e Físicas do Instituto Nacional de Ciências e Artes (que substitui a antiga Academia de Ciências).

27 1797

Publica o Théorie des fonctions analytiques, baseado em suas lições no École Centrale des Travaux Publiques, no qual ele expõe sua própria visão dos fundamentos do cálculo infinitesimal.

28 1798

Publica o tratado De la résolution des équations numériques de tous les degrés, uma reimpressão de duas memórias do período de Berlim, aumentada com notas e comentários..Dezembro: em Turim, por ordem de Talleyrand, o representante do governo M. A. Eymar e várias autoridades locais prestam uma visita formal ao pai envelhecido de Lagrange para tranquilizá-lo do interesse do novo governo em sua família.

24 de Dezembro: é nomeado senador a mando de Napoleão.

29 1801

Publica o Leccions sur le calcul des fonctions, um complemento ao Théorie des fonctions analytiques.

30 1803

2 de Outubro: juntamente com Berthollet, Laplace e Monge, é nomeado membro da Legião de Honra.

31 1804

14 de Junho: é promovido ao posto de Grande Oficial da Legião de Honra.

32 1805

2 de Setembro: é um orador da comissão que propõe um retorno ao calendário gregoriano.

33 1808

24 de Abril: é nomeado Conde do Império.

34 1811

Publica o primeiro volume da segunda edição de seu tratado sobre mecânica analítica, que agora é intitulado Mécanique analytique.

35 1813

3 de Abril: é conferido à Ordem Imperial da Reunião.

8 de Abril: Monge, Lacépède (presidente do Senado) e Chaptal fazem uma visita e ouvem suas reflexões finais.

10 de Abril: morre em sua casa em Paris, na Rue du Faubourg SaintHonore' Ele está enterrado no Panthéon.

36 1815

O segundo volume da analito mécanique é publicado postumamente. (Traduzido do italiano por Kim Williams)

Referências

1. Burzio, F.: Lagrange. UTET, Turim (2013)

2. Itard, J., Lagrange, JL.: 1736-1813. In: Rashed, R. (ed.). Essaisd'histoire des mathe'matiques, pp. 309-334 Blanchard, Paris (1984)

3. Pepe, L., Borgato, M.T.: Lagrange: appunti per una biografiascientifica. La Rosa, Turim (1990)

4. Pepe, L., Lagrange, J.L., Giuseppe, L.: Dizionario Biografico degliItalian,pp. 75-80. Istituto della Enciclopedia italiana, Roma (2004)

5. Taton, R.: Inventaire cronologique de l'oeuvre de Lagrange.Revue d'histoire des sciences 27, 3-36 (1974)

6. Taton, R.: Les de'buts de la carrie're mathe'matique de Lagrange: la pe'riode turinoise (1736-1766). Simpósio matemático 27, 123-145 (1986)

7. Taton, R.: Sur quelques pie'ces de la correspondance de Lagrange pour les anne'es 1756-1758. Bollettino di storia delle scienze matematiche 8, 3-19 (1988)

8. Taton, R.: Le de'part de Lagrange de Berlin et son installation a' Paris en 1787. Revue d'histoire des sciences 41, 39-74 (1988)

9. Taton, R. Lagrange, JL et al.: Re'volution franc ̧aise (juillet 1789 – novembre 1795). Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche, Naturali 126, Supplemento La 'Me'canique analytique' de Lagrange et son he'ritage, vol. 2, pp. 215-255 (1992)

Sandro Caparrini é formado em Física e em Matemática e doutor em Matemática pela Universidade de Turim. Seus interesses de pesquisa estão focados principalmente na história da interação entre matemática e mecânica a partir de 1750. Ocupou cargos de pós-doutorado no Instituto Dibner (Harvard e MIT), no Cohn Institute (Tel Aviv), no Instituto para a História e
Filosofias e Tecnologia (Toronto) e no Departamento de Matemática da Universidade de Lille (França). Em 2004, recebeu o Prêmio Slade da Sociedade Britânica pela História da Ciência.

Artigo disponível em: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s40329-014-0046-0.pdf

ANEXO B - CRONOLOGIA DE LAZARE CARNOT

Revista EIR, 20 de setembro de 1906, Vol 23, nº 38

1753: Lazare Carnot nasce em Burgogne (13 de maio).

1773: Carnot estuda com Gaspard Monge na academia militar em Mézières, onde conhece Benjamin Franklin.

1783: Carnot se torna um capitão do exército.

1789: Revolução Francesa começa. Tomada da Bastilha em Paris (14 de julho). Abolição do feudalismo. Declaração dos Direitos do Homem e do Cidadão. Propriedade da igreja nacionalizada.

1791: Vôo e captura do rei Luís XVI. Proclamação de nova constituição. Carnot é eleito para a nova Assembleia Legislativa (1º de outubro), encarregada da educação. Ele escreve suas primeiras propostas sobre a reforma do exército.

1792: A França declara guerra à coligação da Áustria e da Prússia. Primeiro uso de guilhotina (abril). Ataque das Tolherias (10 de agosto); derrubada da monarquia. Situação caótica no exército, com perdas em todas as frentes, massacres em Paris. Carnot lentamente começa a impor suas políticas. Carnot eleito para a Convenção Nacional (setembro); vai para os Pirineus para organizar a defesa contra um possível ataque da Espanha. Carnot escreve um relatório dizendo que sem soldados instruídos e uma reorganização econômica geral, não pode haver vitória.

1793: Luís XVI é executado (16 de janeiro); sua esposa, Marie Antoinette, é decapitada depois. A França declara guerra à Grã-Bretanha, Holanda e Espanha. Carnot escreve uma proposta para uma nova constituição, "Declaração dos Deveres dos Cidadãos", enfatizando a educação e o serviço militar para todos os cidadãos de 20 a 25 anos. A frente norte está em colapso. Carnot é enviado para lá, escreve um famoso relatório enfatizando a necessidade de acertar o inimigo nos flancos. Ele vira a situação militar ao redor, vencendo algumas batalhas. É aqui que ele percebe a importância da logística, mobilidade e inteligência. Os girondinos são expulsos do poder pelos jacobinos (julho). A França é governada por Maxmilien Robespierre e pelo Comitê de Salvação Pública. O reinado do Terror resulta na guilhotina de 1.251 pessoas até julho de 1794. O calendário revolucionário é introduzido. Marinha britânica intervém no Mediterrâneo. A França responde com total mobilização (levée en masse). Carnot reforma o exército e traz sua força para 1 milhão de homens (4% da população). Carnot nomeou membro do Comitê de Salvação Pública (agosto). Ele reorganiza e assume todas as operações militares sob seu controle, instalando, contra a vontade de Robespierre, uma equipe militar composta de oficiais da escola pré-revolucionária. Sua estratégia geral é defensiva para todas as regiões fronteiriças francesas, exceto no norte, onde haverá uma ofensivacontra a Inglaterra. A situação militar começa a mudar a partir de setembro: vitórias francesas em Hondschoote (norte), Lyon (sudeste), Toulon (sul), Dunquerque (norte). Carnot participa pessoalmente na batalha de Wattignies, onde desenvolve a ideia de que não basta fazer o inimigo recuar; ele tem que ser destruído.

1793-94: reformas de Carnot: 1) formação de um novo exército baseado em massa; 2) organização de forças militares para combater "guerra total"; 3) nova estratégia política: obter a neutralidade da Prússia. Interromper as comunicações entre a Áustria e a Inglaterra. Concentre esforços em atacar os ingleses, levando a uma invasão da Inglaterra. Tudo isso, no meio do caos em Paris e da oposição dos sans-culottes esquerdistas.

1794:O cristianismo é oficialmente abolido na França, em favor do "Culto da Razão" de Robespierre (maio). A França ocupa a Holanda (até 1795). A vitória francesa na batalha de Fleurus (junho), no norte, seguiu-se à retomada de todos os portos do norte, crucial para obter ajuda dos EUA aos franceses. O contraste geopolítico entre o Robespierre anti-prussiano e o anti-inglês Carnot, agora chefe de operações militares, leva ao golpe de 9-10 Thermidor, liderado por Paul Barras, que encerra o Reinado do Terror e leva à prisão de Robespierre. Danton e Robespierre são executados (julho). A autoridade e a influência militar de Carnot são usadas para remover Robespierre, embora Carnot nunca aceite as políticas reacionárias dos termidorianos. Enquanto isso, os exércitos franceses continuam a recuperar território após território. Criação da École Politécnica (setembro).

1795: frota holandesa capturada pela França. Prússia, Espanha faz as pazes com a França. Carnot deixa o Comitê de Segurança Pública, em oposição às políticas de direita de Barras. Ele retorna ao poder em 11 de abril, tornando-se um membro do Diretório, que governa a França com um comitê executivo de cinco homens.

1796: Napoleão Bonaparte lidera o exército francês na conquista da maior parte da Itália em 1797. Carnot é eleito presidente do Diretório (30 de abril).

1797: Golpe de Estado de 18 Fructidor pelo General Augereau (4 de setembro). Carnot é removido do diretório, escapa primeiro para a Suíça e depois para a Alemanha. O Diretório, agora um triunvirato sob Barras, torna-se dependente de Napoleão.

1798: os franceses ocupam Roma, invadem a Suíça. Bonaparte lidera a expedição ao Egito (até 1799), toma o Cairo. Frota britânica derrota o francês na batalha do Nilo.

1799: Bonaparte invade a Síria. Coalizão formada pela Grã-Bretanha, Áustria, Rússia, Portugal, Nápoles e Império Otomano contra a França. Francês expulso da Itália. Golpe de Estado de 18 Brumário: Bonaparte retorna à França, derruba o Diretório e monta um Consulado, que governa até 1804. Carnot retorna, é nomeado ministro da Guerra; mas renuncia em oposição, 1800.

1801: Tratado entre a França e a Áustria leva à dissolução do Sacro Império Romano. A França ganha margem esquerda do Reno e mantém a maior parte da Itália.

1802: Tratado de Amiens entre a Grã-Bretanha e a França. Bonaparte é criado primeiro cônsul para a vida, sobre a oposição de Carnot, que era contra o estabelecimento do império.

1803: Começa a guerra entre a Grã-Bretanha e a França.

1804: Bonaparte coroa-se imperador. O primeiro Império dura até 1814. A Terceira Coalizão é formada pela Grã-Bretanha, Rússia, Áustria e Suécia contra a França.

1805: França derrota a Áustria na Batalha de Ulm. Marinha britânica derrota a frota franco-espanhola na Batalha de Trafalgar. A França derrota a Áustria e a Rússia na Batalha de Austerlitz.

1806: Napoleão dissolve o Sacro Império Romano. Prússia derrotada pela França em Jena e Auerstadt.

1807: Carnot se retira da vida pública.

1808: os franceses ocupam a Espanha; Joseph Bonaparte se torna rei da Espanha.

1810: França anexa a Holanda.

1811: franceses expulsos de Portugal.

1812: Napoleão invade a Rússia; ocupa Moscou. Maior extensão do império de Napoleão, abrangendo 50 milhões dos 175 milhões de habitantes da Europa. Napoleão forçado a se retirar da Rússia. Apenas 100.000 sobrevivem, de seu exército de 600.000.

1813: Prússia começa a Guerra da Libertação da França. Coalizão contra a França formada pela Rússia, Prússia, Grã-Bretanha, Áustria e Suécia. Francês derrotado na Batalha de Leipzig, Batalha de Vittoria. Forças aliadas invadem a França.

1814: Forças da coalizão entram em Paris em março. Carnot é nomeado governador de Antuérpia por Napoleão. Napoleão abdica e é exilado em Elba. Luís XVIII torna-se rei da França. O Tratado de Paris termina as Guerras Napoleônicas. Congresso de Viena (a 1815).

1815: Os Cem Dias: Napoleão retorna a Paris. Carnot serve como ministro do interior. Batalha de Waterloo: Napoleão derrotou e exilou a Santa Helena. Carnot é exilado da França (julho), estabelece-se primeiro em Varsóvia e depois em Magdeburg, na Alemanha. As fronteiras da França são restauradas para as de 1790.

1823: Carnot morre em Magdeburgo.

ANEXO C - REFORMULACÕES DO CÁLCULO POR LAGRANGE

Tabela 1 – Fundamentos Algébricos do CI

REFORMULAÇÃO DAS BASES DO CÁLCULO EM SUA PARTE PURA				
	Theorié, 1797	*Leçons*, 1801	*Leçons*, 1806	*Theorié*, 1813
Derivada de uma função em relação a qualquer função da sua variável	/	VII	VII	/
Equações derivadas e transformação de funções	54-57	X	X	41-44
Fórmulas relativas às funções trigonométricas	/	X-XI	X-XI	/
Constantes arbitrárias que ocorrem na solução de equações derivadas	58-61	XII	XII	45-48
Solução de algumas equações derivadas	62-70 79-84	/	/	49-57 67-72
Teoria dos primitivos singulares	71-76	XV-XVIII	XIV-XVII	58-63
Aplicações a séries e equações de 3º grau	76-78	/	/	64-66
Expansão de qualquer função de uma raiz da equação z = x+ f(z)	97-99	/	/	85-87
Função de várias variáveis e equações derivadas parciais	85-96 100-107	XIV e XX	XIX-XXI	73-84 88-95
Teoria do Multiplicador	/	XIII	XIII	/
Equações de diferenças finitas	/	XIX	XVIII	/
Cálculo das variações	170-184	/	XXI-XXII	61-76, part 2

Fonte: Ferraro e Panza (2012, p. 190, tradução nossa).