UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

FRANCISCO FIALHO GUEDES FERREIRA

CONTRIBUIÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I PARA O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BELÉM - PA

2021

FRANCISCO FIALHO GUEDES FERREIRA

CONTRIBUIÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I PARA O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Texto apresentado à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, vinculado ao Instituto de Educação Matemática e Ciências, da Universidade Federal do Pará como exigência parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas (área de concentração: Educação Matemática).

Orientadora: Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha.

Belém - PA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383c Ferreira, Francisco Fialho Guedes.
Contribuições epistemológicas do Cálculo Diferencial e Integral I para o curso de Licenciatura em Matemática / Francisco Fialho Guedes Ferreira. — 2021.
xvii, 159 f. : il.

Orientador(a): Profª. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2021.

1. Cálculo Diferencial e Integral I. 2. Formação. 3. Matemática Básica. 4. Taxonomia SOLO. I. Título.

CDD 371.102

FRANCISCO FIALHO GUEDES FERREIRA

CONTRIBUIÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I PARA O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas.

Aprovação em 15/04/2021

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
PPGECM – IEMCI (UFPA)
Orientadora

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Membro Interno – PPGECM (IEMCI/UFPA)

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales
Membro Interno – PPGECM (IEMCI/UFPA)

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires
Membro externo
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS/BA

Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Membro externo
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Pará – IFPA/PA

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ATA DE DEFESA DE TESE DOUTORAL

Aos quinze dias do mês de abril de dois mil e vinte um, às nove horas, reuniu-se via plataforma virtual, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, composta pelos professores doutores: Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha (Presidente), João Carlos Brandemberg Quaresma (membro interno), Elielson Ribeiro de Sales (membro interno), Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires (membro externo – UEFS/BA) e Raimundo Otoni Melo Figueiredo (membro externo – IFPA). Sob a presidência da primeira, procederam à Defesa de Tese do aluno **FRANCISCO FIALHO GUEDES FERREIRA**. Após a apresentação do trabalho intitulado "**CONTRIBUIÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I PARA O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**", a Banca reuniu-se em separado para a Avaliação e apresentou o seguinte parecer:

A tese apresentada pelo doutorando cumpre as normas e requisitos legais de uma tese e foi considerada relevante dentro do contexto da Educação Matemática por ser uma pesquisa que aprofundou as contribuições epistemológicas do cálculo na formação de professores de Matemática, visto que é de extrema importância para a melhoria e aprimoramento dos cursos de Licenciatura em Matemática.

A banca sugeriu alguns ajustes na redação final da tese e indicação para futuras publicações dada a relevância e qualidade do trabalho apresentado.

*Assim, o discente é considerado **APROVADO** neste Exame de Defesa de Tese.*

*Sendo cumpridas as exigências regimentais, no prazo de até 60 (sessenta) dias, o Colegiado do Programa homologará a TESE e concederá o título de **Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas** – área de concentração: **Educação Matemática.***

E, para constar, a presente ata foi lida e assinada por todos os membros da Banca Examinadora.

Belém, 15 de abril de 2021.

Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha

Prof. Dr. João Carlos Brandemberg Quaresma

Documento assinado digitalmente
Elielson Ribeiro de Sales
Data: 03/05/2021 22:33:24-0300
CPF: 304.126.922-87

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires

Raimundo Otoni Melo Figueiredo:28249933249
Assinado de forma digital por Raimundo Otoni Melo Figueiredo:28249933249
Dados: 2021.05.06 13:30:03 -03'00'

Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo

Dedico este trabalho aos meus pais, Raimundo e Rita, e aos meus irmãos Nico e Francimar (*in memoriam*), pelo amor dispensado à nossa família e por não terem medido esforços para me direcionar no caminho mais acertado. Aos meus filhos, Ramon, Jullieth e Phellipe, pelo suporte e paciência, para que pudesse me dedicar a este trabalho. À minha esposa Kátia pelo apoio, carinho e compreensão. Aos demais familiares que, mesmo distantes, sempre estiveram presentes nos momentos mais importantes da minha vida.

AGRADECIMENTOS

- A Deus Todo Poderoso, que me concedeu a vida e a força necessária para chegar ao final deste trabalho;
- A minha orientadora, Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha, pela atenção, paciência, dedicação e participação importantíssima na minha formação como pesquisador;
- Aos Professores Doutores Carlos Aldemir Farias, Iran Abreu Mendes e Tadeu Oliver pelos ensinamentos oferecidos no decorrer do curso.
- Aos amigos do Grupo de Estudos em História e Ensino da Matemática, representado pelo Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma, pelo compartilhamento de conhecimentos.
- À Universidade Federal do Pará;
- À Coordenação do programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, representado pelo Prof. Dr. Tadeu Oliver;
- Ao Instituto Federal do Pará;
- Aos amigos professores da coordenação de matemática do IFPA pelo apoio dispensado durante o meu período de afastamento;
- Aos meus colegas do programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas das demais áreas de pesquisa, incluindo amigos da REAMEC, que de alguma forma me ajudaram;
- Finalmente, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho adota como objeto de pesquisa a formação acadêmica na Licenciatura em Matemática, com foco de estudo no conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I), para a formação de futuros professores da Educação Básica dos alunos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA). A questão que motivou a pesquisa foi "de que forma o Cálculo Diferencial e Integral I contribui para a formação de futuros professores de matemática da Educação Básica?" O objetivo desta investigação é analisar as contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática para a Educação Básica. A metodologia utilizada na pesquisa foi de tipo qualitativa, fundamentada em levantamentos sobre a temática abordada em bancos de dados, na Taxonomia SOLO, no Modelo MQ^2 e no Discurso do Sujeito Coletivo, com vistas a uma análise sobre as contribuições epistemológicas do CDI - I para formação de futuros professores de matemática da Educação Básica, sob a perspectiva: da aprendizagem dos alunos; do conteúdo da disciplina; e da fala dos professores. Os resultados da pesquisa foram sistematizados a partir de indicativos apontados pelas teses e dissertações pesquisadas, pela elaboração e uso de um modelo analítico quantitativo/qualitativo MQ^2, pela análise de questões que interconectam a matemática da Educação Básica com o CDI-I, e pelo Discurso do Sujeito Coletivo desenvolvido a partir da fala de um grupo de professores da referida disciplina. Essas discursões tem seu desenvolvimento apresentado nos capítulos 2 e 5 desta tese, cuja relevância se encontra na viabilidade em medir o nível qualitativo/quantitativo de contribuição epistemológica para a formação de futuros professores de matemática da Educação Básica, os quais sugerem que temos que dar um direcionamento para CDI-I, ou seja, olhar para os interessados pela disciplina. Para encaminhar respostas do questionamento formulado inicialmente, confirmamos a tese de que o CDI-I contribui epistemologicamente para a formação de futuros professores de matemática da Educação Básica, no entanto, é de suma importância que algumas questões sejam resolvidas para que essa disciplina tome um corpo moldado aos interesses de quem o necessita aprender.

Palavras-Chave: Cálculo Diferencial e Integral I. Formação. Matemática Básica. Taxonomia SOLO.

ABSTRACT

This work has as object of research the academic formation in Degree in Mathematics, with focus of study in content of the Differential and Integral Calculus I (DIC-I), for the formation of future teachers of Basic Education of the students from the Federal Institute of Education, Science and Technology of Pará (IFPA). The question that motivated the research was “what way the Differential and Integral Calculus I contribute to formation of future mathematics teachers in Basic Education?” The aim this study is to analyze the epistemological contributions of the DIC-I for the training of students of Degree in Mathematics course for Basic Education. The methodology used in the research was qualitative, based in surveys on the issue addressed in databases, in the SOLO Taxonomy, in the MQ^2 Model and in the Collective Subject Discourse, with a view to an analysis on the epistemological contributions of the DIC - I to formation of future mathematics teachers in Basic Education, from the perspective of: student learning; subject contents; and teachers' speech. The search results were systematized as of indicatives pointed out by the researched theses and dissertations, by the elaboration and use of a quantitative/qualitative analytical model MQ^2, by the analysis of questions that interconnect mathematics of Basic Education with DIC -I, and the Discourse Collective Subject developed from the speech of a group of teachers of that discipline. These discussions have their development presented in chapters 2 and 5 of this thesis, whose relevance is in the viability feasibility of check the qualitative / quantitative level of epistemological contribution to formation of future mathematics teachers in Basic Education, which suggest that we have that give a direction for DIC -I, in other words, look at interested in the discipline. To refer answers to the question formulated initially, we confirm the thesis that the DIC-I contributes epistemologically to formation of future mathematics teachers in Basic Education, however, is very importance that some questions are resolved for that this discipline be molded to the interests whose need to learn it.

Key words: Differential and Integral Calculus I. Formation. Basic Math. SOLO Taxonomy.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDI-I – Cálculo Diferencial e Integral I
CEFET/PA - Centro Federal de Educação Tecnológica do Pará
DSC – Discurso do Sujeito Coletivo
ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
EB – Educação Básica
EPT – Educação Profissional e Tecnológica
EAD – Educação a Distância
EM – Ensino Médio
GEHEM - Grupo de Estudos em História e Ensino da Matemática
IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IFPA – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
IFMA – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
IES – Instituições de Ensino Superior
LM – Licenciatura em Matemática
INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC - Ministério da Educação
MB – Matemática Básica
MQ^2 – Modelo analítico Qualitativo/Quantitativo para análise de questões de prova
PPC – Projeto Pedagógico de Curso
PARFOR - Programa Nacional de Formação de Professores da Educação Básica
PPGECM - Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
PIBID – Programa Institucional de bolsas de Iniciação à Docência
SOLO – Structure of the Observed Learning Outcomes
SEDUC/MA – Secretaria de Estado da Educação do Maranhão
SUAVE - Supervisão de Avaliação Educacional
TRI – Teoria da Resposta ao Item
TCT - Teoria Clássica do Teste
TS – Taxonomia SOLO
UFPA – Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

É comum ouvirmos falar no meio acadêmico, e até mesmo fora dele, que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é um divisor de águas para quem pretende se aventurar nos cursos superiores de cujas matrizes curriculares essa disciplina faz parte. Muito se discute sobre essa disciplina em termos de metodologia de trabalho em sala de aula e suas consequências para os índices de aprovação, etc. Sobre as licenciaturas em Matemática, são vários os trabalhos acadêmicos que discutem a formação inicial do professor de matemática. Como exemplo, temos as indagações feitas por Valente (2017), que se questiona: como deve ser formado o professor de matemática? Que matemática deve estar presente na formação do profissional docente? O que tais indagações têm a ver com a formação do educador matemático?

Algumas pesquisas argumentam a existência de uma única Matemática, outras levam em consideração diferentes matemáticas, tais como a Matemática para ensinar e a Matemática a ensinar (SANTOS; LINS, 2016). Nesse sentido, preocupamo-nos com a Matemática a ensinar, com foco mais preciso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I direcionada para a licenciatura em Matemática, por entendermos que, em função de nossa vivência como professor de matemática tanto na Educação Básica quanto na Superior – e, no caso deste último, conta-se, ainda, com a atuação em outros cursos –, essa disciplina é metodologicamente desenvolvida, tanto na Licenciatura em Matemática quanto em outros cursos superiores, com muitas aproximações que nos levam a refletir se o Cálculo Diferencial e Integral I traz contribuições para a formação de professores de Matemática da Educação Básica.

Não pretendemos analisar o ensino de CDI-I, mas apenas a aprendizagem dos graduandos no que diz respeito aos conceitos matemáticos inerentes a esta disciplina, no sentido de averiguar se a disciplina traz contribuições para a atuação desses futuros professores durante o processo de ensino da disciplina de Matemática na Educação Básica.

Para melhor compreensão, a pesquisa foi desenvolvida da seguinte forma: no Capítulo 1, discorremos sobre a contextualização e problematização, a importância do trabalho, os objetivos geral e específicos, a metodologia da pesquisa, um breve histórico da Licenciatura em Matemática do IFPA Campus Belém e sobre o movimento decorrente entre o CDI-I e a Matemática Básica (MB).

Na fundamentação teórica, Capítulo 2, procuramos discorrer sobre a Taxonomia SOLO, uma teoria criada por Biggs e Collis em 1982, sobre o Modelo analítico MQ^2 e o Discurso do Sujeito Coletivo. Nesse mesmo capítulo, criamos uma situação hipotética para desenvolver o nosso modelo, a partir das ideias de Figueiredo (2017).

No Capítulo 3, lançamos mão de uma pesquisa a dois bancos de teses e dissertações brasileiros, o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, com a intenção de nos situar em relação ao tema e às teorias em que pretendemos nos sustentar e, ao mesmo tempo, descrevemos a empiria, colocando em prática o modelo desenvolvido no Capítulo 2, utilizando-o no experimento.

No Capítulo 4, intitulado “Contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação de licenciandos em Matemática”, desenvolvemos e exibimos os resultados da pesquisa.

Nas considerações finais, fazemos nossas observações em relação aos resultados da pesquisa, seus vínculos com a problemática e objetivos, bem como as limitações estabelecidas. Deixamos algumas sugestões para trabalhos futuros, os quais podem ser desenvolvidos a partir deste, além de expor nossas expectativas de contribuições no âmbito da pesquisa em Educação Matemática.

1 CIRCUNSTÂNCIAS PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Para desenvolver a pesquisa, inicialmente apresentamos a trajetória profissional do pesquisador, o que consequentemente justifica o porquê do trabalho e nos coloca no contexto da situação-problema que nos instiga a desenvolvê-lo, situação-problema esta que nos impulsiona a alargar os conhecimentos da nossa relação estabelecida com o Curso de Licenciatura em Matemática do IFPA. Na sequência, trataremos da metodologia da pesquisa, do contexto histórico do Cálculo Diferencial e Integral I na licenciatura em Matemática do IFPA/Belém, do movimento decorrente entre CDI-I e a Matemática Básica, com a intenção de descrever e analisar os objetivos dessa disciplina para relacioná-los aos princípios e objetivos da formação do professor de Matemática desse Campus.

1.1 Contextualização e problematização

Iniciei minha vida como professor pela rede estadual de ensino do estado do Maranhão no ano de 1994 no município de Cidelândia, logo após encerrar o ensino médio no curso de magistério também pela rede estadual de ensino do Maranhão – que até então habilitava os concluintes a atuarem nas primeiras séries da Educação Básica – e após prestar concurso público pela rede estadual de educação maranhense (o último concurso que exigia habilitação para lecionar até a 4ª série, 5º ano atual).

Durante esse período (1994 a 2001), atuei como professor leigo (ensino médio/magistério) tanto no ensino fundamental como no médio. Em 2001, por meio do Programa de Capacitação Docente (PROCAD), desenvolvido pelo governo do estado do Maranhão, concluí o ensino superior, tornando-me licenciado pleno para trabalhar na Educação Básica com a disciplina de Matemática, onde permaneci até o ano de 2012.

Ainda nesse período, mais precisamente no ano de 2006, fui aprovado para cursar o mestrado em Estatística pela Universidade Federal do Pará, desenvolvendo estudos relacionados ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que culminaram em minha dissertação de mestrado defendida em 2009, cujo título é “Escala de proficiência para o ENEM utilizando a Teoria da Resposta ao Item”. Esse trabalho me possibilitou o convite da Secretaria de Estado da Educação do Maranhão (SEDUC), especificamente da Supervisão de Avaliação Educacional (SUAVE), para trabalhar como especialista em índices educacionais, tais como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) e escalas de proficiência do ensino fundamental e médio.

O mestrado em Estatística também abriu portas para o ensino superior. Como sou licenciado em matemática, no ano de 2011, fui convidado pelo coordenador do Programa Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (PARFOR) do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Maranhão – Campus Zé Doca – para trabalhar no curso de Licenciatura em Matemática com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, II, III e IV. Com o incentivo de amigos e a afinidade que construí com o IFMA, resolvi, nesse mesmo ano, prestar concurso público para esta instituição, sendo aprovado e efetivado no ano de 2012, e nesse mesmo ano me desvinculei da rede de ensino estadual do Maranhão.

No IFMA, continuei desenvolvendo meu trabalho tanto no ensino médio quanto no superior, local onde trabalhava tanto em cursos de licenciaturas – Química, por exemplo – quanto nos cursos tecnólogos – Tecnólogo em Alimentos, por exemplo – e ainda na Licenciatura em Matemática pelo PARFOR.

Em 2014, pedi redistribuição daquele Campus do IFMA para o Campus Belém do Instituto Federal do Pará – IFPA. Em Belém, continuei atuando como professor do ensino médio integrado e nos cursos superiores, mas foi como professor de matemática do curso de Licenciatura em Matemática e dos cursos tecnólogos, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I), que indagações emergiram durante a minha prática docente. A atuação em dois cursos diferentes gerou o incômodo de trabalhar o Cálculo Diferencial e Integral I da mesma forma nos dois cursos. Tal incômodo tem relação não com a forma como desenvolvo a disciplina no curso de Engenharia de Controle e Automação, mas sim como essa disciplina é trabalhada na Licenciatura em Matemática, em termos de contribuições do conhecimento do conteúdo para a formação dos futuros docentes em suas atuações na Educação Básica. Além disso, em nosso meio, professores sempre fazem questionamentos, como, por exemplo, os do professor Claudio Possani:

> por que o aluno da Licenciatura em Matemática precisa estudar um assunto que não consta no programa do ensino médio, nem do ensino fundamental, se durante as suas atuações, esses professores não lecionarão esses conteúdos? Ou ainda: o professor precisa saber mais do que aquilo que ele vai ensinar? (POSSANI, 2015).

A partir de indagações dessa natureza – que também são minhas –, procurei buscar subsídios para tentar entender o movimento que decorre entre o Cálculo Diferencial e Integral I e a Matemática da Educação Básica.

Com o incentivo e orientações de professores do IFPA já engajados na pesquisa educacional, resolvi procurar o programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará – IEMCI/UFPA. A caminhada iniciou-se em 2016, quando participei das reuniões do grupo de pesquisa em Didática da Matemática, as quais me possibilitaram adentrar na linha de pesquisa do grupo e concorrer a uma vaga ao programa em 2017.

Ainda em 2017, participei do grupo de pesquisa em História e Ensino da Matemática (GEHEM) e, como atividade do grupo, assisti à defesa de tese de doutorado do Professor Raimundo Otoni Melo Figueiredo, sob a orientação do Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, intitulada “Intercontextualidade na Prática Educativa de Iniciação à Docência em Matemática para a Educação Básica”, temática que me despertou para fazer algumas reflexões sobre as inquietações que me ocorriam em sala de aula. Assim, surgiram as primeiras ideias para esse trabalho, produzidas a partir de trocas de ideias com o professor Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo.

A tese de Figueiredo objetivou analisar as práticas educativas interdisciplinares desenvolvidas no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), voltadas para os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA).

A investigação intencionou principalmente analisar os níveis de contribuições das práticas educativas interdisciplinares dinamizadas pelo PIBID/IFPA/Matemática sob o ponto de vista epistemológico-pedagógico (FIGUEIREDO, 2017). Essas investigações foram possibilitadas pelo modelo analítico[1] MQ^2, criado pelo autor e que lhe permitiu apresentar e descrever finalidades. A relevância do modelo se encontra em sua capacidade de viabilizar e de medir o nível da contribuição epistemológico-pedagógica de práticas educativas na iniciação à docência.

A partir de reflexões sobre o modelo apresentado por Figueiredo (2017), ideias foram surgindo, de forma que este autor se tornou uma das nossas fontes de estudo no sentido de me fundamentar teoricamente para esta pesquisa.

---

[1] O modelo analítico MQ^2 (Qualitativo/Quantitativo) apresentado por (FIGUEIREDO, 2017).

O vislumbre que tive se deu muito em função da experiência desenvolvida durante a minha dissertação de mestrado – “Escala de proficiências para o ENEM utilizando a Teoria da Resposta ao Item” – e o período de trabalho na SUAVE da SEDUC/MA, com análises sobre avaliação em larga escala e índices educacionais.

A partir do modelo analítico apresentado por Figueiredo (2017), construímos um Modelo MQ^2 – o qual será apresentado no Capítulo 2 – para atender à situação em que nos encontramos. Ressaltamos que, a partir deste novo modelo, das interconexões entre a matemática da Educação Básica e o CDI-I na Licenciatura em Matemática – que serão expostas mais adiante -, das indagações mencionadas anteriormente (como, por exemplo as do Professor Cláudio Possani), idealizamos a nossa questão de pesquisa: de que forma o Cálculo Diferencial e Integral I contribui para a formação dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFPA/Belém para atuar na Educação Básica?

O objeto da pesquisa está centrado na análise da formação acadêmica dos discentes da Licenciatura em Matemática do IFPA Campus Belém, com foco de estudo no conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral I para a formação de futuros professores da Educação Básica.

Alguns saberes são de suma importância para a formação profissional de professores. Tardif (2010) expõe que são vários os saberes inerentes à formação profissional, dos quais nos interessam os saberes disciplinares para a pesquisa em questão. Tardif relata que,

> além dos saberes produzidos pelas ciências da educação e dos saberes pedagógicos e a prática docente, incorpora ainda saberes sociais definidos e selecionados pela instituição Universitária. Esses saberes integram-se igualmente a prática através da formação Inicial e continuada dos professores nas diversas disciplinas oferecidas pelas universidades. Podemos chamá-los de saberes disciplinares. São saberes que correspondem aos diversos campos do conhecimento, saberes que dispõe a nossa sociedade, tais como se encontram hoje integrados nas universidades, sobre a forma de disciplinas no interior de faculdades e de cursos distintos. Os saberes disciplinares como por exemplo a matemática, a história, a literatura e etc. que são transmitidos nos cursos e departamentos universitários independentemente das faculdades de Educação e dos cursos de formação de professores. Os saberes das disciplinas emergem da tradição cultural e dos grupos sociais produtores de saberes (TARDIF, 2012, p. 38).

Neste contexto de investigação, a hipótese que sustentamos é de que o CDI-I tenha contribuições relevantes para a formação de professores de Matemática e de sua prática docente na Educação Básica.

Baseado em Fiorentinni e Lorenzato, (2006), fizemos a escolha do tema – Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática – em função das observações a seguir apresentadas, que consideramos primordiais para o andamento da pesquisa:

- A experiência e/ou conhecimento inicial do pesquisador sobre o assunto;
- A preferência e a competência do pesquisador para estudá-lo;
- O tempo e os recursos disponíveis;
- As prováveis contribuições para a prática profissional;
- A sua importância para a Educação Matemática.

Essas são observações importantes que estão intimamente relacionadas com este pesquisador. Em busca de encontrar itinerário para as respostas de nossa questão de pesquisa, tentaremos alcançar o objetivo geral a seguir proposto:

- Analisar as contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA para a Educação Básica.

Tal objetivo representa o caminho que tomamos na busca de respostas para os nossos questionamentos, com o auxílio dos objetivos específicos a seguir:

- Verificar, por meio do modelo analítico MQ^2, como se comportam os alunos da Licenciatura em Matemática (LM) do IFPA/Belém, do ponto de vista do conhecimento de alguns conteúdos da disciplina;
- Identificar o uso do CDI-I para a formação dos alunos da LM do ponto de vista do próprio conteúdo;
- Analisar a utilização do CDI-I para a formação dos alunos da LM sob o ponto de vista dos professores dessa disciplina.

1.2 Metodologia da Pesquisa

Como bem nos asseguram Marconi e Lakatos (2003), pode-se dizer que pesquisa é uma investigação baseada em procedimentos que nos levam a melhorar, ampliar e/ou refletir sobre o conhecimento relacionado a determinados fenômenos. Neste contexto, fica claro que a pesquisa viabiliza um estudo mais aprofundado sobre determinado objeto de interesse. O mais preocupante, contudo, é constatar que o planejamento, o desenvolvimento e conclusões se tornam um tanto quanto demorados e trabalhosos, portanto, trata-se de um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais.

A pesquisa aplicada, para Marconi e Lakatos (2003, p. 160), "estuda um problema relativo ao conhecimento científico ou à sua aplicabilidade". Devido aos fins práticos do desenvolvimento de um modelo de análise, utilizaremos como natureza a pesquisa aplicada.

Conforme exposto em Gil (2008), pode-se dizer que pesquisa descritiva se caracteriza mais significativamente pela utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados, realizadas com o intuito de descrever as características de determinado fenômeno. Neste contexto, fica claro que este tipo de pesquisa procura apenas descrever determinado fenômeno. Por outro lado, pesquisas explicativas são aquelas que têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Trata-se, inegavelmente, da pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas e, assim, reveste-se de particular importância.

A pesquisa que desenvolvemos procura descrever e explicar determinados fenômenos relacionados à atuação de graduandos em matemática, diante de instrumentos avaliativos vinculados à aprendizagem de CDI-I, de forma que seja possível atingir o objetivo da pesquisa de forma mais eficiente. Desta forma, observa-se que, diante do exposto, esta pesquisa é classificada como pesquisa Descritiva e Explicativa.

Conforme verificado em Gil (2008), a forma de abordagem qualitativa se fundamenta na interpretação do pesquisador. Trata-se de uma abordagem que é utilizada com as pesquisas definidas como estudos de campo, estudos de caso, pesquisa-ação ou pesquisa participante. Por outro lado, reveste-se de particular importância a análise dos dados nas pesquisas experimentais e nos levantamentos que são essencialmente quantitativos.

Intencionamos nesta pesquisa, conforme citado acima, interpretar os resultados relacionados a testes avaliativos aplicados a um grupo de licenciandos em matemática, assim como os resultados relativos a entrevistas feitas a um grupo de professores. Em função disso, entendemos que a abordagem utilizada é a qualitativa.

Pode-se dizer que um levantamento bibliográfico pode ser realizado em livros, artigos, anais de congressos, teses, dissertações, periódicos etc. Neste contexto, para

Marconi e Lakatos (2003), fica claro que, para limitar as fontes de interesse de uma pesquisa, é imprescindível a utilização de um levantamento bibliográfico.

Como bem nos assegura Gil (2008), pode-se dizer que a técnica de pesquisa experimental consiste essencialmente em submeter os objetos de estudo à influência de certas variáveis, em condições controladas e conhecidas pelo investigador, para observar os resultados que a variável produz no objeto.

A pesquisa tem como procedimento para a coleta de dados a pesquisa experimental, a entrevista e as fontes bibliográficas, tais como livros, revistas, teses, dissertações e outras fontes de dados. Assim, utilizaram-se os resultados da pesquisa experimental, entrevistas e as fontes bibliográficas para as devidas fundamentações e inferências.

Primeiramente, como instrumento para coleta de dados, utilizaram-se resumos através de fichamentos, tendo como base teses e dissertações de maior relevância sobre o assunto, a fim de se obter uma melhor apreciação do conteúdo apresentado no trabalho. Com esse tipo de fichamento, é possível levantar as informações mais importantes sobre o tema que servirá como fonte de dados. Quanto às entrevistas, entramos em contato com um grupo de professores através de mídias sociais. Já o experimento se desenvolveu no período de 05 de novembro de 2019 a 30 de março de 2020.

De acordo com Marconi e Lakatos (2003, p. 159):

> Fontes primárias - dados históricos, bibliográficos e estatísticos; informações, pesquisas e material cartográfico; arquivos oficiais e particulares; registros em geral; documentação pessoal (diários, memórias, autobiografias); correspondência pública ou privada etc. Fontes secundárias - imprensa em geral e obras literárias (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 159).

A pesquisa está pautada na utilização de fontes primárias (visto que temos em posse dados ainda não estudados) e também de fontes secundárias, devido à pesquisa e a coleta de informações bibliográficas serem desenvolvidas a partir do assunto que constitui o objeto de estudo.

Para a coleta de dados através da pesquisa bibliográfica, foi realizado no primeiro semestre de 2019, por meio eletrônico, um levantamento junto aos bancos de dados de teses e dissertações do Brasil: Capes e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Nesses bancos de dados, foram pesquisadas teses e dissertações que trataram do Cálculo Diferencial e Integral realizadas em Licenciaturas em Matemática e trabalhos que utilizaram a Taxonomia SOLO.

Na pesquisa experimental, testes foram aplicados para os licenciandos em matemática do segundo semestre da Licenciatura em Matemática do IFPA/Belém, abordando conteúdos que interconectam a Matemática Básica ao CDI-I, cujos resultados foram objetos de análise. Conjuntamente aos testes, questionários foram aplicados aos professores da referida disciplina, com o intuito de analisar os resultados.

O nosso trabalho, portanto, foi desenvolvido a partir de uma pesquisa bibliográfica e experimental. Na pesquisa bibliográfica, encontramos 30 trabalhos nas bases de dados já mencionadas, dos quais 22 atenderam aos critérios relacionados ao CDI-I realizados em Licenciaturas em Matemática e 12 trabalhos que utilizaram a Taxonomia SOLO.

Quanto ao experimento e ao questionário aplicado aos professores, a escolha se deu em função da proximidade deste pesquisador com o objeto da pesquisa. Já para a coleta de dados bibliográficos, nos mecanismos de pesquisas de cada banco de dados, no site da Capes e BDTD, foram utilizados os descritores: “Cálculo Diferencial e Integral” AND “Licenciatura em Matemática”, e “Taxonomia SOLO”, gerando assim, separadamente, dois acessos aos bancos de dados, os quais culminaram nos resultados acima descritos.

Em suma, para o desenvolvimento do presente trabalho, utilizamos as técnicas de pesquisas bibliográficas e de campo. Como método de procedimento, o estudo de caso conforme foi definido em Marconi e Lakatos (2003). A pesquisa bibliográfica baseia-se em publicações científicas (teses e dissertações), principalmente da área de Educação Matemática. Já o experimento ocorreu através do estudo de caso, que foi desenvolvido, em sua totalidade, por meio de pesquisa de campo, envolvendo os discentes do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA Campus Belém e docentes da referida disciplina de instituições diversas.

Após a especificação da metodologia escolhida, e tendo já definido os objetivos da pesquisa, cabe agora descrever os procedimentos que serão utilizados para realização das etapas do trabalho. Gerhardt e Silveira (2009) afirmam que

> é importante salientar a diferença entre metodologia e métodos: A metodologia se interessa pela validade do caminho escolhido para se chegar

> ao fim proposto pela pesquisa; portanto, não deve ser confundida com o conteúdo (teoria) nem com os procedimentos (métodos e técnicas). Dessa forma, a metodologia vai além da descrição dos procedimentos (métodos e técnicas a serem utilizados na pesquisa), indicando a escolha teórica realizada pelo pesquisador para abordar o objeto de estudo (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 13).

Os procedimentos para o desenvolvimento da pesquisa e alcance dos resultados foram os seguintes:

Levantamento de teses e dissertações sobre o Cálculo Diferencial e Integral realizados nas Licenciaturas em Matemática e sobre a Taxonomia SOLO no Brasil;

Construção de um índice relacionado à aprovação dos estudantes na disciplina (indicador quantitativo).

Construção de um índice relacionado ao desempenho dos discentes em um instrumento avaliativo elaborado a partir da interconexão de conceitos matemáticos e a Taxonomia SOLO (indicador qualitativo).

Construção de um índice que analise a contribuição do CDI-I para a formação de professores de matemática da educação básica, composto pelos dois índices anteriores (indicador de contribuição quantitativo/qualitativo).

Análise dos resultados que serão anunciados pelo modelo analítico MQ^2.

Aplicação de questionários semiestruturados para professores de CDI-I da Licenciatura em Matemática e da Educação Básica.

Analise das respostas dos professores utilizando o Discurso do Sujeito Coletivo como ferramenta conforme exposto em Lefrève e Lefrève, (2012).

Vinculo do conteúdo, entre o CDI-I e a Matemática Básica, por meio das situações-problema do experimento e outras.

Exposição os resultados das seguintes perspectivas: do conhecimento do conteúdo do aluno; do conteúdo da disciplina; e da fala dos professores.

Considerações relacionadas aos nossos objetivos e questão-problema, baseadas nas teorias mencionadas anteriormente e nos resultados alcançados.

Vale ressaltar que, na exposição feita, há indicativos para o surgimento de números relacionados aos resultados, no entanto, a discussão e análise ocorrerá necessariamente levando em consideração uma abordagem qualitativa.

Com o intuito de analisar as contribuições do CDI-I no processo de formação docente, no curso de Licenciatura em Matemática do IFPA Campus Belém, realizamos uma pesquisa documental de estudos que tratam desses temas conjuntamente, para termos uma base do que já foi produzido e dos resultados obtidos. Como também utilizamos uma teoria baseada em princípios cognitivistas conhecida por Taxonomia SOLO, achamos necessário fazer um mapeamento de teses e dissertações que abordassem ou utilizassem essa teoria, que serão apresentadas no Capítulo 3.

A análise dos resultados da busca foi realizada observando o título e o resumo dos trabalhos. Caso não estivesse exposto ou não abordassem sobre o CDI-I na LM e a Taxonomia SOLO, nesses tópicos, o texto seria lido na íntegra.

No próximo tópico, apresentamos um breve histórico do curso de Licenciatura em Matemática e ao mesmo tempo aproveitamos para discorrer sobre a disciplina de CDI-I e o movimento que a relaciona com a Matemática da Educação Básica.

1.3 A Licenciatura em Matemática do IFPA e o Cálculo Diferencial e Integral I

O Projeto Político Pedagógico – PPC – do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA Belém do ano de 2017 descreve que a carência de docentes para lecionar Matemática no ensino médio impôs ao Ministério da Educação, através da Lei 11.892, de 29 de dezembro de 2008, a necessidade de buscar alternativas objetivando minimizar os prejuízos causados pela ausência destes profissionais na formação dos alunos das redes municipais e estaduais de ensino.

Em função dessas necessidades, os Institutos Federais passaram a ofertar cursos de Licenciatura nas áreas de maior demanda de professores nas escolas do ensino médio, propondo ações que têm o intuito de atender às diferentes necessidades regionais ainda na época dos CEFETs (Centro Federal de Educação Tecnológica).

Frente a essas necessidades, segundo o PPC da Licenciatura em Matemática (2017), uma comissão interdisciplinar formada por professores das áreas de Matemática, Física, Química, Biologia e Geografia e professores das áreas pedagógicas e afins foi responsável pela implantação, inicialmente, de uma Licenciatura em Ciências e Matemática, com o objetivo de atender ao ensino médio que se organizou em áreas de conhecimento.

A Prof. Dra. Elinilze Guedes Teodoro, Gerente dos Cursos de Licenciatura do CEFET/PA na época, em entrevista concedida a Gaia e Fernandes (2011), relatando sobre a implantação do curso de Licenciatura em Matemática, afirmou que

> O primeiro projeto era um único curso de Licenciatura em Ciências e Matemática, norteador do currículo do Ensino Médio, pois o Ensino Médio passou a se organizar por área e a área que envolvia era a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Mas os professores de matemática envolvidos no processo encontraram várias resoluções que dificultavam a formação do professor de matemática de forma generalizada. Pensamos então em deixar o curso de matemática só e unir as outras três áreas, mas no final ficaram todos separados [...] (GAIA; FERNANDES, 2011, p. 20).

E apesar das duras críticas recebidas, sendo as principais relativas à duração de uma licenciatura que inicialmente era de três anos, o curso foi implantado e o primeiro vestibular ocorreu no ano de 2000 com entrada em 2001, com 40 vagas ofertadas e todas preenchidas. Nos anos de 2002 e 2005, não houve vestibular e nos anos de 2003, 2004 e 2006 em diante, houve regularmente vestibular com 40 vagas ofertadas e todas preenchidas.

Sobre a coordenação do curso, em 2001, assumiu como primeiro coordenador do curso o Professor José Carlos Moraes Guedes, com escolha feita por vários motivos: por ser o único com título de mestre, fator importante no momento de reconhecimento do curso; por ter participado ativamente da implantação do curso e por sua competência profissional (relato da professora Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha).

Durante o período de 2001 a 2017, vários foram os PPCs desenvolvidos pelos grupos de professores atuantes em cada época e, em pesquisa realizada junto a estes professores, desde a sua implantação até os dias atuais, observamos que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I sempre apresentou a mesma ementa.

No PPC de 2007, observamos que se faz relação entre o tema CDI-I com outras áreas, ao se dizer que

> O Cálculo Diferencial e Integral I tem participação direta no desenvolvimento nas diversas áreas do conhecimento, como naturais, nas tecnológicas e na social. Sendo assim, o curso tende a aplicar as teorias e conhecimentos das disciplinas, reconhecendo tais aspectos teóricos relevantes na integração com as referidas áreas, a fim de levar o aluno a compreender o mundo natural e outros contextos pertinentes a sua vida (PPC: MTM, 2007, p. 33).

Ainda no PPC de 2007, observamos, na metodologia apresentada para o desenvolvimento das aulas, que

> Os temas e os subtemas propostos, serão ministrados sempre procurando a articular o conhecimento teórico numa perspectiva interdisciplinar iniciando o

> assunto a partir de situações problemas reais através de aula com exposição dialogada, utilizando textos adequados de interesse científico e tecnológicos, deixando que os alunos leiam e interpretem tais textos, selecionando, utilizando ideias e procedimentos (leis, teorias, modelos) visto em sala de aula para a solução de problemas reais, utilizando matérias didáticos como livros, computador, vídeo, televisão, jornais, artigos matemáticos e não matemáticos, etc. sempre reforçando a aprendizagem da teoria através dos mais diversos exercícios, de forma qualitativa, identificando e acompanhando as variáveis relevantes à vida (PPC: MTM, 2007, p. 33).

Os PPCs de 2011 e 2017 já não mostram mais uma relação do CDI-I com outras áreas, como também não se expõe uma metodologia para o desenvolvimento das aulas, como está posto no PPC de 2007. Esses fatos nos mostram que em nenhum dos PPCs se observa uma preocupação em trabalhar o CDI-I com algum direcionamento para a formação de professores da Educação Básica. Além disso, observamos que, de todos os PPCs, somente no de 2007 aparecem os subtemas dessa disciplina, conforme apresentado a seguir:

- Limite e Continuidade: conceito, reta tangente e reta normal, derivadas laterais, regras de derivação, regra da cadeia, derivada da função inversa, derivação implícita;
- Comportamento de funções: máximos e mínimos, teorema do valor médio, regras de L' Hospital, concavidade, inflexão e gráficos, taxa de variação e aplicações;
- Integral Indefinida: conceito e propriedade da integral indefinida, técnicas de integração: por substituição, por partes, integração de funções racionais, integração por substituição especial;
- Integral Definida: conceito e propriedade de integral definida, Cálculo de áreas e de volumes, integral imprópria;

O aparecimento desses subtemas para nós é de grande importância, pois nos orienta a verificar, dentro da Matemática da Educação Básica, quais conteúdos são pré-requisitos para o CDI-I e vice-versa.

1.3.1 Movimento entre a MB e o CDI-I na Licenciatura em Matemática

Entendemos que entre a Matemática Básica e o CDI-I – para a formação de professores de matemática –, há um movimento na aprendizagem que é estabelecido por um ciclo, no qual dizemos que a assimilação de conteúdos da Matemática Básica impacta significativamente na aprendizagem do CDI-I e, consequentemente estes conteúdos ampliam a visão matemática do futuro docente, posto que supomos haver contribuições relevantes para a sua atuação profissional. Diante disso, construímos os quadros a seguir, com a finalidade de tentar visualizar o que está acima descrito.

Dessa forma listamos os conteúdos que podem ser fundamentais para que um discente se desenvolva satisfatoriamente na disciplina de CDI-I, no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1: Conteúdos da Matemática Básica, conhecimentos prévios para o CDI – I

1. Conjuntos: Conjuntos Numéricos; Intervalos Reais.	Limites
2. Expressões Numéricas: Operações Básicas; Frações e Operações Elementares; Radiciação; Racionalização Operações com Parênteses, Colchetes e Chaves.	Limite, Derivada e Integral
3. Equações do 1º Grau: Resolução de Equações de 1º Grau; Sistemas de Equações do 1º Grau;	Limite, Derivada e Integral
4. Regra de Três Simples e Composta: Regra de Três Simples; Regra de Três Composta.	-
5. Cálculo Algébrico: Expressões Algébricas; Adição e Subtração de Expressões Algébricas; Potenciação; Multiplicação de Expressões Algébricas; Divisão de Expressões Algébricas; Produtos Notáveis; Fatoração; Simplificação de Frações Algébricas.	Limite
6. Trigonometria: O Teorema de Pitágoras; Razões Trigonométricas e a Circunferência Trigonométrica.	Limite, Derivada e Integral
7. Geometria Analítica: Coeficiente Angular da Reta; Equação da Reta; Posições Relativas de Duas Retas...	Derivada
8. Funções: Representação Algébrica de Funções; Representação Gráfica de Funções; Estudos de Domínio e Imagem das Funções; Classificação de Funções; Funções Afins ou Funções Polinomiais de 1º Grau; Funções Quadráticas ou Funções Polinomiais de 2º Grau; Funções Compostas; Funções Modulares; Funções Exponenciais; Logaritmos e Funções Logarítmicas e Funções Trigonométricas;	Limite, Derivada e Integral
9. Geometria: Ponto; Reta; Plano; Espaço;	Derivada e integral

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos dizer que esses conteúdos apresentados no Quadro 1 são conhecimentos prévios do CDI-I que estão vinculados aos conteúdos, embutidos nas estruturas numéricas, algébricas e geométricas que são caracterizados pelo desenvolvimento do raciocínio abstrato através da análise numérica, algébrica e geométrica, formando a base conceitual para o CDI-I.

Na Licenciatura em Matemática, são várias as disciplinas, as quais tratam dos mais variados temas matemáticos. Como estamos nos restringindo ao CDI-I, listaremos a seguir os temas e subtemas dessa disciplina que entendemos que, quando trabalhados na Licenciatura em Matemática, ampliam o conhecimento dos licenciandos em relação aos conteúdos da Matemática Básica. Assim, tentaremos vincular os conteúdos do CDI-I com conteúdos da Matemática Básica tomando como exemplo uma situação sobre limites.

Vamos nos colocar em uma situação em que, após o aluno da Licenciatura em Matemática já ter hipoteticamente entendido o conceito de limite e após o docente já ter mostrado várias situações em que as funções são contínuas – sem restrições –, a qual ocorre a substituição do valor de x na função, reforçando conhecimentos sobre expressão algébrica por exemplo, surge a situação a seguir:

Calcule o limite da função $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ quando x tende a 1.

A expressão acima define *f* para todos os números reais de x, exceto para x igual a 1 que acarreta o resultado $\frac{0}{0}$, – indeterminação –, em que, para calcular o limite pedido, o docente lança mão de conhecimentos sobre polinômios, fatoração e expressões algébricas. Acreditamos que, com isso, revisa-se e amplia-se o conhecimento do licenciando para a sua futura atuação como professor. Assim, desenvolvemos a lista a seguir, com o intuito de relacionar conteúdos do CDI-I com a Matemática Básica no sentido acima descrito. Outras situações-problema serão apresentadas no Capítulo 4, em que algumas interconexões[2] entre a Matemática Básica e o CDI-I serão apresentadas.

Listamos os conteúdos que podem ser revisitados durante os estudos de Limites, Derivadas e Integral na disciplina de CDI-I no curso de Licenciatura em Matemática, vinculados à ementa exposta no PPC do curso, com seus respectivos temas e subtemas anteriormente mencionados.

Quadro 2: Relação entre o conteúdo do CDI-I e o conteúdo da Matemática Básica

Limites	Derivada:	Integral
Funções: Representação Algébrica de Funções; Representação Gráfica de Funções; Estudos de Domínio e Imagem das Funções; Classificação de Funções; Funções Afins ou Funções Polinomiais de 1º Grau;	***Funções:*** ***Geometria Analítica*:** Estudo da Reta; Taxa de variação; Reta tangente; Coeficiente angular da reta. ***Trigonometria;*** Razões; Identidades. ***Expressões Numéricas*:** Operações Básicas; Frações e Operações Elementares; Radiciação; Racionalização;	***Funções:*** ***Expressões Numéricas*:** Operações Básicas; Frações e Operações Elementares; Radiciação; Racionalização; Operações com Parênteses, Colchetes e Chaves. ***Expressões algébricas:*** Adição e Subtração; Potenciação; Multiplicação e Divisão;

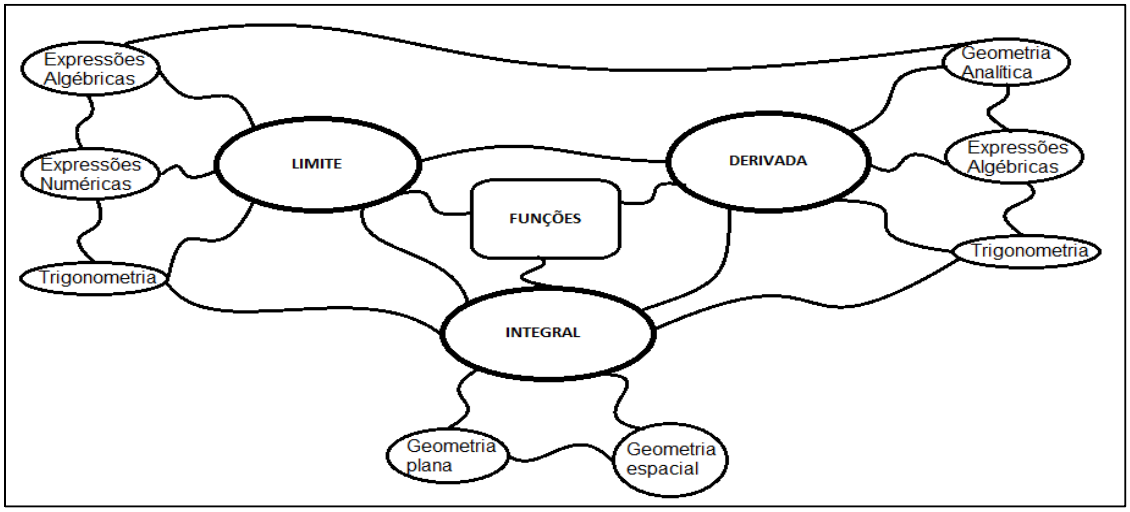
[2] Conexão entre dois ou mais elementos, processos, equipamentos, ideias, conceitos, palavras, seres, sistemas etc.

Funções Quadráticas ou Funções Polinomiais de 2º Grau; Funções Compostas; Funções Modulares; Funções Exponenciais; Funções Logarítmicas; Funções Trigonométricas; ***Expressões Numéricas***: Operações Básicas; Frações e Operações Elementares; Radiciação; Racionalização Operações com Parênteses, Colchetes e Chaves. ***Expressões Algébricas*****:** Adição e Subtração de Expressões Algébricas; Potenciação; Multiplicação de Expressões Algébricas; Divisão de Expressões Algébricas; Produtos Notáveis; Fatoração; Simplificação de Frações Algébricas	Operações com Parênteses, Colchetes e Chaves. ***Expressões algébricas*****:** Adição e Subtração; Potenciação; Multiplicação e Divisão; Produtos Notáveis; Fatoração; Simplificação de Frações Algébricas.	Produtos Notáveis; Fatoração; Simplificação de Frações Algébricas. ***Geometria plana:*** Área. ***Geometria espacial:*** Volume.

Fonte: Elaborado pelo autor

Observamos no Quadro 1 – levando em conta que algo tenha deixado de ser mencionado por falta de percepção – que, se esses conteúdos forem bem desenvolvidos na Educação Básica e bem assimilados pelos alunos, isso *pode* implicar de forma satisfatória no aprendizado do CDI-I. Da mesma forma, no Quadro 2, se os conteúdos do CDI-I forem bem desenvolvidos na Licenciatura em Matemática, olhando para a matemática da Educação Básica, os futuros professores poderão ter uma visão ampliada da disciplina e por conseguinte, teoricamente, poderão desenvolver melhor o ensino desses conteúdos.

Figura 1: Teia de interconexões do conteúdo da MB e o CDI-I

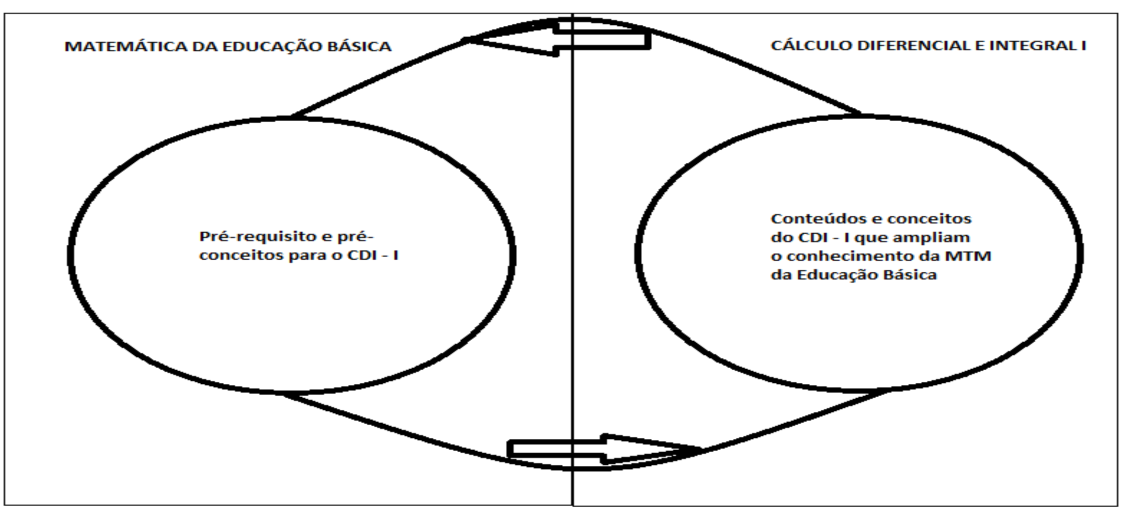


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 1 nos mostra que, durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral I, o professor dessa disciplina pode utilizar do assunto para fazer conexões desses conteúdos – Limite, Derivada e Integral – com a matemática Básica, e tais conexões devem ocorrer a quase todos os momentos, para que o discente em formação possa supostamente ampliar a sua visão para o ensino, uma vez que esses conteúdos farão parte da sua ferramenta de trabalho.

Resumidamente, tentaremos expor o que foi anteriormente descrito através da Figura 2 a seguir:

Figura 2: Relações entre a Matemática da EB e o CDI-I



Fonte: Elaborado pelo autor.

A relação a qual nos referimos na Figura 2 se faz por meio de um movimento cíclico decorrente do processo de ascensão do conhecimento da Matemática Básica para o CDI-I e, em seguida o CDI-I se põe como objeto que supostamente amplia os conhecimentos da Matemática Básica.

Enxergamos esses conteúdos – anteriormente descritos – como sendo uma interconexão entre a Matemática Básica e o CDI-I, e foi nesta interconexão entre essas disciplinas da matemática que procuramos o entendimento sobre a nossa inquietação. Foi quando resolvemos buscar conhecimento para tentar entender ou talvez encontrar novas metodologias de ensino para dar conta dessas inquietações.

2 BASE PARA O DESENVOLVIMENTO DA TESE: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem o propósito de nos fundamentar quanto às ferramentas que utilizamos para a construção, o desenvolvimento e as considerações que se realizarão referentes aos nossos objetivos e questão de pesquisa, as quais serão a Taxonomia SOLO, o Modelo Analítico e o Discurso do Sujeito Coletivo.

2.1 O que é a taxonomia SOLO?

A SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcome* ou *Estrutura do Resultado da Aprendizagem Observada*) é uma taxonomia cognitiva composta por cinco níveis que crescem em complexidade. Essa taxonomia nos dará suporte para a construção de testes avaliativos cujos resultados serão categorizados e transformados em um índice que chamaremos de contribuição qualitativa do desempenho de estudantes ρy diante do instrumento avaliativo.

> Pesquisas educacionais muito recentes sobre a aprendizagem da matemática, têm-se baseado em teorias cognitivas muitas das quais influenciadas pelas teorias de Piaget. Estas teorias têm fornecido um grande contributo para o desenvolvimento de métodos de pesquisa, para além de contribuir para melhor compreender a evolução do conhecimento humano em períodos mais avançados do desenvolvimento da capacidade de adquirir conhecimento (SRIRAMAN; ENGLISH, 2010 apud FILIPE, 2011, p. 21).

Nessa perspectiva, os autores Biggs e Collis (1982) desenvolveram essa teoria, tomando como referência os estágios piagetianos, a partir dos quais os autores identificam categorias de entendimento de conteúdos específicos. Os autores nomeiam esses estágios como modos de pensamento, os quais surgem em idades semelhantes aos da teoria de Jean Piaget, porém, são específicos para cada domínio de conhecimento, e não gerais como pensava Piaget.

O sistema desenvolvido por Biggs e Collis pode ser utilizado para avaliar a qualidade de aprendizagem ou para objetivos curriculares, uma vez que apresenta a possibilidade de identificar níveis hierárquicos de complexidade do entendimento sobre conteúdos de diferentes domínios a partir de instrumentos desenvolvidos para esse objetivo. Segundo a teoria, um modo ou estágio não emerge em substituição de outro, mas surge de forma a coexistir com todos já existentes.

Nessa teoria, relacionam-se fatores como maturidade, disponibilidade na memória de trabalho, suporte social, confronto com um problema, o que nos leva a inferir que a Taxonomia SOLO é uma teoria que integra aspectos piagetianos e que, no entanto, agrega certas particularidades que são utilizadas pelos autores dessa teoria para gerar uma categorização (BIGGS; COLLIS, 1982). Os modos com os quais os autores denominam os estágios como forma de representação ao responder à determinada questão podem ser categorizados da seguinte forma:

Nível 1: Pré-Estrutural (PE) - Se a resposta apresenta elementos irrelevantes ou incoerentes com a questão, o entendimento exibido está no nível Pré-Estrutural. Pode-se dizer ainda que o indivíduo estabelece uma forma de pensar em que as respostas são inadequadas, ou seja, o discente não responde ao que lhe é solicitado, distraindo-se ou confundindo-se com aspectos irrelevantes pertencentes a um estágio ou modo de pensamento anterior, não previsto por essa teoria.

Nível 2: Uni-Estrutural (UE) - Se a resposta demonstra um elemento, informação ou ideia que responde diretamente à questão, o nível é o uni-estrutural para o entendimento, ou seja, o discente pensa de forma correta, mas como não utiliza todos os dados, obtém pouca informação e detém-se em um único aspecto relevante para a realização da tarefa. As respostas podem, por isso, ficar sem fundamento ou inconsistentes.

Nível 3: Multi-Estrutural (ME) - Se vários elementos, informações ou ideias são incorporados na resposta, mas não há relação ou integração entre eles, o nível do entendimento é o Multi-Estrutural, ou seja, o discente foca-se em características mais importantes e corretas, mas elas não se integram totalmente, o que leva ao aparecimento de incoerências nas suas respostas.

Nível 4: Relacional (R) - Quando, além de incorporar vários elementos, fatos ou ideias, a resposta os relaciona e integra de forma coerente, o entendimento exibido está no nível Relacional, ou seja, as informações são facilmente entendidas, os dados são avaliados e as relações são estabelecidas de uma forma correta. Há um entendimento do todo e este torna-se uma estrutura coerente.

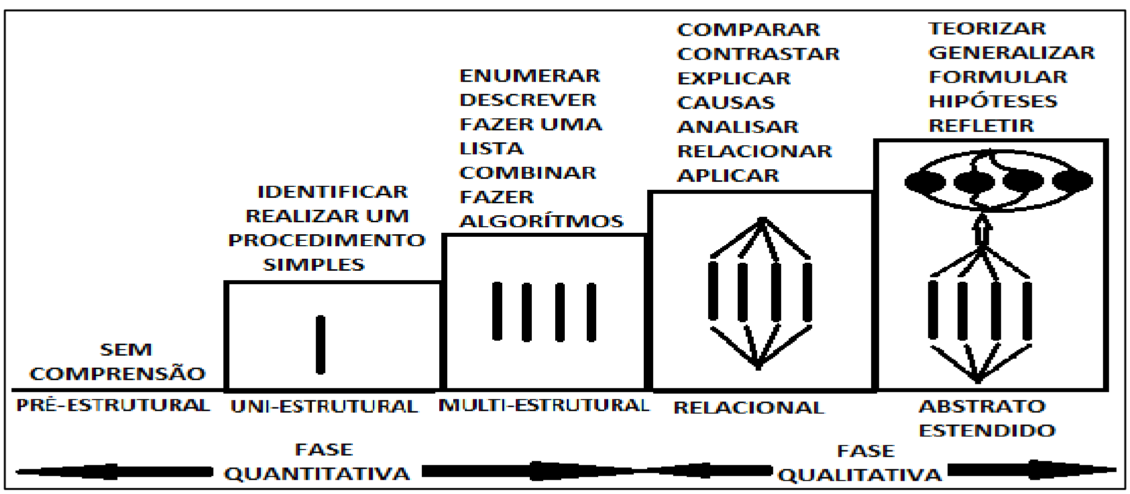
Nível 5: Abstrato estendido (AE) - Se a resposta vai além das informações da questão e exibe um nível mais alto de abstração e generalização das ideias e dos elementos em relação a outros casos, ela exibe um entendimento no nível abstrato estendido. Nesse nível, o discente generaliza a estrutura coerente para um plano com características mais abstratas, representando um novo e elevado modo de pensar.

A categorização acima descrita dos autores Biggs e Collis é uma fusão dos escritos que podem ser encontrados nos trabalhos de Ribeiro (2005) e Filipe (2011).

Segundo Biggs e Collis, são várias as possibilidades de utilização da Taxonomia SOLO, como por exemplo, a avaliação de tarefas, a parametrização através de uma hierarquia de níveis de complexidade e o desenvolvimento cognitivo. Essa teoria pode ser utilizada não apenas como opção metodológica, como também para "*construção de itens*" além de poder ser usada para "*ranquear respostas a itens*" do ponto de vista cognitivo (HATTIE; BROWN, 2004 apud AMANTES, 2008).

Diante de questões ou itens, algumas ações podem representar ou dar sentido aos níveis acima mencionados (PE, UE, ME, R e AE). Assim, para dar sentido às ações, nada mais propício do que a utilização de verbos, os quais podem ser vistos na Figura 3 a seguir.

Figura 3: Verbos que podem ser utilizados para formular objetivos curriculares em cada nível de complexidade da Taxonomia SOLO



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de BIGGS (2006, p. 71).

Vemos na Figura 3 verbos que podem ser utilizados para formular objetivos curriculares em cada nível de complexidade da Taxonomia SOLO, e que utilizaremos aqui para a elaboração de instrumentos avaliativos e para o ranqueamento de respostas aos itens do instrumento avaliativo. Os verbos têm como finalidade mostrar os resultados da aprendizagem e informar o que os alunos são capazes de fazer e em que nível de desenvolvimento cognitivo estão posicionados.

Nessa mesma Figura, observamos que não há verbos relacionados ao nível PE, pois, quando apresentado a uma questão, subtende-se que o indivíduo apresenta elementos irrelevantes ou incoerentes.

No nível UE, os verbos são identificar e realizar um procedimento simples, em que o respondente de uma questão demonstra um elemento, informação ou ideia que responde diretamente à questão. O discente pensa de forma correta, porém, detém-se em um único aspecto relevante para a realização da tarefa.

No nível ME, tem-se os verbos de ação enumerar, descrever, fazer uma lista, combinar, fazer algoritmos vinculados a esse nível. Aqui, várias informações são incorporadas à resposta, no entanto, não se faz relação ou integração entre elas.

No nível R, as ações são comparar, contrastar, explicar causas, analisar, relacionar e aplicar. Além de incorporar vários elementos, fatos ou ideias, a resposta os relaciona e os integra de forma coerente.

No último nível (AE), teorizar, generalizar, formalizar hipóteses e refletir são os verbos que indicam as ações necessárias para determinar o conhecimento nesse patamar. O discente exibe resposta que vai além das informações expostas na questão, chegando ao nível mais alto de abstração e generalização.

A Taxonomia SOLO toma como referência os resultados de diferentes áreas de conteúdo acadêmico, conforme exibem Biggs e Collis, (1982). Esses autores afirmam que, à medida que os alunos aprendem, os resultados de seu aprendizado mostram fases semelhantes de complexidade estrutural crescente. Segundo os autores, na crescente de complexidade estrutural, há duas grandes mudanças principais, as quais são denominadas por eles como “quantitativas”, tais como a quantidade de detalhes principais na resposta dos alunos, e as “qualitativas”, à medida que os detalhes são integrados a um modelo estrutural. As fases quantitativas da aprendizagem ocorrem primeiro; depois, o aprendizado muda qualitativamente. Notamos ainda na Figura 3 que essas fases podem ser visualizadas. Assim, a fase quantitativa está vinculada aos três primeiros níveis da categorização, enquanto a fase qualitativa está relacionada aos dois últimos.

Além disso, vale ressaltar que os níveis de complexidade determinados pela Taxonomia SOLO diferem dos níveis de dificuldades (fácil, médio e difícil) exibidos, por exemplo, pela Teoria Clássica do Teste (TCT) ou pela Teoria da Resposta ao Item

(TRI), ambas amplamente conhecidas no meio educacional por meio da Prova Brasil e do Exame Nacional do Ensino Médio.

Um exemplo bastante interessante comparando os níveis de complexidade SOLO com os níveis de dificuldade de respostas dadas a uma questão pode ser encontrado no trabalho de Mol (2019), um dos trabalhos relacionados no Capítulo 3 desta tese. Neste trabalho, pode-se ver ainda a análise feita sobre 112 questões de matemática da Prova Brasil do 5º e 9º anos, as quais foram categorizadas entre os níveis Uni-Estrutural e Abstrato Estendido, em que a cobrança é superficial para os níveis Uni e Multi-Estrutural, e profunda para os níveis Relacional e Abstrato Estendido.

Assim, segundo a TCT, os itens que possuem acertos acima de 65% são considerados fáceis, itens com acertos de 30% a 65% são medianos (médios) e aqueles com acertos abaixo de 30% são difíceis. Dessa forma, Mol (2019) construiu a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Distribuição dos níveis e tipos de aprendizagem SOLO por faixa de dificuldade

Dificuldade	**no. de itens**	**Uni-estrutural (no. - %)**	**Multi-estrutural (no. - %)**	**Relacional (no. - %)**	**Aprendizagem superficial (no. - %)**	**Aprendizagem profunda (no. - %)**
			5º ano			
Difícil	14	11 - 78,6%	3 - 21,4%	0 - 0%	14 - 100%	0 - 0%
Médio	29	21 - 72,4%	8 - 27,6%	0 - 0%	29 - 100%	0 - 0%
Fácil	14	12 - 85,7%	2- 14,3%	0 - 0%	14 - 100%	0 - 0%
			9º ano			
Difícil	22	5 - 22,7%	14 - 63,6%	3 - 13,6%	19 - 86,4%	3 - 13,6%
Médio	31	10 - 32,3%	20 - 64,5%	1 - 3,2%	30 - 96,8%	1 - 3,2%
Fácil	13	6 - 46,2%	7 - 53,8%	0 - 0%	13 - 100%	0 - 0%

Fonte: Mol (2019, p. 79).

Podemos observar que na distribuição dos itens para o 5º ano, 100%, cobram dos alunos brasileiros, em termos de complexidade, uma aprendizagem superficial. Já para o 9º ano, apenas 4 questões com cobrança de aprendizagem profunda. Outra observação é que nenhuma questão foi categorizada no nível Abstrato Estendido.

A seguir, desenvolvemos um modelo de análise que utiliza a Taxonomia SOLO para compor nossos resultados, o qual será utilizado como um dos instrumentos de análise da situação-problema deste trabalho, considerando questões que exigirão dos alunos respostas que podem ser categorizadas até o nível Abstrato Estendido, por entender que, desta forma, podemos abrir um leque de possibilidades para a sua categorização, ao contrário das questões oferecidas pelo instrumento avaliativo na Prova Brasil, que apresentam, como níveis máximos, o nível Uni-Estrutural ou Multi-Estrutural ou Relacional, conforme exposto na Tabela 1 acima.

2.2 O Modelo MQ²

Os primeiros vislumbres que tivemos para o desenvolvimento deste trabalho, surgiram a partir das ideias expostas em Figueiredo (2017), as quais serão metodologicamente apresentadas a partir de uma situação hipotética idealizada e em seguida colocada experimentalmente em prática em uma atividade-piloto.

Consideremos um instrumento avaliativo hipotético construído com base no modelo apresentado por Figueiredo (2017) e questões escolhidas ou elaboradas considerando os níveis de categorização SOLO, com conteúdos advindos da parte matemática que permeia os contextos tanto da Matemática Básica, quanto do CDI-I (Matemática Superior). A categorização que surgirá a partir dessa construção comporá o Modelo Analítico Qualitativo/Quantitativo - MQ², o qual será exposto a seguir, a partir de uma situação hipotética.

2.2.1 Uma situação hipotética

Um total de 10 estudantes matriculados em uma disciplina de um determinado curso foram apresentados a um instrumento avaliativo composto de 5 questões que exigem respostas subjetivas.

De posse das respostas, supomos que elas foram categorizadas em níveis, conforme a Taxonomia SOLO, os quais variam de 1 a 5, ou seja, $1 \leq i \leq 5$, com i sendo o nível de categorização SOLO.

Para a situação dada, supomos que $n = 10$ é o total de estudantes matriculados na disciplina "Z" que participaram do experimento, enquanto $Q = 5$ é o número de questões do instrumento avaliativo.

O modelo exposto em Figueiredo (2017) é representado por $E = \sum_1^m F_{A_i} = \sum_1^m \rho y_i \, \rho x_i, com\ i = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, em que ρy representa um indicador qualitativo e ρx um indicador quantitativo, e o produto desses indicadores estabelecem a composição de “E”, o nível de contribuição epistemológico-pedagógico qualitativo/quantitativo para a formação docente inicial de professores de matemática, que surge a partir de um determinado projeto subdividido em práticas.

As práticas acima mencionadas são analisadas a partir de uma matriz norteadora, em que são levados em consideração os objetivos, os aspectos metodológicos, a fundamentação, a interdisciplinaridade, as interconexões dos contextos epistemológico e pedagógico e as variáveis metodológicas (FIGUEIREDO, 2017).

A partir dessas considerações, dizemos que, para a nossa proposta, “E” é um indicador qualitativo/quantitativo que entendemos como sendo um mensurador do nível de contribuição epistemológica da disciplina (CDI-I) para a formação de licenciandos em Matemática do IFPA Belém, que combina informações de um indicador qualitativo de desempenho ρy em um instrumento avaliativo obtido pelos discentes ao final da disciplina, com informações de um indicador quantitativo sobre o rendimento ρx na disciplina dos alunos que participaram do experimento.

Observamos em Figueiredo (2017) que o indicador qualitativo foi construído a partir de uma matriz norteadora que serviu de base para as análises posteriores. Para o nosso caso, o indicador qualitativo será construído tomando como referência o que já foi descrito anteriormente sobre o PPC do curso e, por conseguinte, o plano de ensino da disciplina de CDI-I da Licenciatura em Matemática do IFPA Belém, conforme modelo exposto a seguir:

Quadro 3: Plano de Ensino da disciplina de CDI – I

<table>
<tr><td>Curso:</td><td>Licenciatura em Matemática</td><td colspan="2">Ano/Semestre: 2019.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Período: 2º Semestre</td><td colspan="2">Disciplina: CDI - I</td></tr>
<tr><td>Professor:</td><td></td><td>CHT: 9</td><td>CHS 06</td></tr>
<tr><td colspan="4">EMENTA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Limites e Continuidade, Derivada e Integral.</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Geral
Entender, analisar e aplicar os conceitos de limites, derivadas e de integral de função a uma variável na resolução de problemas em diversas situações do cotidiano, dentro e fora da sala de aula.
Objetivos específicos</td></tr>
</table>

✓ Capacitar o aluno a usar os conceitos fundamentais de limite; ✓ Capacitar o aluno a usar os conceitos fundamentais de derivada; ✓ Capacitar o aluno a usar os conceitos fundamentais de integral; ✓ Aplicar os conceitos de limite, derivada e integral na resolução de problemas; ✓ Fortalecer o aporte teórico sobre o objeto de estudo do Cálculo Diferencial e Integral I.
CONTEÚDO PROGRAMÁTICO
1. Limites e Continuidade de Funções Reais a uma variável 1.1. Introdução ao Conceito de Limite; 1.2. Definição de Limite; 1.3. Propriedades dos Limites; 1.4. Limites Laterais; 1.5. Limites Infinitos e limites no Infinito; 1.6. Limites Fundamentais; 1.7. Continuidade; 1.8. Propriedades das Funções Contínuas. **2. Derivadas de Funções Reais a uma variável** 2.1. Definição de Derivada de uma Função; 2.2. Interpretação Geométrica da Derivada; 2.3. Regras Básicas de Derivação; 2.4. Regra da Cadeia; 2.5. Derivada de Funções com Expoentes Racionais; 2.6. Derivadas das Funções Trigonométricas; 2.7. Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas; 2.8. Derivada de Ordem Superior; 2.9. Diferenciação Implícita. **3. Aplicações da Derivada** 3.1. Máximos e Mínimos de Funções Reais; 3.2. Teorema do Valor Médio; 3.3 – Formas Indeterminadas e Regra de L'Hospital; 3.3. Funções Crescentes e Funções Decrescentes e o Teste da Derivada Primeira; 3.4. Concavidade e o Teste da Derivada Segunda; 3.5. Esboço de Gráficos de Funções. 4. **Integrais definidas** 4.1 – Teorema fundamental do cálculo; 4.1 – Cálculo de áreas; 4.2 – Cálculo de Volumes. **5. A Integral Indefinida** 5.1. Anti-derivadas e Integral Indefinida; 5.2. Propriedades da Integral Indefinida; 5.3 - Técnicas de integração; 5.3.1 - Integração por Partes; 5.3.2 - Integrais Trigonométricas; 5.3.3 - Substituição Trigonométrica; 5.3.4 - Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
- Trabalho individual; - Trabalho em grupo;

- Aula expositiva dialogada; - Aplicações no Excel; - Aulas em PowerPoint; - Pesquisas Teóricas; - Discussão sobre o CDI-I e seu uso enquanto ferramenta.
RECURSOS DIDÁTICOS
- Uso de Computador e Data Show; - Uso de Lista de aplicações; - Uso do Quadro branco e pincel; - Livros didáticos.
AVALIAÇÃO
O aluno será avaliado com base na sua participação regular e contínua nos conteúdos estudados e no domínio de conjunto, o que será feito sob a forma de trabalhos individuais e grupais, seminários e provas.
REFERÊNCIAS
1. MUNEM, Mustafa A. e FOULINS. David J. ***Cálculo vol. I***. Editora Guanabara Dois S/A, Rio de Janeiro, 1982. 2. LEITHOLD, Louis. ***O Cálculo com Geometria Analítica vol. I***. Editora Harbra. São Paulo, 1981. 3. STEWART, James. ***O Cálculo vol. I***. Editora Thonsom Learning. SP. 2001. 4. FLEMMING, Diva Marília ***Cálculo***. Editora Makron Books. São Paulo, 1992. 5. GUIDORIZZI, Luis Hamilton. **Um Curso de Cálculo**. Vol. I e II. Livros Técnicos e Científicos Editora S/A. RJ. 1979.

Fonte: PPC Matemática 2007 do IFPA.

Ainda em Figueiredo (2017), vemos que a outra parte do modelo analítico é composta pelo indicador quantitativo, que é gerado a partir das práticas desenvolvidas dentro de um projeto, sendo esse identificado por ρx e determinado pela razão entre o quantitativo “x” de alunos que participaram de determinada prática com o total “n” de componentes de um projeto.

Diante do exposto, vamos proceder com uma construção para a nossa situação, chamando “E” de indicador qualitativo/quantitativo de contribuição epistemológica da disciplina para a formação de licenciandos em matemática, determinado por:

$$E = \rho y . \rho x \qquad \text{(I)},$$

com ρy (indicador qualitativo) indicando o desempenho do licenciando em matemática que responde ao teste (instrumento avaliativo), desenvolvido a partir da Taxonomia SOLO, pensando em questões que exijam do respondente o nível de complexidade máxima, uma vez que uma resposta pode ser dada, mostrando um desempenho que pode se localizar desde o nível 1 (mínimo) até o nível 5 (máximo). Desta forma,

$\rho y = \sum_1^m \rho y(Q_j)$ (II),

em que $\rho y(Q_j) = \frac{1}{Q}\sum_1^5 \rho y_i$, e $\rho y_i = \frac{n_i}{n}.\frac{i}{5}$, com $\rho y(Q_j)$ indicando contribuições do desempenho médio dos licenciandos em matemática que responderam ao instrumento avaliativo contendo Q questões, em cada questão Q_j;

Q_j, representando a questão "j";

Q, número de questões do teste;

ρy_i, contribuição do desempenho dos n_i alunos em um nível "i";

n_i, número de estudantes posicionados em um determinado nível i;

n, número de estudantes que participaram do experimento;

i, representa os níveis da Taxonomia SOLO.

Com $1 \leq i \leq 5;\ 0 \leq n_i \leq n;\ 1 \leq j \leq m;$

Obs: A categorização SOLO do nível de desempenho dos alunos em cada questão Q_jé dado por:

$\rho y(Q_j)^* = \frac{1}{5}\sum_1^5 \rho y_i$ (III)

Obs: Se $Q = i$, então $\rho y\left(Q_j\right) = \rho y(Q_j)^*$. Caso $Q \neq i$, isso implica que $\rho y\left(Q_j\right) \neq \rho y(Q_j)^*$.

O indicador quantitativo ρx representa o rendimento dos estudantes que participaram do experimento, aprovados na disciplina "Z", dado por:

$\rho x = \frac{x}{n}$ (IV)

Sendo x o número de estudantes que participaram do experimento, aprovados na disciplina "Z", n representa o total de alunos que participaram do experimento.

De acordo com a equação (I), E é o indicador qualitativo/quantitativo de contribuição de uma disciplina "Z" para formação de licenciandos em matemática e está no intervalo dado por:

$$0\% \leq E \leq 100\%$$

Para melhor entendimento do que queremos expor, voltamos à situação hipotética anteriormente descrita, na qual temos um total de 10 estudantes matriculados em uma disciplina "Z", que foram apresentados a um instrumento avaliativo composto de 5 questões intencionando analisar "E", isto é, o indicador qualitativo/quantitativo de contribuição da disciplina "Z" para a formação de licenciandos em matemática.

Desta forma, supondo que o instrumento avaliativo tenha sido respondido – para o cálculo de ρy –, procedemos da seguinte forma:

Vale lembrar que $n = 10$ estudantes e que $Q = 5$ questões.

Questão 1 - Q_1:

Para o nível 1, $n_1 = 2$, significa que temos 2 estudantes no nível 1,

$$\rho y_1 = \left(\frac{n_1}{n}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{2}{10}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{2}{50}\right)$$

$$\rho y_1 = 4\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 1 contribuem com 4% para a questão 1 (um).

Para o nível 2, $n_2 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 2,

$$\rho y_2 = \left(\frac{n_2}{n}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{3}{10}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{6}{50}\right)$$

$$\rho y_2 = 12\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 2 contribuem com 12% para a questão 1 (um).

Para o nível 3, $n_3 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 3,

$$\rho y_3 = \left(\frac{n_3}{n}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{3}{10}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{9}{50}\right)$$

$$\rho y_3 = 18\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 3 contribuem com 18% para a questão 1 (um).

Para o nível 4, $n_4 = 1$ significa que temos 1 estudante no nível 4,

$$\rho y_4 = \left(\frac{n_4}{n}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{1}{10}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{4}{50}\right)$$

$$\rho y_4 = 8\%$$

Temos que 1 (um) estudante no nível 4 contribui com 8% para a questão 1 (um).

Para o nível 5, $n_5 = 1$ significa que temos 1 estudante no nível 5,

$$\rho y_5 = \left(\frac{n_5}{n}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{1}{10}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{5}{50}\right)$$

$$\rho y_5 = 10\%$$

Temos que 1 (um) estudante no nível 5 contribui com 10% para a questão 1 (um).

Como $\rho y(Q_1) = \frac{1}{Q}\sum_1^n \rho y_i$, temos que:

$$\rho y(Q_1) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{50} + \frac{6}{50} + \frac{9}{50} + \frac{4}{50} + \frac{5}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_1) = \frac{1}{5}\left(\frac{26}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_1) = \frac{26}{250}$$

$$\rho y(Q_1) = 10{,}4\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_1) = 10{,}4\%$ corresponde à contribuição média da questão 1 (um) para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 2 - Q_2:

Para o nível 1, $n_1 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 1,

$$\rho y_1 = \left(\frac{n_1}{n}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{3}{10}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{3}{50}\right)$$

$$\rho y_1 = 6\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 1 contribuem com 6% para a questão 2 (dois).

Para o nível 2, $n_2 = 2$ significa que temos 2 estudantes no nível 2,

$$\rho y_2 = \left(\frac{n_2}{n}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{2}{10}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{4}{50}\right)$$

$$\rho y_2 = 8\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 2 contribuem com 8% para a questão 2 (dois).

Para o nível 3, $n_3 = 2$ significa que temos 2 estudantes no nível 3,

$$\rho y_3 = \left(\frac{n_3}{n}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{2}{10}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{6}{50}\right)$$

$$\rho y_3 = 12\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 3 contribuem com 12% para a questão 2 (dois).

Para o nível 4, $n_4 = 1$ significa que temos 1 estudante no nível 4,

$$\rho y_4 = \left(\frac{n_4}{n}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{1}{10}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{4}{50}\right)$$

$$\rho y_4 = 8\%$$

Temos que 1 (um) estudante no nível 4 contribui com 8% para a questão 2 (dois).

Para o nível 5, $n_5 = 2$ significa que temos 2 estudantes no nível 5,

$$\rho y_5 = \left(\frac{n_5}{n}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{2}{10}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{10}{50}\right)$$

$$\rho y_5 = 20\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 5 contribuem com 20% para a questão 2 (dois).

Portanto, $\rho y(Q_2) = \frac{1}{Q}\sum_1^n \rho y_i$

$$\rho y(Q_2) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{50} + \frac{4}{50} + \frac{6}{50} + \frac{4}{50} + \frac{10}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_1) = \frac{1}{5}\left(\frac{27}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_2) = \frac{27}{250}$$

$$\rho y(Q_2) = 10{,}8\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_2) = 10{,}8\%$ corresponde à contribuição média da questão 2 (dois) para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 3 - Q_3:

Para o nível 1, $n_1 = 0$ significa que temos 0 estudante no nível 1.

$$\rho y_1 = \left(\frac{n_1}{n}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{0}{10}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{0}{50}\right)$$

$$\rho y_1 = 0\%$$

Temos que 0 (zero) estudante no nível 1 contribui com 0% para a questão 3.

Para o nível 2, $n_2 = 1$ significa que temos 1 estudante no nível 1,

$$\rho y_2 = \left(\frac{n_2}{n}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{1}{10}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{2}{50}\right)$$

$$\rho y_2 = 4\%$$

Temos que 1 (um) estudante no nível 2 contribui com 4% para a questão 3 (três).

Para o nível 3, $n_3 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 3,

$$\rho y_3 = \left(\frac{n_3}{n}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{3}{10}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{9}{50}\right)$$

$$\rho y_3 = 18\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 3 contribuem com 18% para a questão 3 (três).

Para o nível 4, $n_4 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 4,

$$\rho y_4 = \left(\frac{n_4}{n}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{3}{10}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{12}{50}\right)$$

$$\rho y_4 = 24\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 4 contribuem com 24% para a questão 3 (três).

Para o nível 5, $n_5 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 5,

$$\rho y_5 = \left(\frac{n_5}{n}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{3}{10}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{15}{50}\right)$$

$$\rho y_5 = 30\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 5 contribuem com 30% para a questão 3 (três).

Portanto, $\rho y(Q_3) = \frac{1}{Q}\sum_1^n \rho y_i \rightarrow$

$$\rho y(Q_3) = \frac{1}{5}\left(\frac{0}{50} + \frac{2}{50} + \frac{9}{50} + \frac{12}{50} + \frac{15}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_3) = \frac{1}{5}\left(\frac{38}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_3) = \frac{34}{250}$$

$$\rho y(Q_3) = 15{,}20\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_3) = 15{,}20\%$ corresponde à contribuição média da questão 3 (três) para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 4 - Q_4:

Para o nível 1, $n_1 = 0$ significa que temos 0 estudante no nível 1,

$$\rho y_1 = \left(\frac{n_1}{n}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{0}{10}.\frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{0}{50}\right)$$

$$\rho y_1 = 0\%$$

Temos que 0 (zero) estudante no nível 1 contribui com 0% para a questão 4 (quatro).

Para o nível 2, $n_2 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 2,

$$\rho y_2 = \left(\frac{n_2}{n}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{3}{10}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{6}{50}\right)$$

$$\rho y_2 = 12\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 2 contribuem com 12% para a questão 4 (quatro).

Para o nível 3, $n_3 = 3$ significa que temos 3 estudantes no nível 3,

$$\rho y_3 = \left(\frac{n_3}{n}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{3}{10}.\frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{9}{50}\right)$$

$$\rho y_3 = 18\%$$

Temos que 3 (três) estudantes no nível 2 contribuem com 18% para a questão 4 (quatro).

Para o nível 4, $n_4 = 2$ significa que temos 2 estudantes no nível 4,

$$\rho y_4 = \left(\frac{n_4}{n}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{2}{10}.\frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{8}{50}\right)$$

$$\rho y_4 = 16\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 2 contribuem com 16% para a questão 4 (quatro).

Para o nível 5, $n_5 = 2$ significa que temos 2 estudantes no nível 5,

$$\rho y_5 = \left(\frac{n_5}{n} . \frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{2}{10} . \frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{10}{50}\right)$$

$$\rho y_5 = 20\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 5 contribuem com 20% para a questão 4 (quatro).

Portanto, $\rho y(Q_4) = \frac{1}{Q} \sum_1^n \rho y_i$

$$\rho y(Q_4) = \frac{1}{5}\left(\frac{0}{50} + \frac{6}{50} + \frac{9}{50} + \frac{8}{50} + \frac{10}{50}\right) \rightarrow \rho y(Q_3) = \frac{1}{5}\left(\frac{33}{50}\right) \rightarrow \rho y(3) = \frac{33}{250}$$

$\rho y(3) = 13{,}2\%$

Concluímos que $\rho y(Q_4) = 13{,}2\%$ corresponde à contribuição média da questão 4 (quatro) para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 5 - Q_5:

Para o nível 1, $n_1 = 4$ significa que temos 4 estudantes no nível 1,

$$\rho y_1 = \left(\frac{n_1}{n} . \frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{4}{10} . \frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{4}{50}\right)$$

$$\rho y_1 = 8\%$$

Temos que 4 (quatro) estudantes no nível 1 contribuem com 8% para a questão 5 (cinco).

Para o nível 2, $n_2 = 4$ significa que temos 4 estudantes no nível 2,

$$\rho y_2 = \left(\frac{n_2}{n} . \frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{4}{10} . \frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{8}{50}\right)$$

$$\rho y_2 = 16\%$$

Temos que 4 (quatro) estudantes no nível 2 contribuem com 16% para a questão 5 (cinco).

Para o nível 3, $n_3 = 2$ significa que temos 2 estudantes no nível 3,

$$\rho y_3 = \left(\frac{n_3}{n} . \frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{2}{10} . \frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{6}{50}\right)$$

$$\rho y_3 = 12\%$$

Temos que 2 (dois) estudantes no nível 3 contribuem com 12% para a questão 5 (cinco).

Para o nível 4, $n_4 = 0$ significa que temos 1 estudante no nível 4,

$$\rho y_4 = \left(\frac{n_4}{n}.\frac{4}{5}\right) \to \rho y_4 = \left(\frac{0}{10}.\frac{4}{5}\right) \to \rho y_4 = \left(\frac{0}{50}\right)$$

$$\rho y_4 = 0\%$$

Temos que 0 (zero) estudante no nível 4 contribui com 0% para a questão 5 (cinco).

Para o nível 5, $n_5 = 0$ significa que temos 0 estudante no nível 5,

$$\rho y_5 = \left(\frac{n_5}{n}.\frac{5}{5}\right) \to \rho y_5 = \left(\frac{0}{10}.\frac{5}{5}\right) \to \rho y_5 = (0)$$

$$\rho y_5 = 0\%$$

Temos que 0 (zero) estudante no nível 5 contribui com 0% para a questão 5 (cinco).

Portanto, $\rho y(Q_5) = \frac{1}{Q}\sum_1^n \rho y_i$

$$\rho y(Q_5) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{50} + \frac{8}{50} + \frac{6}{50} + \frac{0}{50} + \frac{0}{50}\right) \to \rho y(Q_4) = \frac{1}{5}\left(\frac{18}{50}\right) \to \rho y(Q_4) = \frac{18}{250}$$

$$\rho y(Q_5) = 7{,}20\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_5) = 7{,}20\%$ corresponde à contribuição média da questão 5 (cinco) para o instrumento avaliativo como um todo.

Para calcularmos ρy – o desempenho dos estudantes frente ao instrumento avaliativo –, usamos as contribuições dos desempenhos em cada questão, as quais resultam na formula $\rho y = \sum_1^m \rho y(Q_j)$, com $1 \leq j \leq m$. Assim, temos que o instrumento avaliativo como um todo fica categorizado da seguinte forma:

$$\rho y = \sum_1^5 \rho y(Q_j) = \rho y(Q_1) + \rho y(Q_2) + \rho y(Q_3) + \rho y(Q_4) + \rho y(Q_5) \to$$

$$\rho y = 10{,}4\% + 10{,}8\% + 15{,}2\% + 13{,}2\% + 7{,}2\% \to$$

$$\rho y = 56{,}8\%$$

Para o instrumento avaliativo – hipoteticamente desenvolvido – cujo percentual de desempenho de seus participantes é de $\rho y = 56{,}8\%$, dizemos que está categorizado, em conformidade com a Taxonomia SOLO, no nível Multi-Estrutural (ME). A Taxonomia Solo (TS) diz que, para esse nível, isso significa que os estudantes, diante do instrumento avaliativo, enumeram, descrevem, fazem uma lista, combinam, fazem algoritmos, sendo essas ações vinculadas a esse nível. São incorporadas várias informações à resposta, no entanto, não fazem relação ou integração entre elas.

A seguir, definimos os níveis de categorização SOLO, tanto para ρy, desempenho no instrumento avaliativo como um todo, quanto para $\rho y(Q_j)$, desempenho em cada questão que compõe o instrumento. Assim, temos:

Para os desempenhos no instrumento avaliativo, tem-se:

Pré-Estrutural – $(0 \leq \rho y \leq 20\%)$;

Uni-Estrutural – $(20\% < \rho y \leq 40\%)$;

Multi-Estrutural – $(40\% < \rho y \leq 60\%)$;

Relacional – $(60\% < \rho y \leq 80\%)$;

Abstrato Estendido – $(80\% < \rho y \leq 100\%)$;

Para o desempenho em cada item que compõe o instrumento avaliativo, tem-se:

Pré-Estrutural – $(0 \leq \rho y(Q_j) \leq 4\%)$;

Uni-Estrutural – $(4\% < \rho y(Q_j) \leq 8\%)$;

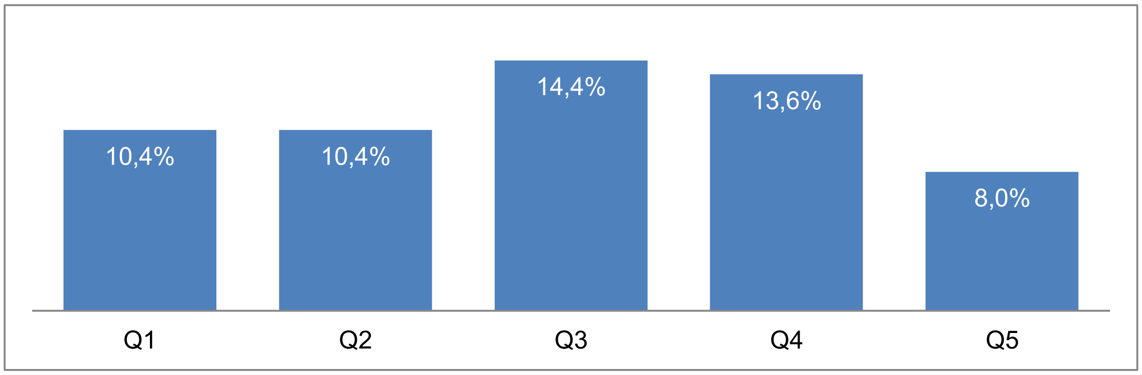
Multi-Estrutural – $(8\% < \rho y(Q_j) \leq 12\%)$;

Relacional – $(12\% < \rho y(Q_j) \leq 16\%)$;

Abstrato Estendido – $(16\% < \rho y(Q_j) \leq 20\%)$;

O Gráfico 1 a seguir mostra como os estudantes se comportaram diante de cada questão na situação hipotética, podendo esse resultado servir de orientação para tomadas de decisão quanto aos níveis de contribuições de cada questão para o instrumento como um todo, levando em consideração as informações advindas do instrumento avaliativo e da Taxonomia SOLO, uma vez que ela informa qual o comportamento das ações (verbos) dos discentes diante de cada questão.

Gráfico 1: Comportamento das questões



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabelamos, a seguir, algumas possibilidades de categorização para alguns instrumentos avaliativos hipotéticos, em que expomos alguns casos, desde a situação ideal, até a situação indesejável para os desempenhos de estudantes em um instrumento avaliativo.

Tabela 2: Situação Ideal para o resultado em um instrumento avaliativo – Nível Abstrato Estendido

C	ABSTRATO ESTENDIDO																																		
	ABSTRATO ESTENDIDO							**ABSTRATO ESTENDIDO**							**ABSTRATO ESTENDIDO**							**ABSTRATO ESTENDIDO**							**ABSTRATO ESTENDIDO**						
	Q_1	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_2**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_3**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_4**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_5**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**
ρy_1	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**
ρy_2	0	0	10	0,00	2	5	**0,40**	0	0	10	0,00	2	5	**0,40**	0	0	10	0,00	2	5	**0,40**	0	0	10	0,00	2	5	**0,40**	0	0	10	0,00	2	5	**0,40**
ρy_3	0	0	10	0,00	3	5	**0,60**	0	0	10	0,00	3	5	**0,60**	0	0	10	0,00	3	5	**0,60**	0	0	10	0,00	3	5	**0,60**	0	0	10	0,00	3	5	**0,60**
ρy_4	0	0	10	0,00	4	5	**0,80**	0	0	10	0,00	4	5	**0,80**	0	0	10	0,00	4	5	**0,80**	0	0	10	0,00	4	5	**0,80**	0	0	10	0,00	4	5	**0,80**
ρy_5	1	10	10	1,00	5	5	**1,00**	1	10	10	1,00	5	5	**1,00**	1	10	10	1,00	5	5	**1,00**	1	10	10	1,00	5	5	**1,00**	1	10	10	1,00	5	5	**1,00**
ρy(Q_J)	20,00%							20,00%							20,00%							20,00%							20,00%						
ρy	100,00%																																		

Fonte: Elaborada pelo autor.

No último nível, ou seja, no nível mais elevado de desenvolvimento mental de um indivíduo, práticas como teorizar, generalizar, formalizar hipóteses e refletir são verbos que indicam as ações necessárias para determinar o conhecimento ou desempenho nesse patamar. A Tabela 2 revela essas características.

Tabela 3: Situação para o resultado em um instrumento avaliativo - Nível Relacional

C	RELACIONAL																																		
	RELACIONAL							**RELACIONAL**							**RELACIONAL**							**RELACIONAL**							**RELACIONAL**						
	Q_1	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_2**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_3**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_4**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_5**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**
ρy_1	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**	0,02	1	10	0,10	1	5	**0,20**	0,04	2	10	0,20	1	5	**0,20**	0	0	10	0,00	1	5	**0,20**	0,02	1	10	0,10	1	5	**0,20**
ρy_2	0,04	1	10	0,10	2	5	**0,40**	0,08	2	10	0,20	2	5	**0,40**	0,08	2	10	0,20	2	5	**0,40**	0,08	2	10	0,20	2	5	**0,40**	0	0	10	0,00	2	5	**0,40**
ρy_3	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,60**	0,18	3	10	0,30	3	5	**0,60**	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,60**	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,60**	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,60**
ρy_4	0,24	3	10	0,30	4	5	**0,80**	0,32	4	10	0,40	4	5	**0,80**	0,16	2	10	0,20	4	5	**0,80**	0,16	2	10	0,20	4	5	**0,80**	0,24	3	10	0,30	4	5	**0,80**
ρy_5	0,4	4	10	0,40	5	5	**1,00**	0	0	10	0,00	5	5	**1,00**	0,2	2	10	0,20	5	5	**1,00**	0,4	4	10	0,40	5	5	**1,00**	0,4	4	10	0,40	5	5	**1,00**
ρy(Q_J)	16,00%							12,00%							12,00%							15,20%							15,60%						
ρy	70,80%																																		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Discentes que desenvolvem ações como, comparar, contrastar, explicar causas, analisar, relacionar e aplicar, em um instrumento avaliativo, demonstram ter desempenho no nível Relacional. Esse desempenho está sendo explicitado, nos resultados da Tabela 3.

Tabela 4: Situação para o resultado em um instrumento avaliativo - Nível Multi-Estrutural

	MULTI-ESTRUTURAL																																		
C	MULTI-ESTRUTURAL							MULTI-ESTRUTURAL							RELACIONAL							RELACIONAL							UNI-ESTRUTURAL						
	Q_1	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_2	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_3	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_4	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_5	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5
ρy_1	0,04	2	10	0,20	1	5	**0,2**	0,06	3	10	0,30	1	5	**0,2**	0,00	0	10	0,00	1	5	**0,2**	0,00	0	10	0,00	1	5	**0,2**	0,08	4	10	0,40	1	5	**0,2**
ρy_2	0,12	3	10	0,30	2	5	**0,4**	0,08	2	10	0,20	2	5	**0,4**	0,04	1	10	0,10	2	5	**0,4**	0,12	3	10	0,30	2	5	**0,4**	0,16	4	10	0,40	2	5	**0,4**
ρy_3	0,18	3	10	0,30	3	5	**0,6**	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,6**	0,18	3	10	0,30	3	5	**0,6**	0,18	3	10	0,30	3	5	**0,6**	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,6**
ρy_4	0,08	1	10	0,10	4	5	**0,8**	0,08	1	10	0,10	4	5	**0,8**	0,24	3	10	0,30	4	5	**0,8**	0,16	2	10	0,20	4	5	**0,8**	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**
ρy_5	0,1	1	10	0,10	5	5	**1,0**	0,2	2	10	0,20	5	5	**1,0**	0,30	3	10	0,30	5	5	**1,0**	0,20	2	10	0,20	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**
ρy(Q_J)	10,40%							10,80%							15,20%							13,20%							7,20%						
ρy	56,80%																																		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o nível Multi-Estrutural, enumerar, descrever, fazer uma lista, combinar, fazer algoritmos, são ações vinculadas a esse nível, em que, para o resultado apresentado na Tabela 4, estabelece-se esse desempenho. Isso significa que estudantes que praticam essas ações diante de um grupo de questões ficam categorizados nesse nível.

Tabela 5: Situação para o resultado em um instrumento avaliativo - Nível Uni-Estrutural

	UNI-ESTRUTURAL																																		
C	UNI-ESTRUTURAL							UNI-ESTRUTURAL							MULTI-ESTRUTURAL							MULTI-ESTRUTURAL							UNI-ESTRUTURAL						
	Q_1	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_2	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_3	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_4	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5	Q_5	n_i	n	n_i/n	i	N=5	i/5
ρy_1	0,16	8	10	0,80	1	5	**0,2**	0,12	6	10	0,60	1	5	**0,2**	0,1	5	10	0,50	1	5	**0,2**	0,08	4	10	0,40	1	5	**0,2**	0,18	9	10	0,90	1	5	**0,2**
ρy_2	0,04	1	10	0,10	2	5	**0,4**	0,04	1	10	0,10	2	5	**0,4**	0,08	2	10	0,20	2	5	**0,4**	0,12	3	10	0,30	2	5	**0,4**	0	0	10	0,00	2	5	**0,4**
ρy_3	0,06	1	10	0,10	3	5	**0,6**	0,06	1	10	0,10	3	5	**0,6**	0,06	1	10	0,10	3	5	**0,6**	0,12	2	10	0,20	3	5	**0,6**	0	0	10	0,00	3	5	**0,6**

ρy_4	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**	0,08	1	10	0,10	4	5	**0,8**	0,08	1	10	0,10	4	5	**0,8**	0,08	1	10	0,10	4	5	**0,8**	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**
ρy_5	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0,1	1	10	0,10	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0,1	1	10	0,10	5	5	**1,0**
ρy(Q_J)	5,20%							6,00%							8,40%							8,00%							5,60%						
ρy	33,20%																																		

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 5 expõe que, nesse tipo de situação, os discentes identificam ou realizam um procedimento simples diante de uma questão e um determinado instrumento avaliativo, nesse caso, o resultado mostra que poucos estudantes alcançaram níveis mais elevados, enquadrando-se no nível Uni-Estrutural.

Tabela 6: Situação não desejável para o resultado em um instrumento avaliativo - Nível Pré-Estrutural

C	PRÉ-ESTRUTURAL																																		
	PRÉ-ESTRUTURAL							**PRÉ-ESTRUTURAL**							**PRÉ-ESTRUTURAL**							**PRÉ-ESTRUTURAL**							**PRÉ-ESTRUTURAL**						
	Q_1	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_2**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_3**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_4**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**	**Q_5**	**n_i**	**n**	**n_i/n**	**i**	**N=5**	**i/5**
ρy_1	0,2	10	10	1,00	1	5	**0,2**	0,2	10	10	1,00	1	5	**0,2**	0,2	10	10	1,00	1	5	**0,2**	0,2	10	10	1,00	1	5	**0,2**	0,2	10	10	1,00	1	5	**0,2**
ρy_2	0	0	10	0,00	2	5	**0,4**	0	0	10	0,00	2	5	**0,4**	0	0	10	0,00	2	5	**0,4**	0	0	10	0,00	2	5	**0,4**	0	0	10	0,00	2	5	**0,4**
ρy_3	0	0	10	0,00	3	5	**0,6**	0	0	10	0,00	3	5	**0,6**	0	0	10	0,00	3	5	**0,6**	0	0	10	0,00	3	5	**0,6**	0	0	10	0,00	3	5	**0,6**
ρy_4	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**	0	0	10	0,00	4	5	**0,8**
ρy_5	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**	0	0	10	0,00	5	5	**1,0**
ρy(Q_J)	4,00%							4,00%							4,00%							4,00%							4,00%						
ρy	20,00%																																		

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 66 revela situações que não são desejáveis, uma vez que cada questão do instrumento avaliativo mostra que todos os estudantes, em todas as questões, estão posicionados no nível Pré-Estrutural.

Em suma, as tabelas acima simulam situações que caracterizam as categorias determinadas pela Taxonomia SOLO, situações as quais foram desenvolvidas com o propósito de mostrar alguns resultados possíveis para o desempenho dos estudantes, sendo estes desenvolvidos desde o nível mais elementar – indesejável – (Pré-Estrutural) até o nível mais avançado – desejável – (Abstrato Estendido).

Simulamos cinco situações, uma para cada nível de categorização. Dessas, escolhemos aquela em que calculamos o desempenho dos estudantes diante das 5 (cinco) questões, o qual foi dado por $\rho y = 56{,}8\%$. Assim, para o cálculo do indicador qualitativo/quantitativo "E" da disciplina, procedemos da seguinte forma:

$$E = \rho y . \rho x$$

Como visto, ρx ainda não foi calculado. Esse parâmetro determina o rendimento dos estudantes matriculados na disciplina "Z" e que participaram do experimento. O rendimento desses alunos é dado por $\rho x = \frac{x}{n}$, com x sendo o número de estudantes aprovados na disciplina "Z" de um total "n" que participaram do experimento. Desta forma, consideremos que dos 10 (dez) estudantes que participaram do experimento, 8 foram aprovados na disciplina "Z", revelando $\rho x = \frac{x}{n} \rightarrow \rho x = \frac{8}{10}$, mostrando um rendimento $\rho x = 80\%$. Assim, "E", o nível do indicador de qualitativo/quantitativo de contribuição da disciplina "Z" para a formação discente, é dado por $E = \rho y . \rho x \rightarrow E = 56{,}8\% . 80\% \rightarrow E = 45{,}44\%$. Isso significa, conforme indicado por Figueiredo (2017), que, após ter calculado o nível do indicador qualitativo/quantitativo de Contribuição (E) da disciplina, devemos conceituá-lo conforme ele esteja situado em um dos quatro intervalos abaixo discriminados:

0 < E ≤ 0,25 Nível Insuficiente

0,25 < E ≤ 0,50 Nível Insatisfatório

0,5 < E ≤ 0,75 Nível Regular

0,75 < E ≤ 1 Nível Satisfatório

Figueiredo (2017) afirma que no caso de "E" atingir o nível satisfatório, é necessário verificar a regularidade das finalidades para os ajustes necessários em cada prática. Para o nosso caso, os ajustes estão relacionados a cada questão.

Pelo exposto, notamos que para $E = 45{,}44\%\ ou\ E = 0{,}45$, a situação hipotética desenvolvida está posicionada em um Nível Insatisfatório, cujo resultado seria passível de investigação no sentido de verificar quais conteúdos ou questões do instrumento avaliativo estão "puxando" o resultado geral para baixo. Na situação apresentada, a questão 5 (Q_5) seria a apontada.

Em corroboração com o modelo exposto acima, temos a Nota Técnica nº 1 do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), na qual se diz que

> um sistema educacional que reprova seus participantes, fazendo com que parte deles o abandone, não é desejável, mesmo que concluam uma determinada etapa. Por outro lado, um sistema educacional em que todos os discentes concluem determinada etapa, não é de interesse caso os mesmos aprendam muito pouco. Em suma, na composição de um curso, uma disciplina e etc., a situação ideal seria aquela em que todos os discentes matriculados não desperdiçassem tempo com repetências, não a abandonassem e, ao final, aprendessem o necessário para o seu desenvolvimento profissional (INEP/MEC, 2007, p. 1).

A concepção exposta pela nota Técnica 1 do IDEB reforça o uso do Modelo Analítico MQ^2, uma vez que em ambos se tem como finalidade verificar desempenhos combinados com o rendimento, sendo o IDEB relacionado a um sistema de ensino que utiliza exames padronizados em larga escala e rendimento escolar, enquanto o Modelo analítico MQ^2, para a construção relacionada ao nosso caso, utiliza o desempenho de discentes relacionados a conteúdos de uma disciplina e ao respectivo rendimento desses discentes nessa mesma disciplina.

No Capítulo 4, acreditamos que, com a colocação em prática do que anteriormente foi desenvolvido, é possível ter um melhor entendimento quanto à usabilidade do modelo.

2.3 Fundamento de análise: o Discurso do Sujeito Coletivo

Esse tópico tem a finalidade de nos oferecer subsídios para analisar o resultado de entrevistas realizadas a um grupo de professores, conforme mencionado inicialmente. Portanto, segundo Lefrève e Lefrève (2012), o Discurso do Sujeito Coletivo (DSC) é um método para análise de dados qualiquantitativos. Segundo os autores, a ideia por trás deste método é analisar dados de entrevistas, grupo focal, depoimentos, dados de questionários abertos etc.

O Discurso do Sujeito Coletivo é uma forma de expressar diretamente a representação social de um dado sujeito social. Ele resulta de um discurso síntese de vários discursos individuais sobre uma mesma questão de pesquisa. Os sujeitos sociais são institucionalmente equivalentes ou fazem parte de uma mesma cultura organizacional (SIMIONI et al., 1996 apud LEFRÈVE; LEFRÈVE, 2012).

Na técnica do DSC, os depoimentos são redigidos na primeira pessoa do singular, com vistas a produzir no receptor o efeito de uma opinião coletiva expressando-se diretamente, como fato empírico, pela “boca” de um único sujeito de discurso (LEFRÈVE; LEFRÈVE, 2012).

Segundo a Teoria das Representações Sociais de Jodelet (1989), exposta em Lefrève e Lefrève (2012), o que foi dito anteriormente é sociologicamente possível, na medida em que se entendam as formações sociais como entidades compostas por representações sociais sob a forma de discursos coletivos que os indivíduos internalizam e vivem como seus. Dessa forma,

> a opinião que emerge do DSC apresenta uma dupla pertinência: qualitativa e quantitativa. Qualitativa porque no DSC cada distinta opinião coletiva é apresentada sob a forma de um discurso (e não, por exemplo, sob a forma de escolha de alternativas pré-fixadas de resposta, nem sob a forma de meras categorias) que recupera os distintos conteúdos e argumentos que conformam a dada opinião na escala social ou coletiva; quantitativa porque tais discursos têm, ademais, uma expressão numérica, considerando-se que a sociedade são coletividades de indivíduos que compartilham ideias e opiniões socialmente disponíveis (LEFRÈVE; LEFRÈVE, 2012, p. 18).

O pressuposto do Discurso do Sujeito Coletivo é que se possa retirar as ideias centrais de cada um dos discursos e combinar com os demais, procurando com isso mostrar, por meio das falas dos diversos discursos, um único discurso síntese.

Uma pesquisa de opinião na qual se usa o DSC requer a presença no espaço ou no campo social, de, segundo Lefrève e Lefrève (2012, p. 37-38), “sujeitos ou conjuntos de sujeitos a serem entrevistados, para os quais o problema a ser investigado faça sentido, ou seja, sujeitos capazes de, sobre o problema, emitir julgamentos, opiniões, posicionamentos e tecer os julgamentos correspondentes”.

Com a fundamentação teórica do discurso do sujeito coletivo e a teoria das representações sociais, pretende-se realizar o resgate de ideias socialmente compartilhadas. Entende-se que, se essas ideias são compartilhadas, é óbvio que vão naturalmente se repetir entre seus sujeitos entrevistados.

O discurso do sujeito coletivo como colocado pretende conhecer o quanto as ideias se repetem entre os entrevistados. Assim, pretende resgatar todas as ideias existentes e não apenas quais são mais presentes em um campo. Se o pesquisador parar suas entrevistas no momento em que julgar que as ideias começaram a se repetir, a sua chance é maior de obter as respostas mais compartilhadas deixando de lado as menos compartilhadas.

Os autores dessa teoria (DSC) discorrem que as ideias semelhantes presentes em diferentes depoimentos são agrupadas em categorias comuns de sentido, que descrevem as ideias presentes enquanto representações sociais em forma discursiva, de modo a revelar seus conteúdos ideativos, bem como os argumentos e justificativas nelas presentes para que estejam também presentes todos os aspectos de uma representação socialmente compartilhada.

Apresentamos a seguir os operadores do Discurso do Sujeito Coletivo, os quais são as ferramentas que norteiam os procedimentos para a execução do método, em conformidade com o que está exposto em Lefrève e Lefrève, (2012), autores que indicam as definições das expressões-chave e das ideias centrais, as quais são os pontos de partida para a criação da síntese que culmina no DSC.

As *expressões-chave* são pedaços ou trechos ou segmentos, contínuos ou descontínuos, do discurso, que devem ser selecionados pelo pesquisador e que revelam a essência do conteúdo do depoimento ou discurso, ou da teoria subjacente. Essas expressões são fundamentais para a confecção do Discurso do Sujeito Coletivo, por isso precisam ser adequadamente coletadas (LEFRÈVE; LEFRÈVE, 2012).

Ao selecionar as expressões-chave de cada resposta de uma questão ou de cada artigo de jornal ou revista, deve-se observar um meio termo sensato entre as tendências extremas de selecionar quase tudo ou quase nada do material discursivo. Quando selecionamos quase tudo, torna-se mais difícil separar as ideias centrais do que é acessório, marginal, secundário no discurso. Quando selecionamos quase nada (apenas uma palavra, por exemplo), ao contrário, torna-se difícil identificar e descrever a ideia central por insuficiência de “matéria-prima”.

Selecionar as ideias-chave significa, em suma, depurar o discurso de tudo o que é irrelevante, não essencial, secundário, buscando ficar, o máximo possível, com a essência do pensamento, tal como ele aparece, literalmente, no discurso analisado.

Ao mesmo tempo, o pesquisador deve identificar se o entrevistado tem uma ou mais ideias diferentes sobre o tema ou assunto pesquisado.

Selecionado um material rico e significativo de expressões-chave, será mais fácil confeccionar o Discurso do Sujeito Coletivo correspondente.

A ideia central é um nome ou expressão linguística que revela e descreve da maneira mais sintética e precisa possível o sentido ou sentidos das Expressões-Chave em cada um dos discursos analisados e de cada conjunto homogêneo de Expressões-Chave (que vai dar nascimento, posteriormente, ao DSC). A Ideia-Chave recebe também o nome de *categoria*.

Os autores afirmam que as Expressões-Chave são basicamente concretas, expressivas, descritivas, abundantes, afetivas, literárias; em contraste, as Ideias Centrais são abstratas, conceituais, sintéticas, frias e poucas.

As Ideias Centrais são o que o entrevistado quis dizer (ou o quê, sobre o quê) e as Expressões-Chave, como isso foi dito.

O “quê” e o “como” se complementam e reforçam mutuamente no discurso: fica mais fácil entender o “quê” um indivíduo ou um grupo de indivíduos quis dizer observando “como” essa ideia acabou se materializando num determinado discurso.

O DSC é uma reunião em um só discurso-síntese, redigido na primeira pessoa do singular, de Expressões-Chave que têm a mesma Ideia Central.

As Ideias Centrais semelhantes devem ser reunidas em uma única Ideia Central ou *Categoria*, as quais devem responder à *pergunta*. Portanto, a construção do DSC é feita com as Expressões-Chaves das Ideias Centrais enquadradas na mesma categoria. Para cada pergunta deverá surgir um painel com os DSCs que representam as opiniões coletivas existentes sobre o tema da pergunta na população pesquisada. O DSC que emerge desses procedimentos representa a parte qualitativa do discurso.

Lefrève e Lefrève, (2012) consideram como atributos quantitativos do DSC a intensidade e amplitude, os quais referem-se ao número do percentual de indivíduos que contribuíram com suas Expressões-Chave relativas às Ideias Centrais semelhantes ou complementares para a confecção de um dado DSC.

Os autores afirmam que a amplitude se refere à medida da presença de uma ideia ou representação social, considerando o campo ou o universo pesquisado, revelando ao pesquisador o grau de espalhamento ou difusão de uma ideia (opinião) no campo pesquisado, ideias essas que devem ser analisadas dentro de um campo social levando em conta como se distribuem nele.

Os procedimentos acima descritos, os quais podem ser encontrados em Lefrève e Lefrève (2012), serão utilizados para as análises do DSC que emergirão das respostas dadas por um grupo de professores, os quais são parte da nossa pesquisa.

A seguir, mostraremos um levantamento realizado junto aos bancos de teses e dissertações mais evidentes no Brasil intencionando verificar diferenças e semelhanças com a nossa pesquisa.

3 PROXIMIDADES COM A PESQUISA: CAMINHO PERCORRIDO

Com a finalidade de realizar um mapeamento de pesquisas com temáticas que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática e a Taxonomia SOLO, realizamos uma busca nos trabalhos (teses e dissertações) desenvolvidos e publicados sobre os temas supracitados, no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, considerando esses como sendo os principais repositórios brasileiros.

Segundo Romanowski e Ens (2006), trabalhos com essa configuração são conhecidos como estado da arte, que, por definição, são pesquisas que nos possibilitam o conhecimento e/ou reconhecimento de estudos que estão sendo ou já foram realizados no Brasil ou no mundo com temáticas, ou linhas de pesquisa, iguais ou parecidas com a qual tratamos em nossas pesquisas.

Esses autores afirmam que a pesquisa é realizada apenas dentro da área de estudo de interesse do pesquisador, pois, além de reconhecer o que está sendo ou foi investigado, poderemos usar posteriormente os materiais encontrados.

Dedicamos esta seção a apontamentos sobre os objetivos e resultados dessas pesquisas, de forma a analisar até que ponto o trabalho que estamos nos propondo a desenvolver tem relevância e apresenta aspectos pertinentes e diferenciados em relação aos que já foram realizados.

Além dos levantamentos, consta neste capítulo, no tópico 3.3, o caminho percorrido durante a realização do nosso experimento, que foi de suma importância para a realização deste trabalho.

3.1 Teses e dissertações sobre o CDI realizadas em licenciaturas em Matemática no Brasil

O objetivo desta seção é apresentar as pesquisas realizadas no Brasil relacionadas ao tema aqui abordado, em função dos conceitos e teorias nos quais nos apoiamos. Com isso, procuramos relacionar o nosso trabalho com outros que já foram desenvolvidos nessa mesma perspectiva, a fim de verificar nessas pesquisas o que outros pesquisadores pensam acerca desse tema, bem como verificar de que forma podem contribuir com nossa pesquisa.

Como bem assegura Allevato (2005), trata-se de conhecer "o estado da arte", de localizar sua pesquisa no espectro daquelas já realizadas no campo de estudo em que ela se insere. Para atendermos o que foi dito antes, analisamos, inicialmente, os resumos das teses e dissertações relacionadas ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral que foram produzidas no Brasil nas Licenciaturas em Matemática, considerando que, segundo Romanowski e Ens (2006), os resumos de trabalhos acadêmicos costumam nos informar os objetivos, os procedimentos metodológicos adotados, o referencial teórico utilizado e os resultados alcançados.

Na leitura dos trabalhos, voltamos nosso olhar para os resumos e centramos nossa leitura para as demais seções, caso fosse de nosso interesse. O capítulo tem como propósito apresentar dissertações e teses produzidas no Brasil nos últimos anos, realizadas em licenciaturas em Matemática, que abordam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e a Taxonomia SOLO pesquisadas no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), por entender que essas duas bases de dados são compostas por trabalhos da maioria das instituições de ensino superior do Brasil. Com isso, objetiva-se produzir uma amostra representativa da produção brasileira relacionada a essa temática.

Para a pesquisa relacionada às teses e dissertações anteriormente mencionadas, buscamos fundamentação em um treinamento para o uso do Portal de Periódicos da Capes e outras plataformas, ministrado pela Bibliotecária da Universidade Federal do Pará (UFPA), com carga horária de 3 horas, no dia 13/02/2019.

Dessa forma, usando a metodologia adquirida no treinamento, utilizamos as seguintes palavras-chave para a pesquisa:

Cálculo Diferencial e Integral e Licenciatura em Matemática;

Taxonomia SOLO;

Com as palavras-chave “Cálculo Diferencial e Integral AND[3] Licenciatura em Matemática”, escrito desta forma, no buscador do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, em fevereiro de 2019, deparamo-nos com 30 trabalhos. Desses, 22 atenderam às especificações por nós exigidas, sendo 8 teses e 14 dissertações, os quais serão nomeados por Teses (T_i) e Dissertações (D_i) com “*i*” variando de 1 a 22.

---

[3] Operador booleano utilizado para pesquisa em bancos de dados.

Sobre a Taxonomia SOLO, no próximo tópico discorreremos sobre o procedimento. Portanto, iniciemos, então, nomeando os trabalhos apenas por teses e dissertações, com seus respectivos títulos e ano de defesa, conforme o Quadro 4 a seguir.

Quadro 4: Teses e Dissertações sobre o Cálculo Diferencial e Integral realizadas nas Licenciaturas em Matemática no Brasil

	ANO	TÍTULO E AUTOR	PLATAFORMA
D_1	2008	Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: O uso que os alunos fazem do computador em atividades de Modelagem (SANTOS, 2008).	BDTD
D_2	2008	Sobre a passagem do estudo de **Função de uma Variável Real para ocaso de duas variáveis** (IMAFUKU, 2008).	BDTD
D_3	2010	Tecnologias da Informação no estudo do **Cálculo** na perspectiva da Aprendizagem Significativa (MIRANDA, 2010).	CAPES
D_4	2010	O processo de construção de objetos de aprendizagem em **Cálculo Diferencial e Integral** durante uma Atividade de Design (REIS, 2010).	CAPES
T_5	2011	Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no **Cálculo a Várias Variáveis** (ALVES, F. R. V., 2011).	CAPES
D_6	2011	Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual no ensino de Limites e Continuidade em **Cálculo Diferencial e Integral** (ABREU, 2011).	CAPES
D_7	2011	Um estudo das atividades propostas em um curso de **licenciatura em matemática**, na disciplina de introdução ao **CDI**, na modalidade à distância (ALVES, A. F. S., 2011).	CAPES
D_8	2012	Processos de comunicação da disciplina **Cálculo** I do curso de **licenciatura em matemática** na modalidade a distância do CESAD-UFS-UAB (SANTOS, 2012).	CAPES
D_9	2013	O uso dos softwares winplot e winmat no curso de **licenciatura em matemática:** potencialidades, possibilidades e desafios (MARTINS, 2013).	CAPES
T_{10}	2014	O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de **integral** por meio da resolução de problemas (VOGADO, 2014).	CAPES
D_{11}	2014	Estudo da aprendizagem do conceito de **limite** fundamentado na teoria da aprendizagem significativa aplicado à **licenciatura em matemática** (OLIVEIRA, 2014).	CAPES
D_{12}	2015	Proposta de abordagem para as técnicas de **integração** usando o software geogebra (BEZERRA, 2015)	BDTD
D_{13}	2015	Uma sequência de ensino para o estudo de **integrais duplas**, (FONTOURA, 2015).	CAPES
T_{14}	2016	A evolução do sentido para a noção de **função afim** para um grupo de estudantes de **licenciatura em matemática** (MINISINI, 2016).	CAPES
T_{15}	2016	A organização do ensino de **cálculo diferencial e integral** na perspectiva da teoria da formação por etapas das ações mentais de Galperin (BEZERRA, 2016).	CAPES
T_{16}	2017	A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum: contribuições para o ensino de **CDI** na **licenciatura em matemática** (LOPES, 2017).	CAPES
D_{17}	2018	A **derivada de uma função** em atividades de modelagem matemática: uma análise semiótica (MENDES, 2018).	CAPES

T_{18}	2018	Delineando uma pesquisa: legitimidades para a disciplina de **cálculo** na **formação do professor de matemática** (GERETI, 2018).	CAPES
D_{19}	2018	Conceito de **limite** sob a perspectiva da resolução de problemas mediada pelo software geogebra (SABATKE, 2018).	CAPES
T_{20}	2019	O **Cálculo Diferencial e Integral** para ensinar: A Matemática para a **Licenciatura em Matemática** (GROTTI, 2019).	CAPES
D_{21}	2019	A importância do **Cálculo Diferencial e Integral** para a **formação do professor de Matemática** da Educação Básica (ALÉSSIO, 2019).	CAPES
T_{22}	2019	Contribuições das representações Semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o **Cálculo Diferencial e Integral** por alunos de um curso de **Licenciatura em Matemática** (DENARDI, 2019).	CAPES

Fonte: Elaborado pelo autor.

O Quadro 4 mostra como os trabalhos estão distribuídos no decorrer dos anos, sendo possível observar que, em 2009, não consta nenhuma pesquisa nas bases de dados pesquisados nesse período. Por outro lado, 2011, 2018 e 2019 foram os anos em que mais se produziu. A série não mostra uma tendência de crescimento ou decrescimento, observa-se uma oscilação no número de trabalhos produzidos, sobre a qual, ao iniciarmos a pesquisa, esperava-se uma tendência de crescimento em função do surgimento de novos programas de Pós-Graduação nos últimos anos. Em média se produz 2 (dois) trabalhos por ano relacionados a esse tema.

Todos os trabalhos acima mencionados têm como tema de estudo o Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática. Ainda no Quadro 4, destacamos na coluna título algumas palavras em negrito, que relacionam esses trabalhos com o tema pesquisado. Vale ressaltar que nem todos os títulos mostram o tema completo. Então, podemos nos perguntar como esses trabalhos foram selecionados? A resposta vem durante a leitura dos resumos, em que verificamos que todos focam as pesquisas no Cálculo Diferencial e Integral nas Licenciaturas em Matemática. Observamos ainda que quase todos os trabalhos têm como finalidade investigar o ensino e a aprendizagem, sendo abordados de forma qualitativa.

No Quadro 5 a seguir apresentamos as Teorias ou Conceitos utilizados nas respectivas pesquisas.

Quadro 5: Teorias ou conceitos adotados para a construção ou análise das pesquisas

TEORIAS OU CONCEITOS UTILIZADOS	**T_i**	**D_i**
Modelagem Matemática	-	D_1 e D_{17}
TICs	T_5 e T_{10}	D_1, D_3, D_9, D_{12}, D_{13} e D_{19}
Teoria dos Registros de Representação Semiótica	T_5 e T_{22}	D_2

Teoria da Aprendizagem Significativa	T_{11}	D_3
Pensamento Matemático Avançado	T_6 e T_{16}	D_3 e D_{13}
Atividade de Design	-	D_4
Sequência Fedathi	T_5	D_{12}
Raciocínio Intuitivo	T_5 e T_{10}	-
Categorização de Atividades Desenvolvidas para Aprendizagem	-	D_7
Vygotsky (1991, 1996), Morin (2005; 2009; 2010) e Peters (2003; 2004)	T_{14}	D_8
Resolução de Problemas	T_{10} e T_{11}	D_{19}
Engenharia Didática	T_{22}	D_{12} e D_{13}
Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin	T_{16}	-
Princípios de Criatividade	T_{16}	-
Semiotica	-	D_{17}
Análise Textual Discursiva	-	D_{17}
Modelo dos Campos Semânticos	T_{18}	-
História Oral	T_{18}	-
Aspectos Históricos	T_{20}	D_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para fins de melhor entendimento, ressaltamos que o Quadro 5 está vinculado ao Quadro 4 com relação à numeração dada às teses e dissertações. Assim, por exemplo, podemos dizer que as dissertações D_1, D_3, D_9, D_{12}, D_{13}, e D_{19} e as teses T_5 e T_{10} (8 trabalhos no total) utilizaram as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) como bases adotadas para a construção ou análise das pesquisas, sendo a ferramenta mais utilizada nos trabalhos pesquisados.

O principal propósito para a construção do Quadro 5 foi o de verificar as ferramentas utilizadas pelos pesquisadores nos trabalhos apresentados, as quais facilitam vislumbrar o caminho a ser percorrido para a nossa pesquisa.

O Quadro 5 ainda nos revela que algumas pesquisas utilizaram várias ferramentas conjuntamente, como, por exemplo, a tese 5 – *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do Raciocínio Intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis* –, que utiliza da Modelagem Matemática, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a Sequência Fedathi e o Raciocínio Intuitivo. Por outro lado, há trabalhos que usam apenas uma ferramenta para o desenvolvimento de sua pesquisa, como, por exemplo, a dissertação de número D_4 – *O processo de construção de objetos de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral durante uma Atividade de Design* –, que usa Atividades de Design.

Segundo Marconi e Lakatos (2003), os objetivos gerais de um trabalho científico procuram mostrar a finalidade da pesquisa. Portanto, verificamos quais as finalidades das pesquisas aqui selecionadas e tecemos alguns comentários a partir das leituras dos trabalhos.

Os objetivos das pesquisas realizadas em nível de doutorado, no geral, procuram propor metodologias que influenciem na solução de problemas enfrentados pelos pesquisadores, relacionados ao ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Esse fato pode ser observado através dos objetivos das teses de número T_5, T_{10}, T_{14}, T_{15} e T_{16}. Já a tese de número T_{18} se destaca em relação às demais, uma vez que o objetivo – produzir uma discussão a respeito de legitimidade da disciplina de Cálculo na formação inicial de professores de matemática – revela que a pesquisa procura fazer uma discussão utilizando o Modelo dos Campos Semânticos, conforme exposto em Lins (2005) e da História Oral, modelos dos quais a autora (GERETI, 2018), olhando para o currículo da disciplina e para as entrevistas realizadas com um grupo de professores, fez emergir significados para produzir legitimidades para dizer que o Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina desnecessária para os cursos de Licenciatura em Matemática.

Primeiro, trataremos dos resultados apontados pelas teses de doutorado, sendo essas apenas 8 (oito), as quais dizem que de maneira geral a evolução do conhecimento do estudante a respeito dos conceitos principais do Cálculo ajudam a superar os obstáculos apresentados nas dificuldades da aprendizagem e do significado matemático esperado, uma vez que esses conceitos em algumas situações, ainda se apresentam muito tímidos. Há pesquisas que dizem que o número relativamente pequeno de sujeitos que as integram interfere nos resultados. Alguns resultados vislumbram a possibilidade de serem implantadas, na ação do professor de Matemática formador de outros professores de Matemática, discussões a respeito do currículo de formação de professores de matemática. Essas são algumas manifestações que podem ser observadas a seguir.

Vemos que a tese T_5 objetiva a identificação ou descrição das categorias do raciocínio intuitivo ao longo das fases de ensino da metodologia denominada Sequência Fedathi e os resultados apontam que a exploração didática de categorias do raciocínio intuitivo, baseada em uma mediação didática envolvendo a exploração de registros de representação semiótica, pode proporcionar a evolução do conhecimento do estudante a respeito dos conceitos principais do Cálculo a Várias Variáveis. Podemos observar que há uma articulação entre objetivos e resultados para a tese acima citada.

Investigar o desempenho estratégico dos licenciandos em Matemática quando submetidos à Resolução de Problemas por meio de uma sequência de ensino que visa ao processo de introdução ao conceito de Integral e identificar, nessas estratégias escritas, a manipulação individual e/ou simultânea dos aspectos básicos das atividades matemáticas, segundo Fischbein (a intuição, o algoritmo e o formal) foi o objetivo geral da tese T_{10}. O autor da tese diz que, de modo geral, os resultados foram satisfatórios, pois a maioria dos alunos conseguiu superar os obstáculos que apresentavam na aprendizagem do conceito de Integral, enfatizando alguns aspectos interessantes nas respostas obtidas. Observou, por meio dos protocolos, que os aspectos de Fischbein estavam presentes em suas soluções. Percebeu, também, nas falas dos alunos, a importância do uso de um software matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Relatou que estudos já realizados por outros autores mostraram a importância de um software matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, acreditando que o uso de um software matemático deve ser um caminho a ser seguido pelos educadores comprometidos com a educação.

Os objetivos da tese 14 (T_{14}) foram o de identificar e analisar a evolução da atribuição de sentido à noção de Função afim por parte de estudantes do 1º ao 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição privada da grande São Paulo. Busca-se identificar e analisar as evoluções que podem ocorrer no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática. A pesquisa documental indica que o significado matemático da noção de função afim varia de acordo com o objetivo do autor e da abordagem proposta, o que possibilita um trabalho matemático em que os estudantes podem atribuir diferentes sentidos para a função afim antes de atingirem o significado matemático esperado para a etapa escolar considerada. Já os resultados encontrados quando da análise de um teste diagnóstico e das oficinas mostram que o significado matemático esperado ainda é muito tímido. O autor finaliza dizendo que apesar dos resultados mostrarem que há aqueles que atribuem um sentido para as questões analisadas, este sentido se mostra frágil, restrito e instável.

Investigar se a organização do ensino de Cálculo baseada nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das ações Mentais de Galperin promove a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivadas e Integral nos estudantes da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima foi o que objetivou a tese 15. Como resultado, a tese aponta que é possível obter o grau de generalização e o grau de consciência dos conceitos desenvolvidos no ensino de Cálculo Diferencial e

Integral por meio da resolução das Tarefas de Compreensão Conceitual, direcionado pela organização do ensino, segundo as etapas propostas por Galperin. O autor assinala que é importante destacar que um dos fatores que influenciou no desempenho dos estudantes foi o número relativamente pequeno de sujeitos que integraram a pesquisa. Observamos que na tese T_{15} existe articulação entre objetivos e resultados.

Em T_{16}, observamos que o objetivo geral foi examinar de que forma as ideias de John Wallis, emergente na obra *Arithmetica Infinitorum*, datada de 1656, apresentaram inovações que podem contribuir para o encaminhamento conceitual e didático de noções básicas da componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática. O autor deste trabalho sugere como resultado uma proposta de conexão entre conhecimento matemático desenvolvido historicamente por diferentes matemáticos e seus potenciais conceituais epistemológicos, com a possibilidade de ser implantada na ação do professor de matemática formador de professores de matemática, com vistas a desenvolver competências e habilidades para uma futura atuação do professor em formação.

A tese T_{18} teve por objetivo produzir uma discussão a respeito de legitimidade da disciplina de Cálculo na formação inicial de professores de matemática. Nos resultados, observa-se que, por meio das discussões a respeito de currículo de formação matemática de professores de matemática, produziram-se legitimidades afirmando que não deveria haver uma disciplina de Cálculo para Licenciatura em Matemática. As textualizações referem-se às possíveis legitimidades produzidas para a disciplina de Cálculo e possíveis formações para Licenciatura em Matemática. Mais uma vez observa-se que os objetivos se movimentam na direção dos resultados.

O objetivo da tese 20 foi o de analisar o(s) processo(s) de constituição de um saber profissional do professor de Matemática, verificando a objetivação do Cálculo Diferencial e Integral para ensinar e a patente preocupação em buscar alternativas de Ensino de CDI, tendo em vista os altíssimos índices de reprovação nessa disciplina, recebendo destaque a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) que facilitam o desenvolvimento, principalmente no que concerne à “representação” dos conceitos trabalhados nessa disciplina. Este estudo constatou que o emprego de TICs tem se configurado, além de uma tendência, também como o principal mecanismo para o ensino do Cálculo para os futuros professores, sendo, muitas vezes, adotado como estratégia de ensino e apontado como necessário ao ensino dessa disciplina. No entanto, há a preocupação no sentido de que, no uso dessas tecnologias, o professor não se afaste do seu papel de mediador do conhecimento. A análise dos dados ainda apontou forte direcionamento crítico ao modelo tradicional de ensino do Cálculo Diferencial e Integral, o qual, segundo aspectos analisados no estudo, foi um dos principais fatored de insucesso do estudante na disciplina de Cálculo.

Na tese 22, buscou-se investigar contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I. Mediante a análise realizada, pode-se inferir que as representações semióticas mobilizadas durante a resolução das atividades contribuíram para: um maior domínio no estabelecimento de relações entre as representações algébrica e gráfica de funções, uma melhor desenvoltura na leitura e interpretação de gráficos, avanços em relação à fatoração e simplificação de expressões, avanços na resolução de inequações, o entendimento da caracterização das funções afim, quadrática e exponencial, a compreensão do conceito de domínio e das implicações desse no gráfico da função, a compreensão do conceito de função, bem como o entendimento da noção intuitiva de limite.

Já para as dissertações de mestrado, podemos dizer que todos os trabalhos propõem metodologias – tal qual as teses – que influenciam na solução de problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral que fazem parte do dia a dia dos pesquisadores em suas atividades profissionais nas licenciaturas em Matemática.

Tanto para as teses quanto para as dissertações, elencamos os objetivos gerais e os resultados. O propósito é observar se os resultados apontados mostram o que foi exposto pelos objetivos, uma vez que nesses se expõem a meta que se pretende alcançar com a pesquisa.

A dissertação D_1 objetivou abordar e discutir a relação entre Modelagem Matemática e as possibilidades do uso do computador no processo de ensino e aprendizagem mediante abordagens de situações-problema com referência na realidade. Nos resultados, evidenciou-se um uso um tanto quanto dissociado da possibilidade de resolver situações-problema, principalmente em atividades de Modelagem. O autor expõe que esse fato, como observado, não comprova, mas, no mínimo, o faz concordar com Pais (2005 apud SANTOS, 2008, p. 44), que afirma que “a disponibilidade física dos recursos tecnológicos, no meio escolar, por si mesma não traz nenhuma garantia de transformações significativas na educação". Observamos, neste trabalho, o surgimento de uma nova problemática, qual seja, a de fazer funcionar, no meio educacional, os recursos tecnológicos. Em suma, percebemos a existência de comunicação entre objetivos e resultados neste trabalho.

D_2 objetivou verificar as dificuldades e saberes manifestados por estudantes em relação à transição do estudo das funções de uma variável para o caso de duas, no que diz respeito às variáveis dependentes e independentes e à interdependência entre elas, ao domínio e ao gráfico, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também em relação a quais manifestações são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem. Os resultados apontaram que os registros de representação semiótica se mostraram uma eficaz ferramenta para a explicitação dos saberes e da complexidade que o estudo de funções de duas variáveis representa para os alunos. Esta pesquisa revelou algumas dificuldades que os alunos apresentam quando estudam as funções de duas variáveis, como a não compreensão do sistema de eixos 3D, a falta de clareza na determinação e representação do domínio da função, a dificuldade em realizar a conversão do registro da língua natural para o algébrico em situações contextualizadas, a confusão entre o registro gráfico do domínio e da função, e os obstáculos para a interpretação do gráfico de uma função de duas variáveis, dificuldades estas que se refletem negativamente no estudo das derivadas parciais.

A dissertação D_3 teve por objetivo investigar como o uso de um software em conjunto com a aplicação de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir e favorecer as relações entre os subsunçores/conhecimentos prévios dos estudantes – de Cálculo de várias variáveis – e as construções, análises, interpretações e compreensões de conceitos matemáticos em gráficos do R^3. Vê-se nos resultados que, para alcançar os objetivos almejados, o autor se baseou na Teoria da Aprendizagem Significativa, nos conceitos do Pensamento Matemático Avançado e Pensamento Visual-Espacial, a partir dos quais foi apresentada uma proposta de ensino e aprendizagem para a disciplina, nos estudos de funções reais de duas variáveis e gráficos em R^3, auxiliadas com o uso de uma tecnologia da informática. Os dados apontaram alguns fatores determinantes, dentre eles, que as interações de novas informações com conhecimentos prévios e de aprendiz/aprendiz e aprendizes/professor desempenharam um papel fundamental para uma possível aprendizagem significativa em gráficos do R^3. Fica evidente que o trabalho exibe assim uma consonância entre objetivos e resultados.

Compreender as características do Processo de Construção de Objetos de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral durante uma Atividade de Design foi o objetivo da dissertação 4. Os resultados da pesquisa propõem material didático relacionado ao Cálculo Diferencial e Integral utilizando ferramentas das TICs como facilitadoras no processo de ensino-aprendizagem. Vale ressaltar que a pesquisa se desenvolveu durante um curso de extensão e teve, como protagonistas, alunas do curso de Licenciatura em Matemática.

A dissertação D_6 propôs-se a investigar, tanto quanto possível, a imagem conceitual e a definição conceitual que o aluno desenvolve ao tratar alguns assuntos fundamentais do Cálculo 1. Os resultados apontam para a necessidade de se repensar o papel das definições formais de limites e continuidade na perspectiva de um ensino que privilegie a construção de imagens e definições conceituais significativas para a aprendizagem. A dissertação vai além dos objetivos propostos e expõe um produto educacional que apresenta um conjunto de atividades relacionadas a limite e continuidade e que pode ser utilizado por professores de Cálculo Diferencial e Integral I. Acreditamos que, no caso dessa dissertação, ocorreu uma leve dissonância positiva entre objetivos e resultados, uma vez que o primeiro não almeja produzir um produto educacional.

Verificar se as atividades propostas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EAD propiciam a utilização de diferentes estratégias de ensino foi o objetivo geral de D_7. A pesquisa mostrou que, no desenvolvimento da disciplina Funções e Limites, foi proposto um total de 80 atividades, das quais se verificou que 43, ou seja, 53,75% das atividades foram classificadas como atividade do tipo exercícios, 26 atividades foram classificadas como problemas o que corresponde a 32,5% e 11 atividades, correspondentes a 13,75% do total, foram classificadas como atividades de exploração. Isso mostra a predominância de tarefa do tipo exercícios na elaboração do curso cuja análise não verificou atividades do tipo investigação. Em relação à dimensão contexto observou-se o total de 58 (72,5%) atividades situadas no contexto matemático e 22 (27,5%) atividades situadas no contexto real.

Observamos em D_8 que compreender como foram estabelecidos os processos de comunicação entre o grupo aluno-tutor-professor coordenador de disciplina no contexto da disciplina Cálculo I e como isso interferiu no processo de ensino-aprendizagem deste grupo foi o objetivo geral. Diante dos aspectos analisados, o estudo apontou que os processos de comunicação entre os sujeitos ocorreram de forma pontual, sendo que, no caso de aluno-tutor ocorreu por meio de mensagens individuais. As orientações foram articuladas a partir de linguagem exclusivamente escrita, sendo possível constatar que parte das dificuldades no que concerne à aprendizagem de conteúdos estava relacionada às dificuldades apresentadas no deslocamento de um ensino-aprendizagem desenvolvido a partir de linguagem oralizada para o outro calcado em linguagem predominantemente escrita. Em decorrência desse fato, alguns alunos recorreram a professores particulares não vinculados ao programa Universidade Aberta do Brasil. Outro ponto que vale destacar é que a eficiência em relação aos processos de comunicação estabelecidos entre alunos-tutores e professor-coordenador da disciplina perpassam as responsabilidades dos sujeitos envolvidos e adentram os limites das incumbências de uma série de profissionais que os assessoraram.

D_9 objetivou discutir as potencialidades, possibilidades e desafios da implantação de softwares matemáticos no referido curso, analisar a proposta do projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática na instituição de ensino, além de visar à construção de propostas de atividades práticas, empregando os softwares em estudo. Infere-se que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, fundamentos da matemática e álgebra linear apresentaram conteúdos com boa potencialidade para o uso desses softwares. Foram sugeridas modificações junto às ementas, acrescentando a utilização dos softwares *Winmat* e *Winplot*, objetivando assim um melhor aprendizado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, Fundamentos da Matemática e Álgebra Linear.

A dissertação D_{11} teve como finalidade analisar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite de funções de uma variável real junto a estudantes da Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Roraima.

Como resultado, o autor deste trabalho concluiu que, em função da metodologia da resolução de problemas e a prática de ensino fundamentada em uma teoria da aprendizagem, em que a aprendizagem significativa foi de grande relevância para todos os sujeitos envolvidos na pesquisa, houve uma melhora na aprendizagem, embora o desempenho dos estudantes não tenha demonstrado um resultado tão significativo quanto o esperado. Mostrou-se ainda o principal problema que se identificou na didática do conteúdo de limite, ou seja, as lacunas que ficam na aprendizagem dos estudantes ao longo de toda a Educação Básica e, neste caso, o conceito de função, em que grande parte dos estudantes não tem a maturidade do conhecimento matemático que já deveria possuir ao passar pelos níveis de ensino até chegar ao nível superior foi um dos obstáculos para assimilação do conceito de limite.

D_{12} teve, como objetivo geral, propor situações de ensino apoiadas na Tecnologia Digital, mais precisamente no software GeoGebra, em relação às Técnicas de Integração. Trata-se, portanto, de um produto educacional. Recomendou-se que, visando a um ensino atrativo e dinâmico, o Professor de Cálculo faça uso das Tecnologias Digitais. Sugeriu-se aqui o Software GeoGebra, que cada vez mais vem facilitando o processo de ensino e de aprendizagem, pois permite que seja visto geometricamente o que muitas vezes estava sendo tratado apenas pelo caráter algébrico.

A dissertação D_{13} intencionou investigar as contribuições da aplicação de uma sequência didática, elaborada de acordo com os pressupostos da Engenharia Didática e da utilização de um aplicativo computacional (software Maple), para o ensino e aprendizagem do conteúdo de integrais duplas para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados demonstraram que a sequência didática proposta e o emprego de um aplicativo computacional, programado com o software Maple, facilitaram a formação de conceitos-imagem sobre o conteúdo de integrais duplas e auxiliaram os alunos no cálculo do volume de sólidos geométricos. Consequentemente, o resultado da pesquisa transforma-se em uma produção para o ensino. Pode-se sugerir a utilização do aplicativo desenvolvido no software Maple como recurso computacional para o ensino de integrais duplas.

A dissertação D_{13}, tal qual à dissertação D_{11}, extrapola os limites objetivados produzindo um produto para o ensino. No caso dessa dissertação, ocorreu uma leve dissonância positiva entre objetivos e resultados, uma vez que o primeiro não almejava produzir um produto para o ensino.

Investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes foi o objetivo de D_{17}. Com a análise, ficou evidenciado nos resultados que, no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática, momentos de exploração e aplicação de modelos são propiciados. A análise permitiu inferir também que uma sequência de atividades de modelagem matemática possibilita a organização e a elaboração de signos de tal maneira que é possível ter acesso, mesmo que indiretamente, àquilo que o estudante está construindo em sala de aula no que diz respeito ao conhecimento matemático.

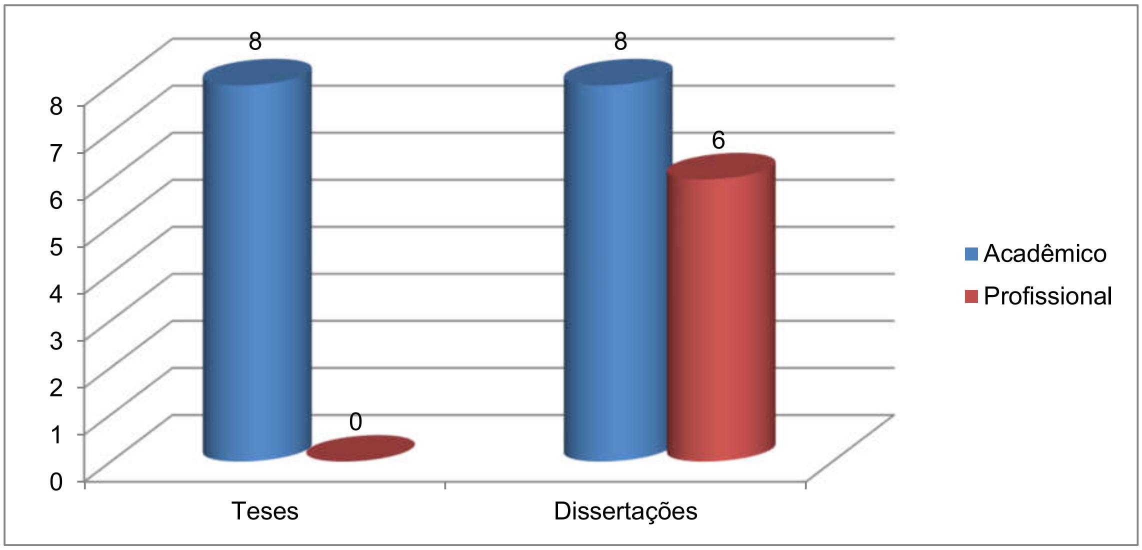
O trabalho D_{19} propôs uma abordagem para o ensino de limites através da Resolução de Problemas mediada por recursos dinâmicos do software GeoGebra, objetivando melhorar e diversificar o ensino-aprendizagem do conceito de limite, tanto no ensino médio quanto no ensino superior. Neste trabalho, um produto educacional que pode ser utilizado em sala de aula foi produzido. O autor destaca que a metodologia não foca na preparação de futuros professores de matemática da educação básica e sim, simplesmente, no ensino-aprendizagem de limite tal qual é posto para qualquer outro curso superior que seja contemplado por esse conteúdo.

Investigar a importância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática foi o objetivo proposto em D_{21}. Evidencia-se, portanto, a compreensão de que o domínio dos conteúdos de Cálculo e de suas possíveis aplicações na Educação Básica é instância indispensável na formação do futuro professor, munindo-o de um dos referenciais teóricos necessários para a eficiência do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Como observamos em relação às características desses trabalhos, acreditamos que se pode dizer que os resultados conversam com os objetivos gerais, sendo esta uma característica que se mostra em todas as teses.

Nos trabalhos acima mencionados, pode-se verificar que alguns deles têm como resultados produtos educacionais, o que pode ser explicado no Gráfico 2, em que se expõem os programas de pós-graduação, com alguns deles com a característica de serem mestrados profissionais, cujos resultados almejam produtos educacionais.

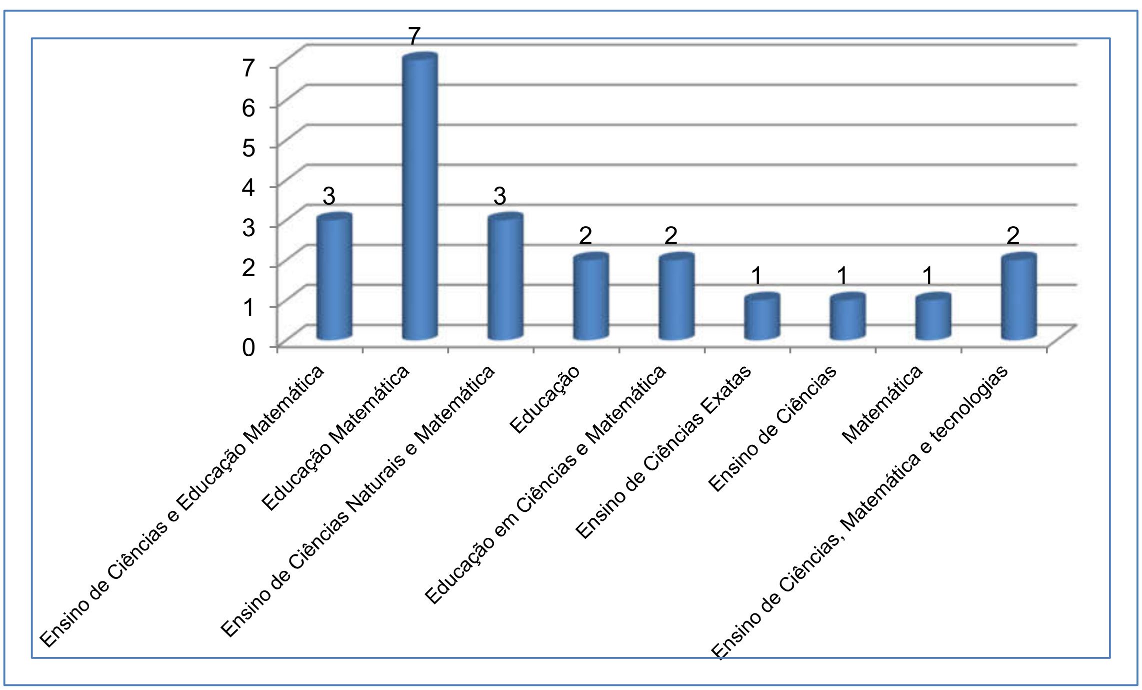
Gráfico 2: Número de teses e dissertações por tipo de programa de Pós-Graduação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já o Gráfico 3 mostra como está distribuído o número de trabalhos por programas de pós-graduação. Neste gráfico percebemos que os Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática contemplam a maioria dos trabalhos, sete, correspondendo a aproximadamente 37% do total.

Gráfico 3: Quantidade de trabalhos por Programas de Pós-Graduação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebemos, nos trabalhos expostos até aqui, que todos eles procuram de alguma forma discutir o ensino e a aprendizagem de conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática. Percebe-se que, em quase todos, nas diversas formas de desenvolvimento dos trabalhos, há contribuições epistemológicas da referida disciplina para a formação inicial de futuros professores de matemática. No entanto, nenhum deles vislumbra algo que se iguale ao que pretendemos fazer na nossa pesquisa, mesmo essa procurando contemplar o Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática.

Para o próximo tópico, usamos a mesma metodologia adquirida no treinamento, supracitado, utilizamos as seguintes palavras-chave para a pesquisa: “Taxonomia SOLO”, cujos resultados expomos a seguir.

3.2 Teses e dissertações que usaram a Taxonomia SOLO

Para as palavras-chave “Taxonomia SOLO”, assim escrita nos buscadores do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, deparamo-nos com 12 dissertações abordando o tema. Em relação às teses, não houve nenhum registro. No Quadro 6 a seguir, expomos essas dissertações.

Quadro 6: Dissertações que usaram a Taxonomia SOLO (Ds_i)

N	Título	Programa de Pós-Graduação	Onde	Quando
Ds_1	PROVA BRASIL: Uma análise da complexidade cognitiva de itens de Matemática por meio da Taxonomia SOLO (MOL, 2019).	Mestrado em Educação – Universidades Federal de Ouro Preto	Mariana-MG	2019
Ds_2	A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do Cálculo: um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos Cursos de Engenharias Agroindustriais (GARIBOTTI, 2019).	Mestrado em Ensino de Ciências Exatas – Universidade Federal do Rio Grande.	Santo Antônio, da Patrulha/RS	2019
Ds_3	Um projeto de Unidade de Ensino Potencialmente significativa nas cores de Newton por meio dos fenômenos Ópticos (CHAGAS, 2017).	Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física - IFAM[4]	Manaus/AM	2017
Ds_4	Análise da Construção de Pictogramas 3D no Contexto da Aprendizagem de Probabilidade Por Estudantes Cegos e videntes (SANTOS, 2014).	Educação Matemática – Universidade Estadual de Santa Cruz	Ilhéus/BA	2014

[4] Instituto Federal do Amazonas.

Ds_5	Aprendizagem sobre Flutuação nas Séries Iniciais Através da Inserção de Atividades Investigativas (GADEA, 2016).	Ensino, Filosofia e História das Ciências - UFB[5]	Salvador/BA	2016
Ds_6	Um ensino de eletrostática planejado construtivamente para o nono ano (RAMOS, 2016).	Mestrado Profissional em Ensino de Física - IFAM	Manaus/AM	2016
Ds_7	Formação continuada de professores de Biologia com uso de softwares livres (HORNINK, 2006).	Instituto de Biologia - UNICAMP[6]	Campinas/SP	2006
Ds_8	Análise de um instrumento de Letramento Estatístico para o Ensino Fundamental II (ALMEIDA, 2010).	Educação Matemática - Universidade Anhanguera de São Paulo	São Paulo/SP	2010
Ds_9	Uma Estratégia Utilizando Robótica Para o Ensino dos Conceitos de Velocidade e Aceleração Escalares (JÚNIOR, 2018).	Mestrado Profissional em Ensino Tecnológico - IFAM	Manaus/AM	2017
Ds_{10}	Uma introdução ao ensino da eletrodinâmica por meio de roteiros, para alunos do ensino fundamental II e a confecção do manual de auxílio (LOPES, 2016).	Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – IFAM	Manaus/AM	2017
Ds_{11}	Uma Proposta da aplicação da teoria dos campos conceituais para o ensino de cálculo em cursos superiores (LIMA, 2012)	Educação Matemática-Universidade Anhanguera de São Paulo	São Paulo/SP	2012
Ds_{12}	Avaliação do nível de usabilidade do Avale-EB para a Aprendizagem de variabilidade (AMORIM, 2015).	Educação Matemática - Universidade Estadual de Santa Cruz.	Ihéus/BA	2015

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos observar no Quadro 6 que, apesar de a Taxonomia SOLO vir sendo divulgada e utilizada por algum tempo (desde 1982 por Biggs e Collins), nos deparamos, nessa pesquisa, – nas bases de dados mencionadas anteriormente – com um número relativamente pequeno de pesquisadores utilizando essa ferramenta em seus trabalhos. Notamos que apenas Manaus-AM, São Paulo-SP, Campinas-SP, Ilhéus-BA e Salvador-BA são as cidades onde se localizam as Universidades que lançaram mão da Taxonomia SOLO como instrumento auxiliador em suas pesquisas. Os títulos das pesquisas não refletem a ferramenta, porém, logo nos resumos desses trabalhos, pode-se observar a presença da Taxonomia SOLO sendo utilizada de algum modo, dentro de um leque de possibilidades que ela oferece.

Vamos olhar nesses trabalhos para os objetivos e a finalidade do uso da Taxonomia SOLO, para que com isso possamos identificar semelhanças e diferenças com o que pretendemos realizar em nossa pesquisa. Além disso, observar de que

[5] Universidade Federal da Bahia.
[6] Universidade Estadual de Campinas.

modo essa Taxonomia auxilia na construção da pesquisa e no cumprimento dos objetivos. Para observar o aqui exposto, construímos o Quadro 7 a seguir, em que nomeamos as dissertações relacionadas à Taxonomia SOLO por Ds_j com "*j*" variando de 1 a 12.

Quadro 7: Objetivos gerais das dissertações e finalidades do uso da TS (Ds_j)

Ds_i	Objetivos Gerais	Finalidade do uso da Taxonomia SOLO
Ds_1	O objetivo geral desta pesquisa foi analisar os itens de Matemática da Prova Brasil relativos ao 5º e ao 9º ano do Ensino Fundamental pertencentes à Plataforma Devolutivas Pedagógicas, por meio dos níveis de complexidade cognitiva da Taxonomia SOLO.	Categorizar itens da Prova Brasil de 5º e 9º anos.
Ds_2	O objetivo desta pesquisa é de propor ferramentas possíveis para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos de alunos nos cursos de Engenharias Agroindustriais da Universidade Federal do Rio Grande elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, com o auxílio da Taxonomia SOLO.	Categorizar tanto as questões como as respostas de estudantes por níveis de complexidade da Taxonomia SOLO.
Ds_3	O trabalho propõe o estudo das cores de Newton pelos conhecimentos básicos de Óptica Geométrica.	A exposição da organização dos conhecimentos é feita por mapas conceituais e *o grau do conhecimento é verificado pela taxonomia SOLO.*
Ds_4	O objetivo geral desta pesquisa foi analisar a construção dos Pictogramas 3D construídos por estudantes cegos e videntes no contexto da aprendizagem de Probabilidade utilizando uma maquete tátil (MT).	A análise dos pictogramas 3D foi baseada na *classificação* proposta por Watson (2006) que tem como referência a taxonomia SOLO. Pesquisa realizada com alunos cegos e videntes).
Ds_5	Investigação sobre o entendimento dos estudantes do 3º ao 5º ano do Ensino Fundamental sobre conceitos físicos presentes no conteúdo de flutuação, quando submetidos a duas intervenções de caráter investigativo.	Foi adotada a perspectiva teórica de desenvolvimento cognitivo para identificar os níveis hierárquicos de complexidade do entendimento estabelecidos pela Taxonomia SOLO, em diferentes tarefas.
Ds_6	Resgatar uma teoria de ensino e aprendizagem que revolucionou o ensino americano na década de 60. O ensino por descoberta de Jerome Bruner (1963) e sua proposta de um curriculum em formato espiral, no qual cada conteúdo é proposto de forma superficial e aprofundado de acordo com o aprendizado do aluno, buscando fazer com que o aluno torne-se o centro de cada aula e que exista em cada aula não apenas expectadores, mas construtores de conhecimento por meio do ensino por descoberta.	A taxonomia SOLO proporcionou, em cada aula, as ferramentas necessárias para um *alinhamento construtivo entre os resultados esperados* da aprendizagem.
Ds_7	Explorar o desenvolvimento de cursos de formação continuada para uso da informática no ensino de Biologia, assim como as formas de analisar este processo.	Parte do referencial teórico utilizado para análise dos *softwares educacionais*, *com o propósito de parametrizá-los*, permitindo aos professores avaliar o software educacional para a futura aplicação, sem os quais a avaliação pode

		se tornar muito abstrata (pesquisa realizada com professores de Biologia).
Ds_8	Avaliar o instrumento de letramento estatístico com alunos do ensino Fundamental II de escolas do estado de São Paulo, a partir de um instrumento elaborado e validado pelas pesquisadoras Watson e Callingham.	As respostas dos 376 alunos foram <u>*classificadas*</u> de acordo com as categorias definidas pelas pesquisadoras Watson e Callighman, construídas a partir da interação da taxonomia SOLO e dos estágios de conhecimento do contexto (pesquisa realizada com alunos de 8º e 9º ano).
Ds_9	Propor a elaboração e aplicação de uma sequência didática por meio da utilização da robótica como estratégia de ensino em uma perspectiva de aprendizagem significativa de conceitos relacionados à cinemática no 1º ano do Ensino Médio.	Analisar os <u>*resultados de experimentos práticos*</u> gerados a partir de uma sequência didática (pesquisa realizada com alunos do 1º ano do ensino médio).
Ds_{10}	Com o intuito de oferecer ao aluno uma forma de demonstrar a teoria da eletrodinâmica com mais clareza, propõe-se a construção de manuais desenvolvidos por meio de roteiros que abordem a temática através de textos de composição histórica, desenhos, investigação e realização de experimentos físicos capazes de demonstrar os fenômenos, o que certamente ajudará o aluno a criar subsunçores para a aprendizagem em uma futura atividade.	As atividades propostas estão representadas de acordo com a Taxonomia Solo de Jhon Bigss, possibilitando <u>*classificá-las*</u> em níveis de conhecimento (pesquisa realizada com alunos do ensino fundamental II).
Ds_{11}	Apresentar uma proposta para o ensino de conceitos do Cálculo Diferencial dirigidos a cursos superiores não voltados à formação de matemáticos, tendo como principal referencial teórico a teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud.	No que tange ao tratamento dos dados, a taxonomia solo foi empregada na correção dos testes aplicados.
Ds_{12}	Avaliar a usabilidade do Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico (AVALE-EB) para a aprendizagem do conceito de variabilidade por estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual da Bahia.	As respostas dos estudantes às tarefas da Sequência de Ensino foram <u>*categorizadas*</u> hierarquicamente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

É interessante observar, na lista de trabalhos expostos no Quadro 7, que o uso da Taxonomia SOLO é feito por áreas variadas. Escolhemos para comentar, primeiramente, os trabalhos que mais se aproximam da nossa área de pesquisa, sendo os primeiros trabalhos realizados por pesquisadores da área da Educação Matemática ou realizados em programas de pós-graduação em Educação ou Educação Matemática, como é o caso dos trabalhos Ds_1, Ds_4, Ds_8, Ds_{11} e Ds_{12}.

O primeiro trabalho, Ds_1, lançou mão da TS intencionando categorizar questões que apareceram na Prova Brasil, disponíveis na Plataforma Devolutivas Pedagógicas, e ao mesmo tempo comparar essa categorização com parâmetros gerados por outras teorias, como, por exemplo, a Teoria da Resposta ao Item (TRI).

A dissertação Ds_4 utilizou a taxonomia SOLO para categorizar atividades envolvendo os conceitos de probabilidade apresentadas para duplas de alunos cegos e videntes, conforme a complexidade estrutural e a quantidade de conceitos envolvidos.

Na dissertação que nomeamos como Ds_8, a Taxonomia SOLO foi utilizada, conjuntamente com outras ferramentas, para classificar ou categorizar as respostas de 376 alunos de 8° e 9° anos, quanto aos conhecimentos adquiridos por esses alunos em relação aos conteúdos de estatística, procurando, assim, verificar o seu desempenho.

A dissertação Ds_{11} apresenta uma pesquisa que contempla a análise de um estudo de aplicação, em sala de aula, de estratégias e técnicas de facilitação na formação de conceitos e valores para o desenvolvimento de métodos próprios do processo cognitivo do sujeito e de como esse sujeito consolida o aprendizado, em particular o do Cálculo Diferencial, em cursos de graduação não voltados à formação de matemáticos. Este trabalho usa como principal referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. No entanto, o nosso interesse principal nessa dissertação se dá em verificar de que forma a Taxonomia SOLO foi utilizada pela autora desse trabalho.

Pelo exposto na coluna finalidade do uso da Taxonomia SOLO, observamos que ela foi utilizada para realizar o tratamento dos dados, sendo empregada na correção dos testes aplicados. Esses testes foram aplicados antes e depois da utilização da Teoria dos Campos Conceituas como metodologia de ensino, em que a categorização facilitada pela Taxonomia SOLO de ambos os testes foi utilizada com o propósito de corrigir e fazer comparação entre os resultados.

A DS_{12} apresenta um estudo sobre a aprendizagem do conceito de variabilidade por estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual da Bahia. Este estudo utilizou a Taxonomia SOLO para categorizar as respostas dos estudantes às tarefas oferecidas pelo AVALE-EB, que é um ambiente de aprendizagem disponível gratuitamente na internet e que objetiva auxiliar professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem de Estatística e Probabilidade por meio de sequências de ensino (SE).

Ainda no Quadro 7, mostramos sobre as dissertações Ds_2, Ds_3, Ds_5, Ds_6, Ds_7, Ds_9 e Ds_{10}, por se tratarem de trabalhos realizados em áreas diferentes da educação matemática, porém próximas, uma vez que estão relacionadas ao ensino.

Categorizar tanto as questões como as respostas de estudantes por níveis de complexidade da Taxonomia SOLO foi o que o autor da dissertação Ds_2 desenvolveu para atingir o objetivo de propor ferramentas possíveis para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos de alunos nos cursos de Engenharias Agroindustriais da Universidade Federal do Rio Grande, elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud. Esse trabalho foi apresentado ao programa em ensino de ciências exatas.

Verificamos que em D_{S3} é proposto o estudo das cores de Newton pelos conhecimentos básicos de Óptica Geométrica. O autor desse trabalho utilizou a aprendizagem significativa de Ausubel e a exposição da organização dos conhecimentos é feito por mapas conceituais e o grau do conhecimento é verificado pela taxonomia SOLO.

A dissertação Ds_5 objetivou fazer uma investigação sobre o entendimento dos estudantes do 3º ao 5º ano do ensino fundamental sobre conceitos físicos presentes no conteúdo de flutuação, quando submetidos a duas intervenções de caráter investigativo. Para isso, o autor construiu um sistema categórico, com base na Taxonomia SOLO, para categorizar as respostas dos sujeitos. Vale ressaltar que este trabalho foi realizado em um Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

O autor de Ds_6 resgata uma teoria de ensino e aprendizagem que revolucionou o ensino americano na década de 60. O ensino por descoberta de Jerome Bruner e sua proposta de um curriculum em formato de espiral. Nessa dissertação, a taxonomia SOLO proporciona as ferramentas necessárias para um *alinhamento construtivo*, diferenciando-se dos demais trabalhos aqui apresentados, uma vez que esses utilizam a TS para categorizar tarefas, atividades ou questões.

Nos reportamos à dissertação Ds_7, a qual foi defendida em 2006, pelo Instituto de Biologia da Universidade de Campinas em São Paulo, durante uma formação continuada de professores de Biologia. O trabalho intencionou explorar o desenvolvimento de cursos de formação continuada para uso da informática no ensino de Biologia, assim como as formas de analisar este processo. Parte do referencial teórico utilizado para análise dos softwares educacionais foi a Taxonomia SOLO, que teve o intuito de <u>parametrizá-los</u>, permitindo aos professores avaliar o software educacional para a futura aplicação. No âmbito deste trabalho, a ausência da

Taxonomia SOLO poderia implicar uma avaliação muito abstrata. Vale ressaltar que a pesquisa foi realizada com professores de Biologia.

A pesquisa Ds_9 utilizou uma sequência didática por meio da robótica como estratégia de ensino em uma perspectiva de aprendizagem significativa de conceitos relacionados à cinemática no 1º ano do ensino médio, a fim de demonstrar e exemplificar de forma contextualizada conceitos e fenômenos físicos intrínsecos à velocidade e à aceleração. Os resultados das atividades apresentadas aos alunos foram analisados com base na taxonomia SOLO e em critérios de avaliação de mapas conceituais.

Para finalizar, uma pesquisa realizada com alunos do ensino fundamental II, com atividades baseadas na aprendizagem significativa e na qual a Taxonomia SOLO foi utilizada para classificar os níveis de conhecimento dos estudantes nessas atividades foi o que se verificou na dissertação Ds_{10}, apresentada no ano de 2017 no Mestrado Profissional em Ensino Tecnológico do IFAM.

Observamos que os dados acima levantados nas teses e dissertações, tanto os trabalhos realizados nas licenciaturas em matemática, sobre o CDI, como os trabalhos que lançaram mão, de algum modo, da Taxonomia SOLO, apresentam aspectos que se assemelham com e se diferenciam do trabalho que ora desenvolvemos. Tais semelhanças e diferenças podem ser observadas no Capítulo 4.

No próximo tópico, apresentamos o desenvolvimento do experimento, o qual abriu um leque de possibilidades para o que almejávamos desenvolver neste trabalho.

3.3 Desenvolvimento do experimento: a empiria

Inicialmente, desenvolvemos uma atividade piloto, realizada ainda que prematuramente, possibilitou identificar acertos e/ou erros que para a empiria real serviu de orientação e para a construção de um instrumento ajustado para o ambiente ao qual nos propomos pesquisar.

Marconi e Lakatos afirmam que uma atividade piloto “permite a obtenção de uma estimativa sobre os futuros resultados, podendo, inclusive, alterar hipóteses, modificar variáveis e a relação entre elas. Dessa forma, haverá maior segurança e precisão para a execução da pesquisa” (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 228).

Iniciamos a atividade piloto aplicando a 16 discentes do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA Belém, ainda no segundo semestre do ano de 2018, um teste composto de 5 questões, contendo as seguintes orientações: “Respondam às questões com a maior riqueza de detalhes possível, supondo que estivessem ensinando tais questões para alunos da educação básica”.

A atividade piloto em si foi composta por 5 (cinco) questões, no entanto, obtivemos o aproveitamento de apenas uma. Esse experimento, antes mesmo de iniciarmos as análises, já nos serviu de exemplo para um ajuste no experimento real, uma vez que, ao apresentarmos para os discentes o instrumento avaliativo contendo 5 questões, estas não foram resolvidas a contento, muito em função do tempo (2 horas/aula, 100 minutos) e da grande quantidade de questões para esse tempo. O que ocorreu, na verdade, foi que os discentes resolveram apenas a questão número 1 (um) do instrumento avaliativo de forma satisfatória, entre as 5 (cinco) apresentadas. Os estudantes demonstraram insatisfação quanto ao tempo disponível para as respostas.

Não exibiremos aqui esta atividade uma vez que o experimento aqui exposto muito se assemelha com o piloto, diferindo na metodologia desenvolvida, sendo esta consequência dos indicativos oferecidos pela atividade piloto.

Conforme definido no primeiro capítulo desse trabalho, o objetivo geral da nossa pesquisa é analisar as contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação docente, dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFPA Campus Belém. Pelo exposto, o foco está na disciplina de CDI-I e, em função disso, resolvemos acompanhar uma turma da Licenciatura em Matemática do IFPA, Campus Belém, que cursava a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I durante o segundo semestre do ano 2019.

Vale ressaltar que o IFAPA/Belém, no momento em que se desenvolveu a pesquisa, encontrava-se com uma disparidade entre o ano civil e o ano letivo, assim, informamos que o segundo semestre de 2019 teve início em 05 de novembro de 2019, e finalizou em 30 de março de 2020. Portanto, o nosso experimento se desenvolveu durante esse período.

Conversamos com o professor Reginaldo Silva – titular da disciplina desse semestre – sobre as nossas intenções, o qual prontamente concordou em fazer parte do experimento que teve início em 05 de novembro de 2019, numa terça-feira, sempre com quatro horas/aula. Neste dia, o professor se apresentou para a turma e em seguida apresentou este pesquisador, falando o porquê de estarmos ali. Na sequência, o professor iniciou a aula apresentando a ementa e como seria trabalhada a disciplina no decorrer do semestre, etc.

O professor deu início ao conteúdo dizendo que o objeto de estudo do Cálculo Diferencial e Integral são as funções, ferramentas que foram estudadas durante a Educação Básica e na disciplina de Pré-Cálculo dessa licenciatura, e aproveitou para revisar, junto aos alunos, o conceito de função. Também verbalizou, dizendo que muitos outros conteúdos estudados durante toda a vida escolar seriam utilizados nas resoluções de problemas envolvendo o Cálculo, como, por exemplo, a geometria, a geometria analítica etc.

No CDI-I propriamente dito, iniciou limite e continuidade de funções a uma variável, com uma *introdução ao conceito de limite*, *definição de limite e as noções intuitivas de limites,* mostrou várias situações e deixou exercícios. No dia 12 de novembro de 2019, deu continuidade ao conteúdo apresentando a *definição formal de limite* sem se alongar no assunto, e em seguida mostrou as *propriedades de limites e limites laterais.* Deixou exercícios sobre o assunto e adiantou exercícios para a próxima aula sobre produtos notáveis e fatoração. No dia 19 do mesmo mês, apresentou situações envolvendo limites de funções racionais, os quais geram indeterminação. Nesses casos, a fatoração de polinômios – por divisão de polinômios no ensino fundamental e pelo dispositivo prático de Briott Ruffini, no ensino médio –, os produtos notáveis, as simplificações etc. foram utilizados, ou seja, uma parte da Matemática Básica foi evocada como ferramenta para resolver esse tipo de situação.

Limites infinitos e limites no infinito foram temas abordados no dia 26/11/2020. Sobre esses temas, desenvolvemos a primeira questão que foi aplicada como atividade avaliativa pelo professor para a turma e que fez parte do nosso experimento, conforme exposto a seguir.

Questão 1

I - *Sabemos que a soma dos* $\boldsymbol{n}$ *primeiros termos de uma PG é dada por* $\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a_1(q^n-1)}}{\boldsymbol{q-1}}$ *para todo* $\boldsymbol{n}$*. Agora se* $|\boldsymbol{q}| < 1$*, então* $\boldsymbol{q^n}$ *se aproxima de 0 tanto quanto se quiser* $\boldsymbol{n}$ *suficientemente grande. Explique porque* $\boldsymbol{q^n}$ *tende a 0, depois, usando esse princípio, mostre que 0,999...=1* Ribeiro (2012, p. 286) com adaptações*.*

Situações dessa natureza foram apresentadas nessa aula, para mostrar, por exemplo, a fração geratriz de uma dízima periódica. Esses exemplos nos levaram à questão acima em função da abordagem que estamos dando neste trabalho. O porquê se dá em função de se tratar de uma questão presente no conteúdo de progressão geométrica no ensino médio, que é mais facilmente resolvida quando o conceito de limite está consolidado. No entanto, estamos apresentando essa questão para alunos do nível superior na disciplina de CDI-I, alunos que, por definição do curso, poderão ser professores na Educação Básica.

Em 03 de dezembro de 2019, o professor Reginaldo apresentou para os discentes os *limites fundamentais,* entre os quais estão o limite trigonométrico fundamental e o limite exponencial fundamental. Várias situações foram mostradas, inclusive com aplicações desses limites, e exercícios foram deixados para consolidar o conhecimento. Sobre o limite exponencial fundamental, desenvolvemos a segunda questão para o nosso experimento, exposta a seguir.

Questão 2

II - *Um certo, poupador inveterado, resolveu aplicar R$ 1000,00 em regime de juros compostos, a uma taxa de 100% ao ano, durante um ano. Ansioso por saber quanto ele teria acumulado ao fim desse período, resolveu utilizar a fórmula para calcular o montante M, gerado pelo capital* $\boldsymbol{c}$*, aplicado à taxa* $\boldsymbol{i}$*, por um período de tempo* $\boldsymbol{n}$*. Como os juros seriam capitalizados anualmente, ele concluiu que o montante seria* $\boldsymbol{M} = \mathbf{1000}(\mathbf{1} + \mathbf{100}\%)^{\mathbf{1}} = \boldsymbol{R}\$\ \mathbf{2000,00}$*. Frustrado com o rendimento, ele recorreu ao gerente, que lhe ofereceu outra opção de capitalização: a capitalização semestral. Os juros seriam capitalizados a cada 6 meses, a uma taxa semestral proporcional a 100% ao ano, ou seja, uma taxa de* $\frac{\mathbf{100}\%}{\mathbf{2}}$*, pois o ano tem 2 semestres.*

Nessas condições, o montante acumulado ao longo de 2 semestres (1 ano) seria $\boldsymbol{M} = \mathbf{1000}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{100}\%}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{R}\$\ \mathbf{2250,00}$*. Não satisfeito, o poupador insistiu com o gerente que, dessa vez, lhe propôs a opção de capitalização mensal: os juros seriam capitalizados mês a mês, a uma taxa mensal proporcional a 100% ao ano, isto é,* $\frac{\mathbf{100}\%}{\mathbf{12}}$ *ao mês. Dessa forma, o montante acumulado ao fim de 12 meses seria dado por R$ 2.613,04. Foi o suficiente para o ganancioso poupador pensar em capitalizações diárias, por hora, minutos, segundos.*

Qual seria, porém, o montante acumulado se o número de capitalizações assumisse um valor muito alto? Além disso, é possível ficar rico se o número de capitalizações tender ao infinito? Ribeiro (2012, p. 248) com adaptações.

Observamos mais uma vez que o conceito de limite é evocado para dar suporte teórico, para resolver uma questão envolvendo a matemática da educação básica. Para ser mais preciso, o conhecimento sobre juros compostos apresentado na matemática financeira. O comentário que fizemos para a primeira questão vale para esta, ou seja, o que queríamos saber é se esses alunos haviam consolidado, durante as aulas, o conceito de limite exponencial fundamental, uma vez que futuramente ensinariam conteúdos na Educação Básica que melhor seriam ensinados se o professor (hoje aluno) tivesse um conhecimento sólido sobre esse limite, o qual serviria de suporte teórico para resolver situações que se assemelhassem à exposta acima.

Em 10 de dezembro de 2019, o assunto apresentado foi *continuidade* e *as propriedades das funções contínuas,* o qual foi amplamente discutido por meio de exemplos, seguidos do encaminhamento de atividades para a consolidação do conteúdo.

Atividades contendo um apanhado de questões envolvendo todos os conteúdos foram entregues para serem resolvidas no dia 17/12/2020, com a finalidade de reforçar o entendimento sobre os conteúdos apresentados até o momento e com o intuito de prepará-los para o primeiro teste avaliativo que ocorreria no dia 28 de janeiro de 2020, logo após o recesso de final de ano e as férias de janeiro.

Para compor a primeira nota bimestral da disciplina, uma atividade foi encaminhada para ser resolvida em casa e devolvida com as devidas resoluções no dia seguinte. Foi nesta atividade, composta de 6 questões que abordavam de forma aleatória o conteúdo estudado até aquele momento, que inserimos as duas questões descritas anteriormente – questões presentes em livros didáticos do ensino médio –, que evocaram os conhecimentos sobre limites para resolvê-las.

O estudo das *derivadas de funções reais a uma variável* se iniciou no dia 04 de fevereiro de 2020, introduzindo a *definição de derivada de uma função* usando o conceito de limite para essa definição, e sua *interpretação geométrica.* Na sequência, as regras básicas de derivação foram ministradas, utilizando as mais variadas situações, exemplificando a derivação de vários tipos de funções.

Em 11 de fevereiro de 2020, foram abordadas, na aula deste dia, a regra da cadeia e as derivadas de funções com expoentes racionais e de funções trigonométricas. As *derivadas de ordem superior* e a *diferenciação implícita* foram os conteúdos desenvolvidos no dia 18 de fevereiro, dia em que também se iniciaram as aplicações da derivada, mostrando neste dia apenas um exemplo de máximos e mínimos relativos, ao qual seria dado continuidade na aula seguinte.

Houve uma semana sem aula (25/02/2020), em função dos feriados de carnaval. O professor deu prosseguimento ao assunto no dia 03 de março do mesmo ano, abordando os problemas envolvendo máximos e mínimos, funções crescentes e decrescentes e o Teste da Derivada Primeira, concavidade e o teste da derivada Segunda e o esboço de gráficos de funções.

Sobre o conteúdo de máximos e mínimos apresentado neste dia (03/03/2020), mais duas questões foram desenvolvidas, tendo como finalidade compor o nosso experimento, as quais estão expostas a seguir:

Questão 3

III - *Um triângulo $\boldsymbol{ABC}$, retângulo em $\boldsymbol{A}$, possui os catetos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ e $\overline{\boldsymbol{AC}}$ medindo, respectivamente, 4cm e 8cm. Um retângulo $\boldsymbol{ADEF}$ é inscrito nesse triângulo, de modo que os pontos $\boldsymbol{D, E, e\ F}$ pertençam, respectivamente, aos lados $\overline{\boldsymbol{AC}}, \overline{\boldsymbol{CB}}$ e $\overline{\boldsymbol{AB}}$. Calcule a área máxima que pode ter esse retângulo. (Livro: Manuel Paiva Vol. 1. Ensino Médio – Matemática Paiva. Editora Moderna. p. 194.)*

Questão 4

IV - *Em uma ocorrência policial, foi isolada uma região retangular com três lados formados por uma corda de 20 m comprimento e o quarto lado contido em um muro, onde foram fixadas as extremidades da corda. Determine a maior área possível da região isolada, sabendo que o muro tem extensão suficiente para conter um lado de qualquer retângulo nas condições enunciadas. (Livro: Manuel Paiva Vol. 1. Ensino Médio – Matemática Paiva. Editora Moderna. p. 188.)*

Chamamos a atenção para o fato de que são questões que podem ser resolvidas utilizando somente a matemática básica, no entanto, também pode-se evocar o conceito de derivada com o mesmo propósito. Ressaltamos que o que queríamos saber é se esses alunos haviam consolidado, durante as aulas, o conceito de máximo e mínimo associado à derivada, uma vez que futuramente ensinariam conteúdos na Educação Básica que melhor seriam ensinados se o professor (hoje aluno) tivesse um conhecimento sólido sobre derivada, o qual serviria de suporte teórico para resolver situações que se assemelhassem às expostas acima.

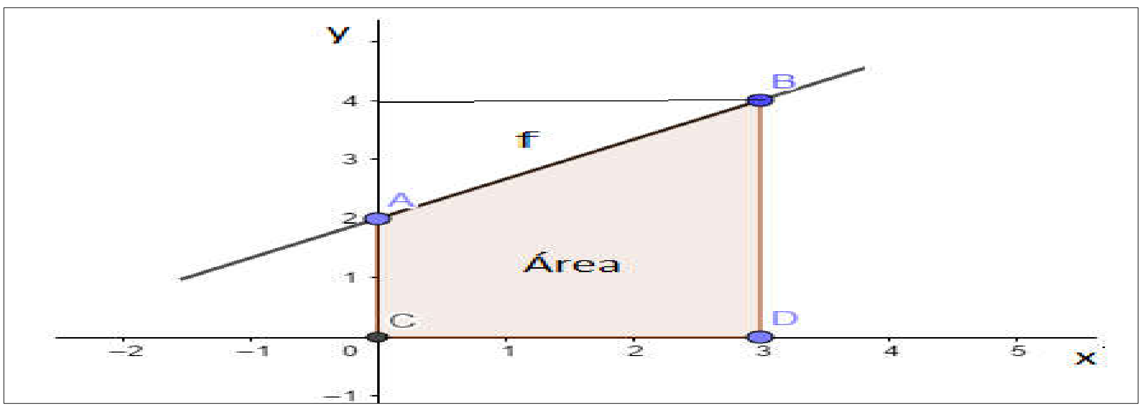
Continuando com acompanhamento do desenvolvimento da disciplina, neste mesmo dia (03/03/2020), os conteúdos sobre as *formas indeterminadas e regra de* *l'Hospital*, *funções crescentes e funções decrescentes e o teste da derivada primeira, concavidade e o teste da derivada segunda* foram utilizados para *esboçar gráficos de funções.* Nesta aula, alguns exercícios foram entregues aos alunos, contendo questões que abordavam todo o conteúdo sobre derivadas.

O conteúdo de integral começou a ser abordado no dia 10/03/2020, por meio das integrais definidas, mostrando que a integral é uma anti-derivada. Na sequência, mostrou-se o teorema fundamental do cálculo e alguns exemplos, identificando a área de figuras planas como a área limitada por uma função e o eixo x. Sobre esse conteúdo, desenvolvemos mais duas questões para compor a segunda avaliação bimestral, expostas a seguir.

Questão 5

V - Considere a figura a seguir, onde um dos lados do trapézio retângulo, está apoiado sobre o gráfico da função $\boldsymbol{f}$.

Figura 4: Trapézio formado a partir de uma função polinomial do 1º grau e o eixo "x"



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do software GeoGebra.

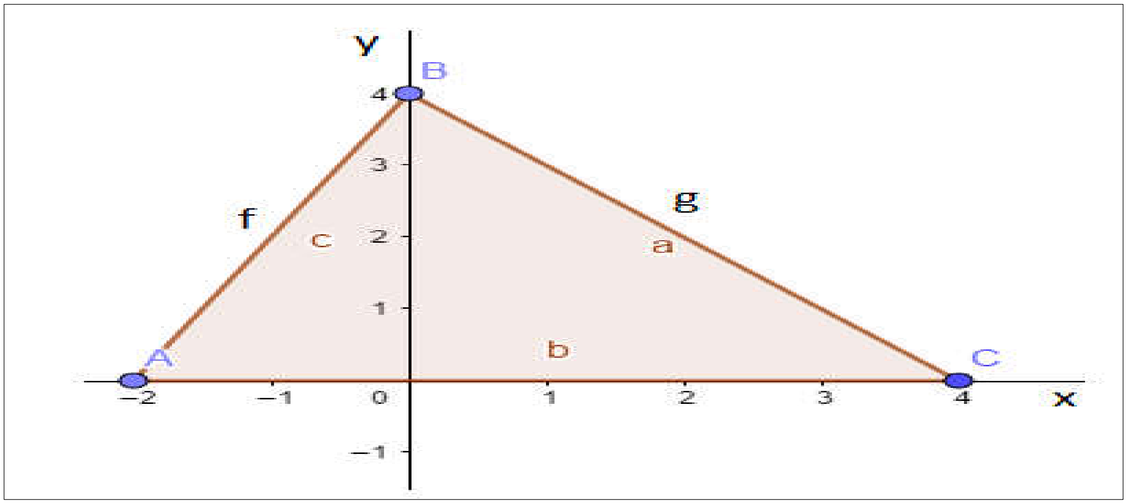
Determine a função $\boldsymbol{f}$. Use a integral definida e a fórmula do trapézio para calcular a área hachurada. Quais suas conclusões?

(Livro: Manuel Paiva Vol. 1. Ensino Médio – Matemática Paiva. Editora Moderna. p. 172) com adaptações.

Questão 6

VI - Considere a figura a seguir.

Figura 5: Triângulo formado a partir de funções polinomiais do 1º grau e o eixo "x"



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do software GeoGebra.

Determine f e g, depois, usando a integral definida e a formula da área do triângulo, calcule a área delimitada pelas funções f, g e o eixo x do plano cartesiano. Fale a respeito dos resultados encontrados (elaboração própria).

.

Neste mesmo dia, o professor Reginaldo deu sequência ao conteúdo mostrando as integrais indefinidas e algumas técnicas de integração, como por exemplo, a integração por mudança de variável, integral por partes, por substituição trigonométrica e por frações parciais. No final dessa aula, o professor proferiu algumas justificativas dizendo que este último conteúdo abordado (técnicas de integração) precisava ser reforçado em outro momento, uma vez que poucas situações foram expostas para ilustrar todos os casos, em função do curto período de tempo.

O calendário do semestre corrente estava previsto para ser encerrado no dia 24 deste mesmo mês, no entanto, em função da pandemia da COVID-19, o professor mencionou que no dia 17/03/2020 ocorreria a última aula presencial, ficando acertado que as demais atividades, incluindo a segunda prova, seriam desenvolvidas pelo SIGAA (Sistema Integrado de Gestão de Atividades

Acadêmicas) do IFPA. Neste dia (17), mais alguns exemplos sobre as técnicas de integração foram trabalhados e, na sequência, exemplos revisando o conteúdo de derivadas também foram mostrados objetivando prepará-los para a segunda prova, a qual foi aplicada no dia 19/03/2020. Ressaltamos que esta prova foi composta de 10 questões, das quais 4 foram desenvolvidas por este pesquisador (com base nas fontes citadas anteriormente), as quais estão expostas acima. As outras 6 questões foram elaboradas pelo professor da disciplina.

Essas quatro questões, mais as duas que fizeram parte da primeira atividade avaliativa, foram as 6 questões analisadas à luz da Taxonomia SOLO, e do Modelo MQ^2, as quais abordaram algum conteúdo envolvendo limites, derivadas e integral (CDI-I) e progressão geométrica, matemática financeira, funções polinomiais do 1º e 2º grau, geometria plana, dentre outros conteúdos da matemática básica. Em todas elas, alguma técnica do ensino médio pode ser utilizada para resolvê-las, no entanto, o que fundamenta o uso dessas técnicas, no ensino superior, é o Cálculo Diferencial e Integral I.

A partir do ocorrido no experimento, resolvemos entrevistar professores da Licenciatura em Matemática e da disciplina de CDI-I, além de estender o raciocínio para outras questões com abordagem semelhante ao que foi apresentado para os alunos deste experimento. Os resultados estão expostos a seguir.

4 CONTRIBUIÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DO CDI-I PARA A FORMAÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

A análise das contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação de licenciandos em Matemática será feita sob a perspectiva do conhecimento dos conteúdos dos alunos, sob a perspectiva da análise do próprio conteúdo e sob a perspectiva da fala dos professores. Procuramos aqui tornar visíveis essas contribuições, as quais são os artifícios iniciais, impulsionadores para a realização desta pesquisa.

4.1 Do ponto vista do conhecimento dos conteúdos dos licenciandos em Matemática

Para analisarmos a contribuição epistemológica do CDI-I para a formação dos licenciandos em Matemática, sob essa perspectiva, utilizamos a Taxonomia SOLO, o Modelo analítico MQ^2 e a respostas dos alunos que participaram do experimento, conforme exposto anteriormente.

Como exemplo para categorização de respostas dadas a uma questão, tomemos a situação exposta em Biggs e Collis (1982, p. 83), conforme a seguir:

Quadro 8: Exemplo para categorização de respostas dadas a uma questão

Biggs e Collis tomam um item específico de um teste, e dizem que os alunos do ensino médio até do nível superior, podem legitimamente ser solicitados a atender ao seguinte comando e explicitar seu raciocínio: Encontre o valor de Δ na seguinte expressão: $(72 \div 36) \times 9 = (72 \times 9) \div (\Delta \times 9)$.	
Respostas pré-estruturais	"Não fiz coisas assim antes, então não posso fazê-lo." "Não quero, desisti." Ambos os entrevistados indicam que não estão dispostos a se engajar na tarefa.
Respostas uni-estruturais	"36 - porque não há 36 do outro lado." "2 - porque $72/36 = 2$." Ambas as respostas levam em consideração apenas uma parte dos dados: a primeira resposta mostra uma estratégia de "conclusão padrão" de baixo nível e a segunda resposta mostra um fechamento e, em seguida, uma ignorância do restante do item. É claro que ambas as estratégias fornecem respostas "corretas" a certos itens, por exemplo, a resposta correta para o próximo item a ser discutido, a saber, $3 + 4 = 4 + \Delta$, é facilmente obtida pela primeira estratégia ou uma pequena variação no segundo.

Resposta multi-estrutural	$2 \times 9 = 18$ $\quad$ $648 \div (\Delta \times 9)$ $648 \div ? = 2$ isto é, 324 olhando para 18(2X9) Consequentemente 324 Essa resposta incorpora uma série de fechamentos aritméticos para reduzir a complexidade e focar em "Δ". No entanto, os alunos parecem ter dificuldades de manter o relacionamento geral em mente durante as sequências de fechamento e acabam se perdendo em um "labirinto" de criação própria.
Resposta relacional	$2 \times 9 = 18$ $\quad$ $648 \div (\Delta \times 9)$ $648 \div 9 = 72$ então $72 \div 4 = 18$ Consequentemente 4 Essa resposta também envolve uma sequência de fechamentos aritméticos, mas os alunos são capazes de manter em mente os relacionamentos dentro da declaração e, assim, resolver com êxito o problema.
Resposta abstrata estendida	A primeira etapa envolve obter uma visão geral dos relacionamentos entre os números e as operações envolvidas, por exemplo: $(72 \div 36) \times 9 = (72 \times 9) \div (\Delta \times 9)$ O padrão sugere algo semelhante à propriedade "distributiva" – essa hipótese é testada da seguinte maneira: $\frac{a}{b} \times y = \frac{a \times y}{b}$ Isso resolve imediatamente o problema (sem necessidade de fechamento) da seguinte maneira: $(72 \div 36) \times 9$ $= (72 \times 9) \div 36$ $= (72 \div 9) \div (4 \times 9),$ Consequentemente 4.

Fonte: Biggs e Collis (1982, p. 83-84).

Tomando a situação acima como exemplo, faremos a análise a seguir, para as respostas dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA, matriculados na disciplina de CDI-I, ao teste composto por 6 questões, levando em consideração, a fundamentação teórica oferecida pela Taxonomia SOLO e o Modelo MQ^2, conforme exposto no Capítulo 2.

O experimento exposto no Capítulo 3 tem como resultados as respostas dos participantes da empiria que serão aqui analisadas. Vale ressaltar que o teste é composto por questões provenientes de livros didáticos do ensino médio que, no entanto, para sua resolução, podem exigir, em certa medida, conhecimentos que estão vinculados à disciplina de CDI-I ou somente à Matemática Básica.

Analisamos as respostas dos $n = 26$ alunos por blocos. As respostas se categorizam no mesmo nível e se assemelham em termos de resolução.

Questão 1. Resolução:

Se $-\mathbf{1} < q < 1$, isso implica que q é um número real entre -1 e 1.

Do exposto, temos que $\boldsymbol{q^n}$ tende a 0, quanto maior for o valor de $\boldsymbol{n}$, ou seja, quando $\boldsymbol{n} \to \infty$, $\boldsymbol{q^n} \to \mathbf{0}$.

Agora, se na fórmula $\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{q^n}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{q}-\mathbf{1}}$, $\boldsymbol{q^n} \to \mathbf{0}$, quando $\boldsymbol{n} \to \infty$, então $\boldsymbol{S_\infty} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}}$, pois, $\boldsymbol{S_\infty} = \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}}$.

A questão pede para mostrar que 0,999...=1, usando esse princípio.

Temos que (0,999...= 0,9 + 0,09 + 0,009 + ...). Daqui temos que $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{0{,}9}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{\mathbf{0{,}09}}{\mathbf{0{,}9}} = \mathbf{0{,}1}$. Agora, substituindo esses valores em $\boldsymbol{S_\infty} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}}$, temos $\boldsymbol{S_\infty} = \frac{\mathbf{0{,}9}}{\mathbf{1}-\mathbf{0{,}1}} = \frac{\mathbf{0{,}9}}{\mathbf{0{,}9}}$, ou seja, $\boldsymbol{S_\infty} = \mathbf{1}$. Portanto, 0,999...=1.

Quadro 9: Conhecimentos necessários para a resolução da Questão 1

Educação Básica	**CDI-I**
• Séries; • Progressões; • Expressões numéricas; • Expressões algébricas.	• Limites; • Limites no infinito.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Questão 1 acima é resolvida por meio da demonstração da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) infinita – também conhecida como série infinita convergente – para cuja demonstração o conceito de limite é fundamental. Em seguida, identifica-se na PG o primeiro termo e a razão, construindo-se dessa forma o resultado esperado.

Os conceitos de séries e progressões são introduzidos na Educação Básica. No entanto, para o caso aqui analisado (soma dos termos de uma PG infinita), o conceito de limite é evocado e se torna de fundamental importância para o entendimento da fórmula, o que mostra dessa forma que o CDI-I tem a sua contribuição para a aprendizagem desse conteúdo na Educação Básica.

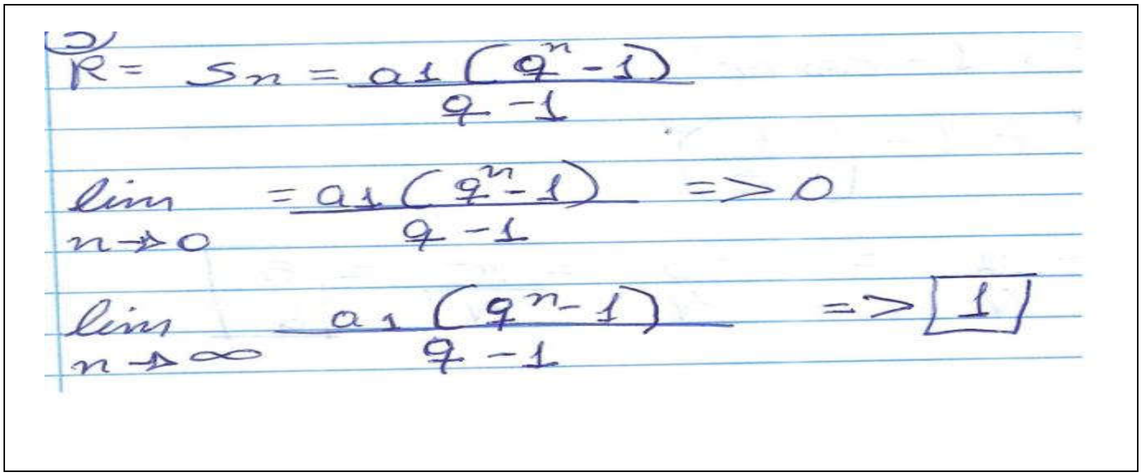
A situação nos mostra que o Licenciado em Matemática necessita desse conhecimento (limites) como ferramenta para ensinar parte do conteúdo de Progressões Geométricas na Educação Básica.

Questões semelhantes a essa são encontradas em Ribeiro (2012, p. 287), as quais solicitam que se encontre a fração geratriz de dízimas periódicas.

Observação importante: todas as questões, categorizadas em seus respectivos níveis, serão representadas com apenas uma resposta, por entender que as demais se assemelham a essa. As demais respostas de cada nível estão disponíveis no Anexo A deste trabalho.

Resolução dos alunos

Figura 6: Questão 1 - Nível 1 - 2 alunos



2)

$$R = S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\lim_{n \to 0} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \boxed{1}$$

Fonte: Respostas dos alunos.

A Taxonomia SOLO diz que o discente que não responde ao que lhe é solicitado, distraindo-se ou confundindo-se com aspectos irrelevantes pertencentes a um estágio ou modo de pensamento anterior, não previsto por essa teoria, é categorizado no nível pré-estrutural, ou seja, no nível 1. A teoria diz ainda que não há verbos relacionados ao nível PE, pois, quando apresentado a uma questão, subtende-se que o indivíduo apresente elementos irrelevantes ou incoerentes.

Como observado nas respostas dadas pelos dois alunos, expostas acima, vê-se que eles se limitam a repetir o que está no enunciado da questão, não desenvolvendo o que foi solicitado.

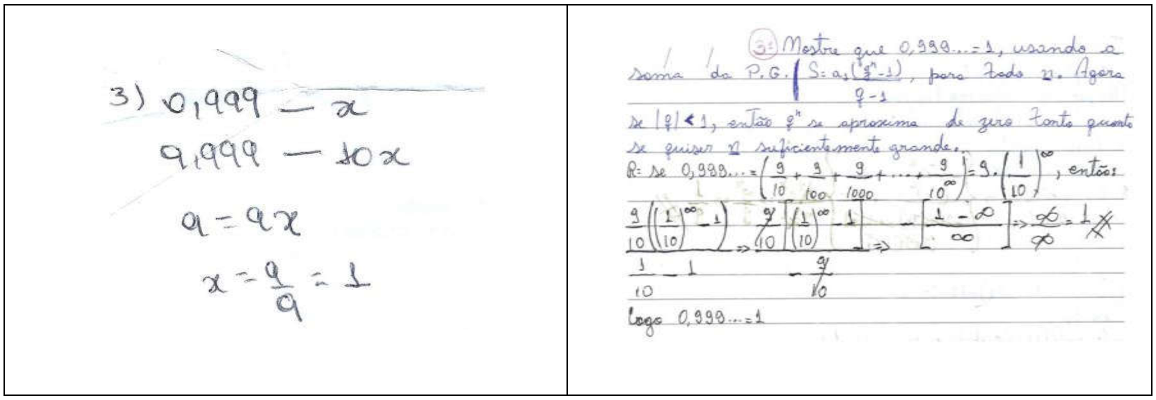
Quanto ao Modelo MQ^2, para o nível 1, $n_1 = 2$, significa que temos respostas de 2 alunos no nível 1.

$$\rho y_1 = \left(\frac{n_1}{n} . \frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{2}{26} . \frac{1}{5}\right) \rightarrow \rho y_1 = \left(\frac{2}{130}\right)$$

$$\rho y_1 = 1{,}54\%$$

Temos que 2 (dois) alunos no nível 1 contribuem com 1,54% para a questão 1 (um).

Figura 7: Questão 1 - Nível 2 – 6 alunos



Fonte: Respostas dos alunos.

A Taxonomia SOLO diz que se a resposta demonstra um elemento, informação ou ideia que responde diretamente à questão, o nível é o uni-estrutural para o entendimento, ou seja, o discente pensa de forma correta, mas como não utiliza todos os dados, obtém pouca informação e detém-se em um único aspecto relevante para a realização da tarefa. As respostas podem, por isso, ficar sem fundamento ou inconsistentes. Neste nível (UE), os verbos são “identificar e realizar um procedimento simples”, em que o respondente de uma questão demonstra um elemento, informação ou ideia que responde à questão.

Nas duas respostas, os alunos se preocuparam apenas em mostrar que 0,999...=1, não vinculando a resposta ao que foi solicitado na questão. Porém, mostram que detêm um aspecto relevante para a realização da tarefa.

Em outras quatro respostas, os alunos mostraram apenas que 0,999...= 0,9+0,09+0,009 +..., em seguida encontraram o primeiro termo e a razão da PG, substituíram na fórmula da soma geral de uma PG, e a partir daí erros conceituais foram cometidos. Dizemos que esse grupo de alunos pensou de forma correta, porém, deteve-se a um único aspecto relevante para a realização da tarefa. Em conformidade com a TS, as respostas desses alunos foram categorizadas no nível 2, uni-estrutural.

Quanto ao Modelo MQ², para o nível 2, $n_2 = 6$, significa que temos as respostas de 6 alunos no nível 2,

$$\rho y_2 = \left(\frac{n_2}{n}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{6}{26}.\frac{2}{5}\right) \rightarrow \rho y_2 = \left(\frac{12}{130}\right)$$

$$\rho y_2 = 9{,}23\%$$

Temos que 6 (seis) alunos no nível 2 contribuem com 9,23% para a questão 1 (um).

Figura 8: Questão 1 - Nível 3 – 16 alunos

COMO VAI SER UM NÚMERO ENTRE 0 E 1 EM MÓDULO, SIGNIFICA QUE VAI SER IGUAL A UMA FRAÇÃO COM NUMERADOR MENOR QUE O DENOMINADOR, PORTANTO, QUANDO ELEVAR A UM m TENDENDO AO INFINITO, SERÁ FEITO UM PRODUTO DE VÁRIOS FATORES ENTRE 0 E 1 ONDE O NÚMERO RESULTANTE FICARÁ TENDENDO A 0, POIS O PRODUTO ENTRE DOIS NÚMEROS ENTRE 0 E 1, TEM COMO RESULTADO UM NÚMERO MENOR AINDA

$$0{,}999\ldots \text{ — } x \qquad \Rightarrow \qquad 9 = 9x$$
$$9{,}999\ldots \text{ — } 10x \qquad\qquad x = \frac{9}{9} = 1$$

Fonte: Respostas dos alunos.

A Taxonomia SOLO diz que se vários elementos, informações ou ideias são incorporados na resposta, mas não há relação ou integração entre eles, o nível do entendimento é o Multi-Estrutural, ou seja, o discente foca-se em características mais importantes e corretas, mas elas não se integram totalmente, o que leva a que possam aparecer incoerências nas suas respostas. No nível ME, enumerar, descrever, fazer uma lista, combinar, fazer algoritmos, são ações recorrentes.

Dezesseis alunos responderam de forma semelhante à apresentada na Figura 6, em que é possível observar vários elementos relevantes para resolução da questão. Descrevem parte da resolução, porém não desenvolvem a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita. Em seguida, utilizam outro princípio para mostrar o que foi solicitado pela questão. Portanto, não relacionam as partes, o que categoriza – em conformidade com a TS – as respostas no nível 3, Multi-Estrutural.

Neste nível e nos anteriores, Biggs e Collis (1982) afirmam que essas respostas estão na dimensão quantitativa em função da quantidade de detalhes dado às respostas pelos alunos, e afirmam que à medida que detalhes são integrados, há uma alteração para a dimensão qualitativa.

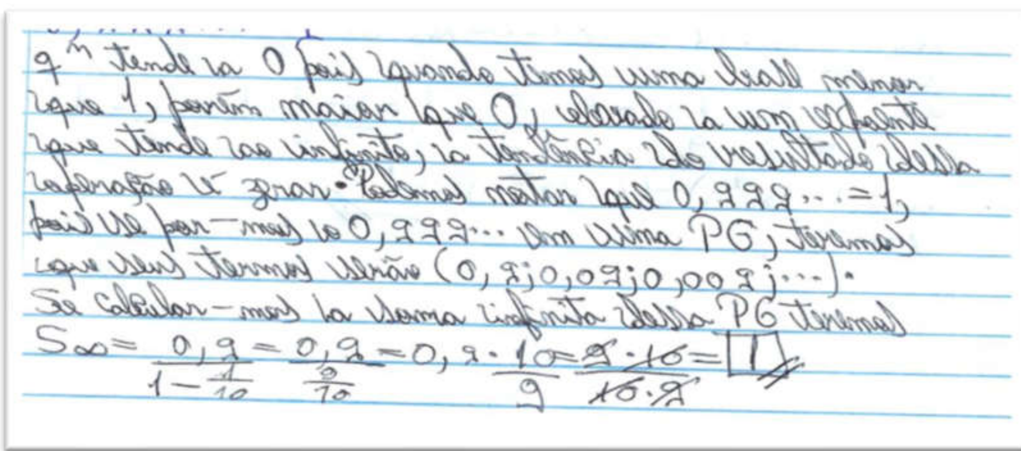
Quanto ao Modelo MQ², para o nível 3, $n_3 = 16$, significa que temos as respostas de 16 alunos no nível 3.

$$\rho y_3 = \left(\frac{n_3}{n} \cdot \frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{16}{26} \cdot \frac{3}{5}\right) \rightarrow \rho y_3 = \left(\frac{48}{130}\right)$$

$$\rho y_3 = 36{,}92\%$$

Temos que 16 (dezesseis) alunos no nível 3 contribuem com 36,92% para a questão 1 (um).

Figura 9: Questão 1 - Nível 4 – 1 aluno


q^n tende a 0 pois quando temos uma real menor que 1, porém maior que 0, elevado a um expoente que tende ao infinito, a tendência do resultado dessa operação é zero. Podemos notar que 0,999... = 1, pois se pensarmos o 0,999... como uma PG, teremos que seus termos serão (0,9; 0,09; 0,009; ...). Se calcularmos a soma infinita dessa PG teremos

$$S_\infty = \frac{0{,}9}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0{,}9}{\frac{9}{10}} = 0{,}9 \cdot \frac{10}{9} = \frac{9 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \boxed{1}$$

Fonte: Respostas dos alunos.

A Taxonomia SOLO diz que quando, além de incorporar vários elementos, fatos ou ideias, a resposta os relaciona e integra de forma coerente, o entendimento exibido está no nível Relacional, ou seja, as informações são facilmente entendidas, os dados são avaliados e as relações são estabelecidas de uma forma correta. Há um entendimento do todo e este torna-se uma estrutura coerente. Neste nível (R), as ações são comparar, contrastar, explicar causas, analisar, relacionar e aplicar.

Para a resposta acima, observamos vários elementos relevantes para resolução da questão. Por meio da comparação, o aluno visualiza que o número 0,999... é igual a 0,9+0,09+0,009 +..., que corresponde à soma dos termos de uma PG infinita, identifica 0,9 como sendo o primeiro termo da PG e 0,1, a razão. Em seguida, aplica na fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, e por fim expõe uma resolução que relaciona vários elementos, exibindo domínio em corresponder ao que lhe foi solicitado. Essa resposta expõe que há uma mudança de dimensão entre essa e as resoluções anteriores. Essa mudança, segundo a TS, é uma alteração da dimensão quantitativa para a qualitativa.

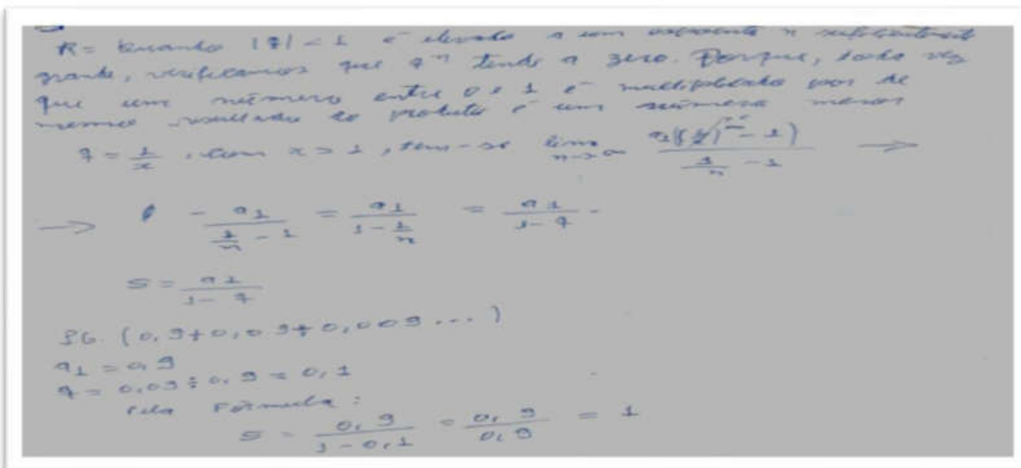
Quanto ao Modelo MQ² para o nível 4, $n_4 = 1$, significa que temos a resposta de 1 aluno no nível 4.

$$\rho y_4 = \left(\frac{n_4}{n} \cdot \frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{1}{26} \cdot \frac{4}{5}\right) \rightarrow \rho y_4 = \left(\frac{4}{130}\right)$$

$$\rho y_4 = 3{,}08\%$$

Temos que 1 (um) estudante no nível 4 contribui com 3,08% para a questão 1 (um).

Figura 10: Questão 1 - Nível 5 – 1 aluno


R= Quando |q| < 1 é elevado a um expoente n suficientemente grande, verificamos que q^n tende a zero. Porque, toda vez que um número entre 0 e 1 é multiplicado por ele mesmo, o resultado do produto é um número menor

$q = \frac{1}{x}$, com $x > 1$, tem-se $\lim_{n \to \infty}$

$S = \frac{a_1}{1-q}$

Ex. (0,9 + 0,09 + 0,009 ...)

$a_1 = 0{,}9$

$q = 0{,}09 \div 0{,}9 = 0{,}1$

Pela Fórmula:

$S = \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = \frac{0{,}9}{0{,}9} = 1$

Fonte: Respostas dos alunos.

Com relação à taxonomia SOLO, se a resposta vai além das informações da questão e exibe um nível mais alto de abstração e generalização das ideias e dos elementos em relação a outros casos, ela exibe um entendimento no nível Abstrato Estendido. Nesse nível, o discente generaliza a estrutura coerente para um plano com características mais abstratas, representando um novo e elevado modo de pensar.

No último nível (AE), “teorizar”, “generalizar”, “formalizar “hipóteses” e “refletir” são os verbos que indicam as ações necessárias para determinar o conhecimento nesse patamar. O discente exibe respostas que vão além das informações expostas na questão, chegando ao nível mais alto de abstração e generalização.

Essa resposta mostra que esse aluno vai além das respostas anteriores, por meio da generalização da razão, exibindo, por exemplo, domínio sobre a questão, além de percebermos que, qualitativamente, essa resposta se diferencia das demais.

Nessa dimensão – qualitativa – Biggs e Collis (1982) dizem que é extremamente importante que professores de matemática tenham insight - discernimento. É necessária uma investigação adicional para separar os dois níveis superiores de funcionamento, e não se basear apenas em respostas corretas.

Esse tipo de informação indica que, quando alguém se preocupa com a qualidade do pensamento em matemática, muitas vezes a obtenção da resposta correta, por si só, é quase irrelevante.

Quanto ao Modelo MQ², para o nível 5, $n_5 = 1$, significa que temos a resposta de 1 aluno no nível 5.

$$\rho y_5 = \left(\frac{n_5}{n}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{1}{26}.\frac{5}{5}\right) \rightarrow \rho y_5 = \left(\frac{5}{130}\right)$$

$$\rho y_5 = 3{,}85\%$$

Temos que 1 (um) estudante no nível 5 contribui com 3,85% para a questão 1 (um).

Calculamos agora, $\rho y(Q_1) = \frac{1}{Q}\sum_1^5 \rho y_i$, a contribuição da questão 1 para instrumento como um todo (Q = 6 questões). Assim:

$$\rho y(Q_1) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{130} + \frac{12}{130} + \frac{48}{130} + \frac{4}{130} + \frac{5}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_1) = \frac{1}{6}\left(\frac{71}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_1) = \frac{71}{780}$$

$$\rho y(Q_1) = 9{,}10\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_1) = 9{,}10\%$ corresponde à contribuição do desempenho médio dos alunos na questão 1 para o instrumento avaliativo como um todo.

O nível médio de categorização SOLO da questão 1 é dado por:

$$\rho y(Q_1)^* = \frac{1}{5}\sum_1^5 \rho y_i$$

$$\rho y(Q_1)^* = \left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{71}{130}\right) = \frac{71}{650} = 10{,}92\%$$

Multi-Estrutural – $(8\% < \rho y(Q_1) = 10{,}92\% \leq 12\%)$;

Logo, em média, os alunos mostraram que – em conformidade com a TS –, se vários elementos, informações ou ideias são incorporadas na resposta, mas não há relação ou integração entre eles, o nível de complexidade é o Multi-Estrutural, ou seja, o discente foca-se em características mais importantes e corretas, mas elas não se integram totalmente, o que leva a aparecer incoerências nas suas respostas.

Enumerar, descrever, fazer uma lista, combinar, fazer algoritmos, são ações vinculadas a esse patamar, que indicam que, até este nível, os alunos exibem um entendimento superficial para o conteúdo matemático abordado na questão.

Questão 2. Resolução:

Para o cálculo do montante temos que

$$\boldsymbol{M = C(1+i)^n}$$

Com

M = montante:

C = Capital;

i = taxa;

n = quantidade de capitalização no período.

I - Foi oferecido pelo gerente a capitalização anual, logo, $\boldsymbol{M = 1000(1+100\%)^1 = R\$\ 2000,00;}$

II – Depois, a capitalização semestral, obtendo-se $\boldsymbol{M = 1000\left(1+\frac{100\%}{2}\right)^{1.2} = R\$\ 2250,00;}$

III – Em seguida, a capitalização mensal, obtendo-se $\boldsymbol{M = 1000\left(1+\frac{100\%}{12}\right)^{1.12} = R\$\ 2.613,04;}$

IIII – Se o número de capitalizações assumir um valor muito alto, o montante será dado por:

$\boldsymbol{M = 1000\left(1+\frac{100\%}{n}\right)^{1.n}}$, com o número de capitalizações muito alto, assumimos que n tenda ao infinito, assim:

$\boldsymbol{M = \lim_{n\to\infty} 1000\left(1+\frac{100\%}{n}\right)^{1.n} = 1000.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100\%}{n}\right)^{n}}$. Considerando que $\boldsymbol{\frac{100\%}{n} = \frac{1}{n}}$, temos que $\boldsymbol{M = 1000.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$, como $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e = 2,718281\ldots}$, temos que $\boldsymbol{M = 1000.e}$, ou seja, $\boldsymbol{M = 1000.2,718281\ldots}$, de onde concluímos que o valor do montante quando o número de capitalizações assume uma quantidade muito alta, é $\boldsymbol{M = 2.718,28.}$

A pergunta de se é possível ficar rico com um número de capitalizações tendendo ao infinito em um determinado período, podemos responder que não, uma vez que parte da fórmula do montante converge para o número de Euler, o que indica que o sistema financeiro limita os ganhos de quem faz aplicações neste sistema.

Quadro 10: Conhecimentos necessários para a resolução da questão 2

Educação Básica	CDI-I
Matemática Financeira • Montante – regime de capitalização composta; • Número de Euler.	**Limites** • Limites no infinito.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A questão 2 é resolvida a partir do desenvolvimento de uma linha de raciocínio cujo padrão é desenvolvido e generalizado, tendo como ponto de partida a fórmula do montante, utilizada pelo sistema financeiro no regime de capitalização composta, culminando em um modelo matemático que pode ser utilizado para qualquer situação que se assemelhe à situação dada no problema. Observa-se no modelo que, para a resolução do problema, o conceito de limite é evocado e sem ele não se chegaria às conclusões do problema, mostrando que o CDI-I (Matemática superior) tem a sua contribuição para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Matemática Financeira que é introduzido na Educação Básica.

Nesta situação, o licenciado em Matemática necessita desse conhecimento (limites) como ferramenta para ensinar parte do conteúdo de Matemática Financeira na Educação Básica.

Obs: a partir da questão 2, as resoluções dos alunos estarão expostas no Anexo A deste trabalho. Quanto às análises realizadas à luz da Taxonomia SOLO para cada nível, a mesma se assemelha ao que foi desenvolvido na questão 1. Quanto aos cálculos efetuados por meio do Modelo MQ^2, estes estarão sintetizados em tabelas conforme exposto a seguir.

O nível médio de categorização da Questão 2, é dado por

$$\rho y(Q_2)^* = \frac{1}{5}\sum_{1}^{5}\rho y_i$$

Tabela 7: Questão 2 - Quanto ao Modelo MQ^2

C	ABSTRATO ESTENDIDO						
	Q2	**n_i**	**n**	**n_i/n**	***i***	**N**	***i*/5**
ρy_1	0,77%	1	26	0,04	1	5	0,2
ρy_2	0,00%	0	26	0,00	2	5	0,4

ρy_3	9,23%	4	26	0,15	3	5	0,6
ρy_4	0,00%	0	26	0,00	4	5	0,8
ρy_5	80,77%	21	26	0,81	5	5	1,0
$\rho y(Q_2)^*$			18,15%				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Abstrato Estendido – $(16\% \ < \rho y(Q_2)^* = 18{,}15\% \ \leq \ 20\%)$.

Em média, os alunos mostraram – em conformidade com a TS – que, se a resposta vai além das informações da questão e exibe um nível mais alto de abstração e generalização das ideias e dos elementos em relação a outros casos, ela exibe um entendimento no nível abstrato estendido. Nesse nível, o discente generaliza a estrutura de forma coerente para um plano com características mais abstratas, representando um novo e elevado modo de pensar. “Teorizar”, “generalizar”, “formalizar hipóteses” e “refletir” são os verbos que indicam as ações necessárias para determinar o conhecimento nesse patamar, indicando que os discentes exibem entendimento profundo para o conteúdo abordado na questão.

Calculamos agora $\rho y(Q_2) = \frac{1}{Q}\sum_1^5 \rho y_i$, a contribuição da questão 2 para instrumento como um todo (Q = 6 questões). Assim:

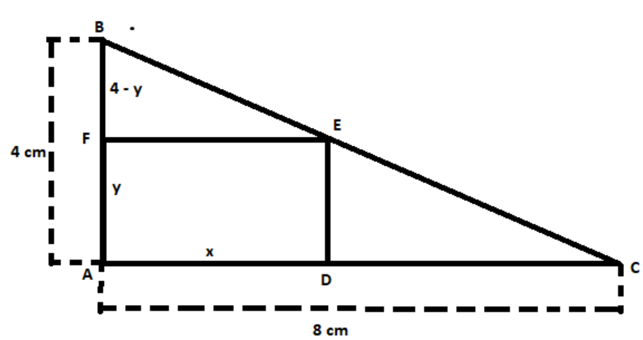
$$\rho y(Q_2) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{130} + \frac{0}{130} + \frac{12}{130} + \frac{0}{130} + \frac{105}{130}\right) \rightarrow \ \rho y(Q_2) = \frac{1}{6}\left(\frac{118}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_2) = \frac{118}{780}$$

$$\rho y(Q_2) = 15{,}13\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_2) = 15{,}13\%$ corresponde à contribuição do desempenho médio dos alunos na questão 2 para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 3. Resolução:

Geometricamente, temos:



Usando semelhança, temos que o $\nabla ABC \cong \nabla DBE$, portanto seus lados são proporcionais, ou seja,

$$\frac{8}{x} = \frac{4}{4-y} \rightarrow 4x = 8(4-y) \rightarrow 4x = 32 - 8y$$

$$8y = 32 - 4x \rightarrow \frac{8y}{8} = \frac{32}{8} - \frac{4x}{8}$$

$$y = -\frac{x}{2} + 4 \ (I)$$

A questão pede a área máxima que pode ser representada da seguinte forma:

$$A = x.y \ (II)$$

Observamos que a área está em função de x e y. Substituindo a equação I em II, tem-se que,

$$A(x) = x.\left(-\frac{x}{2} + 4\right)$$

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$$

Observamos que, agora, a área é função apenas de x. Queremos calcular x que maximiza a área, portanto, podemos fazer isso de duas formas:

Derivando $\boldsymbol{A(x)}$ e igualando a zero, usando o conceito de derivada;

Encontrando o $\boldsymbol{x}$ do vértice $(\boldsymbol{xv_v})$ da parábola, como foi visto na Educação Básica.

I – Derivando, temos que $A(x)' = -x + 4$. Fazendo $A(x)' = 0$, isso implica que $x = 4$.

Na equação $(I), y = -\frac{x}{2} + 4$, calculamos o valor de y máximo, da seguinte forma:

$$y = -\frac{4}{2} + 4 \rightarrow y = 2$$

Concluímos que a área máxima do retângulo $ADEF$ inscrito no triângulo ABC é dada por

$$A = x.y \rightarrow A = 4.2$$

$$A = 8 \, u.a.$$

II – Utilizando o x do vértice (x_v), temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

A função $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$, que representa a área é uma função polinomial do 2º grau com $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$ e $c = 0$. Substituindo a e b em $x_v = -\frac{b}{2a}$, temos:

$$x_v = -\frac{4}{2.\left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow x_v = 4$$

Na função polinomial do 2º grau, o x_v é valor que maximiza ou minimiza a função, ou seja, para esse caso, tem a mesma função da primeira derivada. Agora, $x_v = 4$ em $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$, temos que $A(4) = -\frac{4^2}{2} + 4.4$, ou seja, $A(4) = 8\, u.a.$

Quadro 11: Conhecimentos necessários para a resolução da questão 3

Educação Básica	**CDI – I**
• Interpretação da linguagem cursiva para a linguagem matemática; • Geometria plana – Triângulo e retângulo; • Semelhança • Proporcionalidade • Multiplicação de polinômios • Função polinomial do 1º e do 2º grau; • Máximo ou mínimo da função do 2º grau.	Derivada • Primeira derivada; • Problemas de otimização; • Máximo ou mínimo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A questão 3 é resolvida interpretando-se o problema da linguagem corrente para a linguagem matemática para o qual vários conceitos, tanto da matemática básica quanto da superior podem ser utilizados na resolução. O modelo matemático apresentado a partir do problema pode ser utilizado para qualquer situação que se assemelhe à situação dada.

Observa-se no modelo que, para a resolução do problema, o conceito de derivada é evocado. No entanto, para esta situação não é o único meio para se chegar ao que foi solicitado, podendo também ser utilizadas as coordenadas do vértice, conteúdo estudado na Educação Básica.

Nesta situação, o licenciado em Matemática necessita desse conhecimento (derivadas) como ferramenta que amplia o seu conhecimento, para ensinar função polinomial do 2º grau na Educação Básica, pois os conceitos de máximo ou mínimo, por exemplo, teoricamente se consolidam na disciplina de CDI-I durante o estudo dos problemas de otimização.

O nível médio de categorização da Questão 3 é dado por

$$\rho y(Q_3)^* = \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} \rho y_i$$

Tabela 8: Questão 3 – Quanto ao Modelo MQ²

C	ABSTRATO ESTENDIDO						
	Q3	**ni**	**n**	**ni/n**	**i**	**N**	**i/5**
ρy_1	0,00%	0	26	0,00	1	5	**0,2**
ρy_2	3,08%	2	26	0,08	2	5	**0,4**
ρy_3	4,62%	2	26	0,08	3	5	**0,6**
ρy_4	6,15%	2	26	0,08	4	5	**0,8**
ρy_5	76,92%	20	26	0,77	5	5	**1,0**
$\rho y(Q_3)^*$	18,15%						

Fonte: Elaborado pelo autor.

Abstrato Estendido – $16\% \ < \rho y(Q_3)^* = 18{,}15\% \ \leq \ 20\%)$

Em média, os alunos mostraram – em conformidade com a TS – que, se as respostas exibem um nível mais alto de abstração e generalização das ideias e dos elementos em relação a outros casos, ela exibe um entendimento no nível Abstrato Estendido. Nesse nível, o discente generaliza a estrutura coerente para um plano com características mais abstratas, representando um novo e elevado modo de pensar.

“Teorizar”, “generalizar”, “formalizar hipóteses” e “refletir” são os verbos que indicam as ações necessárias para determinar o conhecimento nesse patamar. Entende-se que, nessa dimensão, o aluno tenha um conhecimento profundo em relação ao tema abordado na questão.

Calculamos agora $\rho y(Q_3) = \frac{1}{Q}\sum_1^5 \rho y_i$, a contribuição da questão 3 para instrumento como um todo (Q = 6 questões). Assim:

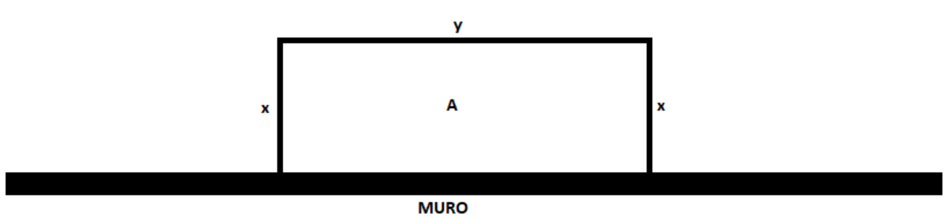
$$\rho y(Q_3) = \frac{1}{6}\left(\frac{0}{130} + \frac{4}{130} + \frac{6}{130} + \frac{8}{130} + \frac{100}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_3) = \frac{1}{6}\left(\frac{118}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_3) = \frac{118}{780}$$

$$\rho y(Q_3) = 15{,}13\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_3) = 15{,}13\%$ corresponde à contribuição do desempenho médio dos alunos na questão 3 para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 4. Resolução:

Representando a situação geometricamente, temos



Algebricamente o comprimento da corda é dado por

$y \ + \ 2x \ = \ 20$ (I)

A área A é dada por

$A = x.y$ (II)

Em (I) isolamos y e substituímos em (II) da seguinte forma:

$$y = 20 - 2x$$

$$A = x.(20 - 2x)$$

Multiplicando o monômio x pelo binômio $(20 - 2x)$, resultando em

$$A(x) = 20x - 2x^2$$

Temos que a área é uma função polinomial do segundo grau. A situação-problema pede para encontrar a área máxima, a qual pode ser calculada de duas formas:

Derivando e igualando a zero, encontramos $\boldsymbol{x}$ que maximiza a área

$$\boldsymbol{A(x)' = 20 - 4x \rightarrow 20 - 4x = 0}$$

$$-4x = -20 \rightarrow x = 5$$

Agora, substituindo $x = 5$ em $y = 20 - 2x$, temos $y = 10$. Como $A = x.y$, isso implica que a área máxima é dada por $A = 5.10 = 50u.a.$

Utilizando o $\boldsymbol{x}$ do vértice $(\boldsymbol{x_v})$, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

A função $A(x) = 20x - 2x^2$, que representa a área é uma função polinomial do 2º grau com $a = -2$, $b = 20$ e $c = 0$. Substituindo a e b em $x_v = -\frac{b}{2a}$, temos:

$$x_v = -\frac{20}{2.(-2)} \rightarrow x_v = 5$$

Na função polinomial do 2º grau o x_v é o valor que maximiza ou minimiza a função. Para esse caso, tem a mesma função da primeira derivada. Agora, substituindo $x_v = 5$ em $A(x) = 20x - 2x^2$, temos que $A(5) = 20.5 - 2.5^2$, ou seja, $A(5) = 50\ u.a.$

Quadro 12: Conhecimentos necessários para a resolução da questão 4

Educação Básica	**CDI-I**
• Interpretação da linguagem cursiva para a linguagem matemática; • Geometria plana - Triângulo e retângulo; • Semelhança; • Proporcionalidade; • Multiplicação de polinômios; • Função polinomial do 1º e do 2º grau; • Máximo ou mínimo da função do 2º grau.	Derivada • Primeira derivada; • Problemas de otimização; • Máximo ou mínimo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quanto à Interconexão, entendemos que haja conteúdos que permeiam os dois universos da matemática (básica e superior), objeto de estudo deste trabalho. A questão 4 é resolvida interpretando-se o problema da linguagem corrente para a linguagem matemática para o qual vários conceitos, tanto da matemática básica quanto da superior podem ser utilizados na resolução. O modelo matemático apresentado a partir do problema pode ser utilizado para qualquer situação que se assemelhe à situação dada.

Observa-se no modelo que, para a resolução do problema, o conceito de derivada é evocado. No entanto, para esta situação, não é o único meio para se chegar ao que foi solicitado, podendo também utilizar-se das coordenadas do vértice, conteúdo estudado na educação básica.

Fica evidente nesta situação que o licenciado em Matemática necessita desse conhecimento (derivadas) como ferramenta que amplia o seu conhecimento, para ensinar função polinomial do 2º grau na Educação Básica, pois, os conceitos de máximo ou mínimo se consolidam na disciplina de CDI-I durante o estudo dos problemas de otimização.

O nível médio de categorização da Questão 4 é dado por

$$\rho y(Q_4)^* = \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} \rho y_i$$

Tabela 9: Questão 4 - Quanto ao Modelo MQ²

C	RELACIONAL						
	Q4	**ni**	**n**	**ni/n**	**i**	**N**	**i/5**
ρy_1	0,77%	1	26	0,04	1	5	**0,2**
ρy_2	7,69%	5	26	0,19	2	5	**0,4**
ρy_3	20,77%	9	26	0,35	3	5	**0,6**
ρy_4	15,38%	5	26	0,19	4	5	**0,8**
ρy_5	23,08%	6	26	0,23	5	5	**1,0**
$\rho y(Q_4)^*$	13,54%						

Fonte: Elaborado pelo autor.

Relacional – $(12\% < \rho y(Q_4)^* = 13,54\% \leq 16\%)$.

Além de incorporar informações, elementos ou ideias e relacioná-los entre si, tornando as respostas coerentes com o que foi solicitado, em média, os alunos mostraram ter entendido as informações e estabelecido as relações necessárias para que suas respostas sejam categorizadas neste nível.

Calculamos agora, $\rho y(Q_4) = \frac{1}{Q}\sum_1^5 \rho y_i$, a contribuição da questão 4 para instrumento como um todo (Q = 6 questões). Assim:

$$\rho y(Q_4) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{130} + \frac{10}{130} + \frac{27}{130} + \frac{20}{130} + \frac{30}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_4) = \frac{1}{6}\left(\frac{88}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_4) = \frac{88}{780}$$

$$\rho y(Q_4) = 11{,}28\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_4) = 11{,}28\%$ corresponde à contribuição do desempenho médio dos alunos na questão 4 para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 5. Resolução

I – Determinamos a função f, utilizando a equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ - (I) ou a função polinomial do primeiro grau $y = ax + b$ - (II).

Utilizando a equação (I), calculamos o coeficiente angular substituindo as coordenadas dos pontos A e B. Em seguida, com as coordenadas de um dos pontos, chegamos à equação reduzida da reta que representa a função f. Dessa forma, temos

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow m = \frac{4-2}{3-0} \rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

Integrando a função f no intervalo $[0, 3]$, temos que a área será dada por:

$$A = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x + 2\right)dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^2 + 2x\right]_0^3 = \left[\frac{1}{3}3^2 + 2.3\right] - \left[\frac{1}{3}0^2 + 2.0\right]$$

$$A = 3 + 6 \rightarrow A = 9\, u.a.$$

Utilizando a fórmula do trapézio, temos

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(4+2).3}{2} \rightarrow$$

$$A = 9\, u.a.$$

Concluímos que o cálculo de área de figuras básicas (quadrado, retângulo, trapézio, losango e o círculo) pode ser feito utilizando tanto o conhecimento da geometria plana quanto da integral definida, a qual se estende para o cálculo de área de figuras planas irregulares formadas a partir da região compreendida entre uma função f e o eixo x, por exemplo.

Quadro 13: Conhecimentos necessários para a resolução da questão 5

Educação Básica	CDI-I
Geometria analítica • Equação fundamental da reta; • Coeficiente angular da reta; • Função polinomial do 1º grau; Geometria plana • Trapézio – cálculo da área.	Integrais • Teorema fundamental do cálculo; • Integral definida; • Cálculo de área.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A questão 5 é resolvida representando-se algebricamente o que está posto na forma geométrica. Em seguida, vários conceitos, tanto da matemática básica quanto da superior podem ser utilizados na resolução. O modelo matemático apresentado a partir do problema pode ser utilizado para qualquer situação que se assemelhe à situação dada.

Observa-se no modelo que, para a resolução do problema, o conceito de integral é evocado. No entanto, para esta situação não é o único meio para se chegar ao que foi solicitado, podendo também utilizar-se da fórmula do trapézio – geometria plana –, conteúdo estudado na Educação Básica.

Nesta situação, o licenciado em Matemática necessita desse conhecimento (integrais definidas) como ferramenta que amplia o seu conhecimento, para ensinar o cálculo de área de figuras planas, uma vez que o conceito de área se estende para as figuras não regulares, e que teoricamente se consolidam na disciplina de CDI-I durante o estudo das integrais definidas.

O nível médio de categorização da Questão 5, é dado por

$$\rho y(Q_5)^* = \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} \rho y_i$$

Tabela 10: Questão 5 - Quanto ao Modelo MQ²

C	RELACIONAL						
	Q5	**ni**	**n**	**ni/n**	**i**	**N**	**i/5**
ρy_1	0,00%	0	26	0,00	1	5	**0,2**
ρy_2	0,00%	0	26	0,00	2	5	**0,4**
ρy_3	18,46%	8	26	0,31	3	5	**0,6**
ρy_4	55,38%	18	26	0,69	4	5	**0,8**
ρy_5	0,00%	0	26	0,00	5	5	**1,0**
$\rho y(Q_5)^*$	14,77%						

Fonte: Elaborado pelo autor.

Relacional – $12\% < \rho y(Q_5)^* = 14{,}77\% \leq 16\%)$.

Além de incorporar informações, elementos ou ideias e relacioná-los entre si, tornando as respostas coerentes com o que foi solicitado, em média, os alunos mostraram ter entendido as informações e estabelecido as relações necessárias para que suas respostas sejam categorizadas neste nível.

Calculamos agora $\rho y(Q_5) = \frac{1}{Q}\sum_1^5 \rho y_i$, a contribuição da questão 5 para instrumento como um todo (Q = 6 questões). Assim:

$$\rho y(Q_5) = \frac{1}{6}\left(\frac{0}{130} + \frac{0}{130} + \frac{24}{130} + \frac{72}{130} + \frac{0}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_5) = \frac{1}{6}\left(\frac{96}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_5) = \frac{96}{780}$$

$$\rho y(Q_5) = 12{,}31\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_5) = 12{,}31\%$ corresponde à contribuição do desempenho médio dos alunos na questão 5 para o instrumento avaliativo como um todo.

Questão 6. Resolução

Vamos encontrar f usando a função polinomial do primeiro grau $y = ax + b$ - (II), utilizando as coordenadas dos pontos A e B, chegando à função f. Dessa forma, temos

Pelas coordenadas do ponto $\boldsymbol{A(-2, 0)}$, temos

$$0 = a.(-2) + b \rightarrow$$

$$-2a + b = 0 \ (i)$$

Pelas coordenadas do ponto $\boldsymbol{B(0, 4)}$, temos

$$4 = a.0 + b \rightarrow$$

$$b = 4 \ (ii)$$

Agora, substituindo (ii) em (i), temos

$$-2a + 4 = 0 \rightarrow$$

$$a = 2$$

Assim, $f(x) = 2x + 4$.

Vamos encontrar g usando a função polinomial do primeiro grau $y = ax + b$ - (II), utilizando as coordenadas dos pontos A e B, chegando à função g. Dessa forma, temos

Pelas coordenadas do ponto $\boldsymbol{B(0, 4)}$, temos

$$= \boldsymbol{a.0 + b} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{b = 4\ (i)}$$

Pelas coordenadas do ponto $\boldsymbol{C(4, 0)}$, temos

$$\mathbf{0 = a.4 + b} \rightarrow$$

$$\mathbf{4a + \ b = 0}\ (\boldsymbol{ii})$$

Agora, substituindo (i) em (ii), temos

$$\mathbf{4a + 4 = 0} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{a = -1}$$

Assim, $g(x) = -1x + 4$.

A área do triângulo usando a integral definida será dada por:

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} g(x)dx \rightarrow$$

$$A = \int_{-2}^{0} (2x + 4)dx + \int_{0}^{4} (-1x + 4)dx \rightarrow$$

$$A = [x^2 + 4x] \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^4 \rightarrow$$

$$A = \{[0^2 + 4.0] - [(-2)^2 + 4.(-2)]\} + \left\{\left[-\frac{1}{2}4^2 + 4.4\right] - \left[\frac{1}{2}0^2 + 2.0\right]\right\}$$

$$A = \{[0] - [4 - 8)]\} + \{[-8 + 16] - [0]\}$$

$$A = \{4\} + \{8\}$$

$$A = 12\ u.a.$$

A área, usando a fórmula do triângulo definida em geometria plana, será dada por:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Na figura, a base varia de -2 a 4 no eixo x, ou seja, $4 - (-2) = 6$, portanto, $b = 6$. A altura varia no eixo y, de 0 a 4, ou seja, $h = 4$. Aplicando na fórmula, temos,

$$A = \frac{6.4}{2}$$

$$A = 12\ u.a.$$

Concluímos que o cálculo de área de figuras básicas (quadrado, retângulo, trapézio, losango e o círculo) pode ser feito utilizando tanto o conhecimento da geometria plana quanto da integral definida, o qual se estende para o cálculo de área de figura planas irregulares formadas a partir da região compreendida entre uma função f e o eixo x, por exemplo. Dizemos ainda que, mesmos aplicando conceitos que se encontram em contextos matemáticos diferentes, este conceitos podem ser utilizados com a mesma finalidade.

Quadro 14: Conhecimentos necessários para a resolução da questão 5

Educação Básica	**CDI-I**
Geometria analítica • Equação fundamental da reta; • Coeficiente angular da reta; • Função polinomial do 1º grau; Geometria plana • Triângulo – cálculo da área.	Integrais • Teorema fundamental do cálculo; • Integral definida; • Cálculo de área.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A questão 6 é resolvida representando algebricamente o que está posto na forma geométrica. Em seguida, vários conceitos, tanto da matemática básica quanto da superior podem ser utilizados na resolução. O modelo matemático apresentado a partir do problema pode ser utilizado para qualquer situação que se assemelhe à situação dada.

Observa-se no modelo que, para a resolução do problema, o conceito de integral é evocado. No entanto, para esta situação, não é o único meio para se chegar ao que foi solicitado, podendo também utilizar-se da fórmula do trapézio – geometria plana -, conteúdo estudado na Educação Básica.

Fica evidente nesta situação que o licenciado em Matemática necessita desse conhecimento (integrais definidas) como ferramenta que amplia o seu conhecimento, para ensinar o cálculo de área de figuras planas, uma vez que o conceito de área se estende para as figuras não regulares, e se consolida na disciplina de CDI-I durante o estudo das integrais definidas.

O nível médio de categorização da Questão 6, é dado por

$$\rho y(Q_6)^* = \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} \rho y_i$$

Tabela 11: Questão 6 - Quanto ao Modelo MQ2

C	**RELACIONAL**						
	Q6	**ni**	**n**	**ni/n**	**i**	**N**	**i/5**
ρy_1	0,00%	0	26	0,00	1	5	**0,2**
ρy_2	1,54%	1	26	0,04	2	5	**0,4**
ρy_3	16,15%	7	26	0,27	3	5	**0,6**
ρy_4	49,23%	16	26	0,62	4	5	**0,8**
ρy_5	7,69%	2	26	0,08	5	5	**1,0**
$\rho y(Q_6)^*$	14,92%						

Fonte: Elaborado pelo autor

Relacional – $12\% < \rho y(Q_6)^{*} = 14{,}77\% \ \leq \ 16\%)$.

Calculamos agora $\rho y(Q_6) = \frac{1}{Q}\sum_{1}^{5} \rho y_i$, a contribuição da questão 6 para instrumento como um todo (Q = 6 questões). Assim:

$$\rho y(Q_6) = \frac{1}{6}\left(\frac{0}{130} + \frac{1}{130} + \frac{21}{130} + \frac{64}{130} + \frac{10}{130}\right) \rightarrow \ \rho y(Q_6) = \frac{1}{6}\left(\frac{96}{130}\right) \rightarrow \rho y(Q_6) = \frac{96}{780}$$

$$\rho y(Q_6) = 12{,}31\%$$

Concluímos que $\rho y(Q_6) = 12{,}31\%$ corresponde à contribuição do desempenho médio dos alunos na questão 6 para o instrumento avaliativo como um todo.

Para calcularmos ρy (indicador qualitativo) – o desempenho médio dos alunos frente ao instrumento avaliativo –, usamos as contribuições epistemológicas dos desempenhos em cada questão, $\rho y = \sum_{1}^{m} \rho y(Q_j)$, com $1 \leq j \leq 6$. Assim, temos que o instrumento avaliativo como um todo fica categorizado da seguinte forma:

$$\rho y = \sum_{1}^{m} \rho y(Q_j) \rightarrow$$

$$\rho y = \sum_{1}^{6} \rho y(Q_j) = [\rho y(Q_1) + \rho y(Q_2) + \rho y(Q_3) + \rho y(Q_4) + \rho y(Q_5) + \rho y(Q_6)] \rightarrow$$

$$\rho y = \ \left[\frac{71}{780} + \frac{118}{780} + \frac{118}{780} + \frac{88}{780} + \frac{96}{780} + \frac{96}{780}\right] \rightarrow$$

$$\rho y = \ \left[\frac{587}{780}\right] \rightarrow$$

$$\rho y = \ 75{,}26\%$$

Para o instrumento avaliativo aplicado aos discentes do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA/Belém, matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no segundo semestre de 2019, o desempenho médio dos participantes no experimento é de $\rho y = 75{,}26\%$. Dizemos que este desempenho está categorizado, em conformidade com a Taxonomia SOLO, no nível Relacional (R).

Relacional – $(60\% \ < \rho y = 75{,}26\% \leq \ 80\%)$

Isso significa que, em geral, se as respostas dos alunos, quando além de incorporar vários elementos, fatos ou ideias, relaciona-os e os integra de forma coerente, o entendimento exibido está no nível Relacional, ou seja, as informações são facilmente entendidas, os dados são avaliados e as relações são estabelecidas de uma forma correta. Há um entendimento do todo e este torna-se uma estrutura coerente. As ações vinculadas a este nível são comparar, contrastar, explicar causas, analisar, relacionar e aplicar.

Vale ressaltar que Biggs e Collis (1982, p. 86) dizem que a categorização orientada pela Taxonomia SOLO não se dá em função da dificuldade oferecida por uma questão, mas pela complexidade de abstração inerente às situações apresentadas nelas.

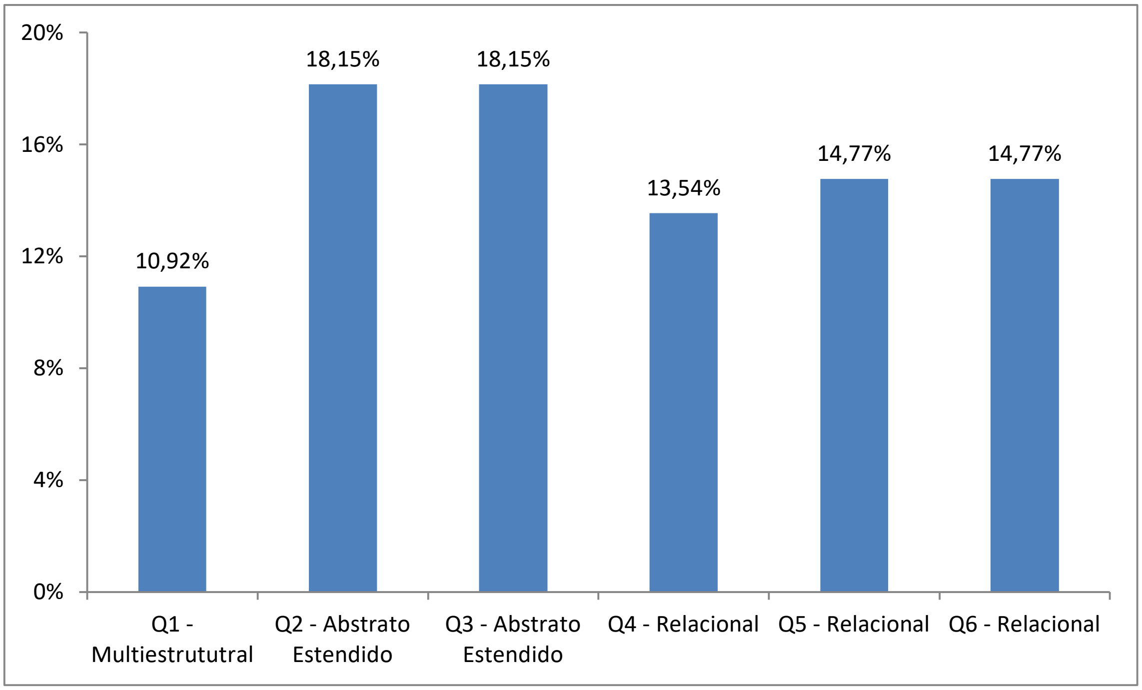
A exposição acima mostra que foi calculado ρy (indicador qualitativo) – desempenho do aluno no instrumento –, a primeira parte do modelo $E = \rho y . \rho x$.

Para ρx (indicador quantitativo) – o rendimento dos estudantes matriculados na disciplina CDI-I –, temos que 26 alunos participaram do experimento, dos quais todos foram aprovados na disciplina. Assim, $\rho x = \frac{x}{n} \rightarrow \rho x = \frac{26}{26}$, mostrando um rendimento $\rho x = 100\%$. Assim "E", o nível do indicador de qualitativo/quantitativo de contribuição da disciplina CDI-I para o curso é dado por $E = 75{,}26\% . 100\% \rightarrow E = 75{,}26\%$.

Conforme indicado por Figueiredo (2017), se $0{,}75 < E = 75{,}26 \leq 1$, então o grupo de alunos está posicionado no nível satisfatório. O autor afirma que, no caso de "E" atingir esse nível, é necessário verificar a regularidade das finalidades – que, em nosso caso, são as contribuições –, para que ajustes necessários sejam efetuados no ensino dos conteúdos cobrados em cada questão.

Em suma, o comportamento dos alunos em cada questão está apresentado no Gráfico 4 a seguir, o qual mostra que a primeira questão que remete ao conteúdo de limites (CDI-I) e progressões geométricas (Matemática Básica) expõe que houve alguma dificuldade de compreensão nesses conteúdos para a resolução dessa questão, uma vez que os alunos exibiram respostas em um nível de conhecimento superficial. As demais exibem resultados que, conforme a TS, estão categorizados nos níveis de complexidade mais desejado, uma vez que nessas questões (Q2 a Q6), os alunos encontram-se no nível profundo (R e AE) em termos de complexidade.

Gráfico 4: Comportamento do “$\boldsymbol{E}$” em cada questão na escala da TS

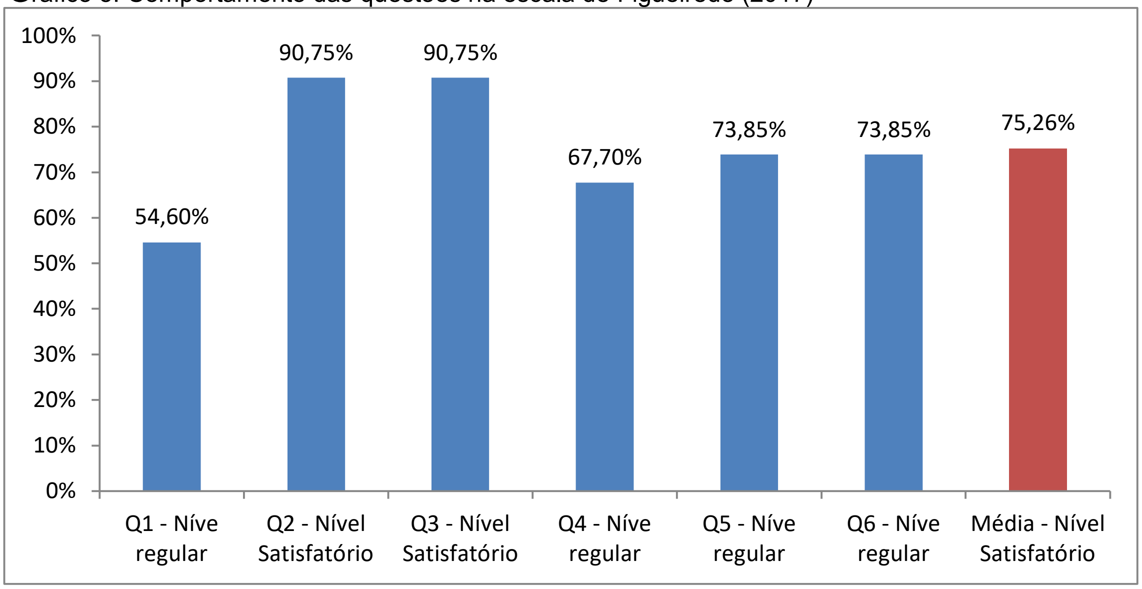


Fonte: Elaborado pelo autor

Transformando os resultados do Gráfico 4 acima – fazendo $5.E$ – para a escala de Figueiredo (2017), observamos no Gráfico 5, a seguir, que em nenhuma das questões os alunos se posicionaram em níveis inferiores ao regular. Em média, o grupo de alunos está no nível satisfatório, no entanto, as questões Q1, Q4, Q5 e Q6 mostram que para a finalidade do instrumento, as respostas dos alunos para as mesmas estão no nível regular. Isso indica que algum posicionamento deve ser tomado, no sentido de fazer com que os alunos melhorem seus conhecimentos na direção dos conteúdos abordados nessas questões, uma vez que elas tratam sobre conhecimentos de conteúdo do ensino médio, que podem ser resolvidas tanto utilizando conhecimentos do próprio ensino médio, como também utilizando o CDI-I como ferramenta, o qual pode ampliar a visão de quem o domina, e que por conseguinte o utilizará para melhorar suas práticas laborais na Educação Básica.

As questões componentes do nosso experimento, apresentadas aos alunos da Licenciatura em Matemática, foram assim escolhidas, por entendermos que elas fazem interconexões entre o CDI-I e a Matemática Básica. Portanto, no formato em que se desenvolveu o experimento, observamos que o CDI-I, do ponto de vista do conhecimento dos alunos a partir dos resultados apresentados, traz contribuições epistemológicas que poderão fundamentar a sua prática, uma vez que essas questões contribuem para a significação da disciplina, como componente curricular que tem como uma das finalidades formar professores de matemática para atuarem na Educação Básica.

Gráfico 5: Comportamento das questões na escala de Figueiredo (2017)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Figueiredo (2017).

Até aqui apresentamos as contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação de alunos da Licenciatura em Matemática, na perspectiva do conhecimento desses alunos em relação a alguns conteúdos da referida disciplina.

Cabe ressaltar que a teoria utilizada para gerar esses resultados, a Taxonomia SOLO – além do Modelo MQ^2 desenvolvido nesta pesquisa –, mostra-se como uma ferramenta muito importante, não só para o desenvolvimento dessa pesquisa, mas também como algo que pode ser utilizado no dia a dia em sala de aula, visto que ela pode servir de suporte para a construção e análise de instrumentos avaliativos, que, como visto em nosso trabalho, prezem por uma análise em que os níveis de categorização dado a determinadas respostas não estão preocupados com o resultado final da questão (certo ou errado), mas sim com o processo, ou seja, como um determinado aluno responde a uma determinada questão, olhando para cada passo por ele desenvolvido.

Além do exposto, o Modelo MQ^2 aqui apresentado, pode servir de ferramenta para mensurar questões subjetivas de testes aplicados a alunos de qualquer que seja o nível de escolaridade, uma vez que, dentro do currículo, não encontramos parâmetros para mensurar (dar nota) a uma questão discursiva.

Em síntese, observamos que o resultado apresentado pelos 26 alunos que participaram do experimento nos levou à conclusão de que, em média, o comportamento dos estudantes em termos de conhecimento do conteúdo foi satisfatório.

Entendemos que esse resultado pode ter sido impulsionado pelo modelo de questões que lhes foi apresentado, uma vez que estas questões estão relacionadas a conteúdos da Matemática Básica que evocam, para as suas resoluções, algumas ideias básicas do CDI-I ou os próprios conteúdos da Matemática Básica, as quais exibem interconexões as matemáticas supracitadas. Assim, concluímos que, sob esse ponto de vista, o CDI-I mobiliza contribuições epistemológicas relevantes para a formação dos alunos da Licenciatura em Matemática, proporcionando significado àquilo que fazem, àquilo para o qual estão se formando, uma vez que o conhecimento do conteúdo é fator primordial para que o ensino seja desenvolvido de forma satisfatória.

Abordaremos a seguir sobre essa mesma contribuição tratada anteriormente, levando em consideração os próprios conteúdos dessa disciplina, incentivados pelas questões do experimento.

4.2 Do ponto de vista do conteúdo da disciplina

Neste tópico, abordamos algumas situações em que o CDI-I pode servir de fundamentação para desenvolver alguns conteúdos da Matemática da Educação Básica. O propósito é mostrar algumas interconexões existentes entre o CDI-I e a MB que podem ser utilizadas pelo professor da Licenciatura em Matemática, para dar motivação ou melhorar a significação do conteúdo da disciplina.

Tomando como referência algumas ideias fundamentais do CDI-I, Rezende (2020), em busca de uma identidade para o curso superior de Cálculo, diante das circunstâncias por ele apresentadas, afirma que

> O conteúdo do Cálculo não se resume na sequência limite-continuidade-derivada-integral; ao contrário, esse conteúdo está situado dentro do intervalo histórico que vai de Leibniz à primeira fase de Cauchy; definição formal de limite e os resultados frutos do processo de aritmetização desenvolvido por Weierstrass é Análise Real. Os conceitos básicos do Cálculo são as

> operações de diferenciação, de integração e o Teorema Fundamental do Cálculo, sejam esses conceitos e resultados desenvolvidos a partir da noção de limite ou de infinitesimal. A fundamentação da operação de limite é do âmbito da Análise Real, e a da noção de infinitesimal, da Análise Não Standard. Cálculo é Cálculo! E não, Análise. Concordo com os professores Ávila e Baldino: o significado, o sentido dos resultados deve prevalecer sobre a sua justificação lógica. A discussão de ideias vale muito mais que a apresentação / reprodução da demonstração de um resultado matemático: "é assim que se faz matemática" — disse o professor Djairo. A relação do Cálculo com outras áreas do conhecimento não deve ser realizada apenas em termos de aplicações e no final do processo de construção de seus conceitos básicos; tal relação deve ser antecipada, ser o carro-chefe das ideias geradoras dos conceitos básicos do Cálculo. A noção de velocidade, por exemplo, não é meramente uma aplicação do conceito de derivada; velocidade é, isto sim, um dos principais elementos (REZENDE, 2020, p. 110).

Observamos aqui, algumas sugestões de como o cálculo deve ser desenvolvido. Portanto, nesta mesma perspectiva, e também na busca de melhorar os significados para esta disciplina, procuramos implementar algumas ideias básicas do Cálculo Diferencial e Integral I para os alunos da Licenciatura em Matemática. Para isso, começamos por utilizar os casos abordados nas questões constituintes do nosso experimento e estender o raciocínio para mais algumas situações que têm o mesmo propósito, isto é, o de mostrar contribuições do CDI-I para a formação de futuros professores da Matemática Básica, e por conseguinte expor indícios de interconexões entre a MB e o CDI-I do ponto de vista do conteúdo.

A primeira questão do nosso experimento pede para mostrar que a dízima periódica 0,999... é igual a 1, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita. Mas como explicar para o aluno do ensino médio o uso dessa técnica? Claro que a fórmula da soma dos termos da PG infinita surge a partir da soma dos termos de uma PG finita, dada uma condição específica, conforme exposto a seguir.

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, com a_1 sendo o primeiro termo da PG e q, a razão.

No livro voltado para o ensino médio (PAIVA, 2015), encontramos a seguinte demonstração para a soma dos termos de um PG infinita.

Consideremos a PG infinita $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$. Admitindo que, sob essa condição, existe a soma S_∞ dos infinitos termos da PG, temos:

$$S_\infty = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \cdots \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando por q ambos os membros desta igualdade, obtemos:

$$qS_\infty = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \cdots \qquad \text{(II)}$$

Subtraímos, membro a membro, as igualdades (I) e (II):

$$S_\infty - qS_\infty = a_1$$

Fatoramos o primeiro membro e concluímos:

$$S_\infty(1-q) = a_1 \rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{(1-q)}$$

Outra abordagem é feita em outro livro voltado para o ensino médio (RIBEIRO, 2012), que considera a PG infinita $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$. Admitindo que, sob essa condição, existe a soma S_∞ dos infinitos termos da PG, e sabendo que a soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos de uma PG finita é dada por $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ para todo n, então q^n se aproxima de 0 tanto quanto se queira $\boldsymbol{n}$ suficientemente grande.

Como $-1 < q < 1$, isso implica que q é um número real entre -1 e 1.

Do exposto, temos que q^n tende a 0, quanto maior for o valor de n, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, $q^n \rightarrow 0$.

Agora, se na fórmula $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, $q^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, pois, $S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Portanto, duas abordagens são consideradas no ensino médio para justificar o uso da fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG. Entende-se a primeira como uma demonstração técnica sem pré-requisito, e a segunda, mais teórica, – tendo como pano de fundo a soma de uma PG finita – que explicita o uso de limites, o qual tem seus conceitos abordados na disciplina de CDI-I que, para quem pretende ser professor de matemática, é estudado especificamente na Licenciatura em Matemática.

A segunda questão do experimento solicita que aluno calcule o montante, se o número de capitalizações assumisse um valor muito alto, e se é possível ficar rico com o número de capitalizações tendendo ao infinito no período determinado.

O enunciado da questão leva o aluno a desenvolver a fórmula do montante generalizada para situações que se assemelham a essa, conforme exposto a seguir.

$M = C.\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com M igual ao montante, C sendo o capital inicial e n o número de capitalizações em determinado período. Em M, fazendo n o número de capitalizações tender ao infinito no período determinado, temos,

$M = C.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow M = C.e,$ com $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, conhecido como o número de Euler, que tem sua origem relacionada a problemas financeiros, conforme exposto em Precioso e Pedroso (2013) e largamente utilizado de forma técnica no estudo de logaritmos no ensino médio. O número e é justificado teoricamente na disciplina CDI-I, durante os estudos sobre limites, mais especificamente sendo este (e) um limite fundamental exponencial, na Licenciatura em Matemática, em que tem seus conceitos abordados diretamente para quem pretende ser professor de matemática.

As questões 3 e 4 solicitam dos alunos que calculem a área máxima para cada situação. Em ambas, são modeladas funções polinomiais do 2º grau, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dessa maneira, para calcular o máximo de $f,$ podem-se utilizar as coordenadas do vértice – como se desenvolve no ensino médio – ou derivar a função e igualar a zero, como é feito na disciplina de CDI-I.

É claro que as coordenadas do vértice são uma técnica utilizada quando questões desse tipo são apresentadas a alunos no ensino médio. No ensino superior, para ser mais preciso na disciplina de CDI-I, justifica-se a utilização dessa técnica, como exposto a seguir.

As coordenadas do vértice de uma parábola ou função polinomial do 2º grau são dadas por $V(X_v, Y_v)$, com $X_v = \frac{-b}{2a}\ e\ Y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Na disciplina de CDI-I, essas coordenadas são calculadas derivando a função polinomial do 2º grau e igualando a derivada a zero, da seguinte forma: $f(x) = ax^2 + bx + c,$ logo a sua derivada é dada por $f(x)' = 2ax + b$. Igualando $f(x)'$ a zero, temos $2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$, o valor no eixo x que maximiza a função f. Agora substituindo $x = \frac{-b}{2a}$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c,$ temos

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \rightarrow$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \rightarrow$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \rightarrow$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Portanto, $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ são as coordenadas do ponto de máxima ou mínimo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, as coordenadas do vértice.

As questões 5 e 6 solicitam o cálculo das áreas limitadas por funções e o eixo, com x em um determinado intervalo (a, b), por meio da integral definida e as fórmulas do trapézio e triângulo respectivamente. Especificamente, essas duas situações mostram que tanto a geometria plana como a integral definida são capazes de nos oferecer ferramentas para cumprir com o que foi solicitado.

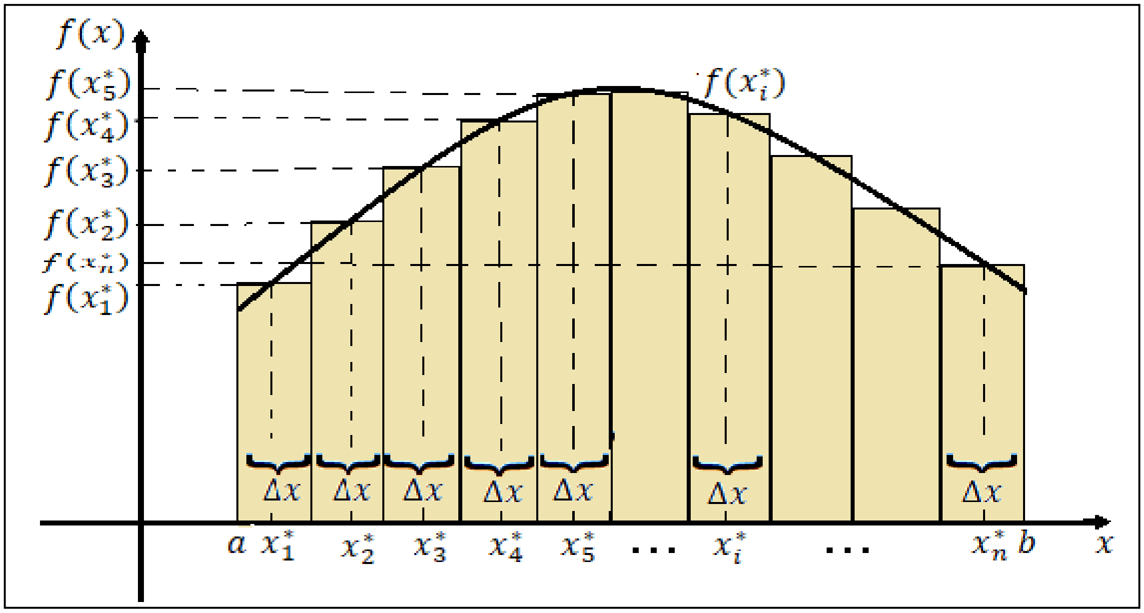
O conhecimento de cálculo de área da geometria plana estudada na Educação Básica fundamenta a generalização para o cálculo de área de qualquer figura plana, por meio da definição de integral utilizando as somas de Riemann, exposto em Stewart (2013), conforme definição de integral a seguir.

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Sejam $x_o(= a), x_1, x_2, \dots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos e sejam $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo. Então, a integral definida de f de a a b é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que é integrável em $[a, b]$.

Figura 11: Representação geométrica da integral definida



Fonte: Elaborado pelo autor no software Paint a partir de Stewart (2013).

A área limitada pela função f e o eixo x no intervalo $[a, b]$, quando n tende ao infinito $(n \to \infty)$ é dada como exposto a seguir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x +, \dots, + f(x_n^*)\Delta x\,],$$

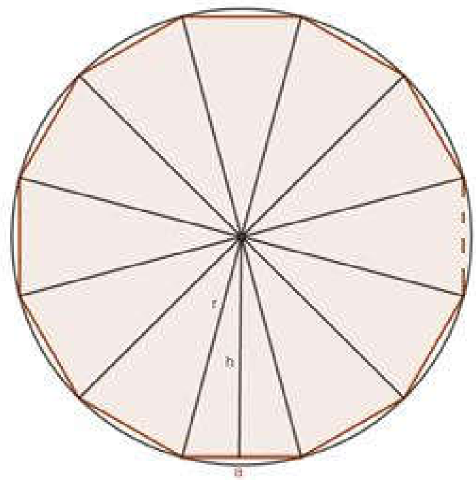
em que cada parcela do somatório representa um retângulo de base Δx e altura $f(x_i^*)$, cuja área é dada por $\Delta x. f(x_i^*)$. Vamos supor que um aluno da Educação Básica, seja do ensino fundamental ou do ensino médio, dirija-se ao seu professor durante a aula de cálculo de área em geometria plana e pergunte: como fazer para calcular a área de figuras formadas por curvas, ou seja, que não são nenhuma das que estão expostas – quadrado, retângulo, trapézio, losango –, dentre as que se apresentam neste nível de estudo? Uma resposta bem fundamentada poderia ser dada se o professor estivesse com os conceitos de integrais definidas, bem consolidados, os quais se estabelecem durantes a disciplina de CDI-I na Licenciatura em Matemática, caso contrário, a resposta poderia ser vazia ou sem fundamento.

4.2.1 Sobre a área do círculo

Podemos ver em Paiva (2015, p. 109) – livro do ensino médio – uma abordagem para mostrar a fórmula da área do círculo, com algumas adaptações, conforme a seguir.

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r.

Figura 12: Polígono regular de n lados



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do software GeoGebra.

As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-se em n triângulos isósceles de base a e altura h; logo, a área de polígono é:

$n.\frac{ah}{2} = (na).\frac{h}{2}$, com (na) sendo o perímetro do polígono.

Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender ao infinito), verificamos que:

O perímetro $(\boldsymbol{na})$ do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência $(\boldsymbol{2\pi r})$;

A altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;

A área desse polígono tende a se igualar à área do círculo.

Assim, a expressão $(na).\frac{h}{2}$ tende a $\left(2\pi r.\frac{r}{2}\right)$, que é a área A do círculo, isto é:

$$A = \pi r^2$$

A situação exposta acima utiliza o conceito de limite para mostrar que a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$. É claro que o professor da Educação Básica precisa ter uma fundamentação teórica mais aprofundada para melhor explicar esse conteúdo, o qual precisa conhecer o conceito de limite de forma mais ampla, conforme exposto a seguir.

Para esta demonstração da área do círculo, utilizaremos conceitos básicos de Geometria e Limites. Inicialmente, vamos relembrar alguns conceitos:

Para qualquer polígono regular, sua área é dada pela fórmula:

$$A_p = \frac{L.h.n}{2}$$

em que:

A_P é a área do polígono;

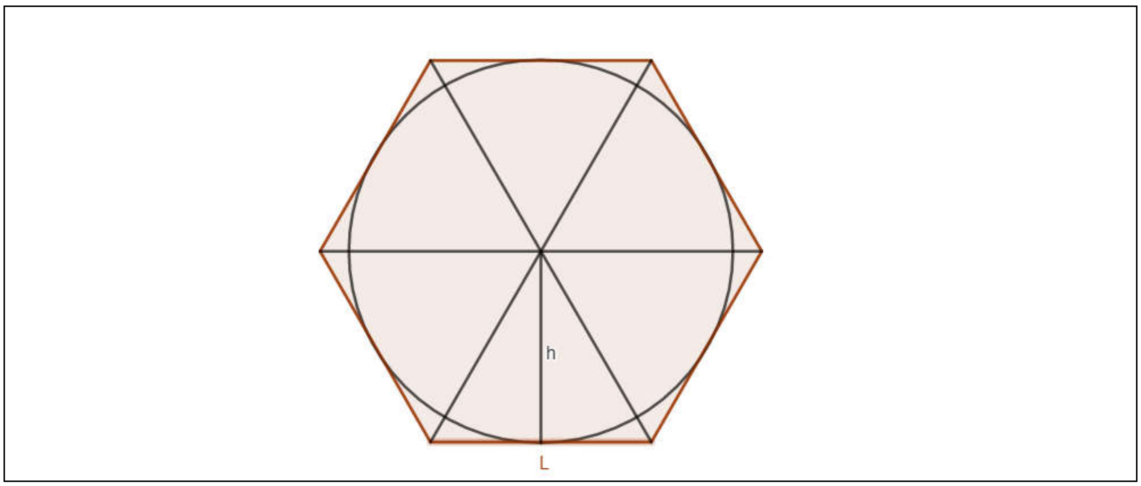
h é o comprimento do apótema do polígono;

n é o número de lados do polígono;

L é o comprimento de cada lado do polígono;

Dado um círculo inscrito a um polígono regular, o raio deste círculo é igual ao apótema do polígono.

Figura 13: Polígono regular circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do software GeoGebra.

$\boldsymbol{\pi}$ é a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r}$$

em que:

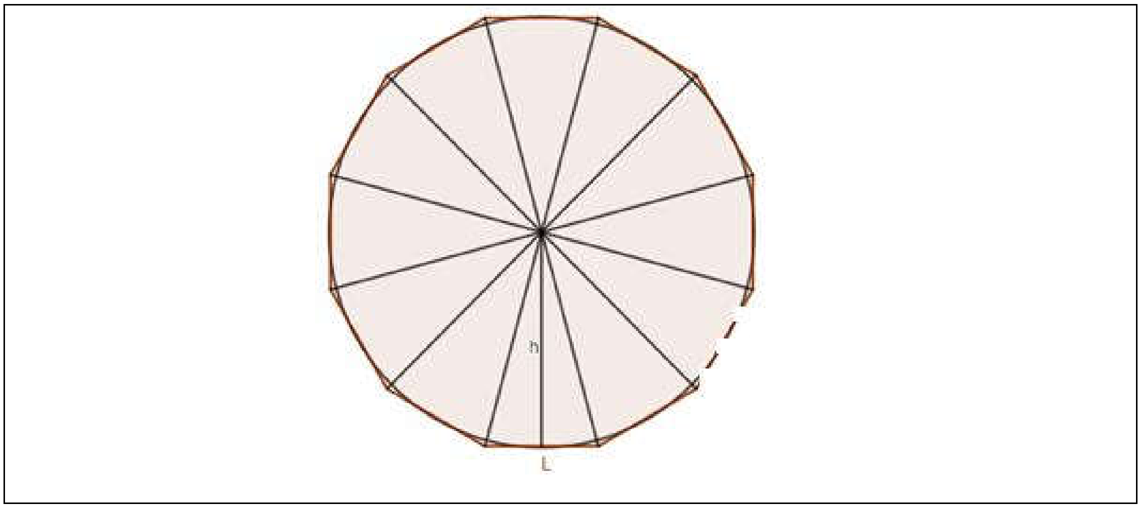
C é a circunferência do círculo;

D é o diâmetro do círculo, que equivale a $2r$;

$r = h$ o raio da circunferência é igual a apótema do polígono.

Construímos, então, um círculo de raio r inscrito a um polígono regular de n lados. O apótema deste polígono é igual ao raio do círculo.

Figura 14: Circunferência inscrita em um polígono regular de n lados



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do software GeoGebra.

Representamos:

A_C como área do círculo.

A_P como área do polígono

P o perímetro do polígono

C a circunferência do círculo

Então:

$$A_P = \frac{L.h.n}{2} \cong A_C$$

e

$$P = n.L \cong C$$

Se fizermos n crescer indiscriminadamente, o polígono de n lados se confunde com o círculo inscrito, e obtemos os limites:

$A_C = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{L.r.n}{2}$ (I)

e

$C = \lim\limits_{n\to\infty} n.L$ (II)

Uma vez que π é a razão da circunferência pelo diâmetro de um círculo, temos que:

$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r}$ (III)

Então, se substituirmos (II) em (III), obtemos:

$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{\lim_{n\to\infty} n.L}{2r} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n.L}{2r}$ (IV)

Se multiplicarmos o numerador e o denominador de (I) por r, obtemos:

$$A_C = \lim_{n\to\infty} \frac{L.r.n}{2}.\frac{r}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{L.r^2.n}{2r} = r^2.\lim_{n\to\infty} \frac{L.n}{2r} \qquad \text{(V)}$$

Mas, de (IV) temos que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{L.n}{2r}$$

e se substituirmos em (V), obtemos:

$$A_C = \pi.r^2$$

que é a fórmula para o cálculo da área do círculo.

4.2.2 Sobre o limite trigonométrico fundamental

No ensino médio, durante a passagem do estudo da trigonometria no triângulo retângulo para estudo das funções trigonométricas no círculo trigonométrico, ocorre uma mudança na escala utilizada para medir arcos e ângulos, as quais são o grau (mede a abertura de um ângulo) e o radiano (mede o comprimento de um arco). Sobre o radiano,

> o termo aparece impresso pela primeira vez no dia 5 de junho de 1873, em exames de James Thonson na faculdade de Queens, nos Estados Unidos. Em 1871, Thomas Muir da Universidade de Andrew, também nos Estados Unidos, já tinha hesitado entre rad, radial e radian (radiano). Em 1874, Muir adotou radian depois de uma consulta a Thonson. Os termos acima descritos provavelmente são inspirados pela palavra radius (raio) (QUINTANEIRO; GIRALDO; PINTO, 2010, p. 6).

O limite a seguir só pode ser calculado se utilizarmos o radiano como unidade de medida. Pode-se dizer que o radiano foi criado para que essa igualdade ocorresse, a qual, segundo Quintaneiro, Giraldo e Pinto (2012), foi a primeira necessidade de se trabalhar com o raio como unidade de medida.

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Portanto, todo o estudo sobre o círculo trigonométrico e sobre as funções trigonométricas no ensino médio se fundamenta no radiano, cuja criação se deu durante o Renascimento, tendo como finalidade fazer cálculos.

Para o professor da Educação Básica, essa é uma informação valiosíssima, a qual se adquire durante o curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de CDI-I, quando do estudo de limites, mais especificamente, quando se estuda o limite fundamental trigonométrico.

4.2.3 Sobre a análise do comportamento de funções

Entre as várias aplicações das derivadas está a análise do comportamento de funções. Com o auxílio das derivadas, podemos, por exemplo, determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função e também podemos encontrar seus valores máximos ou mínimos (quando eles existirem). Essas informações, associadas ao conhecimento prévio dos pontos de interseção do gráfico correspondente à função com o eixo y e com o eixo x (raízes reais), permitem-nos esboçar o gráfico de uma vasta gama de funções.

Vários são os conteúdos da Educação Básica que um professor formado em uma Licenciatura em Matemática, que passou pela disciplina de CDI-I e que absorveu esse conhecimento – esboçar gráficos de funções usando derivadas – pode utilizar para ensiná-los. Vamos dar como exemplo a resolução de inequações polinomiais, que são tratadas desde o ensino fundamental.

A questão a seguir introduz o conteúdo de inequações polinomiais do 2º grau, a qual se apresenta em Ribeiro (2012, p. 151) – livro do ensino médio –, por exemplo.

Certa empresa calcula a sua receita mensal (em reais) por meio da seguinte função $R(p) = 20000p - 2000p^2$, em que p é o preço de venda de cada unidade. Quais devem ser os valores de p para que a receita dessa empresa seja inferior a $R\$\ 37.500{,}00$?

Resposta:

Deseja-se calcular os valores de p para os quais $R(p) < 37500$. Dessa forma,
$R(p) < 37500 \ \rightarrow 20000p - 2000p^2 < 37500 \rightarrow$

$-2000p^2 + 20000p - 37500 < 0$, multiplicando por (-1), temos,

$$2000p^2 - 20000p + 37500 > 0$$

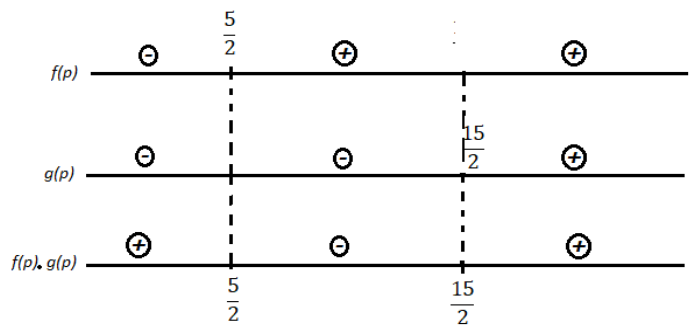
Fatorando temos,

$$\left(p - \frac{15}{2}\right)\left(p - \frac{5}{2}\right) > 0$$

Vamos chamar $\left(p - \frac{5}{2}\right)$ de $f(p)$ e $\left(p - \frac{15}{2}\right)$ de $g(p)$ e construir o esquema a partir da informação dada por cada função, a seguir.

$f(p) > 0 \ se \ p > \frac{5}{2} \ e \ g(p) > 0 \ se \ p > \frac{15}{2}$

Figura 15: Esquema analítico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conjunto-solução: os valores de p para que a receita dessa empresa seja inferior a $R\$\ 37.500{,}00$, ou seja, $R(p) < 37500 \rightarrow R(p) - 37500 < 0$, se:

$$< \frac{5}{2}\ ou\ p > \frac{15}{2}$$

Essa mesma questão também pode ser resolvida estudando o sinal da função.

Na disciplina CDI-I da Licenciatura em Matemática, uma abordagem que fundamenta a questão acima – pode se estender para o estudo de polinômios, funções polinomiais e equações polinomiais – e desenvolve habilidades em um professor de matemática da Educação Básica é a exposta por Stewart (2014, p. 281), a qual mostra um passo a passo para esboçar gráficos, conforme a seguir.

Domínio - o conjunto dos valores de $\boldsymbol{x}$ para os quais $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ está definida.

Pontos de interseção com os eixos $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$ - a intersecção com o eixo $\boldsymbol{y}$ é $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$. Para encontrarmos as interseções com o eixo $\boldsymbol{x}$, fazemos $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ e isolamos $\boldsymbol{x}$.

Intervalos de crescimento ou decrescimento - calcule $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})'$ e encontre os intervalos nos quais $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})'$ é positiva ($\boldsymbol{f}$ é crescente) e os intervalos nos quais $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})'$ é negativa ($\boldsymbol{f}$ é decrescente).

Valores máximos e mínimos locais - Encontre os números críticos de $\boldsymbol{f}$ (os números $\boldsymbol{c}$ nos quais $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})' = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})'$ não existe). Use então o teste da primeira derivada. Se $\boldsymbol{f}'$ muda de positiva para negativa em um número crítico $\boldsymbol{c}$, então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$ é um máximo local. Se $\boldsymbol{f}'$ muda de negativa para positiva em $\boldsymbol{c}$, então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$ é um mínimo local. Apesar de ser usualmente preferível usar o teste da primeira derivada, você pode usar o teste da segunda derivada se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})' = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})'' \neq \mathbf{0}$. Então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})'' > 0$

implica que $f(c)$ é um local mínimo, enquanto $f(c)'' < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

Concavidade e Pontos de Inflexão - Calcule $f(x)''$ e use o teste da concavidade. A curva é côncava para cima se $f(x)'' > 0$, e côncava para baixo se $f(x)'' < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

Esboço da Curva - usando as informações nos itens anteriores, faça o gráfico. Marque as interseções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com os intervalos de crescimento ou decrescimento, com a concavidade de acordo com o item imediatamente anterior. Se precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá calcular o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

De posse deste ferramental, o professor de matemática da Educação Básica tem um embasamento teórico que o empodera e lhe abre um leque de possiblidades, que teoricamente tornará a aprendizagem discente facilitada.

4.2.4 Volumes no ensino médio e a influência das integrais

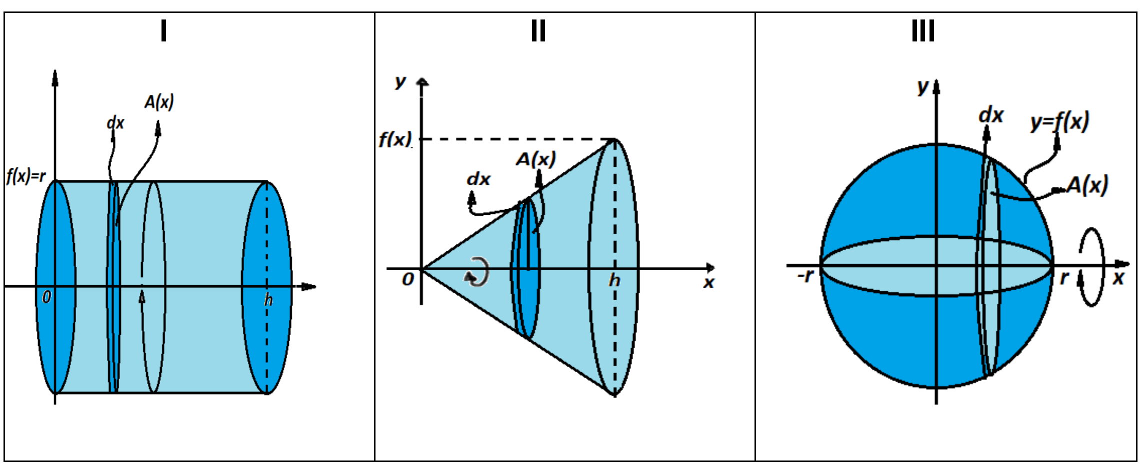
Temos a seguir um cilindro, um cone e uma esfera estudados na educação básica, os quais tem as fórmulas do volume reconhecidas como:

Cilindro - $\boldsymbol{V_{cilindro} = \pi . r^2 . h}$;

Cone – $\boldsymbol{V_{cone} = \frac{1}{3}\pi . r^2 . h}$;

Esfera – $\boldsymbol{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi . r^3}$.

Figura 16: Cilindro, Cone e Esfera



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do software Paint.

Na Licenciatura em Matemática, a disciplina de CDI-I oferece ferramentas para a dedução dessas fórmulas usando integrais definidas. Em certa medida, o aluno dessa licenciatura que assimila esse conhecimento, futuramente, em suas atividades laborais como professor da Educação Básica, terá conhecimento para ensinar tais conteúdos de forma mais sofisticada, com um aparato de informações que o subsidiará, em termos de qualidade de ensino. Claro que no ensino médio, para entender as ideias básicas sobre volume, utiliza-se o princípio de Cavallieri, que se assemelha com o método do fatiamento apresentado no Cálculo, o qual não será utilizado nessa etapa de ensino. N entanto, as suas ideias fundamentais com certeza serão. Um exemplo para a dedução das formulas para cada sólido, usando integrais, está a seguir.

Cilindro – Representamos geometricamente o cilindro no plano cartesiano xoy, conforme Figura 16.I acima, rotacionando a função f em torno do eixo x. Para calcular o volume do cilindro, definimos a função f da seguinte forma:

Como visto na Figura 16.I, a função f é uma constante dada por $f(x) = r$. Para a obtenção do cilindro, fazemos f girar em torno do eixo. Como o cilindro está limitado de 0 a h no eixo x, aplicamos a integral neste intervalo, da seguinte forma:

$$V_{cilindro} = \int_0^h A(x)dx$$

$$V_{cilindro} = \int_0^h \pi . f(x)^2 dx$$

Note que $f(x)$ é o raio da circunferência que varia conforme x se desloca na direção de h e $(A(x) = \pi . f(x)^2)$ é a área do círculo que, multiplicado pela altura dx, torna-se um cilindro de altura ínfima como se fosse discos de papel, por exemplo. A medida que x varia, vários discos iguais vão se formando. Todos os discos são integralizados formando o cilindro de altura h. Assim, temos,

$$V_{cilindro} = \pi \int_0^h r^2 dx \rightarrow$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \int_0^h dx \rightarrow$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \left(x \Big|_0^h \right) \rightarrow$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 (h - 0) \rightarrow$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Cone – Representamos geometricamente o cone no plano cartesiano xoy, conforme Figura 16.II acima, rotacionando a função f em torno do eixo x. Para calcular o volume do cone, definimos a função f da seguinte forma:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow m = \frac{r - 0}{h - 0} \rightarrow m = \frac{r}{h}$$

Como $f(x) = mx + n$, temos que $f(x) = \frac{r}{h}x$, dado que $n = 0$, uma vez que o gráfico de f passa pela origem.

O cone está limitado de 0 a h no eixo x, portanto, aplicamos a integral neste intervalo, da seguinte forma:

$$V_{cone} = \int_0^h A(x)dx$$

$$V_{cone} = \int_0^h \pi . f(x)^2 dx$$

Note que $f(x)$ é o raio da circunferência que varia conforme x se desloca na direção de h e $(A(x) = \pi . f(x)^2)$ é a área do círculo que, multiplicado pela altura dx, torna-se um cilindro de altura ínfima como se fosse discos de papel, por exemplo. A medida que x varia, vários discos de raios que variam conforme $f(x)$ vão se formando. Todos os discos são integralizados formando o cone. Assim, temos,

$$V_{cone} = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \rightarrow$$

$$V_{cone} = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \rightarrow$$

$$V_{cone} = \pi \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} \bigg|_0^h \right) \rightarrow$$

$$V_{cone} = \pi \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \rightarrow$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi . r^2 . h$$

Esfera - Representamos geometricamente a esfera no plano cartesiano xoy, conforme a Figura 16.III acima, rotacionando a função f em torno do eixo x. Para calcular o volume do cilindro, definimos a função f da seguinte forma:

Como visto na Figura 16.III, a função f é uma circunferência, cuja função é dada por $y^2 + x^2 = r^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Como a esfera está limitada entre $-r$ a r no eixo x, aplicamos a integral neste intervalo, da seguinte forma:

$$V_{esfera} = \int_{-r}^{r} A(x)dx$$

$$V_{esfera} = \int_{-r}^{r} \pi.f(x)^2 dx$$

Note que $f(x)$ é o raio da circunferência que varia conforme x se desloca de $-r$ até r e $(A(x) = \pi.f(x)^2)$ é a área de um círculo que multiplicado pela altura dx, torna-se um cilindro de altura ínfima como se fosse discos de papel, por exemplo. A medida que x varia, vários discos de raios que variam conforme $f(x)$ vão se formando. Todos os discos são integralizados formando a esfera. Assim, temos,

$$V_{esfera} = \int_{-r}^{r} \pi.\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \rightarrow V_{esfera} = \int_{-r}^{r} \pi.(r^2 - x^2)dx \rightarrow$$

$$V_{esfera} = \int_{-r}^{r} (\pi r^2 - \pi x^2)dx \rightarrow V_{esfera} = \left(\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\bigg|_{-r}^{r}\right) \rightarrow$$

$$V_{esfera} = \left(\pi r^2 r - \frac{\pi r^3}{3}\right) - \left(\pi r^2(-r) - \frac{\pi(-r)^3}{3}\right) \rightarrow$$

$$V_{esfera} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} + \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \rightarrow$$

$$V_{esfera} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \rightarrow V_{esfera} = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \rightarrow$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Segundo o professor Nilson José Machado em aula ministrada ao curso de Licenciatura em Matemática pelo site da UNIVESP, no ano de 2014,

> toda a matemática básica pode ser ensinada a partir da exploração de um pequeno número de ideias fundamentais, entre as quais se encontra as ideias do Cálculo. O diálogo constância/variação e a caracterização da rapidez com que uma grandeza varia, são duas de tais ideias. Explicar tal fato apresentando os conteúdos usualmente abordados no ensino superior no nível da Escola Básica, é o principal objetivo da presente aula. Não se trata de introduzir novos conteúdos na escola básica, mas sim reconhecer e explorar as ideias fundamentais do Cálculo que já estão presentes nos diversos conteúdos usualmente ensinados (MACHADO, 2014).

Na escola básica, mais especificamente na matemática da escola, as ideias fundamentais do Cálculo estão presentes. Entretanto, necessário se faz que essas lá sejam trabalhadas. Para isso, também necessário se faz que, no ensino superior – Licenciatura em Matemática –, o Cálculo também seja trabalhado nessa perspectiva, ou seja, voltado para a escola básica, não completamente, mas naquilo que cabe.

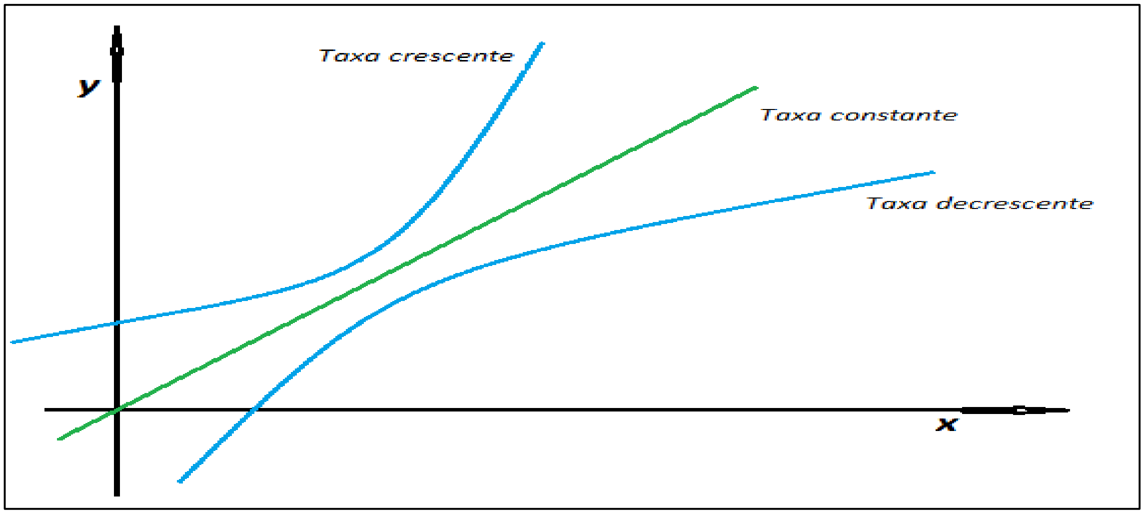
4.2.5 Algumas ideias fundamentais

Além das ideias já expostas, complementamos com algumas exibidas pelo professor (MACHADO, 2014), as quais fortalecem as ideias básicas do Cálculo que podem ser trabalhadas tanto na Licenciatura em Matemática, como na Educação Básica.

O professor ressalta que não se trata de introduzir novos conteúdos na Escola Básica, mais sim de reconhecer e explorar as ideias básicas do Cálculo que se encontram presentes nos diversos conteúdos usualmente ensinados, como por exemplo as ideias de proporcionalidade, áreas de figuras planas com contornos variados, cálculo de médias de diferentes tipos, estudo do crescimento/decrescimento de funções, problemas de máximos e mínimos etc. Acrescenta que algumas perguntas que se podem fazer diante de determinadas situações é se a grandeza "é constante ou variável?" "é crescente ou decrescente?" e de que modo cresce ou decresce?

Dentre as ideias fundamentais do CDI, temos que a ideia de proporcionalidade e de taxa de variação trabalhadas na Educação Básica estão relacionadas às Derivadas, da mesma forma que as ideias de aproximação de algo variável por uma constante se relacionam ao conceito de Integral.

Figura 17: Funções polinomiais



Fonte: Adaptação de Machado (2014).

Quanto à ideia de proporcionalidade e taxa de variação e consequentemente a ideia de derivada, temos a Figura 17.

Ilustrando as três situações, iniciemos por essa em que a taxa é constante. Dessa forma, consideremos a função polinomial do 1º grau f(x)=5x.

Quadro 15: Função polinomial do 1º grau $f(x) = 5x$

x	0	1	2	3	4	...	20	21	...
y=f(x)	0	5	10	15	20	...	100	105	...

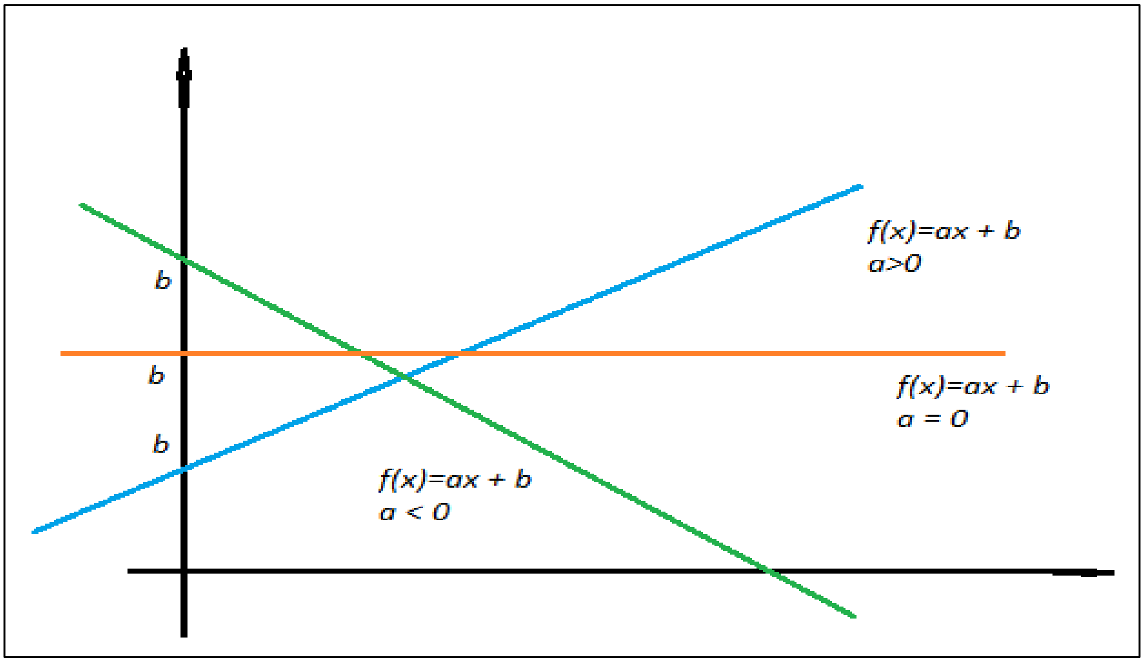
Fonte: Adaptado de Machado (2014).

Na situação, observamos que, para cada unidade de variação em x, y, são acrescentadas 5 unidades. Acrescentando uma unidade em x, ou seja $(x + 1)$, temos $f(x + 1) = 5(x + 1)$. Se fizermos a diferença $f(x + 1) - f(x)$, isso implica que $5(x + 1) - 5x = 5$, que é exatamente a taxa de variação ou derivada da função $f(x) = 5x$.

De maneira geral, se fizermos $f(x) = ax + b$ e acrescentarmos uma unidade em x, temos $f(x + 1) = a(x + 1) + b$. Agora, efetuando a diferença $f(x + 1) - f(x)$, temos $[a(x + 1) + b] - [ax + b] = a$, o qual é a taxa de variação ou derivada da função polinomial do 1º grau. Uma observação importante é que nesta situação a taxa de variação “a” é constante.

O professor Nilson José Machado ressalta que, se só existissem funções polinomiais do 1º grau, todo o curso de Cálculo poderia ser ilustrado na figura a seguir.

Figura 18: Função constante e função polinomial do 1º grau



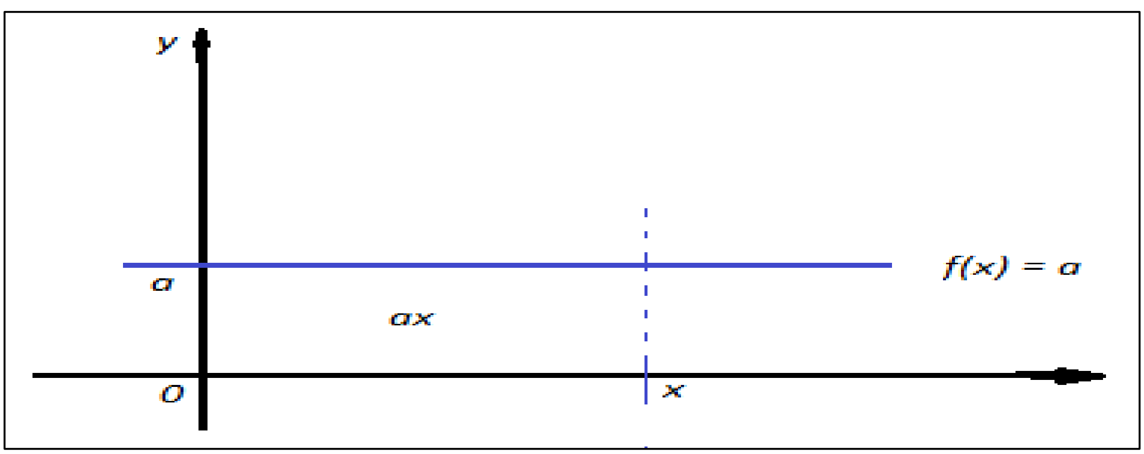
Fonte: Adaptado de Machado (2014).

Para a > 0, f(x) é crescente;

Para a < 0, f(x) é decrescente;

Para a = 0, f(x) é constante.

Figura 19: Cálculo da área sob uma função constante



Fonte: Adaptado de Machado (2014).

Do exposto na Figura 19, temos uma função constante, a qual, se calcularmos a área delimitada por ela mesma, o eixo y, o eixo x e uma reta x, encontramos “ax”

como resultado, o qual representa uma função polinomial do 1º grau, que, adicionando uma constante b, tem-se $g(x) = ax + b$, função polinomial do 1º grau. Esse fato nos remete à ideia de integral.

Para os casos das taxas de variação crescente ou decrescente, vamos tomar como exemplo a função polinomial do 2º grau $f(x) = 3x^2 + x + 5$ ilustrada a seguir.

Quadro 16: Função polinomial do 2º grau $f(x) = 3x^2 + x + 5$

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	5	9	19	35	57	85	119
Taxa de variação: $T_1 = f(x + 1) - f(x)$	4 10 16 22 28 34						
Taxa da taxa de variação: $T_2 = T_1(x + 1) - T_1(x)$	6 6 6 6 6						

Fonte: Adaptado de Machado (2014).

Observamos que, ao passo que x varia de uma unidade $(x + 1)$, por exemplo, $f(x)$ varia, mais não da mesma forma que na função polinomial do 1º grau. Nota-se que há uma variação na taxa de variação T_1, a qual não varia de forma constante, como observado em T_2.

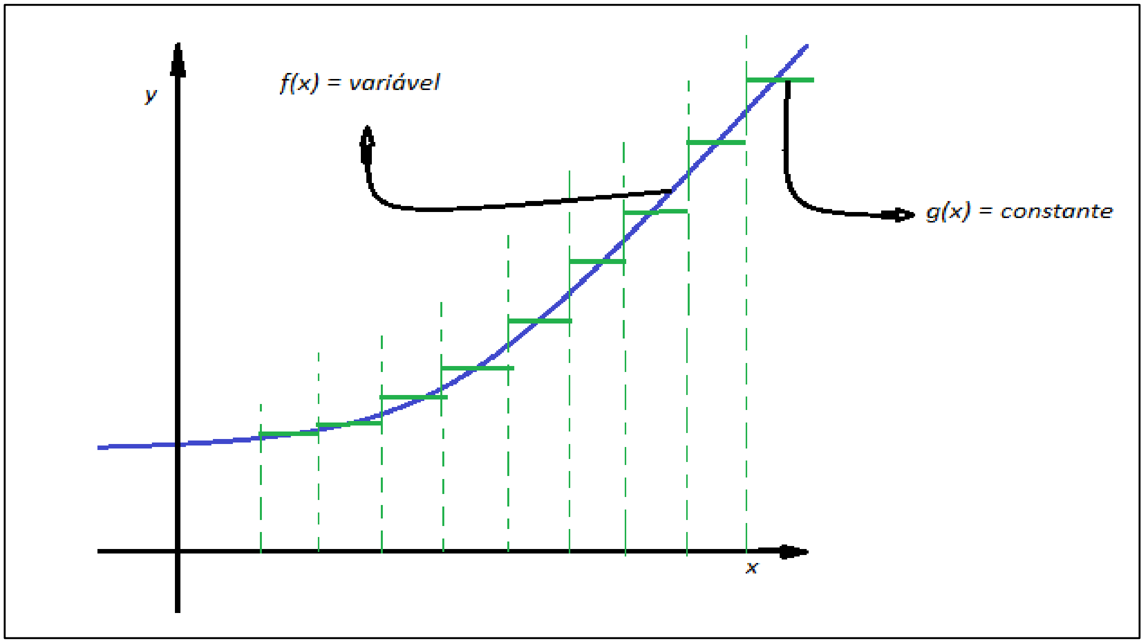
Na situação, observamos que, para cada unidade de variação em $x, y,$ há valores que são variáveis. Veja que, acrescentando uma unidade em x, ou seja $(x + 1)$, temos $f(x + 1) = 3(x+1)^2 + (x+1) + 5 = 3x^2 + 7x + 9$. Se fizermos a diferença $f(x + 1) - f(x)$, isso implica que $3x^2 + 7x + 9 - 3x^2 - x - 5 = 6x + 4$, que é a taxa - $T_1 = 6x + 4$ – de variação – a qual não é constante ou derivada da função $f(x) = 3x^2 + x + 5$. Fazendo o mesmo procedimento em T_1, chegamos em $T_2 = 6$, que é taxa de variação de T_1, a qual é constante. Podemos dizer que em uma função polinomial do 2º grau, a taxa de variação não é constante, mas a taxa da taxa de variação é constante, e essa ideia tem um significado importantíssimo para estudos anteriores e posteriores do Cálculo Diferencial e Integral.

De maneira geral, se fizermos $f(x) = ax^2 + bx + c$ e acrescentarmos uma unidade em x, temos $f(x+1) = a((x+1)^2 + b(x+1) + c)$. Agora, efetuando a diferença $f(x+1) – f(x)$, temos $[(ax^2 + 2ax + a) + b(x+1) + c] – [ax + b] = 2ax + (b + c)$. Considerando $2a = d$ e $(b + c) = j$, tem-se que $f(x+1) – f(x) = dx + j$, a qual é a taxa de variação ou derivada da função polinomial do 2º grau. Uma observação importante é que, nesta situação, a taxa de variação "$T_1 = dx + j$" não é constante. Já a taxa de variação de T_2 é constante, uma vez que, procedendo da mesma forma que em $f(x)$, encontramos $T_2 = d$ que é a taxa de variação de T_1.

Situações dessa natureza expõem as ideias fundamentais do Cálculo, que estão relacionadas à derivada.

Quanto à ideia de aproximação de uma função variável por outra que é constante e consequentemente a ideia de integral, temos a figura a seguir.

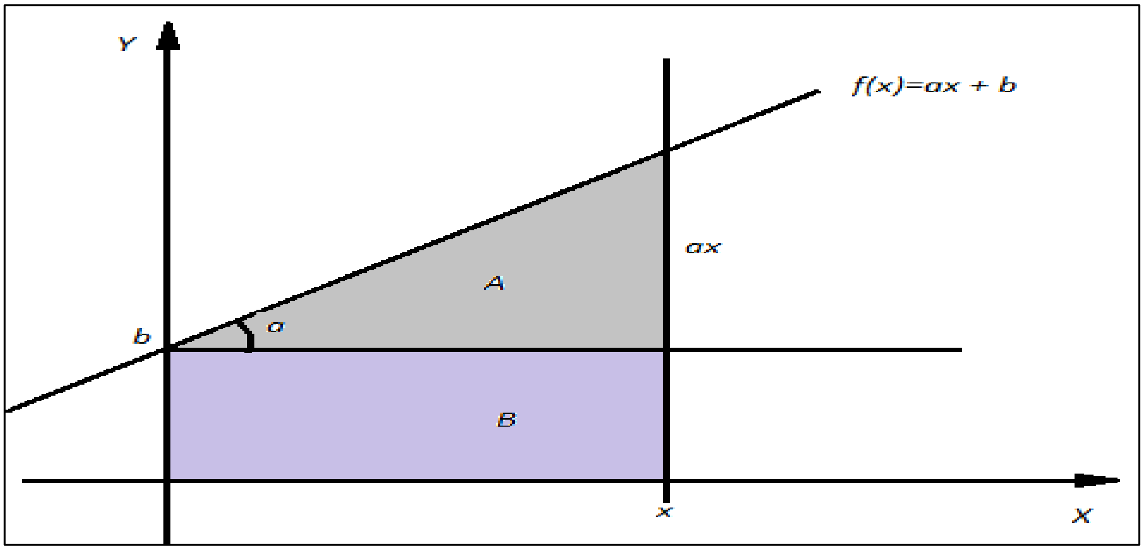
Figura 20: Aproximação de uma função variável por uma constante



Fonte: Adaptação de Machado (2014).

A figura acima ilustra a aproximação de uma função que é variável por outra que é constante, a qual, subdividindo essa constante em intervalos cada vez menores, remete-nos à ideia de integral, uma vez que o cálculo de área dos retângulos torna possível o cálculo de uma determinada área delimitada.

Figura 21: Cálculo da área sob uma função polinomial do 1º grau



Fonte: Adaptação de Machado (2014).

Na Figura 19, observamos que, calculando as áreas A e B, temos como resultado uma função polinomial do 2º grau. A área *"A"* representa um triangulo delimitado por $f(x)$, a constante *"b"* e a reta x. A área *"B"* é um retângulo delimitado pelo eixo y, o eixo x e a constante "b". A área $A = \frac{x\,.ax}{2}$ e a área $B = x.b$. A soma de A e B resulta em $h(x) = \frac{ax^2}{2} + bx$. Acrescentando uma constante c, $h(x)$ é uma função polinomial do 2º grau. No geral, observamos que h é a integral de g, que, por sua vez, é a integral de f.

As ideias expostas nesse tópico vão de encontro com a fala do professor Nilson José Machado, ideias tais que podem ser estendidas para outras situações. Estas aqui expostas exibem contribuições de cunho epistemológico que o CDI-I traz para a formação de futuros professores de matemática, do ponto de vista do conteúdo que interconecta as duas disciplinas, os quais podem ser explorados tanto na Matemática da Educação Básica quanto no CDI-I, na Licenciatura em Matemática, e nessa tornando o conteúdo mais significativo para os discentes.

4.3 Do ponto de vista dos professores da disciplina

A temática tratada nesta pesquisa diz respeito às contribuições epistemológicas que o CDI-I traz para a formação de alunos da Licenciatura em Matemática e que no futuro atuarão como professores da Educação Básica. Portanto, para observar o discurso dos professores quanto à temática discutida nesta pesquisa, selecionamos participantes que contemplassem o perfil de atuar ou de já terem atuado como professores de CDI-I em Licenciaturas em Matemática e que atuem ou já tenham atuado como professores de matemática da Educação Básica.

Essa é uma característica que facilmente pode ser encontrada nos Institutos Federais, já que essa instituição oferta o ensino tanto para o nível médio como para o superior. Para se aproximar da nossa realidade, procuramos entrevistar professores do IFPA/Belém e de institutos e universidades próximos. Entramos em contato com 21 professores via mídias sociais, dos quais 17 responderam às questões que lhes foram apresentadas.

A partir da questão-problema da nossa pesquisa – de que forma o CDI-I contribui para a formação dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFPA/Belém para atuar na Educação Básica? – e do objetivo geral – analisar as contribuições epistemológicas do CDI-I para formação dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFPA/Belém para Educação Básica -, elaboramos três perguntas abertas com a finalidade de verificar o que os professores dessa disciplina pensam a respeito da temática em questão.

As perguntas foram encaminhadas para os professores conforme exposto a seguir:

Para responder as questões a seguir, necessário se faz que você leve em consideração a sua atividade como professor de matemática da Educação Básica e do Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática.

De que forma o conteúdo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I contribui para a formação dos alunos da Licenciatura em Matemática?

Como você compreende a contribuição do Cálculo Diferencial e Integral – I para as atividades desses alunos, como professores da Educação Básica?

Como você relaciona o conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral I com a matemática ministrada na Educação Básica?

Para analisar as respostas dos professores a essas perguntas, utilizamos a teoria do Discurso do Sujeito Coletivo, conforme está exposto no Capítulo 2, o que nos permitiu analisar os resultados do questionário sob a perspectiva quantitativa e qualitativa, conforme exposto a seguir.

Primeiro, vamos olhar para os resultados sob a perspectiva quantitativa, os quais estão expostos nos Gráficos 6, 7 e 8, em que observamos a intensidade dos discursos – por meio da frequência de uma dada expressão-chave em relação ao total de expressões – e a amplitude, sendo exibida pela quantidade de categorias expostas em cada gráfico.

Depois da análise quantitativa, direcionamos nosso olhar para a análise qualitativa dos resultados, baseado nas sínteses dos Discursos do Sujeito Coletivo, que se apresentam nos Quadros 21, 22 e 23, localizados no Anexo B deste trabalho, os quais foram construídos a partir dos DSCs resultantes das Expressões-Chave que emergem das Ideias Centrais enquadradas na mesma categoria. Para cada pergunta, emergiu um painel com os DSCs que representam as opiniões coletivas existentes sobre o tema da pergunta na população pesquisada.

4.3.1 Análise quantitativa da fala dos professores

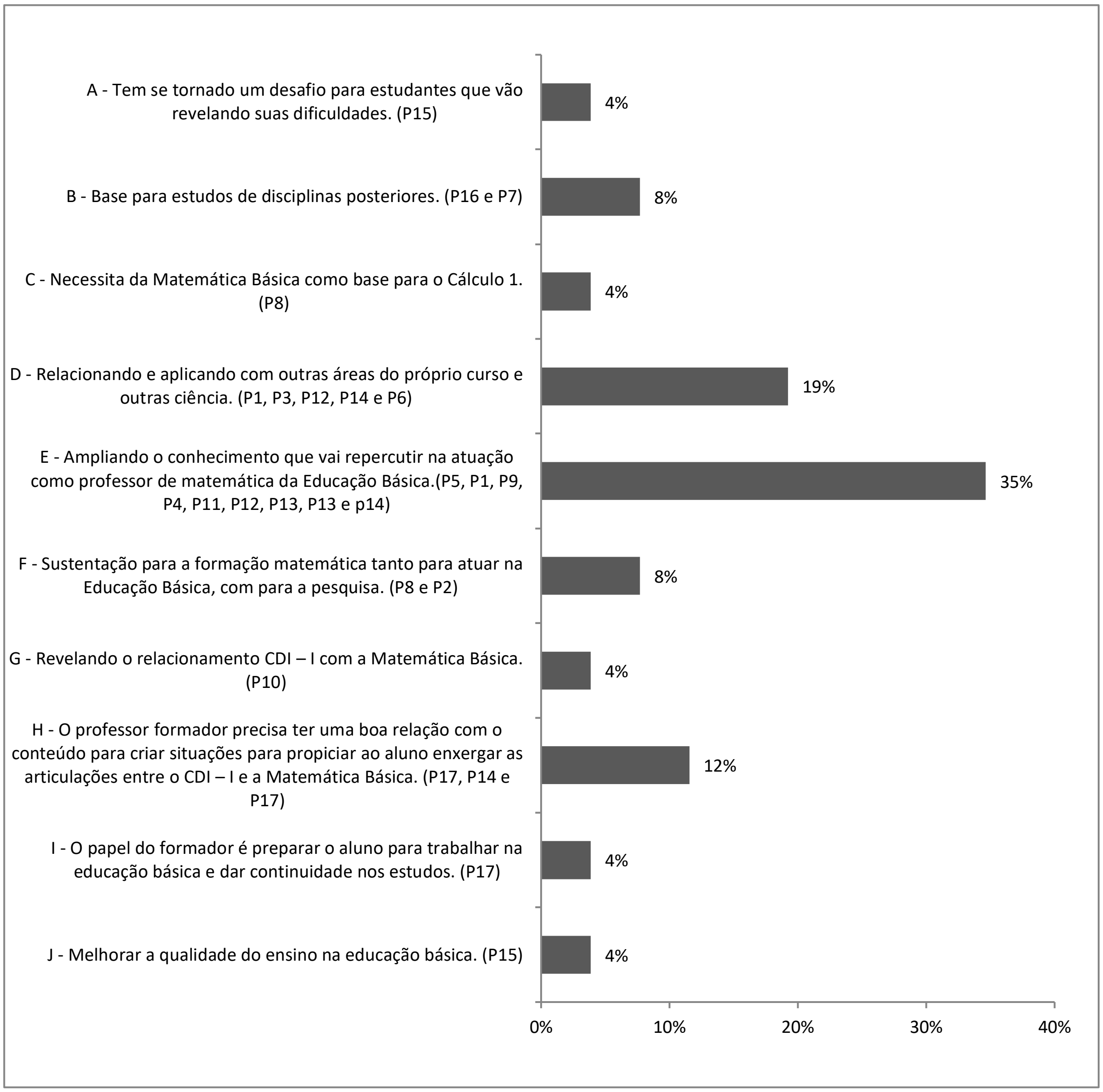
O Gráfico 6 a seguir está relacionado à parte quantitativa dos resultados em relação às respostas do DSC dadas à questão 1. O gráfico mostra duas categorias de resposta com maior intensidade: "a*mpliando o conhecimento que vai repercutir na atuação como professor de matemática da Educação Básica.*", com 35%, "r*elacionando e aplicando com outras áreas do próprio curso e outras ciências*", com 19% das falas. Tais respostas dizem respeito a de que forma o CDI-I contribui para a formação do licenciando em matemática e foram acompanhadas de uma terceira categoria, com uma incidência menor de 12%: "*o professor formador precisa ter uma boa relação com o conteúdo para aprofundar e articular o CDI-I com a Matemática Básica*".

Os professores disseram que o CDI-I dá "*sustentação para a formação matemática tanto para atuar na Educação Básica, como para a pesquisa*" e servir de *"Base para estudos de disciplinas posteriores"*, foram duas ideias centrais ou categorias que expuseram intensidades iguais a 8% respectivamente.

As demais categorias, totalizando 5, aparecem com 4% cada uma, expondo as respostas dos professores. As categorias *"tem se tornado um desafio para estudantes que vão revelando suas dificuldades*" e "*Base para estudos de disciplinas posteriores*" foram as duas categorias em que a fala dos professores não mencionaram a temática abordada.

Tivemos, no total, 25 expressões-chave, que por similaridade ou complementaridade de pensamentos ou opiniões foram distribuídas em 11 ideias centrais ou categorias, revelando que há uma amplitude considerável de expressões – diversidade de ideias – que respondem à questão 1, ao mesmo tempo que duas categorias se mostraram bastante intensas. Essas duas categorias reforçam as nossas ideias iniciais.

Gráfico 6: Categorias do Discurso do Sujeito Coletivo – Questão 1



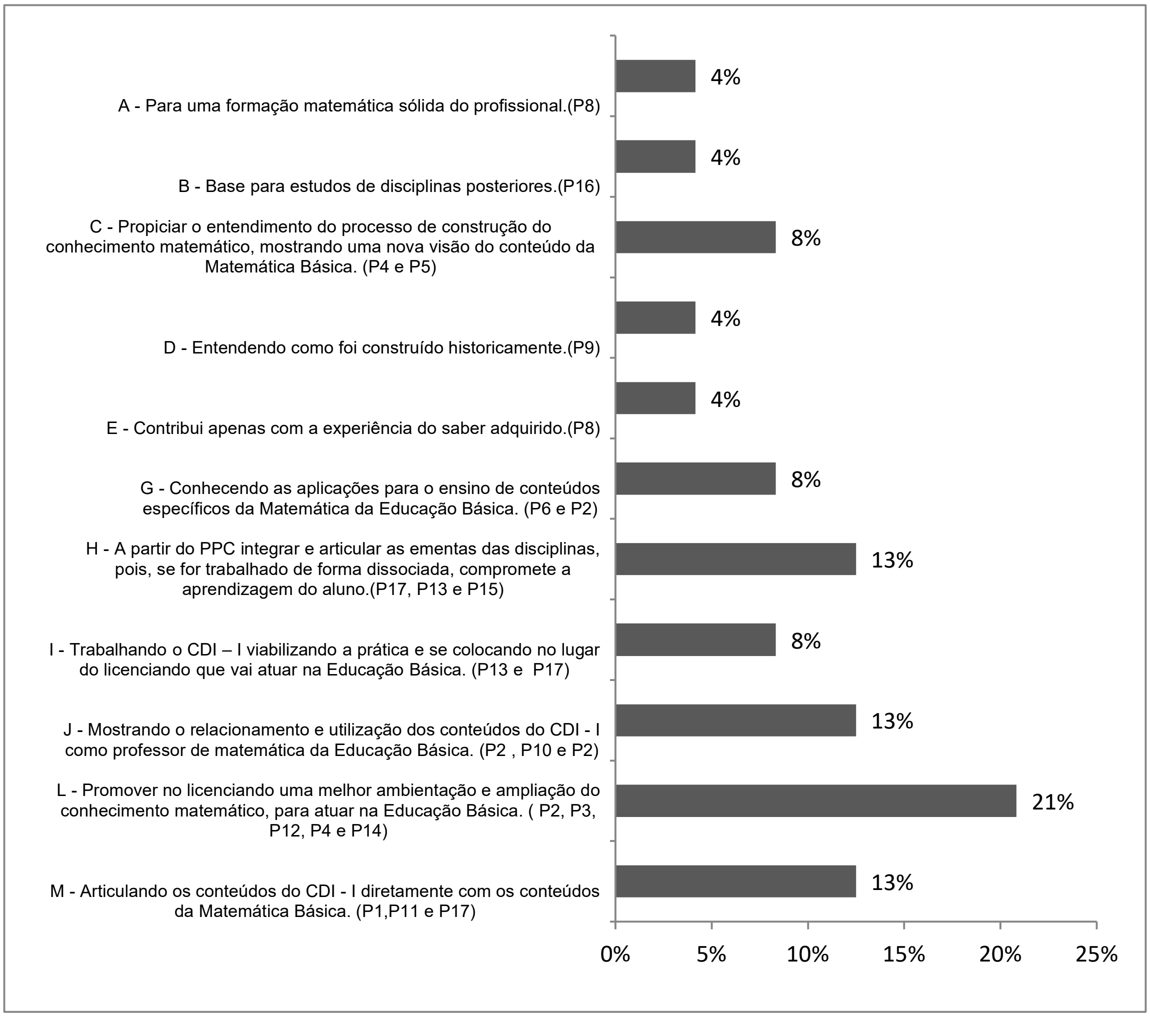
Fonte: Elaborado pelo autor.

O Gráfico 7 abaixo está relacionado à parte quantitativa dos resultados em relação às respostas do DSC dadas à questão 2, o qual diz que o professor compreende a contribuição do Cálculo Diferencial e Integral – I para as atividades desses alunos, como professores da Educação Básica, se este “*promover no* *licenciando uma melhor ambientação e ampliação do conhecimento matemático, para atuar na Educação Básica"*. Essa foi a categoria de maior intensidade dentre as demais, com 21% das expressões-chave apresentadas. Em seguida, temos três categorias que obtiveram 13% das expressões-chave em cada uma delas, as quais dizem que "*a partir do PPC integrar e articular as ementas das disciplinas, pois, se for trabalhado de forma dissociada, compromete a aprendizagem do aluno"*, "*mostrando o relacionamento e utilização dos conteúdos do CDI-I como professor de matemática da Educação Básica*" e "*Articulando os conteúdos do CDI-I diretamente com os conteúdos da Matemática Básica*".

Observamos que, de todas as categorias expostas no Gráfico 7, apenas uma não faz menção à atividade do licenciando em matemática voltada à sua atuação na educação básica, a que diz que o CDI-I é apenas "*base para estudos de disciplinas posteriores*", com 4% de intensidade.

Para essa questão, obtivemos 24 expressões-chave distribuídas em 11 ideias centrais ou categorias.

Gráfico 7: Categoria do Discurso do Sujeito Coletivo – Questão 2



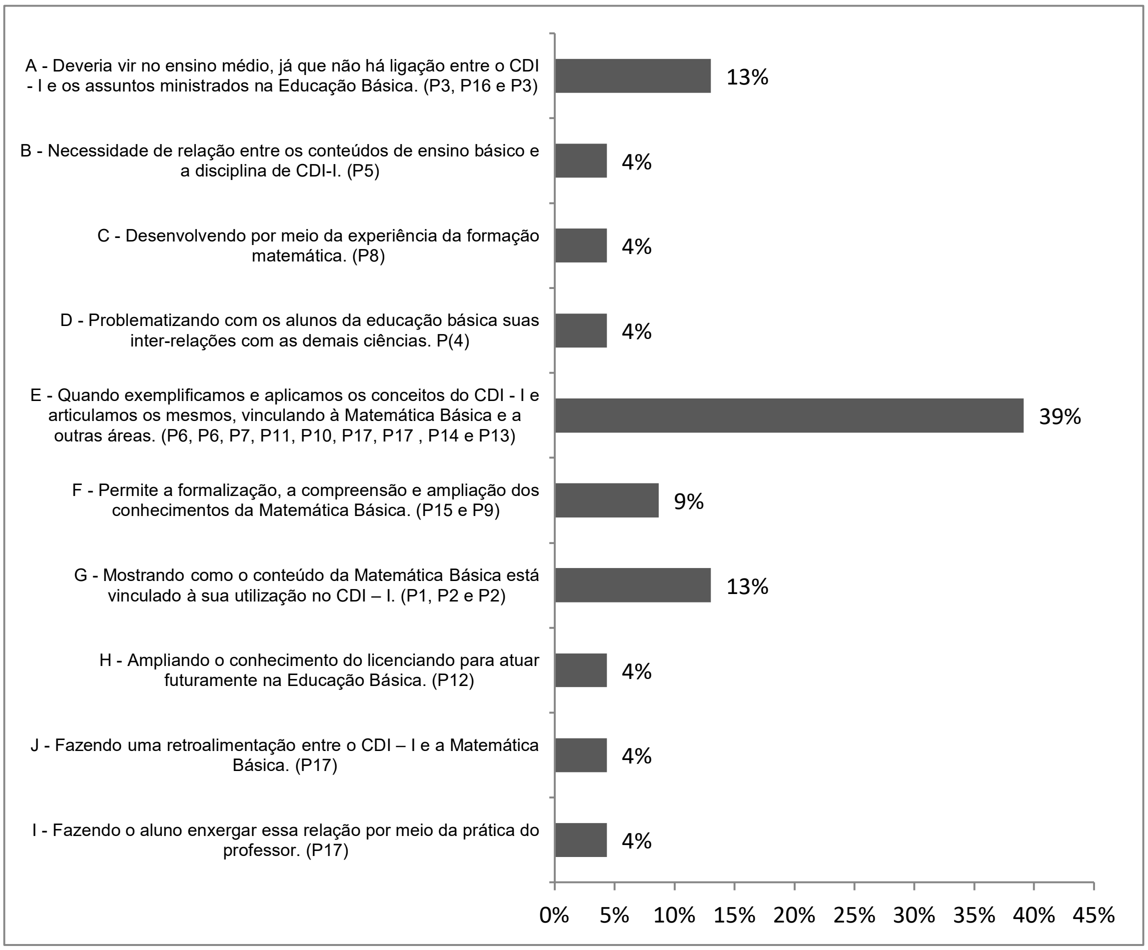
Fonte: Elaborado pelo autor.

O Gráfico 8 abaixo está relacionado à parte quantitativa dos resultados em relação às respostas do DSC dadas à Questão 3, a qual pergunta ao professor como ele relaciona o conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral I com a matemática ministrada na Educação Básica. De um total de 23 expressões-chave, 9 estão na categoria ou ideia central que diz que os professores relacionam o CDI-I com a Matemática Básica "*quando exemplificam e aplicam os conceitos do CDI-I e articulam os mesmos, vinculando à Matemática Básica e a outras áreas*", representando 39% das expressões-chave, ou seja, esta é a fala de maior força dentre as demais expressas no DSC desse grupo de professores para esta pergunta.

Acompanhando a fala anterior, surge a categoria "*mostrando como o conteúdo da Matemática Básica está vinculado à sua utilização no CDI-I* " com 13% das expressões-chave, juntamente com a ideia central "*deveria vir no ensino médio, já que* *não há ligação entre o CDI-I e os assuntos ministrados na Educação Básica*", que se caracteriza por ser a única que diverge das demais.

Vale ressaltar que as ideias centrais que apresentam maiores intensidades não significam que esses discursos sejam os mais importantes, da mesma forma que as categorias menos intensas não podem ser consideradas menos importantes. A intensidade nos diz que determinadas ideias são mais ou menos verbalizadas e não que sejam mais ou menos importantes para responder à questão.

Gráfico 8: Categorias do Discurso do Sujeito Coletivo – Questão 3



Fonte: Elaborado pelo autor

4.3.2 Análise qualitativa das falas dos professores

Trataremos aqui da análise qualitativa das falas dos professores que emergiram a partir das expressões-chave, em conformidade com o que está posto pela teoria do DSC apresentada no Capítulo 2. Cada professor foi nomeado pela letra

P acompanhada de um número índice. Como entrevistamos 17 professores, eles foram nomeados por P_i, com i variando de 1 a 17.

Ressaltamos que cada expressão-chave está sendo antecipada pela denominação dada por P_i, representando as falas individuais de cada professor, que se assemelham ou se complementam, para emergir os DSCs em suas respectivas categorias.

Colocamos, sempre que couberam, alguns conectivos – em negrito – para ligar os discursos, com a finalidade de fazer com que as expressões, agrupadas em uma dada categoria, representem as falas de todos, como se fossem apenas uma, conforme apresentado pela teoria utilizada (DSC).

No Capítulo 3 desse trabalho, levantamos teses e dissertações sobre o Cálculo Diferencial e Integral realizadas em Licenciaturas em Matemática no Brasil. A partir desses trabalhos e de outras fontes que não estão presentes no rol agora citado, procuramos dialogar com os DSCs a seguir, que emergiram a partir das falas dos professores entrevistados.

Conforme DSC do professor $P15$ (categoria A) exposto no Quadro 21 localizado no Anexo B deste trabalho, alguns autores corroboram com esses professores, nas teses $T_{15,}$ e T_{16} – quando dizem que promover a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral, nos estudantes da Licenciatura em Matemática pode contribuir para o encaminhamento conceitual e didático de noções básicas da componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral, no curso de Licenciatura em Matemática – expostas no Capítulo 3. Trata-se de exemplos de trabalhos desenvolvidos com a finalidade de sanar possíveis dificuldades encontradas pelos estudantes da LM, dessa disciplina.

Segundo Martins, Araújo e Oliveira (2016, p. 18) “é de extrema importância que estudantes desses cursos compreendam a essência do Cálculo para que logrem êxito nas disciplinas mais específicas no decorrer de seu curso”.

Na dissertação de mestrado de Santos (2012, p. 15, 33), há uma afirmação que concorda com a fala dos professores P_{16} e $P_{7,}$ (categoria B), quando esse autor diz que a disciplina de CDI-I representa uma base elementar para o curso de Licenciatura em Matemática, especialmente porque é base para uma série de disciplinas que a adotam como pré-requisito.

No desenvolvimento da problemática da dissertação de mestrado de Imafuku (2008), D_2 – dissertação 2 exposta no Capítulo 3 –, o autor relata que, ao ingressar na

Licenciatura em Matemática, imaginava que seria um curso fácil, mas logo nas primeiras aulas pôde perceber que, ao contrário do que pensava, seria muito difícil e, que nos ensinos fundamental e médio, não havia tido uma boa base, pois muitas definições que os professores apresentavam como revisão, para ele, eram novidades. No DSC do professor P_8 (categoria C), reafirma-se o relato do autor da dissertação acima citada.

Com o objetivo principal de investigar a importância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática, Aléssio (2019) envolveu em sua pesquisa aspectos históricos do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, visando reconhecer a importância dessa disciplina na formação do professor de matemática a partir de sua origem e aplicabilidade. Verificou-se, nessa pesquisa, que o Cálculo surgiu para resolver problemas que até aquele momento não haviam sido solucionados, afirmando parte do DSC dos professores P_1, P_3, P_6, P_{12} e P_{14} (categoria D).

Ainda no Quadro 21, as falas dos professores P_1, P_4, P_5, P_9, P_{11}, P_{12}, P_{13} e P_{14} (categoria *E*) são fortalecidas por Aléssio (2019), quando diz que o licenciando em matemática precisa ter

> uma maior percepção, ampliação, e compreensão dos conteúdos de funções, taxa de variação, área e volume; noções de limite, derivada e integral para articular problemas e exemplificar situações que irá confrontar na prática escolar, além de relacionar conteúdos que ministrará no ensino básico (p. 82).

Numa outra direção, em entrevista concedida a Gereti (2018, p. 94), o professor Saulo Freitas diz: “na minha visão, toda vez que eu dou um curso de CDI, eu tenho que fazer ele voltado para uma formação geral do aluno, não pensando numa formação que direciona só para a Educação Básica, isto é, tento dar um curso que ofereça uma formação básica e também uma formação que possa oportunizar o aluno a fazer uma pós-graduação”. Tal relato amplia a fala dos professores da “categoria *E*” acima, quando o professor destaca a disciplina de Cálculo para uma formação mais geral.

Aléssio (2019, p. 14) afirma que, por meio do CDI, “o licenciado em Matemática tem a possibilidade de relacionar conteúdos complexos estudados em ambiente universitário àqueles associados ao cotidiano do aluno, dando forma a novas situações de aprendizagens que despertem seu interesse", conforme foi apontado pelo professor P_{10} (categoria G).

Em parte, o DSC gerado a partir das falas dos professores P_{14} e P_{17}, (categoria H) é endossado por Lins (2005, p. 120), quando afirma que

> o centro da atividade profissional do professor, seja de que disciplina for, é ler os alunos e tomar decisões sobre o que está acontecendo e como seguir. E é por isso que vou defender que disciplinas de Matemática "avançada" têm um potencial único na formação de professores de Matemática, desde que não sejam entendidas em si mesmas, apenas como de conteúdo (LINS, 2005, p. 120).

Complementando, Motta (2019), em fala proferida em palestra pelo site da Matemática Humanista, diz que "disciplinas não são momentos temáticos isolados de mera apresentação de conteúdo, mas sim componentes de ações curriculares que devem ser entendidas à luz da formação proposta e articuladas entre si".

P_{17} (categoria I) afirma que o papel do formador é preparar o aluno para trabalhar na Educação Básica e dar continuidade nos estudos. Já Aléssio (2019, p. 14) complementa a fala de P_{15} (categoria J), quando diz que "a formação do professor implica na qualidade de ensino".

Na contramão do que imaginávamos, alguns DSCs não fazem menção explícita sobre a forma com que o CDI-I contribui para a formação dos alunos da Licenciatura em Matemática, como por exemplo, no Quadro 21, as categorias A e C, representando 20% das categorias. As demais, de alguma forma, respondem ao que foi solicitado, no sentido de fazer menção às referidas contribuições.

No Quadro 22 em anexo, P_8 (categoria A) relata sobre a importância da matemática para uma formação sólida do profissional, entretanto sem direcionar a fala nem para o CDI-I nem para a matemática básica.

A base matemática à qual P_{16} (categoria B) se refere, no nosso entendimento, diz respeito ao desenvolvimento de conhecimento que dará sustentação a situações futuras, com as quais esses alunos poderão se deparar ainda na própria Licenciatura em Matemática. Não observamos, nessa resposta, relação com a formação do licenciando para a sua futura atuação na Educação Básica.

Propiciar o entendimento do processo de construção do conhecimento matemático, mostrando uma nova visão do conteúdo da Matemática Básica, são as falas de P_4 e P_5, (categoria C), as quais corroboram com as nossas ideias, quando esses professores exprimem que, no “processo de construção do conhecimento”, o CDI-I mostra o conteúdo da Matemática Básica de um novo ponto de vista.

Com o objetivo principal de investigar a importância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática, Aléssio (2019) envolveu em sua pesquisa aspectos históricos do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, visando reconhecer a importância dessa disciplina na formação do professor de matemática, a partir de sua origem e aplicabilidade.

O professor Saulo Freitas, em entrevista a Gereti (2018, p. 95), corrobora com Aléssio (2019), quando diz que

> nesse sentido para dar uma formação que atinja a escola básica, eu tento dar um pouco de contexto histórico sobre aquilo que está sendo estudado. Tento discutir qual foi a importância, porque aquele conteúdo surgiu, o que acontecia no contexto histórico da época para se estudar aqueles conceitos (GERETI, 2018, p. 95).

Ambos os relatos confirmam a fala exposta do professor P_9 (categoria D). Neste discurso, fica implícito que o professor compreende que não há contribuições dos conteúdos do CDI-I em relação aos da Matemática Básica.

Aléssio (2019), em sua dissertação de mestrado, diz que as aplicações do CDI ocorrem de modo direto ou indireto em diversos conteúdos da Educação Básica, tais como progressão geométrica, trigonometria, taxa de variação de uma função, ponto de máximo e mínimo de uma função quadrática, coeficiente angular da reta tangente, áreas e volumes de sólidos.

Os DSCs apresentados pelos professores P_{17}, P_{13}, e P_{15} (categoria H), ainda no Quadro 22 em anexo, corroboram com o que foi exposto por Lins (2005, p. 117), quando afirma que “a existência de cursos de “conteúdo matemático” (Cálculo, por exemplo), desarticulados teórica e praticamente do que seja a profissão do professor de Matemática, se apresenta como um enorme desafio para a comunidade de formadores”.

Trabalhar o CDI-I de forma a viabilizar melhorias na prática do futuro professor de matemática da Educação Básica, como foi mencionado pelo professor P_{13}, é algo que se torna necessário no labor do professor formador, uma vez que, como está posto pelo professor P_{17} (categoria I), depende muito da habilidade do formador para que o licenciando enxergue as articulações que podem ser feitas entre o CDI-I e a Matemática Básica.

O DSC acima colocado pelos professores P_2 e P_{10} confirma o que já havíamos exposto no início deste trabalho, quando listamos, no Quadro 1 do Capítulo 1, conteúdos da Matemática Básica que se apresentam como conhecimentos prévios para o CDI-I.

O DSC criado a partir das falas dos professores P_2, P_4, P_3, P_{12}, *e* P_{14} (categoria L) é complementado pelo exposto a seguir por Lins (2005), quando diz que

> defende que o professor precisa saber *mais,* e não *menos* Matemática, mas sempre esclarecendo que este *mais* não se refere a mais conteúdo, e sim a um *entendimento*, uma *lucidez* maior, e isto inclui necessariamente, a compreensão de que *mesmo dentro da Matemática do matemático* produzimos significados diferentes para o que *parece* ser a mesma coisa (p. 122, grifo do autor).

Os DSCs apresentados pelos professores P_1, P_{11} e P_{17} corroboram com o que é exposto por Aléssio (2019), quando diz que as articulações do CDI ocorrem de modo direto ou indireto em diversos conteúdos da Educação Básica. Essa dissertação evidencia, portanto, que a compreensão de que o domínio dos conteúdos de Cálculo, e de suas possíveis aplicações na Educação Básica, é instância indispensável na formação do futuro professor, munindo-o de um dos referenciais teóricos necessários para a eficiência do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Quando foram solicitados a opinar sobre *como o professor da disciplina compreende a contribuição do CDI-I para as atividades desses alunos, como futuros professores da Educação Básica*, no Quadro 22 em anexo, as categorias *B* e *E,* ou seja, 17% aproximadamente, formaram discursos que não respondem diretamente ao que foi solicitado. Nas demais categorias, os DSCs mostram as compreensões dos professores da disciplina, no que se refere às contribuições do CDI-I para a referida formação.

Concordando com o que foi exposto no DSC dos professores P_3 e P_{16} (categoria A), localizados no Quadro 23 do Anexo B deste trabalho, temos os trabalhos a seguir, dos quais o primeiro Souza (2014, p. 5) diz que “o ensino deste conteúdo no ensino médio infelizmente, este se torna pouco valorizado. Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio auxilia na compreensão de algumas propriedades, entre elas o limite de uma função, ferramenta indispensável para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade, força, etc”.

Verificar a possibilidade da inserção, no ensino médio, das ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral: limites de função, taxa de variação média, taxa de variação instantânea e o cálculo de áreas abaixo do gráfico de funções positivas, limitadas pelo eixo das abscissas e por retas verticais, ou até mesmo entre funções positivas em um intervalo determinado pelo seu próprio domínio foi o trabalho desenvolvido por Molon e Figueiredo (2015). Até certo ponto, essas opiniões são pertinentes, uma vez que, no conteúdo de matemática da Educação Básica, as ideias fundamentais do CDI estão presentes, permeando-o a, de forma que esses conteúdos podem ser trabalhados em momentos oportunos.

P_5 (categoria B) expõe na sua fala que a relação é feita da matemática básica para o CDI-I, ou seja, articula utilizando matemática básica como ferramenta que auxilia no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Não menciona a formação do licenciando em matemática.

Observamos que P_8 (categoria C) expõe que a experiência adquirida pelo licenciando em matemática na disciplina de CDI-I seja um fator que influencie para melhorar o seu desenvolvimento laboral como futuro professor no ensino básico, o que corrobora com a ideias desta pesquisa.

A fala de P_4 (categoria D) diz que é preciso problematizar com os alunos da educação básica suas inter-relações com as demais ciências, evidenciando que, nessa fase, o professor pode trabalhar as ideias básicas do CDI.

Quando exemplificam e aplicam os conceitos do CDI-I e articulam os articulam, vinculando à Matemática Básica e a outras áreas, os professores P_6, P_{10}, P_{11}, P_{13}, P_{14} e P_{17} (categoria E) expõem que, assim, estarão preparando os licenciandos em matemática, de forma que eles estejam sendo conduzidos ao caminho mais apropriado para atuarem no ensino básico. P_{15} e P_9 (categoria F) exprimem em seus discursos que o CDI-I permite a formalização, a compreensão e ampliação dos conhecimentos da Matemática Básica.

Quando o professor P_{17} (categoria J) se refere a fazer uma retroalimentação, entendemos que ele quis dizer que precisamos preparar bem o aluno de CDI-I, da Licenciatura em Matemática, para que esse, ao atuar na Educação Básica, possa preparar bem os alunos dessa etapa, para que, quando esses chegarem ao ensino superior, também estejam preparados para absorverem melhor a mencionada disciplina. É ao que inicialmente nos referimos em nosso trabalho, quando mencionamos, no Capítulo 1, que esse movimento deve acontecer de forma cíclica, o qual o professor P_{17} denomina de retroalimentação.

O que desejamos é que não ocorra o que se vê em muitas situações, quando o desenvolvimento do CDI-I acontece de forma a confirmar o que Rezende (2003, p. 32) expõe, quando diz que “o cálculo aparece aí como uma disciplina isolada, temida pelos alunos que sequer veem uma relação do aprendizado de suas ideias básicas com sua formação ou mesmo com as demais disciplinas da grade curricular do seu curso”.

Ampliar o conhecimento do licenciando para atuar futuramente na Educação Básica é fator preponderante para a sua formação. Essa ideia, ventilada pelo professor P_{12}, (categoria H), é complementada com o que está posto a seguir pelo professor P_{17}.

A fala do professor P_{17} (categoria I), junto com as falas dos professores P_1 e P_2 (categoria G), mostra, em certa medida, que hoje (2020) colocações dessa natureza sendo disseminadas na Licenciatura em Matemática nos fazem enxergar indícios de que problemas como o colocado a seguir por Rezende (2003) possam ser resolvidos.

> É comum ouvirmos de um professor de matemática dos ensinos Fundamental e Médio, o argumento de que não haveria necessidade de ter estudado algo na universidade uma vez que não precisaria ensinar tal coisa no ensino fundamental ou no ensino médio. É realmente lamentável que “tal coisa” não seja ensinada de fato em etapas anteriores do ensino de matemática. Não da forma como é ensinado no curso superior, estanque e dissociado de sua função potencializadora, mas como parte integrante e fundamental para a construção das ideias matemáticas e por que não dizer para a própria formação do cidadão (REZENDE, 2003, p. 32-33).

Como você relaciona o conteúdo do CDI-I com a matemática ministrada na Educação Básica? foi o terceiro questionamento direcionado aos professores dessa disciplina. No Quadro 19, observamos que apenas na categoria *A* o DSC formado diz diretamente não haver relação, representando 10% das categorias. As demais expõem haver várias formas de relacionar esses conteúdos.

Em síntese, são vários os discursos dos professores que apontam para as contribuições que o CDI-I traz para a formação de futuros professores de matemática da Educação Básica. Concordando com esses discursos, Rezende (2003) diz que

> outro aspecto notável no Cálculo diz respeito ao seu caráter integrador do próprio conhecimento matemático: o Cálculo é imprescindível para o desenvolvimento e organização interna da Matemática e suas diversas áreas específicas. Numa linguagem alegórica diríamos que, se a geometria e aritmética formam a "base" do conhecimento matemático, o Cálculo representa a sua "espinha dorsal", isto é, o domínio de conhecimento da

> matemática que dá sustentação e realiza as diversas interfaces entre as outras áreas do próprio conhecimento matemático. Assim, ensinar matemática - seja em que grau de ensino for -, sem levar em conta as ideias básicas do cálculo, será sempre um ensino realizado "com lacunas". Lacunas estas que só serão preenchidas à medida que forem explicitadas as ideias básicas do Cálculo (REZENDE, 2003, p. 37-38).

As lacunas mencionadas por Rezende (2003), especificamente na Educação Básica, podem ser complementadas, se, conforme, explicitado nesta pesquisa – sob a ótica do conhecimento do conteúdo dos alunos, do conteúdo da disciplina e sob a perspectiva da fala dos professores – se de algum modo colocarmos essas três perspectivas para conversarem entre si.

Neste sentido, desenvolvemos e apresentamos uma pesquisa, que, ao analisar as contribuições do CDI-I para a formação dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFPA/Belém, para a Educação Básica, sob a ótica das três perspectivas abordadas e com o apoio teórico descrito, mostrou as contribuições epistemológicas que a referida disciplina traz para a formação dos futuros professores de matemática da Educação Básica, confirmando a hipótese que levantamos inicialmente de que o CDI-I traz contribuições relevantes para a referida formação.

Aproveito as palavras do professor P_{17}, que diz que *se não tiver um bom piloto, esse carro pode bater na mureta e não sair tão bem, pode chegar no final, vai receber a bandeirada já passado algum tempo do que ele deveria chegar* – ou seja, o aluno passa pela Licenciatura em Matemática e só vai compreender as contribuições que o CDI-I traz para a sua formação já durante a prática, passados já alguns anos, quando alguns prejuízos já foram causados para os alunos da Educação Básica.

Portanto, necessário se faz que, na Licenciatura em Matemática, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, para a consequência da formação, seja moldada aos interesses de quem a necessita aprender, uma vez que um dos possíveis caminhos a serem percorridos por esses licenciandos é o da atuação como professores da Matemática Básica, atuação essa que pode ser mais significativa a partir das interconexões decorrentes do CDI-I com a Educação Básica. Está é uma das mensagens que procuramos passar nesta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ponto de partida para a realização deste trabalho foram as nossas inquietações, enquanto professor da Licenciatura em Matemática, que culminaram na situação que nos levou a perguntar de que forma o Cálculo Diferencial e Integral I contribui para a formação de futuros professores de matemática da Educação Básica?

Procuramos analisar tais contribuições sob a ótica de três pontos de vista: do conhecimento do aluno diante de algumas questões envolvendo conteúdos da Matemática Básica que se interconectam com o CDI-I; do próprio conteúdo da disciplina, por meio da discussão de algumas questões que abordam essas interconexões; e, por último, do ponto de vista da fala dos professores da referida disciplina, no que diz respeito à temática abordada.

Com a finalidade de nos situar na pesquisa, levantamos teses e dissertações que abordassem a temática por nós discutida, as quais tratassem de trabalhos sobre o CDI realizados em Licenciaturas em Matemática, e também sobre a Taxonomia SOLO (neste caso, sem delimitação de um curso específico). Esses trabalhos se mostraram fundamentais para o desenvolvimento deste.

Os resultados apontam que as três perspectivas analisadas concordam entre si, uma vez que em todas se evidencia de alguma forma que o CDI-I mobiliza contribuições relevantes para a formação dos referidos alunos.

Sob a perspectiva do conhecimento dos alunos, observamos que os resultados se mostraram satisfatórios e que, como mencionado antes, pode ter sido impulsionado pelo modelo de questão, o qual pode fazer vislumbrar nos referidos alunos, significados para os quais se justifica a sua matrícula na referida disciplina, quais sejam, as interconexões entre o CDI-1 e a MB. Neste sentido, tais significados estão nas interconexões propostas pelas referidas questões.

Sob a perspectiva do conteúdo da disciplina, observamos várias situações, a partir das quais podemos – na disciplina de CDI-I na Licenciatura em Matemática – fazer interconexões entre as duas disciplinas (Matemática Básica x CDI-I), tendo como propósito tornar a aprendizagem do CDI-I mais significativa para os alunos da referida disciplina.

Sob a ótica dos professores, observamos que a maioria reconhece que, de alguma forma, o CDI-I mobiliza contribuições relevantes para a formação de futuros professores, seja quando dizem que ele amplia o conhecimento da matemática básica, ou quando articulam os conteúdos entre as duas disciplinas na sua prática, ou de várias outras formas, as quais podem ser vistas nos Discursos do Sujeito Coletivo por eles expostos.

Desenvolvemos um Modelo Analítico qualitativo/quantitativo, a partir de ideias oriundas do modelo MQ^2 exposto em Figueiredo (2017), para o qual utilizamos como suporte a Taxonomia SOLO, a cujo modelo (MQ^2) está diretamente vinculado. As primeiras análises geradas, como visto, se mostraram satisfatórias, tanto do ponto de vista dos resultados do experimento, como do próprio modelo.

Do ponto de vista dos resultados do experimento, observamos a relevância do trabalho, no sentido de mostrar significados para os alunos da disciplina de CDI-I, futuros professores. Do ponto de vista do próprio modelo, observamos o surgimento de uma ferramenta que pode ser utilizada em sala de aula, para mensurar – atribuir notas – os resultados da aprendizagem. No caso em questão, o desempenho analisado está diretamente relacionado com a formação do futuro docente, uma vez que um dos fatores primordiais para a atuação do professor de matemática da Educação Básica é o conhecimento do conteúdo, sem o qual o ensino torna-se inviável.

Definimos como uma das fontes de análise o desempenho dos alunos, relacionados a conteúdos de CDI-I que estão interconectados com alguns conteúdos da Matemática Básica. Dessa forma, o nível de desempenho dos alunos nessas e, claro, em outras questões não abordadas aqui são de fundamental importância para falar das contribuições epistemológicas do CDI-I para a formação do futuro professor da Matemática Básica. Além disso, questões com essa configuração são importantes porque tornam a aprendizagem do CDI-I mais significativa para o aluno da Licenciatura em Matemática.

Mostramos algumas situações (questões) extraídas de livros do ensino médio, tais como os de Paiva (2015) e de Ribeiro (2012), por exemplo, e do ensino superior, como o de Stewart (2013), as quais abordam conteúdos tanto da Matemática Básica como do CDI-I, em que interconexões entre as duas disciplinas podem ser feitas, com a finalidade de mostrar as ideias básicas do CDI-I presentes em ambas, as quais podem ser desenvolvidas tanto no ensino médio, como na Licenciatura em Matemática.

No ensino médio, essas ideias podem ser desenvolvidas conjuntamente com os conteúdos de matemática, quando forem evocadas para fundamentar determinados objetos de estudo. Na Licenciatura em Matemática, essas situações podem ser desenvolvidas com a finalidade de dar significação para o CDI-I.

Trabalhos com perspectivas semelhantes podem ou devem ser desenvolvidos com a finalidade de melhorar ou ampliar o que foi aqui desenvolvido, além de diversificar a pesquisa por nós realizada para outras disciplinas do próprio curso de Licenciatura em Matemática, como também para outras licenciaturas – Física, Química, Biologia etc. –, ou ainda estender para outros cursos.

Quanto ao Modelo MQ^2 aqui construído conjuntamente à Taxonomia SOLO, e utilizados para análises de respostas, ele pode ser melhorado ou mesmo modificado, a depender da situação em que será utilizado. Já para as questões abordadas, outras podem ser desenvolvidas com as mesmas finalidades, ou seja, fazer interconexões do CDI-I na direção da matemática da Educação Básica, interconexões estas que expõem a sua contribuição para a formação de futuros professores da Matemática Básica.

Em relação à fala dos professores, não podemos precisar se uma amostra maior com as mesmas características poderia gerar resultados diferentes aos que aqui foram explicitados. Decerto que, na fala desses professores, percebemos que eles relatam que, de algum modo, enxergam as referidas contribuições abordadas neste trabalho, e que a maioria consegue fazer interconexões entre os dois níveis, seja no movimento de ascensão do conteúdo da MB para CDI-I, ou na contramão, do CDI-I para a MB, em conformidade com o que supomos no início deste trabalho.

Em síntese, apresentamos uma pesquisa que, ao analisar as contribuições do CDI-I, sob a ótica das três perspectivas abordadas e com o apoio teórico descrito, mostrou as contribuições epistemológicas que a referida disciplina traz para a formação dos futuros professores de matemática da Educação Básica.

Complementando o descrito, Rezende (2003, p. 16) diz que “será necessário que se defina o que (nós professores) queremos com o ensino de Cálculo, qual o seu papel no ensino superior; isto é, questões pertinentes ao Cálculo e ao seu ensino”. Nessa perspectiva, segundo o que foi mostrado nesta pesquisa, precisamos dar um direcionamento para o CDI-I, olhando para os interessados pela disciplina. É de suma importância que essas questões sejam resolvidas para que a referida disciplina tome um corpo moldado aos interesses de quem o necessita aprender.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. de. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em cálculo I**. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ALÉSSIO, A. **A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica**. 90 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2019.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. 370 f. Tese de Doutorado(Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005

ALMEIDA, C. C. D. **Analise de instrumento de Letramento Estatístico para o Ensino Fundamental II**. 107 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALVES, A. F. S. **Um estudo das atividades propostas em um curso de licenciatura em matemática, na disciplina de introdução ao cálculo diferencial e integral, na modalidade a distância**. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ALVES, F. R. V. **Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis**. 398 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2011.

AMANTES, A.; BORGES, O. **A Taxonomia SOLO como ferramenta metotdológica na pesquisa educacional**. Anais 6º Encontro Nacional de Pesquisa em Educação e Ciências, 2008.

AMORIM, F. V. **Experiência de Atividades para o Cálculo Diferencial e Integral com o Sofftware Geogebra**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rios Grande Norte. Natal, p. 188. 2011.

AMORIM, E. S. **Avaliação do nível de usabilidade do Avale-EB para a Aprendizagem de variabilidade**. 253 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ihéus, 2015.

BEZERRA, C. A. **Proposta de abordagem para as técnicas de integração usando o software Geogebra**. 86 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza-Ce, 2015.

BEZERRA, N. J. F. **A Organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin**. 262 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade do Estado do Amazonas. Cuiabá, 2016.

BIGGS, J. **Calidade del aprendizage universitário.** Narcea: [s.n.], 2006.

BIGGS, J.; COLLIS, K. **Evaluating the quality of learning:** the SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome). New York: Academy Press, 1982.

CHAGAS, P. C.D. **Um projeto de unidade de ensino potencialmente significativo nas cores de Newton por meio dos fenômenos ópticos**. 117 f. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, Campus Manaus Centro, Manaus, 2017.

COSTA, P. K. A. D. **Avaliação da Aprendizagem em Licenciatura em Matemática a Distância**. Dissertação de Mestrado. Universidade estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, p. 197. 2013.

DENARDI, V. B. **Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em matemática.** 285 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria - RS, 2019.

FIGUEIREDO, R. O. M. **Intercontextualidade na prática educativa de iniciação à docência em Matemática para a educação básica**. Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará, Belém. 2017.

FILIPE, M. A. E. R. **A Taxonomia SOLO nos Exames Nacionais de Matemática – 9º Ano**. 180 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos**: teóricos e metodológicos. 3. ed. [S.l.]: [s.n.], 2006.

FONTOURA, L. R. **Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas**. 144 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria - RS, 2016.

GADEA, S. J. S. **Aprendizagem sobre flutuação nas séries iniciais através da inserção de atividades investigativas**. 148 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2016.

GAIA, A. L.; FERNANDES, A. S. **O Curso de Licenciatura Plena em Matemática do IFPA e a Situação dos Egressos no Mercado de Trabalho**. Monografia de Conclusão de Curso. Instituto Federal do Pará, Belém, 2011.

GARIBOTTI, C. R. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do cálculo**: um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal do Rio Grande, Santo Antônio da Patrulha, 2019.

GERETI, L. C. V. **Delineando uma pesquisa**: legitimidades para a disciplina de Cálculo na formação do professor de matemática 164 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: ATLAS SA, 2008.

GROTTI, R. **O Cálculo Diferencial e Integral para ensinar:** a matemática para a Licenciatura em Matemática 182 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

HORNINK, G. G. **Formação continuada de professores de biologia com uso de "softwares livres"**. 123 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Biologia Funcional e Molecular) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Biologia, Campinas, SP, 2006.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis**. 182 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

INEP/MEC. **Nota Técnica IDEB nº 1.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais 'Anísio Teixeira' – INEP, 2007. Disponivel em: <http://portal.inep.gov.br/documentos-e-legislacao3>. Acesso em: 28 abril 2019.

JÚNIOR, A. D. O. C. **Uma estratégia utilizando Robótica para o ensino dos conceitos de velocidade e aceleração escalares**. 164 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino Tecnológico) - Instituto Federal de Educacional, Ciências e Tecnologia do Amazonas, Manaus, 2018.

LEFRÈVE, F.; LEFRÈVE, A. M. **Pesquisa de representação social**: um enfoque qualiquantitativo. 2. ed. Brasília: Liber Livro Editora Ltda, v. 20, 2012.

LIMA, M. S. D. **Uma proposta da aplicação da teoria dos campos conceituais para o ensino de cálculo em cursos superiores.** 206 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Astronomia) - Universidade Anhanguera, São Paulo, 2012.

LINS, R. C. Formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**, Campinas, v. 18, p. 117-123, 2005.

LOPES, Gabriela Lucheze de Oliveira. **A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum**: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática. 198 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

LOPES, Rafael Ferreira. **Uma introdução ao ensino da eletrodinâmica por meio de roteiros, para alunos do ensino fundamental II e a confecção do manual de auxílio**. 152 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, Campus Manaus Centro, Manaus, 2017.

MACHADO, N. J. 1 vídeo (20,42 min). **Matemática - Aula 21** - **Ideias Fundamentais do Cálculo / Funções do 2º grau - Parte 1**. UNIVESP, 06 novembro 2014. Disponivel em: <https://www.youtube.com/watch?v=_nnOMqQoynA&list=PLxI8Can9yAHeamU_QzhnSEm1S5iFkeXvE&index=21>. Acesso em: 01 junho 2020.

MARCONI, M. D. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTINS, E. R. **O uso dos softwares Winplot e Winmat no Curso de Licenciatura em Matemática**: potencialidades, possibilidades e desafios. 126 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2013.

MARTINS, E. S.; ARAÚJO, D. J. G.; OLIVEIRA, R. F. D. **Ensino e aprendizagem de Cálculo I em cursos de licenciatura: limites e possibilidades. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 18 - 32, 2016.

MENDES, T. F. **A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática**: uma análise semiótica**.** 123 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

MINISINI, E. **A evolução do sentido para a noção de função afim para um grupo de estudantes em Matemática**. 254 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. 152 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MOL, S. M. **Prova Brasil**: uma análise da complexidade cognitiva de itens de Matemática por meio da Taxonomia SOLO. 127 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) - Instituto de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Ouro Preto, Mariana, 2019.

MOLON, J.; FIGUEIREDO, E. S. Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software Geogebra. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 156-178, 2015.

MOTTA, C. E. M. 1 Vídeo (56,16 min). **Palestra "Cursos de Licenciatura em Matemática: formação ou deformação inicial de professores?**" Matemática Humanista, Março 25 2019. Disponivel em: <https://www.youtube.com/watch?v=_2c5zRxQ8vo&t=1265s>. Acesso em: 29 Maio 2020.

OLIVEIRA, G. M. D. S. **Estudo da aprendizagem do conceito de limite fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa aplicado à Licenciatura em Matemática.** 258 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade estadual de Roraima. Boa Vista, 2014.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. São Paulo: Moderna, v. 1, Ensino Médio, 2015.

POSSANI, C. 1 Vídeo (23:22 min). Licenciatura em Ciências e Matemática: Cálculo I - Aula 01 - A importância do Cálculo na formação do professor de Ciências. **Publicado pelo canal UNIVESP**, 06 Outubro 2015. Disponivel em: <https://www.youtube.com/watch?v=Rwq_aSsfS1k&list=PLxI8Can9yAHcXiEq9tNy7oYOMhuYYdRrP>. Acesso em: 06 Fevereiro 2021.

PPC: MTM, L. E. M. **Projeto Político Pedagógico**. Instituto Federal do Pará. Belém. 2007.

PPC: MTM, L. E. M. **Projeto Pedagógico do Curso**. Instituto federal do Para - IFPA. Belém. 2017.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. História do número e: gênese e aplicações. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**, p. 31-44, 2013.

QUINTANEIRO, W.; GIRALDO, V.; PINTO, M. F. De onde vem a unidade radiano e por que seu uso é necessário. **Encontro Nacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro** (EEMAT), p. 1-11, 2010.

RAMOS, W. M. P. **Um Ensino de eletrostática planejado construtivamente para o Nono Ano**. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Ensino de Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, Manaus, 2016.

REIS, E. L. dos. **O processo de construção de objetos de aprendizagem em cálculo diferencial e integral durante uma atividade de design**. 154 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 450 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

REZENDE, W. M. **Dificuldades com o ensino de cálculo**: uma cartografia simbólica. Editora Appris, 2020.

RIBEIRO, A. A. N. **O Entendimento de estudantes do ensino médio sobre Sistema de Referência e Movimento Relativo**. FACULDADE DE EDUCAÇÃO DA UFMG. BELO HORIZONTE, p. 139. 2005.

RIBEIRO, J. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. I - Ensino Médio, 2012.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. **A**s pesquisas denominadas do tipo "Estado da Arte" em Educação Matemática. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37-50, Dezembro 2006.

SABATKE, J. M. **Conceito de limite sob a perspectiva da resolução de problemas mediada pelo software Geogebra**. 217 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do estado de Santa catarina, Joinville, 2018.

SANTOS, F. B. **Análise da Construção de Pictogramas 3D no Contexto da Aprendizagem de Probabilidade Por Estudantes Cegos e videntes**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de santa Cruz. Ilhéus, p. 108. 2014.

SANTOS, F. V. D. **Modelagem matemática e tecnologias de informação e comunicação**: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTOS, J. C. V. D.; LINS, R. C. Uma discussão a respeito da(s) matemática(s) na formação inicial de professores de matemática. **Educacação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, 2016.

SANTOS, M. B. **Processos de comunicação da disciplina Cálculo I do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância do CESAD/UFS/UAB**. 132 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemáticas) - Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, 2012.

SOUSA, K. R. D. Q. **Cálculo**: uma proposta possível para o ensino médio. 97 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Fededral do Mato Grosso, Barra do Garças, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 1, 2013. Disponivel em: <http://sinop.unemat.br/site_antigo/prof/foto_p_downloads/fot_12991calculo_volume_1_james_stewabt_cob_pdf.Calculo_Volume_1_james_stewart_cor.pdf>. Acesso em: 26 julho 2019.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação Profissional**. 13. ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

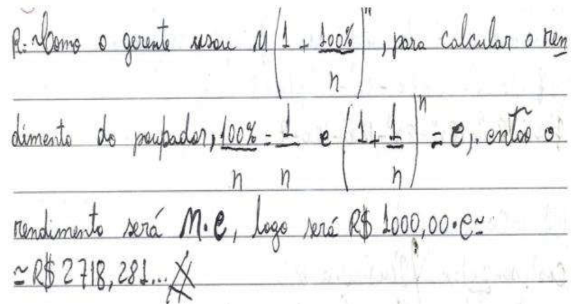
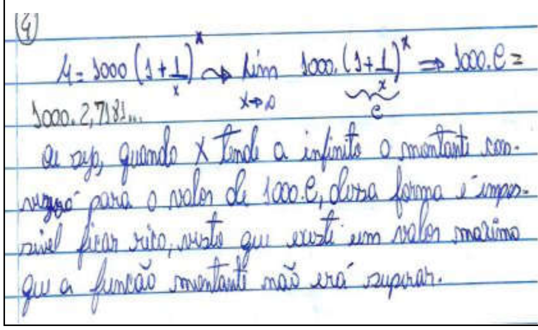
VALENTE, W. R. Matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para a formação do educador matemático. *In*: HOFSTETTER, R. **Saberes em (trans)formação**. 1. ed. SÃO PAULO: Livraria da Física, v. I, 2017, p. 201-227.

VOGADO, G. E. R. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas**. 167 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

ANEXO A – RESPOSTAS DOS ALUNOS

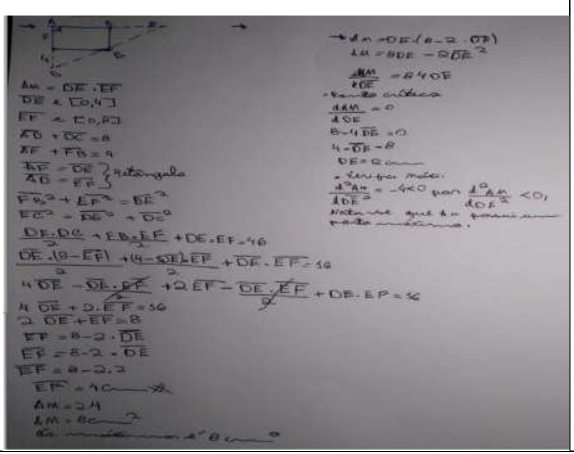
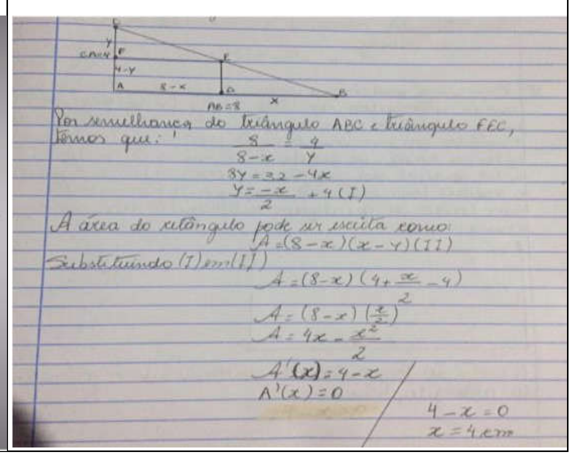
Questão 2 - Respostas dos alunos

<table>
<tr>
<td>Nível 1 – 1 aluno

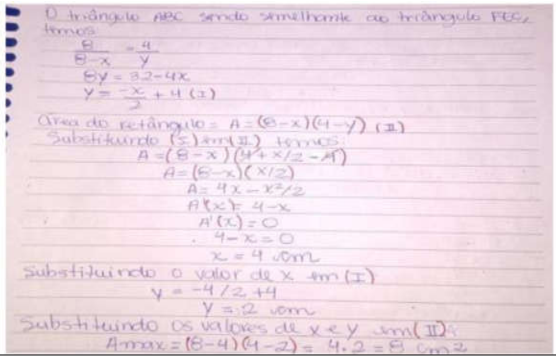
</td>
<td>Nível 3 – 4 alunos

R: Como o gerente usou $M\left(1+\frac{100\%}{n}\right)^n$, para calcular o rendimento do poupador, $\frac{100\%}{n}=\frac{1}{n}$ e $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, então o rendimento será $M \cdot e$, logo será R\$ 1000,00$\cdot e \cong$ $\cong$ R\$ 2718,281...</td>
</tr>
<tr>
<td>Nível 5 – 21 alunos

(4) $M = 1000\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 1000.\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{e} \Rightarrow 1000.e =$ 1000.2,7181... ou seja, quando x tende a infinito o montante converge para o valor de 1000.e, dessa forma é impossível ficar rico, visto que existe um valor máximo que a função montante não irá superar.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Fonte: Respostas dos alunos

Questão 3 – Respostas dos alunos

<table>
<tr>
<td>Nível 2 – 2 alunos
</td>
<td>Nível 3 – 2 alunos

Por semelhança do triângulo ABC e triângulo FEC, temos que: $\frac{8}{8-x}=\frac{4}{y}$
$8y = 32-4x$
$y=\frac{-x}{2}+4\ (I)$
A área do retângulo pode ser escrita como $A=(8-x)(x-y)(II)$
Substituindo (I) em (II)
$A=(8-x)\left(4+\frac{x}{2}-4\right)$
$A=(8-x)\left(\frac{x}{2}\right)$
$A=4x-\frac{x^2}{2}$
$A'(x)=4-x$
$A'(x)=0$
$4-x=0$
$x=4cm$</td>
</tr>
</table>

Nível 4 – 2 alunos



O triângulo ABC sendo semelhante ao triângulo FEC, temos:

$\frac{8}{8-x} = \frac{4}{y}$

$8y = 32-4x$

$y = \frac{-x}{2} + 4$ (I)

Área do retângulo = $A = (8-x)(4-y)$ (II)

Substituindo (I) em (II) temos:

$A = (8-x)(4+x/2-4)$

$A = (8-x)(x/2)$

$A = 4x - x^2/2$

$A'(x) = 4-x$

$A'(x) = 0$

$4-x=0$

$x = 4$ cm

Substituindo o valor de x em (I)

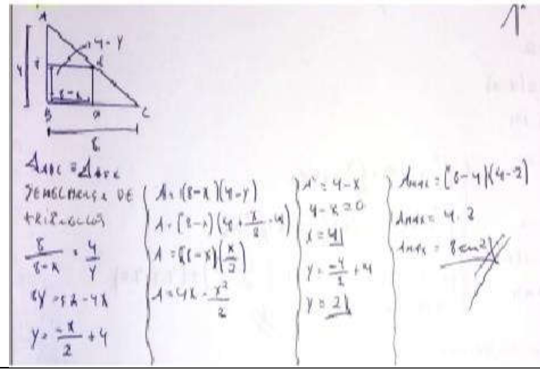
$y = -4/2+4$

$y = 2$ cm

Substituindo os valores de x e y em (II):

$A_{max} = (8-4)(4-2) = 4 \cdot 2 = 8$ cm2

Nível 5 – 20 alunos



$\Delta_{ABC} = \Delta_{FEC}$

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

$\frac{8}{8-x} = \frac{4}{y}$

$8y = 32-4x$

$y = \frac{-x}{2} + 4$

$A = (8-x)(4-y)$

$A = (8-x)(4+\frac{x}{2}-4)$

$A = (8-x)(\frac{x}{2})$

$A = 4x - \frac{x^2}{2}$

$A' = 4-x$

$4-x=0$

$x = 4$

$y = \frac{-4}{2}+4$

$y = 2$

$A_{max} = (8-4)(4-2)$

$A_{max} = 4 \cdot 2$

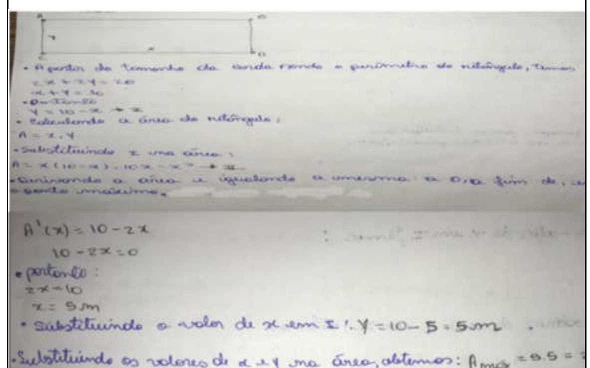
$A_{max} = 8$ cm2

Fonte: Respostas dos alunos.

Questão 4 - Respostas dos alunos

Nível 1 - 1 aluno

Nível 2 – 5 alunos



$A'(x) = 10-2x$

$10-2x=0$

• portanto:

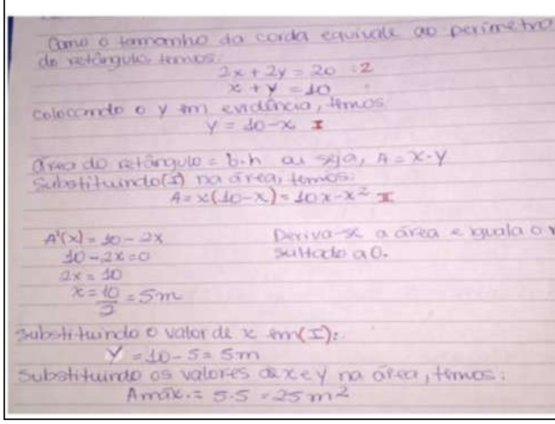
$2x = 10$

$x = 5$ m

• Substituindo o valor de x em I: $y = 10-5 = 5$ m

• Substituindo os valores de x e y na área, obtemos: $A_{max} = 5 \cdot 5 =$

Nível 3 – 9 alunos



Como o tamanho da corda equivale ao perímetro do retângulo temos:

$2x+2y = 20$:2

$x+y = 10$

Colocando o y em evidência, temos:

$y = 10-x$ I

Área do retângulo = b.h ou seja, $A = x \cdot y$

Substituindo (I) na área, temos:

$A = x(10-x) = 10x - x^2$ II

$A'(x) = 10-2x$

$10-2x=0$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$ m

Deriva-se a área e iguala o resultado a 0.

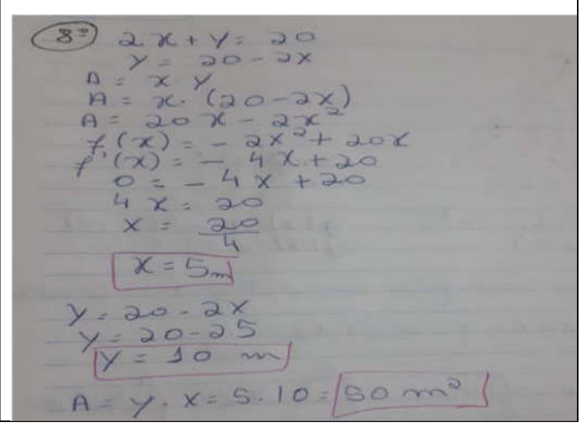
Substituindo o valor de x em (I):

$y = 10-5 = 5$ m

Substituindo os valores de x e y na área, temos:

$A_{máx} = 5 \cdot 5 = 25$ m2

Nível 4 – 5 alunos



8ª $2x + y = 20$

$y = 20-2x$

$A = x \cdot y$

$A = x \cdot (20-2x)$

$A = 20x - 2x^2$

$f(x) = -2x^2 + 20x$

$f'(x) = -4x + 20$

$0 = -4x + 20$

$4x = 20$

$x = \frac{20}{4}$

$\boxed{x = 5 m}$

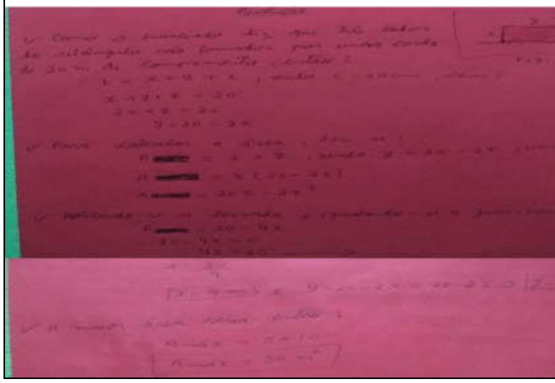
$y = 20 - 2x$

$y = 20 - 2 \cdot 5$

$\boxed{y = 10 m}$

$A = y \cdot x = 5 \cdot 10 = \boxed{50 m^2}$

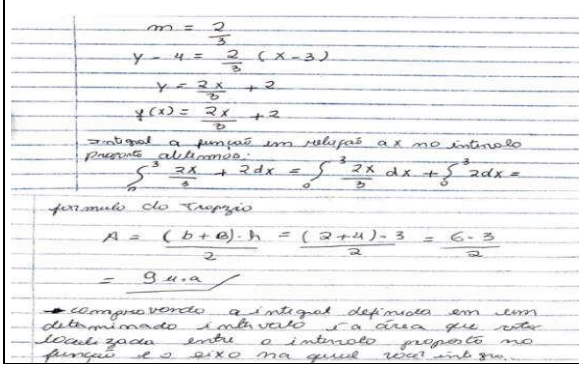
Nível 5 – 6 alunos



Fonte: Respostas dos alunos.

Questão 5 - Respostas dos alunos

Nível 3 - 8 alunos



$m = \frac{2}{3}$

$y - 4 = \frac{2}{3}(x-3)$

$y = \frac{2x}{3} + 2$

$y(x) = \frac{2x}{3} + 2$

integral a função em relação a x no intervalo proposto obtemos:

$\int_0^3 \frac{2x}{3} + 2dx = \int_0^3 \frac{2x}{3}dx + \int_0^3 2dx =$

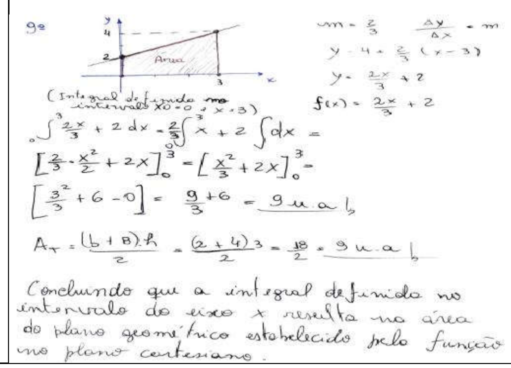
formula do trapézio

$A = \frac{(b+B)\cdot h}{2} = \frac{(2+4)\cdot 3}{2} = \frac{6\cdot 3}{2}$

$= 9\,u.a$

comprovando a integral definida em um determinado intervalo é a área que está localizada entre o intervalo proposto no função e o eixo na qual você integra.

Nível 4 – 18 alunos



$m = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

$y - 4 = \frac{2}{3}(x-3)$

$y = \frac{2x}{3} + 2$

$f(x) = \frac{2x}{3} + 2$

(Integral definida no intervalo $x0 = 0$, $x = 3$)

$\int_0^3 \frac{2x}{3} + 2\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x + 2\int dx =$

$\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 = \left[\frac{x^2}{3} + 2x\right]_0^3 =$

$\left[\frac{3^2}{3} + 6 - 0\right] = \frac{9}{3} + 6 = 9\,u.a$

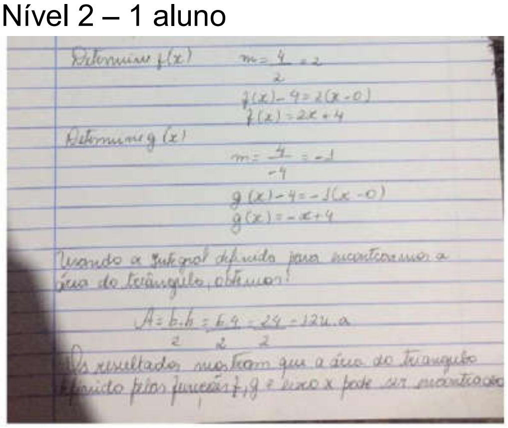
$A_T = \frac{(b+B)\cdot h}{2} = \frac{(2+4)3}{2} = \frac{18}{2} = 9\,u.a$

Concluindo que a integral definida no intervalo do eixo x resulta na área do plano geométrico estabelecido pela função no plano cartesiano.

Fonte: Respostas dos alunos

Questão 6 - Respostas dos alunos

Nível 2 – 1 aluno



Determinar $f(x)$ $\quad m = \frac{4}{2} = 2$

$f(x) - 4 = 2(x-0)$

$f(x) = 2x + 4$

Determinar $g(x)$ $\quad m = \frac{4}{-4} = -1$

$g(x) - 4 = -1(x-0)$

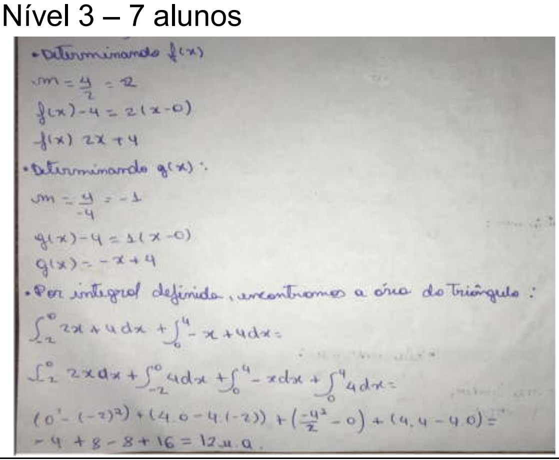
$g(x) = -x + 4$

Usando a integral definida para encontrarmos a área do triângulo, obtemos:

$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{6\cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12\,u.a$

Os resultados mostram que a área do triângulo definido pelas funções f, g e eixo x pode ser encontrado

Nível 3 – 7 alunos



• Determinando $f(x)$

$m = \frac{4}{2} = 2$

$f(x) - 4 = 2(x-0)$

$f(x)\ 2x + 4$

• Determinando $g(x)$:

$m = \frac{4}{-4} = -1$

$g(x) - 4 = 1(x-0)$

$g(x) = -x + 4$

• Por integral definida, encontramos a área do triângulo:

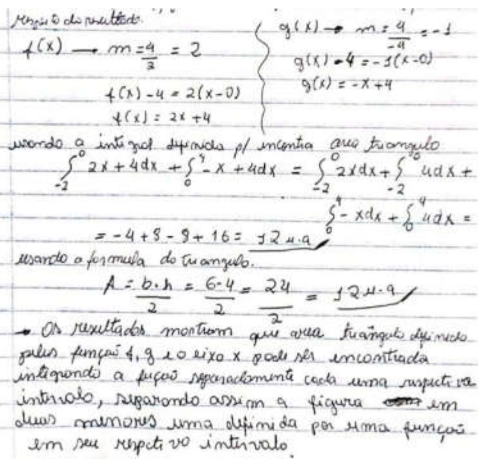
$\int_{-2}^{0} 2x + 4dx + \int_0^4 -x + 4dx =$

$\int_{-2}^{0} 2x\,dx + \int_{-2}^{0} 4dx + \int_0^4 -x\,dx + \int_0^4 4dx =$

$(0^2 - (-2)^2) + (4\cdot 0 - 4\cdot(-2)) + \left(\frac{-4^2}{2} - 0\right) + (4\cdot 4 - 4\cdot 0) =$

$-4 + 8 - 8 + 16 = 12\,u.a.$

<table>
<tr><td>Nível 4 - 16 alunos</td><td>Nível 5 – 2 alunos</td></tr>
<tr><td>



Registro dos resultados

$f(x) \rightarrow m = \frac{4}{2} = 2$

$f(x) - 4 = 2(x - 0)$

$f(x) = 2x + 4$

$g(x) \rightarrow m = \frac{4}{-4} = -1$

$g(x) - 4 = -1(x - 0)$

$g(x) = -x + 4$

usando a integral definida p/ encontrar area triangulo

$\int_{-2}^{0} 2x + 4dx + \int_{0}^{4} -x + 4dx = \int_{-2}^{0} 2xdx + \int_{-2}^{0} 4dx + \int_{0}^{4} -xdx + \int_{0}^{4} 4dx =$

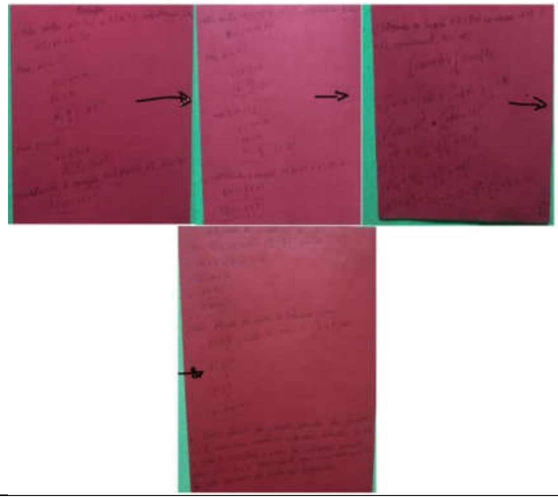
$= -4 + 8 - 8 + 16 = 12 u.a$

usando a formula do triangulo.

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 u.a$

→ Os resultados mostram que area triangulo definido pelas funções f, g e o eixo x pode ser encontrada integrando a função separadamente cada uma respectiva intervalo, separando assim a figura em duas menores uma definida por uma função em seu respectivo intervalo.

</td><td>



</td></tr>
</table>

Fonte: Respostas dos alunos

ANEXO B – RESULTADOS DA PARTE QUALITATIVA DO DSC

Quadro 17: Expressões - chave do Discurso do Sujeito Coletivo por categoria – Questão 1

Categorias	**Expressões-chave do Discurso do Sujeito Coletivo**
A	*$P_{15.}$ Apesar da importância do Cálculo no currículo de alguns cursos superiores, ele tem se tornado um desafio para estudantes que vão revelando suas dificuldades turma a turma, período a período, aumentando mais ainda a ideia da disciplina complexa e difícil.*
B	*$P_{16.}$ No cálculo I, o estudante da licenciatura em matemática tem a possibilidade de ver a estrutura básica do cálculo diferencial e integral,* ***e*** *P_7 ...* ***diz que*** *contribui para as disciplinas de cálculo dois, três e, bem como para disciplina de analise real, quando demonstramos todos os teoremas de limites e derivadas.*
C	*$P_{8.}$ É de uma importância fundamental, em razão de ser a primeira disciplina de cálculo e necessitar da base da Aritmética, da Álgebra, da Trigonometria e da Geometria Analítica, assuntos vistos no Ensino Fundamental e Médio.*
D	*P_1 Penso que, o CDI-I revolucionou a matemática e a física, posteriormente, contribuiu para agregar certo nível de formalismo e credibilidade às outras ciências. Sob esta ótica, um aluno da Licenciatura em Matemática deve perceber as relações da matemática e o uso de seu instrumental em outras ciências e como usar essa linguagem, P_3 ... utilizando por exemplo, na Álgebra, na Geometria Analítica, tendo aplicabilidade em todo o curso de matemática, além de física e química e disciplinas iniciais do curso. P_{12} ... A matemática é aplicada em várias áreas do conhecimento humano e o cálculo diferencial e integral é uma ferramenta importante para explicar e comprovar muitas descobertas científicas.* *P_{14} ...O conceito de limite implica o conceito de derivação que repercute a antiderivação e suas aplicações nas mais diversas áreas dos saberes que extrapolam o contexto da componente abrindo um leque de aproximação com outras componentes curriculares promovendo sua entrada em um processo de estudo interdisciplinar,* ***que*** *P_6 mostrando aos discentes do curso de licenciatura em matemática as implicações dos conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e IntegraL I, na Geometria, na Álgebra quando o discente evidencia também os conceitos de derivada na Geometria Analítica e na Física, os conceitos da Integral definida nas demonstrações de fórmulas da Geometria e aplicando também no cálculo de área.*
E	*P_5 revela que os conteúdos de CDI-I principalmente no início da disciplina contribui com tudo em uma análise revisada e avançada nos conteúdos de matemática da educação básica, e P_1 diz que de maneira mais específica, o CDI-I é configurado pelo estudo de funções reais e como as grandezas são relacionadas entre si. É o conhecimento do CDI-I que permite uma compreensão mais ampla do estudo de conjuntos, funções elementares e etc., ou seja, uma forma de olhar para certos fenômenos de uma outra perspectiva que vai reforçar o conhecimento de conteúdos de matemática, estudados na educação básica. P_9 diz que do ponto de vista matemático é uma forma de ampliar o conhecimento matemático do conhecimento especifico, é uma forma de ele poder exercitar todo o conteúdo matemático aprendido no ensino médio e de aplicar em situações reais esse conteúdo.* ***Dessa forma*** *P_4 o licenciando deve familiarizar-se com as ideias-chave do Cálculo 1, incluindo a manipulação de equações e funções elementares, desenvolver fluência com a metodologia preliminar de tangentes e limites e a definição de uma derivada. Desenvolver e praticar métodos de cálculo diferencial com aplicações e também do cálculo integral. Assim, a formação desses profissionais com um conhecimento mais aprofundado na área de Matemática poderá contribuir para a melhoria da educação.* *P_{11} Como a Matemática na sua construção busca a generalidade dos conteúdos, no meu ponto de vista o Cálculo Diferencial e Integral I contribui na formação do nosso aluno no sentido que ele consiga enxergar do particular para o geral.* *P_{12} ... A matemática básica, por exemplo fatoração, é utilizada em cálculos do ensino superior, ou seja, existe uma necessidade de estudos básicos para desenvolver uma matemática sofisticada. P_{13} ...Desse modo, conhecer mais sobre esses conceitos os permitirá ter um olhar amplo sobre outros conteúdos.*

	P_{13} ...No caso da integral definida e sua relação com o cálculo de área; a derivada e sua relação com a velocidade e aceleração, Equações Diferenciais Parciais e sua relação com problemas práticos, como o de dilatação, as funções e sua relação com a geometria analítica, dentre outros exemplos. Estudar cálculo permite que o licenciando em matemática tenha um olhar amplo acerca da matemática e de outras áreas, as quais se desenvolverão somente a partir desses conceitos. Isso viabilizará sua prática enquanto professor de matemática. *P_{14}...O conceito de limite implica o conceito de derivação que repercute a antiderivação e suas aplicações nas mais diversas áreas dos saberes que extrapolam o contexto da componente abrindo um leque de aproximação com outras componentes curriculares promovendo sua entrada em um processo de estudo interdisciplinar que pode repercutir no seu fazer enquanto potencial professor da Educação Básica.*
F	*P_8 elevando a cultura matemática que vai dá sustentação à formação. Nesta disciplina, o raciocínio é bem mais exigido, do que no ensino médio. Um exemplo disso é o conteúdo de Limite de Função a uma Variável, em que o aluno se defronta com a primeira grande dificuldade do curso; entender esta definição que envolve ϵ e δ, e que apresenta grande dificuldade, como também, é base para outros conteúdos, como derivada de função a uma variável.* *P_2 entendo que a intenção da disciplina de CDI-I, não seja somente para formar professores para atuar na educação básica, reconheço que é também para preparar o futuro professor para a pesquisa. O CDI-I é uma porta para que o aluno se prepare para o trabalho, e a pesquisa, uma vez que no cálculo se encontra uma grande história da evolução da matemática, como pode ser comprovado em pesquisas da área da matemática. Então, se o aluno tiver um bom relacionamento com CDI-I, a partir daí ele tem uma grande possibilidade de trabalhar também na pesquisa, porque um dos vieses da formação do professor, mais especificamente, da nossa Licenciatura em Matemática não é, a princípio, só a formação de professores de Matemática da educação básica, também nos preocupamos em iniciar o aluno na pesquisa.*
G	*P_{10} A abordagem dos conteúdos referente à disciplina em questão tem a função de descortinar as primeiras percepções acerca dos conceitos e aplicações de temas como limites, derivadas e integrais das funções reais. Além do resgate de conteúdo do Ensino Médio e suas correlações com situações práticas e cotidianas, tais como o comportamento da trajetória de um objeto e os elementos envolvidos no processo, tais como, velocidade, aceleração, volume, dentre outros.*
H	*P_{17} ...a contribuição do cálculo é fundamental porque se a gente for olhar, o CDI-I ele é basicamente função, é um curso de função, só que com um olhar mais elevado um olhar mais profundo e do que eu chamo de função onde tudo acontece no CDI-I, toda uma rede de articulações de conhecimentos que podem ser exploradas. A ementa por si só já propicia uma formação profunda para o aluno, por que a partir da função você consegue enxergar muitas coisas. O curso de cálculo oferece elementos que são fundamentais. Se formos pensar bem, quando estudamos, por exemplo, o volume do paralelepípedo é uma função de três variáveis, porque o volume é uma função que depende das três dimensões, qualquer uma dessas variáveis que mudar de valor, varia o volume. Então, o conceito de funções está presente em toda essa parte da matemática básica e as articulações que são feitas. É quase impossível usarmos o conceito de função de forma isolada. Muitas vezes nós não temos visão dessa múltipla articulação do sistema de conteúdo que é montado e às vezes olhamos a função e outros conteúdos de forma isolada e isso nos faz perder muito no que diz respeito ao ensino do cálculo 1.* *Na minha opinião, função é um conteúdo que vai subsidiar de forma profunda a formação do licenciando em matemática. Ressalto que é preciso ser trabalhado essa articulação no curso de formação inicial e aí que entra o papel da relação que os professores têm com o PPC e com os conteúdos que serão trabalhados. Se o professor formador não tiver uma boa relação com esse conteúdo, o mesmo vai ser trabalhado de forma dicotomizada, muito quebrada, o professor não conseguirá fazer essas articulações e o aluno, consequentemente vai assistir aulas de Matemática da mesma forma que ele assistiu no ensino médio, sem estar preocupado com a formação dele, e aí eu falo mesmo a nível de IFPA.*

	Se não tivermos a preocupação, na disciplina de cálculo 1 por exemplo, não vai ajudar o aluno durante a sua formação inicial. Então o curso de cálculo, limite derivada e integral para mim é fundamental para a formação inicial do aluno para ele trabalhar na Educação Básica, porque ele vai conseguir olhar de cima para baixo, todavia é preciso que nós professores-formadores tenhamos essa visão que propicia ao aluno enxergar essas articulações. *P_{14} este componente curricular não só articula, mas aprofunda conhecimentos oriundos da Educação Básica. Então, articular conhecimentos aritméticos, algébricos, geométricos em uma única componente curricular pode tornar-se um desafio no início de sua formação inicial...* *P_{17} É claro que é preciso não só criar um ambiente é preciso chamar atenção do aluno e criar situações que o aluno consiga aplicar esses conhecimentos do CDI-I, na educação básica, em questões da Educação Básica, mas na prática valendo nota para ele, resolvendo no quadro como ele entendeu, como é que é explicado por ele, aí eu acho que o aluno começa a ter essa visão. Desse ponto de vista, o cálculo 1 contribui, mais eu penso que o professor formador tem um papel muito grande para construir essa visão para o aluno, caso contrário o aluno só vai se dar conta disso, muito tempo depois já na profissão, como você, como eu, quando eu estava já com 5 anos 10 anos de sala de aula.*
I	*P_{17} Os cursos quando são preparados, eles estão preparados com essa visão, um olhar ascendente e um olhar descendente, no caso do professor que vai voltar para trabalhar na Educação Básica, mas vai querer continuar a se preparar para trabalhar com nível superior, agora cabe ao corpo de professores formadores terem essa visão para poder oferecer para esse aluno essa formação.*
J	*P_{15} a aprendizagem da disciplina de Cálculo nos espaços de ensino superior, sobretudo na Licenciatura em Matemática, tem contribuído para que seus graduandos percebam, utilizem e difundam os conhecimentos adquiridos e mantenham o trabalho do professor sempre em um bom nível profissional, oferecendo aos estudantes do ensino fundamental e médio, o melhor de sua atuação.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 18: Expressões - chave do Discurso do Sujeito Coletivo por categoria – Questão 2

Categoria	**Expressões - chave do Discurso do Sujeito Coletivo**
A	*P_8 A formação do professor de matemática é a construção sólida de uma cultura matemática para que o profissional exerça a profissão.*
B	*P_{16} O cálculo diferencial e integral I é a base para a licenciatura em matemática, ou seja, ele dá o conhecimento suficiente ao licenciando para entender e resolver os problemas que necessitam de uma matemática mais avançada.*
C	*P_4 ... a formação desse professor deverá propiciar o entendimento do processo de construção do conhecimento na área de Matemática, no que diz respeito a conceitos, princípios e teorias, bem como a compreensão do significado da Matemática.* *P_5 ... a matéria CDI-I vem mostrar de maneira contundente uma nova visão do conteúdo da Matemática Básica, o que leva a uma grande modificação na maneira de rever conceitos.*
D	*P_9 entendendo como historicamente, geometricamente e analiticamente o conteúdo do cálculo foi concebido e construído.*
E	*P_8 Mesmo que não use os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral – I nas aulas que desenvolve no ensino fundamental, os conteúdos do Cálculo, contribui com a experiência do saber adquirido.*
G	*P_6: As contribuições da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I ficam evidenciadas quando o discente passa a conhecer as aplicações dos conteúdos da disciplina, na Geometria, Álgebra, física dentre outras que serão apresentadas no desenvolvimento da disciplina.* *P_2 ...é notório que existem alguns conteúdos específicos da matemática da educação básica, que os conceitos de limite derivada e integral são utilizados como ferramenta para ensiná-los, como por exemplo o conceito de derivada (taxa de variação) que é amplamente utilizado no estudo de funções e em geometria analítica.*

H	*P_{17} é no sentido da Integração e articulação entre as ementas das disciplinas. Não dá para as disciplinas serem dissociados como está agora, eu te falei, trabalhar a análise combinatória, se eu não ligo com nada do outro curso, para que essa disciplina? fica complicado. Fundamento da Matemática, o que é que a gente vai trabalhar? aí o cidadão chega lá e vai trabalhar fundamento da Matemática no sentido teórico, só teoria, não vai dar certo esse negócio. Então precisa que essa contribuição parta do PPC.* *P_{13} Muitas vezes, esses tópicos são estudados de maneira dissociada, isso porque o professor não consegue relacionar tantos objetos matemáticos. Logo, sua prática fica limitada, consequentemente, a aprendizagem do aluno.* *P_{15} levando em consideração os avanços dessa ciência e a forma como era trabalhada enquanto disciplina de graduação, não há mais sentido ensinar a Matemática pela Matemática.*
I	P_{13} *viabilizar a prática do professor de matemática. Por exemplo, se considerar que uma equação reduzida da reta (y=ax+b), representa o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau. E que, seus coeficientes (a e b) representam muito mais* do que valores reais. *O "a", por exemplo, representa o coeficiente angular da reta que, do ponto de vista da derivação, representa a derivada da função em determinado ponto (que, por sua vez, representa a reta tangente à curva nesse ponto). E que também tem relações com a inclinação da reta (sendo a tangente do ângulo de inclinação dessa reta.*
J	*P_2 Fica evidente que se o aluno que futuramente será professor de Matemática na Educação Básica tiver um bom relacionamento com o cálculo ele pode relacionar vários conteúdos do ensino básico que supostamente são utilizados no Cálculo, como por exemplo, a fatoração, o conceito de função, de valor numérico de função, estudo de gráficos, aritmética, álgebra e geometria.* *P_{10} essas conexões e contribuições às atividades na Educação Básica, funcionaria como o despertar para religar e dar sentido aos conteúdos ministrados durante a Educação Básica e os possíveis conteúdos do curso de graduação em Licenciatura em Matemática.* *P_2 todos esses conceitos, ou conteúdos, ele vai utilizar em sua atividade como professor de Matemática na Educação Básica.*
L	*P_2 ... serve para isso, para ter aquele algo a mais que o professor precisa saber, é claro que o professor tem que ter um nível de conhecimento que vai além do conhecimento que está presente no ensino básico. É Para Isso que o CDI-I contribui, para a formação do professor de matemática, para que ele tenha conhecimento que vai além do conhecimento do aluno, saber por que está ministrando determinado conteúdo.* *P_3 O professor precisa ter um saber acima do conhecimento do aluno, pois ao estudar uma curva, sabe-se que a tangente, coeficiente angular (derivada), área abaixo de curvas (integral) e aplicabilidades em problemas práticos como os de velocidade e aceleração.* *P_{12} ao concluir está disciplina a visão dos alunos de licenciatura em matemática se ampliam na perspectiva do entendimento do comportamento de funções e continuidade. Além disso, aumenta a habilidade de antecipar soluções, prever variações e representar de formas diferentes a estrutura dos conhecimentos da matemática trabalhada na educação básica.* *P_4 O Cálculo oferece condições para que o licenciado tenha o domínio e o conhecimento de métodos e técnicas de ensino para exercer o magistério com qualidade nos ensinos fundamental e médio da educação básica.* *P_{14} ter contato com conhecimentos avançados que extrapolam os tratados na Educação Básica podem promover no licenciando uma melhor ambientação no seu campo de atuação profissional pois, entendo que ao dominar estes conteúdos de forma aprofundada este pode realizar o planejamento, construção e elaboração de situações de aprendizagem mais próximas a realidade dos seus potenciais alunos. Entendo que a medida que manipulamos os objetos matemáticos de forma mais aprofundada, isto é, por meio de tarefas que articulam técnicas em um grau de complexidade mais elevados, podem promover um domínio consistente das tarefas 'fundamentais' que podem conduzir o licenciando a ter uma visão sistemática do grupo de tarefas que podem articular o domínios das técnicas necessárias à*

	compreensão dos objetos de estudos da Educação Básica que, naturalmente, se descortinaram para este professor em formação inicial como técnicas mais simples em relação a que este irá lhe dar na licenciatura. Acredito que a compreensão das tecnologias e do reconhecimento do suporte teórico que viabilizam as construções matemáticas mais simples pode proporcionar ao professor uma elevação do grau de consciência que este tem em relação aos conhecimentos matemáticos que devem ser tratados na Educação Básica. A exemplo superficial podem reconhecer a análise de gráfico de funções como um saber matemático que amadurece no licenciando por este ter contato com técnicas de análise que dão suporte a compreensões avançadas, como decisiva, não só pra resolução de situações de aprendizagem, mas para a elaboração de situações menos sofisticadas que atendem à demanda do currículo da Educação Básica.
M	*P_1 compreender um conjunto mais amplo de fenômenos nos dá oportunidade de perceber, compreender e propor análises sobre fenômenos mais locais. Então se o aluno da Licenciatura em Matemática compreender o comportamento de uma função, pode também compreender como analisar seu gráfico, seus sinais, como pode usar para modelar problemas ou situações diversas. Além disso, no estudo de CDI-I podem perceber também o caráter geométrico de certos fenômenos, ou seja, olhar para um mesmo fenômeno por meio do CDI-I e o Geométrico, pois o CDI-I proporciona essa visualização holística da matemática. As relações do CDI-I e a Geometria e qual geometria está sendo usada.* *P_{11} O professor de matemática precisa de formação para saber resolver problemas simples e complexos como também fazer relações entre os conteúdos matemáticos ministrados no ensino básico. Essas atividades no meu ponto de vista são trabalhadas no Cálculo Diferencial e Integral I de um modo mais avançado através das tarefas e técnicas que se articulam para que o professor seja capaz de dá conta dos problemas trabalhados na educação básica.* *P_{17}* ***em suma, se não tiver um bom piloto, esse carro pode bater na mureta e não sair tão bem, pode chegar no final, vai receber a bandeirada já passado algum tempo do que ele deveria chegar.*** *A minha preocupação é essa, o CDI-I contribui mas muitas vezes o aluno só vai se dar conta dessa contribuição de maneira um tanto tardia, já muito dentro da profissão, com 2, 3, 5, 10 anos é que ele consegue enxergar, porque ele vai construindo a relação dele, eu penso que a construção do conhecimento matemático didático, no sentido cíclico, no aluno pensar em como ele trabalha e como ele deve trabalhar e quais articulações ele deve fazer quando ele está trabalhando, ele ser vigilante no sentido de estar fazendo essa articulação, porque quando ele planejou de um jeito e agora está de outro, ele precisa analisar todo esse contexto, se ele não tem essa análise se ele não tem essa reflexão só vai ter a contribuição matemática pura, mesmo do CDI-I, que de fato não tem como negar, é o carro-chefe para esse pessoal trabalhar no ensino básico.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 19: Expressões - chave do Discurso do Sujeito Coletivo por categorias – Questão 3

Categorias	**Expressões - chave do Discurso do Sujeito Coletivo**
A	*P_3 completamente, destoada. Penso que não haja ligação entre o ensino superior e os assuntos ministrados na Educação Básica,* *P_{16}* na proposta curricular ... não tem o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral na educação básica, mais precisamente no ensino médio. Como professor de matemática também dessa etapa, eu vejo um atraso no sentido de não contemplar esse assunto de extrema importância para o estudante, já que o cálculo diferencial e integral é a porta de entrada para o mundo da matemática mais avançada. *... P_3 deveria já haver tarefas em nível de complexidade crescente, para que já neste nível, aproxime às práticas com as do ensino superior. No ensino básico se estuda a prática e no superior as teorias.*
B	*P_5 é imprescindível uma boa base matemática para que um estudante de CDI-I obtenha êxito na mesma, está exatamente nessa necessidade a relação entre os conteúdos de ensino básico e a disciplina de CDI-I na faculdade.*

C	*P_8 é uma questão de experiência. Os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral – I funcionam como uma ampliação da visão. Certamente, o professor de Matemática, de posse dos conteúdos e da experiência da formação matemática, os conteúdos do ensino básico serão melhores desenvolvidos por esse profissional do ensino.*
D	*P_4 O conteúdo de Cálculo nos permite atuar como um docente que problematize, juntamente com os alunos da educação básica, os conhecimentos de Matemática e de suas inter-relações com as demais ciências. Proporciona conhecimentos e análises de áreas afins que sirvam como instrumento de representação e interpretação de dados científicos.*
E	*P_6 O conteúdo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral está relacionado com a Geometria, a Álgebra, a Física no Ensino Médio, quando aplicamos os conceitos de derivada na Geometria Analítica no cálculo do coeficiente angular de uma reta tangente e reta normal.* *P_6 no cálculo de equações da velocidade, aceleração instantânea, os conceitos da Integral definida nas demonstrações de fórmulas da Geometria e aplicando também no cálculo de área.* *Portanto, P_7 existe uma relação de interdisciplinaridade com todos os assuntos do 1ª ao 3ª ano, quando em algum momento falamos de aplicações de funções, sequências aritméticas e geométricas, áreas de figuras planas e etc.* *P_{11} os conteúdos que se trabalha no cálculo diferencial e integral I, também nesses, são trabalhados aqueles que são ministrados na educação básica, esses conteúdos estão articulados pelas tarefas e técnicas proposta no Cálculo.* *P_{10} Conteúdos como continuidade e limite de uma função real geralmente torna-se possível essa associação a partir dos conceitos das funções elementares na Educação Básica. Calculo de área e volume também na geometria da Educação Básica pode se mostrar alguns casos com o auxílio dos conceitos de derivada e integral. Reforço o cotidiano de sala de aula torna-se possíveis essas e outras conexões, entretanto na minha prática, utilizo essas abordagens em oficinas, projetos de pesquisas e feiras de ciências, e esse fato deve-se ao tempo de sala de aula ser muito curto e necessidade de ministrar todo o conteúdo da disciplina de matemática da Educação Básica.* ***Portanto**, P_{17} eu acho que o assunto de CDI-I, basicamente como está colocado na questão, em relação a matemática básica, tem tudo a ver, até pelo que eu já coloquei nas outras questões, função é a espinha dorsal, então se o aluno conseguir captar essa relação que a função permite fazer com os outros conhecimentos ele vai para a sala de aula com uma contribuição imensa, ele vai fazer articulação de função com os conhecimentos da geometria espacial, da geometria plana, com a trigonometria, tudo isso no ensino básico.* ***Enfim** P_{17} tudo a ver a questão, é só olhar que enquanto professor noviço, quando eu entrei na sala de aula eu não conseguia enxergar, não conseguia fazer essa articulação. Como é que eu dava aula de conjunto, abrir lá conjunto panpanpan, saia de conjunto para entrar em função, conjunto, par ordenado, relação, função, para você ver, daquela maneira muito incipiente de se enxergar a função, você constrói a partir de conjunto você não constrói a partir de uma relação mais universal, de uma relação que está no dia a dia.* *P_{14} Assim desde o uso manipulativo das operações polinomiais para a obtenção do limite de uma função a processos mais complexos como o cálculo de áreas sob curvas por meio de processos integrativos de uma função polinomial ou não, em que saberes derivativos do estudo da geometria analítica ou, simplesmente a partir da compreensão de conceito de derivação como o coeficiente angula de uma reta que tangencia uma curva em determinado ponto podem nos fazer compreender se este ponto é o ponto de máximo, de mínimo ou uma inflexão de uma certa curva em estudo, bem como a corriqueira analogia em que um função assume um modelo descrito por um ponto em movimento, nos permitindo calcular velocidade e aceleração deste.* *P_{13} Função polinomial do grau: y=ax+b (pode ser visualizada do ponto de vista de uma equação reduzida da reta, cuja equação geral é ax+by+c=0); O coeficiente angular (a), não tem esse nome por acaso. Ele está relacionado à tangente do ângulo de inclinação da reta. Quando a<0, a função não é apenas decrescente. A tangente de seu ângulo de inclinação é negativa (o que do ponto de vista do ciclo trigonométrico representa que esse ângulo pertence ao 2 ou 4 quadrante); Se a>0, então, além da função ser crescente, podemos verificar que tangente de seu ângulo de inclinação é positiva (ou*

	seja, o ângulo pertence ao 1 ou 3 quadrante); Mas afinal, o que é reta tangente? Isso pode ser evidenciado a partir da própria representação gráfica de derivada da função no ponto (a qual apresentamos a reta tangente a curva em um ponto determinado, ou seja, $f'(x_0)$; Quando estudamos geometria analítica, verificamos que a equação da reta pode ser obtida da seguinte forma: $(y - y_0) = m(x - x_0)$; Esse m, nada mais é que o coeficiente angular da reta (ou o próprio $f'(x_{0)})$. (é possível também obter a equação da reta por meio de um sistema construído a partir das coordenadas dos pontos, ou ainda do determinante de uma matriz, afinal, se os pontos estão alinhados, então o determinante é igual a zero). Enfim, esses são exemplos de aplicações e relações do Cálculo na própria matemática básica.
F	*P_{15} O Cálculo permite que o futuro professor compreenda como a matemática está fundamentada ou mesmo validade; visto que o Cálculo permite a formalização das principais temáticas da matemática, que começam lá na educação básica.* *P_9 para que os licenciandos entendam e ampliem seus conhecimentos sobre área, volume, velocidades e aplicações desses conceitos em outras áreas do conhecimento como Física, Química, Biologia, Estatística e etc.*
G	*P_1 como citado anteriormente, o CDI-I amplia o olhar sobre funções e sobre a geometria (ou as geometrias). Justifica a existência de outras geometrias. Compreender o cálculo permite compreender melhor o módulo de números reais, a representação gráfica das informações, a relação entre álgebra e geometria, as equações como funções em pontos estáticos, o porquê dos termos variável e incógnita, o dinamismo dos problemas que envolve tempo, pensar em outras relações entre grandezas que não seja apenas da forma y=kx (diretamente proporcional a uma outra grandeza linear), podemos perceber que pode haver grandezas que são proporcionais ao quadrado de outras, a tripla potência e etc., há uma gama de conteúdos da matemática básica que se relacionam com o cálculo,* ***ou seja****, P_2 relaciono como ferramenta, porque quando o nosso aluno for atuar, ou seja, ministrar aula, ele precisa ter sempre que evocar essas ferramentas, ele precisa ter conhecimento prévio dessas ferramentas, como fatoração e função por exemplo, serão necessárias para a construção do conhecimento no ensino superior, não somente em Cálculo, como também em outras áreas do conhecimento, é como se estivéssemos construindo ferramentas para utilização a posteriori. Então, a relação que faço, é quando estou ministrando a disciplina CDI-I que se dá no momento em que faço a construção do conhecimento de cálculo. Nesse momento, eu preciso dessas ferramentas, ficando evidente, quando estou definindo o limite, ou quando estou resolvendo limites por fatoração, mas sempre chamo a atenção: “olha aí aluno, isso aí vocês vão ensinar na educação básica.* ***Logo****, P_2 eu faço dessa forma, mostrando para eles que aquele conhecimento do ensino básico é amplamente utilizado no cálculo.*
J	*P_{17} Penso que melhor seria* ***o professor olhar na perspectiva de uma retroalimentação e não de forma linear “de cima para baixo” ou “de baixo para cima”.*** *O licenciando corre o risco de não propiciar para o aluno do ensino básico uma boa relação e aí a gente acaba fazendo um continuísmo ele foi formado o mal, ele forma mal alunos da Educação Básica muitos desses vão para o curso de matemática com uma visão muito incipiente e acaba ficando cada vez pior e cada vez vai acontecendo o que está acontecendo cada vez se sabe menos matemática.* *A pessoa vai mudando, o conteúdo matemático a mesma coisa, a gente não quer que o aluno saia pronto e acabado, quer que saia com um arcabouço prático teórico que lhe permita trabalhar a matemática de forma que o aluno dele da Educação Básica construa uma boa relação com matemática e não uma relação só de número pelo número, então, olhar o CDI-I relacionado com a educação básica, para mim o ideal seria que o aluno consiga enxergar os conteúdos de Educação Básica com esse olhar no CDI-I porque quando ele vai trabalhar volume quando ele vai trabalhar a área que é uma coisa tão simples, na terceira série, a área é uma função de duas variáveis, por que é a área do quadrado base vezes altura a área do retângulo, mas é preciso enxergar o que é área se ele não consegue enxergar o que é área ele vai ver a área, só numérica.*
H	*P_{12} diz que se espera que ao concluir a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral – I o aluno de licenciatura em matemática possa perceber que todas as demonstrações utilizadas, todas as construções e interpretações geométricas apresentadas foram*

	feitas para consolidar, ampliar seus conhecimentos e futuramente utilizar quando estiver em sala de aula.
I	*P_{17} revela que em suma, a matemática básica está ligada diretamente com o CDI-I é preciso só que o aluno tenha oportunidade no curso superior para que ele possa colocar em prática. Na prática dos professores ele tem oportunidade de ver a articulação do CDI-I com esses múltiplos conteúdos da Educação Básica*

Fonte: Elaborado pelo autor.