UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL

MAICO TAILON SILVA DA SILVA

O PENSAMENTO ALGÉBRICO MEDIADO PELO JOGO DE CARTAS RFP

BELÉM-PA
2022

MAICO TAILON SILVA DA SILVA

O PENSAMENTO ALGÉBRICO MEDIADO PELO JOGO DE CARTAS RFP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica (PPGDOC), da Universidade Federal do Pará (UFPA), como requisito obrigatório à obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de professores de Ciências e Matemática.

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática para a Educação Cidadã

Orientador: Dr. José Messildo Viana Nunes

BELÉM-PA
2022

MAICO TAILON SILVA DA SILVA

O PENSAMENTO ALGÉBRICO MEDIADO PELO JOGO DE CARTAS RFP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica (PPGDOC), da Universidade Federal do Pará (UFPA), como requisito obrigatório à obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de professores de Ciências e Matemática.

Data da avaliação:____/____/____.

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – Orientador (PPGDOC-IEMCI- UFPA)

____

Profª. Ma. Nazaré do Socorro Moraes da Silva – Membro Externo
(Universidade Federal do Pará)

____

Profª. Dra. Talita Carvalho Silva de Almeida – Membro Interno (Universidade Federal do Pará)

____

Profª. Dr. José Carlos de Souza Pereira – Membro Externo (SEDUC/PA)

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586p Silva, Maico Tailon Silva da,
O PENSAMENTO ALGÉBRICO MEDIADO PELO JOGO DE CARTAS RFP / Maico Tailon Silva da Silva. — 2022.
xiii, 202 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2022.

1. PENSAMENTO ALGÉBRICO. 2. EQUAÇÃO DO 1º GRAU. 3. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. 4. JOGO DE CARTAS RFP. I. Título.

CDD 370

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Silvia Maria da Silva e Jair Romão da Silva.
À minha irmã Tayna Suelen da Silva.
À minha amada esposa Ana de Nazaré Gomes dos Reis.
À minha avó Celina Gomes da Silva (In Memoriam).
Ao meu padrinho “Pé de Chumbo” (In Memoriam).

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço á **Deus** por cuidar de mim, dando Força, Sabedoria e Orientando as minhas escolhas ao longo desta caminhada importante em minha vida.

Aos meus pais **Silvia Maria da Silva** e **Jair Romão da Silva** pelo cuidado, carinho e atenção ao meu processo educativo, principalmente na construção de valores importantes para esta conquista. Pelo fortalecimento/construção da minha base como pessoa e profissional.

À minha irmã **Tayna Suelen da Silva** por ser inspiração, amiga e pela felicidade que compartilhamos a cada celebração de conquistas.

À minha amada esposa **Ana de Nazaré Gomes dos Reis** por acreditar em mim em todos os momentos desta conquista, pelo companheirismo, pelas energias positivas, por estar ao meu lado em cada momento de felicidade ou dificuldade.

À minha avó **Celina Gomes da Silva** que lá do céu celebra os resultados conosco e é nossa fonte/referência de luta e determinação.

Ao meu padrinho/segundo pai conhecido como **"Pé de Chumbo"**, essa conquista é para o senhor.

Ao meu amigo **Lucas Ferreira Rodrigues**, professor de matemática em Parauapebas, mestrando em Educação Matemática e uma grande referência em pesquisa no ambito da educação e educação matemática. Gratidão pelas constribuições em minha pesquisa e parceria em publicações de trabalhos acadêmicos

Ao meu orientador **José Messildo Viana Nunes** por todo incentivo, orientação e apoio nesta construção, por acreditar em mim mesmo nesse processo.

Ao **Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM)** da **Universidade Federal do Pará** por toda constribuição na construção deste trabalho.

EPÍGRAFE

“Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar.”

Paulo Freire

RESUMO

Nesta pesquisa expomos resultados de estudos e criação desenvolvidos com base na relação possível entre os jogos de cartas e a Regra da Falsa Posição (RFP), cuja interseção possibilitou a constituição do jogo de cartas RFP contribuinte aos estudos relativos à equação polinomial do primeiro grau, através de processos numéricos, remontando maneiras/modos de perceber e manipular elementos matemáticos, especialmente sob o domínio algébrico, promovidos em civilizações egípcias, babilônicas e chinesas, cujas habilidades foram preponderantes ao desenvolvimento dos conhecimentos algébricos. Objetivamos evidenciar a potencialidade presente em um método numérico na combinação com jogos de cartas, possibilitando boas aprendizagens matemáticas especialmente relativas a equações polinomiais do primeiro grau propiciando o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de suas caracterizações. Elencamos como pergunta de pesquisa: em que medida a Regra da Falsa Posição (RFP) combinada com um jogo de cartas promove o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino de equações polinomiais do primeiro grau? Coletamos os dados para análise de maneira empírica através do uso do jogo com professores e, em uma turma do 8° ano do ensino fundamental. Utilizamos os pressupostos metodológicos da engenharia didática em nossa pesquisa de cunho qualitativo sob as bases de uma pesquisa-ação. Reportamos-nos no aspecto teórico da pesquisa aos documentos oficiais educacionais como PCN, BNCC e outros, bem como as contribuições de Guy Brousseau com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o modelo relativo ao pensamento algébrico conforme James Kaput e Juan Godino. Nossa pesquisa gerou como produto educacional o jogo de cartas RFP que está em anexo.

Palavras-chave: PENSAMENTO ALGÉBRICO. EQUAÇÃO DO 1º GRAU. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. JOGO DE CARTAS RFP.

ABSTRACT

In this research we expose results of studies and creation developed based on the possible relationship between card games and the Rule of False Position (RFP), whose intersection enabled the constitution of the RFP card game contributor to studies related to the polynomial equation of the first degree, through numerical processes, reassembling ways/ways of perceiving and manipulating mathematical elements, especially under the algebraic domain, promoted in Egyptian, Babylonian and Chinese civilizations, whose abilities were preponderant to the development of algebraic knowledge. We aim to highlight the potentiality present in a numerical method in the combination with card games, enabling good mathematical learning especially related to polynomian equations of the first degree, propitiating the development of algebraic thought from its characterizations. We list it as a research question: to what extent does the False Position Rule (RFP) combined with a card game promote the development of algebraic thinking in the teaching of polynomian equations of the first degree? We collected the data for empirical analysis through the use of the game with teachers and in a class of the 8th year of elementary school. We used the methodological assumptions of didactic engineering in our qualitative research, under the bases of an action research. We report on the theoretical aspect of research to official educational documents such as PCN, BNCC and others, as well as the contributions of Guy Brousseau with the Theory of Didactic Situations (TSD) and the model related to algebraic thought according to James Kaput and Juan Godino. Our research generated as an educational product the rfp card game that is attached.

Keywords: ALGÉBRICO THOUGHT. 1ST DEGREE EQUATION. THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS. RFP CARD GAME.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Quadros

INTRODUÇÃO

O conhecimento algébrico depreendido nos espaços escolares é reconhecido como importante objeto de conhecimento matemático com grande relevância no currículo escolar brasileiro. Os direcionamentos, proposições, observações e recomendações presentes nos documentos oficiais educacionais, como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) confirmam a importância da Álgebra Escolar como peça fundamental na educação básica matemática.

Sobre as ideias da álgebra, Booth (1995, p.30)[1] nos apresenta que a principal diferença entre “a aritmética e a álgebra é, obviamente, a utilização, nessa última, de letras para indicar valores”. Mesmo sabendo que letras são expressas também em aritmética, ela lembra a diferenciação de sentidos de uma em relação à outra. No caso da letra “m”, por exemplo, “pode ser utilizada em aritmética para representar ‘metros’, mas não para representar o número de metros, como em álgebra”[2].

Destas ideias sobre álgebra, fica exposto sua redução a um tipo de linguagem simbólica na qual os símbolos e letras representam unicamente valores desconhecidos. No entanto, há na literatura diversos estudos como Kieran (1992, 1996, 2004, 2007), Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Blanton e Kaput (2005), Arcavi (2005), Kaput (1999, 2008), Radford (2009, 2011b), e entre outros, que concebem a álgebra para além de uma simples linguagem, não representando assim unicamente uma reunião de regras através do uso de símbolos como letras, mas também sob a ideia de generalização e estabelecimento de relações matemáticas, que contribuem para a forma de pensar e raciocinar situações de cunho algébrico matemático.

Ainda há, através da percepção do modelo dominante do ensino de álgebra, a concepção de que o domínio de conhecimento algébrico só é

---

[1] Booth, 1995, p.30
[2] *Ibid.*, p.30

concebido na segunda etapa de escolarização, ensino fundamental anos finais, mais especificamente no 7° ano do ensino fundamental, o qual há uma intensificação no uso de letras e elevação no nível de complexidade no estudo algébrico. Porém, esta visão pode estar corroborando para o aumento nas dificuldades de aprendizagens desse eixo, pois evidenciamos a necessidade de construção inicial do pensamento algébrico já na etapa da educação infantil, e a não atenção a este fato acaba por contribuir para o crescimento das dificuldades de aprendizagens deste eixo temático, visíveis nas etapas posteriores.

Durante minha vivência como estudante na educação básica, houve obstáculos na compreensão de conceitos algébricos e principalmente nas relações possíveis entre conceitos, dos quais destaco equações, especificamente equações polinomiais do primeiro grau com uma variável, equações polinomiais do segundo grau e entre outros assuntos ligados à álgebra. Nas incompreensões, pude contar com o apoio de professores no ambiente escolar e um professor particular, responsáveis por despertar em mim curiosidades sobre a matemática, as quais me levaram até o curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), onde me proporcionou o engajamento em eventos, projeto de iniciação cientifica, imersão em estudos, seminários e entre outras atividades sob o viés da matemática e educação matemática.

Nas experiências foi possível perceber aprendizagens e dificuldades no estudo e ensino de matemática, bem como pesquisador em educação matemática, com ênfase na álgebra, segundo a qual Nóvoa (1988, p.168) afirma a ideia do “sujeito responsável por sua formação” conforme compreende sua trajetória de vida, tornando-se ativo em seu percurso formativo através de apropriações retrospectivas de seu transcurso como aluno e professor.

No que tange a memória em termos individuais e coletivos, evidenciar ações passadas e recentes como estudante de pós-graduação e profissional docente acerca da organização didática em sala de aula, propicia importantes reflexões para a formação docente. Para Sousa (2019, p. 42) essas organizações “são constituídas por meio das vivências passadas e o reflexo atual nas práticas, nas técnicas, símbolos e valores disseminados às novas gerações".

Iniciei na docência, como muitos colegas da área, ministrando aulas particulares, auxiliando alunos no período de avaliações escolares e no preparo para avaliações externas. Nesse percurso construí o projeto "Classe A", onde atuávamos com aulas particulares, o que em seu segundo ano passou a ser curso preparatório, assim iniciei minha carreira docente, construindo oportunidades em decorrência da falta delas. Nessa atuação tive liberdade e oportunidade de aprofundar estudos em vários objetos de conhecimentos da matemática, em especial a geometria analítica, funções e área de figuras planas. A respeito desses temas, pude perceber, por exemplo, a relação entre a equação da reta estudada na geometria analítica e a função do 1° grau, assim como a condição de alinhamento e o cálculo de área de polígonos.

Na ação de (re)pensar a prática profissional de maneira coletiva, entre aqueles que refletem criticamente com os que produzem e comunicam conhecimentos, se constitui em um ato humano gerador de condições favoráveis de ensino e boas aprendizagens, necessária para o ensino e aprendizagem dos alunos.

Assim, das intenções de propor esta pesquisa, e a partir de discussões com o professor Dr. José Messildo (orientador) e o professor Dr. José Carlos, ficou estabelecido o direcionamento para a pesquisa com base no objeto matemático Regra da Falsa Posição (RFP), que através de investigações foi perceptível as potenciais contribuições deste objeto para o ensino e aprendizagem de equação polinomial do primeiro grau, que na combinação com jogos de cartas pode gerar maior engajamento dos estudantes e melhor aprendizagem. Desse modo, a problemática norteadora de pesquisa passou a ser: em que medida a Regra da Falsa Posição (RFP) combinada com um jogo de cartas promove o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino de equações polinomiais do primeiro grau?

Nossa proposição tem por objetivo evidenciar a potencialidade presente em um método numérico na combinação com jogos de cartas, possibilitando boas aprendizagens matemáticas especialmente relativas a equações polinomiais do primeiro grau, propiciando o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de suas caracterizações.

Para responder a problemática norteadora e alcançar o objetivo desta pesquisa, propomos esta pesquisa de caráter qualitativo sob a concepção de uma pesquisa-ação conforme Tripp (2005), bem como os pressupostos da engenharia didática conforme Artigue (1988) e Almouloud (2008). Esta última como metodologia nos possibilitou estruturar a proposta contemplando as análises preliminares responsáveis pela construção do jogo de cartas RFP e seu uso em sala de aula, bem como suas respectivas análises *a priori* e *a posteriori*.

Nas análises preliminares fizemos o estudo histórico epistemológico da Regra da Falsa Posição, objeto de nossa pesquisa, perfazendo os momentos evolutivos da linguagem algébrica que corroboram para a compreensão do surgimento deste objeto e em qual contexto foi instituído esse método numérico de resolver problemas, evidenciando problemas reais e uso da RFP de acordo com Boyer (1974), Radford (2011) e Roque (2012), e de forma breve também é apresentado a Regra da Dupla Falsa Posição.

Realizamos também como estudo preliminar a análise dos documentos oficiais educacionais PCN, PNAIC, BNCC e SAEB, evidenciando as percepções e parametrizações de ações/aprendizagens dos estudantes que caracterizam o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, o pensamento algébrico. Ainda sobre este estudo, são apresentados modelos teóricos conforme Kaput (1999) e Ponte, Branco e Matos (2009) que caracterizam tal pensamento, estabelecendo também níveis de algebrização postulados por Godino e Batanero (2013). Esta pesquisa está organizada em cinco capítulos, que apresentaremos a seguir.

No capítulo I, realizamos um estudo ou análise preliminar sob as dimensões histórico epistemológico da RFP em civilizações Mesopotâmicas, Egípcias e Chinesas, e curricular a partir de documentos educacionais no que se refere ao pensamento algébrico, bem como suas articulações com o jogo de cartas RFP conforme suas vertentes fundamentais de representação, raciocínio e resolução de problemas e formas de modelar uma situação, o que propiciou um preâmbulo inicial para evidenciar as potencialidades da RFP ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na busca de reposta para questão de pesquisa, lançamos mão inicialmente de investigar na literatura pesquisas com foco na RFP e suas potencialidades para um estudo exploratório da álgebra. Das investigações, ficou explicito também as importantes contribuições do uso de jogos no processo de ensino e aprendizagem matemática, por proporcionar maior participação dos estudantes, engajamento e interação.

Em nossa pesquisa, no capítulo II, utilizamos como fundamentação teórica a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986), na qual se estabelece uma (inter)relação entre o aprendiz, o saber e o *millieu* (meio), bem como a articulação entre o jogo de cartas RFP e a TSD.

No que diz respeito ao capítulo III, apresentamos os pressupostos metodológicos da engenharia didática, sob a perspectiva qualitativa e em condições de uma pesquisa-ação.

Em relação ao capítulo IV, de acordo com os pressupostos da engenharia didática, realizamos a análise *a priori*, evidenciando os nossos primeiros movimentos de testagem do jogo de cartas RFP com professores e em turmas do 8º ano. Concluindo com o capítulo v, sessão onde realizamos a análise *a posteriori*, panorama geral do alcance dos objetivos.

Ao longo da pesquisa investigamos nos documentos oficiais e reconhecemos na prática a partir do uso do jogo de cartas RFP como o pensamento algébrico pode ser promovido, ficou observado que mesmo a álgebra assumindo um importante papel no currículo escolar e a preocupação dos documentos oficiais e pesquisadores deste campo de conhecimento através das orientações, normativas e pesquisas, ainda há obstáculos a serem superados, visíveis através das dificuldades de aprendizagem ainda presentes nos estudantes.

Evidenciamos o potencial relativo ao desenvolvimento de práticas de ensino através do uso de jogos, acreditando neste caminho atrativo e dinâmico ao ensino e aprendizagem de matemática.

CAPÍTULO I

A organização da pesquisa se ampara em pressupostos da engenharia didática, partindo inicialmente de aspectos históricos e conceituais, revelando de forma introdutória a gênese do saber, nesse sentido apresentamos a seguir as análises preliminares.

ANÁLISE PRELIMINAR

Em nossa análise preliminar abordaremos o percurso histórico epistemológico da Álgebra, apontando aspectos que conectam a história da álgebra com a regra da falsa posição, método da falsa posição, falsa suposição ou também denominado falso pressuposto, adotaremos este como regra da falsa posição. Apresentamos também, mas de forma breve, a regra da dupla falsa posição. De modo à construção deste preâmbulo inicial, também é foco de nosso estudo concepções e modelos teóricos relacionados ao pensamento algébrico e sua articulação com o jogo de cartas RFP.

1. Breve estudo histórico epistemológico da álgebra

Fontes históricas evidenciam o quão significativos foram os avanços ao longo dos tempos nas ciências, em especial na matemática. As condições e necessidades de registros e contagem do homem promoveram a Matemática como atividade essencial humana em toda e qualquer área de conhecimento.

As primeiras atividades matemáticas ocorreram em práticas na economia agrícola, agrimensura, engenharia, comércio e entre outras atividades. Em se tratando da álgebra, seus primeiros registros têm origem através de soluções aritméticas de problemas cotidianos desenvolvidos pelos Babilônios cujo método de escrita e solução dos problemas não utilizava a notação simbólica atual, pois o que estava ao alcance eram escritas em linguagem cotidiana. Vale destacar que mesmo sem o aparato algébrico moderno, os babilônios possuíam grandes habilidades em resolver problemas utilizando o conhecimento aritmético.

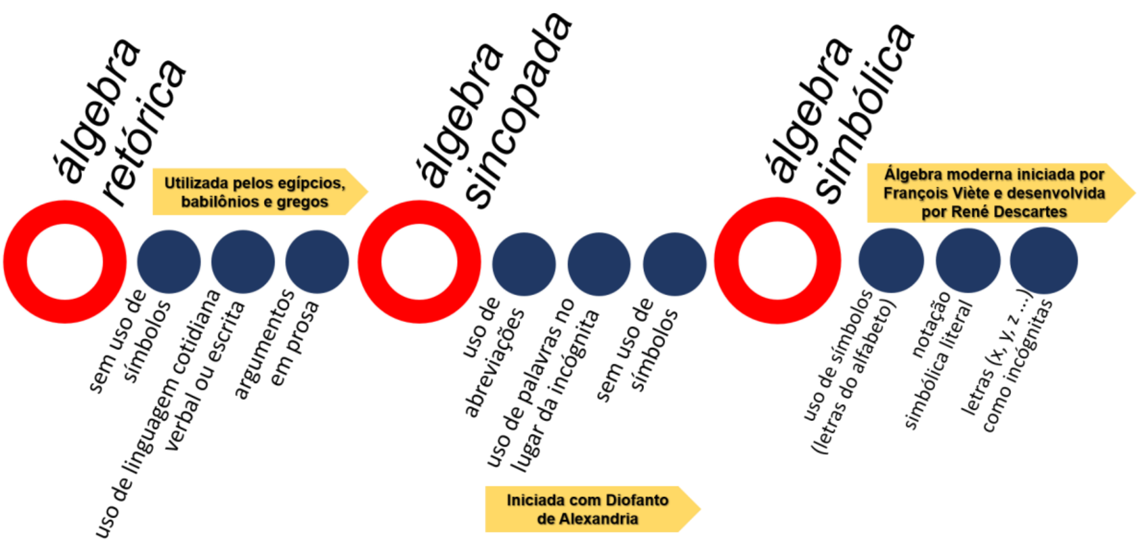
Nesse sentido, vale salientar que a linguagem ou notação algébrica ao longo dos anos perfaz um caminho em três fases: **álgebra retórica**, **álgebra sincopada** e **álgebra simbólica**, do método numérico com o raciocínio proporcional ao simbólico atual, que descrevem o modo como eram e atualmente é dado o tratamento aos problemas sob a visão algébrica e consequentemente interfere no processo de construção do pensamento algébrico.

Segundo Boyer (1974, p.132 - 133):

> Considera-se em geral que podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento histórico da álgebra: (1) o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; (2) um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e (3) um estágio simbólico ou final. Uma tal divisão arbitrária do desenvolvimento da álgebra em três estágios é naturalmente uma simplificação excessiva; mas serve como primeira aproximação ao que aconteceu, e nesse esquema a *Arithmetica* de Diofanto deve ser colocada na segunda categoria.

Tal desenvolvimento da álgebra e sua linguagem podem ser visualizados na figura 1.

Figura 1 - fases de desenvolvimento da linguagem algébrica



Fonte: Organização do autor.

As fases remontam o percurso da álgebra, em que Boyer (1974, p.167) faz um destaque para a contradição no reconhecimento atribuído à Diofanto de Alexandria como “pai da álgebra”, quando na verdade tal titulação pertence mais ao árabe al-Khowarizmi, mesmo havendo aspectos elementares e não uso da sincopação em seus achados quando comparado ao trabalho de Diofanto.

Nesse contexto, na civilização Mesopotâmica surgem atividades sociais, político e econômicas evidenciando uma Matemática emergente às necessidades de atender às demandas provenientes da expansão das cidades, no sentido de dar solução a problemas complexos como o cálculo de juros em um empréstimo, áreas delimitadas por terras ou atividades mercantis. Dos problemas, vale sublinhar a existência de situações práticas e “não práticas” – inclusive presentes atualmente nos livros didáticos –, como exposto por Radford (2011, p.119), sobre este último, “problemas que não possuem uma relação direta com as necessidades práticas”.

Na solução de tais problemas emerge o raciocínio proporcional, área muito desenvolvida pelo pensamento matemático mesopotâmico, que utilizava métodos sofisticados como a regra da falsa posição (RFP) – objeto de nosso estudo –, reconhecida como uma grande aquisição ao pensamento aritmético mesopotâmico. Registros históricos de autores da História da Matemática e datas em documentos importantes da época não expressam com exatidão a origem do método ou regra da falsa posição, mas apontam a civilização Mesopotâmica, Egípcia e Chinesa como fontes de tal método, mesmo havendo diversificação na forma de denominação e concepção quanto a sua generalidade e legitimidade.

A RFP é firmada na suposição de valores falsos, atribuídos às quantidades procuradas, decorrendo então, de um ajuste por meio de um “fator proporcional”, que admite a proporcionalidade na conversão dos valores falsos em verdadeiros, para a obtenção da solução. No caso de problema não prático, Radford (2011, p.120) exemplifica uma aplicação do método em um problema encontrado em uma tábua babilônica, datado do final do século XVII a.C., “o problema consiste em encontrar os lados de um retângulo cuja largura é igual ao comprimento menos a quarta parte deste comprimento, e a diagonal é 40”.

Para a solução do problema, vamos considerar a forma retórica e simbólica no uso do método da falsa posição apresentado por Radford (2011, p.121). No primeiro caso, é assumido um valor falso para a medida do comprimento: o comprimento é (uma unidade) 1°. Então o cálculo da largura se dá pela subtração de ¼ (15’) de 1°, obtendo então 45’. Em seguida é calculado o quadrado das medidas dos falsos lados 1² = 1 e (45’)² = 2025” = 33’45”. Somando os quadrados obtemos 1°33’45”. Então é calculado a raiz quadrada desse valor (1°33’45”) resultando em 1°15’, valor falso da diagonal do retângulo. Sabemos que a diagonal verdadeira é 40’, menor do que o valor falso obtido, com isso é calculado o inverso de 1°15’, que é 48’; multiplicando esse valor por 40’; resulta em 32’. Este é o “fator de ajuste proporcional” pelo qual ele multiplica o falso comprimento (1°) e a falsa largura (45’). Assim, o escriba encontra 32’x1° = 32’ e 32’x45’ = 24’. Portanto, o comprimento e a largura verdadeiros, são respectivamente 32’ e 24’.

Em termos de notação simbólica – álgebra moderna –, ainda sob a perspectiva da RFP, o mesmo problema poderia adotar ***x*** como a medida do comprimento e ***y*** a medida da largura do retângulo, cuja diagonal seria um número dado ***d***. Da relação $d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \frac{5}{4}x$ é possível deduzir que $x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$. O escriba assume então o comprimento falso, x_0, resultando em uma falsa largura $y_0 = x_0 - \frac{1}{4}x_0 = \frac{3}{4}x_0$. Ele calcula a diagonal utilizando $d_0 = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{3}{4}x_0\right)^2} = \frac{5}{4}x_0 = \frac{5}{4}$ (para $x_0 = 1$). O argumento proporcional que sustenta o procedimento leva o escriba a calcular o inverso de $d_0 = \frac{5}{4}$ e a multiplicar esse valor pela diagonal dada $d = 40$. Esse problema evidencia o funcionamento do método da falsa posição e demonstra a transição do processo aritmético ao algébrico na Mesopotâmia, segundo Radford (2011, p.121).

Claramente o modo de solucionar problemas, principalmente como revelado em tabletes antigos, expressa concepções distintas de perceber a matemática, o que sugere a existência de um pensamento algébrico aguçado na antiguidade Mesopotâmica, não sob a perspectiva de equações utilizada atualmente, já que não usavam letras para expressar quantidades desconhecidas, mas supõe potenciais habilidades no processo resolutivo de problemas e sugere um caminho alternativo e exploratório preliminar ao estudo de equações lineares, especialmente equação do 1º grau.

Agora vamos considerar o seguinte problema “encontre um número tal que esse número mais sua metade é 15”. Para resolver esse problema partimos de uma aposta, nesse caso o “2”, essa aposta é pensada de modo que obtenha 1 (um) na parte fracionaria, em seguida se obtém 3 (três) como resultado e não 15, com isso identificamos que o 2 de fato é um valor falso, assim para se encontrar o valor verdadeiro pode-se estabelecer a relação proporcional conforme a figura 2.

Figura 2 - proporcionalidade

Posición	Solución
2	3
x	15

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{15}$$

Fonte: Munoz (2007, p.56).

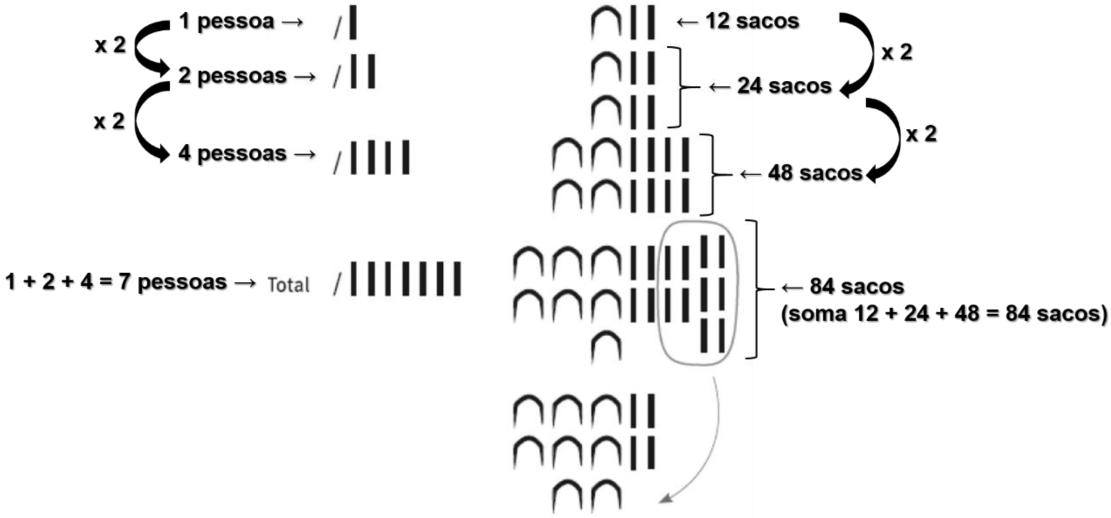
Com isso, obtém-se como resultado x = 10, o valor verdadeiro.

Havia problemas utilizando processos aritméticos, como os que envolviam adição e multiplicação, por exemplo, era comum entre os egípcios, inclusive no uso do sistema de numeração. No caso do sistema aditivo ocorria da seguinte forma, por exemplo, adicionar |||| e ||||||, cada barra vertical representava a unidade, na qual o processo de adição ocorria através da simples união dos símbolos, que nesse caso seria ||||||||||, ou podendo ser substituído por ∩ que indica a dezena.

Na multiplicação havia o uso da duplicação dos símbolos considerado processo simplificado pelo fato de ocorrer pela simples reescrita dos símbolos utilizado na operação envolvida, de acordo com Roque (2012), exemplifica através do seguinte problema: “supondo que cada pessoa tenha direito a doze sacos de grãos (convencionando-se um saco de tamanho fixo), a quantos sacos um grupo de sete pessoas teria direito?”.

Na solução ao problema é utilizado o sistema de numeração da seguinte forma (Figura 3):

Figura 3 - solução aritmética egípcia



Fonte: adaptado de Roque T. (2012, p.71).

Na linha inicial, o símbolo (/ |) está indicando que 1 pessoa terá direito a 12 sacos de grãos, em seguida, na segunda linha (/ ||) representa a duplicação da primeira, onde 2 pessoas receberiam 24 sacos. Mais adiante, a terceira linha representa a duplicação da segunda, em que 4 pessoas teriam 48 sacos. Caso houvesse a duplicação da terceira, o número de pessoas iria ultrapassar 7, então como 7 equivale a soma 1 + 2 + 3, concluímos que o total de sacos seriam 12 + 24 + 48, totalizando 84 sacos para 7 pessoas. Ou seja, 7 x 12 = 84.

Esse e outros procedimentos apresentados por Roque (2012) em sua obra “História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas”, evidencia o modo de tratamento aritmético dado pelos egípcios a problemas cotidianos, que vai refletir na maneira como a RFP é constituída na resolução de problemas, denominado “problemas de aha”, presentes no papiro de Rhind e em outros documentos.

Segundo Roque (2012, p. 73):

> A palavra “aha” é traduzida por “número” ou “quantidade”, e

> esses problemas eram procedimentos para encontrar uma quantidade desconhecida quando é dada uma relação com um resultado conhecido.

Nesse contexto, o modo como hoje resolvemos problemas modelados por uma generalidade a partir de equações lineares, revela uma maneira distinta se comparada às técnicas egípcias, porém não desvencilhada ou justapõe, dado que solucionar problemas por tentativa e erro sinaliza um modo singular de resolvê-los, desenvolvendo e explorando habilidades aritméticas fundamentais evidenciadas na civilização egípcia.

Através de conexões entre o tratamento egípcio e o atual, no uso da RFP em equações lineares conforme Roque (2012, p. 74) destaca:

> O método da falsa posição pode fornecer uma maneira de resolver equações aritmeticamente, ou seja, sem procedimentos algébricos, e foi usado em diversos momentos da história. Daremos a solução, por falsa-posição, para uma equação dada em simbolismo atual por $ax = b$. Escolhemos um valor arbitrário x_0 para x e calculamos o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, procuraremos escolher esse valor inicial de um modo que facilite as contas. Em seguida, investigamos por que número devemos multiplicar b_0 para obter b e chegamos a $\frac{b}{b_0}$. Para manter inalterada a igualdade $ax_0 = b$, devemos multiplicar esse mesmo número por x_0. Obtemos, assim, que $a.\left(x_0.\frac{b}{b_0}\right) = b_0.\frac{b}{b_0} = b$. Logo, a solução de $ax = b$ deve ser $x_0.\frac{b}{b_0}$.

Nesse sentido, fica esboçada uma forma geral de perceber a RFP, bem como justificado os motivos de tal método funcionar. Vale salientar para dois pontos importantes, o primeiro está no fato de que esse modo de justificar, generalizar e conceber a RFP não era de domínio dos egípcios, já que faz uso da álgebra simbólica moderna, e o segundo ponto está na possibilidade de identificação dos alcances da tal regra, ou seja, se há extensão para outras formas de equações lineares ou unicamente do tipo ax = b.

Mais à frente, neste texto e no produto educacional proposto por esta pesquisa, apresentamos problemas – solucionados pela RFP –, presentes em importantes documentos, como é o caso do problema 26 disposto no Papiro de Rhind, podendo ser escrito na linguagem simbólica como $x + \frac{x}{4} = 15$ e generalizado na forma $ax = b$. Em casos do tipo $ax + k = w$, podemos tomar $-k$ em ambos os membros, obtendo $ax = w - k$, na qual considerando $b = w - k$, teremos que $ax = b$.

A seguir, trataremos da regra da dupla falsa posição, outro método, uma espécie de "extensão" da RFP, na qual é possível encontrar solução, sob o contexto atual da álgebra moderna, para equações do tipo $ax + b = c$. Há indícios de que tal método já era usado antes de Cristo por Chineses e babilônios, que denominavam de "dupla falsa posição".

1.1. Regra da dupla falsa posição

Assim como na RFP, a regra da dupla falsa posição (RDFP) ou método da falsa posição dupla, também denominado *regula duorum falsorum*, tendo sua provável origem na China, consiste em atribuir valor falso, porém nesse caso são valores falsos para a equação linear do tipo ax + b = c, em que inicialmente consideramos sob a visão de função $f(x) = ax + b$. Em seguida, são atribuídos à x dois valores "falsos" x_1 e x_2, tal que é calculado $f(x_1)$ e $f(x_2)$, então teremos a proporção $\frac{f(x_1) - c}{x_1 - x} = \frac{f(x_2) - c}{x_2 - x}$.

No livro "Prática de Ensino em Matemática II: As várias faces da prática de Ensino em Matemática", dos autores Pereira, Silva e Nascimento (2015), contribuem com o texto "Como utilizar história da Matemática para ensinar equação do 1º grau?", onde destacam o problema sob a solução pelo RDFP, cujo enunciado diz: "De uma quantidade de milho equivalente a vinte e quatro medidas, um camponês deve dar ao Faraó uma parte igual à quinta parte somado com três medidas da sua. Quanto lhe restará?" (PEREIRA; SILVA; NASCIMENTO, 2015, p. 14).

Tal problema atualmente pode ser representado por $x + \frac{x}{5} + 3 = 24$, reescrita como $\frac{6x}{5} + 3 = 24$. Seguindo a generalização do método vamos considerar $f(x) = ax + b$, assim teremos $f(x) = \frac{6x}{5} + 3$. Em seguida optaremos pelos valores $x_1 = 5$ e $x_1 = 10$, seguindo a mesma ideia do RFP.

Para $x_1 = 5$, obteremos $f(x) = \frac{6x}{5} + 3 = \frac{6.5}{5} + 3 = 9$ (resultado falso); continuando agora para $x_1 = 10$, teremos $f(x) = \frac{6x}{5} + 3 = \frac{6.10}{5} + 3 = 15$ (resultado também falso).

Calculando a proporção, temos:

$$\frac{f(x_1)\ -\ c}{x_1 - x} = \frac{f(x_2)\ -\ c}{x_2 - x}$$

$$\frac{9\ -\ 24}{5 - x} = \frac{15\ -\ 24}{10 - x}$$

$$\frac{-\ 15}{5 - x} = \frac{-\ 9}{10 - x}$$

$$x = \frac{-9 * 5 - (-15) * 10}{15 - 9}$$

$$x = \frac{105}{6}$$

$$x = 17{,}5$$

Neste caso fica expresso um modo de perceber a articulação entre a equação do primeiro grau e a função do primeiro grau, tal qual a regra da falsa posição está presente.

Tanto a RFP quanto a RDFP possibilitam solucionar problemas lineares, através de manipulações aritméticas pela proposição de valores falsos para a obtenção da solução verdadeira, são modos antigos, mas que reconstituem uma maneira particular de resolver problemas.

Esse estudo nos possibilitou construir compreensões sobre a RFP, suas potencialidades e suas possíveis possibilidades de uso em sala de aula, em particular por meio da sua relação com jogo de cartas, conforme propomos nesta pesquisa para o ensino da matemática com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico que será abordado no próximo capítulo.

2. O pensamento algébrico: concepções e modelos teóricos

Nesta sessão discutimos concepções relativas ao pensamento algébrico sob perspectivas consideradas relevantes para compreensão.

Muitas são as pesquisas com enfoque no pensamento algébrico, visto que este ao longo dos tempos, na literatura e documentos oficiais, se confundiu com a mera manipulação de símbolos – que em geral ocorrem no 7° ano do ensino fundamental anos finais –, ou a própria álgebra que compreende os objetos de conhecimento (equações, expressões algébricas, sistemas de equações etc.).

Dessa forma, o pensamento algébrico tem contribuição no desenvolvimento de habilidades de abstração e generalização do aluno. Para tal, buscou-se refletir sobre ideias a respeito do pensamento, no âmbito conceitual, linguístico do pensamento, experiencial sociocultural e na perspectiva do desenvolvimento humano, através da literatura de Deleuze (2013), Vygotsky (1993) e Piaget (1983).

Também foram fontes de investigação as ideias veiculadas pelos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) a respeito do pensamento algébrico, bem como o fato de não haver uma definição para tal conceito, o que levaram teóricos como Kaput (1999) a caracterizar o pensamento algébrico, estabelecendo um modelo que entende tal pensamento através da representação, raciocínio e resolução de problemas e modelação de situações.

2.1. Pensamento: aspectos educacionais

Elucidaremos ideias veiculadas sobre o *pensamento*[3], no âmbito educacional, delineando um percurso de reflexões desenvolvidas por teóricos que evidenciaram concepções a respeito do pensamento e seu desenvolvimento sob o aspecto conceitual, linguístico do pensamento, experiencial sociocultural e na perspectiva do desenvolvimento humano.

Como conceito primário sobre o que é o pensamento, Gonçalves expõe:

---

[3] Do latim *pensare* (pensar, meditar, considerar), fenômeno produzido na mente a partir do que se apercebe.

> Pensamento. De pensar, do latim *pensare* (pensar, meditar, considerar), designa o fenômeno que se produz na mente da pessoa, em virtude do que se apercebe ou cuida de alguma coisa. É, assim, o que vem a mente, o que se produz no cérebro, o que a inteligência percebe, o que se medita ou o que se imagina. Nesse sentido, pois, o pensamento é o entendimento, a imaginação, uma atividade mental, que pode ser causa de uma deliberação ou determinação. O pensamento, pois, enquanto não manifestado ou expresso, é impenetrável, pois que se oculta na intimidade indevassável do cérebro ou da mente. Na manifestação ou na expressão é que os pensamentos se revelam, mostrando-se expressos ou manifestados, deliberações, determinações, intuitos, planos, projetos, ideias, vontades, etc. E essa manifestação é feita pela palavra escrita ou oral, ou, mesmo, por imagens (desenhos, pintura). (SILVA; DE PLÁCIDO, 2012, p. 1025, apud GONÇALVES, 2015, p.79).

Destas ideias fica estabelecido que o pensamento seja algo produzido pela mente a partir do que é percebido pelo indivíduo, assim como pode ser espontâneo, ou seja, vir à mente, e também faz correlação com a imaginação que corresponde a uma das atividades mentais. Assim, pensar:

> é, primeiramente, ver e falar, mas com a condição de que o olho não permaneça nas coisas e se eleve até as “visibilidades”, e de que a linguagem não fique nas palavras ou frases e se eleve até os enunciados. É o pensamento como arquivo. Além disso, pensar é poder, isto é, estender relações de força, com a condição de compreender que as relações de força não se reduzem à violência, mas constituem ações sobre ações, ou seja, atos, tais como “incitar, induzir, desviar, facilitar ou dificultar, ampliar ou limitar, tornar mais ou menos provável [...]”. É o pensamento como estratégia. (DELEUZE, 2013, p.123 – 124, apud GONÇALVEZ, 2015, p.81).

O pensamento como estratégia, visto dessa forma, no caso de uma criança não está relacionado direto às condições que ela apresenta em seus primeiros anos de vida. Em sua fase inicial da vida o ato de pensar está diretamente relacionado às memórias, constituídas por suas lembranças. Tal como diz Vygotsky (2007, p. 47):

> [...] o ato de pensar na criança muito pequena é, em muitos aspectos, determinado pela sua memória e, certamente, não é igual à mesma ação em crianças maiores. Para crianças pequenas, pensar significa lembrar; em nenhuma outra fase, depois dessas muito inicial da infância, podemos ver a conexão íntima entre as duas funções psicológicas.

Fica claro o ato de pensar através da memória, presente no início da vida, como ocorre quando a criança busca conceituar algo ou no desenvolvimento de conceitos visuais, pois no primeiro caso, uma criança ao ser questionada sobre o que é algo, por exemplo, o que é uma formiga? – ela recorre a impressões obtidas a partir de suas vivências –, resposta possível: um bichinho pequeno que ferra; relacionadas ao tema em questão. No segundo caso, através de estímulos, uma criança transpõe de forma similar a representação de algo, por exemplo, escreva a letra “a”, o que corresponde ao desenvolvimento de conceitos visuais na criança. Ambos os casos configuram representações baseadas nas lembranças da criança, não tendo ainda um caráter de abstração, presente na adolescência e vida adulta, mas responsável pela estrutura inicial do pensamento da criança.

Ainda sob o enfoque de Vygotsky, é estabelecida a relação entre a memória e o ato de pensar, delineado a partir da “memória não mediada” e a “memória mediada”, que se conectam através da mudança nas operações psicológicas ocorridas na transição de níveis de desenvolvimento da criança, e que promove a função da lembrança, através das relações entre a memória e outras funções psicológicas. A distinção entre a memória de uma criança mais velha e uma mais nova se dá principalmente pela transição de atividades cognitivas, em vista que na infância a memória assume um papel fundamental por basilar a construção de outras funções do pensamento.

No processo de definição de conceitos por uma criança, Vygotsky (2007, p. 48) afirma que “se você perguntar a uma criança o que é um caracol, ela dirá que é pequeno, que se arrasta no chão, que sai da ‘casa’; se você lhe perguntar o que é uma avó, ela pode muito bem responder, ‘ela tem um colo macio’”. Em todo caso, há uma expressiva demonstração das impressões obtidas pela criança ao que lhe é questionado, fazendo referência às suas lembranças, com poucas relações lógicas no ato de pensar o conceito em si, mas de cunho sincrético por suas ideias a princípio estarem conectadas às suas memórias criadas por suas experiências.

No que se refere ao desenvolvimento de conceitos visuais, em uma criança pequena ocorre em geral por meio de um bloco de estímulos relacionados ao que é aprendido pela criança, identificados na transposição destas relações que refletem as recordações de situações concretas isoladas na criança, sem caráter de abstração.

Outra expressão da criança nos primeiros anos de vida, que manifesta o ato de pensar em decorrência de suas lembranças, é a análise do significado das palavras. Investigações apontam que criança ou adulto fazem distintas conexões e interpretações das palavras, justificado pelo fato desta conceber conceitos decorrentes de exemplos e da identificação de elementos da sua realidade, como afirma Vygotsky (2007, p. 49), que “a experiência da criança e a influência “não mediada” dessa experiência estão registradas na sua memória e determinam diretamente toda a estrutura do pensamento da criança pequena”.

Dessa forma, tais ideias indicam a memória como aspecto característico dos primeiros anos no desenvolvimento cognitivo se comparado ao pensamento abstrato, havendo transformações ao longo do desenvolvimento, o que em especial na adolescência ocorre diferente, destaca Vygotsky (2007, p. 49):

> [...] pesquisas sobre a memória nessa idade mostraram que no final da infância as relações interfuncionais envolvendo a memória invertem sua direção. *Para as crianças, pensar significa lembrar, no entanto, para o adolescente, lembrar significa pensar*.

Nesse caso, o adolescente passa a compreender suas lembranças como processos cognitivos lógicos, reduzindo o ato de lembrar a partir da memória ao estabelecimento de relações/conexões lógicas, além de entender a ação de identificar elementos como algo propiciado pela descoberta, em geral proveniente de investigações ou tentativas, empreendimento proposto por esta pesquisa a partir da utilização do jogo de cartas RFP. Essas concepções evidenciam as mudanças nas funções cognitivas ao longo do desenvolvimento.

Em resumo, podemos compreender esta relação do pensamento criança/adolescente, conforme a imagem a seguir.

Figura 4. – Pensamento conforme Vygotsky

Fonte: Organização do autor.

A estrutura da memória de uma criança é modificada à medida que ela recebe estímulos externos, que influenciam diretamente nas funções cognitivas e são realizadas através de *signos* – estímulos artificiais ou autogerados –, na relação entre estímulo e resposta, responsável pelo desenvolvimento das funções cognitivas, pois:

> A criança não deduz, de forma súbita e irrevogável, a relação entre o signo e o método de usá-lo. Tampouco ela desenvolve intuitivamente uma atitude abstrata, originada, por assim dizer, "das profundezas da mente da própria criança". (VYGOTSKY, 2007, p. 41)

Vale ressaltar que este não é um processo único "de fora para dentro", mas dialético, "de um lado, os processos elementares, que são de origem biológica; de outro, as funções psicológicas superiores, de origem sociocultural" (VYGOTSKY, 2007, p. 42), tal que, o recebido biologicamente e adquirido social e culturalmente refletem no comportamento e uso de signos.

Seguindo a linha do desenvolvimento humano, Jean Piaget (1896 - 1980) através da observação, em seus estudos conclui que a lógica estabelece a forma do pensamento do indivíduo, que se dá a partir das relações recíprocas entre o indivíduo e o meio ambiente. Em seus estudos, Piaget estabelece a teoria do desenvolvimento humano, que foi referência para muitos pesquisadores e educadores, tendo por finalidade compreender a inteligência e o processo de construção do conhecimento, através do que ele define como estágios do desenvolvimento, na sequência: sensório-motor [0 a 2 anos]; pré-operatório [2 a 7 anos]; operações concretas [7 a 11 ou 12 anos] e operações formais [11 ou 12 em diante]. No primeiro estágio ocorre o início das representações mentais, que se dá a partir da habituação ao mundo exterior, na assimilação e acomodação de situações vivenciadas, a assimilação e acomodação, representam para Piaget as informações obtidas pela criança no contato com o objeto e sua capacidade de produzir novas informações a partir das iniciais que antecedem ao pensamento.

No segundo estágio, a criança aumenta o seu intelecto, pois passa a compreender suas ações na relação entre linguagem e pensamento, responsáveis pela construção de sua inteligência simbólica caracterizada pela composição de imagens. Segundo Bueno (2013, p. 119), "é também uma etapa bastante concreta, sendo seu pensamento ainda rígido nas conceituações, não reversível e transdutivo, ou seja, a criança não consegue associar situações".

Já no terceiro estágio, se inicia o pensamento verbalizado e socializado, bem como a habilidade de retornar a um estado anterior, ou seja, a reversibilidade. No âmbito cognitivo, essa etapa configura uma evolução do pensamento da criança, pois já é possível classificar, seriar e enumerar objetos. É nessa etapa também que a criança constrói esquemas operatórios, de adição, subtração e multiplicação.

No último estágio postulado por Jean Piaget, o indivíduo já é capaz de desenvolver hipóteses a partir de situações, fase em que há a aquisição do conhecimento hipotético-dedutivo, responsável por pensamentos imagéticos e realidade. Nesta etapa já há consciência e reflexiva, e são ampliadas as ideias de forma coletiva e sociável.

Assim, o ato de pensar sob a perspectiva filosófica – meditar/considerar –, corresponde a um fenômeno que pode ser espontâneo ou produzido pela mente a partir do que se apercebe (atividade mental) e também está ligado a uma relação de força, estabelecida por meio de ações/atos com um propósito sob uma visão estratégica. Em se tratando de crianças pequenas, é perceptível o fenômeno espontâneo (ou estimulado) produzido pela mente que liga o pensamento à memória nos primeiros anos de vida, onde pensar significa lembrar, e que consiste em uma importante fase no desenvolvimento estrutural do pensamento, expresso pela criança no ato da definição de conceitos, desenvolvimento de conceitos visuais e análises do significado de palavras, realizados sob o apoio da memória, cuja função na relação com outras funções cognitivas são importantes para o desenvolvimento da mente, e é modificada, em especial na adolescência, em que o ato de pensar é reduzido à memorização como afirmado por Lev Vygotsky, pautado também nas ideias de Jean Piaget, onde o pensamento a partir do segundo estágio de desenvolvimento (pré-operatório) na relação com a linguagem até o último estágio (operações formais) evidencia a evolução dos processos cognitivos, onde o pensamento passa de um estágio de não associação de situações à um estágio hipotético dedutivo e coletivo/social.

O pensamento algébrico também assume espaço de destaque nos documentos oficiais que estão inseridos na educação básica brasileira. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o *National Council of Teachers of Mathematics*_(NCTM) expões ideias relativas ao pensamento algébrico.

2.2. O pensamento algébrico e os Parâmetros Curriculares Nacionais

Partimos do pensamento algébrico abordado nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN. Inicialmente no volume 01, documento que trata da introdução aos PCN, em seguida abordará o volume 03 que faz referência à Matemática. Esse primeiro documento trata de um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País.

A função dos PCN é orientar e garantir a coerência dos investimentos educacionais, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros. É uma proposta flexível a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores.

Também sinalizado pelos PCN, o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre através do uso de situações de aprendizagens, responsáveis por promover o reconhecimento de representações algébricas para as generalizações, interpretar problemas objetivando solucioná-los, traduzir informações presentes em gráficos e tabelas, bem como na linguagem algébrica, na busca por generalizações e regularidades, também no reconhecimento do significado das letras, importante, conforme Godino (2013), para a significação da álgebra. Usar os métodos operatórios e suas propriedades na elaboração de estratégias de cálculos algébricos constitui também em uma importante ação para a promoção do pensamento algébrico. No jogo RFP, produto educacional desta pesquisa, fica evidente as formulações de estratégias, o uso de métodos operatórios e validação de resultados com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com os PCN,

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar abstratamente, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL, 1998, p. 117).

Os PCN afirmam que dentro do conteúdo da álgebra há um espaço bastante expressivo para que o aluno desenvolva e pratique suas habilidades de abstração e generalização, além de possibilitar o desenvolvimento cognitivo no processo de resolução de problemas. Dessa forma, é importante a implementação de propostas diversificadas para a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico, inclusive jogos de cartas.

Então, destaca-se que as habilidades e competências que constam nos PCN a serem desenvolvidas por temas relacionados à álgebra devem ser trabalhadas desde os anos iniciais do ensino fundamental, tal medida é necessária para que a criança inicie o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da significação da álgebra através de atividades matemáticas envolvendo regularidades e padrões, ou seja, processos iniciais de generalização.

2.3. O pensamento algébrico e o Pacto Nacional pela Alfabetização da Idade Certa

No ano de 2012, o Ministério da Educação publicou o documento “Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º ano) do Ensino Fundamental” com o objetivo de subsidiar a elaboração do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa, iniciando as discussões sobre a álgebra nos Anos Iniciais através do reconhecimento de atividades matemáticas envolvendo padrões e regularidades para o ensino da Álgebra.

Esse estudo da Álgebra Inicial ou Álgebra nos anos iniciais passou a ser utilizado sob o termo “*Early* Algebra”, muito presente nos documentos oficiais e trabalhos de pesquisas, que também pode assumir como definição: “o desenvolvimento de um modo de pensar que antecede o uso da linguagem algébrica”. Dessa forma, é importante considerar atividades para a promoção do pensamento algébrico, ao invés de apenas objetivar a álgebra como fonte de conhecimento unilateral.

Em se tratando do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), vale assinalar a compreensão de que é um compromisso formal assumido pelos governos federal, do Distrito Federal, dos estados e municípios de assegurar que todas as crianças estejam alfabetizadas até os oito anos de idade, ao final do 3º ano do ensino fundamental.

O PNAIC consiste em um conjunto de ações integradas de programas, materiais e referências curriculares e pedagógicas disponibilizados pelo MEC e que contribuem para a alfabetização e o letramento. O programa baseia-se em quatro eixos principais: a formação continuada de professores alfabetizadores; materiais didáticos e pedagógicos; avaliações; e gestão, controle social e mobilização.

Há então uma concepção realista da matemática, onde as aprendizagens são emersas por atividades concretas e ligadas aos contextos próximos aos discentes, em que a matemática passa a ter significado através de situações, problemas e atividades reais. Dentre as propostas vale o destaque para:

> reconhecer regularidades em diversas situações, compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades já conhecidas; perceber a importância da utilização de uma linguagem simbólica na representação e modelagem de situações matemáticas como forma de comunicação e desenvolver o espírito investigativo, crítico e criativo, no contexto de situações problema, produzindo registros próprios e buscando diferentes estratégias de solução (PNAIC, 2014, p.5).

Na utilização do jogo de cartas RFP, os estudantes são levados a reconhecer um problema sob a linguagem literal e simbólica, levantar hipóteses de resultados ao problema em estudo e de forma cooperativa desenhar um percurso resolutivo ao problema, conforme preconizado pelo PNAIC.

Tais concepções sobre o trabalho pedagógico se aproximam ao que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta no eixo temático “álgebra”, com destaque para as palavras **regularidade**, **linguagem**, **relações** e **solução de problemas**. Mais à frente iremos discorrer sobra a BNCC.

2.4. O pensamento algébrico e a Base Nacional Comum Curricular

Um dos documentos oficiais mais recentes e amplamente divulgados, bem como debatido entre educadores pesquisadores e profissionais da educação, é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo responsável por definir as aprendizagens essenciais no percurso de formação em cada etapa e modalidade da educação básica, no intento de garantir os direitos de aprendizagens e desenvolvimento do educando. Tal normativo expõe a necessidade do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos (no caso algébrico) desde a educação infantil a partir do campo de experiência “espaços, tempos, quantidades, relações e transformações”, onde já há uma preocupação com procedimentos de contagem e representação de símbolos, contribuintes no desenvolvimento inicial do pensamento algébrico.

Na BNCC, em se tratando da unidade temática Álgebra, o interesse no desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser identificado e:

> que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. [...] identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. [...] Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2018).

Dessa forma, pode-se dizer que os objetivos de aprendizagem estabelecidos pela Nova Base Nacional Comum Curricular mostram que há uma importância do ensino de álgebra na promoção de um tipo específico de pensamento, no caso o algébrico, descrito de forma objetiva pela base nacional comum quando enuncia "a unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico" (BRASIL, 2020).

A seguir, organizamos uma tabela indicativa da unidade temática "álgebra" com base na BNCC dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, organizada pela unidade temática (álgebra) – nível de ensino –, objetos de conhecimentos, acreditando ser um potencial instrumento para melhor visualizar as intenções do documento na dimensão algébrica para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Quadro 01).

Quadro 1 – Unidade temática álgebra/níveis de ensino/ objetos de conhecimento.

UNIDADE TEMÁTICA	NIVEL DE ENSINO	OBJETOS DE CONHECIMENTO
ÁLGEBRA	1° ANO	- Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências; - Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo);
	2° ANO	- Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas; - Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência;
	3° ANO	- Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas; - Relação de igualdade
	4° ANO	- Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural; - Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero; - Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão; - Propriedades da igualdade;
	5° ANO	- Propriedades da igualdade e noção de equivalência; - Grandezas diretamente proporcionais - Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais;
	6° ANO	- Propriedades da igualdade; - Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo;
	7° ANO	- Linguagem algébrica: variável e incógnita; - Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica; - Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; - Equações polinomiais do 1º grau
	8° ANO	- Valor numérico de expressões algébricas; - Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano; - Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano; - Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; - Sequências recursivas e não recursivas; - Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais;
	9° ANO	- Funções: representações numérica, algébrica e gráfica; - Razão entre grandezas de espécies diferentes; - Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; - Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; - Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações

Fonte: Organização do autor.

Do Quadro 1 fica expresso a partir dos objetos de conhecimento que nos anos iniciais há um interesse no desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de atividades matemáticas envolvendo padrões; sequências; construções de sequências; identificação de regularidades; estabelecimento de relações; operações; propriedades; igualdades; equivalências; grandezas e proporcionalidades, projetados, segundo a BNCC, sob uma concepção progressiva de habilidades a partir dos níveis de ensino ano a ano, sob a visão de ampliação e aprofundamento.

Vale destacar que o ensino de álgebra é muito importante e se apresenta como um objeto do conhecimento necessário à formação do aluno para sua compreensão do mundo e no estabelecimento de conexões com outros campos de conhecimento, sendo importante ressaltar a construção de uma base sólida desse conhecimento matemático no ensino fundamental, para que de modo gradativo sejam construídos novos conceitos concatenados aos anteriores em seu processo de formação. Sendo neste caso necessárias diversas propostas didático-pedagógicas para o alcance de boas aprendizagens relativas ao ensino de álgebra, estando entre as alternativas à utilização de jogos matemáticos, em espacial o jogo de cartas como o proposto por esta pesquisa e que será mais bem explorado nos próximos capítulos.

Desse modo, conclui-se que a linguagem e o pensamento algébrico são importantes, pois perceptivelmente grande parte das dificuldades apresentadas pelos alunos ocorre pelo fato não possuírem habilidades e competências relacionadas ao domínio dos objetos do conhecimento da matemática essenciais para a percepção de generalizações para o pensamento algébrico.

2.5. O pensamento algébrico e o Sistema de Avaliação da Educação Básica

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) representa a reunião de avaliações externas realizadas em nível de larga escala desenvolvida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) com o objetivo de diagnosticar a educação básica brasileira identificando fatores que corroboram para os resultados provenientes dos testes e questionários aplicados a cada dois anos na rede pública e uma amostra na rede privada, partindo de uma matriz de referência base para cada área de conhecimento.

Por meio do Saeb é possível reconhecer os níveis de aprendizagem demonstrados pelos educandos avaliados partindo de informações coletadas, que possibilitam também reconhecer a qualidade da educação brasileira.

No que diz respeito a matemática no 2º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental, já que no Saeb são avaliados finais de ciclos, a matriz de referência expõe a intencionalidade do que se quer a partir desta avaliação em larga escala, nesse caso o constructo, ou seja, algo intangível possível de ser alcançado por meio de resultados obtido por teste cognitivo mensurável a partir das habilidades preconizadas pela BNCC, tendo como foco o constructo do Letramento Matemático[4] desenvolvido por exemplo a partir de resolução de problemas no âmbito dos cinco campos de conhecimento como Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, no caso da álgebra, se objetiva:

> Desenvolver o pensamento algébrico para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2018, p. 80).

Nas últimas décadas as avaliações externas de larga escala governamentais apontam possíveis deficiências no aprendizado da matemática mais especificamente em álgebra, como podemos constatar com os dados estatísticos do desempenho dos estudantes em matemática no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Este sistema desde 1991 assume o papel de fornecer informações e indicadores para direcionar e redirecionar políticas públicas ligadas à educação a nível nacional, bem como atender demandas necessárias a cada momento da educação brasileira.

Os resultados que a aprendizagem da Álgebra e o Pensamento Algébrico vêm apresentando nas últimas décadas é resultante de um processo que o ensino dessa área sofreu no decorrer dos anos e que se mantém em construção na escola. No país como um todo, apesar de haver várias reformas educacionais, novas diretrizes e orientações propostas para o ensino fundamental, o ensino de álgebra permaneceu com poucas ou nenhumas alterações na Educação Básica.

2.6. National Council Of Teachers Of Mathematics (NCTM)

Fundado em 1920, o Conselho Nacional de Professores de

[4] O Letramento Matemático é definido na BNCC como "as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas". (BRASIL, 2017a, p. 264).

Matemática (NCTM) é a maior organização de educação matemática do mundo, pois fomenta orientações e recursos para a implementação de ensino a partir de pesquisa de alta qualidade apoiando o aprendizado de cada estudante em ambientes equitativos, também parte de uma cultura de equidade onde cada pessoa tem acesso a um ensino de alta qualidade potencializado pelas oportunidades que a matemática oferece.

Em se tratando da Matemática, o estudo das ideias fundamentais da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico têm sido muito discutidos por professores no mundo todo e na própria instituição internacional, insto é, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM). O que certamente leva a uma reflexão sobre o que seria o pensamento algébrico, que se admite evoluir com o passar dos anos através do estudo da Álgebra e que deve capacitar o estudante no uso da Matemática.

Vale destacar que Howden (1990) considera que o conhecimento dos conteúdos específicos que traz a disciplina de matemática é a necessidade, com certa habilidade de olhar fora das regras e detalhes numéricos para a essência de uma situação-problema.

Para que a criança desenvolva essa habilidade baseada nos pensamentos algébricos requer que o foco da instrução no processo, bem como na essência do conteúdo, seja necessário a presença do professor, para que ele possa orientar o processo de aprendizagem nos procedimentos, estratégias e no domínio dos conteúdos.

Por fim, destaca-se de forma conclusiva que os pesquisadores em Educação Matemática concordam que o pensamento algébrico se fundamenta através de um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a descrição matemática, as operações básicas, a resolução de problemas e análises matemáticas de variadas situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial, objetivados para a construção de significado para a álgebra.

2.7. A origem do pensamento algébrico

Através de investigações tendo como norteador o pensamento algébrico, fica evidente sua importância e a inexistência de uma definição concreta a respeito desse tema, porém há concepções de modo a apontar uma diferenciação com relação ao conhecimento algébrico, cuja compressão não se limita à manipulação de símbolos que em geral se dá a partir do 7° ano do ensino fundamental II – nível escolar –, mas que deveria constituir uma prática desde o ensino infantil segundo os documentos oficiais já mencionados – anos iniciais de ensino –, até o ensino superior, a considerar cursos de ensino superior no segmento das ciências exatas.

Dessa forma, julgando ser pertinente a esse estudo a partir das ideias de Radford (2011), trataremos da origem do pensamento algébrico tendo como caminho a passagem do pensamento aritmético ao pensamento algébrico e a função da linguagem e símbolos no pensamento algébrico.

2.8. O raciocínio proporcional

O conhecimento matemático emerge em civilizações antigas conforme a evolução econômica, social e política. Tal conhecimento esteve e está intimamente ligado às questões da realidade, na busca por soluções que facilitem o convívio em sociedade. Segundo Radfor (2011, p.119), “problemas práticos e não práticos aparecem nas duas mais importantes correntes matemáticas observadas nas antigas civilizações da Babilônia e do antigo Egito: a geométrica e a numérica”. Sejam problemas geométricos ou numéricos, havia o uso do raciocínio proporcional na solução dos problemas, a exemplo da *regra da falsa posição*.

2.9. O pensamento algébrico: modelos teóricos

O pensamento algébrico ao longo dos anos foi sendo tecido e a partir da percepção de alguns autores, há evocações sobre o que consiste esse pensamento. É de comum acordo entre pesquisadores no campo da Educação Matemática com ênfase no estudo algébrico, em especial sobre o pensamento algébrico, que não há ao certo uma definição para tal conceito, o que gera uma diversidade de caracterizações a partir de pontos de vistas assumidos por pesquisadores. De acordo com Cruz (*et. al*., 2013, p. 4) não há trivialidade ao se definir o termo "*pensamento algébrico*", porém este objeto de estudo ganha espaço nos interesses de pesquisadores e grupos de pesquisa, que concebem o significado desta temática mais abrangente do que uma mera manipulação de símbolos.

A partir da década de 80 houve discussões no sentido de definir o que deve ou não ser incluído da Álgebra na educação básica escolar para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, que consiste no elemento-chave do estudo da Álgebra, dessa motivação emergiu o interesse em caracterizar o *pensamento algébrico*.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9):

> Um dos autores que escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput, para quem o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade.

Para Kaput (1999), o pensamento algébrico se constitui através de uma atividade humana e nesse sentido, o conhecimento está em quem pensa, ou seja, no sujeito, e não no objeto, que só assume uma forma quando passa a ser escopo de estudo. Dessa forma, pensar algebricamente está atrelado à construção de significado assumido pelo aprendente quando, ao resolver uma equação, por exemplo, identifica a relação de equivalência entre os membros da equação e entende a ação de encontrar o valor de "x" de uma dada equação como meio de garantir a efetiva sentença verdadeira.

Conforme Kaput (1999), as generalizações podem ocorrer através de situações geométricas, aritméticas e entre outras atividades matemáticas que não seja restrita apenas a um caso, mas que possa assumir uma forma geral (generalização). Para o pensamento algébrico também pode ser expresso através da estreita relação de cinco aspectos, como descrito na adaptação a seguir (Quadro 02), expresso por Ponte, Branco e Matos (2009, p.9):

Quadro 2 – Cinco aspectos

(i)	a generalização e formalização de padrões e restrições;
(ii)	a manipulação de formalismos guiada sintaticamente;
(iii)	o estudo de estruturas abstractas;
(iv)	o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis;
(v)	a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenómenos.

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9).

Nessa visão Kaput (1999), de forma sintética, entende os aspectos (i) e (ii) como “aspectos nucleares” da álgebra, que integrados remetem ao simbolismo e a generalização, já (iii), (iv) e (v) designados “ramos”, estão associados à matemática escolar. Tal estrutura evidencia o principal objetivo no estudo da álgebra, que é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, não limitado à manipulação de símbolos, mas possível através de um conjunto de aspectos que devem ser valorizados para a sua significação.

Na educação básica, o propósito de desenvolver o pensamento algébrico está diretamente relacionado aos objetivos do estudo da Álgebra para o ensino e aprendizagem. A interpretação simbólica, ideia de generalização e perícia na manipulação criativa dos símbolos para descrever e resolver situações problemas configuram elementos bases do pensamento algébrico. Tal contraste entre a Álgebra e o pensamento algébrico revela o universo de atividades de manipulação simbólica, de regularidades, de modelação e de situações às quais a Álgebra se engloba, muito além da visão reducionista de um tratamento apenas simbólico formal, evidenciando este como um dos elementos fundamentais, mas não único para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A manipulação de equações, inequações, sistemas de equações, expressões algébricas, funções e sistemas de equações e inequações para a solução de problemas, todo esse escopo do objeto Álgebra compreende valiosas habilidades para promover o pensamento algébrico.

Desse modo, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 11) apontam três vertentes para o pensamento algébrico (Quadro 03).

Quadro 3 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	· Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; · Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; · Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	· Relacionar (em particular, analisar propriedades); · Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; · Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	· Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

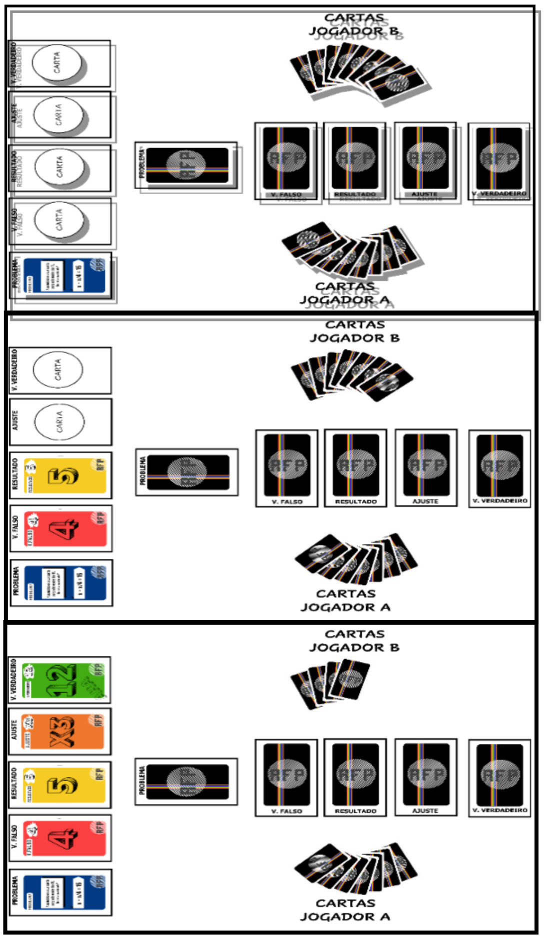
Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 11).

Das três vertentes fundamentais indicadas por Ponte, Branco e Matos (2009), a primeira – representar –, está próximo ao evidenciado por Kaput (1999), quando ele assumiu a importância de dar significado aos símbolos no uso da linguagem em diferentes contextos, seja no processo de leitura, escrita ou tradução de um ente algébrico, como é o caso de uma expressão algébrica. Na segunda vertente, o processo de raciocinar para a generalização ocorre no decurso de conjecturas, discurso (argumento algébrico) até o uso da linguagem algébrica formal. Conforme enfatizado por Godino (2013, p.6), para ir além, precisamos ter domínio de nossa compreensão sobre a natureza do pensamento algébrico e o modo como está se relaciona com a generalização. Um modelo da álgebra elementar pode subsidiar designs de tarefas para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e consequentemente a promoção do pensamento algébrico, mais à frente exposta segundo Godino (2008) e Godino (2013).

Resolver problemas e modelar situações faz referência as vertentes fundamentais do pensamento algébrico, enunciado por Kaput (1999), potencial espaço de construção de significado para o conhecimento mobilizado pelo estudante ao pensar algebricamente na empreitada de solucionar um problema através do uso/manipulação de objetos algébricos.

Em relação ao jogo de cartas RFP, pode-se inferir e articular as três vertentes – representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações –, a partir das etapas no processo de jogabilidade, por exemplo, (Figura 4):

Figura 4 – pensamento algébrico e jogo RFP



Representar – momento em que é posto um problema no modo literal e simbólico.

Raciocinar – nesse momento são eleitos o valor falso, e a partir de algumas operações se obtém o resultado.

Resolver problema e modelar situação – aqui também há o raciocínio no uso das cartas ajuste e valor verdadeiro, entretanto também constitui o fechamento da resolução do problema e modela um modo alternativo de solucionar a referida equação em estudo.

Fonte: Organização do autor.

No que se refere à álgebra escolar, não de igual definição, mas associada ao pensamento algébrico, (KIERAM, 2004) entende esta através das atividades dos estudantes, caracterizada por ela como: atividades geracionais, transformacionais e globais de meta-nível. Conforme Kieran (2004) e de acordo com a visão de Kaput (1999) na primeira atividade, denominada geracional, pois é nela que ocorre a significação dos objetos algébricos, pois conforme o modelo de Lee e Wheeler (1987 apud Kieran, 1996, p.17):

> as atividades geracionais da álgebra envolvem a formação das expressões e equações que são os objetos da álgebra. A exemplos: i) equações contendo um desconhecido que representa situações problemáticas (ver, por exemplo, Bell, 1995), ii) expressões de generalidade decorrentes de padrões geométricos ou sequências numéricas (ver, por exemplo, Mason, 1996), e iii) expressões das regras que governam os relacionamentos numéricos.

O segundo tipo de atividade, ditas transformacionais, a partir da análise está correlacionado ao item II "manipulação de formalismos guiada sintaticamente" indicado por Kaput (1999) no quadro 2 e a vertente "raciocínio" proposta por Ponte, Branco e Matos na tabela 3, pois segundo Kieran (1996, p.12):

> as atividades transformacionais ("baseadas em regras") - inclui, por exemplo, coleta de termos semelhantes, fatoração, expansão, substituição, adição e multiplicação de expressões polinomiais, exponenciação com polinômios, resolução de equações, simplificação de expressões, trabalho com expressões e equações equivalentes e assim por diante. Grande parte desse tipo de atividade se preocupa em mudar a forma de uma expressão ou equação para manter a equivalência.

Já a última atividade matemática, atividades globais de meta-nível aliada à primeira atividade subsidiam e são essenciais para a construção de significado e constituição de um propósito aos objetos algébricos. Como sinalizado por Kieran (1996, p.21):

> São as atividades para as quais a álgebra é usada como ferramenta, mas que não são exclusivas da álgebra. Eles incluem resolução de problemas, modelagem, estrutura de observação, estudo de mudanças, generalização, análise de relacionamentos, justificação, prova e previsão - atividades que poderiam ser realizadas sem o uso de álgebra.

Imergindo nos estudos voltados a álgebra, as concepções de pensamento algébrico (distintas da própria álgebra) e a relação com generalizações são importantes a partir de Radford (2000, p. 238) e Godino (*et al*., 2013, p. 6), pois segundo estes autores o desenvolvimento de um modelo abrangente de álgebra elementar pode facilitar o design de atividades que promovem o surgimento e consolidação progressiva do algébrico raciocínio, cuja generalização se destaca como principal característica.

Sob esta abordagem – "ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento" (GODINO; BATANERO, 2008, p. 7) –, são definidos quatro níveis de raciocínio, proto-algébrico, o nível 0 (zero) de algebrização: atividades matemáticas que não inclui o uso de recursos algébricos;

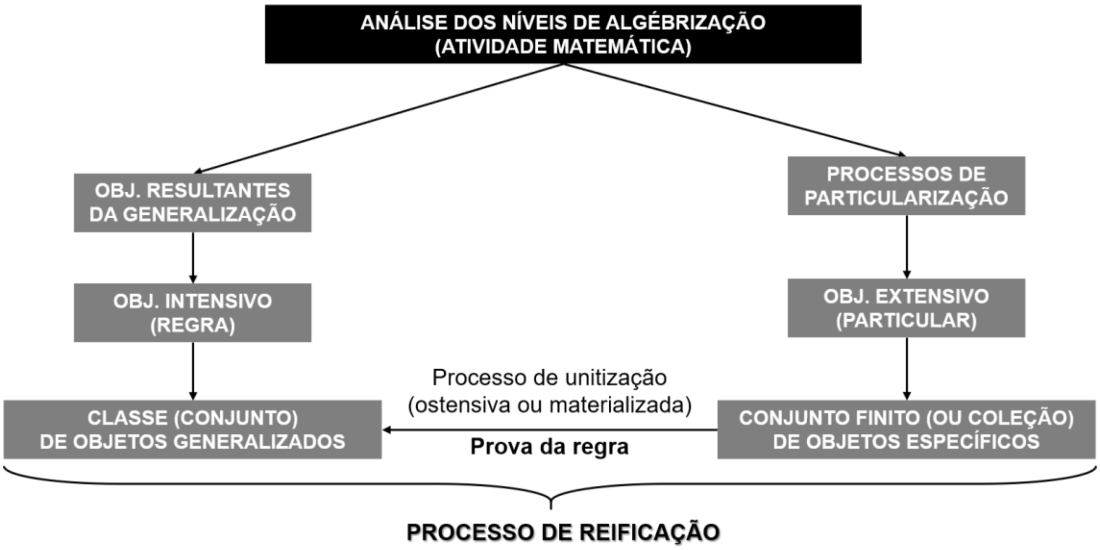
- nível 1 de algebrização: estabelecimento de relações de tarefas e propriedades operatórias, assim como o uso de símbolos na representação de dados desconhecidos;

- nível 2 de algebrização: há a presença de valor desconhecido ou variável expresso em linguagem literal-simbólica, não havendo operações com variáveis;

- nível 3 de algebrização: onde os objetos intensivos são representados literalmente simbolicamente, sendo possível a realização de operações.

Assim, nas atividades matemáticas os níveis de algebrização são postulados por Godino (2013, p.7) sob a seguinte análise conforme a Figura 4:

Figura 5 – Análise dos níveis de algebrização.



Fonte: adaptado pelo autor (GODINO, 2013, p.7)

Na análise, o foco da atenção pode ser os objetos resultantes da generalização ou processos particulares, no primeiro caso é obtido um tipo de objeto matemático denominado intensivo, que figura uma regra produzindo uma classe (coleção ou conjunto) de objetos resultantes da generalização que possibilitam a obtenção de elementos representantes da classe generalizada. No caso de procedimentos de particularização, são arranjados novos objetos, designados como extensos (particulares), uma quantidade finita ou coleção específica de objetos simplesmente listados não reconhecidos como intensivos até que se prove a regra envolvida na evidência de elementos constituintes do novo conjunto, havendo este por meio da generalização, bem como a unitização, sendo a nova entidade unitária ostensiva ou materializada por uma representação, que pode se dá a partir de símbolo, gesto ou ícone.

O objeto ostensivo aliado ao objeto unitário gera outro objeto, uma entidade intensiva, havendo neste caso uma particularização, generalização e materialização no processo, denominado reificação.

Por fim, ao realizar uma leitura dos documentos oficiais, pode-se concluir que para que a criança possa desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico de forma gradativa e consolidada, as habilidades e competências propostas pelos BNCC devem ser trabalhadas desde os anos iniciais do ensino fundamental, de acordo com os temas relacionados à álgebra.

Em consonância com os PCN, verifica-se a importância do ensino de álgebra para a aquisição de habilidades, pois são considerados importantes para a aprendizagem nas disciplinas que compõem a área de ciências exatas e da natureza, de acordo com os objetivos de aprendizagem estabelecidos pela nova Base Nacional Comum Curricular.

> Em relação à abordagem dos conteúdos algébricos percebe-se que há uma valorização extrema da linguagem algébrica com um excessivo formalismo e geralmente a linguagem algébrica não é construída auxiliada por um pensar algébrico não permitindo a construção de raciocínio dinâmico. (PEREIRA, 2017, p. 10).

O ensino de álgebra é considerado essencial para a formação do aluno e é necessário que o professor utilize a didática mais adequada para que o discente possa compreender o assunto, pois o aluno irá necessitar desse conhecimento por toda a educação básica. Os conhecimentos algébricos são pré-requisitos essenciais para que o estudante possa ter êxito nos estudos de diversas naturezas, inclusive matemática.

Vale ressaltar que os PCN, a BNCC e o SAEB, tem um destaque especial para a importância do ensino e compreensão da álgebra no ensino fundamental e médio, pois se compreende que o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico devem ser objetivos alcançados nas fases da educação básica, porque favorecem o desenvolvimento e a capacidade de generalização e abstração.

Para o alcance dos objetivos dispostos, também se deve considerar a articulação da pesquisa voltada para a Atividade Experimental Problematizada (AEP), constituída por três etapas, sendo nesse caso a etapa do **Problema Proposto:** pergunta que instiga uma busca por uma solução. Distingue-se de uma questão ou da singularidade de uma pergunta, diferencia-se no sentido de tratar-se de ações que visam aproximar teoria e observação, favorecendo compreensões científicas diversificadas. **Objetivo Experimental:** problemática levantada, o qual será responsável por levar aos resultados, de forma experimental, a acompanhar todo o procedimento que solucionará a referida situação problema. **Diretrizes Metodológicas:** são as ações que orientam a prática provenientes do objetivo experimental.

A partir dessas diretrizes os professores devem garantir as condições metodológico-organizacionais necessárias ao desenvolvimento de uma atividade experimental capaz de gerar aprendizagem significativa.

Por fim, destaca-se que a linguagem matemática e o pensamento algébrico são de fundamental importância, pois grande parte das dificuldades apresentadas pelos alunos, muitas vezes ocorrem pelo fato de os mesmos não possuírem habilidades e competências relacionadas ao entendimento da linguagem matemática e do pensamento algébrico. Diante disso, se torna necessário que o professor desenvolva estratégias de ensino que melhore a aprendizagem da álgebra.

Sinalizamos com esse estudo que a RFP inserida num jogo de cartas pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico. Após a análise preliminar, para sustentar e embasar as concepções apresentadas em nossa pesquisa faremos a fundamentação teórica, e de forma conjunta apresentamos o jogo de cartas RFP.

CAPÍTULO II
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

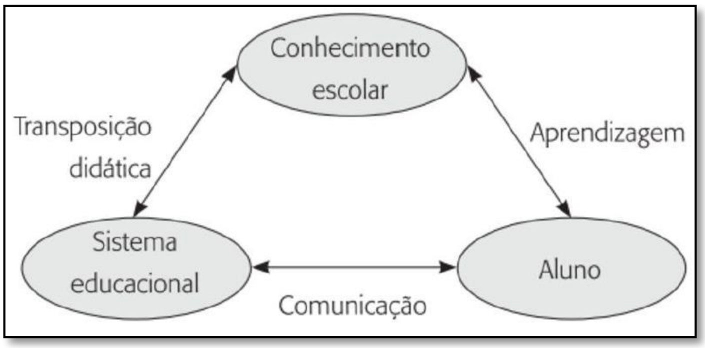
Neste segundo capítulo reconhecemos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como fundamentação teórica deste trabalho, de modo a utilizar seus elementos norteadores para a construção do saber em situação delineada em fases a partir do jogo de cartas RFP para o ensino de equação polinomial do primeiro grau por meio da Regra da Falsa Posição (RFP) e ideias sobre a álgebra escolar no ensino de tal tipo de equação. Também serão discorridos aspectos metodológicos da pesquisa e associados à relevância dos jogos para o ensino e aprendizagem matemática, bem como conceitos ligados a regra da dupla falsa posição.

1 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das situações didáticas (TSD) tem seu cerne nas ideias do francês Brousseau (1986), pesquisador da Universidade de Bordeaux. A TSD visa elaborar um modelo no qual é possível relacionar de forma interativa e através das inter-relações entre o aprendiz (o saber), o *milieu* (ou meio)[5] em favor de aprendizagens, especialmente matemáticas. De acordo como Almouloud (2007, p. 31) “o objetivo da *teoria das situações* é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos”.

A priori, as ideias relativas à teoria das situações se deram por intermédio das relações pertinentes ao processo de construção de um dado *conhecimento* no âmbito escolar, fruto da ligação entre o *sistema educacional* e o *aluno*. Há neste caso uma comunicação importante apresentada pela teoria entre o *aluno* e o *sistema educacional*, que nas transformações de um dado conteúdo do saber em saber ensinar torna-o objeto de ensino, o que decorre a transposição didática, resultante da relação entre o *sistema educacional* e o *conhecimento escolar*. O processo de sistematização e aquisição de conhecimento é neste caso fruto das aprendizagens provenientes da relação entre o *conhecimento escolar* e o *aluno*. A figura 6, melhor expressa essas relações.

Figura 6 – esquema conforme a concepção de ensino



Fonte: Brousseau (2008, p.17).

As interlocuções tornam acessível à identificação dos objetos de estudo, bem como define a função de cada agente no processo de ensino

[5] Vamos utilizar o termo *milieu* advindo do francês, no lugar de sua tradução “meio” em português. Mais a frente será melhor discutido sobre *milieu*.

que se dá no *milieu* de inserção e envolvimento. Dentre as ideias promovidas a respeito do comportamento humano e de sua relação com o *milieu*, há um destaque ao que é revelado por Piaget, quando apresenta dispositivos decorrentes da utilização de noções matemática a resolução de problemas, cuja relação possibilita perceber a importância dos exercícios ou problemas, caracterizados como *milieu* modificável ou modelável a determinadas condições que podem ser favoráveis ou não a aquisição de conhecimento. O ensino decorre neste caso a partir de dois processos denominados de *aculturação* e *adaptação independente*, ambos ocorridos pela inter-relação entre o sujeito e o *milieu*.

Vale destacar, que conforme Almouloud (2007, p. 32) “o *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz”.

Dessa forma, a conduta do sujeito-aluno com relação ao *milieu* propiciado conforme as intenções didáticas demonstram o seu funcionamento, caracterizando-o como um sistema que pode ser modelado conforme um dispositivo que dará resposta a um dado sujeito por meio de regras bem definidas. De acordo com Brousseau (2008, p.19):

> Que jogo o sujeito deve jogar para precisar de um conhecimento determinado? Que aventura – sucessão de jogos – pode leva-lo a conceber ou adotar esse conhecimento? Dessa perspectiva, o sujeito é descrito como um jogador de xadrez que atua levando em consideração somente os próprios conhecimentos e o estado do jogo. Que informação, que sanção pertinente deve o sujeito receber do meio para orientar suas escolhas e comprometer tal conhecimento em vez de outro?

As perguntas supracitadas revelam um modo de ser do *milieu*, reconhecido como sistema, de caráter independente e em oposição ao sujeito, condições favoráveis à formulação de modelos. Dado o contato do sujeito a um *milieu* específico sob condições para a promoção de conhecimento, sua relação configura uma *situação*, que representa um conjunto determinado ou não de circunstâncias para uma ação e modelo pensado para compreender a situação em jogo.

As primeiras interpretações de *situação didática* estavam associadas a uma ação sem reconhecer o papel do professor, apenas com a função do ensino que decorria pelos meios (atividades, texto e etc.) circundantes ao aluno, produzidos e ajustados pelo professor e que serve de base para estudos da engenharia didática. As *situações matemáticas* em seguida foram então articuladas a manifestações de atividades matemáticas sem interferências docentes. Mais adiante há então uma nova percepção de *situação didática*, como sendo "todo contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional" (BROUSSEAU, 2008, p.21).

Como assegura Brousseau em um de seus documentos da escola didática da matemática "Do problema ao estudo a priori de uma situação didática":

> uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explícita e / ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um determinado ambiente (possivelmente incluindo instrumentos ou objetos) e um sistema educacional (o professor), a fim de fazer com que esses alunos tenham um conhecimento que foi estabelecido ou está em processo de construção. (BROUSSEAU, 1982, p.39, tradução nossa).

Nesse sentido, a formulação de uma situação constitui um dispositivo para ensinar um dado conhecimento e/ou controlar o seu processo de aquisição que necessita de um *meio* material, neste caso um problema, um jogo ou desafio etc. – o jogo conjuga ao cenário da pesquisa por remeter ao jogo de cartas RFP –, tal como as regras bem definidas pelo jogo e ações implícitas a ele. Ainda assim, é na aplicação do dispositivo, representada pela ação de resolver um problema ou na realização das jogadas, é possível perceber os resultados provenientes do ensino que aparece através do estudo da evolução da situação, uma vez que o sujeito irá se adaptar e assimilar o meio criado, de tal modo que a manifestação dos conhecimentos decorre como modo de controle das situações em jogo.

Em se tratando da situação adidática Godino, Burgos e Wilhelmi (2020, p. 150) afirmam:

> Em situações adidáticas, as interações entre o aluno e o meio são descritas como uma atividade da produção de conhecimento pelo aluno. Esta produção é **independente da intervenção explícita do professor como detentor do saber**. Assim, o sujeito entra em interação com uma situação-problema, colocando em jogo seu próprio conhecimento, mas também modificando-o, rejeitá-los ou produzir novos, com base

> nas interpretações que faz dos resultados de suas ações (feedbacks do meio) (grifo e tradução dos autores).

Neste caso, situações produzidas a partir da interação entre o aprendiz e jogos por intermédio das regras e socialização entre pares, fica explícita uma situação adidática possível, já que os estudantes poderão utilizar os saberes constituídos atrelados às operações fundamentais para o transcurso da resolução do problema em jogo.

Outro conceito importante que interfere diretamente no modo como decorre a situação didática ou adidática em jogo é a noção de contrato didático, que faz referência a um conjunto de comportamentos que o professor espera do aluno, do mesmo modo, também um conjunto de comportamentos que o aluno espera do professor. De outro modo, conforme Sadovsky (2003, p.15):

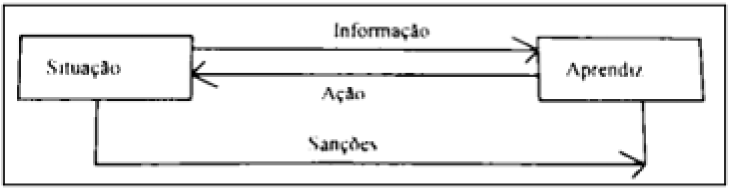
> É na relação entre o professor e o(s) aluno(s) quanto à situação adidática, ou mais em geral, em decorrência de um determinado objeto matemático, - esta é a relação didática - que o professor se comunica, às vezes de forma explícita, mas muitas vezes implicitamente, por meio de palavras, mas também de gestos, atitudes e silêncios, aspectos relacionados ao funcionamento da questão matemática que está sendo discutida na aula a respeito de um determinado objeto matemático, significados são negociados, são transmitidos Expectativas mútuas, modos de fazer são sugeridas ou inferidas, as normas matemáticas são comunicadas ou interpretadas (explícita ou implicitamente), é o **contrato didático**. (grifo pessoal).

O contrato didático nesse sentido estabelece a relação entre professor e aluno, conforme acordos explícitos ou implícitos.

No caso das situações didáticas, podemos classificar e evidenciar um movimento de situação adidática conforme as quatro situações, ou seja, de *ação*, *formulação*, *validação* e posterior *institucionalização*.

A **situação de ação** é a fase que o aprendiz analisa a situação, toma determinadas decisões e identifica os resultados provenientes desta. Durante a situação conforme o meio material (jogo, problema etc.) em vista, o aluno formula estratégias atitudes novas, podendo ser de maneiras intuitivas. Para que o aprendiz consiga formular de maneira consciente algumas táticas ao longo do jogo, serão necessárias algumas partidas. Nesse processo ele também terá condições de justificar suas ações e chegar a conclusões a partir delas, até a obtenção de métodos resolutivos ao problema em jogo. A situação de ação está ligada ao sujeito por intermédio do estado do meio antagonista que decorre de suas próprias motivações. Com isso, a aprendizagem consiste em um processo cujos conhecimentos são modificados e possibilitam antecipações (*feedback*). Portanto, a manifestação observável é um padrão de resposta explicado por um modelo de ação implícito (Figura 7).

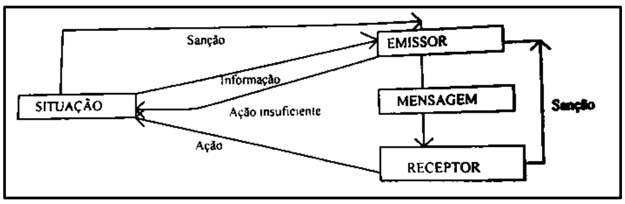
Figura 7 – dialética de ação



Fonte: Almouloud (2007, p.37).

Na **situação de formulação** um dado conhecimento constitui a capacidade do sujeito de retomá-lo, reconhecendo-o, identificando-o, decompondo-o e reconstruindo-o. As formulações serão provenientes das condições exigentes do *millieu* que envolverão outro sujeito, a quem o primeiro irá comunicar uma informação que desta será possível identificar o conteúdo da comunicação, nesse processo a cooperação entre os interlocutores é fundamental para o controle do meio externo. Assim, fica reconhecido que para ganhar o jogo o outro precisa formular sobre o conhecimento em questão, para na interlocução ser possível evidenciar o conteúdo da comunicação (Figura 8).

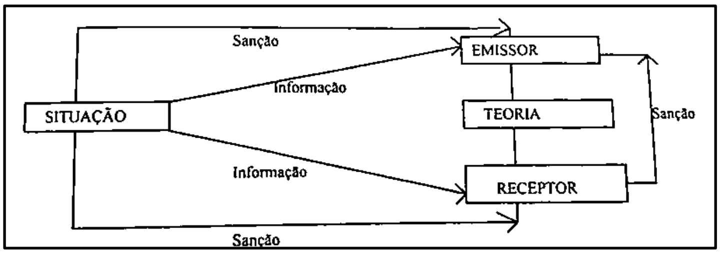
Figura 8 – dialética de formulação



Fonte: Almouloud (2007, p.38).

No caso da **situação de validação**, configura um momento em que um emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente e ambos corroboram para obtenção da verdade por trás da situação, um esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidado. Nesse momento, as opiniões são individuais em relação ao jogo/problema podendo haver discordâncias, sendo nesse caso importante pedir uma demonstração ou exigir a aplicação das declarações no contato com o meio. Assim, os alunos são capazes de organizar em demonstrações suas convicções, elaborar teorias e desenvolver o poder da argumentação nas interlocuções com os outros sujeitos, a considerar o fato de a comunicação ser decorrente de justificações dentro de um sistema determinado (Figura 9).

Figura 9 – dialética de validação



Fonte: Almouloud (2007, p.38).

Em se tratando da **situação de institucionalização,** esta última decorreu da necessidade de incorporação às situações de ação, formulação e validação, pois houve a utilidade de rever as ações desenvolvidas, onde o professor identifica os fatos observados; imprimir impressões sobre os eventos da classe como resultados dos estudantes; realiza aproximações entre o que foi produzido e outras e sugeri reutilização de produções pertinentes. Brousseau (1996a) fundamenta a importância dessa fase da institucionalização para a apropriação dos saberes pelo aluno. A origem de um conhecimento pode ser fruto de uma sucessão de novas perguntas e respostas. As sucessões de situações ação, formulação e validação podem conjugar-se para acelerar as aprendizagens. Logo, acrescentando a institucionalização, teremos uma ordem para a construção dos saberes. Nesta situação o professor determina a forma e o conteúdo do saber para o qual quer dar um estatuto oficial.

Das concepções de situação surge a dialética, entendida como o progresso do sujeito e/ou da situação evidenciado na gênese de um conhecimento advindo de sucessivas perguntas e respostas de maneira espontânea ou não. As aprendizagens nesse processo podem ser aceleradas através das sucessões de situações de ação, formulação e validação. De modo sintético, organizamos a figura 10:

Figura 10 – esquema conforme a concepção de ensino

Fonte: Organização do autor.

Acima é possível reconhecer os momentos da situação didática. A figura não sugere uma sequência ordenada ou momentos que ocorrem isoladamente, pois em uma situação didática isso raramente ocorre. Porém, a figura sugere resumidamente os momentos e suas significações em uma situação didática, o que será mais bem explorado na próxima sessão de forma articulada ao produto da nossa pesquisa, o jogo de cartas RFP.

1.1 Articulando o jogo de cartas RFP a TSD

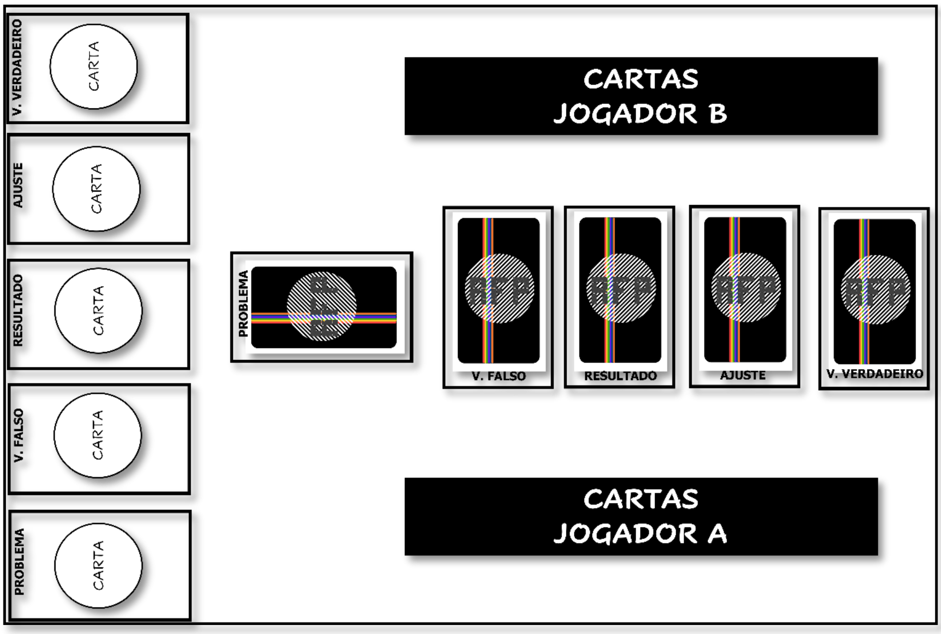
Nesse momento faremos uma primeira menção à análise *a priori* que se complementará mais a frente quando iremos perceber os conhecimentos envolvidos em cada momento do jogo, as dificuldades possíveis envolvendo a resolução dos problemas propostos pelo jogo e percepções dos atores no momento de testagem.

Conforme apresentado no documento específico do produto educacional, jogo de cartas RFP, ficam explícitas as orientações, regras, forma de reprodução, modelos de cartas e demais informação necessárias ao desenvolvimento do jogo e construção do pensamento algébrico.

Desse modo, iremos evidenciar a construção do saber no jogo de cartas RFP a partir de cada tipo de situação – ação, formulação, validação e institucionalização –, através de uma possibilidade inicial de aplicação do jogo, conforme apresentado no produto educacional, porém aqui iremos evidenciar a constituição do saber em situação à luz da TSD.

Inicialmente temos a organização do jogo conforme a figura 11.

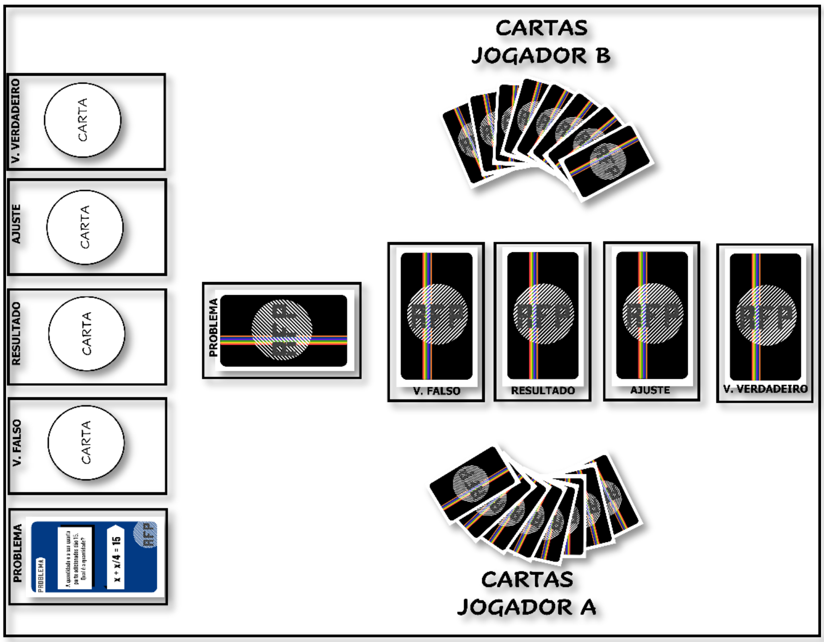
Figura 11: organização inicial do jogo RFP



Fonte: Organização do autor.

Em seguida é lançado um problema, este que integra a situação associada ao jogo. O problema lançado faz referência a situações que se assemelham a problemas presentes em papiros egípcios ou babilônicos antigos, conforme o anunciado pela Regra da Falsa Posição (RFP). Este momento propicia ao aprendiz um processo investigativo e hipotético, à medida que proporciona a busca por alternativas resolutivas, caracterizando a fase inicial (Figura 12).

Figura 12: lançamento da carta problema no jogo RFP

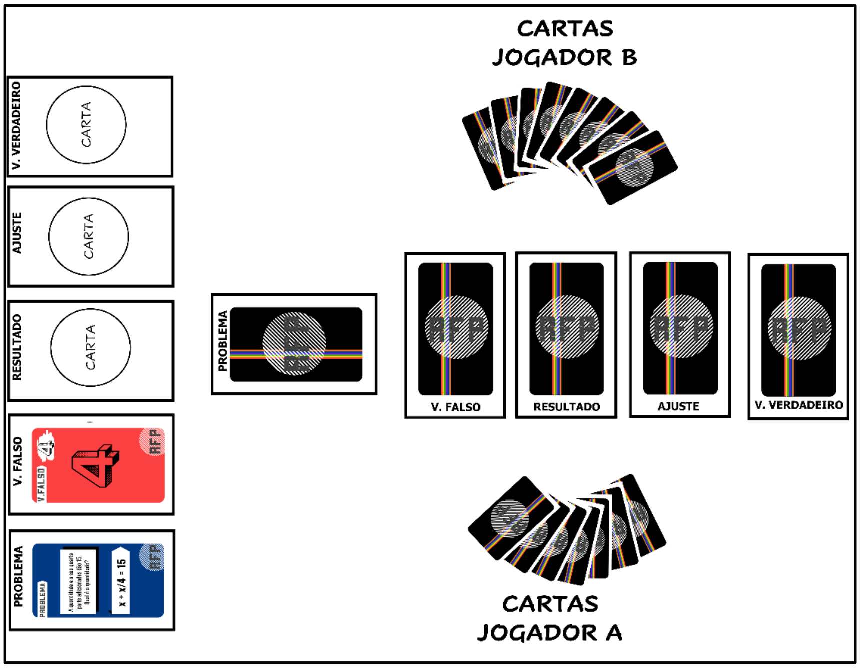


Fonte: Organização do autor.

A primeira fase é identificada como **situação de ação**, nesse momento o estudante manifesta um tipo de ação ou escolha, podendo ser intuitiva, mas que é manifestada por motivações pessoais conforme o problema proposto e sua percepção do problema. Desse modo, conforme o esperado, o educando poderia propor como alternativa um valor que iremos denominar por valor falso, conforme o problema, no intento de obter a unidade na parte fracionária.

Observe a figura 13:

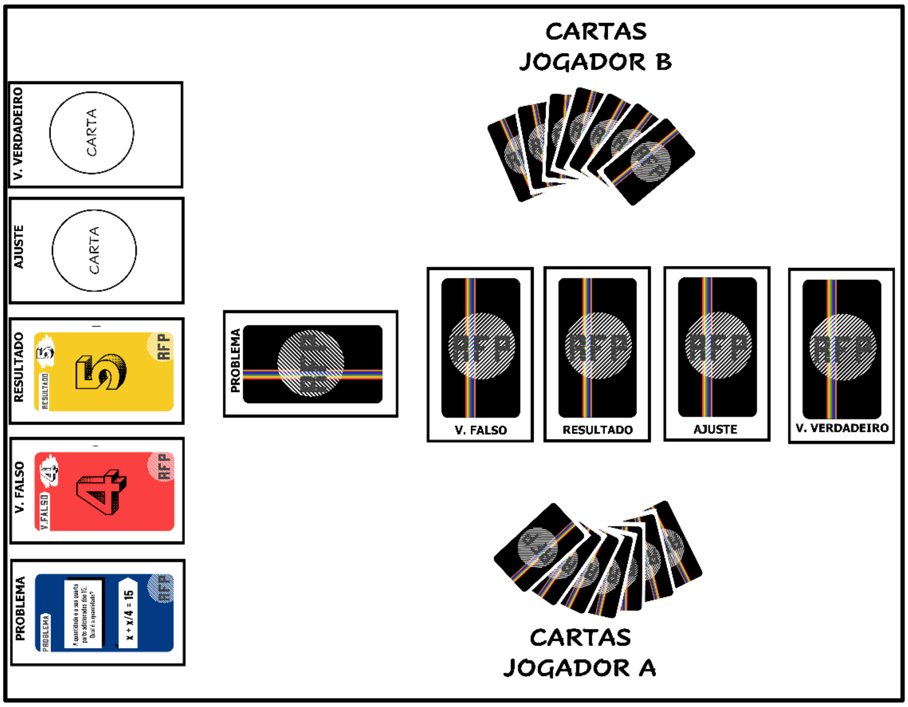
Figura 13: jogador A lança a carta valor falso



Fonte: Organização do autor.

Tal valor lançado pelo educando representado pelo jogador, revela um momento de hipótese, de sugestão podendo ser intuitivo e mobilizador de processos aritméticos relativamente práticos se comparado a possibilidade de escolha de múltiplos do denominador presente no problema (Figura 14).

Figura 14: jogador B lança a carta resultado

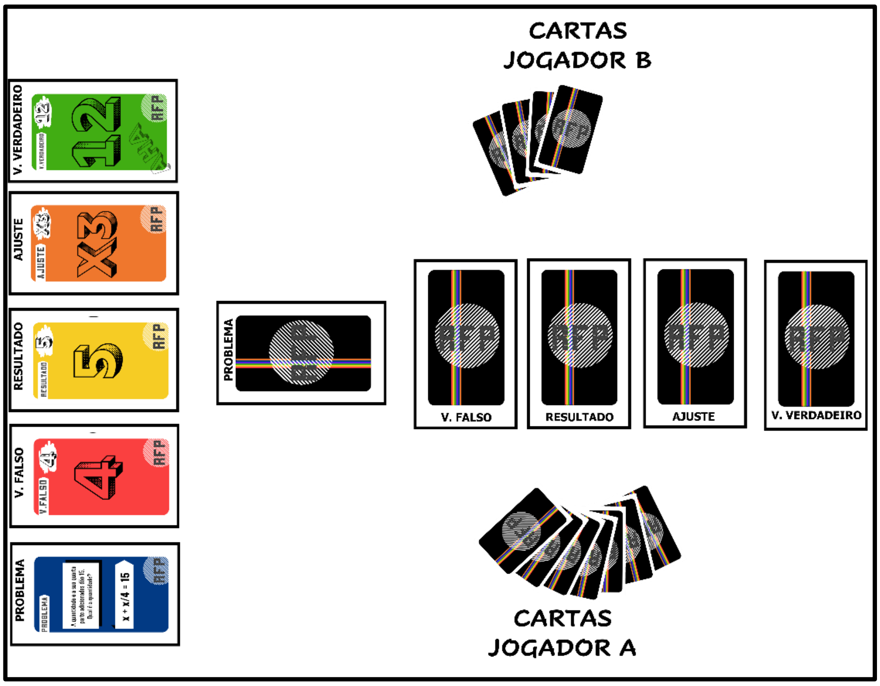


Fonte: Organização do autor.

Seguindo, o jogador B conforme a figura 9, lança a carta amarela 5 (cinco), este momento pode ser caracterizado como a **situação de formulação**, visto que é evidenciado a retomada dos conhecimentos empregados pelo primeiro jogador, a partir da obtenção do resultado, advindo da substituição proveniente da hipótese inicial. Nesta etapa fica exposto um espaço colaborativo no jogo, visto que a solução do problema inicial é o cerne do processo realizado por cada dupla.

Em seguida, são realizadas jogadas a partir das regras apresentadas pelo jogo, mas que evidenciam o percurso resolutivo do problema adequado ou não, sendo capaz de gerar discordância entre os jogadores, mas que merecem justificativas para as escolhas realizadas, objetivando ancorar as razões de escolha do aprendiz e o método atrelado a Regra da Falsa Posição (RFP), erigido posterior ao desenvolvimento do jogo (Figura 15).

Figura 15: jogador A compra cartas e jogador B lança a carta ajuste e valor verdadeiro



Fonte: Organização do autor.

Nesse momento de conclusão da resolução do primeiro problema, os jogadores poderão analisar o processo de resolução do problema de forma conjunta, reconhecendo cada etapa do processo resolutivo, podendo neste caso utilizar os registros em uma espécie de quadro. Para isso, sugerimos um modo de organização do processo resolutivo, que pode ser feito pelo professor junto aos alunos, conforme o quadro 4:

Quadro 4 – Exemplos de problemas e tipos de cartas

Problema (forma literal e simbólica)		**Valor Falso (V.F.)**	**Resultado (R)**	**Ajuste (A)**	**Valor Verdadeiro (V.V.)**
Uma quantia e a sua metade adicionada dão 12. Qual é a quantia?	x + x/2 = 12	2	3	X4	8
Um valor subtraído da sua metade resulta em 6. Qual é esse valor?	x – x/2 = 6	2	1	X6	12

Fonte: Organização do autor.

Esse momento de registro possibilita verificar o percurso resolutivo, reconhecendo cada valor em relação ao problema em estudo, essa então representa a **situação de validação**. Esta fase proporciona o processo de comunicação entre os jogadores, atrelado às justificativas que levaram a tal jogada. A **situação de institucionalização** revela a última fase, preponderante no processo, visto que são retomadas as fases de ação, formulação e validação, conforme é feita a análise do percurso resolutivo.

Conforme o jogo RFP há 10 (oito) rodadas, onde os jogadores (aprendizes) repetem cada fase conforme o problema em destaque. Retomar todos os problemas em estudo, percebendo o padrão evidente no processo resolutivo dos problemas constitui a última fase, a de institucionalização, onde os estudantes irão perceber a relação de proporcionalidade presente no processo de encontro do valor verdadeiro (solução do problema), conforme quadro 5 a seguir:

Quadro 5 – Problemas presentes no jogo RFP e valores correspondentes

Problema (forma literal e simbólica)		**Valor Falso (V.F.)**	**Resultado (R)**	**Ajuste (A)**	**Valor Verdadeiro (V.V.)**
A quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?	x + x/4 = 15	4	5	X3	12

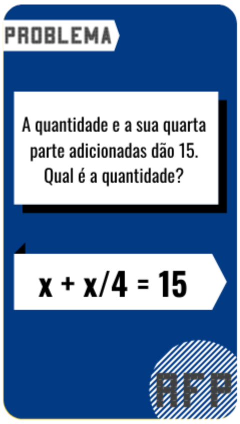
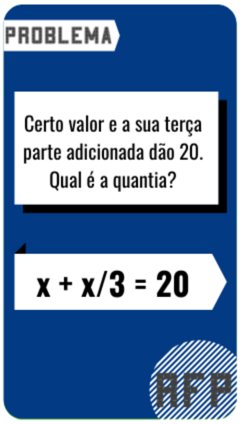
Certo valor e sua terça parte adicionada dão 20. Qual é a quantia?	x + x/3 = 20	3	4	X5	15
Um valor e sua nona parte resulta em 20. Qual é esse valor?	x + x/9 = 20	9	10	X2	18
Uma quantia e a sua metade adicionada dão 12. Qual é a quantia?	x + x/2 = 12	2	3	X4	8
Um valor subtraído da sua metade resulta em 6. Qual é esse valor?	x – x/2 = 6	2	1	X6	12
Um número mais a sua quinta parte é igual a 24. Qual é esse número?	x + x/5 = 24	5	6	X4	20
Dado um valor adicionado a sua oitava parte resulta em 45. Qual é esse valor?	x + x/8 = 45	8	9	X5	40
Seja uma quantia adicionada a sua sétima parte da 32. Qual é essa quantia?	x + x/7 = 32	7	8	X4	28
Uma quantia cuja terça parte lhe é adicionada resulta em 8. Qual é a quantidade?	x + x/3 = 8	3	4	X2	6
Um valor e sua sexta parte resulta em 21. Qual é esse valor?	x + x/6 = 21	6	7	X3	18

Fonte: Organização do autor.

O jogo no contexto da pesquisa representa o modo pelo qual se dá a construção de conhecimento a parti da sua jogabilidade. No caso de jogo para o ensino de matemática, é evidenciado um espaço de destaque especialmente pela possibilidade de maior engajamento dos estudantes, interação e compartilhamento de conhecimentos.

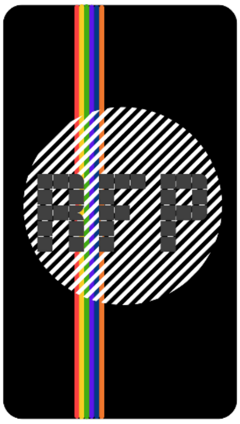
Conforme os problemas propostos, as cartas estão organizadas do seguinte modo Quadro 5:

Quadro 5 – Cartas do jogo RFP

Problema (forma literal e simbólica)	**Valor Falso (V.F.)**	Resultado **(R)**	**Ajuste (A)**	**Valor Verdadeiro (V.V.)**
				
				

PROBLEMA Um valor e sua nona parte resulta em 20. Qual é esse valor? $x + x/9 = 20$ RFP	V.FALSO 9 9 RFP	RESULTADO 10 10 RFP	AJUSTE X2 X2 RFP	V.VERDADEIRO 18 18 AHA RFP
PROBLEMA Uma quantia e a sua metade adicionada dão 12. Qual é a quantia? $x + x/2 = 12$ RFP	V.FALSO 2 2 RFP	RESULTADO 3 3 RFP	AJUSTE X4 X4 RFP	V.VERDADEIRO 8 8 AHA RFP
PROBLEMA Um valor subtraído da sua metade resulta em 6. Qual é esse valor? $x - x/2 = 6$ RFP	V.FALSO 2 2 RFP	RESULTADO 1 1 RFP	AJUSTE X6 X6 RFP	V.VERDADEIRO 12 12 AHA RFP
PROBLEMA Um número mais a sua quinta parte é igual a 24. Qual é esse número? $x + x/5 = 24$ RFP	V.FALSO 5 5 RFP	RESULTADO 6 6 RFP	AJUSTE X4 X4 RFP	V.VERDADEIRO 20 20 AHA RFP

PROBLEMA Dado um valor adicionado a sua oitava parte resulta em 45. Qual é esse valor? $x + x/8 = 45$	V.FALSO 8 8	RESULTADO 9 9	AJUSTE X5 X5	V.VERDADEIRO 40 40
PROBLEMA Seja uma quantia adicionada a sua sétima parte da 32. Qual é essa quantia? $x + x/7 = 32$	V.FALSO 7 7	RESULTADO 8 8	AJUSTE X4 X4	V.VERDADEIRO 28 28
PROBLEMA Uma quantidade cuja terça parte lhe é adicionada resulta em 8. Qual é a quantidade? $x + x/3 = 8$	V.FALSO 3 3	RESULTADO 4 4	AJUSTE X2 X2	V.VERDADEIRO 6 6
PROBLEMA Um valor e sua sexta parte resulta em 21. Qual é esse valor? $x + x/6 = 21$	V.FALSO 6 6	RESULTADO 7 7	AJUSTE X3 X3	V.VERDADEIRO 18 18

Verso de todas as cartas do jogo RFP	
Obs: no jogo temos 1 carta de cada problema e para as demais cartas (valor falso, resultado, ajuste e valor verdadeiro) teremos três carta de cada tipo para que atendem a resolução de cada problema.	

Fonte: Organização do autor.

As cartas acima estão organizadas conforme o problema, o caminho resolutivo perfaz cada tipo de carta, ou seja, primeiro se tem um problema, em seguida faz-se a aposta de uma solução, neste caso o valor falso, em seguida se tem um resultado conforme o valor falso lançado, para tal resultado se faz por meio da multiplicação proporcional ao ajuste do resultado, tornando a sentença do problema verdadeira e a partir desta carta ajuste, se obtém o resultado verdadeiro ou valor verdadeiro, multiplicando-se o ajuste pelo valor falso lançado inicialmente.

Atualmente há um movimento muito grande na educação, especificamente na educação matemática no sentido de desenvolver proposições práticas e bases teóricas para subsidiar o ensino e aprendizagem de matemática. Nesse sentido, fica claro o interesse de vários profissionais da educação, em alguns casos também pesquisadores em promover boas aprendizagens matemáticas em seus alunos, em contrapartida ainda são frequentes alunos que possuem crenças negativas em relação à matemática, por terem dificuldade de compreensão, pela não motivação ou pela influência de outras pessoas, inclusive familiares que através de suas experiências transmitem uma imagem de um tempo passado onde o professor de matemática era o centro do processo de ensino, o que no contexto atual é perceptível às mudanças relativas a esse cenário.

Dessa forma, fica explícito o desafio aos professores que ensinam matemática, de lançar mão de propostas didáticas responsáveis por motivar os estudantes, promover engajamento e fundamentalmente desenvolver boas aprendizagens matemáticas. Nesse caso, o uso de jogos como processo lúdico-didático no ensino de matemática configura uma ação com potencial na promoção de um ensino prazeroso e atrativo, visto que o aluno ao ir para a escola já carrega consigo boas experiências sejam com brincadeiras ou jogos, praticados em sua casa ou na rua, com seus familiares ou colegas que de algum modo envolvem noções matemáticas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento já mencionado, há um destaque para os jogos como recurso didático pedagógico, conforme expõe:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações. (BRASIL, 1998: p. 47).

Com isso, nos PCN, referencial educacional, é reafirmada a relevância no uso de jogos e suas contribuições no processo educativo e como o aluno aprende, seja matemática ou outro componente curricular, por lidar com problemas de um modo diferente, atrativo e possibilita uma aprendizagem criativa relacionada a práticas sociais já desenvolvidas pelos alunos.

> Por meio dos jogos, pode-se incentivar o trabalho em equipe, a colaboração, a capacidade de analisar e decidir sobre tomada de decisões, que não estariam presentes se o conteúdo apenas fosse apresentado de maneira usual por meio apenas dos livros e das atividades de exercícios. (GOMES; THIENGO, 2020, p. 187)

Outro documento importante e que expressa o uso de jogos como recuso didático propício ao ensino e aprendizagem de matemática, é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também já citado anteriormente, documento de caráter normativo que define aprendizagens essenciais durante as etapas da educação básica. Conforme a BNCC, os

> recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, **jogos**, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p.278).

Assim, fica explícito o papel dos jogos no processo de ensino e aprendizagem matemática, especialmente com a finalidade de contribuir na significação dos objetos matemáticos, resultante a partir das conexões possíveis entre conteúdos matemáticos e do engajamento proveniente do tipo de situação promovida pelo professor.

Nesse sentido, pensar as práticas de ensino da matemática a partir de jogos sob a percepção lúdico-didático nem sempre revela uma tarefa de fácil realização, pois quando o professor privilegia de maneira dominante o aspecto motivacional através do uso de jogos de maneira espontânea, este pode estar desenvolvendo uma ação meramente para entreter, ou seja, “o jogo pelo jogo”, uma forma despreocupada com o que de matemática se mobiliza, se constrói, fórmula, pensa ou elabora. Nesse caso, não há reflexão, registro ou sistematização nos processos implícitos ou explícitos ao jogo, correlatos a estruturas ou noções matemáticas.

Portanto, é importante compreender os jogos, nesse caso o jogo de cartas RFP como um recurso didático contribuinte às aprendizagens matemática, especificamente relativas à álgebra concernentes a equações polinomiais do primeiro grau.

Ao longo das atividades desenvolvidas no Programa de pós-graduação em docência em educação em ciências e matemática (mestrado profissional) ocorreu no período de 26/04/2021 a 03/05/2021, a disciplina "Concepção de Produtos Educacionais" com carga horária de 20h realizada em parceria com o Programa de Pós-Graduação em Ensino Tecnológico (PPGET) do Instituto Federal do Amazonas (IFAM) com o objetivo de proporcionar aos estudantes do programa a compreensão do conceito e tipologias de produtos educacionais, assim como identificação de um processo para sua concepção no âmbito de uma pesquisa desenvolvida no nível de mestrado, ministrada através de atividades síncronas e assíncronas pelas professoras France Fraiha Martins e Andréa Pereira Mendonça, atividades que motivaram as ideias iniciais relativas a esse produto educacional, quando nas interlocuções foi apresentado o jogo de tabuleiro *Fica Esperto!*, mobilizando pensamentos iniciais de articulação entre o objeto de pesquisa (RFP) e jogos para o ensino de matemática.

Conforme Priscila Baumgartel (*apud* GRANDO, 1995, p.35):

> a necessidade da existência de regras em um jogo, pode ser

> considerado como uma possibilidade de introduzir conceitos que necessitem seguir alguns procedimentos em sala de aula. “Inserido neste contexto de ensino-aprendizagem, o jogo assume um papel cujo objetivo transcende a simples ação lúdica do jogo pelo jogo, para se tornar um jogo pedagógico, com um fim na aprendizagem matemática – construção e/ou aplicação de conceitos”.

O objeto de pesquisa inicialmente investigado foi a Regra da Falsa Posição – RFP, e através das sugestões, orientações e reflexões percebeu-se o potencial da conexão possível entre o objeto RFP e jogos de cartas, baseando-se inicialmente no jogo UNO, um jogo muito conhecido, praticado por crianças, jovens e adultos, com simples regras, porém a possibilidade de diversificação nas jogadas. O UNO, de origem americana, é formado por um baralho de 114 cartas cujo nome é atribuído ao fato de o jogador prestes a vencer o jogo necessita gritar “Uno!” quando estiver neste caso com apenas uma carta na mão, daí a palavra ‘uno’ de ‘um’, em que as cartas são identificadas de 1 a 9 ou contendo ‘ordens’ a partir das cartas de ação que dão um dinamismo ao longo do jogo, além disso, as cartas são distribuídas por cores, variando entre amarelo, vermelho, azul e verde, no caso das cartas de ação há as cartas comprar duas cartas, inverter, pular, curinga, curinga compra quatro cartas, curinga trocar as mãos e curinga branca para personalizar, cada uma das cartas exercem uma função de jogabilidade, em que os jogadores as utilizam conforme as cartas que possui e o desenrolar do jogo. O objetivo do jogo é livrar-se das cartas, o vencedor será aquele que se livrar de todas as suas cartas primeiro na rodada em jogo, porém há também a possibilidade da contagem de pontuação, nesse caso os jogadores que alcançam o objetivo vão pontuando conforme os pontos das cartas que sobram em poder dos seus adversários até se alcançar 500 pontos, sendo este o vencedor.

Em se tratando da RFP, este objeto matemático tem origem nas civilizações Mesopotâmica, Egípcia e Chinesa conforme evidenciado na história da álgebra, constituído por bases aritméticas sob o pensamento algébrico através do raciocínio proporcional utilizado para a solução de problemas práticos (do cotidiano) e não práticos (estritamente matemático), atualmente resolvidos por estratégias delimitadas pela álgebra moderna simbólica. Este método em questão se dá por meio da suposição de valores falsos, que são assumidos como valor da quantidade procurada no problema, em que se obtém um dado resultado, que através de um ajuste ("fator proporcional") se obtém o resultado esperado, e assim com a proporcionalidade faz-se a conversão dos valores falsos em verdadeiros, sendo neste caso a solução ao problema tratado.

Para exemplificar, consideremos o **problema 24** presente no Papiro de Rhind, datado de 1650 a.C., cujo enunciado se dá por: **"Uma quantidade mais um sétimo dela dá 19. Qual é a quantidade?"**. Nesse caso se atribui um **valor falso** conveniente para a quantidade procurada, como é o caso do 7, obtendo então conforme o enunciado do problema o **resultado**: $7+\frac{1}{7}.7=8$, com isso deve-se pensar no "fator proporcional" para **ajustar** o resultado 8 obtendo então 19, nesse caso o ajuste é $\frac{19}{8}$, que multiplicado por 8, se obtém o resultado esperado. Com este ajuste é que se encontra o **valor verdadeiro**, ou como era denominado "**aha**", pois se multiplica o 7 (valor falso) por $\frac{19}{8}$ (ajuste) resultado em $7.\frac{19}{8}=\frac{133}{8}$, nesse caso $\frac{133}{8}$ é a solução do problema.

De outro modo, pode-se pensar no problema através da regra de três, conforme a relação proporcional estabelecida em que para um dado valor conveniente 7 se obtém 8, então para qual valor verdadeiro ou quantidade se deve obter 19 conforme o enunciado, disto tem-se $\frac{7}{8}=\frac{quantidade}{19}$, que pela propriedade fundamental da proporção resulta em $quantidade=\frac{19x7}{8}$, ou seja $quantidade=\frac{133}{8}$.

Da interseção entre o jogo UNO e a RFP surgiu como proposição o JOGO DE CARTAS RFP (REGRA DA FALSA POSIÇÃO) cuja função é subsidiar a prática de ensino de professores de matemática no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino de equações polinomiais do primeiro grau.

Vale destacar que o jogo foi pensado e projetado para o ensino de matemática, ou seja, com potencial de uso nas salas de aula de matemática com a finalidade de desenvolvimento de habilidades como o raciocinar, comunicar e argumentar matematicamente relações sob o aspecto cognitivo, ainda que mobilize e contribua em outras dimensões como a socialização, interação e motivação. As ações realizadas ao longo do jogo ocorrem conforme as regras e objetivos, que no processo se percebe a construção de conceitos envolvendo noções aritméticas, álgebras e de estratégias para a resolução de problemas, alinhados conforme anunciado ideias sobre jogos no ensino, que:

> O objetivo do jogo é definido pelo educador através de sua proposta de desencadeamento da atividade de jogo, que pode ser o de construir um novo conceito ou aplicar um já desenvolvido. Assim sendo, um mesmo jogo pode ser utilizado, num determinado contexto, como **construtor de conceitos** e, num outro contexto, como **aplicador ou fixador de conceitos**. Cabe ao professor determinar o objetivo de sua ação, pela escolha e determinação do momento apropriado para o jogo. Neste sentido, o jogo transposto para o ensino passa a ser definido como jogo pedagógico. (GRANDO, 2000, p.19).

Sob o âmbito escolar, vale destacar também que o jogo pode cumprir distintas finalidades. Conforme Mariana (2020, p.11-12):

> Realizar diagnósticos relacionais da turma – identificar os grupos, os excluídos, as afinidades e disputas existentes nas turmas, o que não são atribuições específicas de uma aula de História, mas certamente são atribuições gerais de educadores e educadoras. Por vezes, situações veladas de problemas de relaciona mento nas turmas podem vir à tona em contextos ou ambientes mais descontraídos e uma atividade mais lúdica e dinâmica – como jogos de ensino – pode proporcionar essas situações; realizar diagnósticos de aprendizagem - mensurar o domínio de algum tema - o quanto, e de que forma, compreenderam de determinado assunto já trabalhado; realizar a revisão de assuntos já vistos e promover novos aprendizados servindo para introduzir temas, trabalhar aspectos mais específicos, noções gerais, produzir estranhamentos sobre o que se pensava a respeito de determinado assunto, etc.

Nesse caso, esta proposta de pesquisa tem como foco a constituição de novos conhecimentos a partir do jogar, do manipular as cartas com intencionalidade alinhadas a resolução dos problemas propostos.

No que tange o desenvolvimento desta pesquisa, na próxima sessão será possível reconhecer o modo como decorreu a pesquisa, os sujeitos envolvidos e procedimentos realizados.

CAPÍTULO III
METODOLOGIA

Nesta sessão iremos apresentamos como metodologia os pressupostos da Engenharia Didática a partir da nossa pesquisa, bem como o percurso metodológico que proporcionaram o registro, levantamento de informações e análise dos resultados obtidos. Também reconhecendo esta pesquisa sob o caráter qualitativo com a concepção de uma pesquisa-ação.

1 Metodologia e procedimentos metodológicos

Utilizamos os pressupostos metodológicos da Engenharia Didática pela compatibilidade com nossa proposta de pesquisa/ação/experimento a partir do uso do jogo de cartas RFP.

> A engenharia didática, vista como uma metodologia de pesquisa, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. (...) A metodologia de engenharia didática é caracterizada também, em comparação com outros tipos de pesquisas baseadas em experimentos em aula, pelo registro em que localiza e os modos de validação associados a ele. (...) (ARTIGUE, 1988, p. 286).

No contexto do uso de jogos, em especial o jogo de cartas RFP, pode ser considerado um processo experimental, de maneira que envolvem processos de registro e validação. Conforme Almouloud (2008, p.66):

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a *priori* e análise a *posteriori*.

Inicialmente realizamos um apanhado sobre o percurso histórico da álgebra, identificando os processos envolvendo a álgebra, aspectos ligados à regra da falsa posição, procedimentos e generalizações, concepções sob a perspectiva dos documentos educacionais oficiais a respeito pensamento algébricos e suas caracterizações por meio de modelos, constituindo as análises preliminares ou análises prévias, primeira fase de uma Engenharia Didática. Conforme Almouloud (2007), uma das vertentes da primeira fase – análise preliminar –, está em “estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito”.

A primeira fase proporcionou a realização da análise a *priori*, possibilitando julgamentos em relação ao modo de articulação da regra da falsa posição com jogo de cartas, bem como os objetivos em cada momento no uso do jogo RFP na solução de um problema de equação polinomial do 1º grau, os conhecimentos que permeiam cada momento no processo resolutivo, os obstáculos envolvendo a resolução coletiva dos problemas a partir do jogo RFP e o processo resolutivo dos problemas pela RFP.

No momento da testagem inicial envolvendo dois professores da educação básica e pesquisadores em educação matemática, nós entregamos uma versão do jogo de cartas RFP a eles, apresentamos as regras e em seguida observamos as atitudes e socializações em relação ao objeto de conhecimento envolvido e sugestões relativas aos problemas, importantes no processo de análise do jogo e uso em sala de aula.

Seguimos na próxima fase, a análise a *posteriori* se deu a partir dos dados coletados no momento de utilização do jogo de cartas RFP em uma turma do 8º ano do ensino fundamental anos finais, sob nosso acompanhamento em uma escola particular de ensino presente na região metropolitana de Belém/PA e dados obtidos por um professor no uso do jogo em outra turma do 8º ano, agora pertencente ao município de Parauapebas/PA e sem nosso acompanhamento direto em sala de aula. Aqui as observações que realizamos se deu pelo registro em foto, anotações, áudio dos alunos e entre outros.

No processo de validação, realizamos o confronto dos dados da análise a *priori* e *posteriori*, atestando ou não as potencialidades do jogo de cartas RFP.

As nossas intervenções ocorreram nos meses de maio e agosto de 2022, sendo em maio o momento de testagem com dois professores de matemática pesquisadores em educação matemática ocorrido em uma sessão com duração de uma hora e meia, onde um jogou “contra o outro”. Uso do jogo em sala de aula, em uma turma do 8º ano do ensino fundamental anos finais, em uma escola particular de ensino, contendo 15 alunos divididos em 4 grupos (GA, GB, GC e GD), cada grupo composto por 3 ou 4 discentes. Trata-se de um encontro para uso do jogo na prática, sob o olhar do professor vigente da turma e o pesquisador. O jogo também foi utilizado em uma escola no município de Parauapebas envolvendo 4 alunos desta escola.

Em se tratando da álgebra, no que diz respeito ao desenvolvimento das habilidades do estudante, temos na BNCC:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2018, p. 270).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular de 2018, os estudantes devem desenvolver o pensamento algébrico por razões que envolvem números, letras e símbolos. Na turma o professor responsável em geral utiliza o quadro branco, e pelo seu relato apreciou o modo de trabalho pedagógico a partir de jogos, principalmente pelo potencial de engajamento e envolvimento dos estudantes.

Em relação ao ambiente/colaboradores da pesquisa, iremos considerar os ambientes (escolas), com escola I e II, alunos como aluno A, B, C..., e professores a, b, c...

Em se tratando da escolha, esta foi pensada a partir da necessidade e estudo vigente desta turma, visto que os alunos estavam apresentando dificuldades relacionadas à equação do primeiro grau. Em contato com o professor responsável pude compartilhar um pouco do andamento desta pesquisa e o produto educacional em curso, assim se articulou o desenvolvimento desta testagem.

A *priori*, os alunos estavam ansiosos para iniciar o encontro, justamente pelo fato de envolver um jogo até então desconhecidos a eles. Ao iniciar o encontro com os alunos foram levantados alguns questionamentos como: vocês já estudaram sobre as operações fundamentais da matemática? todos confirmaram, seguindo com outra pergunta, já estudaram equação do primeiro grau? também confirmado, inclusive o próprio professor reafirmou já ter desenvolvido esse estudo com a turma.

Os estudantes possuíam conhecimentos aritméticos, importantes no uso do jogo de cartas RFP, visto que o processo resolutivo perpassa por operações aritméticas.

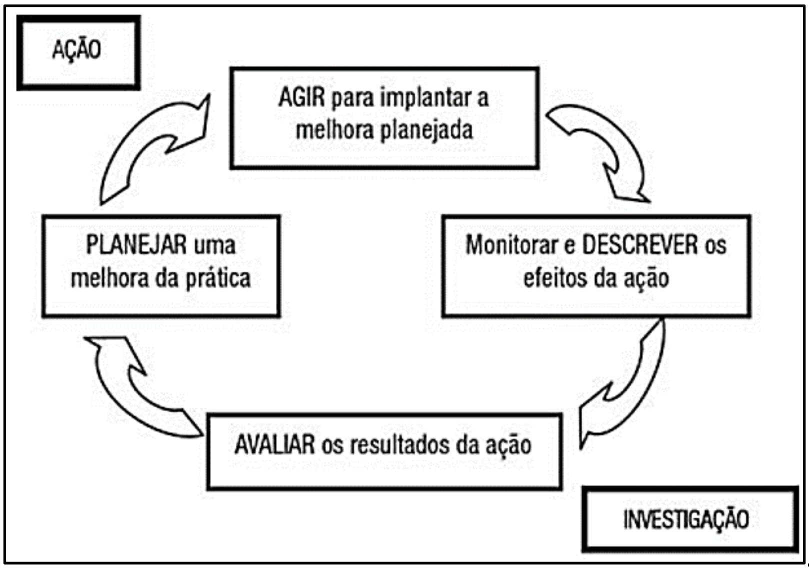
A nossa proximidade com o professor responsável pela turma possibilitou um momento descontraído e leve, pois o seu acompanhamento proporcionou um ambiente seguro e de confiança no uso do jogo de desenvolvimento de aprendizagens.

Realizar o uso do jogo em turmas do 8º ano partiu da ideia de que eles já possuem uma maturidade para enfrentar os problemas de equação polinomial do 1º grau propostos nas cartas. O momento de jogo possibilitou o levantamento de hipóteses, compartilhamento de informações, desenvolvimento de aprendizagens, oportuno momento atrativo e criativo de aprendizagem.

Propomos também esta pesquisa em educação matemática sob o viés de uma pesquisa qualitativa, por possuir características tais como conforme Gerhardt e Silveira (2009) “objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; busca de resultados os mais fidedignos possíveis [...]”. Nesse tipo de abordagem “a vida humana é vista como uma atividade interativa e interpretativa, realizada pelo contato das pessoas” Guerra (2014, p.10).

A pesquisa na perspectiva qualitativa segue a concepção da Pesquisa-ação, que de acordo com Tripp (2005) a respeito de sua definição, “pesquisa-ação é uma forma de investigação-ação que utiliza técnicas de pesquisa consagradas para informar a ação que se decide tomar para melhorar a prática”. Também conforme anunciado pelo autor, este modo de investigação faz o seguinte percurso: primeiro planeja-se, em seguida ocorre à implementação, faz-se a descrição e por fim avalia-se o que foi modificado para a melhoria da prática, valorizando o decorrer do processo através das contribuições para as aprendizagens. A melhor descreve esse processo/ciclo.

Figura 16 – Representação em quatro fases do ciclo básico da investigação-ação



Fonte: Tripp (2021, p.4).

Esta pesquisa se sustenta por uma ação reflexiva conforme os participantes (alunos e professor) interagem com o meio.

> O estudante deve ser compreendido como autor e protagonista nos seus espaços, capaz de reinterpretar significados de concepções e representações da sua realidade, podendo experimentar, questionar, buscar diferentes possibilidades, envolvendo-se num processo vivo em que o jogo de interações e conquistas possa ser compartilhado e construído num espaço de compreensão e aceitação mútua, com vistas à construção de conhecimento. (SCHMITT, 2011 p.62).

Assim, através das experiências propostas por esta pesquisa, questionamentos envolvidos e envolvimento dos participantes no processo é que se funda a construção do conhecimento.

Inicialmente com vista a imersão nas ideias e conhecimentos relativos à RFP, se fez um estudo bibliográfico, compondo também as análises preliminares da Engenharia Didática, em seguida realizamos a elaboração do jogo, partindo de estudos que evidenciam as potencialidades do uso de jogos nas aulas de matemática, especialmente os relacionados a jogos de cartas, a partir daí se percebeu a possibilidade de conexão com o jogo UNO, onde haveria a necessidade de ajustes com enfoque nos objetivos que se queriam alcançar, testagem do jogo com professores de matemática, uso do jogo em sala de aula representando a análise a *priori* e sua validação e potencialidade no desenvolvimento do pensamento algébrico, momento da análise a *posteriori*.

No processo de criação, elaboramos um modelo para as cartas, frente e verso, utilizando como ferramenta digital o Canva[6]. Percebemos a necessidade de diferenciar as cartas por cores, visto que cada tipo de carta assume um papel dentro do jogo e desenha o percurso de jogabilidade.

Os sujeitos envolvidos a *priori* foram professores, colegas atuantes em sala de aula (professor ‘a’ e professora ‘b’), que por meio de conversas reforçaram a importância da utilização de jogos no ensino de matemática. Contamos com a colaboração também de professores pesquisadores colegas do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM) da Universidade Federal do Pará, também atuantes na educação básica, que aceitaram conhecer inicialmente o jogo a partir de um encontro virtual e em seguida jogar presencialmente para conhecer a viabilidade do jogo e contribuir no seu aperfeiçoamento.

No próximo capítulo apresentamos as análises a partir de um panorama de uso do jogo em sala dialogando com a Teoria das Situações Didáticas e percebendo como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do uso do jogo de cartas RFP.

---

[6] Canvas é um ambiente virtual de aprendizagem em nuvem [Canvas 2015a]. Outra denominação, dada pelos proprietários da plataforma Canvas, é o de sistema de gerência de aprendizagem (LMS, da sigla em inglês) (FIGUERÊDO J.; MASCARENHAS R. & BITTENCOURT R., 2017, p.4)

CAPÍTULO IV
ANÁLISE *A PRIORI*

Nesse capítulo abordamos sobre a análise a *priori* sob os pressupostos da Engenharia Didática, por meio de testagem e uso do jogo de cartas RFP com professores de matemática da educação básica e pesquisadores em educação matemática, visando perceber pontos de atenção em relação ao jogo, possíveis ajustes para eficácia no uso em sala de aula e percepções conectadas ao objeto de estudo em questão.

1. Análises sobre a testagem do jogo de cartas RFP com professores de matemática e pesquisadores em educação matemática

Apresentamos informações e análises levantadas a partir da testagem do jogo com professores da educação básica do estado do Pará e pesquisadores em educação matemáticas integrantes do grupo de estudos e pesquisa em didática da matemática (GEDIM). Os dados coletados possibilitaram reconhecer as potencialidades do jogo e aspectos relacionados aos objetivos a partir do uso do jogo, seus aspectos conceituais e de jogabilidade pensados para o contexto de sala de aula.

1.1 Testes, experimentação e articulações com a TSD: utilizando do jogo RFP com professores

Um jogo seja qual for caracteriza-se fundamentalmente pelo fato de ser livre, por proporcionar liberdade e evasão da vida “real” para um momento pontual e específico orientado e com regras próprias. Ocupa um tempo limite no espaço sob certas condições e direções.

> A limitação no espaço é ainda mais flagrante do que a limitação no tempo. Todo jogo se processa e existe no interior de um campo previamente delimitado, de maneira material ou imaginária, deliberada ou espontânea. (HUIZINGA, 2000, p.11).

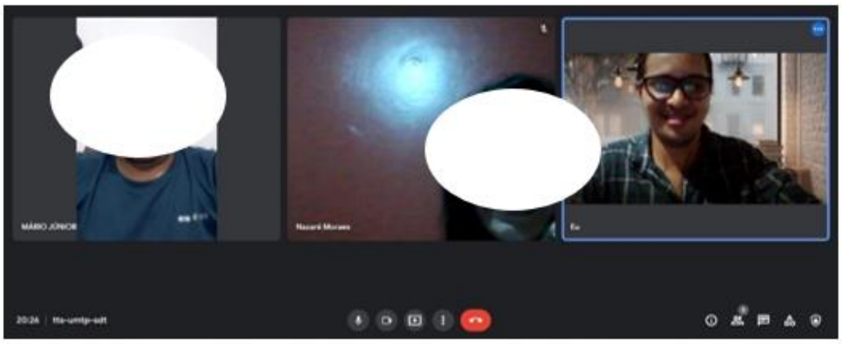
Um jogo é constituído por regras e objetivos guiados a partir das jogadas, o que vai validar sua pertinência e contribuição ao raciocínio lógico ou mesmo a interação entre os participantes e resultados alcançados, sendo efetiva a prática do jogo assim como o seu bom uso, possibilitando condições neste caso de uso do jogo de cartas RFP, de desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir do uso em múltiplos contextos e com pessoas diversas.

> Jogos matemáticos são, ao mesmo tempo, estratégias e recursos, que se expressam como uma forma lúdica de resgatar aspectos do pensamento matemático, pois ajudam na construção do conhecimento lógico-matemático e espacial; trabalham o raciocínio lógico, a estimativa, o cálculo mental e hipóteses, desenvolvendo o conhecimento científico, baseiam-se no processo de construção de conceitos através de situações que estimulem a curiosidade matemática. Desse modo, o aluno passa a não temer o desafio, mas a desejá-lo. (GOMES; THIENGO, 2020, p. 183).

Nesse sentido, o jogo de cartas RFP foi inicialmente testado com dois professores (professor ‘a’ e professora ‘b’) de matemática, atuantes na rede pública de ensino e pesquisadores em educação matemática, integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática da Universidade Federal do Pará.

Vale destacar também que inicialmente os professores foram convidados previamente por meio de mensagens por aplicativo, tendo encontro virtual anterior ao encontro presencial, onde foi esclarecida a proposta de pesquisa e produto educacional, bem como o agendamento do encontro presencial.

Figura 21 – registro de encontro virtual com professores da educação básica



Fonte: Próprio autor (2022).

Em nossa análise *a priori*, atentaremos para o momento presencial, o qual não será apresentado de forma detalhada e minuciosa essa testagem, pois nosso interesse está nas contribuições, direcionamentos e percepções dos professores e pesquisadores em educação matemática, as quais contribuíram para novos olhares e importantes percepções sobre o jogo.

Esse momento de testagem configura uma importante etapa no desenvolvimento do jogo, visto que o modo como foi pensado para sala de aula é posto a prova, as intenções e motivações com as regras e design do jogo são questionadas a partir de um olhar para como na prática vai funcionar ou não, portanto merece atenção esse processo que de certa forma foi cocriativo.

Para testagem do jogo com os professores nos reunimos na biblioteca do Instituto de Educação Matemática e Cientifica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Inicialmente os professores receberam as cartas em uma caixa de papel personalizada contendo um manual com instruções de uso do jogo conforme figura a seguir.

Figura 17 – Manual do jogo RFP

Fonte: Organização do autor.

Nesse momento nós estivemos presentes para orientar também em relação às regras estabelecidas pelo jogo a cada um dos dois professores. Analisaremos a partir de tarefas no processo de testagem conforme a seguir.

Tarefa 1: realizar a leitura e interpretação da carta problema para se perceber qual o valor falso a ser lançado.

Nossa expectativa era de que os professores pudessem reconhecer os conhecimentos envolvidos nas cartas e a partir das orientações sobre as regras pudessem identificar qual seria a melhor aposta de lançamento no jogo, ou seja, o valor falso que torna a fração em unidade, representando a aposta ideal ao processo resolutivo.

Os primeiros questionamentos foram em relação aos conhecimentos envolvidos nas cartas. O jogo direciona o uso da carta aposta (valor falso) igual ao denominador da parte fracionária, o que conforme o problema também poderia ser um múltiplo do denominador e estaria alinhada a regra da falsa posição.

Foi direcionado e estabelecido o valor falso igual ao denominador para dar maior fluidez ao jogo no que diz respeito à jogabilidade, também reconhecendo uma limitação no quantitativo de cartas, visto que há infinitos múltiplos do denominador, logo então a necessidade de limitação.

Tarefa 2: obter o resultado após o valor falso lançado.

Nesse momento não houve dificuldades entre os jogadores, no processo de reconhecimento de qual valor seria obtido a partir do lançamento do valor falso.

Aqui ficou reconhecida a necessidade de conhecimentos prévios dos estudantes em relação às operações fundamentais. Também foi percebido pelos professores o uso apenas de números positivos, por que não envolver os inteiros negativos? por que não há apostas (valores falsos) negativos? é possível ampliar nesse sentido?

O uso da regra da falsa posição envolve os números inteiros (positivos e negativos), porém pensando em um jogo de cartas percebemos a necessidade de limitar a um conjunto de problemas os quais projetam um percurso resolutivo guiado, o qual pode envolver ou não números negativos, neste formato construído não há cartas com valores negativos.

Este olhar foi importante, pois percebemos as multiplicidades de conhecimentos envolvidos no jogo, além de prever este jogo em outro formato, no qual o professor pode eleger um conjunto de problemas que podem ser resolvidos pela regra da falsa posição, organizar os mesmos conforme as cartas problemas, identificar quais serão as cartas (valor falso, resultado, ajuste e “aha”) e compor desta forma um processo autoral de construção do jogo neste formato, gerando protagonismo e alinhamento às intencionalidades pedagógicas do professor em sala de aula.

Tarefa 3: identificar que o resultado obtido foi diferente o resultado da sentença, e assim reconhecer qual seria a carta ajuste para alcançar o resultado esperado pelo problema.

Nesse momento ficou reconhecido o conhecimento de proporcionalidade envolvido no jogo. Questionou-se por que as cartas ajustes apresentam apenas multiplicações? por que não há o uso da operação divisão nestas cartas?

Conforme os problemas propostos, percebemos que no percurso resolutivo as cartas ajustes teriam essa configuração, apresentando como artifício a multiplicação do resultado para obter o valor de equivalência presente no problema, de modo a reconhecer qual fator proporcional apoia na obtenção do resultado da equação do primeiro grau.

Esse olhar também ampliou a percepção sobre o jogo para a possibilidade de incrementos no jogo conforme os problemas escolhidos, cartas ajustes podem sim apresentar a operação de divisão, porém, estas devem estar associadas aos problemas propostos de modo a perfazer a resolução do problema.

Tarefa 4: com o ajuste perceber qual o resultado do problema é gerado e identificar a sua compatibilidade com o valor presente na equivalência da equação do primeiro grau posta.

As cartas propõem resultados em sua maioria incompatíveis ao valor da equivalência da equação do primeiro grau do problema, isso porque a aposta configura um valor falso, caso o fosse verdadeiro esta seria a resposta (“aha”) ao problema proposto.

Essa incompatibilidade existe conforme a regra da falsa posição, mas também propicia um momento de aprendizagem importante aos estudantes, já que se deve perceber qual ajuste proporcional adequado ao problema.

Aqui também foi perceptível a relevância da aposta ao problema, já que o ajuste multiplicado (ou dividido) pelo valor falso gera o resultado (“aha”) do problema.

Tarefa 5: perceber aspectos ligados a jogabilidade, composição material e viabilidade.

O objetivo foi perceber a efetividade do jogo sob o olhar de professores pesquisadores em educação matemática, visto que as experiências em sala e com pesquisa voltadas ao ensino de matemática representam potenciais lentes e olhares para validação das potencialidades do jogo e sinalização para o que poderia ser ponto de atenção. Este processo esteve presente durante todo o jogo, a cada jogada e percepção.

A expectativa era enxergar o que precisava melhorar a partir das lentes dos professores. A seguir alguns dos registros desse encontro.

Figura 22 – professores de matemática da educação básica jogando o jogo de cartas RFP

Fonte: Próprio autor (2022).

Durante o jogo e ao final das dez rodadas apresentadas pelo jogo, os jogadores realizaram alguns apontamentos, dos quais vale o destaque para o fato da possível conversão posterior do jogo em versão digital, como uma extensão da versão material, na crença de suas potencialidades e aperfeiçoamento.

Também foi sinalizado o fato, como já mencionado, de ser possível o próprio professor criar problemas que possam ser trabalhados a partir do jogo, contribuições que interferiu no ajuste feito em relação ao produto, onde há a proposição de outras possibilidades de trabalho pedagógico envolvendo o jogo a partir deste caminho.

Outros pontos como a necessidade de boa articulação da teoria das situações didáticas com a proposição do jogo, suas limitações relacionadas à resolução de problemas, bem como a atenção para os contextos escolares possíveis onde o jogo poderia ser utilizado.

CAPÍTULO V
EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE *À POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Nesse capítulo trataremos sobre a análise a *posteriori* e validação das ações a partir do momento anterior de testagem e agora de uso prático do jogo em turmas do 8º ano, também estabelecendo conexões com os documentos educacionais oficiais, a história da álgebra e modelos teóricos a partir da caracterização do desenvolvimento do pensamento algébrico, objetivo de nosso estudo, na validação dos resultados confrontaremos as informações da análise *a priori* e *a posteriori*, validando a proposição do jogo ou não.

1. Análises do uso do jogo de cartas RFP com alunos da rede particular e pública de ensino

Apresentamos nesta parte, análises provenientes da utilização do jogo de cartas RFP em turmas do 8º ano, considerando o contexto de uma escola particular de ensino da região metropolitana do município de Belém do Pará e de uma escola pública municipal de Parauapebas pertencente à mesorregião do Sudeste Paraense, distante 719 km da capital Belém. Os dados coletados possibilitaram reconhecer as potencialidades do jogo e aspectos relacionados a cada contexto de sala de aula.

1.1 Prática e articulações com a TSD: utilizando do jogo de cartas RFP com estudantes do 8º ano

O jogo de cartas RFP como já anunciado, também foi utilizado em uma escola particular de ensino da região metropolitana de Belém do Pará, onde acompanhamos em conjunto com o professor responsável pela turma, professor ‘c’, sendo neste caso uma turma do 8º ano do ensino fundamental, anos finais com 15 alunos. A escola Centro Educacional Criativo Senas viabilizou a utilização do jogo nesta turma, a qual foi possível coletar boas e potentes informações promotoras de aprimoramentos no uso do jogo. Nesse contexto estávamos apenas com duas versões do jogo.

Na prática, inicialmente foi perguntado se em algum momento ouviram falar em algum método denominado “regra da falsa posição”, na ocasião, os estudantes confirmaram não ter estudado ou escutado falar a respeito deste método. Com isso, seguindo, foi feita a organização da sala, nesse momento se percebeu a necessidade de pelo menos duas mesas, de modo que em cada mesa pudesse compor dois grupos “um contra o outro”, porém na sala só havia uma mesa e a outra foi feita de forma improvisada juntando duas cadeiras e demais cadeiras em volta do espaço onde ficaram as cartas.

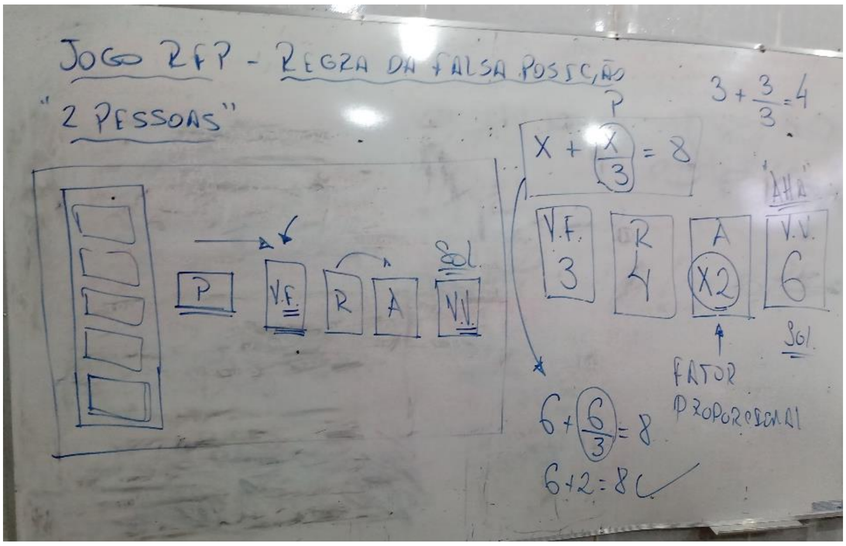
A turma é composta por 17 alunos, porém estava com 15 alunos neste encontro, sendo o jogo pensado para ser jogado por duas pessoas e tendo apenas duas versões do jogo para uso nesta turma. Nesse contexto se pensou em uma alternativa viável que pudesse contemplar as condições de uso adequando ao contexto dessa turma, assim foi feita a distribuição da turma em quatro grupos (GA, GB, GC e GD), em que os grupos GA e GB ficaram em um espaço e os grupos GC e GD ficaram no outro, tendo uma versão do jogo para cada dupla de grupos. A Figura 17 a seguir, expressa um momento em um dos grupos.

Figura 17 – alunos utilizando o jogo de cartas RFP

Fonte: Próprio autor (2022).

Em cada espaço foi organizada as cartas conforme as regras e orientações do jogo, sendo apresentado cada tipo de carta e sua função no jogo. Ao iniciar a partida se percebeu a apreensão dos estudantes em relação a possível dificuldade de jogabilidade. As cartas foram entregues aos grupos. No decorrer das jogadas, a situação adidático estava estabelecida, as fases de ação, formulação, validação e institucionalização estiveram presentes, de modo que os alunos protagonizaram este momento lançando as cartas, questionando-os entre eles e levantando suposições. No transcurso do jogo, houve questionamentos que foram sendo registrados e acompanhados pelos estudantes. A figura a seguir apresenta a estrutura do jogo com a posição das cartas do jogo, relacionando cada tipo de carta.

Figura 18 – registros prévios e ao longo do jogo



Fonte: Próprio autor (2022).

Então se iniciou as jogadas em cada grupo, sendo dado o espaço para que os alunos pudessem jogar livremente a partir das orientações iniciais, porém ao longo do jogo surgiram algumas perguntas, por exemplo, se caso um grupo possuir sequencialmente as cartas para a solução do problema pode continuar com a vez lançando cartas à medida que vai resolvendo o problema? Neste caso sim, também segue lançando cartas para os próximos problemas. Também questionaram se podiam mostrar as cartas para o outro grupo ou precisavam esconder como normalmente ocorre em jogos de cartas? Neste caso não há a necessidade, visto que a solução do problema é compartilhada pelos “oponentes”.

Ao longo do jogo os alunos de forma orgânica foram conduzindo as jogadas de modo coletivo, em cada grupo dividiram internamente as tarefas, onde um estava com as cartas a mão para ser lançada, outro(a) estava com a ficha de anotações realizando cálculos e registrando os problemas, outro(a) estava acompanhando as cartas sendo lançadas e apoiando a partir de cálculos mentais e todos muito bem articulados de modo a perfazer o caminho resolutivo do problema.

A figura a seguir apresenta um momento em que uma estudante estava com as cartas à mão realizando o acompanhamento dos lançamentos das cartas e fazendo a associação do momento com a devida carta, visando eliminar as cartas a sua mão conforme objetivo do jogo para ser o vencedor. Também há outra estudante realizando os devidos registros gerados pelo jogo conforme o problema, material com identidade visual do jogo de cartas RFP (anexo I) e entregue aos alunos no início do jogo.

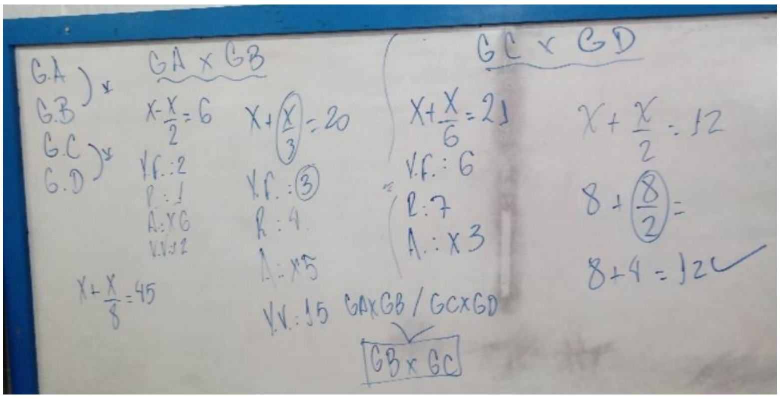
Figura 19 – os alunos jogando

Fonte: Próprio autor (2022).

Na medida em que os problemas iam surgindo, nós em conjunto com o professor responsável realizamos os devidos registros no grupo, um modo de acompanhar o percurso das jogadas e ao mesmo tempo realizar possíveis esclarecimentos, os alunos nesse momento sinalizavam o problema em questão, este era registrado e seguiam para identificar qual a carta deveria ser lançada para cada problema em cada momento do jogo.

A figura a seguir representa um momento de registro de alguns dos problemas que surgiram a partir das jogadas realizadas pelos alunos.

Figura 20 – registros do jogo no quadro branco



Fonte: Próprio autor (2022).

Na primeira rodada o grupo GB “venceu” do grupo GA, já o grupo GC “venceu” do grupo GD, tendo como critério o número de cartas que cada grupo ficou a mão ao final da rodada, no caso entre GA e GB, o grupo GA ficou com 9 cartas, enquanto o grupo GB ficou com 5 cartas, já o grupo GC ficou com 4 cartas e o grupo GD ficou com 5 cartas. Seguindo os grupo GB e GC jogaram entre si na última rodada, de modo que ambos ficaram com o mesmo número de cartas ao final do jogo, gerando empate.

Vamos analisar a partir de tarefas o momento das jogadas dos estudantes, realizando articulações e identificando os resultados provenientes desta prática.

Visando uma melhor organização, seguimos com a tarefa 1.

Tarefa 1: realizar a divisão da turma em grupos, entrega do jogo e organização das cartas.

O jogo foi pensado para ser jogado por duas pessoas, porém como tínhamos apenas duas versões do jogo, realizamos a divisão da turma em 4 grupos, de modo que cada grupo (GA, GB, GC e GD) ficou com 3 ou 4 alunos. O objetivo foi validar na prática o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da utilização do jogo de cartas RFP.

A expectativa foi do desenvolvimento de boas aprendizagens, porém prevendo também algumas dificuldades iniciais, por ser um jogo novo e pelo fato de eles ainda não conhecerem as regras, o próprio objeto de estudo em questão (a regra da falsa posição), bem como o processo de jogabilidade, mas a partir de uma compreensão do percurso resolutivo dos problemas, os estudantes puderam jogar com maior fluidez e tranquilidade.

Também surgiu a dúvida em relação ao quantitativo de cartas. Esclarecemos que ficou estabelecido conforme o manual que são 8 cartas, sendo 2 de cada tipo com exceção da carta problema que fica na mesa para ser lançada a cada início de rodada.

Tarefa 2: lançar um problema seguido de um valor falso, uma aposta de solução.

Inicialmente houve dúvidas que foram esclarecidas com registros no quadro e orientações ao longo do jogo, entre elas a dúvida: quem irá lançar o problema? Nesse momento nós intervimos dando início ao jogo lançando uma carta problema. Na sequência o grupo que iniciou lançando a carta valor falso foi aquele que ganhou no “par ou impa” para começar o jogo.

Para supor um valor inicial houve algumas dificuldades, a cor da carta (vermelha) ajudou a perceber entre quais cartas a escolha poderiam ser lançada, porém qual seria é que foi um obstáculo. Nesse caso, orientamos os estudantes a perceber qual carta tonaria a parte fracionaria unitária, o que facilitou a percepção dos grupos de qual melhor carta a lançar.

Esse momento fomenta o espírito investigativo do estudante a propor uma solução falsa conforme o problema, de certa forma por tentativa. Conforme competência 2 para o ensino fundamental de matemática, anunciada na Base Nacional Comum Curricular, temos:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (BRASIL, 2018, p.)

Resolver problemas por tentativa ou erro exercita o espírito investigativo do estudante e está alinhada a competência específica da matemática estabelecida no currículo do ensino fundamental.

A próxima tarefa envolveu um exercício de uso das operações fundamentais, tema já estudado pela turma.

Tarefa 3: obter o resultado após o valor falso lançado.

Como a turma foi dividida em grupos, um ou dois estavam realizando as operações via registros, enquanto os demais realizavam a gestão das cartas e lançamento. Foi um trabalho em equipe.

Nesse momento, o processo resolutivo envolvendo as operações fundamentais foi compartilhado, pois no momento da resolução eles se reuniam para perceber qual seria o valor resultante e o aluno que estava registrando anotava e seguia com a resolução.

Na maioria das vezes esse processo de resolução era compartilhado entre os grupos “oponentes”, o que facilitou o percurso do jogo e demonstrou um processo de aprendizagem compartilhada.

A próxima tarefa é fruto da anterior, pois ao calcular o resultado já fica evidente a incompatibilidade, o desafio está no reconhecimento de qual ajuste é o adequado para o problema.

Tarefa 4: identificar a incompatibilidade do resultado com o esperado pelo problema para se perceber qual o melhor ajuste.

Aqui houve ajuda mútua entre os grupos, visto que exigiu uma compreensão sobre proporcionalidade. Compartilhamos algumas ideias e ficou clara essa relação. A partir da segunda ou terceira rodada o jogo seguiu com maior fluidez.

Enxergar o ajuste representou de certa forma um obstáculo que foi superado à medida que os estudantes jogavam cada rodada. As conexões operatórias envolvendo os números ficaram mais claras conforme jogavam.

Tarefa 5: obter o resultado para o problema.

A percepção de que o resultado era obtido utilizando o ajuste com a aposta, valor falso, inicialmente lançado não foi percebido pelos estudantes de imediato. A partir de duas ou três rodadas eles perceberam a relação e como é possível identificar o resultado para o problema.

As tarefas acima perfazem os momentos de jogada envolvendo os colaboradores da pesquisa, evidenciando o modo como é caracterizado as vertentes fundamentais conforme Ponte, Branco e Matos (2009), ou seja, os momentos de representar, raciocinar e resolver problemas.

Este caminho também comunga com as ideias de Nunes (2011, p. 78) com base nos PCN:

> Nos PCN, alguns caminhos são apontados no sentido de que os professores devam encorajar os estudantes com atividades individuais ou em grupo, que possibilitem aos discentes justificarem as suas proposições sobre o assunto que será abordado, sugerindo-lhes questões que suscitem hipóteses, justificativas e discussões para que eles reflitam sobre as suas ideias.

Também foi reconhecida pela escola a importância de promover momentos de interação a partir da utilização do jogo, de modo que os registros em imagem e vídeo do encontro foram compilados e um vídeo publicado, tornando público nas redes sociais *facebook* da escola para o público de estudantes da mesma, outros estudantes, pais e demais pessoas. Para acesso a publicação segue link: encurtador.com.br/ajt29.

Vale destacar que o uso do jogo nesta turma teve a duração de 1h30, correspondente a dois tempos de aula. Ao final do jogo com a turma, fizemos o fechamento reconhecendo os conhecimentos constituídos com o jogo e ao mesmo tempo evidenciando as impressões dos alunos em relação ao jogo.

O aluno A relatou que *“o jogo ele foi bom, porque ele faz com que a gente interaja com as pessoas, né, com os nossos colegas de sala, e faz com que a gente aprenda de uma forma divertida com o jogo”*, já a aluna B socializou que *“é muito bom, porque interage com nossos amigos, é um aprendizado bem bom, as pessoas se divertem e é muito legal”.* Por meio das colocações e partilhas realizadas em sala foi possível perceber o impacto positivo gerado.

Os alunos receberam um gibi e lápis como brinde, sendo deixada também uma versão do jogo na escola para posterior utilização do professor junto a turma. Evidentemente que as impressões do professor responsável pela turma são importantes, por ser uma outra lente e pelas contribuições possíveis de aperfeiçoamento do jogo, com isso o professor ‘c’ disse que na visão dele

> *“o jogo na sala, naquele momento, fez com que a turma interagisse entre eles, de uma maneira em que todos colaboraram tentando descobrir o valor da equação, valor de x dentro da equação, proposta pelo jogo, das equações propostas pelo jogo, sendo que o jogo conseguiu unir a turma e também desenvolver o raciocínio logico, porque muitos dos alunos, eu percebi, que não precisaram do material, do caderno, do lápis, da caneta pra desenvolver a conta, e sim a partir do momento que eles iam puxando as cartas do jogo, eles iam raciocinando e acertando o resultado, as vezes não acertavam na primeira né, pela euforia que o jogo causou, pra eles foi uma novidade ter alguém de fora, tá, com um joguinho, lançando um jogo educativo principalmente na parte da educação matemática, que pra eles pesa, então pela euforia algumas vezes eles erravam a primeira, mas quando eles prestavam bastante atenção, eles acertavam, então eles raciocinavam na questão proposta pelo jogo, e também pelo fato de eles trabalharem a equação do primeiro grau, a equação fracionaria do primeiro grau, descobrir o valor de uma incógnita que de repente na visão deles, como o jogo mostrou, tinha uma, poderia ser um valor equivocado, eles olharem para equação e achar que o valor era um número, e na realidade o valor era outro, porque eles iam ter que raciocinar em cima pra saber o valor que tinha, então pela maneira que eles estavam aguçados eles olhavam para equação e diziam logo um valor qualquer tá, mas não, quando eles raciocinavam em relação a questão proposta pelo jogo, eles chegavam a conclusão que aquele valor que tinham dito anteriormente não satisfazia a igualdade, por isso quando eles raciocinavam chegavam ao valor correto. O jogo é bastante interessante, eu gostei como professor, já tô até treinando alguns professores do fundamental lá na escola, para que eles desenvolvam o raciocínio com seus alunos.”*

Dessa forma, tanto sob a ótica dos estudantes quanto do professor, foi possível identificar as potencialidades do jogo em sala, suas contribuições referentes à interação, envolvimento e promoção de conhecimentos relativos ao conhecimento algébrico. O transcurso da solução de cada problema os alunos conjecturavam lançando cartas a partir de cálculos prévios argumentavam oralmente e por meio de registros suas iniciativas estabeleceram generalizações quando de forma às vezes até automática lançavam as cartas já por reconhecer a carta que atende as condições de solução do problema, percurso que conforme James Kaput perfaz o caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O jogo de cartas RFP também foi utilizado pelo professor de matemática professor ‘d’ em uma turma do 8º ano na Escola Municipal de Ensino Fundamental Eurides Santana, localizada no município de Parauapebas no estado do Pará. Encaminhamos uma versão em arquivo pdf do jogo para o professor ‘d’, o qual realizou a impressão de versões do jogo e utilizou na sua turma.

Figura 23 – registro de uso do jogo de cartas RFP em uma turma do 8º EM Parauapebas/PA

Fonte: Rodrigues (2022).

Na turma foram compostas duplas, de maneira que uma “jogou contra a outra”, onde foram feitos registros em papel à medida que iam lançando as cartas, realizando operações suporte no reconhecimento das cartas necessárias ao lançamento. Nesse momento, os estudantes de forma livre realizaram as jogadas e o professor ‘c’ realizou as conduções no sentido de orientá-los em relação às regras do jogo.

Após as jogadas foi possível obter *feedbacks* dos estudantes, dos quais é possível destacar do aluno P discorrendo que “o jogo foi importante para aumentar a velocidade de raciocínio de divisão e multiplicação e eu aprendi que é possível realizar estratégias através de um jogo de cartas”, também vale a atenção para fala do aluno F, cuja impressão aponta para o fato de que “no jogo foi possível aprender mais sobre a equação, mais para desenvolvermos a matemática, e com esse jogo que é possível realizar cálculos com letras”.

A partir das impressões dos estudantes é possível evidenciar as palavras e percepções como raciocínio, operações fundamentais da matemática, estratégia, equação e cálculos. Tal reconhecimento elucida aspectos potentes, na direção de perceber o alcance dos objetos com o jogo, sua utilização em sala de aula de matemática no desenvolvimento de boas aprendizagens de forma atrativa e interativa.

O professor responsável, professor ‘c’ também expôs suas percepções em relação ao jogo, anunciando que

> “a utilização do jogo me permitiu analisar o nível de abstração dos alunos com relação a álgebra. No primeiro momento, os alunos não se sentiram à vontade para participar do jogo porque acharam que teriam muita dificuldade. Para reverter essa situação, escrevi no quadro problemas com resolução algébrica: um número: X; o dobro de um número: 2x; a terça parte de um número adicionado de 3 é igual a 15. Que número é esse? Ao resolver essas questões, os alunos começaram a comparar suas respostas com as dos colegas e pediram para passar mais e fazer uma disputa na sala. Nesse momento expliquei que nesse jogo, os alunos teriam que desenvolver esse tipo de raciocínio. No momento do jogo, a turma foi dívida em dois grupos e cada grupo indicou uma dupla. Ao iniciar o jogo, os alunos observaram a carta problema e logo tentaram buscar uma solução. A cada carta jogada sobre a mesa, refaziam os cálculos e tentavam criar alguma estratégia para vencer. Conforme as rodadas iam ocorrendo, foi possível perceber o interesse dos alunos com relação ao jogo, de modo que ao criarem grupos com 4 alunos, primeiramente em cada grupo discutia qual estratégia iriam utilizar. Com esse aspecto, foi possível observar que o interesse dos alunos era decorrente da atratividade que o jogo despertou neles. Ao finalizarem as partidas, os alunos das duas duplas realizaram os cálculos para verificar a validade do resultado”.

Os apontamentos do professor ‘c’ possibilitaram perceber que cada contexto reage de um modo, e a estratégia utilizada pelo professor pode variar conforme seu olhar perante a reação da turma, o qual interveio inicialmente e em seguida deixou os alunos utilizarem o jogo, acompanhando as jogadas e apoiando nas dúvidas possíveis.

As habilidades dos estudantes serão testadas e desenvolvidas, suas contribuições e interações ao longo do jogo proporcionam olhares individuais e coletivos, cenário propício à constituição de boas aprendizagens, neste caso correlato a álgebra, especificamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

1.2 Validação

O pensamento algebrico, conforme as percepções dos documentos educacionais oficiais está nas generalizações, representações, regularidades, abstração, padrões, resolução de problemas, modelos matemáticos, relação entre quantidades, estruturas matemáticas, uso de simbolos, aritmética, linguagem e entre outras concepções que dialogam com o proposto pela prática envolvida no jogo de cartas RFP e ao mesmo tempo está alinhada às vertentes fundamentais do modelo estabelecido por Ponte, Branco e Matos (2009, p.11) quando contempla processos de representação, raciocínio e resolução de problemas.

A situação adidática é estabelecida quando as regras estão bem alinhadas, pode-se haver um desequilíbrio inicial no que diz respeito a compreensão de regras, porém em conjunto os jogadores aos poucos conseguem de forma conjunta perceber as conexões estabelecidas entre as cartas no processo resolutivo do problema.

No lançamento de um problema surge uma certa apreensão, como resolver esse problema? o que diz o problema? Outras vezes até imcompreensão do enunciado ou mesmo da expressão, nesse caso as ideias compartilhadas ajudam no entendimento e estabelecimento de um ponto em comum que dialoga com a resolução.

A carta valor falso é uma aposta, não aleatória ou desorientada, porém com significado e com intencionalidade, cujo resultado proveniente da aposta proporciona se pensar no fator proporcional representado pela carta ajuste, percurso pelo qual se percebe uma prática em conformidade ao estabelecimento de regularidades prática própria do que caracteriza o pensamento algébrico.

A análise *a priori* nos possibilitaram perceber em que medida o jogo poderia revelar uma ferramenta em potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir da percepção de professores de matemática pesquisadores. Na prática, a análise *a posteriori* permitiu vivenciar no espaço escolar como de fato o jogo se configura.

As contribuições dos professores na testagem nos possibilitaram uma preparação para a ação evidenciar aspectos ligados aos conceitos, também uma maior acertividade no modo como conduzimos a utilização do jogo com os estudantes, o registro no quadro branco em formato de quadro, identificando cada carta e perfazendo o caminho resolutivo foi uma das sugestões dos profesores que sem dúvida contribuíram para o reconhecimento e percepção dos alunos de cada momento e registro dos seus resultados.

O jogo tem possibilidade de amplitude, porém conforme nosso objetivo, conseguimos percebê-los nesta configuração e formato do jogo, em potencial ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a considerar as caracterizações estabelecidas pelo modelo de desenvolvimento do pensamento algébrico e o que preconiza os documentos educacionais oficiais.

CONSIDERAÇÕES E PERPECTIVAS

Estamos encaminhando para os apontamentos finais do texto, nessas condições, retomamos o objetivo e a pergunta que nos orientou nesta pesquisa. Nossa proposição tem por objetivo perceber a potencialidade presente em um método numérico (Regra da Falsa Posição) na combinação com jogos de cartas, possibilitando boas aprendizagens matemáticas especialmente relativas a equações polinomiais do primeiro grau, propiciando o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de suas caracterizações.

No alcance a esse objetivo, organizamos nossa pesquisa a partir de percepções histórico epistemológico da regra da falsa posição, objeto de investigação da nossa pesquisa, para reconhecer o objeto de estudo, perceber e aprofundar em aspectos conceituais. Na sequência, desvendar caracterizações e modelos relacionados ao pensamento algébrico, articulando com o proposto pelo método numérico da regra da falsa posição e o jogo de cartas RFP.

Os aspectos histórico-epistemológicos da regra da falsa posição evidenciam o modo como métodos numéricos esteve há tempos passados e ainda hoje estão incorporados em atividades práticas do nosso cotidiano. O caminho percorrido pela álgebra desde a retórica até a simbólica praticada atualmente com maior intensidade, evidencia modos/maneiras de dar soluções a problemas reais ou estritamente matemáticos. Assim, nesse percurso é importante reconhecer as potencialidades presentes em encontrar soluções via investigação, tentativa ou erro, na crença de que pode subsidiar o desenvolvimento cognitivo e o pensamento algébrico defendido neste trabalho.

No que tange o pensamento e o pensamento algébrico, também foco/objetivo de nossa pesquisa, podemos reconhecer as conexões entre aspectos vivenciais e cognitivos da criança no desenvolvimento de conceitos, identificando a memória e os estímulos gerados no viver como fundamentais para o desenvolvimento da mente. Em se tratando do pensamento algébrico, os documentos oficiais educacionais destacam a necessidade da promoção de múltiplas experiências envolvendo processos de comparação, estabelecimento de relações com quantidades, modelos, registros, linguagem, generalizações, regularidades e padrões numéricos.

Os modelos teóricos do pensamento algébrico e níveis de algebrização apresentados em nossa pesquisa apontam o estabelecimento de parâmetros na promoção deste tipo de pensamento, esses modelos direcionam e reconhecem como o pensamento algébrico é desenvolvido nos estudantes, no caso desta pesquisa, a partir do jogo de cartas RFP. Tais diretrizes possibilitam perceber as potencialidades do jogo de cartas RFP neste processo e estão alinhadas ao nosso objetivo.

Vale destacar que o uso de jogos por si só em sala de aula não garante aprendizagens, a intencionalidade do professor/professora deve ser levada em consideração. Portanto, construir e utilizar um jogo de cartas, como é o caso do jogo de cartas RFP, possibilita exercitar, supor, testar resultados e compartilhar ideias, visando um crescimento mútuo de alunos e professores, mas isso só ocorre quando são guiados por objetivos claros e preestabelecidos.

As experiências possibilitadas pela testagem e experimentação do jogo de cartas RFP proporcionaram reafirmar como o uso de jogos aproxima pessoas e estabelece uma maneira de cocriação no ato de jogar e ir à busca de soluções de forma compartilhada. Os feedbacks obtidos tanto dos professores pesquisadores e professor regente, quanto dos alunos que utilizaram o jogo em sala de aula carrega percepções relacionadas ao modo como os conceitos e objeto matemático estão presentes e serão desenvolvidos no desenvolvimento das aprendizagens, bem como a maneira e o potencial que o jogo tem de conectar os estudantes.

Também foi possível perceber que o jogo inicialmente foi pensado para ser jogado por duas pessoas, na prática, o contexto exigiu uma redefinição da proposta, sendo possível envolver grupos, o que fica expresso pela experiência com a turma do 8º ano da escola particular de ensino.

Dessa forma, este trabalho fomenta uma proposta de desenvolvimento de um produto educacional – jogo de cartas RFP –, para atender as demandas de um ensino de qualidade, com vista às aprendizagens sobre equação polinomial do primeiro grau objetivando o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de um processo numérico muito utilizado por civilizações antigas.

Assim, reiterando a pergunta norteadora da pesquisa, mencionado inicialmente, destacamos **“em que medida a Regra da Falsa Posição (RFP) combinada com um jogo de cartas promove o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino de equações polinomiais do primeiro grau?”** a partir das análises dos resultados, onde é possível encontrar o desenvolvimento do jogo de cartas RFP com professores pesquisadores em educação matemática e em turmas do 8° ano da rede particular e pública de ensino, na crença do potencial no uso do jogo para o engajamento dos estudantes e a promoção de boas aprendizagens, como já mencionado.

Conforme citado acima, a utilização do jogo ocorreu com professores e alunos, proporcionando uma percepção global de sua contribuição ao ensino de matemática, também desenhando um caminho de testagem, validação e uso do jogo em sala de aula.

O objetivo desta pesquisa foi evidenciar a potencialidade presente em um método numérico na combinação com jogos de cartas, possibilitando boas aprendizagens matemáticas especialmente relativas a equações polinomiais do primeiro grau, propiciando o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de suas caracterizações.

Este trabalho também corrobora no apoio a professores e estudantes nas aprendizagens referentes ao conhecimento algébrico, mas não de qualquer modo, de maneira que seja possível promover o protagonismo do estudante e propiciar aprendizagens de maneira interativa e construtiva.

O ensino sob a relação entre sistema escolar, conhecimento escolar e aluno conforme a Teoria das Situações Didáticas (TSD) possibilita constituição de um *millieu* favorável ao desenvolvimento de aprendizagens. As intencionalidades do professor no designer do *millieu* proporciona ao estudante a aquisição de conhecimentos, neste caso matemático.

No caso do jogo de cartas RFP, estamos convictos do seu potencial na promoção de aprendizagens capazes de desenvolver o pensamento algébrico, por ser um modo de resolver problemas algébricos a partir de dados numéricos pelo raciocínio possível mediante generalizações e por estimular o pensar em soluções alternativas e investigativas por meio da tentativa e erro.

Jogos, especificamente jogos de cartas possuem um grande potencial de envolvimento entre os participantes, como evidenciado nas experiências. Promover interação configura em um modo significativo de aprender e ensinar algo.

Aspectos teóricos relacionados à TSD (Teoria das Situações Didáticas) ficam evidentes nesta pesquisa quando proporcionamos aos alunos a formulação de estratégias resolutivas pelo meio material utilizado (o jogo), a *situação de ação*. Após a obtenção do resultado, dado um problema posto, o caminho da resolução, *situação de formulação*. A *situação de validação*, pela verificação do resultado “aha” obtido e a *situação de institucionalização* presente na retomada ao final ou ao longo do percurso resolutivo, exibindo a dimensão do objeto matemático presente no jogo.

Vale salientar para o fato de que as *situações de ação, formulação, validação e institucionalização* conforme a TSD, em se tratando do jogo de cartas RFP, podem estar presentes em momentos distintos no curso resolutivo do problema.

Assim, acreditamos que o ensino da álgebra no desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser significativo por meio deste jogo manual, entretanto há hoje um grande interesse de professores e alunos também no uso de recursos digitais na promoção de aprendizagens. Portanto, conseguimos perceber como ampliação a esta proposta a criação de um *software*, jogo digital, capaz de oportunizar uma experiência ainda mais interativa aos participantes e diversificar o modo como podemos utilizar o jogo de cartas RFP.

Esperamos que esta pesquisa possa subsidiar a *práxis* do professor de matemática e apoiar estudantes em sua evolução e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALICIA, A. **El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana**. Educación Matemática, Vol. 13 No. 3 diciembre 2001, 5-21.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. ***Fundamentos da Didática da Matemática***. Editora da Universidade Federal de Paraná, 2007.

ALMOULOUD, S. A., COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ARTIGUE, M. (1988): **“Ingénierie Didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

BEZERRA, Aquiles Rocha Lira. **Ensino da Álgebra:** Uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem da Educação Básica. Porto Velho - RO, 2016.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria.** En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas.** Versión provisional. Presentación parcial en el marco de las Xl École d´Été de Didactique dês Mathematiques, 2001. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BOYER, C. B. **História da matemática: tradução: Elza F. Gomide.** São Paulo. Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/11/7._Orienta%C3%A7%C3%B5es_aos_Conselhos.pdf> Acesso em 28 nov 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.80 p. ISBN 978-85-7783-143-2.

BRASIL. **SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DOCUMENTOS DE REFERÊNCIA.VERSÃO 1.0.** Brasília: INEP, 2018. Disponívelem:<https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/saeb_documentos_de_referencia_versao_1.0.pdf>
Acesso em 28 nov 2021.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1998.174 p.

BROUSSEAU, G. Ingénierie didactique. **D'un problème à l'ètude a priori d'une situation didactique.** Ecole d'lhé de didactique des maths, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**, SP. Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática.** In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 35-2008

BUENO, J. M. **Psicomotricidade: teoria e prática. Da escola à aquática.** – São Paulo: Cortez, 2013.

CHEVALLARD, Y. **L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.** Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée SauvageÉditions, v. 19.2, p.221-265, 1999.

COELHO, Flávio Ulhoa. AGUIAR, Marcia. **A história da álgebra e o pensamento algébrico:** correlações com o ensino. 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171

CRUZ, M. S.; BATISTA, R. M.; PINHEIRO, S. M. S.; SANTOS, A. B. C.; NUNES, J. M. V. **Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: uma proposta para o ensino fundamental menor.** IX ENCONTRO PARAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPAEM, 2013.

DELEUZE, Gilles e GUATTARI, Félix. **O que é filosofia?** Tradução Bento Prado Jr. e Alberto Alonso Muñoz. São Paulo: Editora 34, 2013.

FIGUERÊDO, J. S. L.; MASCARENHAS, R. S.; Roberto A. BITTENCOURT R. A.; **Disseminando a Aprendizagem Colaborativa através do Ambiente Canvas**, Universidade de Cornell, 2017.

FLORES T.; MARIANA F. da C., Cartas, tabuleiros e cartelas [recurso eletrônico] : os jogos no ensino e aprendizagem de história. RS : FACOS, UFSM, 2020.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS. Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009, p.21.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M. ; WILHELMI, M. R. Proto algebraic levels of mathematical thinking. Public University of Navarra (Spain), 2013, p. 14.

GOMES, F. T. B.; THIENGO E. R. **A utilização do jogo cartas matemáticas nas aulas de matemática**, Kiri-kerê: Pesquisa em Ensino, n.9, dez. 2020.

GONÇALVES, A. B.; **O PENSAMENTO E O PENSADOR – APONTAMENTOS A PARTIR DA VISÃO DE GILLES DELEUZE.** PROMETEUS - Ano 8 - Número 17 – Janeiro-Junho/2015.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e uso de jogos na sala de aula.** Campinas 2000 (tese de doutorado)

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. BECHER, Ednei Luis. **Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio.** São Paulo, 2010.

GUERRA, E. L. A. **Manual de Pesquisa Qualitativa**. GRUPO ĂNIMA EDUCAÇÃO.Belo Horizonte, 2014.

HUIZINGA, J.; ***Homo Ludens – vom Unprung der Kultur im Spiel***, Coleção Estudos, Editora Perspectiva S.A., SP; 2000.

KIERAN, C.; **Algebraic thinking in the early grades: What is it.** The Mathematics Educator, 2004, Vol.8, No.1, 139 – 151.

MUÑOZ, A. O. Valencia.Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico, IES Benlliure, Revista Suma, p. 55-61, 2007.

NOVOA, A. **O método (auto)biográfico ea formação.** – Natal, RN: EDUFRN; São Paulo: Paulus, 1988.

NUNES, J. M. V., **A Prática da Argumentação como Método de Ensino: O caso dos Conceitos de Área e Perímetro de Figuras Planas**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

PEREIRA, A. C.; SILVA, I. C; NASCIMENTO. J. C **Como utilizar história da Matemática para ensinar equação do 1º grau?** Fortaleza – Ceará. Ed. UECE, 2015.

PEREIRA, C. A. Dificuldades do ensino da álgebra no ensino fundamental: algumas considerações. R. Eletrc. Cient. Inov. Tecnol, Medianeira, v.8, n.15, 2017.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação, 2009.

RADFORD, L. **Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RADFORD, L.**Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis.** Educational Studies in Mathematics, 42, 237-268. (2000)

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Ministério da Cultura do Brasil** – Fundação Biblioteca Nacional – Coordenadoria Geral do Livro e da Leitura. ISBN: 978-85-378-0909-9. Edição digital: setembro 2012.

RAUPP, AD., GRANDO, NI. **Educação matemática: em foco o jogo no processo ensinoaprendizagem**. In: BRANDT, CF., and MORETTI, MT., orgs. Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

SADOVSKY, P. **La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática.** 2003

SCHMITT, M. A.**Ação-Reflexão-Ação: A Prática Reflexiva como elemento transformador do cotidiano educativo**. Protestantismo em Revista, São Leopoldo, RS, v. 25, maio.-ago. 2011.

SOUSA, G. B. **MEMÓRIA DIDÁTICA NUMA PERSPECTIVA NARRATIVA: a história de vida de um professor pesquisador da área da Educação Matemática.** Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2019.

VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** – 7ª ed. – São Paulo: Martins Fontes, 2007. – (Psicologia e pedagogia). Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NP MEB _ (Set2009).pdf. Acesso em: 01 dez 2020.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf Acesso em 28 out 2020.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf Acesso em 28 out 2020.

https://novaescola.org.br/conteudo/19749/pensamento-algebrico-nos-anos-iniciais-o - que- diz -a-bncc Acesso em 21 nov 2020.

http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf. Acesso em: 07 nov 2020.

ANEXO I – Rascunho para anotações dos estudantes

RASCUNHO | ANOTAÇÕES

(Este espaço é destinado para a realização de operações e registros ao longo do jogo)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL

MAICO TAILON SILVA DA SILVA

PRODUTO DA PESQUISA

JOGO DE CARTAS RFP

BELÉM-PA
2022

MAICO TAILON SILVA DA SILVA

JOGO DE CARTAS RFP

Produto da pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica (PPGDOC), da Universidade Federal do Pará (UFPA), alinhado ao relatorio de pesquisa (dissertação) para a obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de professores de Ciências e Matemática.

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática para a Educação Cidadã

Orientador: Dr. José Messildo Viana Nunes

BELÉM-PA
2022

Sumário

INTRODUÇÃO

No contexto atual há uma ênfase e o empenho no desenvolvimento de processos de ensino, aprendizagem e avalição que contribuam efetivamente para uma educação de qualidade. Nesse sentido, a interação, reflexão e ação sobre a realidade é condição necessária para a construção de uma sociedade que privilegie a equidade, de maneira justa e digna no âmbito educacional.

Dessa forma, fica clara a necessidade de práticas pedagógicas alinhadas às realidades diversas dos estudantes, considerando o modo como melhor aprendem, seus interesses de aprendizagem e espaços de vivência, desvencilhando métodos mecânicos de ensino, infelizmente ainda praticados em sala de aula. Com isso, conduzir ações educativas relacionadas aos interesses das crianças e jovens, ou até mesmo adultos, como é o caso de jogos, seja através de manipulação concreta ou virtuais, corroboram para boas aprendizagens na combinação de ensino e ludicidade.

Para o professor, é desafiador propor estratégias de ensino que promovam boas aprendizagens, principalmente em uma sociedade de múltiplas informações instáveis. Nesse caso, os jogos revelam um tipo de atividade lúdico-didático com grande potencial de engajamento do aluno, por envolver competição, em alguns casos premiação, diversão e entre outros aspectos que apontam este modo de fazer, de maneira diferenciada e atrativa em sala de aula.

Entretanto, não se pode perder de vista o propósito da utilização de jogos em sala de aula, pois o uso deste tipo de recurso metodológico precisa estar a favor do desenvolvimento de habilidades como a atenção, reflexão, investigação, organização, raciocínio logico-dedutivo, concentração e entre outras capacidades a serem promovidas através de jogos conforme os objetivos de aprendizagens delineados pelo professor. No caso do uso de jogos a serviço de aprendizagens matemáticas, é importante a mobilização de ações envolvendo a elaboração de estratégias, o uso de conceitos e procedimentos matemáticos, pois através dessas articulações o aprendiz pode consolidar boas aprendizagens de maneira atrativa e lúdica, sem um dado rigor ou extremo formalismo matemático não atrativo às atenções do estudante e ao mesmo tempo estando alinhadas às intencionalidades pedagógicas do professor.

Assim, este produto educacional intitulado “JOGO DE CARTAS RFP (REGRA DA

FALSA POSIÇÃO)" objetiva contribuir com professores e alunos, no desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do uso das operações aritméticas na solução de equações polinomiais do primeiro grau.

A Regra da Falsa Posição (RFP) representa um método que parte da utilização das operações aritméticas no processo resolutivo de problemas, incialmente pensado na solução de problemas práticos, reais, presentes no contexto dos Babilônios. Constitui o percurso histórico da álgebra, onde pensar, testar, levantar hipóteses e argumentar eram ações fundamentais, e ainda são, para a obtenção de respostas sólidas e confiáveis. Não há indícios exatos do surgimento da RFP, porém se tem proposições de que os primeiros movimentos relativos a RFP surgem nas civilizações Mesopotâmica, Egípcia e Chinesa, como lugares de disseminação deste conhecimento.

Assim, este jogo remonta um momento histórico importante para a Matemática, provocando a retomada deste modo diferenciado de solucionar problemas reunindo um método antigo e uma maneira atual de ensinar e aprender matemática que é a partir de jogos. Portanto, este jogo foi pensado/motivado pela percepção do potencial atrativo no jogo UNO[1] articulado à um objeto matemático, neste caso a RFP. Vale destacar que o jogo de cartas RFP possui regras próprias, por estar alinhando ao objeto de conhecimento matemático RFP.

1. JOGO DE CARTAS RFP (REGRA DA FALSA POSIÇÃO)

Os jogos em geral, especialmente os de cartas, são constituídos por um mecanismo de jogabilidade. No caso do jogo de cartas RFP, por sua articulação direta a um objeto de conhecimento matemático e pensado para o contexto da sala de aula de matemática, houve a necessidade de direcionamento a um público-alvo, bem como regras alinhadas ao propósito que contempla o conhecimento algébrico no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Concernente ao **jogo de cartas RFP** temos o detalhamento organizado conforme o **público-alvo, objetivo do jogo, estrutura do jogo, conceitos relativos ao jogo e orientações, exemplos de jogadas e outras possibilidades** pontuados conforme:

[1] Jogo de baralho com cartas coloridas que representam um tipo de ação promotora de envolvimento e engajamento dos participante, cujo objetivo é ficar sem cartas a mão.

Tabela 1: Informações gerais do jogo

Público-alvo	alunos do 8º ano
Objetivo do jogo	ao fim das rodadas estar sem cartas a mão ou com menor número de cartas
Estrutura do jogo	150 cartas, um manual e uma caixa para colocar as cartas
Conceitos	operações aritméticas, equação polinomial do 1º grau e proporcionalidade

Fonte: Organização do autor/2021.

Em se tratando do público-alvo, este jogo está voltado para alunos do 8° ano, porém pode ser utilizado por estudantes em estudos vigentes relativos a equações polinomiais do primeiro grau, ou com interesse e habilidades em operações aritméticas. Também pode receber a atenção de professores atuantes em formação continuada ou inicial.

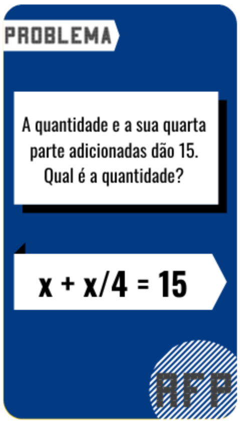
Como todo jogo há um objetivo a ser realizado a partir das jogadas, neste caso é ser o primeiro jogador a eliminar as cartas à mão após todas as rodadas de resolução ou o que possuir o menor número de cartas ao finalizar todas as 10 rodadas.

Para a utilização do jogo, ele conta com um total de **130 cartas**, distribuídas em: **10 cartas problema** – elaborados tomando por base problemas presentes em papiros antigos e livros didáticos –, **30 cartas valor falso**, **30 cartas resultado**, **30 cartas ajuste** e **30 cartas "aha" valor verdadeiro**. É importante considerar também a possibilidade de o professor compor um jogo com mais cartas que o estipulado ou menos cartas, a depender dos problemas escolhidos por ele entre os já previstos pelo jogo ou pela confecção de novo que não necessariamente resultem na mesma quantidade de cartas da versão original.

Neste jogo cada carta assume um papel importante, uma função própria no percurso resolutivo do problema, portanto é importante uma compreensão prévia das funções de cada carta, cores, design e momento de jogada, isso dará fluidez nas jogadas e deixará claro aos jogadores o momento resolutivo de cada problema, bem como os próximos passos de cada resolução de problema. Assim, seguem o modelo das cartas e suas respectivas funções para uso no jogo.

Tabela 2: Tipos de cartas e suas funções

Tipos de cartas	**Funções**

	**Carta problema:** esta carta irá iniciar cada rodada do jogo, pois é o problema que vai delinear o percurso resolutivo, podendo ser lançada pelo professor ou pelo próprio estudante. As cartas posteriores que desenham a solução deste problema serão lançadas conforme o caminho alternativo de solução via RFP.
	**Carta valor falso:** o lançamento desta carta ocorre após o problema, como uma aposta de solução, porém deve ser escolhida de forma conveniente conforme a fração presente no problema, objetivando obter a unidade (ex: 4+4/4 = 5) para gerar um número inteiro. Vale destacar que em outras condições esta carta pode ser qualquer múltiplo do denominador.
	**Carta resultado:** esta carta será o resultado obtido após o valor falso ser lançado. Nesse caso o resultado vai depender diretamente da aposta lançada. (ex: 4 + 1 = 5, conforme o valor falso lançado).

	**Carta ajuste:** esta carta é lançada após o resultado obtido a partir do valor falso, ela corresponde ao fator proporcional que multiplicado pelo resultado tornará a sentença verdadeira. Do mesmo modo, ao multiplicar o ajuste pelo valor falso se obtém o valor verdadeiro, ou seja, solução para a equação polinomial do primeiro grau. (ex: 5 x 3 = 15, ou seja, o fator proporcional é x3, assim 4 x 3 = 12)
	**Carta "aha" valor verdadeiro:** esta carta corresponde a solução do problema inicial, obtida por meio do ajuste do valor falso inicial com o fator proporcional. Ao se encontrar o fator proporcional multiplica-o pela aposta (valor falso) para se obter o valor verdadeiro. (ex: 4 x 3 = 12).

Fonte: Organização do autor/2021.

Para cada carta acima há uma descrição de sua função dentro do jogo. Dessa forma, seguir as orientações de uso conforme as funções de cada carta será importante para o alcance dos objetivos traçados.

- **Potencialidades e contribuições**

O jogo estimula a formulação de processos resolutivos de problemas envolvendo equações polinomiais do primeiro grau, nos quais é possível identificar a mobilização de conceitos relacionados a aritmética a partir das operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), estabelecimento de relação de proporcionalidade e regra de três, bem como a interpretação da modelação de um problema literal a escrita simbólica da equação polinomial do primeiro grau.

O jogo também favorece a compreensão de um modo de percepção da álgebra, para além da concepção de álgebra através do uso de letras ou mesmo a realização de operações com letras conforme o estabelecido com os números. Há neste caso um potencial contribuição para a não redução da álgebra a manipulações de letras, bem como a resolução de problemas ainda que retórico, constituem elementos sob o domínio algébrico. O não uso de símbolos explícitos não descaracteriza o conhecimento algébrico, pois o fato de operar mentalmente com a incógnita (valor desconhecido), como se estivéssemos operando, de uma maneira geral, com números, é que configura a dimensão algébrica ao problema e o processo resolutivo.

- **Regras gerais e orientações**

1) O jogo é realizado em dupla. Cada tipo de carta possui uma cor para melhor identificação. O jogo inicia posicionando um monte de cartas de cada tipo de carta alinhados ao centro, como uma linha que separa um jogador do outro. Em seguida é feita a distribuição de 8 cartas para cada jogador, sendo 2 cartas de cada tipo de carta do jogo (carta valor falso, carta resultado, carta ajuste e carta valor verdadeiro) para cada jogador, as cartas de cada tipo que sobrarem ficam sobre a mesa viradas para baixo, sendo as cartas que serão “compradas” ao longo do jogo. Haverá um monte especial, o das cartas problema, neste monte o professor ou mesmo os próprios jogadores irão guiar a partida por meio das cartas problema para iniciar e desenvolver o jogo. As jogadas serão realizadas conforme o caminho resolutivo do problema, fato que requer a compreensão dos jogadores sobre o papel e função de cada tipo de carta e conhecimentos prévios relativos às operações aritméticas, ponto que motivou o apontamento do público-alvo, neste caso o 8º ano. Também é importante apontar que para cada problema os jogadores podem, inclusive espera-se que sejam partilhadas ideias a respeito do caminho resolutivo, tendo como foco a solução conjunta do problema.

2) Após o posicionamento e distribuição das cartas aos jogadores, sendo 2 cartas de cada tipo de carta (valor falso, resultado, ajuste e valor verdadeiro) cada jogador irá iniciar com 8 cartas a mão, o jogo ocorrer a partir da jogada de uma carta problema, podendo ser lançada pelo professor ou pelos próprios participantes. As jogadas posteriores seguem o percurso resolutivo do problema inicial a depender do tipo de carta a ser lançada, seguindo a ordem:

Figura 1: sequência resolutiva no jogo RFP

Fonte: autor, 2021.

5) Caso algum jogador jogue uma carta errada ao longo do processo resolutivo do problema inicial e algum outro jogador perceber o erro ou mesmo o próprio jogador, aquele que jogou errado deverá pegar sua carta de volta e caso não possua a carta correta ao processo resolutivo do problema, deverá comprar do monte conforme a necessidade do tipo de carta (ex: se for necessário comprar uma carta “ajuste”, o jogador deverá retirar do monte de cartas “ajuste”), podendo comprar até 3 carta quando for sua jogada, caso ainda assim não encontre a carta coerente ao problema, deve-se passar a vez para o outro jogador que fará o mesmo procedimento.

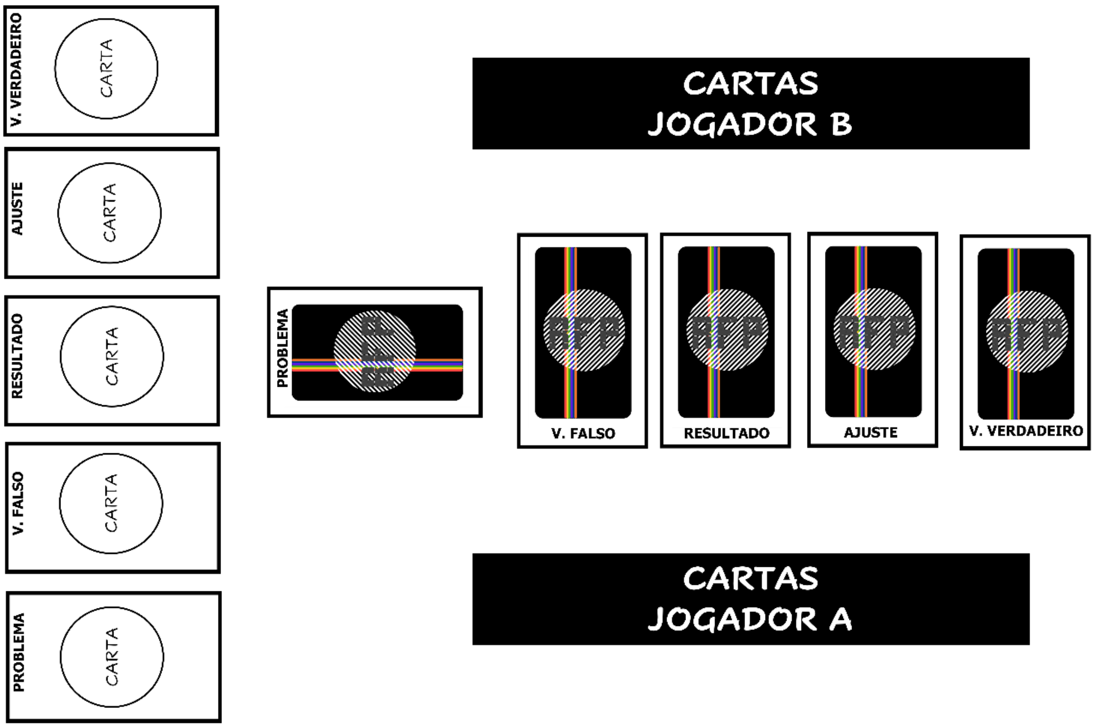
6) Ao finalizar os 10 problemas proposto para cada dupla, deve-se verificar quantas cartas ficaram nas mãos de cada jogador, aquele que findou o número de cartas ou possui o menor número de cartas será o vencedor do jogo.

- **Exemplo de jogada:**

Os exemplos possibilitam melhor perceber o funcionamento do jogo, sua organização e objetivo. Apresentar possibilidades de jogadas tem como foco apresentar cenários possíveis e caminhos previstos por meio do jogo.

Assim, a figura a seguir expressa o cenário inicial de jogo, observe.

Figura 2: organização inicial do jogo RFP



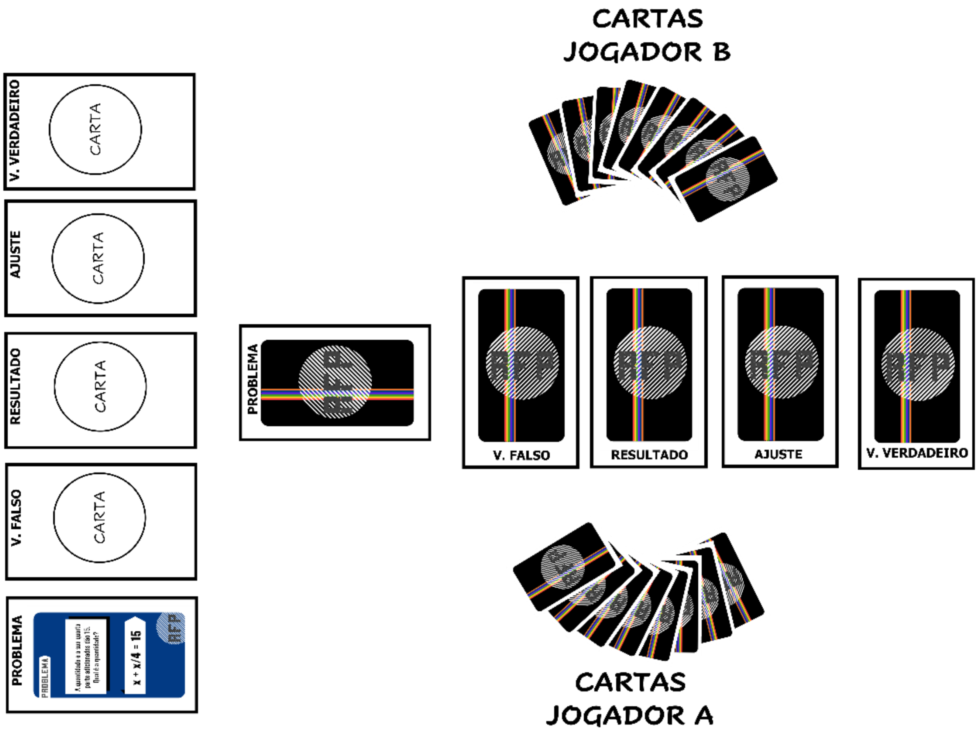
Fonte: autor, 2021.

Na figura acima é apresentado a organização inicial do jogo, sendo posicionado cada tipo de carta incluindo as posições das cartas dos dois jogadores. Em seguida será iniciado o jogo a partir do lançamento de uma carta problema, que pode ser lançada pelo professor mediador do jogo ou pelos próprios jogadores.

Nesse início pode-se decidir qual dos jogadores poderá começar lançando sua carta a partir de um sorteio com dado ou outro meio de escolher quem irá iniciar a partida, no caso do dado o jogador que obtiver o maior número no seu lançamento inicia a partida, ou mesmo por meio do jogo “par ou ímpar” com os dedos das mãos.

Vamos continuar esta jogada de modo sequencial, conforme o processo resolutivo de um problema.

Figura 3: lançamento da carta problema no jogo RFP

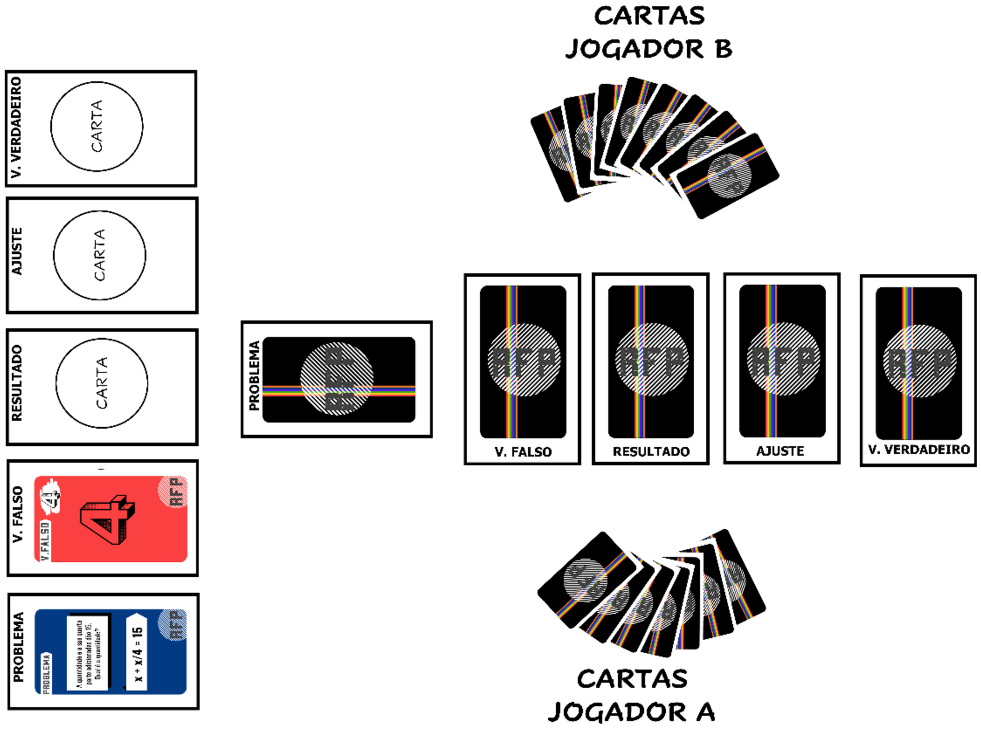


Fonte: autor, 2021.

O problema acima na forma literal é enunciado “a quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?” e em sua forma simbólica pode ser expressa como x + x/4 = 15. Para esse problema deve-se escolher um valor falso a ser considerado como solução hipotética inicial ao problema conforme a Regra da Falsa Posição.

O valor falso é uma suposição de solução ao problema, de modo a gerar um determinado resultado responsável pela determinação do fator proporcional, que por sua vez proporciona a obtenção do valor verdadeiro.

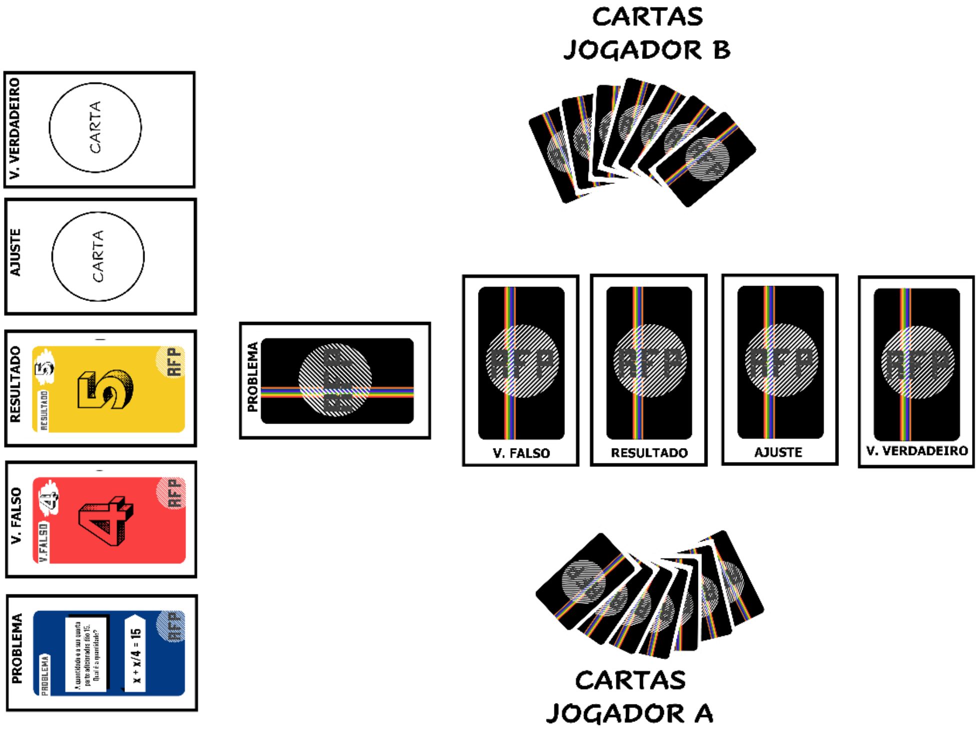
Figura 4: jogador A lança a carta valor falso



Fonte: autor, 2021.

Caso o jogo inicie com o jogador A, que dentre as cartas em sua posse estava o valor falso 4, nesse caso é a carta lançada para gerar a unidade, ou seja (x = 4), obtém-se como resultado 4 + 4/4 = 5. Caso o jogador possua repetições desta mesma carta poderá lançar até 3 (três) cartas do mesmo tipo com a mesma numeração. Do mesmo modo, caso o jogador possua também a carta da sequência, nesse caso possua a carta resultado igual a 5 (cinco), esse mesmo jogador poderá lançar, objetivando ficar com o menor número de cartas na mão.

Figura 5: jogador B lança a carta resultado

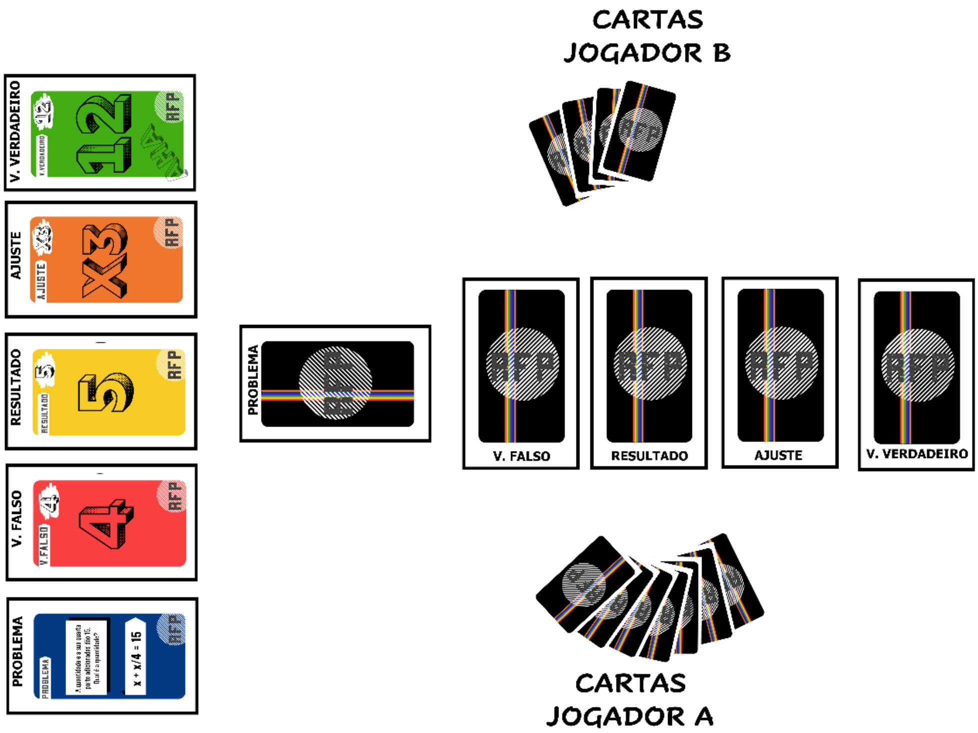


Fonte: autor, 2021.

Em seguida, o jogador B lança a carta resultado 5 (cinco) que estava entre as suas cartas na mão. É a vez do jogador A, que ao analisar não possuía a carta ajuste “x 3” (multiplicar por 3 o resultado 5 para se obter o resultado 15 esperado pelo problema), necessitando comprar novas cartas. O jogador A precisou comprar cartas do monte de cartas “ajuste” na tentativa de encontrar a carta “x 3”, tendo a chance de comprar até 3 (três) cartas do monte, infelizmente não obteve sucesso após a compra de 3 cartas.

Com isso, é passada a vez para o jogador B, que possuía duas cartas do tipo “x 3”, e a carta valor verdadeiro 12 (doze) correspondente a solução do problema, já que ao tomar o ajuste multiplicando-o pelo valor falso inicial 4 obtém-se a seguinte operação 4 x 3 = 12 (valor verdadeiro). Nessas condições, o jogador B fecha a rodada de solução do problema e reduz em três cartas (duas cartas “ajuste” e uma carta “valor verdadeiro”) o número de cartas de sua mão, conforme imagem a seguir.

Figura 06: jogador A compra cartas e jogador B lança a carta ajuste e valor verdadeiro



Fonte: autor, 2021.

Após fechar a resolução do problema, é retomado o mesmo processo a partir de outro problema retirado do monte de cartas problema virado para baixo. As ações do processo resolutivo se repetem para este outro dado problema até findar os 10 (dez) problemas propostos pelo jogo de cartas RFP. Concluída a resolução dos 10 problemas conforme procedimento resolutivo, verifica-se o quantitativo de cartas de cada jogador, o jogador com o menor número de carta ou o jogador que ficar sem cartas nas mãos vencerá a partida.

O exemplo de jogadas descrito acima é apenas uma das possibilidades de jogo pensado em condições ideais de jogabilidade, ou seja, dois jogadores, ajuda mutua no processo resolutivo e acompanhamento dos processos, porém quando se pensa no contexto escolar podem haver situações e circunstâncias que geram um certo desequilíbrio sendo necessárias adaptações possíveis, a exemplo casos em que há um número mínimo de jogos impressos e uma quantidades significativa de estudantes em uma turma, nesse caso é possível dividir a turma em dois grupos que poderão jogar um contra o outro, de modo que em cada grupo há processos de ajuda e colaboração no processo resolutivo de cada problema.

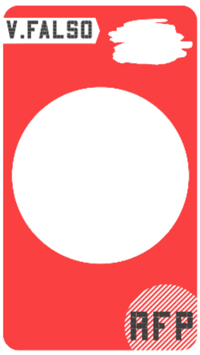
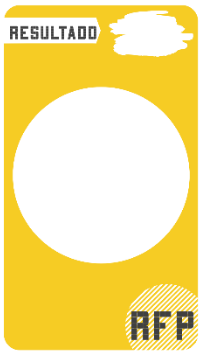
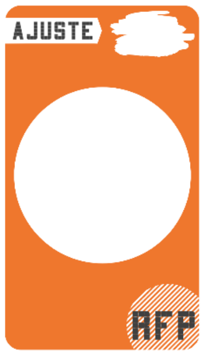
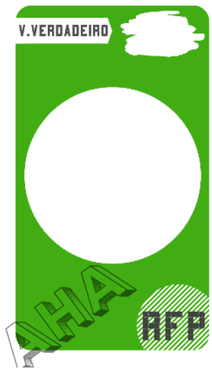
- **Outras possibilidades:**

O jogo apresenta problemas que são utilizados como fonte inicial no jogo, porém estes problemas podem ser utilizados para orientar outras propostas em sala de aula, como por exemplo discussões sobre a representação literal do problema (forma escrita) e simbólica a partir das equações; competição de perguntas e respostas, bem como a possibilidade de organização de sequências de cartas seguindo a RFP, dando conta de um dado problema inicial proposto pelo professor.

Na dimensão avaliativa, pode-se considerar as aprendizagens relativas ao uso do jogo para guiar o desenvolvimento de aprendizagens pelas atividades propostas pelo professor, de modo que o aluno evidencie suas compreensões constituídas a partir do jogo.

O jogo também pode ser modelado conforme problemas propostos pelo professor a partir do uso de cartas neutras, de modo que seja resolvida pela regra da falsa posição, assim deixamos como sugestão as cartas neutras a seguir.

Tabela 3: Cartas neutras para uso a partir de problemas propostos

Fonte: Organização do autor/2021.

As cartas acima podem ser utilizadas quando o foco é a criação e alinhamento com base em proposições do professor, uma possibilidade seria a própria criação de problemas realizada pelos estudantes. Pensar em um problema na sua forma algébrica e literal, ao mesmo tempo reconhecer quais cartas podem conduzir a resolução do problema via regra da falsa posição.

O professor também pode com base em problemas presentes no livro didático ou contextos evidenciados juntos aos alunos durante as aulas, propor problemas e cartas alinhadas às suas intencionalidades pedagógicas, nesse momento apenas escrever com lápis as cartas neutras é uma alternativa de gerar novos problemas e consequentemente novos resultados e percursos resolutivos a partir da regra da falsa posição.

Com essas possibilidades, o jogo não se limita aos problemas propostos, mas sim a oportunidade de cocriação. Nesse sentido também será possível reconhecer o alcance do jogo a partir das proposições de problemas inusitados em relação a regra da falsa proposição, também na direção de evolução da proposta do jogo, ampliando quem sabe para a sua versão digital, cuja possibilidade é viável, porém necessita de maior atenção e mapeamento.

2. ORIENTAÇÕES PARA A UTILIZAÇÃO DO PRODUTO EM SALA DE AULA

Professor e/ou aluno, o produto educacional "JOGO DE CARTAS RFP (REGRA DA FALSA POSIÇÃO)" tem como objetivo corroborar para um modo de ensino e aprendizagem da matemática de maneira atrativa, dinâmica, interativa, colaborativa e com potencial de engajamento dos estudantes, assim como de professores dedicados a inovar no ensino de matemática.

Com isso, este produto irá contribuir na aprendizagem de conhecimentos relativos à álgebra e promover a socialização de conhecimentos matemáticos, que serão guiados a partir do levantamento de hipóteses, realização de operações aritméticas, solução de equações polinomiais do primeiro grau e formulação de estratégias com as cartas por intermédio de suas funções para se vencer o jogo ficando sem nenhuma carta ou com o menor número de cartas nas mãos. É importante ressaltar que através do jogo será possível o desenvolvimento do pensamento algébrico conforme as operações aritméticas propostas pelo jogo, método muito utilizado pelos egípcios, conforme já mencionado e que teve sua importância na evolução do conhecimento algébrico.

Assim, este jogo pode ser utilizado em sala de aula conforme exemplos expostos anteriormente. Este material didático pode compor processos iniciais do estudo de equação polinomial do 1° grau, de modo que o professor oriente os alunos com comandos e regras relacionadas ao jogo, propondo um movimento inicial no qual os alunos utilizarão conhecimentos aritméticos que a priori no 8° ano já estão consolidados.

Após o jogo, o professor pode seguir tomando nota de problemas egípcios antigos, se utilizando da história da matemática para reconstituir este processo resolutivo e formalizar o que foi desenvolvido pelos estudantes ao longo do jogo.

Para a constituição do jogo foram necessárias testagem para reconhecer as potencialidades e pontos de atenção visando propiciar condições ideias de uso do jogo e aproximar cada vez mais sua estrutura aos objetivos delineados no desenvolvimento do jogo. Assim, vale destacar uma importante testagem realizada na escola particular de ensino Centro Educacional Criativo Senas localizada na região metropolitana de Belém em uma turma de 8º ano do professor responsável Edson Oliveira, cuja oportunidade proporcionaram importantes percepções a respeito do jogo.

Tabela 4: registros de utilização do jogo em uma turma do 8º ano

Fonte: Organização do autor/2021.

Assim, vale sinalizar para algumas possibilidades relacionadas ao uso do jogo especialmente pelas multiplicidades de contextos e realidades de sala de aula, a considerar ambiente, quantidade de estudantes, condições e constituição do ambiente para uso do jogo e demais apontamentos referentes ao envolvimento dos estudantes.

Na oportunidade foi evidenciado a necessidade de cadeiras e mesas no ambiente, prevendo conforto aos estudantes participantes no momento do jogo, bem como um quadro branco e folhas para anotações para registros coletivos e individuais. Em outras condições se pode também utilizar o chão da sala e o próprio caderno do estudante, porém visando conforto e organização, o ideal é ter cadeiras e mesas, assim como um tipo específico de espaço para anotações. Nessa turma havia 15 alunos e apenas 02 versões completas do jogo, que foi pensado inicialmente para ser jogado por duas pessoas cada versão do jogo. Por conta da quantidade de alunos e versões do jogo na experiência vivenciada, foi preciso organizar a turma em 04 grupo (GA; GB; GC e GD), onde jogaram GA contra GB e GC contra GD, criando uma espécie de "competição", os vencedores de cada rodada se enfrentaram no final, no caso foi GB contra GC, tendo como premiação simbólica gibis e lápis.

A experiência proporcionou perceber a potência do trabalho em grupo, pois ao distribuir as cartas os próprios alunos em cada grupo se organizaram de forma que um aluno realizava anotações e junto ao grupo analisava os resultados, outros dois alunos ficavam na gestão das cartas para lançamento – já que são várias cartas retiradas ao longo do jogo – e outro integrante do grupo estava mais atento ao que era lançado durante o jogo. A sinergia em cada grupo proporcionou um ambiente de aprendizagem coletiva, potente a partir de questionamentos e conclusões compartilhadas.

Em circunstâncias envolvendo turmas com muitos alunos, o professor pode pensar em alternativas de distribuição da turma compondo grupos menores que poderão jogar "um contra o outro", proporcionando um ambiente de aprendizagens coletivas e compartilhadas em cada partida, bem como possibilitando prever a quantidade de versões do jogo para o desenvolvimento em sala.

A organização e disposição dos montes de cartas foram importantes para direcionar as jogadas. Os registros no quadro guiaram as ações em cada jogada, proporcionando esclarecimentos e conclusões para os problemas. O cálculo mental esteve presente, porém os registros geraram momentos reflexivos sobre as jogadas.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação, especificamente a educação matemática constitui em um campo de estudo interessado em analisar teorias e proposições didáticas capazes de promover boas aprendizagens nos estudantes, aliado ao processo continuo formativo do professor de matemática. Nesse sentido, a criação, utilização e analise de jogos revela um modo significativo ao estudante e com potencial para o desenvolvimento de aprendizagens através de processos dinâmicos e interativos.

Os jogos, sejam no formato concretos ou digitais, quando utilizados em sala de aula conforme interesses, objetivos de aprendizagem e planejamento, são capazes de gerar engajamento, socialização e aprendizagens, em especial matemáticas, por meio de hipóteses, testes, competição e busca por soluções alternativas a problemas, como é o caso do jogo de cartas RFP.

Portanto, levar para sala de aula de matemática alternativas apoiadas nos interesses dos estudantes, em modos múltiplos de desenvolver conhecimento, promover interação e gerar construções coletivas de conhecimentos, sem dúvida revela um modo diferenciado de promover educação propiciando condições para boas aprendizagens. No caso do jogo de cartas RFP é importante anunciar outras possibilidades de ampliação, como é o caso da sua conversão para versão digital, redefinição dos problemas para outros sob algum propósito de investigação, diversificação dos problemas e múltiplas formas de condução no uso do jogo em diversos contextos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – XX EBRAPEM. Curitiba – PR, 2016.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e uso de jogos na sala de aula.** Campinas 2000 (tese de doutorado)

APÊNDICES

MANUAL DO JOGO RFP / ARTE EMBALAGEM DO JOGO REFE / CARTAS DO PRODUTO EDUCACIONAL JOGO DE CARTAS RFP

Orientações:

1°: O jogo é realizado em dupla. Cada tipo de carta possui uma cor para melhor identificação. O jogo inicia posicionando um monte de cartas de cada tipo de carta alinhados ao centro, como uma linha que separa um jogador do outro. Em seguida é feita a distribuição de 8 cartas para cada jogador, sendo 2 cartas de cada tipo de carta do jogo (carta valor falso, carta resultado, carta ajuste e carta valor verdadeiro) para cada jogador, as cartas de cada tipo que sobrarem ficam sobre a mesa viradas para baixo, sendo as cartas que serão "compradas" ao longo do jogo. Haverá um monte especial, o das cartas problema, neste monte o professor ou mesmo os próprios jogadores irão guiar a partida por meio das cartas problema para iniciar e desenvolver o jogo. As jogadas serão realizadas conforme a estratégia resolutiva para cada problema que será resolvido pela dupla, podendo ser partilhada ideias entre os jogadores sobre qual o caminho resolutivo.

2°: Após o posicionamento e distribuição das cartas aos jogadores, o jogo ocorrer a partir da jogada de uma carta problema (na cor azul), podendo ser lançada pelo professor ou pelos próprios participantes. As jogadas posteriores seguem o percurso resolutivo do problema inicial a depender do tipo de carta a ser lançada, seguindo a ordem:

Problema (carta azul) → V. Falso (carta vermelha) → Resultado (carta amarela) → Ajuste (carta laranja) → V. Verdadeiro (carta verde)

3°: A carta valor falso (na cor vermelha) a ser lançada após a carta problema, precisa converter a fração do problema em unidade (ex: x3, nesse caso o valor falso a ser lançado deve ser 3, obtendo então o 1 (unidade) como resultado da fração).

4°: Em seguida, a carta resultado (na cor amarela) deve ser lançada, representando o resultado da operação após a substituição da incógnita pelo valor falso lançado anteriormente. (Lembre-se: essa carta pode ser lançada pelo mesmo jogador que lançou o valor falso, caso tenha).

5°: Na sequência, é então lançada a carta ajuste (na cor laranja), um valor que irá multiplicar o resultado obtido na carta anterior para alcançar o valor previsto na carta problema, esta carta será fundamental para a obtenção do valor verdadeiro ao problema.

6°: Por fim, o jogador na vez lança a carta valor verdadeiro ou "aha" (na cor verde), esta carta é o resultado da multiplicação da carta ajuste pelo valor falso lançado após o problema. Esta carta representa a solução ao problema, com ela se fecha uma rodada, sendo então solucionado um problema. A solução ao problema deve ser resolvida em conjunto de forma cooperativa, podendo usar papel e caneta (ou lápis) para anotação.

7°: Ao finalizar os 10 problemas propostos para a dupla, deve-se verificar quantas cartas ficaram nas mãos de cada jogador, aquele que findou o número de cartas ou possui o menor número de cartas em suas mãos será o vencedor do jogo.

Informações importantes:

No lançamento de qualquer tipo de carta, caso o jogador tenha repetida, ele poderá jogar até 03 (três) cartas repetidas.

Caso ao final das rodadas os jogadores ficarem com o mesmo número de cartas, deve-se considerar empate.

Os jogadores podem revisitar os processos resolutivos de cada problema lançado.

Caso percebam algum erro na resolução do problema podem retomar o processo resolutivo do ponto onde houve o equívoco.

O diálogo entre os jogadores, cálculos aritméticos mentais ou por anotações/registros ajudam no processo resolutivo e proporcionam um ambiente de aprendizagem cooperativo.

Regras do jogo RFP

Contém: 130 cartas e 01 manual de instruções

Objetivo: Ser o primeiro jogador a eliminar as cartas à mão nas rodadas em jogo ou o que possuir o menor número de cartas ao finalizar as 10 rodadas.

O que é a Regra da Falsa Posição?

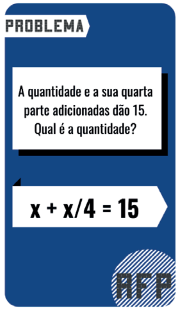
Para solucionar problemas reais se utilizava muito o raciocínio proporcional, área de grande contribuição do pensamento matemático mesopotâmico, onde métodos sofisticados como a Regra da Falsa Posição (RFP) representam uma importante aquisição ao pensamento aritmético mesopotâmico. Não há com exatidão a origem do método ou regra da falsa posição, mas apontam a civilização Mesopotâmica, Egípcia e Chinesa como fontes de tal método, mesmo havendo diversificação na forma de denominação e concepção quanto a sua generalidade e legitimidade.

A RFP é firmada na suposição de valores falsos, atribuídos às quantidades procuradas, decorrendo então, de um ajuste por meio de um “fator proporcional”, que admite a proporcionalidade na conversão dos valores falsos em verdadeiros, para a obtenção da solução. Nesse sentido, o jogo de cartas RFP parte de processos aritméticos com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico na resolução de problemas ligados a Equação do 1° grau.

Tipos de cartas: para uma melhor compreensão do processo de jogabilidade, vamos conhecer as cartas?

Carta Resultado

Esta carta será o resultado obtido após o valor falso ser lançado



Carta Problema

Esta carta irá iniciar o jogo, sendo lançada pelo professor que irá guiar a partida. As cartas posteriores dependerão desta carta , que através desta os jogadores conduzir ão um caminho alternativo de solução conforme a RFP.

Carta Valor Falso

Esta carta é lançada após o problema, como uma aposta de solução, porém deveser escolhida de forma convenienteconforme a fração presente no problema,objetivando obter a unidade (ex: 4+4/4 = 5) para gerar um número inteiro. Vale destacar que em outras condições esta carta pode ser qualquer múltiplo do denominador.

Carta “AHA” valor verdadeiro

Esta carta corresponde a solução do problema inicial, obtida por meio do ajuste do valor falso inicial com o fator proporcional.

Carta Ajuste

Esta carta é lançada após o resultado obtido a partir do valor falso, ela corresponde ao fator proporcional que multiplicado pelo resultado tornará a sentença verdadeira. Do mesmo modo, ao multiplicar o ajuste pelo valor falso se obtém o valor verdadeiro, ou seja, solução para a equação polinomial do primeiro grau.

Estrutura do jogo:

O jogo completo está organizado em um total de 130 cartas, distribuídas em: 10 cartas problema – elaborados tomando por base problemas presentes em papiros antigos e livros didáticos – 30 cartas valor falso, 30 cartas resultado, 30 cartas ajuste e 30 cartas “aha” valor verdadeiro.

Preparação:

O jogo acontece com dois jogadores.

Separe as cartas em 05 (cinco montes), o das cartas problema, o das cartas valor falso, o das cartas resultado, o das cartas ajuste e o das cartas valor verdadeiro conforme a figura abaixo.

Reserve um espaço para o lançamento de cada tipo de carta, como apresentado na figura acima.

Como na figura, os jogadores podem ficar um a frente do outro, estando separado pela fileira de cartas.

Como na figura, os jogadores podem ficar um a frente do outro, estando separado pela fileira de cartas.

Público-alvo:

Este jogo está voltado para alunos do 8° ano, porém pode ser utilizado por estudantes em estudos vigentes relativos a equação do primeiro grau, ou com interesse e habilidades em operações aritméticas. Também pode receber a atenção de professores atuantes em formação continuada ou inicial.

Preparação:

O jogo acontece com dois jogadores.

Separe as cartas em 05 (cinco montes), o das cartas problema, o das cartas valor falso, o das cartas resultado, o das cartas ajuste e o das cartas valor verdadeiro conforme a figura abaixo.

Este jogo acompanha 130 cartas e um manual completo dentro da caixa. Divirta-se!

0-3 **ATENÇÃO!** NÃO RECOMENDÁVEL PARA CRIANÇAS MENORES DE 3 ANOS (TRÊS) ANOS POR PODER GERAR PARTE(S) PEQUENA(S) QUE PODE(M) SER ENGOLIDA(S) OU ASPIRADA(S).

JOGO RFP

ESTE JOGO DESENVOLVE:	IDADE	JOGADORES	TEMPO	CARTAS
- Resolução de problemas - Raciocínio proporcional - Pensamento algébrico	+ 12 anos	2	45 min	130 und

PROBLEMA

Seja uma quantia adicionada a sua sétima parte da 32.
Qual é essa quantia?

$$x + x/7 = 32$$

AFP

V.FALSO 7

7

AFP

V.FALSO 7

7

AFP

V.FALSO 7

7

AFP


AFP


AFP


AFP


AFP

RESULTADO 8

8

RFP

RESULTADO 8

8

RFP

RESULTADO 8

8

RFP

AJUSTE X4

X4

RFP


RFP


RFP


RFP


RFP

AJUSTE X4

X4

AFP

AJUSTE X4

X4

AFP

V.VERDADEIRO 28

28

AHA

AFP

V.VERDADEIRO 28

28

AHA

AFP




V.VERDADEIRO 28

28

AHA

AFP

PROBLEMA

Dado um valor adicionado a sua oitava parte resulta em 45.
Qual é esse valor?

x + x/8 = 45

AFP

V.FALSO 8

8

AFP

V.FALSO 8

8

AFP


AFP


AFP


AFP


AFP


V.FALSO
8
8
RFP


RESULTADO
9
9
RFP


RESULTADO
9
9
RFP


RESULTADO
9
9
RFP


RFP

RFP

RFP

RFP

AJUSTE X5

X5

RFP

AJUSTE X5

X5

RFP

AJUSTE X5

X5

RFP

V.VERDADEIRO 40

40

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

V.VERDADEIRO 40

40

AHA

AFP

V.VERDADEIRO 40

40

AHA

AFP

PROBLEMA

Um valor subtraído da sua metade resulta em 6. Qual é esse valor?

$x - x/2 = 6$

AFP

V.FALSO 2

2

AFP

V.FALSO 2

2

RFP

V.FALSO 2

2

RFP

RESULTADO 1

1

RFP

RESULTADO 1

1

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

RESULTADO 1

1

AFP

AJUSTE X6

X6

AFP

AJUSTE X6

X6

AFP

AJUSTE X6

X6

AFP


AFP

AFP

AFP

AFP

V.VERDADEIRO

12

12

AHA

RFP

V.VERDADEIRO

12

12

AHA

RFP

V.VERDADEIRO

12

12

AHA

RFP

PROBLEMA

A quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?

$$x + x/4 = 15$$

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

V.FALSO 4

4

AFP

V.FALSO 4

4

AFP

V.FALSO 4

4

AFP

RESULTADO 5

5

AFP


AFP

AFP

AFP

AFP

RESULTADO 5

5

RFP

RESULTADO 5

5

RFP

AJUSTE X3

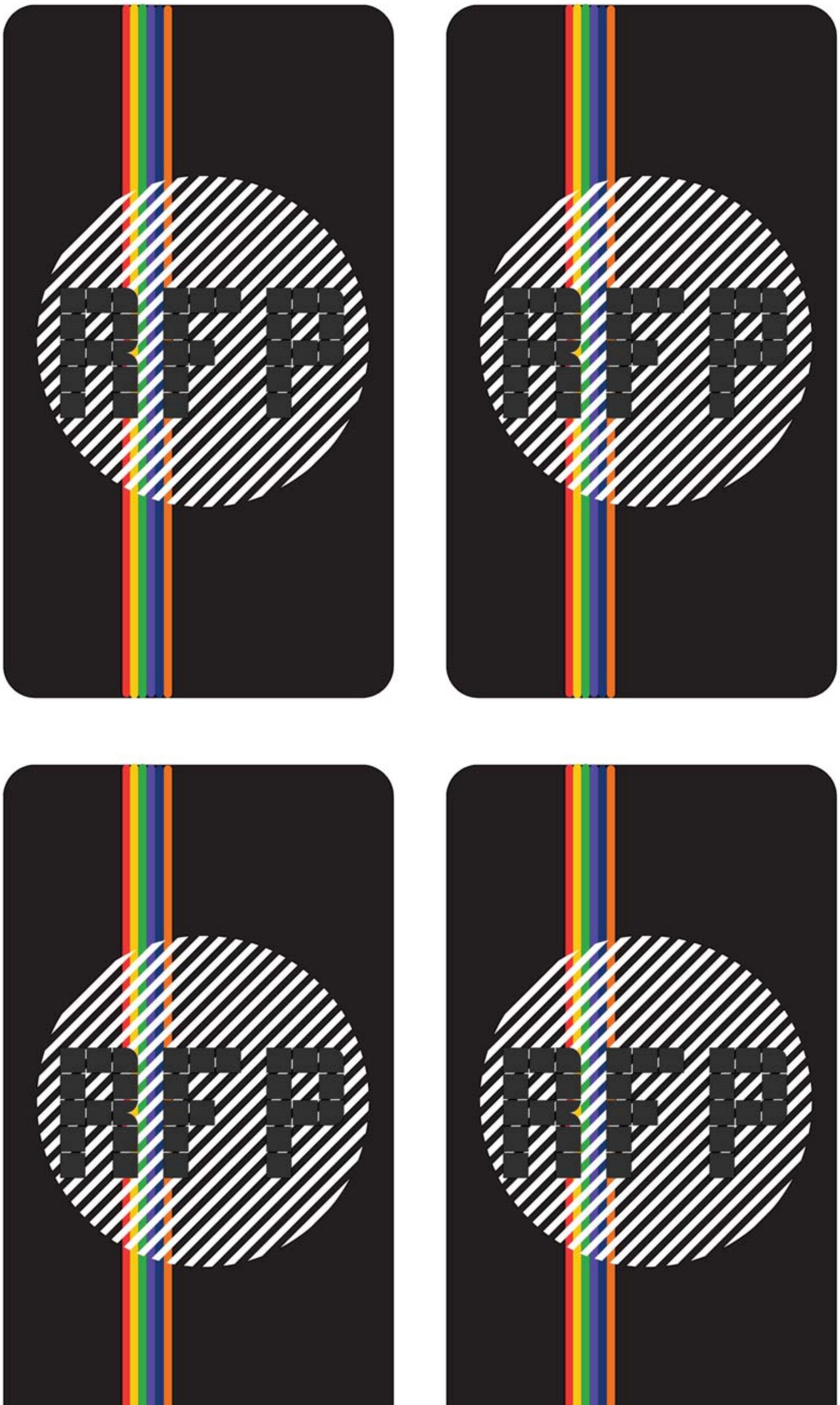
X3

RFP

AJUSTE X3

X3

RFP


AFP
AFP
AFP
AFP

AJUSTE X3

X3

AFP

V.VERDADEIRO 12

12

AHA

AFP

V.VERDADEIRO 12

12

AHA

AFP

V.VERDADEIRO 12

12

AHA

AFP

PROBLEMA

Uma quantia e a sua metade adicionada dão 12. Qual é a quantia?

$x + x/2 = 12$

AFP

V.FALSO

2

2

AFP

V.FALSO

2

2

AFP

V.FALSO

2

2

AFP


AFP


AFP


AFP


AFP

RESULTADO 3

3

RFP

RESULTADO 3

3

RFP

RESULTADO 3

3

RFP

AJUSTE X4

X4

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

AJUSTE X4

X4

AFP

AJUSTE X4

X4

AFP

V.VERDADEIRO 8

8

AHA

AFP

V.VERDADEIRO 8

8

AHA

AFP


RFP

RFP

RFP

RFP

V.VERDADEIRO

8

8

AHA

AFP

PROBLEMA

Certo valor e a sua terça parte adicionada dão 20. Qual é a quantia?

$x + x/3 = 20$

AFP

V.FALSO

3

3

AFP

V.FALSO

3

3

AFP


AFP

AFP

AFP

AFP

V.FALSO 3

3

RFP

RESULTADO 4

4

RFP

RESULTADO 4

4

RFP

RESULTADO 4

4

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

AJUSTE X5

X5

AFP

AJUSTE X5

X5

AFP

AJUSTE X5

X5

AFP

V.VERDADEIRO 15

15

AHA

AFP


AFP

AFP

AFP

AFP

V.VERDADEIRO 15

15

AHA

AFP

V.VERDADEIRO 15

15

AHA

AFP

PROBLEMA

Uma quantidade cuja terça parte lhe é adicionada resulta em 8.
Qual é a quantidade?

$x + x/3 = 8$

AFP

V.FALSO 3

3

AFP


AFP

AFP

AFP

AFP

V.FALSO 3

3

AFP

V.FALSO 3

3

AFP

RESULTADO 4

4

AFP

RESULTADO 4

4

AFP


RFP

RFP

RFP

RFP

RESULTADO 4

4

RFP

AJUSTE X2

X2

RFP

AJUSTE X2

X2

RFP

AJUSTE X2

X2

RFP

V.VERDADEIRO

6

6

V.VERDADEIRO

6

6

V.VERDADEIRO

6

6

PROBLEMA

Um número mais a sua quinta parte é igual a 24. Qual é esse número?

$x + x/5 = 24$


AFP


AFP


AFP


AFP

V.FALSO 5

5

RFP

V.FALSO 5

5

RFP

V.FALSO 5

5

RFP

RESULTADO 6

6

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

RESULTADO 6

6

RFP

RESULTADO 6

6

RFP

AJUSTE X4

X4

RFP

AJUSTE X4

X4

RFP


AFP


AFP


AFP


AFP

AJUSTE X4

X4

RFP

V.VERDADEIRO 20

20

AHA

RFP

V.VERDADEIRO 20

20

AHA

RFP

V.VERDADEIRO 20

20

AHA

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP

PROBLEMA

Um valor e sua sexta parte resulta em 21.
Qual é esse valor?

$x + x/6 = 21$

AFP

V.FALSO

6

AFP

V.FALSO

6

AFP

V.FALSO

6

AFP


RFP

RFP

RFP

RFP

RESULTADO 7

7

RFP

RESULTADO 7

7

RFP

RESULTADO 7

7

RFP

AJUSTE X3

X3

RFP


AFP


AFP


AFP


AFP

AJUSTE X3

X3

RFP

AJUSTE X3

X3

RFP

V.VERDADEIRO 18

18

AHA

RFP

V.VERDADEIRO 18

18

AHA

RFP


RFP

RFP

RFP

RFP

V.VERDADEIRO 18

18

AHA

RFP

PROBLEMA

Um valor e sua nona parte
resulta em 20.
Qual é esse valor?

x + x/9 = 20

RFP

V.FALSO 9

9

RFP

V.FALSO 9

9

RFP


AFP


AFP


AFP


AFP

V.FALSO 9

9

RFP

RESULTADO 10

10

RFP

RESULTADO 10

10

RFP

RESULTADO 10

10

RFP

AJUSTE X2

X2

RFP

AJUSTE X2

X2

RFP

AJUSTE X2

X2

RFP

V.VERDADEIRO 18

18

AHA

RFP


AFP

AFP

AFP

AFP


V.VERDADEIRO
18
18
AHA
RFP


V.VERDADEIRO
18
18
AHA
RFP