SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

STEPHANY GLAUCIA PAULO FERREIRA

SOBRE A OBRA *CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM* (1551) DE GEORG JOACHIM RHETICUS E SUAS RELAÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

BELÉM - PA
2023

STEPHANY GLAUCIA PAULO FERREIRA

SOBRE A OBRA *CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM* (1551) DE GEORG JOACHIM RHETICUS E SUAS RELAÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas, sob a orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

BELÉM - PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P324s Paulo-Ferreira, Stephany Glaucia.
Sobre a Obra Canon Doctrinae Triangulorum (1551) de Georg Joachim Rheticus e suas Relações com o Desenvolvimento da Trigonometria / Stephany Glaucia Paulo Ferreira. — 2023.
139 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Claudio Brandemberg
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2023.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - História. 3. Trigonometria - Tabelas. 4. Trigonometria - Rheticus. 5. Trigonometria - Século XVI e XVII. I. Título.

CDD 510.9

STEPHANY GLAUCIA PAULO FERREIRA

SOBRE A OBRA *CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM* (1551) DE GEORG JOACHIM RHETICUS E SUAS RELAÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas, sob a orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

Data de Aprovação: 09/05/2023
Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg - IEMCI/UFPA
Orientador

____
Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales - IEMCI/UFPA
Membro interno

____
Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva – IEMCI/UFPA
Membro interno

____
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá - UEPA
Membro externo

____
Prof. Dr. Miguel Chaquiam - UEPA
Membro externo

Ao meu avô, Pedro Alcântara de Oliveira, por sempre incentivar meu crescimento profissional através dos estudos. Ao meu marido, Renan Augusto Lima Ferreira, pela paciência, companheirismo e o maior incentivador dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade do Federal do Pará – UFPA, pelo oferecimento do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg, pela amizade, paciência e principalmente, pelas orientações e colaboração para este trabalho e em minha vida profissional, não poderia ter orientador melhor.

Aos professores que compõe a banca examinadora, Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales, Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva, Prof. Dr. Pedro Franco de Sá e Prof. Dr. Miguel Chaquiam, pela participação e colaboração para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, pelas contribuições para a minha formação.

Aos membros do GEHEM (Grupo de Estudos em Pesquisa em História e Educação Matemática), pela contribuição para esta pesquisa durante as discussões realizadas nas reuniões do grupo.

Aos meus pais, João Edilson e Greicy Mara, pelo apoio em meus estudos, na qual me encontro hoje graças a eles, serão sempre os meus alicerces.

Ao Renan Augusto, pelo amor, companheirismo e principalmente ao incentivo neste trabalho e em todos os sentidos da vida.

A minha família em geral, avós, irmãos, tios e primos que sempre torcem pelo meu sucesso.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas pelo carinho, apoio e amizade durante o curso.

Aos amigos de trabalho da rede privada de ensino, em especial, Luan, Walbert, Carol, Genisson, Marina, Luiz Antônio e Eliziane que estiveram ao meu lado em um momento que eu mais precisei.

Aos meus ex-alunos do ensino básico e cursinho que vibraram tanto quanto eu pela obtenção deste título, assim como, aprendi muitas coisas durante nossa convivência em sala de aula.

Agradeço a Deus, pelas bênçãos concedidas e força para ultrapassar as barreiras encontradas ao longo do curso.

A autora

RESUMO

O interesse pelo estudo da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) surgiu a partir de nossas leituras, realizadas no Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM), no ano de 2020, quando comentamos, inicialmente, a obra produzida pelo matemático austríaco Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574). Ao iniciarmos tal pesquisa, notamos poucas citações ao nome de Rheticus, que foi o único aluno de Copérnico e contribuiu com a publicação do trabalho sobre heliocentrismo, na história da evolução sobre astronomia e trigonometria. Sendo assim, fez com que pudéssemos formular hipóteses sobre as relações da obra *Canon* de Rheticus para o desenvolvimento da trigonometria, principalmente no século XVI e XVII. Deliberamos analisar a obra registrada como *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) do matemático Rheticus, com vista a estabelecer as relações entre a obra estudada e o desenvolvimento da trigonometria no século XVI e XVII. Para isso, realizamos uma pesquisa bibliográfica especializada, que organizamos segundo o diagrama metodológico sugerido por Chaquiam (2022), como balizador para o desenvolvimento histórico da pesquisa, pois consideramos importante destacar as informações sugeridas por Brandemberg (2021) e Chaquiam (2022); e pesquisa documental, de fonte primária e secundária, buscando coletar dados qualitativos referentes à análise do *Canon* para estabelecer relações entre a obra e o desenvolvimento da trigonometria. Como resultados, destacamos que a obra contribuiu com o avanço dos estudos de razões trigonométricas, pois Rheticus foi o primeiro a apresentar as seis razões trigonométricas por meio de lados de triângulos retângulos. As relações que destacamos, com o desenvolvimento da trigonometria, são as de influências com os trabalhos desenvolvido por Valentin Otto (1550 – 1603), Bartholomaeus Pitiscus (1561 – 1613), Francesco Maurolico (1494 - 1575) e Françóis Viète (1540 - 1603), que ampliaram os estudos sobre as tabelas trigonométricas até o desenvolvimento das tábuas de logaritmos no século XVII. Um possível futuro desdobramento dessa pesquisa seria verificar como Rheticus veio parar nos livros didáticos.

Palavras-chave: Matemática – Estudo e ensino; Matemática – História; Trigonometria – Tabelas; Trigonometria – Rheticus; Trigonometria – Século XVI e XVII.

ABSTRACT

The interest in the study of the work Canon Doctrinae Triangulorum (1551) arose from our readings, carried out in the Group of Studies and Research in History and Teaching of Mathematics (GEHEM), in the year 2020, when we initially comment on the work produced by the Austrian mathematician Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574). When we started this research, we noticed few citations to the name of Rheticus, who was the only student of Copernicus and contributed to the publication of the work on heliocentrism, in the history of evolution on astronomy and trigonometry. Therefore, it allowed us to formulate hypotheses about the relationship between the Canon of Rheticus and the development of trigonometry, mainly in the 16th and 17th centuries. We decided to analyze the work registered as Canon Doctrinae Triangulorum (1551) by the mathematician Rheticus, with a view to establishing the relationships between the studied work and the development of trigonometry in the 16th and 17th centuries. For this, we carried out a specialized bibliographical research, which we organized according to the methodological diagram suggested by Chaquiam (2022), as a guide for the historical development of the research, as we consider it important to highlight the information suggested by Brandemberg (2021) and Chaquiam (2022); and documentary research, from primary and secondary sources, seeking to collect qualitative data regarding the analysis of the Canon in order to establish relationships between the work and the development of trigonometry. As a result, we emphasize that the work contributed to the advancement of studies of trigonometric ratios, as Rheticus was the first to present the six trigonometric ratios through the sides of right triangles. The relations that we highlight, with the development of trigonometry, are those of influences with the works developed by Valentin Otto (1550 – 1603), Bartholomaeus Pitiscus (1561 – 1613), Francesco Maurolico (1494 - 1575) and Françóis Viète (1540 - 1603), who expanded studies on trigonometric tables until the development of logarithm tables in the 17th century. A possible future development of this research would be to verify how Rheticus ended up in textbooks.

Key words: Mathematics – Study and teaching; Mathematics – History; Trigonometry – Tables; Trigonometry – Rheticus; Trigonometry – 16th and 17th centuries.

RÉSUMÉ

L'intérêt pour l'étude de l'œuvre Canon Doctrinae Triangulorum (1551) est né de nos lectures, réalisée au sein du Groupe d'étude et de recherche en histoire et enseignement des mathématiques (GEHEM), en l'an 2020, lorsque nous avons commenté, dans un premier temps, les travaux du mathématicien autrichien Georg Joachim Rheticus (1514 - 1574). Lorsque nous avons commencé cette recherche, nous avons remarqué peu de citations au nom de Rheticus, qui fut le seul élève de Copernic et contribua à la publication des travaux sur l'héliocentrisme, dans l'histoire de l'évolution sur l'astronomie et la trigonométrie. Par conséquent, cela nous a permis de formuler des hypothèses sur la relation entre le Canon de Rheticus et le développement de la trigonométrie, principalement aux XVIe et XVIIe siècles. Nous avons décidé d'analyser l'ouvrage enregistré comme Canon Doctrinae Triangulorum (1551) par le mathématicien Rheticus, en vue d'établir les relations entre l'ouvrage étudié et le développement de la trigonométrie aux XVIe et XVIIe siècles. Pour cela, nous avons réalisé une recherche bibliographique spécialisée, que nous avons organisée selon le schéma méthodologique proposé par Chaquiam (2022), comme guide pour le développement historique de la recherche, car nous avons jugé important de mettre en évidence les informations proposées par Brandemberg (2021) et Chaquiam (2022); et la recherche documentaire, à partir de sources primaires et secondaires, cherchant à recueillir des données qualitatives concernant l'analyse du Canon afin d'établir des relations entre l'œuvre et le développement de la trigonométrie. En conséquence, nous soulignons que le travail a contribué à l'avancement des études des rapports trigonométriques, car Rheticus a été le premier à présenter les six rapports trigonométriques à travers les côtés des triangles rectangles. Les relations que nous mettons en évidence, avec le développement de la trigonométrie, sont celles d'influences avec les travaux développés par Valentin Otto (1550 - 1603), Bartholomaeus Pitiscus (1561 - 1613), Francesco Maurolico (1494 - 1575) et Françóis Viète (1540 - 1603), qui a élargi les études sur les tables trigonométriques jusqu'au développement des tables logarithmiques au 17ème siècle. Un développement futur possible de cette recherche serait de vérifier comment Rheticus s'est retrouvé dans les manuels.

Mots clés: Mathématiques – Étude et enseignement; Mathématiques – Histoire; Trigonométrie – Tableaux; Trigonométrie – Rhéticus; Trigonométrie – XVIe et XVIIe siècles.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Teses e Dissertações sobre obras históricas Matemáticas na CAPES..........27
QUADRO 2 - Teses e Dissertações sobre obras históricas Matemáticas na UFRN..........28
QUADRO 3 - Esquema de organização do *Canon* (1551)..........90

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Diagrama metodológico – *Canon Doctrinae Triangulorum* 37
FIGURA 2 - Ideia de Brahe sobre o sistema Solar 51
FIGURA 3 - Modelo da teoria geocêntrica de Aristóteles 62
FIGURA 4 - Movimento retrógrado...63
FIGURA 5 - Modelo Geocêntrico de Ptolomeu..64
FIGURA 6 - Sistema Heliocêntrico 66
FIGURA 7 - Referente ao teorema 20 do primeiro livro do *De Triangulis*..................73
FIGURA 8 - Triângulo utilizado no teorema 12 da obra *De Triangulis* de Regiomontanus 73
FIGURA 9 - Parte do teorema 26 do Livro Quatro do *De Triangulis* 75
FIGURA 10 - *Tabula fecunda* apresentada no livro *Tabulae directionum et profectionum*, 1490...76
FIGURA 11 - Ilustração para o cálculo na base de 10^7 86
FIGURA 12 - Fixando a hipotenusa em 10^7 87
FIGURA 13 - Fixando a base em 10^7 87
FIGURA 14 - Fixando a perpendicular em 10^7 88
FIGURA 15 - Triângulo retângulo com hipotenusa 10^7 e ângulo agudo de 30º.........88
FIGURA 16 - A primeira página da tabela trigonométrica do *Canon* (1551)..............91
FIGURA 17 - A segunda página da tabela trigonométrica do *Canon* (1551).............92
FIGURA 18 - Tabela de Rheticus recalculada por Roegel (2010) – primeira parte...94
FIGURA 19 - Tabela de Rheticus recalculada por Roegel (2010) – segunda parte ..95
FIGURA 20 - Tabela de Pitiscus, publicada em 1613 100
FIGURA 21 - Tabela para senos de Maurolico..102
FIGURA 22 - Tabela para tangentes de Maurolico 103
FIGURA 23 - Tabela para secantes de Maurolico...104
FIGURA 24 - Tabela de Viète do *Canon mathematicus* (1579)................................106
FIGURA 25 - Triângulo retângulo associado aos lados nomeados por Rheticus e a atual...109
FIGURA 26 - Triângulo retângulo na circunferência..110
FIGURA 27 - Triângulo retângulo...110

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

ILUSTRAÇÃO 1 - Homem Vitruviano..41
ILUSTRAÇÃO 2 - Rotas das embarcações...43
ILUSTRAÇÃO 3 - Georg Joachim Rheticus...53
ILUSTRAÇÃO 4 - Página de título da obra *Narratio Prima* de Rheticus...................55
ILUSTRAÇÃO 5 – Gnômon. ilustração de Rheticus para as Tabelas Astronômicas 81
ILUSTRAÇÃO 6 - Capa do livro *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551)..................83
ILUSTRAÇÃO 7 - Capa do *Canon Doctrinae Triangulorum*......................................84
ILUSTRAÇÃO 8 - Prefácio do *Canon*..85
ILUSTRAÇÃO 9 - *Trigonometria: Sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* (1595, primeira edição impressa em Heidelberg)...................................98

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 12

1. ENCAMINHAMENTOS DA PESQUISA 16

1.1. Um estudo sobre trigonometria na BNCC 18
1.2. Sobre a História da Matemática 22
1.3. Levantamento Bibliográfico 26
1.3.1. As pesquisas relacionadas ao estudo 29

2. SOBRE A VIDA E OBRA DE RHETICUS 36

2.1. Reconstruindo cenários 37
2.2. O panorama do século XVI 40
2.3. Os contemporâneos a Rheticus 45
2.4. Sobre Georg Joachim Rheticus 52
2.5. Sobre as obras de Rheticus 60

3. PERSONAGENS RELACIONADOS COM A CONSTRUÇÃO DA TRIGONOMETRIA 62

3.1. O Geocentrismo e o Heliocentrismo 62
3.2. O surgimento das tabelas trigonométricas 67
3.3. As Influências de Regiomontanus e Copérnico para Rheticus 70

4. ANÁLISE DA OBRA *CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM* 79

4.1. A construção da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) 79
4.2. Descrição e características do *Canon* 82
4.3. Análise das tabelas do *Canon* 83

5. RELAÇÕES ENTRE A OBRA *CANON* E O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA 97

5.1. A influência da obra de Rheticus no século XVI e XVII 97
5.2. Relacionando a escrita de Rheticus com o ensino atual 108
5.3. As razões trigonométricas no triângulo inscrito na circunferência 109
5.4. A construção do triângulo no GeoGebra 112

CONSIDERAÇÕES FINAIS 115

REFERÊNCIAS 119

ANEXO I – Tabelas trigonometricas do *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) 123

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa versa sobre a área de concentração da Educação Matemática, em sua linha de pesquisa História da Matemática, mais especificamente sobre a análise de um texto histórico verificando sua relação, quanto sua influência, para o desenvolvimento do tema em questão.

Nas literaturas estudadas, destacamos Brandemberg (2020, p.280) quando relata que os textos históricos fornecem uma fonte de atividades direcionadas ao ensino de conteúdos matemáticos que viabilizam a sua aprendizagem de forma mais abrangente e com significado.

Sendo assim, levou-nos a formular hipótese sobre as relações das tabelas contidas no *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) do matemático Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574) para o desenvolvimento da trigonometria, principalmente do século XVI e XVII.

A motivação por esse estudo decorre das atividades realizadas no Grupo de Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM), no segundo semestre do ano de 2020, quando foi proposta a leitura e apresentação do livro “Lecciones de História de las Matemáticas” do autor H.Wussing (1998). Neste livro, Wussing (1998) cita a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551), cujo autor é o matemático polonês Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574), que despertou, por indicação inicial de nosso orientador, o interesse de analisarmos tal obra por considerarmos importante a tabela descrita no *Canon* para o desenvolvimento das tabelas do século XVI e, consequentemente, para o desenvolvimento da Trigonometria.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, procuramos responder ao questionamento: Que relações podem ser estabelecidas entre a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) de Rheticus e o desenvolvimento da trigonometria no século XVI e XVII?

Buscando responder tal pergunta, o objetivo da pesquisa é analisar a obra registrada como *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) do matemático Rheticus, com vista a estabelecer as relações entre a obra estudada e o desenvolvimento da Trigonometria nos séculos XVI e XVII.

Seguido dos seguintes objetivos específicos:

- Apresentar traços biográficos de Rheticus e de personagens relacionados à trigonometria dentro de um contexto histórico e sociocultural, nos séculos XV, XVI e XVII, de modo há situar na teia histórica a obra *Canon*;
- Apresentar aspectos históricos bibliográfico de Rheticus e o contexto social e político do período de produção das tabelas a partir de uma revisão bibliográfica especializada, balizada pelo diagrama proposto por Chaquiam (2022);
- Descrever a obra *Canon*, com vistas a apresentar as tabelas e seus elementos para estabelecer coneções com trabalhos relacionados à Trigonometria;
- Estabelecer relações entre a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* e a trigonometria dos séculos XVI e XVII.

Para estabelecer essas relações, utilizamos a análise e a classificação de textos históricos de Brandemberg (2021), que foram estruturados e balizados a partir do proposto por Chaquiam (2022).

Dessa forma, buscando cumprir com os objetivos da pesquisa, delegamos uma metodologia cuja abordagem é qualitativa, além de utilizarmos de pesquisa bibliográfica e documental de fonte primária e secundária. Optamos pela abordagem qualitativa para dar significado aos fatos observados, pois, segundo Dalfovo, Lana e Silveira (2008, p.9), a pesquisa qualitativa é:

> Aquela que trabalha predominantemente com dados qualitativos, isto é, a informação coletada pelo pesquisador não é expressa em números, ou então os números e as conclusões neles baseadas representam um papel menor na análise (DALFOVO; LANA; SILVEIRA, 2008, p. 9).

Com o resultado da pesquisa, buscamos compreender o objeto de estudo no seu contexto histórico e sua estruturação para o ensino, embora alguns dados analisados utilizem métodos quantitativos, não é predominante em nossa pesquisa. Por esse motivo, a abordagem qualitativa é mais interessante para nós.

A investigação proposta envolveu a pesquisa bibliográfica especializada, pois foi necessário realizar um levantamento teórico, abordando sobre a História da Matemática, sendo que nos baseamos em Brandemberg (2020; 2021) e Mendes (2020). Ademais, em um levantamento bibliográfico sobre temas relacionados com a análise de obras históricas de personagens ligados ao tema desta pesquisa. Como formas de exemplificar e destacar o ineditismo do nosso trabalho, encontramos as pesquisas de Borges (2021), Pereira (2010) e Mendes (2010). Além de buscar informações nessas bibliografias sobre todos os contextos que envolveram a produção da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551), que são subsídios importantes para cumprirmos com o objetivo geral traçado.

A pesquisa bibliográfica na concepção de Fontelles *et al.* (2009, p. 7):

> Sua base é a análise de material já publicado. É utilizada para compor a fundamentação teórica a partir da avaliação atenta e sistemática de livros, periódicos, documentos, textos, mapas, fotos, manuscritos e, até mesmo, de material disponibilizado na internet etc. (FONTELLES *et al.,* 2009, p. 7).

Por meio dessa análise de material, também desenvolvemos um levantamento histórico sobre a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) e o matemático Rheticus, de modo a verificar sua relação para o desenvolvimento da trigonometria do século XVI. Esse levantamento organizamos segundo o diagrama metodológico sugerido por Chaquiam (2022), pois consideramos importante destacar as informações sugeridas por Brandemberg (2021) e Chaquiam (2022), principalmente no que se refere ao conhecimento do contexto histórico da época e o que levou Rheticus a produzir tal obra.

Outrossim, também utilizamos a pesquisa documental que, de acordo com Fontelles *et al* (2009, p. 7),

> [...] o tipo de pesquisa que tem o levantamento de documentos como base. É uma valiosa técnica de coleta de dados qualitativos. Assemelha-se à pesquisa bibliográfica, a qual utiliza a contribuição fornecida por diversos autores sobre um determinado assunto, enquanto na pesquisa documental, a coleta de informações é realizada em materiais que não receberam qualquer tipo de análise crítica (FONTELLES *et al.,* 2009, p. 7).

Na análise documental, fazemos uso de fonte primária e secundária. Com base em Fontelles *et al.* (2009, p. 7), a fonte primária apresenta origem da época que se está estudando, quando ainda não foi analisada e, na maioria das vezes, foi produzida pelas próprias pessoas pesquisadas. Por outro lado, relacionados com a fonte secundária estão trabalhos escritos baseados na fonte primária, que tem como característica fazer apenas uma análise, ampliação ou comparação das informações contidas no original, ou seja, não produz informações originais.

Logo, o método da pesquisa documental convém para analisar a obra de Rheticus, utilizando o *Canon* como fonte primária e outras fontes que falam sobre o tema, como Roegel (2010; 2021), como fonte secundária. Sendo assim, apresentamos a seguir os devidos capítulos e como foram estruturados.

No capítulo I, as questões que envolvem a problemática da pesquisa, o estudo sobre o objeto matemático da pesquisa e o nosso referencial teórico e bibliográfico, composto pelos autores Brandemberg (2020; 2021) e Mendes (2020) compondo o referencial teórico sobre os temas da História da Matemática; e como referencial bibliográfico abordamos as pesquisas de Borges (2021), Pereira (2010) e Mendes (2010), que trazem exemplificações e destacam o ineditismo da nossa pesquisa.

No segundo capítulo, para estabelecer essas relações utilizamos a análise e a classificação de textos históricos de Brandemberg (2021), estruturado e balizado a partir do proposto por Chaquiam (2022). Mesmo que as finalidades do diagrama sejam para o ensino, para esta pesquisa ele se torna um balizador. Portanto, neste capítulo abordarmos os aspectos históricos dessa pesquisa, desde o cenário mundial até o histórico Bibliográfico de Rheticus.

O que trazemos no terceiro capítulo ainda tem relação com a abordagem histórica e evolução do tema, porém mais focado nas teorias e personagens que antecederam Rheticus. Portanto, abordamos sobre as teorias Geocêntricas e Heliocêntricas, o desenvolvimento das tabelas trigonométricas e sobre quais influências Regiomontanus e Copérnico exerceram sobre as ideias de Rheticus.

No capítulo IV, apresentamos a análise da obra, uma versão da editora Kessinger Publishing adquirida pela loja *on-line* Amazon, na qual descreveremos a estrutura, características da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) e da tabela trigonométrica calculada pelo matemático Rheticus, além de comentar e relacionar com o trabalho de Roegel (2010).

No quinto e último capítulo, buscamos estabelecer relações entre a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) de Rheticus para a construção de tabelas do século XVI, como a de Otto, Pistiscus, Maurolico e Viète, tendo em vista ainda sua influência para um desdobramento da trigonometria no século XVII. Abordamos também um tratamento atual das ideias que Rheticus utilizou para a construção do *Canon*. Os resultados dessa pesquisa estão inseridos neste capítulo.

1 ENCAMINHAMENTOS DA PESQUISA

Neste capítulo, enfatizamos os motivos que levaram à elaboração de nossa questão de pesquisa (sendo a trajetória acadêmica abordada na primeira pessoa) e os processos envolvidos em seu desenvolvimento, referentes à problemática, o estudo sobre o objeto matemático da pesquisa e o nosso referencial teórico e bibliográfico.

A pesquisa em História da Matemática é uma área de ensino com a qual venho trabalhando desde a minha graduação em Licenciatura Plena em Matemática, quando desenvolvi um Trabalho de Conclusão de Curso, orientado pelo prof. Dr. Pedro Franco de Sá, abordando a História da trigonometria hiperbólica, em que no capítulo final relacionei a trigonometria circular com a trigonometria hiperbólica (PAULO, 2014).

No ano de 2014, ingressei no mestrado ofertado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGECM). Nesse curso, optei por pesquisar os saberes docentes na Licenciatura em Matemática acerca do ensino de Derivada, orientada pelo prof. Dr. João Cláudio Brandemberg, quando realizei entrevistas com cinco docentes que relataram sobre sua prática e acerca das dificuldades de aprendizagem dos alunos em relação ao Cálculo, mais especificamente a derivada (PAULO, 2016).

A partir dos resultados obtidos na dissertação, surgiram alguns questionamentos que se tornariam o problema de pesquisa da minha tese de doutorado. Um desses questionamentos seria “como se dava o ensino de Cálculo na década de 60 a 70 nas escolas secundárias de Belém?”, que era a questão norteadora da pesquisa, porém devido à pandemia que iniciou no Brasil no ano de 2020, com suas medidas restritivas e isolamento social, a tese anterior se tornou inviável para ser concluída em um tempo hábil, pois eu precisaria fazer uma pesquisa documental e frequentar essas escolas, o que não foi possível em razão do ocorrido mencionado.

Assim, durante as atividades do Grupo de Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM), que a cada semestre apresenta discussões tratando a relação entre textos históricos e ensino de matemática, no segundo semestre do ano de 2020, foi proposta a leitura e exibição do livro “*Lecciones de Historia de las Matemáticas*” do autor H.Wussing (1998). A lição 6 do livro "El Renacimiento: Trigonometria, métodos de Calculo, algebrizacion" (WUSSING, 1998) relata que:

> Com as contribuições de Regiomontanus, a trigonometria consolidou-se, no âmbito europeu, como disciplina matemática. Os séculos que se seguiram trouxeram extensões, reformas metodológicas e a introdução de um vocabulário mais alinhado ao atual, além do refinamento das tabelas. Corpénico introduziu em 1542, em uma trigonometria separada, a função secante. Rhaeticus, professor de matemática de Wittemberg e aluno e amigo de Corpénico, apresentou em 1551, em seu *Canon Doctrinae Triangulorum* (Tabela da Teoria dos Triângulos), uma tabela de funções trigonométricas com sete algarismos e para ângulo 10' em 10'. Neste trabalho, os lados do triângulo retângulo foram usados pela primeira vez para definir as seis funções trigonométricas (WUSSING, 1998, p.103, tradução nossa).

Diante do exposto e das discussões referenciadas no grupo de pesquisa, surge o interesse, por indicação inicial de nosso orientador, em pesquisar a obra do matemático Rheticus, intitulada *"Canon Doctrinae Tringulorum (1551)",* tendo em vista que consideramos importante tais tabelas para o ensino de trigonometria, pois, como sou educadora do ensino básico, as ideias aplicadas de Rheticus envolvendo as tabelas são interessantes para o processo de ensino e aprendizagem.

A partir das leituras realizadas no grupo, da indicação e das conversas com o orientador, foi possível estabelecer um referencial teórico que nos levou a formular hipótese sobre as relações que as tabelas contidas no *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) trazem ao desenvolvimento da trigonometria nos séculos XVI e XVII.

Nossas leituras iniciais apontam para um matemático, Rheticus, que se destaca por sua influência no campo da Trigonometria, ligada a Astronomia da época, e que pode ser evidenciada em seus escritos, como no texto que elegemos como principal para nosso estudo bibliográfico de acordo com o que encontramos em Danielson (2006).

Vale ressaltar que existe uma variação de escritas para se referenciar ou nomear uma mesma pessoa, como no caso de Rheticus. Temos, por exemplo, Rhetikus em alemão, Retyk em polonês, Rhaeticus ou Rhäticus e Rheticus em latim. Optamos por utilizar o Rheticus, pois foi a escrita que encontramos em diversos materiais e principalmente no livro de Danielson (2006) que, segundo o autor, era como os seus contemporâneos o chamavam. Esta é a forma que utilizamos ao elaboramos nossa questão de pesquisa que apresentamos a seguir.

Para ajudar no desenvolvimento da pesquisa, realizamos um estudo do conteúdo de trigonometria no ensino básico, principalmente no que se refere às sugestões da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com a intenção de ressaltar a importância do conteúdo estudado desde seu desenvolvimento histórico para o que ensinamos atualmente, tal como enfatizado a seguir.

1.1 Um estudo sobre trigonometria na BNCC

A educação tem um papel importante para o desenvolvimento da sociedade, à medida em que a busca por informação se torna necessária devido à globalização. Portanto, devemos buscar o desenvolvimento da capacidade de comunicação, de tomar decisões, resolver e interpretar problemas, de aperfeiçoar e evoluir em termos de conhecimento.

Partindo desse princípio, a matemática se torna indispensável para tais desenvolvimentos, pois se trata de uma ciência que estuda formas, espaços, quantidades, relações abstratas e lógicas relacionadas aos símbolos dando suporte ao desenvolvimento intelectual do indivíduo, da mesma forma que prepara a criança para o pensamento crítico e abstrato.

Sendo uma disciplina ensinada desde as séries iniciais até o último ano do Ensino Médio, buscamos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aspectos importantes referentes aos conhecimentos e habilidades a serem desenvolvidos neste nível de ensino.

Desde as séries iniciais até o Ensino Médio, a matemática vem se desenvolvendo e ampliando os conhecimentos necessários para aquele nível de ensino, de modo que a construção do pensamento matemático se torne gradativa para os alunos. A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio propõe "a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (BRASIL, 2018, p. 527).

O ensino de matemática está muito além de saber fazer operações matemáticas. Está na capacidade de raciocinar, relacionar, interpretar e evoluir conceitos matemáticos presentes na sua vida pessoal e profissional.

No que se refere ao verdadeiro sentido de estudar matemática, podem existir algumas concepções errôneas, quando a relacionam apenas como uma ferramenta, que se refere a um conjunto de técnicas e estratégias para que sejam aplicadas em outras áreas de ensino, mas, além disso, ela tem um papel formativo importante para a construção do conhecimento do aluno, que contribui com o desenvolvimento do processo de pensamento e aquisição de atitudes do indivíduo.

Consideramos a trigonometria um desses temas importantes, por se tratar de uma área da geometria plana euclidiana que estuda a relação de proporcionalidade existente entre os ângulos de um triângulo e o comprimento de seus 3 lados. Uma das relações quando estamos tratando de triângulos retângulos (possuem um ângulo de 90º), pode ocorrer por meio de razões conhecidas como trigonométricas, sendo que as principais são: seno, cosseno e tangente. Tal como é especificado a seguir:

a) a razão seno de um ângulo agudo é dada pela divisão do comprimento do cateto oposto ao ângulo pelo comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo, respectivamente;

b) a razão cosseno de um ângulo agudo é dada pela divisão do comprimento do cateto adjacente ao ângulo pelo comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo, respectivamente;

c) a razão tangente de um ângulo agudo é dada pela divisão do comprimento do cateto oposto ao ângulo pelo comprimento do cateto adjacente ao mesmo ângulo, respectivamente.

Introduzindo o estudo da trigonometria a partir do conceito de semelhança de triângulos, seguindo o estudo de relações entre ângulos e lados do triângulo, sendo as razões trigonométricas uma dessas relações, assim como as relações métricas. No Ensino Médio, há uma ampliação desses conhecimentos, dando continuidade às proporcionalidades dos lados do triângulo. Em relação aos seus ângulos, temos as leis dos senos e cossenos, seguindo para o estudo do círculo trigonométrico, as relações trigonométricas, as operações trigonométricas, as equações e inequações trigonométricas e as funções trigonométricas.

Cada tópico destacado anteriormente pode ser aplicado não apenas à matemática, mas em outras áreas de conhecimento, como a física, a química, a biologia, a geografia, a astronomia, a medicina, a engenharia, entre outros.

Sobre o ensino de trigonometria, Mendes (2010) relata que sua experiência profissional permitiu observar que a geometria e a trigonometria são os conteúdos diante dos quais, aparentemente, os professores têm mais dificuldade. Talvez pelo pouco conhecimento que têm sobre o assunto ao ingressar no curso de graduação, o que pode se repetir com os seus futuros alunos.

Essa observação pode ser comprovada no artigo das autoras Brito e Morey (2004), quando relatam sobre as dificuldades em trigonometria por parte dos professores de Ensino Fundamental, da rede pública de ensino em Natal, em paralelo relacionam com a formação inicial desses docentes, não se limitando à graduação, mas também ao nível de ensino anterior a esta.

Mendes (2010) aborda que a licenciatura não dá o suporte necessário ao professor em formação sobre suas dificuldades em determinadas áreas, como a trigonometria. Em concordância, Brito e Morey (2004) apontam uma desconexão entre os conteúdos abordados na graduação com os conteúdos ensinados na educação básica. Por esse motivo, é provável que "os professores reproduzam em suas aulas o referencial aprendido nos estudos anteriores à graduação" (BRITO; MOREY, 2004, p. 65).

As dificuldades evidenciadas por Brito e Morey (2004) a partir de hipóteses formuladas por meio de suas experiências e leituras foram diversas. Todavia, com a proposição de atividades realizadas com os 8 docentes que participaram da oficina, foi possível salientar que os principais entraves são: relacionar o conceito de semelhança e aqueles envolvidos em trigonometria; entender as expressões “cateto oposto” e “cateto adjacente” como uma relação entre os lados e os ângulos do triângulo retângulo; compreender por que no círculo trigonométrico a medida do raio é a unidade; transferir os conhecimentos sobre simetria ao círculo trigonométrico.

Boa parte dessas dificuldades acontece em decorrência dos livros didáticos não enfatizarem ou não relacionarem tais conceitos, sendo esses conceitos tidos como condição necessária e por falta de conhecimento de conceitos básicos em geometria, por parte dos professores.

Conhecendo nosso objeto de estudo, buscamos na BNCC as habilidades necessárias para se trabalhar trigonometria na educação básica, visto que é evidente o estudo desse assunto no 9º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

No 9º ano do Ensino Fundamental (séries finais), destacamos as seguintes habilidades relacionadas com a trigonometria (BRASIL, 2018, p. 319):

EF09MA13[1] *- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.*

As relações métricas do triângulo retângulo podem ser obtidas e demonstradas a partir da semelhança de triângulos quando uma altura relativa à hipotenusa é traçada, sendo o teorema de Pitágoras uma dessas relações, introduzindo a próxima habilidade.

EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidades envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

A aplicação em situações práticas, principalmente do cotidiano, do teorema de Pitágoras é fundamental para que o aluno entenda qual o significado dessa relação entre os lados de um triângulo retângulo, podendo ser relacionada, por exemplo, ao teorema de Tales que envolve conceitos de proporcionalidade. Conhecendo detalhadamente as características de um triângulo retângulo e proporcionalidades, podemos iniciar o estudo das razões trigonométricas ainda no último ano do Ensino Fundamental (Séries finais).

No tocante às habilidades sobre trigonometria descritas na BNCC referentes ao Ensino Médio, foram identificadas as seguintes (BRASIL, 2018, p.536):

EM13MAT306[2] *- Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.*

Apesar de nesta habilidade a BNCC citar apenas as funções trigonométricas, para um bom entendimento a respeito é preciso de muitos pré-requisitos, como as tabelas dos ângulos notáveis, o círculo trigonométrico, os ângulos com medições em grau e radiano, bem como sua relação com o raio da circunferência, entre outros. Outra habilidade identificada faz referência à trigonometria no triângulo, que segue:

---

[1] Trata-se do código alfanumérico da BNCC para identificar tais aprendizagens, EF = Ensino Fundamental, 09 = 9º Ano, MA = Matemática e os últimos dígitos se referem a posição na numeração sequencial do ano (habilidade 13), formando EF09MA13. O mesmo se repete para EF09MA14.

[2] Trata-se do código alfanumérico da BNCC para identificar tais aprendizagens, EM = Ensino Médio, o primeiro par de números (13) indica que as habilidades podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, MAT = Matemática e suas Tecnologias e os números finais indicam a competência específica que se relaciona com a habilidade, formando EM13MAT306. O mesmo se repete para EM13MAT308.

EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

É notável que está última habilidade é uma ampliação do que é estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, revendo as relações métricas e razões trigonométricas. O ensino de trigonometria segue para o estudo das leis dos senos e cossenos que, como já dito anteriormente, é uma relação de proporcionalidade entre os lados do triângulo e seus ângulos.

Observamos que a trigonometria está presente no ensino básico atualmente, contribuindo com o desenvolvimento geométrico, aritmético e algébrico do aluno. O que notamos é que esse desenvolvimento do conhecimento já vem de séculos anteriores, e a trigonometria toma forma no século XV, com um personagem importante chamado Regiomontanus, quando ela se torna independente da Astronomia.

Buscando investigar esse desenvolvimento trigonométrico, mais especificamente responder nossa questão de pesquisa e cumprir com os objetivos, abordaremos a seguir sobre a História da Matemática.

1.2. Sobre a História da Matemática

Abordaremos nossa revisão teórica relacionada ao tema importante a se destacar deste trabalho, que é a História da Matemática. Nossas percepções têm por base as ponderações teóricas de Brandemberg (2020; 2021) e Mendes (2020).

No artigo intitulado “Uma proposta para o uso da História no ensino de Matemática: sobre a potencialidade didática de textos históricos e o desenvolvimento de conceitos”, Brandemberg (2020) objetiva propor o uso da História no ensino de Matemática, a partir de atividades de cunho histórico adaptadas de textos históricos para o ensino.

Em seu referencial teórico, Brandemberg (2020) cita os autores Fauvel e Van Maanem (2000), Miguel (1993), Miguel (1997), Mendes (2009), Mendes (2015), Mendes e Chaquiam (2016) e Brandemberg (2017a). Tais autores, em sua análise, vêm buscando implementar o que Brandemberg, desde 2009, denomina de: uso da História da Matemática como componente metodológica para o ensino de Matemática.

Brandemberg (2021, p.23) ressalta um aspecto facilitador, da história da matemática como um componente metodológico, o que se refere à resolução de problemas matemáticos, utilizando mais de um método historicamente desenvolvido, que permita a comparação de estratégia de resolução.

Vale ressaltar a importância das informações abordadas por Brandemberg (2020) em relação a como e por que usar a História da Matemática sendo um componente metodológico, pois percebemos uma má compreensão da História da Matemática por parte de alguns educadores, como mostra na pesquisa de Traldi Junior (2007), em que professores de ensino básico atribuem a História da Matemática ao simples fato de contar histórias.

Brandemberg (2020) desmitifica essa ideia citando em seu referencial teórico autores que propõem a elaboração e sugerem um modelo de atividades de cunho histórico para o ensino, possibilitando exercitar na prática a discussão das demais atividades.

Vale frisar que as referidas atividades seguem a estrutura evidenciando os elementos: um tema, os objetivos bem definidos, o conteúdo histórico, o material utilizado, a operacionalização da atividade, os desafios propostos, o exercício de sistematização, formalização do conhecimento e atividades complementares. Além de apresentar uma atividade seguindo a estrutura citada anteriormente, enfatiza que a atividade deve ser adaptada às necessidades do currículo escolar e ao nível cognitivo dos estudantes (BRANDEMBERG, 2020, p. 270 – 272).

É importante ressaltar que, para Brandemberg (2021, p. 25), a matemática se constitui nos mais diversos contextos socioculturais da atividade humana. Logo, utilizar aspectos históricos relacionados aos conteúdos matemáticos ensinados se faz importante para conhecer o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Mendes (2020, p. 2) também compartilha da mesma opinião quando aponta o que o ensino da matemática com uma abordagem histórica é importante, pois instiga os alunos à prática dos estudos, pesquisas e problematizações que promovem estratégias de pensamento e, consequentemente, produzem conhecimento durante suas atividades escolares. Isso se faz necessário, pois a História da Matemática não se trata apenas de mostrar que os conceitos abordados pela matemática escolar têm uma história, mas mostrar que é um processo criativo que envolve sociedade, cultura e cognição. Portanto, “associar aspectos históricos ao conteúdo se faz importante para conhecermos o desenvolvimento de conceitos matemáticos”. (BRANDEMBERG, 2021, p. 26).

Sobre a importância de refletir as possibilidades de utilização das informações históricas nas aulas de matemática, Mendes (2020) e Brandemberg (2020) destacam o papel do professor em realizar um treinamento conceitual e didático, visando a desenvolver essa construção de conhecimento com seus alunos em sala de aula.

Essa construção pode ser evidenciada no trabalho de Brandemberg (2020, p. 280) quanto aos aspectos importantes para o ensino, no quesito da História da Matemática como componente metodológico para abordar conteúdos de matemática em sala de aula para despertar a curiosidade dos alunos e incentivá-los a estabelecerem uma sequência lógica para a edificação de determinado conceito por intermédio dos problemas históricos investigados.

É importante ressaltar qual história estamos ponderando, no caso, Mendes (2020, p. 6) também cita histórias que para o ensino são apenas ilustrativas, como as biografias, a não ser que o professor conecte a vida, o trabalho e a prática matemática das pessoas que são objetos de tal investigação ao ensino; e as questões do uso de lendas e mitologias que podem ser encontradas em livros de matemática. Podemos observar em alguns livros de matemática do ensino básico que, na introdução ao assunto, encontramos algumas histórias, sendo estas muitas vezes apenas ilustrativas, ou seja, sem relação nenhuma com a construção daquele conceito matemático. Percebe-se como a história da matemática é mal-interpretada.

Mendes (2020, p. 6) considera essas histórias inadequadas para o ensino, pois não estabelecem o desenvolvimento de conceitos, propriedades e relacionamentos matemáticos.

Concordamos com Mendes (2020, p. 5) quando cita que uma História relevante para o desenvolvimento de conceitos matemáticos deve figurar no plural. Todas as histórias devem estar conectadas com outras histórias socioculturais. Logo, são produções de ideias matemáticas e sua materialização em múltiplas línguas representativas. Trata-se de uma importante ferramenta do conhecimento que o professor de matemática pode obter e utilizar em sala de aula, pois serve para explicar e organizar conceitos matemáticos, no tempo e espaço, no ambiente escolar.

Mendes (2020, p. 8) chama a atenção para que a história da matemática seja entendida como conhecimento que está em constante transformação. Assim, é necessário que os professores proponham práticas desafiadoras em sala de aula que estimulem os alunos na busca de revalidar verdades formadas por meio de pesquisa histórica, com o objetivo de ampliar seus conhecimentos. O ponto de partida é explicar para os alunos que certos assuntos de matemática trazem aplicações práticas em determinadas profissões, daí a importância em aprendê-los. Salienta-se ainda a relevância de extrair aspectos epistemológicos de informações históricas que possam contribuir com a explanação acerca de tais conteúdos.

Assumimos que a história da matemática pode ser inserida no processo de ensino para concretizar a aprendizagem de forma didática tendo por base a construção do saber, de modo que os textos históricos constituam exemplos de instrumentos que possam ser utilizados como "um recurso metodológico" adequado, defendido em Brandemberg (2020).

No tocante aos textos matemáticos produzidos historicamente, Brandemberg (2021, p. 25) denomina todos eles como "textos históricos". Os elementos característicos de um "texto histórico", a partir de falas de alguns autores em Brandemberg (2021, p. 28), são: o conteúdo (com D'Ambrosio, Nobre e Hoyrup, 2020); o contexto (com Saito, 2020); o distanciamento (com Morey, Gonçalves, Nobre e Saito, 2020); o livro texto (com Fossa e Nobre, 2020) e a investigação (com Hoyrup, 2020).

Brandemberg (2021, p. 28) profere que um texto é tido como "histórico" quando se reporta a ao menos um ramo da matemática, bem como deve ser relevante e prover algum progresso para a ciência, além de ser destaque e influência sobre outras gerações. Portanto, deve-se levar em conta aspectos sociais e intelectuais para sua produção. Brandemberg (2021, p. 28) complementa que um texto histórico é:

> Um documento que, composto (impressão, pictografia escrita) de formatos e materiais (argila, papiro, pergaminho, bambu, papel) variados em algum momento da história, nos permite acessar de maneira implícita e explícita elementos do contexto de sua composição e da relevância de seu conteúdo com vistas ao entendimento do conhecimento matemático, de sua produção, desenvolvimento e divulgação (BRANDEMBERG, 2021, p. 28).

De acordo com a classificação de "textos históricos" por Brandemberg (2021, p.29), ponderamos o *Canon Doctrinae Triangulorum* como um texto clássico, devido à sua produção ser antes de 1820; texto de matemática, pois trata-se da produção de conteúdo (tabelas trigonométricas); um livro fonte, já que foi utilizado para pesquisa cujo o intuito é facilitar os cálculos astronômicos; Quanto à investigação, utilizamos a fonte principal, o *Canon*, e as fontes complementares em relação ao contexto, com base no século XVI.

Tem-se a importância da investigação dos aspectos históricos de um "texto histórico", que balizamos no diagrama de Chaquiam (2022). A seguir, apresentaremos um levantamento bibliográfico objetivando demonstrar o ineditismo de nossa pesquisa.

1.3 Levantamento bibliográfico

Para destacar o ineditismo da pesquisa, realizamos a busca de teses e dissertações no repositório da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e no repositório da Universidade Federais do Rio Grande do Norte (UFRN).

As buscas foram realizadas no repositório da CAPES, inserindo as seguintes chaves de busca: "Rheticus", "Rhaeticus", "Rhaticus", "*Canon Doctrinae Triangulorum*". Nenhuma pesquisa relacionada, de fato, com essa temática foi encontrada.

Então, decidimos buscar por teses e dissertações na área de História da Matemática, mais relacionadas ao estudo da obra histórica de algum matemático do mesmo século ou de séculos diferentes. Inserimos a chave de busca "'Obras históricas Matemáticas" e filtramos na área de concentração "Educação Matemática". Com isso, deparamo-nos com 179 teses e dissertações, porém selecionamos apenas aquelas referentes aos textos históricos.

Notamos que nenhuma das obras estudadas nas pesquisas selecionadas são do matemático em questão, Rheticus. As pesquisas encontradas no repositório da CAPES não têm relação com o nosso personagem e com o objeto de estudo, mas também gostaríamos de destacar, pois são análises de textos históricos, ou seja, nosso objetivo de pesquisa. Sendo assim, apresentamos o quadro:

Quadro 1 - Teses e Dissertações sobre obras históricas Matemáticas na CAPES

Ano	**Título**	**Autor (A)**	**Orientador (A)**	**Pós-Graduação**
2022	Aproximações e distanciamentos entre as obras *Réflexions Sur La Métaphysique Du Calcul Infinitésimal e Théorie des Fonctions Analytiques* a partir da Análise de Conteúdo	Alailson Silva De Lira	João Cláudio Brandemberg	Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas
2020	Os “Elementos” de Euclides visitam o Ensino Fundamental: Análise de Tarefas Matemáticas pautadas na História da Matemática e Desenvolvidas no Software Geogebra'	Thais Maria Barbosa Goulart	Jorge Luís Costa	Mestrado em Educação Matemática
2018	Um Estudo do *Liber Quadratorum* (1225) De Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) e suas Potencialidades para o Ensino de Matemática	José Dos Santos Guimarães Filho	João Cláudio Brandemberg	Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas
2011	As Relações Entre a Matemática e a Astronomia no Século XVI: Tradução e Comentários da Obra *Ouranographia* de Adriaan Van Roomen	Zaqueu Vieira Oliveira	Marcos Vieira Teixeira	Mestrado em Educação Matemática
2012	Uma Análise da Parte Primeira da Obra *Sulla Risoluzione Delle Equazioni Algebriche*, de Enrico Betti.	Cesar Ricardo Peon Martins	Marcos Vieira Teixeira	Doutorado em Educação Matemática
2018	Um Estudo das Geometrias Prática e Teórica Presentes em *The Pathewaie to Knowledge* de Robert Recorde: Possíveis Diálogos'	Regina Thaise Ferreira Bento	Saddo Ag Almouloud	Doutorado em Educação Matemática
2017	Um Estudo Sobre a *Instituzioni Analitiche* de Maria Gaetana Agnese: Álgebra e Análise na Itália Setecentista	Roseli Alves de Moura	Fumikazu Saito	Doutorado em Educação Matemática
2010	Um Estudo Sobre os Conhecimentos Matemáticos Incorporados e Mobilizados na Construção e no Uso do Báculo (Cross-Staff) em *A Boke Named Tectonicon de Leonard Digges*	Ana Rebeca Miranda Castillo	Fumikazu Saito	Doutorado em Educação Matemática
2014	Leon Battista Alberti (1404 – 1472) E A Medida do Tempo em sua obra *Matemática Lúdica*	Lucas Reis Santos	Fumikazu Saito	Mestrado em Educação Matemática
2019	Potencialidades Pedagógicas do Livro *Réflexions Sur La Métaphysique Du Calcul Infinitésimal* de Lazare Carnot Para o Ensino de Cálculo Diferencial	Fabrício Santos de Sousa	Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha	Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas

Fonte: Repositório da CAPES, acesso em: 15/03/2023.

Realizamos também uma pesquisa em teses e dissertações no repositório da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) com a mesma chave inserida no catálogo de teses e dissertações da CAPES: "'Obras' históricas matemáticas", quando encontramos trabalhos em 30 páginas da pesquisa. Destacamos apenas os trabalhos que estudam obras ou textos históricos matemáticos, que destacamos no quadro a seguir:

Quadro 2 – Teses e Dissertações sobre obras históricas Matemáticas na UFRN

Ano	**Título**	**Autor (a)**	**Orientador (a)**	**Pós-Graduação**
2013	A leitura de fontes antigas e a formação de um corpo interdisciplinar de conhecimentos: um exemplo a partir do *Almagesto* de Ptolomeu	Ana Paula Pereira do Nascimento Silva	Bernadete Barbosa Morey	Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
2014	A geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750 – 1800) em atividades com o GeoGebra	José Damião Souza de Oliveira	Giselle Costa de Sousa	Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
2009	Um estudo sobre a relação entre matemática e religião na obra de Blaise Pascal	Severino Barros de Melo	John Andrew Fossa	Doutorado em Educação
2010	Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico *De revolutionibus orbium coelestium*	Maria José de Freitas Mendes	Bernadete Barbosa Morey	Doutorado em Educação
2021	Uma análise epistemológica dos trabalhos de Lazare Carnot sobre geometria de e suas potencialidades para o ensino	Francisco Djnnathan da Silva Gonçalves	Iran Abreu Mendes	Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
2017	A criatividade matemática de John Wallis *na obra Arithmetica Infinitorum*: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática	Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes	Iran Abreu Mendes	Doutorado em Educação
2011	*De solutione problematum diophanteorum per números integros*: o primeiro trabalho de Euler sobre equações diofantinas	Joice de Andrade Dantas	John Andrew Fossa	Mestrado em Educação
2010	Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e suas obras em Teoria dos Números	Maria Aparecida Roseane Ramos	John Andrew Fossa	Doutorado em Educação
2010	A obra *de Triangulis Omnimodis Libri Quinque* de Johann Müller Regiomontanus (1436 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria	Ana Carolina Costa Pereira	Bernadete Barbosa Morey	Doutorado em Educação

Fonte: Repositório da UFRN, acesso em: 15/03/2023.

Quando realizamos a busca nesse repositório, mas inserindo na barra de pesquisa a chave “Rheticus”, encontramos apenas duas pesquisas. A primeira trata-se de um TCC, cujo título é “Um estudo sobre lei dos senos, lei dos cossenos e suas aplicações” de Maia (2015) e o outro trabalho é uma dissertação que tem como título “Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino da trigonometria numa abordagem histórica” de Gomes (2011). Percebemos que nenhum dos referidos trabalhos estão relacionados com estudo de obras matemáticas históricas. Portanto, entendemos que apenas mencionam o matemático Rheticus em suas pesquisas.

Notamos que nos repositórios pesquisados os trabalhos destacados não abordam exatamente sobre a obra que investigamos, da mesma forma que não fazem referência ao nosso matemático pesquisado, assim como pesquisas em artigos, outros trabalhos examinados sobre Rheticus ou sobre sua obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551). Na barra de pesquisa do Google, poucas referências foram encontradas, principalmente em português. O que uma maioria fazia era apenas mencionar Rheticus em algum momento da pesquisa histórica figurando, assim, como um ponto de dificuldade ao elaborarmos toda a contextualização da vida e obra de Rheticus. Entretanto, encontramos uma pesquisa de Borges (2021) que aborda a investigação de Ptolomeu descrita logo a seguir.

Com as pesquisas selecionadas no repositório da UFRN, deparamo-nos com algumas em que a obra e o matemático pesquisados têm relação com o nosso trabalho. Portanto, realizamos um estudo dessas teses e dissertação a fim de obter dados ou informações que ajudassem acerca das ideias vinculadas à construção do nosso objeto de estudo e ao desenvolvimento da Trigonometria desde o século anterior ao XVI.

1.3.1 As pesquisas relacionadas ao estudo

A partir desse levantamento bibliográfico em sites específicos sobre pesquisas acadêmicas, destacamos dentre as selecionadas do repositório da UFRN aquelas relacionadas ao nosso tema e referentes à análise de obras históricas, entre as quais destacamos a dissertação de mestrado de Borges (2021) e as teses de doutorado das autoras Pereira (2010) e Mendes (2010).

Estudamos e descrevemos o desenvolvimento dessas pesquisas também para situar o autor sobre nossa temática que versa sobre a trigonometria, mais especificamente o desenvolvimento das tabelas trigonométricas. Logo, primeiro destacamos a dissertação de mestrado de Borges (2021), cujo título é “Um estudo do seno: a história até o som”.

Borges (2021) apresenta fatos históricos, principalmente no que se refere ao conceito do seno, assim como fatos teóricos ligados a este conceito, do ponto de vista geométrico e analítico. A partir disso, ela elaborou uma sequência didática com o uso do GeoGebra, relacionando as funções senoides com os sons que elas descrevem em um gráfico.

Sobre os tópicos históricos citados por Borges (2021), referem-se à criação do seno e, consequentemente, do cosseno, com a exploração geométrica das propriedades que levaram à criação da tábua (tabela) de corda de Ptolomeu, que culminou nas fórmulas trigonométricas do seno da soma, da diferença e do arco duplo. Essas tábuas se basearam em algumas proposições de Euclides e também de resultados já obtidos por Hiparco.

Dentre os tópicos teóricos e aplicados, está a função senoide e algumas contextualizações em problemas concretos contemporâneos, mais especificamente sua relação com o som, como o Sistema Massa Mola e o Pêndulo simples.

A partir da apresentação da construção da tábua de cordas de Ptolomeu, a autora sugere uma atividade didática a ser desenvolvida, na qual os alunos já devem conhecer as fórmulas de seno da soma e da diferença de ângulos, seno da metade de um ângulo e que o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar.

Após ressaltar todas as características da função seno e suas variações, além das aplicações em problemas concretos contemporâneos, a autora mostra uma sequência didática sobre as funções trigonométricas com o objetivo de que a aprendizagem desses conceitos ocorra de forma contextualizada.

A sequência não chegou a ser aplicada, portanto, a pesquisadora deixa como sugestão ao ensino, pois está associada às funções senoidais relacionadas ao som que elas representam. Para tanto, é necessário o uso do software GeoGebra.

Dessa forma, ela elabora um plano de aula para ser usado com os alunos da 2ª série do Ensino Médio em que o tempo previsto é de 8 horas. São abordados os conteúdos de função seno e cosseno, seus gráficos e suas variações, para finalizar com exercícios referentes às funções senos, incluindo as que envolvem problemas do Sistema Massa mola e pêndulo simples.

Seguindo uma ordem cronológica de obras históricas relacionadas ao nosso tema, encontramos sobre Regiomontanus estudado na tese de doutorado de Pereira (2010), cujo título é "A obra '*De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*' de Johann Muller Regiomontanus (1436 - 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da Trigonometria".

Sua tese versa sobre a temática História da Matemática, mais especificamente na análise histórica e crítica de fontes literárias, por meio da qual a autora busca responder o seguinte questionamento: "Como Johann Muller Regiomontanus aborda a trigonometria em sua obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*?*".* Para isso, a autora apresenta a descrição, a tradução e a análise de alguns aspectos desta importante obra da História da Trigonometria.

Complementando o seu objetivo geral, a autora elencou os seguintes objetivos específicos: apresentar um visão geral da História da Trigonometria, situar Regiomontanus no contexto do desenvolvimento da Trigonometria, colocar à disposição da comunidade de Educadores e Historiadores brasileiros o texto De Triangulis Omnimodis Libri *Quinque* , traduzido para o português como os Cinco Livros de Todos os Tipos de Triângulos e destacar as contribuições de Regiomontanus e de sua obra De Triangulis para o desenvolvimento da Trigonometria.

Sobre a tradução, foi realizada a partir de uma versão do livro *Regiomontanus on Triangles* de Barnabas Hughes de 1967. Nele, encontra-se o trabalho original em latim e uma tradução em inglês, em que a autora revela que utilizou a maior parte a versão que está em inglês, porém algumas dúvidas sobre enunciados, figuras e demonstrações foram feitas com base no original em latim. A obra está dividida em 5 livros, sendo que os dois primeiros abordam a trigonometria plana e os três últimos relatam sobre a trigonometria esférica, as traduções desses livros encontram-se nos anexos da tese.

A pesquisadora relata que o propósito do estudo é abrir caminhos para o estudo com fontes primárias em História da Trigonometria, logo buscou proporcionar uma visualização da matemática produzida em uma dada obra, que se constituiu como um marco no desenvolvimento da Trigonometria, a partir do século XV.

Suas análises sobre a obra revelam que Regiomontanus percorre os cálculos básicos sobre quantidade, assim como oferece um estudo completo sobre triângulos, sejam eles retângulos, isósceles ou quaisquer, além de estudos envolvendo as teorias dos triângulos esféricos, que define a função seno e enuncia a lei dos senos, assim como fornece um grande número de teoremas originais como a fórmula trigonométrica para a área de um triângulo, além de usar a álgebra para resolver problemas geométricos e, principalmente, mostra o primeiro teorema prático para a lei dos Cossenos na Trigonometria Esférica.

Conclui que essa obra teve grande importância para os estudos da época e que influenciou os matemáticos e astrônomos Nicolau Copérnico (1473 - 1543) e Georg Joachim Rheticus (1514 - 1574). Ambos tiveram em mãos alguns trabalhos de Regiomontanus.

Seguindo a busca por pesquisas relacionadas ao nosso tema, temos a tese de doutorado de Mendes (2010), cujo título e subtítulo é "Possibilidades de Exploração da História da Ciência na Formação do Professor de Matemática: Mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico *De Revolutionibus Orbium Coelestium*". Versa sobre o eixo temático História da matemática para a formação de professores.

Sua motivação pelo estudo surgiu de uma preocupação da autora com o ensino atual, pois demonstra um certo "fracasso" dos alunos com relação à matemática, como mostram os resultados de exames nacionais existentes e os conhecimentos que o professor deve ter para transformar o aluno no agente ativo de sua própria aprendizagem. Acredita-se que um estudo histórico de determinado assunto seria importante para esse professor em formação e em exercício, pois proporciona uma visão mais ampla de saberes necessários para o exercício da prática pedagógica.

Sobre o ensino de trigonometria, a experiência profissional da autora permitiu observar que a geometria e a trigonometria são os conteúdos que, aparentemente, os professores têm mais dificuldade em lecionar. Talvez pelo pouco conhecimento que têm sobre o assunto ao ingressar no curso de graduação, consequentemente isso pode se repetir em relação aos seus futuros alunos. Na disciplina História da Trigonometria, do programa de doutorado, que a autora frequentou, vislumbrou uma maneira de tentar minimizar tal problema.

A partir de um seminário que deveria ser apresentado na disciplina, deparou-se com o livro de Copérnico *De revolutionibus Orbium Coelestium*, quando encontrou a tabela trigonométrica que Copérnico desenvolveu. Incitou a formular hipóteses como "a possibilidade de utilização da História da Matemática no ensino de Trigonometria em um curso de formação inicial de professores de Matemática". (MENDES, 2010, p. 21).

Para o seu referencial teórico, realiza um estudo de tópicos relacionados com a história da matemática e da ciência para a formação do professor, que buscou informações nos trabalhos de Miguel e Miorim (2004), Brito, Neves e Martins (2004) e Radford (2000); e saberes docentes na formação do professor de matemática baseando-se em Gauthier (1998), Schulman (1986), Fioretini, Souza e Melo (1998), Fiorentini e Nacarato (2005) e Tardif (2006), Imbernón (1994), dentre outros.

A partir das leituras realizadas, a autora notou que o texto histórico citado pode agregar saberes como a Astronomia, a Geometria, a Trigonometria, a Geografia, a História da formação do professor, que delineou a seguinte questão norteadora para sua tese de doutorado: "De que maneira uma obra clássica na história da ciência, como "*De revolutionibus orbium coelestium"* de Nicolau Copérnico, pode contribuir com a formação mais ampla de um professor de matemática?"

Objetivando "analisar as implicações que o conhecimento da obra *De revolutionibus orbium coelestium,* de Nicolau Copérnico, pode trazer para a melhoria da formação de professores" (MENDES, 2010, p. 24).

Para o desenvolvimento de sua pesquisa, a autora utilizou a tradução da obra *De revolutionibus orbium coelestium* da edição da Oficina Henricpetrina 1566, Basiléia de Nicolau Copérnico, feita por A. Dias Gomes e Gabriel Domingues, segunda edição da fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1996.

Buscando alcançar o objetivo e responder à questão norteadora, a autora utilizou a pesquisa qualitativa, realizando uma investigação teórica do livro 1 do *De revolutionibus orbium coelestium*, no manuscrito *Commentariolus,* de Copérnico, e aplicação de uma atividade com discentes do curso de graduação em Matemática da

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que consiste na construção de uma tabela de senos seguindo o esquema usado em *De revolutionibus*, a fim de coletar as manifestações dos professores em formação, acerca dos saberes adquiridos com tal abordagem.

A atividade foi proposta em um minicurso que contou com a participação de 38 pessoas, bem como 12 discentes do Curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Desenvolveu-se em 8h/aula, sendo que ao final foi solicitado aos alunos que se manifestassem por escrito e anonimamente mencionando se a atividade havia contribuído com a sua formação como futuro professor. Foram desenvolvidas 8 atividades, ampliadas e melhoradas, com discentes do curso que estavam participando da disciplina de didática da matemática, em que a autora ficou responsável. Os instrumentos utilizados para a realização das atividades foram régua ou esquadro, o compasso e a calculadora.

Buscou-se com essas atividades identificar os saberes adquiridos pelos futuros docentes e analisar a implicação desse saber em sua formação, tendo como base o referencial teórico destacado.

Além da análise da obra e das atividades propostas, a pesquisadora relata sobre a vida e obra do matemático Copérnico, a fim de esclarecer sobre o contexto histórico vivido por ele, os problemas sociais e científicos que aconteciam na época. Esses fatos históricos são importantes destacar, pois implica os motivos e as influências que levaram os matemáticos a desenvolver suas respectivas obras.

A construção das tabelas de senos da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium seguiu o que era feito até então, a relação de um raio com uma corda em um círculo, sendo o raio utilizado igual a 100.000 unidades.

A partir do entendimento sobre a lógica que Copérnico utilizou para a construção do seu objeto de estudo, a autora elaborou atividades baseadas nessas ideias e aplicou com discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Por intermédio dessa atividade, a pesquisadora conseguiu abordar conceitos geométricos importantes como ângulos no círculo, mediatriz, bissetriz, razão áurea e média geométrica, e conceitos trigonométricos como o significado de seno e cosseno e das relações entre esses elementos, os cálculos aritméticos, suas aproximações e os procedimentos algébricos de fatoração e simplificação. Ela relata que foi importante perceber, por meio dessa experiência, como os sujeitos da pesquisa foram capazes de relacionar esses conceitos.

Com a experiência adquirida na observação do processo construção da tabela trigonométrica por parte dos sujeitos, a pesquisadora comprovou a possibilidade da formação de professores de matemática na direção das dimensões de saberes denominadas de: matemática, psicopedagógica, diversidade cultural e pratica. Do mesmo modo, forneceu elementos que permitem encontrar implicações para a formação de um professor de matemática com uma ampla visão de conhecimento.

A autora conclui que o estudo histórico possibilita que o professor não apenas entenda a maneira de ensinar determinado assunto, “mas também na construção de significados matemáticos e na sustentação de suas novas concepções sobre a Matemática mudando suas atitudes e crenças” (Mendes, 2010, p.138).

Ao buscarmos informações sobre Rheticus na tese abordada acima, já que é apresentada a história da vida e obra do matemático Copérnico, não encontramos qualquer menção a ele, mesmo sendo o único aluno de Copérnico e o principal incentivador da publicação do *De Revolutionibus Orbium Coelestium.* O que queremos manifestar é o fato de ele não ter tanto reconhecimento em comparação com outros matemáticos que também foram importantes para o desenvolvimento das suas respectivas áreas e para a história da humanidade. Por esse motivo, abordamos no capítulo seguinte a história da vida e obra de Rheticus, destacando a sua importância para Copérnico e para o desenvolvimento da trigonometria, mais especificamente das tabelas trigonométricas.

2 SOBRE A VIDA E OBRA DE RHETICUS

Dedicamos este capítulo para abordarmos aspectos sobre a trajetória pessoal e profissional do matemático Georg Joachim Rheticus, como também a construção de sua obra *Canon Doctrinae Triangulorum (1551)*, utilizando uma ferramenta disponibilizada por Chaquiam (2022). Como já mencionado na revisão teórica, trata-se de um diagrama metodológico que pode auxiliar na elaboração de um texto histórico relacionando personagens/matemáticos e temas/conteúdos ministrados em sala de aula.

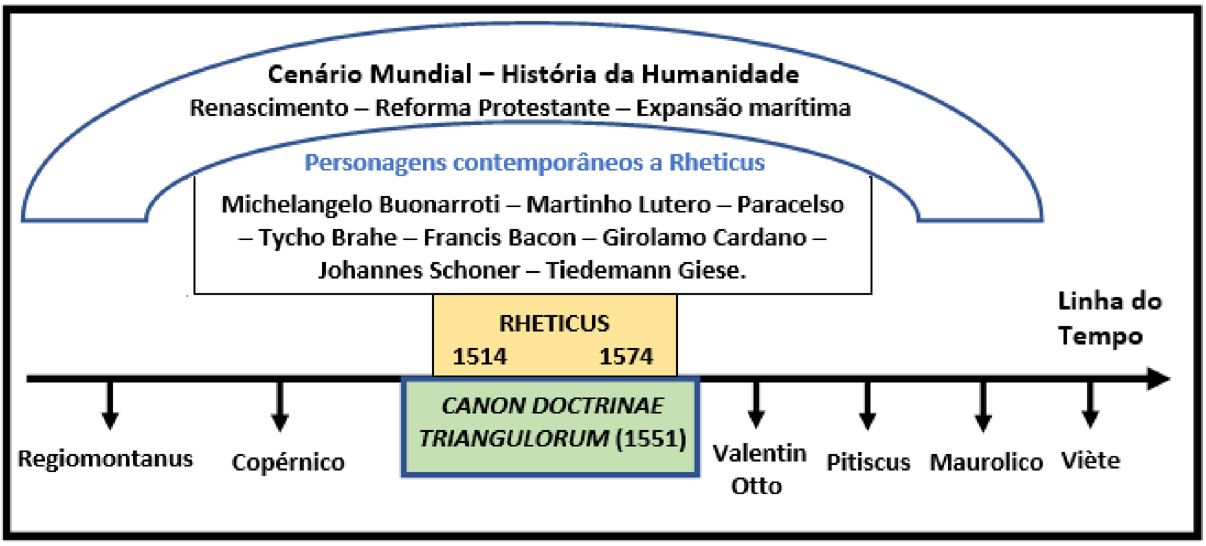
O diagrama de Chaquiam (2022) é composto por quatro contextos: O Histórico, Social e Geopolítico; o Intermediário Complementar; O Epistemológico, Científico e Técnico e o Didático-Pedagógico. Aqui, não discutiremos o contexto didático-pedagógico.

Ressalta-se a construção de uma história baseada no cenário mundial em que o matemático ou tema está inserido; apresentação dos personagens contemporâneos ao principal; um relato sobre o matemático principal; a evolução do tema e os respectivos personagens que contribuíram para essa evolução; e apresentação dos pontos de vista atual de pesquisadores sobre o tema ou personagem principal. Para esta pesquisa, realizamos algumas adaptações do diagrama, pois, embora as finalidades de diagrama sejam outras, para esta pesquisa ele se torna um balizador.

Utilizamos o diagrama disponibilizado por Chaquiam (2022), pois acreditamos ser um bom instrumento para organizar e delimitar as informações referentes ao surgimento da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) de Rheticus, na qual decidimos pesquisar aspectos sobre a trajetória pessoal e profissional do matemático que o tenham influenciado para o desenvolvimento do tema, no que se refere ao contexto Histórico, social e Geopolítico; o Intermediário Complementar e o Epistemológico.

Exibimos o diagrama em questão, adaptado à evolução do *Canon* de Rheticus, que consiste em uma linha do tempo que versa sobre o tema central, destacando o cenário mundial, os personagens contemporâneos a Rheticus (ressaltamos que citamos aqueles importantes para o cenário mundial e aqueles que influenciaram diretamente as ideias de Rheticus sobre o tema principal) e os relacionados à evolução do tema geral, mas também próximos a Rheticus.

Figura 1 - Diagrama metodológico – *Canon Doctrinae Triangulorum*



Fonte: Elaborado pela autora a partir de Chaquiam (2022).

O diagrama mostra uma linha do tempo que versa sobre o tema central, relacionado ao *Canon,* destacando o personagem principal e autor da obra, Rheticus.

Acima da linha do tempo, destacamos os personagens contemporâneos a Rheticus e o cenário mundial, com os principais fatos históricos que aconteceram no período do nosso recorte, mas especificamente o século XVI.

Abaixo da linha do tempo, relatamos sobre os personagens que contribuíram com o desenvolvimento do tema central, principalmente aqueles que influenciaram Rheticus e os influenciados, segundo a nossa hipótese, por Rheticus. Como o *Canon Doctrinae Triangulorum* se trata de uma tabela trigonométrica, apontaremos aspectos históricos da evolução das tabelas trigonométricas.

2.1 Reconstruindo Cenários

No decorrer dos anos, personagens importantes para a história da humanidade surgiram e contribuiram com o desenvolvimento político, religioso, econômico e científico do conhecimento matemático. O Século XVI foi um marco para tais desenvolvimentos, pois, com o avanço da expansão marítma, sentiu-se a necessidade de buscar por mais informações e conhecimentos, favorecendo um processo do pensamento crítico.

Nos séculos que antecederam o XVI, mais especificamente a alta idade média e baixa idade média, os modos de se obter conhecimento ocorreram por meio das leituras de livros autorizados pela igreja católica, um acervo limitado que se encontrava em bibliotecas da época. Com o início do Renascimento, nasceu a imprensa, mais especificamente no século XV, o que garantiu uma maior produção de livros e ampliou os meios de informação. Enfatizamos dois fatos históricos que se destacaram em meados do século XVI: o Renascimento e a reforma religiosa conhecida por Reforma Protestante.

O Renascimento, marcado pela transição do feudalismo para o capitalismo, deu início a um movimento que surgiu a partir do desenvolvimento da burguesia, começando na Itália, depois se espalhou por toda a Europa ocidental, visto que os "artistas" renascentistas acabavam por expressar, em suas obras, a visão de mundo da burguesia.

A reforma religiosa iniciou no século XVI, a partir do movimento renascentista que defendia a ideia do homem como centro de todas as coisas, uma maneira de quebrar a grande influência religiosa.

Em meio à reforma religiosa, a capacidade de questionar o mundo a partir do pensamento renascentista motivou personagens importantes que contribuiram com o desenvolvimento científico, dentre os quais destacamos o nosso personagem principal: Georg Joaquim Rheticus (1514 - 1574), que foi um matemático, astrônomo, cartógrafo, fabricante de instrumentos de navegação, médico e professor. Rheticus foi o primeiro e único aluno de Nicolau Copérnico (1473 – 1543), que ficou ciente das teorias e sentiu necessidade de investigá-las.

De acordo com Danielson (2006, p. 58), não há indícios de como foram os primeiros encontros entre Rheticus e Copérnico, mas pode-se deduzir que Rheticus foi bem recebido, pois no préfácio do trabalho *Opus palatinum de Triangulis* (1596) de Rheticus e finalizado pelo seu aluno Valentin Otto (1550 – 1603), consta que Otto foi recebido por Rheticus com muito carinho, assim como havia sido feito a ele tantos anos antes em Frauenburg[3].

Um grande acontecimento para aquela época foi a publicação do livro *Revolutionibus Orbium Coelestium* (Sobre as revoluções das esferas celestes) de

[3] Em Frauemburg, Rheticus foi recebido por Copérnico como discípulo.

Copérnico, em 1543, que traz as ideias do heliocentrismo, um modelo cosmológico em que o sol permanece estacionado no centro do universo orbitado por planetas e demais corpos celestiais. Ou seja, pondo o sol como o centro do universo e não mais a terra, uma ideia defendida pela igreja católica.

A publicação *de Revolutionibus* contou com grande ajuda de Rheticus, que incentivou e enconrajou Copérnico a compartilhar suas ideias, além de cuidar de boa parte do processo de publicação. Inicialmente, Copérnico se mostrava indeciso em compartilhar seu trabalho com o mundo. Rheticus sugeriu e logo decidiu publicar a obra *Narratio prima* (1540), considerada uma prévia para o famoso trabalho de Copérnico. Importante destacar que, conforme Danielson (2006, p. 59), Copérnico, assim como Rheticus, em suas primeiras publicações, sempre se apegou a Ptolomeu com grande respeito, uma atitude que parece ter sido genuína, bem como política.

Para Danielson (2006, p. 7), Tiedemann Giese (1480 – 1550), um grande amigo e mentor de Copérnico, considerou que Rheticus era "principal empreendedor" deste drama editorial e que, possivelmente, essa história se apropriava do enredo: “sem Rheticus, sem Copérnico!”.

Em 1542, Copérnico sofreu um derrame quando sua obra ainda estava em processo de publicação e Rheticus precisou assumir seu cargo de professor na Universidade de Leipzig, delegando a supervisão da impressão a outra pessoa, enquanto Copérnico ficou aos cuidados de Georg Donner, a quem, mais tarde, Rheticus dedicaria o primeiro exemplar da obra de Copérnico, publicado em 1543 (DANIELSON, 2006).

Após a morte de seu grande professor, Rheticus continuou a se dedicar a matemática, mais especificamente a trigonometria. Com base nas tabelas de Regiomontanus, escreveu a obra *Canon Doutrinae Triangulorum* (1551) que, nas palavras de Danielson (2006, p. 9), revela:

> *Canon Doutrinae Triangulorum* (Canon da Ciência dos Triângulos). Havia o obelisco de marca registrada de Rheticus simbolizando a antiga observação astronômica. Este panfleto de vinte e quatro páginas impresso em Leipzig em 1551 continha as primeiras tabelas de trigonometria de seis funções já publicadas, seguido de um diálogo entre um professor semi ficcional (Philomathes "amante da matemática" ou "amante da aprendizagem", um alter ego do próprio Rheticus) e um estranho indaganteante (Hospes). Philomathes proclamou que esta nova ciência dos triângulos era útil e agradável. Ele anunciou, além disso, que o autor *do Canon* era um homem entregando "frutas dos jardins mais deliciosos de Copérnico" (DANIELSON, 2006, p. 9, tradução nossa).

O *Canon* contribuiu com a sua última obra *Opus Palatinum* (1596), mas Rheticus faleceu antes de concluir, delegando este trabalho ao seu aluno Valentin Otto, que finalizou 20 anos depois.

Em nossa busca por biografias sobre Rheticus e suas obras, inicialmente, pouco foi encontrado. Observamos que não se conhece muito sobre Rheticus, pois não teve grande vizibilidade. Tal fato pode ser confirmado quando Danielson (2006, p. 8) relata que Copérnico tem seu registro de matrícula emoldurado “Nicolaus Nicolai” de Torun no museu de *Collegium Maius* da Universidade, mas o autor não encontrou tais monumentos para Rheticus. Acreditamos que isso se deve ao fato relatado por Danielson (2006, p. 70), que Rheticus passou grande parte de sua vida procurando amor, beleza e pertencimento. Mas, o que ele buscava acima de tudo era uma audiência para com Copérnico e suas ideias. De fato, o próprio nome de Rheticus não apareceu em nenhum lugar no título extenso da pequena obra que deveria ter o tornado famoso. No próximo subtópico, apresentamos um panorama do secúlo XVI, para enterdemos melhor sobre os acontecimentos e necessidades da época.

2.2 Panorama sobre o século XVI

O século XVI foi um grande marco na evolução da humanidade, pois ocorreram mudanças significativas de cunho político, religioso e econômico. Marcado por movimentos importantes como o Renascimento, Reforma protestante e Expansão marítima.

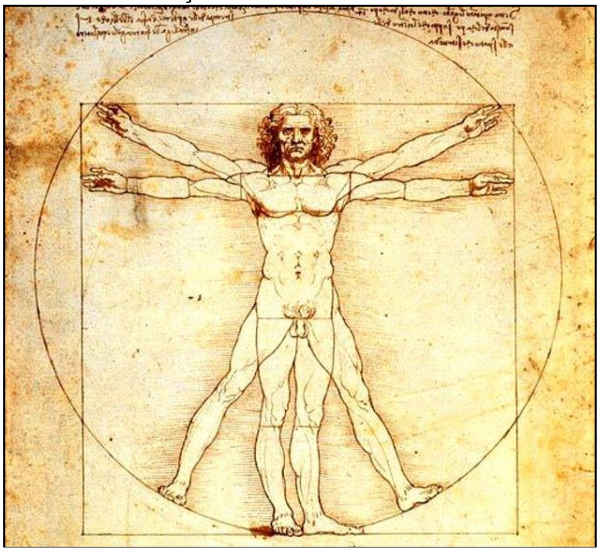
2.2.1 Renascimento

O Renascimento foi um movimento artístico-cultural que ocorreu na Europa, possivelmente entre meados do século XIV e final do século XVI. Caracterizado pela transição do feudalismo para o capitalismo, tendo como principal causa o desenvolvimento econômico e a formação de uma nova visão de mundo.

O movimento que surgiu a partir do desenvolvimento da burguesia, iniciou-se na Itália e depois se espalhou por toda a Europa ocidental. Os artistas renascentistas acabavam por expressar, em suas obras, a visão de mundo da burguesia.

O Renascimento procurou fazer um resgate da cultura da antiguidade clássica, ao mesmo tempo que buscava criticar a influência religiosa sobre a cultura e sociedade. Abriu espaço para a valorização da racionalidade e individualismo, colocando o homem como o centro das suas decisões e da sua história. Nasceu a principal corrente de pensamento desse período: o humanismo.

Ilustração 1 - Homem Vitruviano



Fonte: https://www.todamateria.com.br/vida-e-obra-de-leonardo-da-vinci/. Acesso em: 10/03/2021.

O Humanismo é a filosofia do Renascimento que surgiu em oposição à filosofia escolástica do fim da idade média, valorizando o saber crítico sobre o homem.

Destaca-se como Renascimento científico o período de desenvolvimento da ciência durante os séculos XV e XVI. Nesse período, a ciência era pautada no princípio da observação e experimentação, um campo que mais tarde ficou conhecido como Ciência Moderna.

Com o movimento Renascentista, o pensamento crítico se tornou indispensável, promovendo o desenvolvimento político, econômico e, principalmente, o método científico. Foi o período de maior crescimento da ciência de toda a história, em que ocorreram grandes avanços nas áreas de Astronomia, Medicina, Matemática, Física, Química e Biologia.

Essa evolução no campo da ciência e informação influenciou questionamentos incisivos sobre a igreja católica, que fundamentou uma reforma que transformou a religiosidade da época. Sobre essa reforma abordaremos a seguir.

2.2.2 Reforma Protestante

No período de grandes transformações culturais, políticas, sociais e econômicas na Europa foi que ocorreu a Reforma Protestante. Esse processo de reforma religiosa iniciou no século XVI, a partir do movimento renascentista que defendia a ideia do homem como cento de todas as coisas, uma maneira de quebrar a grande influência religiosa.

Na idade média, o conhecimento era obtido por meio da leitura de livros autorizados pela Igreja católica, um acervo limitado que se encontrava em bibliotecas da época. No Renascimento, surgiu a imprensa, mais especificadamente no século XV, que garantiu a maior produção de livros e ampliou os meios de informação.

O pensamento crítico tomou espaço no momento de ampliação da informação, fazendo com que alguns aspectos da igreja católica fossem questionados como a venda de indulgência. Trata-se de pagamentos em troca de perdão dos pecados cometidos pelos fiéis; e o abuso do poder, como a venda de cargos eclesiásticos e o uso da autoridade para garantir privilégios.

Todas as situações descritas acima incentivaram uma grande personagem desse período chamado Martinho Lutero (monge, membro do clero e professor de teologia) que, em 1517, deu início a um movimento reformista conhecido por Reforma Protestante. Sua insatisfação dava-se porque a ideia que defendia era a de gratuidade da fé, ou seja, ele não acreditava em salvação em troca de pagamento, pois só a fé garantia a salvação.

A reforma que Lutero iniciou não visava à separação da igreja, embora acreditemos que a Reforma figurou como um dos movimentos de rompimento com a tradição, mas trata-se de uma reformulação com objetivo de renovar a fé e a religiosidade.

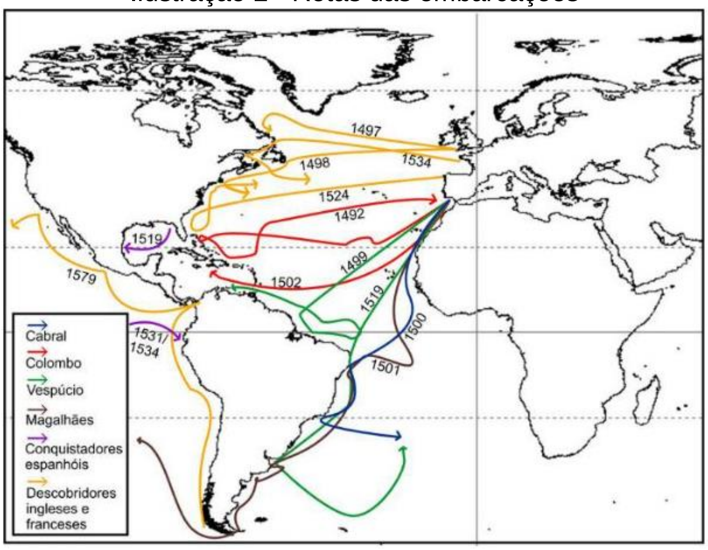
Mesmo diante aos movimentos e reformas, a igreja exerce um grande domínio há anos, pois quem tinha o apoio do papa garantia uma grande influência. A questão toda é que o século XVI foi de grande desenvolvimento e marcou ramos da sociedade como a política, a religião e a economia. Esses avanços também aconteceram pela expansão marítima, sobre a qual discorreremos no próximo tópico.

2.2.3 Expansão marítima

A expansão marítima compreende o período do século XV e XVI, quando inúmeras expedições das grandes potências europeias partiram para explorar o oceano que as cercavam.

O renascimento foi de grande importância para a revolução científica, sendo que se destaca o desenvolvimento da astronomia e trigonometria. Com os novos saberes científicos, adotou-se que a terra era redonda e surgiu a teoria heliocêntrica do sistema solar, proposta pelo matemático Nicolau Copérnico. Tais ocorrências serviram como motivação para exploração de rotas oceânicas alternativas com o objetivo de retomar ao comércio de especiarias e encontrar novas fontes de metais preciosos.

Ilustração 2 - Rotas das embarcações



Fonte: https://www.todamateria.com.br/expansao-maritima-europeia/. Acesso em: 20/03/2021.

O mar mediterrâneo era monopolizado por Gênova e Veneza, mais um motivo para ir em busca de novas rotas. Portugal e Espanha foram países da Europa que se destacaram na expansão marítima, devido à sua favorável localização geográfica. Como resultado, descobriram um novo caminho para as índias e outros continentes que se tornaram colônias imperiais. Lisboa e Sevilha tornaram-se cidades melhores economicamente, superando as cidades italianas que há muito tempo detinham essa preeminência.

Tratando-se de questões religiosas, com a perda de muitos fiéis em razão da reforma protestante, a expansão marítima proporcionou à igreja católica o desbravamento de novos territórios a fim de catequizar populações nativas e, como consequência, provocar um aumento de fiéis. Essa missão foi dada aos jesuítas.

As grandes navegações favoreceram o sistema capitalista. Na sua primeira fase, o Mercantilismo. Com essa nova política econômica, o sucesso estava atrelado a quantidades de metais preciosos, como o ouro e a prata, assim como favoreceu o desenvolvimento da ciência, pois necessitavam de instrumento de navegação, como bússola e mapas.

Como podemos observar, os fatos históricos que envolveram o século XVI influenciaram diretamente no desenvolvimento da ciência, principalmente a astronomia e a matemática.

Essas ideias reformistas influenciaram Rheticus no modo de pensar, pois, segundo Danielson (2006, p. 14-15), as escolas secundárias eram instituições renascentistas únicas, criadas para ensinar aos meninos, não apenas aqueles que eram destinados ao sacerdócio, o conhecimento da língua latina como base para o domínio das artes liberais, começando pelo *Trivium*: gramática, retórica e lógica. As demais artes liberais, o *quadrivium*: aritmética, geometria, música e astronomia, poderiam aprender na universidade. Rheticus desenvolveu um gosto humanista pela liberdade que fluía dessa visão radicalmente integrada dos ramos do aprendizado.

A educação renascentista contagiou Rheticus que abraçou a reforma iniciada por Martinho Lutero, no que se refere à tradução e reinterpretação de textos antigos, que contribuiu para a produção da bíblia de Lutero, como também nutriu um aguçado senso de descoberta por meio da leitura. A liberdade de ler não apenas a bíblia, mas também a natureza, e reinterpretar ambas por si mesmo, era sustentada por uma das doutrinas mais conhecidas de Lutero: “o sacerdócio dos santos” (DANIELSON, 2006, p. 20).

Danielson (2006, p. 22) salienta que outras duas práticas que Lutero trouxe também ajudaram a enriquecer a história de Rheticus e Copérnico, que foi a música e o casamento, pois Lutero encorajou o clero a se casar e os membros da congregação a cantar. A música provaria ser cosmicamente relevante para o copernicanismo, visto que oferecia uma imagem de ordem e beleza dentro de um sistema posto em movimento exuberante. Para o subtópico a seguir, apresentaremos a história da vida do matemático em questão, Georg Joachim Rheticus.

2.3 Os contemporâneos a Rheticus

Chaquiam (2022, p.12) sugere que os personagens contemporâneos sejam das mais diversas áreas de conhecimento, para que tenhamos uma melhor localização em tempo e espaço, assim como proporcione uma visão geral das diferentes áreas.

A respeito de esses personagens contemporâneos, para Chaquiam (2022, p. 12), devemos destacar sobre um contexto intermediário complementar, seus traços biográficos e suas respectivas contribuições, que podem ser, ou não, na mesma área do personagem evidenciado.

Relacionamos, portanto, personagens que não têm relação com a obra Canon (1551) com personagens que estão envolvidos de certa forma com a construção da obra. Desse modo, destacamos os personagens contemporâneos a Rheticus o Michelangelo Buonarroti (1475 – 1564), Johannes Schoner (1477 – 1547), Tiedemann Giese (1480 – 1550), Martinho Lutero (1483 – 1543), Paracelso (1493 – 1541), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Tycho Brahe (1546 – 1601), Francis Bacon (1561 – 1626).

2.3.1 Michelangelo Buonarroti (1475 – 1564)

Michelangelo Bounarroti nasceu em Caprese, Itália, em 1575. Filho de Lodovico Bounarroti e Francesca, que eram descendentes de família de ascendência aristotélicas.

Michelangelo, na escola, só se interessava em desenhar, contrariando sua família que desprezava a profissão do artista. Mas, por sua insistência, acabou vencendo e aos 13 anos ingressou na oficina de Domenico Ghirlandaio, com quem aprendeu as técnicas de afresco e painel.

Descobriu sua vocação para escultura e, em 1489, começou a estudar na escola de escultura de Lourenço Medici. Hospedado no palácio de Lourenço de Medici e convivendo com a elite nobre intelectualizada, acabou empolgado com a ideia do Renascimento Italiano. Em 1492, conclui sua primeira escultura: Madona da Escada.

Michelangelo concluiu muitos trabalhos importantes, principalmente a pedido de Papas, dentre seus principais trabalhos de escultura e pintura estão: a escultura Baco, a obra Pietà, a escultura o colossal Davi, a escultura Mausoléu de Júlio II, a pintura a Abóbada da Capela Sistina, na catedral de São Pedro, no Vaticano; a pintura o Juízo Final, e entre outros.

Em 1534, Michelangelo foi nomeado pelo Papa Paulo III, arquiteto, escultor e pintor oficial do Vaticano, onde fixou residência até o dia de sua morte. Um dos maiores representantes das artes plásticas do período faleceu em 1564, em Roma.

2.3.2 Johannes Schoner (1477 – 1547)

Johannes Schoner nasceu em Karlstadt, na Alemanha, em 1477. Dedicou-se aos estudos em Teologia, na Universidade de Erfurt, e foi ordenado sacerdote em 1500, aos 23 anos.

O seu grande interesse era quase exclusivamente acadêmico, sendo que se especializou em várias disciplinas como: Geografia, Astronomia, Astrologia, Matemática e fabricação de instrumentos científicos.

Em 1525, Schoner mudou-se para Nuremberg e foi nomeado professor de matemática por Philip Melanchthon, braço direito de Lutero, quando se interessou pela nova religião de Lutero e se converteu ao protestantismo.

Schoner direcionava muito de seus trabalhos à área de Astronomia e da Astrologia. Publicou seu *Aequatorium astronomicum*, inclusive, que se tratava de representar os movimentos dos planetas por meio de discos móveis, além da publicação de globos, mapas e livros astronômicos.

Ele tinha uma grande admiração pelos trabalhos desenvolvidos por Regiomontanus. Por intermédio de parceria firmada com o renomado impressor Johannes Petrius, publicou suas edições dos trabalhos de Regiomontanus e de suas tábuas Alfonsinas.

Johannes Schoner faleceu em 1547. Foi um renomado matemático alemão, um astrônomo e astrólogo, cartógrafo, fabricante de instrumentos científicos e editor de obras astrológicas. Schoner pode ser mais lembrado por ser o personagem que encorajou Georg Joachim Rheticus a visitar Nicolau Copérnico em Frauenburg. Eventualmente, Rheticus escolheria a imprensa de Petreius para a publicação do *De Revolutionibus* de Copérnico.

2.3.3 Tiedemann Giese (1480 – 1550)

Tiedemann Giese nasceu em Danzig, na Polônia, em 1480. Filho de Albrecht Giese e irmão de Georg Geise, que era o comerciante da Liga Hanseática. Tiedemann Giese se tornou Bispo de Culm, e mais tarde Príncipe-Bispo de Warmia.

Geise, aos 24 anos, se tornou padre na igreja Católica de São Pedro e São Paulo. Vale ressaltar que ele era amigo íntimo de Nicolau Copérnico, aparentemente a família de Giese e a família de Copérnico eram parentes.

Foi coautor de Copérnico em uma carta enviada ao rei Polonês Sigismundo I, em 1516, pedindo a proteção do rei da Prússia contra os Cavaleiros Teutônicos. Entre os seus trabalhos, o mais conhecido é *Centum et decem assertiones*, *quas auctor earum Flosculos appellavit de homine interiore et exteriore* (Cento e dez afirmações, que o autor chamou de Flosculi, a respeito do homem interior e exterior). Trata-se de uma polêmica com o Proponente de Lutero, Johann Briesmann. A maioria de suas outras obras foram perdidas, incluindo uma sobre Aristóteles.

Geise morreu em Heilsbeg, em 1550, 7 anos após que seu amigo Copérnico faleceu. Foi sepultado ao lado de Copérnico na catedral de Frauenburg.

2.3.4 Martinho Lutero (1483 – 1543)

Martinho Lutero nasceu em 1483, na cidade de Eisleben, Alemanha. Sua criação se baseou em um ambiente religioso e rígido. Ingressou, em 1501, na Universidade de Erfurt, onde estudou direito. Em 1505, ele abandonou o direito e decidiu entrar no Mosteiro Agostiniano de Erfurt.

Em 1507, Lutero foi ordenado sacerdote e prosseguiu sua formação na Universidade de Wittenberg para estudar teologia. Após sua formação, tornou-se professor de teologia na Universidade de Wittenberg, obtendo seu título de doutor em teologia em 1512, quando seguiu lecionando na Universidade.

Um ano antes de seu doutoramento, Lutero visitou Roma, a sede da Santa Sé, e ficou chocado por conta da falta de espiritualidade e da corrupção presente entre os religiosos. Nesse período, Lutero realizava estudos da bíblia em grego e latim, além de ministrar diversos cursos sobre ensinamentos bíblicos na Universidade de Wittenberg. Todo seu conhecimento só reforçou a doutrina que passou a defender sobre “a justificação pela fé”.

Passou a questionar certas atitudes da igreja, principalmente a cobrança de indulgência, o pagamento em troca de perdão pelo pecado, pois acreditava na ideia de que a salvação acontece em razão da fé. Diante do exposto, Lutero preparou uma série de argumentos e críticas que se tornaram conhecidas como as 95 teses que ele pregou em frente da igreja de Wittenberg. Muitos concordavam com a doutrina de Lutero, o que deu início a reforma protestante e ao surgimento das primeiras igrejas luteranas.

Seu objetivo não era romper com a igreja, porém sua reforma ganhou força devido ao surgimento da imprensa, que disseminou o conteúdo de suas 95 teses por toda a Europa. O papa Leão X promulgou uma bula em que dava sessenta dias para uma retratação. Lutero queimou a bula publicamente e, consequentemente, foi excomungado. Para que todos tivessem acesso às escrituras, Martinho Lutero traduziu a bíblia do latim para o alemão.

Lutero foi ajudado pelo seu amigo Felipe Melanchton na formulação de suas doutrinas, o que revolucionou a sociedade da época e abriu espaço para novas políticas. Martinho Lutero viveu até seus 62 anos. Seu ano de falecimento foi em 1546.

2.3.5 Paracelso (1493 – 1541)

Philippus Aureolus Theophrastus Bombast von Hohenheim, mais conhecido como Paracelso, adotou o nome Paracelso que significa superior a Celso, um famoso médico romano do século I. Nasceu em 1493, em Einseideln, na Áustria.

Formou-se em medicina em Viena e, em 1527, foi convidado a ocupar uma cadeira no curso de medicina. Dedicou-se a pesquisar a natureza dos minerais, pois acreditava que o mercúrio, o sal e o enxofre são elementos principais do nosso corpo e que a predominância de alguns desses minerais poderia causar alguma enfermidade, seguindo as lições de alquimistas. Esse pensamento era contrário ao que se pensava na época.

Quando foi afastado do cargo que ocupava, decidiu viajar pela Europa, estudando e divulgando suas teorias. De suas observações surgiram métodos inovadores, como a cura da sífilis com doses de mercúrio.

Paracelso descobriu a ideia de que a doença dos mineiros era silicone e não castigo de Deus. Em 1536, publicou a obra “Grande Tratado de Cirurgia”, o que lhe trouxe fama e riqueza. Mas como era perseguido por suas ideias inovadoras na área de medicina, precisou se refugiar em Salzburg com a proteção do arcebispo Ernst, até seu falecimento em 1541.

2.3.6 Girolamo Cardano (1501 – 1576)

Girolamo Cardano nasceu em Paiva, Itália, em 1501. Filho do advogado e matemático Fazio Cardano, seu pai chegou a ser consultado por Leonardo da Vinci sobre um problema de Geometria.

Cardano iniciou seus estudos em matemática com o Pai e, posteriormente, ingressou na Universidade de Paiva, em Roma, para estudar medicina e finalizou sua formação em 1525.

Além de seus estudos em medicina, Cardano contribuiu com as áreas de Matemática, Física, Filosofia, Religião e Música. O seu trabalho mais conhecido é *Ars Magna*, publicado em 1545. Cardano percebeu que a raiz quadrada de um número negativo não é um número positivo e nem negativo, foi então que introduziu os números complexos para o mundo. No mesmo trabalho, apresentava uma variedade de métodos para resolver equações polinomiais.

Cardano, com o seu hábito de jogar, formulou as primeiras regras da Teoria e Probabilidade, publicadas no livro cujo título é *Liber de Ludo aleae* (Livro sobre jogos de azar). Marinho (2021) ressalta que começou o processo de escrita em 1526, sendo concluído possivelmente em 1563 e publicado um século depois, em 1663.

Cardano foi o primeiro matemático a introduzir as ideias da teoria das equações algébricas e a formular as primeiras leis da teoria das probabilidades. Cardano morreu em Roma, em 1576.

2.3.7 Tycho Brahe (1546 – 1601)

Tycho Brahe nasceu na Dinamarca, em 1546. Descendente de família rica, seu pai prometeu entregá-lo para seu tio, mas não cumpriu a promessa. Após o nascimento de seu irmão mais novo, o tio de Brahe, Jorgen, sequestrou o jovem. Com isso, seu pai o aceitou devido a fortuna que o filho herdaria.

Desde jovem se interessava por estudos em astronomia, mas acabou acatando à ordem paterna e cursou direito na Universidade de Copenhague, durante três anos. Depois retornou para Leipzig e continuou seus estudos Humanistas.

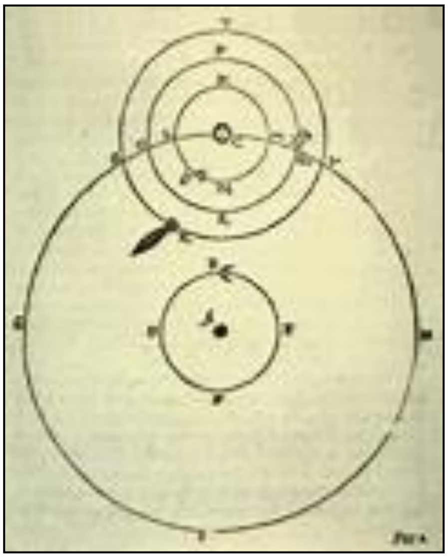
Seus interesses por Astronomia ainda permaneciam fortes. Quando seu pai faleceu em 1570, com o consentimento da família, instalou um observatório astronômico no castelo de Herritzvad e, em 1572, observou uma supernova, na constelação de Cassiopeia. Publicou um livro sobre esse fenômeno, em 1573, em que mostrava suas observações e concluía que as próprias estrelas podiam mudar.

Em 1575, realizou uma viagem de estudo pela Europa, mas voltou á Dinamarca por insistência do Rei Frederico II, que lhe doou a ilha Hven e uma pensão anual, com o intuito de que Brahe tivesse condições de construir e equipar um novo observatório astronômico.

Nessa ilha, foram construídos dois observatórios. A partir disso, fez grandes observações que o tornou um dos maiores astrônomos de sua época. Foi um dos primeiros a instituir observações diárias, e não apenas quando os astros estavam em configurações especiais, o que fez descobrir sobre anomalias nas órbitas até então desconhecidas.

Brahe era um grande estudioso da obra de Copérnico, assim como tentava conciliar a teoria de Ptolomeu e a teoria de Copérnico, pois acreditava que todos os planetas, menos a terra, giravam em torno do Sol, e o Sol e a Lua giravam em torno da Terra.

Figura 2 - Ideia de Brahe sobre o sistema Solar



Fonte: https://www3.unicentro.br/petfisica/2015/12/22/tycho-brahe-1546-1601/. Acesso em: 21/04/2023

Após a morte do rei Frederico II, Brahe saiu da Dinamarca e seguiu para Praga, a convite do Rei Rodolfo II. Em 1598, publicou *Digressões sobre mecânica astronômica*, que se trata de uma descrição de instrumentos que ele mesmo inventou e construiu. Em 1600, recebeu uma visita de Johannes Kepler, que se tornaria seu discípulo.

Foi Kepler quem deu continuidade aos estudos de Brahe após sua morte. A obra de Brahe foi editada por Kepler e publicada sob o título “Novos conceitos astronômicos de Tycho Brahe”. Brahe faleceu em Praga, em 1601.

2.3.8 Francis Bacon (1561 – 1626).

Francis Bacon nasceu no ano de 1561, em Londres, Inglaterra. Filho de uma família nobre, foi filósofo, escritor, cientista e político. Estudou Direito na Universidade de Cambridge, foi eleito o 1º Visconde de Alban e também embaixador inglês na França.

Bacon estava destinado à diplomacia, mas, com o falecimento de seu pai, em 1579, retornou a Londres com o objetivo de retomar sua carreira política e jurídica. Além da ocupação em cargos políticos, trabalhou para a coroa britânica como funcionário público, ocupando vários cargos. Em 1621, Bacon foi exonerado de seu cargo sob a acusação de corrupção. Apesar do escândalo ocorrido, ele conquistou fama de escritor e orador.

No campo científico, Bacon dedicava suas horas vagas àa compreensão de temas relacionados ao conhecimento. Chegou à conclusão de que a ciência era uma técnica e os conhecimentos científicos tinham por finalidade servir o homem e aferir poder sobre a natureza. Ele também fazia críticas à ciência antiga, de origem aristotélicas, pois acreditava que a ciência deveria valorizar a pesquisa experimental e não ficar apenas no campo da filosofia sem comprovação.

Fundador do empirismo na modernidade, baseou-se na crítica do que ele chamou de ídolo. A teoria dos ídolos é referente às falsas noções e hábitos mentais que prejudicavam o avanço da ciência e da racionalidade humana.

Bacon elaborou uma importante obra filosófica conhecida como *Novum Organum* (*Novo Método*), em 1620, e *De Dignitate et Augmentis Scientiarum* (*Sobre a Dignificação e Progresso da Ciência)*, em 1623. Estabelecendo o método científico baseado na observação rigorosa da natureza, organização dos dados obtidos, formulação de hipótese a partir dos dados reunidos e comprovação dessas hipóteses por meio das experimentações.

Bacon foi um filosofo de extrema importância para o estabelecimento da metodologia científica como campo de conhecimento e o avanço da ciência, Francis Bacon faleceu no ano de 1626, por complicações respiratórias, em Londres, Inglaterra.

2.4 Sobre Georg Joachim Rheticus

Georg Joachim nasceu em 16 de fevereiro de 1514 em Feldkirch, na Áustria. Foi ensinado por seu pai, Georg Iserin, até os seus 14 anos. Iserin era médico da cidade de Feldkirch e um homem renascentista, que possuía uma impressionante biblioteca pessoal, assim como uma coleção de equipamentos médicos e alquímicos. Em 1528, foi acusado de feitiçaria, condenado e decapitado.

Para O'connor e Robertson (1998), um dos requisitos legais da execução era que seu nome não pudesse mais ser usado. Portanto, a mãe de Rheticus, que era italiana, voltou ao nome de solteira, Thomasina de Porris, e seu filho como Georg

Joachim de Porris. Rheticus, por não se considerar italiano, traduziu seu sobrenome para o alemão “von Lauchen” e passou a se chamar Georg Joachim von Lauchen. Mais tarde ele adotou Rheticus como sobrenome em homenagem à província romana em que nasceu, Rhaetia.

Ilustração 3 - Georg Joachim Rheticus

Fonte: O’connor e Robertson (1998)

Baseado em O’connor e Robertson (1998), após a morte do pai de Rheticus, Achilles Gasser (1505 – 1577) assumiu o cargo de médico de Feldkirch. Foi quem ajudou Rheticus a continuar seus estudos, quando ingressou na escola de Latim em Feldkirch, seguindo para Zurique em 1528 e permaneceu até 1531, tendo como principal professor Oswald Myconius (1488 – 1552), notável humanista que ensinou matemática para Rheticus além do Trivium e o compromisso com essa disciplina se aprofundou (DANIELSON, 2006, p. 18).

Após dois anos, ingressou na universidade de Wittenberg, em seguida concluindo o seu curso na Universidade de Wittenberg. Danielson (2006, p. 20) profere que foi:

> fundada em 1502, por Frederico, O sábio, a universidade de Wittenberg existia de fato apenas quinze anos quando Martinho Lutero pregou suas noventa e cinco teses na porta da igreja do Castelo em 1517, e trinta anos quando Rheticus se matriculou lá junto com outros 290 novos alunos. (DANIELSON, 2006, p. 20, tradução nossa).

Rheticus assumiu o cargo de professor de matemática e astronomia na universidade de Wittenberg em 1536, local onde o próprio Martinho Lutero lecionava, com a ajuda de Philipp Melanchthon (1497 – 1560) que, de acordo com O’connor e

Robertson (1998), foi o “braço direito” de Lutero, um teólogo e educador que reorganizou todo o sistema educacional da Alemanha, defendendo o ensino secundário humanista, baseado nas artes liberais.

Melanchthon influenciou Rheticus a absorver o aprendizado humanístico com a instrução em coisas técnicas e matemáticas. Para Danielson (2006, p. 24), “esse esforço despertou ainda mais a paixão de Rheticus por descobrir a ordem, as causas, a beleza e a interconexão das coisas”.

O clima na universidade de Wittenberg ficou desagradável quando um amigo próximo de Rheticus, Simon Lemnius (1511 – 1550) criou uma desavença com Lutero quando dedicou, em forma de um elogio, um pequeno volume de seu trabalho ao Arcebispo Albrecht de Mainz, que era inimigo de Lutero. Insatisfeito com o ambiente criado, sem conseguir dedicar o amor que tinha pelo ensino superior, Rheticus pediu uma licença de seu trabalho para Melanchthon, o que foi concedido. (DANIELSON, 2006, p. 26 – 28).

Após conseguir a licença da Universidade de Wittenberg, Rheticus foi para Frauenburg, em 1539, e por meio de cartas de apresentação de Johannes Schoner (1477 – 1547), Rheticus pôde ser apresentado a Copérnico e passou dois anos ao seu lado.

Westman (2013, p. 44) explicita que Rheticus, rapidamente, conquistou a confiança de Copérnico, criando um vínculo cordial professor-aluno. Foi autorizado a estudar o cobiçado manuscrito e, posteriormente, foi liberado a escrever uma breve descrição dele.

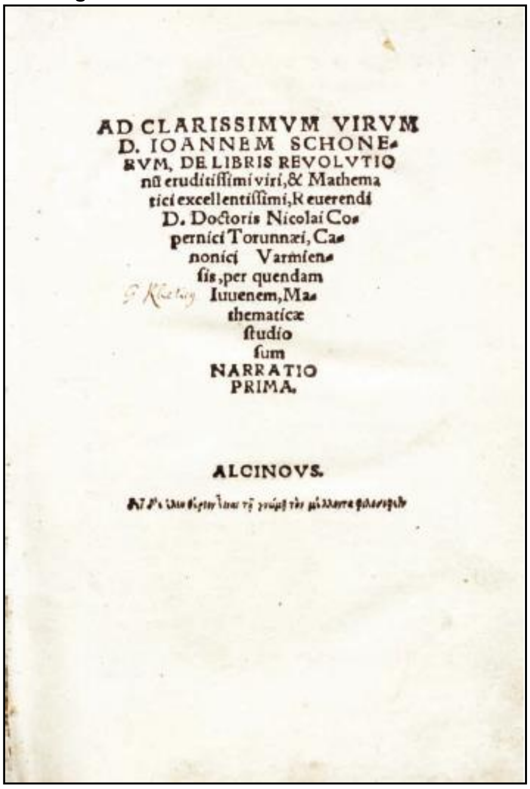
Danielson (2006, p. 59) frisa que Copérnico já vinha trabalhando na nova cosmologia radical há muitos anos, pois na esperança de evocar uma resposta de astrônomos sérios, Copérnico divulgou de forma tímida, sem título, sem assinatura e circulado no particular o seu manuscrito inédito, tecendo sobre sua teoria do heliocentrismo (do sistema astronômico centrado no sol), que veio a ser conhecida como *commentariolus* (primeiro comentário). Possivelmente, Schoner ficou ciente do manuscrito de Copérnico e enquanto Rheticus, em sua visita a Nuremberg, já tinha alguma noção da nova cosmologia de Copérnico.

Danielson (2006, p. 66) revela que a falta de qualquer resposta ao seu *Commentariolus*, quase três décadas antes, pode ter influenciado Copérnico ao receio de publicar sobre suas ideias astronômicas, porém o seu amor pela astronomia nunca morreu. Ele só precisava de alguém com a mente mais aberta para que pudesse compartilhá-las.

Após trocarem muitas ideias e trabalharem arduamente, Copérnico e Rheticus precisavam descansar. Em 1539, partiram para visitar o Bispo Tiedemann Giese (1480 – 1550), o melhor amigo de Copérnico. Nesse mesmo ano, movidos por suas afeições a Copérnico, Rheticus e Giese encorajaram Copérnico a revelar suas teorias ao mundo, mas Copérnico persistia indeciso. Rheticus elaborou um esquema decisivo a partir do qual ele contaria uma história, uma espécie de *narratio* que funcionaria como propaganda e uma prévia de julgamento para a teoria de Copérnico (DANIELSON, 2006, p. 67-68),

De acordo com Roegel (2010, p. 4), o primeiro relato do sistema copernicano não foi publicado por Copérnico e sim por Rheticus em sua obra *Narratio Prima* em 1540. Para Wtodarczyk (2015, p. 19), Rheticus finalizou o *Narratio Prima* em poucas semanas, uma vez que o próprio matemático admite em sua obra que conseguiu dedicar apenas dez semanas ao domínio do trabalho astronômico.

Ilustração 4 - Página de título da obra *Narratio Prima* de Rheticus


AD CLARISSIMVM VIRVM
D. IOANNEM SCHONE-
RVM, DE LIBRIS REVOLVTIO
nũ eruditissimi viri, & Mathema
tici excellentissimi, Reuerendi
D. Doctoris Nicolai Co-
pernici Torunnæi, Ca-
nonici Varmien-
sis, per quendam
Iuuenem, Ma-
thematicæ
studiosum
NARRATIO
PRIMA.

ALCINOVS.

Fonte: Westman (2013, p. 47).

Tal como contado por Westman (2013, p. 45), Rheticus havia ido para Copérnico via Nuremberg, quando esteve por um mês com Johannes Schoner, sendo que ele pretendia publicar os demais escritos conhecidos de Regiomontanus, pois foi autor prolífico de obras astrológicas. Estava ciente das críticas de Pico a astrologia. por a considerar equivocada e plagiada de fontes anteriores. Rheticus, compartilhando da mesma ideia que Schoner sobre a crítica de Pico, declarou em sua obra *Narratio Prima* ligando diretamente a teoria de Copérnico à defesa da astrologia, mas também da astronomia.

> Se o relato [do meu professor] dos fenômenos celestes existisse um pouco antes de nossos tempos, Pico não teria tido oportunidade em seus oitavo e nono livros de contestar não apenas a astrologia, mas também astronomia (RHETICUS, 1540, apud WESTMAN, 2013, p. 48).

Wtodarczyk (2015, p. 20) salientou que o *Narratio prima* é um livro pequeno e diferente da obra *De* Revolutionibus, pois não contém quaisquer desenhos. Westman (2013, p. 48) considera esta obra de Rheticus como uma prévia da obra-prima *De Revolutionibus* de Copérnico publicada em 1543, mas apresentada na voz do copernicano Rheticus, com destaques para suas principais reivindicações e argumentos.

Wtodarczyk (2015, p. 24) supõe que a decisão sobre a publicação do *De Revolutionibus* já havia sido tomada logo quando Rheticus terminou de escrever o *Narratio*, enquanto Westman (2013, p. 44) aborda que com o sucesso do *Narratio prima* claramente superou as hesitações remanescentes de Copérnico, e foi assim que Rheticus foi encarregado do manuscrito de *De Revolutionibus* para publicá-lo em Nuremberg. Roegel (2010, p. 3) revela que a impressão dessa obra foi parcialmente supervisionada por Rheticus.

Antes que o trabalho de supervisão da impressão da obra *De Revolutionibus* fosse concluído, Rheticus foi para Nuremberg, em 1542, para assumir o cargo de professor de matemática superior na Universidade de Leipzig, novamente com a ajuda de Melanchthon, enquanto Copérnico, que sofreu um derrame quando sua obra estava ainda em processo de publicação, ficou aos cuidados de Georg Donner, a quem mais tarde Rheticus dedicaria o primeiro exemplar da obra de Copérnico, publicado em 1543.

Rheticus aprendeu muito com seu amigo e professor Copérnico. Wtodarczyk (2015, p. 27) profere que Rheticus se familiarizou não apenas com uma nova teoria astronômica, mas também com um interessante método observacional. Para Danielson (2006, p. 133), com o senso de missão copernicana, ele utilizou tais conhecimentos para produzir a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* publicada em 1551, que se tornaria a trigonometria moderna, uma tabela que exigiu muito tempo de Rheticus, pois eram cálculos aparentemente intermináveis para chegar ao valor exato com precisão das razões que eram necessárias para mapear o mundo, incluindo os céus. Todo o processo de construção do *Canon* será melhor explorado no próximo capítulo.

A construção dessas tabelas teria que competir continuamente com outras tarefas pelo tempo de Rheticus, além de exigir dinheiro. Rheticus buscou por muito tempo um financiamento para o seu projeto. Apesar de seu salário como professor ser bom para a época, a universidade de Leipzig foi categórica a não lhe conceder aumento de salário.

O'connor e Robertson (1998) relatam que, em 1551, Rheticus teve que deixar Leipzig após ser acusado de conduta homossexual, sendo julgado, em sua ausência, e condenado a 101 anos de exílio. Neste período, formou-se em medicina e ficou na Cracóvia em 1554, onde permaneceu por 20 anos como médico.

A contribuições de Rheticus para a matemática se encontrava ameaçada por sua necessidade de servir o seu patrocinador, mas também pela lucrativa profissão de medicina. Mas o envolvimento de Rheticus com a medicina era muito mais que meramente profissional e financeiro, era também intelectual. Interessou-se por estudar a teoria médica Paracelso, no final da década e 1560 e início da década de 1570. Tal teoria ensinava que o mercúrio, o sal e o enxofre são os elementos principais do nosso corpo. A predominância de um deles causaria determinada enfermidade, pois baseou curas em minerais e não em plantas (DANIELSON, 2006, p. 180 – 181).

O paracelsianismo não era bem aceito pela comunidade, visto que consideravam a prática de mineração profana e até mesmo infernal. Por isso, Danielson (2006, p.181 – 182) afirma que:

> As associações potencialmente escandalosas do paracelsianismo foram além das indecências envolvidas em vasculhar as entranhas da mãe terra. Eles incluíam uma mancha de heresia do tipo mais sério, que envolvia a delicada questão teológica centrada na natureza do Filho de Deus. Foi o amigo de Rheticus, de Zurique, Conrad Gesner, quem primeiro propôs essa linha de ataque, alegando em uma carta a Johannes Crato em 16 de agosto de 1561, que "os paracelsianos... negam a divindade de Cristo... eles procuram convencer as pessoas de que Cristo era total e meramente humano" (DANIELSON, 2006, p. 181 – 182, tradução nossa).

Por esse motivo, a reputação de Rheticus pode de fato ter sido manchada como consequência de seus interesses paracelsianos. Para Danielson (2006, p.184), isso preocupava os personagens que esperavam mais contribuições de Rheticus para a matemática, o qual profere que:

> Ironicamente, então, apenas alguns anos depois de estabelecer seu grande programa de pesquisa matemática e astronômica, Rheticus não era apenas um médico paracelsiano ocupado, mas também um autor paracelsiano ativo. Aqueles que ainda valorizavam seu potencial e sua tão esperada contribuição para as ciências matemáticas tinham motivos para ficar cada vez mais angustiados (DANIELSON, 2006, p. 184, tradução nossa).

Desses personagens podemos citar o András Dudith (1533 – 1589), também conhecido em latim por Dudithius. Era um nobre húngaro diplomata a serviço do imperador Maximiliano II; Caspar Peucer, professor de matemática e ex-aluno de Rheticus; Conrad Dasypodius (1531 – 1601), matemático e astrônomo e recém-contratado para redesenhar o relógio astronômico da catedral de Estamburgo; e Wolfgang Schuler, astrônomo pouco conhecido da Universidade de Wittenberg. Todos almejavam que Rheticus completasse sua missão copernicana e desenvolvesse seus estudos sobre a “ciência dos Triângulos”.

Danielson (2006, p. 187) ressalta que tudo mudou depois quando Schuler estava observando a constelação da Cassiopeia e notou uma nova estrela. Cinco dias depois um astrônomo dinamarquês de 26 anos chamado Tycho Brahe também notou. O relato do Brahe sobre esse fenômeno o tornou tão famoso quanto a estrela, que levou seu nome como Supernova de Tycho.

Danielson (2006, p.187) frisa que, em razão da descoberta, as discussões sobre a astronomia se intensificaram, invalidando o argumento de que “na região etérea do mundo celestial não ocorre nenhuma mudança”. Portanto, era necessário um novo sistema de medição e cálculo angular.

Para Danielson (2006, p. 188), Rheticus tinha intenção de continuar com sua “ciência dos Triângulos”, pois saiu de Cracóvia e foi para Cassovia, por algum motivo desconhecido, levando muitos de seus documentos relevantes. Entretanto, a medicina Paracelsiana continuou prendendo a atenção de Rheticus.

Foi assim que um aluno de Schuler e Peucer, chamado Valentin Otto, foi até Rheticus, em 1574. Conforme O’connor e Robertson (1998) relatam, ele visitou Rheticus da mesma forma em que o próprio Rheticus havia visitado Copérnico. Esse fato pode ser provado quando Otto escreveu sobre o que Rheticus disse ao encontrar com ele: “Você tem a mesma idade, vindo me visitar, como eu tinha quando visitei Copérnico! Se não fosse pela minha jornada, seu trabalho nunca teria visto a luz do dia” (DANIELSON, 2006, p. 190).

A ida de Valentin Otto até Rheticus parece ter sido motivada por uma tentativa de resgatar Rheticus e seus trabalhos matemáticos. Sua chegada reacendeu o senso de missão matemática de Rheticus como nada havia sido capaz de fazer até então (DANIELSON, 2006, p. 191).

Começaram a trabalhar em uma tabela mais ampla, que parece ter consumido todo o verão e a maior parte do outono. Otto revela que quando Rheticus quase tinha terminado de elaborar a primeira e a segunda série do cânone da ciência do triângulo, precisou de coisas que havia deixado em Cracóvia. Logo, coube a Otto buscar (DANIELSON, 2006, p. 192).

De acordo com Danielson (2006, p. 193), ao retornar para Cassovia, Otto descobriu que na sua ausência Rheticus contraiu uma infecção respiratória, pois foi convidado a ficar na residência do Barão Rueber, e lá ele dormiu em um quarto “recém-rebocado” e, devido à umidade, contraiu a doença. Ainda com o mau tempo de Cassovia veio a falecer em 4 de dezembro de 1574 delegando seu trabalho inacabado ao seu aluno Valentin Otto, em quem tinha total confiança, bem como os recursos necessários para fazer o trabalho e entregá-lo completo à posteridade o mais rápido possível.

Rheticus, o primeiro copernicano, a mente brilhante que motivou Copérnico a publicar suas ideias sobre o heliocentrismo, não só motivou como ajudou no desenvolvimento e publicação de tal obra, introduziu o estudo das tabelas trigonométricas por medidas de lados do triângulo retângulo relacionado ao ângulo, chamado de “ciência dos triângulos”. Contribuindo com a construção de mapas, os estudos sobre astronomia, os instrumentos de navegação e, principalmente, o desenvolvimento de novas tabelas trigonométricas. A seguir, apresentamos a história das tabelas trigonométricas, que inclui os personagens importantes para o desenvolvimento do tema.

2.5 Sobre as obras de Rheticus

O jovem Polonês Georg Joachim Rheticus foi um personagem muito importante para o século XVI, pois se não fosse por seu apoio e incentivo, talvez a obra de Copérnico sobre o heliocentrismo nunca fosse publicada, como afirma Danielson (2006): “sem Rheticus, sem Copérnico”.

Rheticus primeiro publicou, em 1540, um relato sobre a teoria Heliocêntrica de Copérnico na obra *Narratio Prima*, que consistia em uma prévia com resumos e comentários da obra de Copérnico que mais tarde seria publicada com o título *The Revolutionibus Orbium Coelestium*.

Roegel (2010, p. 4) revela que o primeiro relato do sistema copernicano não foi publicado por Copérnico e sim por Rheticus, em sua obra *Narratio Prima*, em 1540.

Em 1542, antes da publicação de uma das maiores obras científicas sobre a teoria heliocêntrica de Copérnico, segundo Roegel (2021b, p. 73), Rheticus publicou seus capítulos trigonométricos sob o título *De lateribus et angulis triangulorum*. Consiste em um trabalho que contém as tabelas de senos em intervalos de 1’ para um raio de 10^7. Vale ressaltar que Rheticus não utilizava o termo seno (ou “sinus”) e sua tabela foi inspirada nas de Regiomontanus.

Em 1543, a obra de Copérnico finalmente foi publicada, mas infelizmente neste mesmo ano o amigo e mestre de Rheticus faleceu. Rheticus, com o senso de missão copernicana, de acordo com Danielson (2006, p. 133), utilizou tais conhecimentos para produzir a obra *Canon Doctrinae Triangulorum*.

Em 1551, Rheticus publicou seu *Canon Doctrinae Triangulorum*, que contém valores de senos, cossenos, tangentes, cotangentes, secantes e cossecantes, em intervalos de 10’ para um raio de 10^7. Roegel (2021b, p.73) revela que foi a primeira tabela a dar todas as seis razões trigonométricas possíveis por meio de Triângulo Retângulo.

Repcheck (2011, p. 200) também salienta que Rheticus produziu uma nova edição de geometria, de Euclides, um importante livro de trigonometria e um almanaque. O almanaque foi importante, pois anunciou que era baseada na astronomia de Copérnico.

O *Canon* contribuiu para a sua última obra *opus palatinum* (1596), que se tratava de uma tabela composta pelas seis funções trigonométricas em que seriam dadas a cada 10'' por um raio de 10^{10}, mas Rheticus faleceu antes de concluir, delegando este trabalho ao seu aluno Valentin Otto, que finalizou 20 anos depois, publicando em 1596.

3 PERSONAGENS RELACIONADOS COM A CONSTITUIÇÃO DA TRIGONOMETRIA

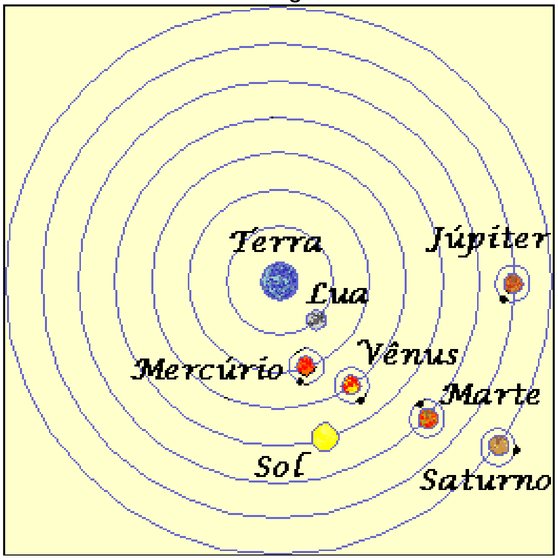
As teorias que mostram influências sobre a construção da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) serão relatadas nesse capítulo, assim como os principais personagens que contribuíram com sua evolução, como Aristóteles, Ptolomeu, Peurbach, Regiomontanus e Copérnico.

3.1 O Geocentrismo e o Heliocentrismo

Nesta subseção, fazemos um apanhado histórico sobre a teoria geocêntrica até a heliocêntrica de Copérnico, pois as tabelas de Rheticus figuraram como um trabalho desenvolvido a partir dos conhecimentos lendo Regiomontanus e como aluno de Copérnico.

O sistema geocêntrico começou com Aristóteles, que consiste em a terra está parada no centro do universo e todos os outros corpos celestes estão orbitando ao seu redor, como mostra a figura a seguir.

Figura 3 - Modelo da teoria geocêntrica de Aristóteles



Fonte: http://cienciasideiaxxi.blogspot.com/2011/09/teoria-geocentrica-e-heliocentrica.html. Acesso em: 25/03/2023

Nesse modelo de Aristóteles, os corpos celestes deveriam orbitar ao redor da terra com trajetórias circulares e bem definidas. Além disso, os planetas deveriam orbitar ao redor da terra com velocidades constantes, conforme Repcheck (2011, p. 29). Acreditava-se que a terra não se movia de forma alguma, pois se ela se movesse, a atmosfera desapareceria.

O modelo de Aristóteles apresentava inconsistências para época como, por exemplo, não conseguia explicar alguns movimentos retrógrados que as estrelas errantes (planetas) faziam. Tal nome faz referência aos corpos luminosos que não se comportavam de acordo com as demais estrelas.

Esse movimento foi revelado com o passar dos dias, uma vez que as estrelas errantes começavam a se movimentar de uma maneira contrária ao que normalmente faziam e depois voltavam ao seu fluxo inicial, o que se repetia várias vezes. Como o exemplo abaixo:

Figura 4 - Movimento retrógrado

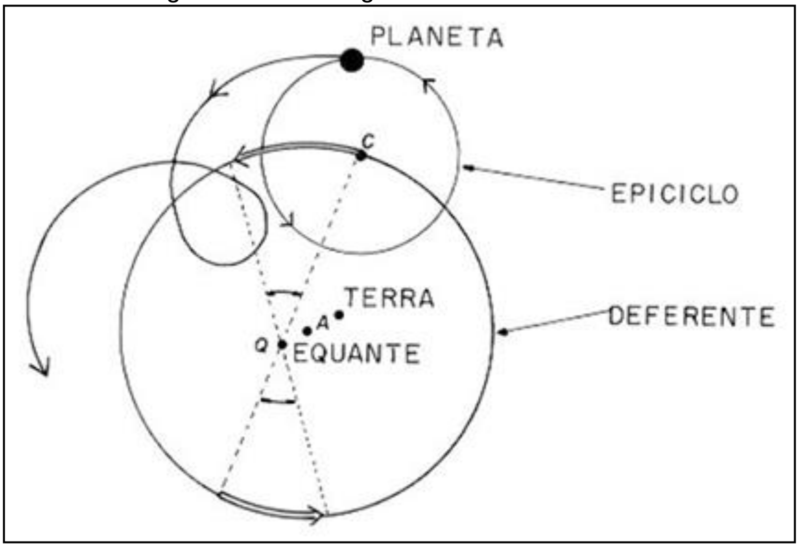
Fonte: RIBEIRO (https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/o-movimento-retrogrado-dos-planetas/). Acesso em: 25/03/2023

Ptolomeu em busca de solucionar diversas inconsistências no modelo aristotélico, principalmente o do movimento retrógrado das estrelas errantes, adaptou a teoria geocêntrica, de modo que conseguiu construir um sistema matemático baseado em tabelas de observações Babilônicas, quando conseguiu descrever os movimentos vistos no céu. O sistema adaptado por Ptolomeu consistia em:

> As estrelas errantes eram vistas opostas às “estrelas fixas”, que eram todos os outros objetos brilhantes. As estrelas fixas também se moviam ao redor da Terra, mas cada uma sempre mantinha sua posição em relação às outras (REPCHECK, 2011, p.30).

Para resolver esse mistério do movimento retrógrado, Ptolomeu adotou que os planetas se moviam ao redor da Terra atrelados a uma de duas esferas, que são chamadas de “deferente” e “epiciclo”. A deferente tinha a terra como centro e a epiciclo se tratava de uma esfera menor a que o planeta estava atrelado e se movia ao redor de um ponto diferente (REPCHECK, 2011, p.31), como mostramos a seguir:

Figura 5 - Modelo geocêntrico de Ptolomeu



Fonte: https://sites.google.com/site/fisicadarebelza/modelo-ptolomaico. Acesso em: 25/03/2023

Repcheck (2011, p. 31) evidenciou que o deferente e o epiciclo solucionavam o problema do movimento retrógrado, assim como o excêntrico e o equante resolviam os problemas relacionados com a localização do verdadeiro centro de revolução e velocidade constante.

Esse modelo de Ptolomeu funcionou por muitos séculos, inclusive para as grandes navegações. Séculos depois, mais precisamente o século XV, os artifícios matemáticos utilizados por ele se mostravam sem eficácia, especialmente as discrepâncias entre as predições, as reais ocorrências de eclipses e outros fenômenos astronômicos.

Foi assim que surgiu um personagem importante, conhecido por Peurbach, que corrigiu certos erros e simplificou parte do modelo de Ptolomeu. Em seguida, criou *Tabulae Eclipsium* (Tábuas de Eclipse), completadas em 1459, que projetavam Eclipses Solares e Lunares com precisão por muitas décadas e, por gerações, se tornaram uma referência "obrigatória" para astrônomos e astrólogos. (REPCHECK, 2011, p. 33).

Peurbach, já conhecido pelo trabalho astronômico, foi procurado pelo Cardeal Johannes Bessarion (1403 - 1474), que o convenceu a escrever uma nova tradução do extraordinário livro de Ptolomeu para o latim, quando ofereceu o suporte financeiro dos cofres da igreja para empreitada. Peurbech aceitou o desafio (REPCHECK, 2011, p. 34 - 35).

Para Repcheck, (2011, p.35), um ano depois e na metade do projeto, Peurbach ficou muito doente e pediu para seu aluno e agora amigo, Regiomontanus, para prosseguir com o importante trabalho do *Almajesto*.

Em 1461, Regiomontanus assume a tarefa, herdando o patrocínio de Bessarion, de finalizar a tradução. É possível que Regiomontanus tenha terminado o Epítome do *Almajesto* em 1462, embora essa obra viesse a ser publicada apenas em 1496 (REPCHECK, 2011, p. 35).

A partir do seu estudo do *Almagesto*, consoante Repcheck (2011, p.37), "Regiomontanus estava convencido de que um sistema astronômico completamente novo se fazia necessário. Ele não sabia como deveria ser esse sistema".

Segundo Repcheck (2011, p.64 – 65), no Epítome, Regiomontanus afirmou que deveria existir algum erro na teoria de Ptolomeu para o movimento da Lua, pois se estivesse correta a aparição da lua poderai variar mais. Ptolomeu mencionou que a órbita da lua ao redor da terra a levava, com regularidade, a uma distância duas vezes maior que em outras ocasiões. É claro que isto não ocorre.

O Epítome era um livro raro e visto por poucos estudiosos. É possível que Copérnico tenha tomado emprestado esse volume e feito sua leitura com interesse profundo. Copérnico talvez já estivesse descrente quanto ao modelo de Ptolomeu, porém a crítica de Regiomontanus foi essencial (REPCHECK, 2011, p. 35-36).

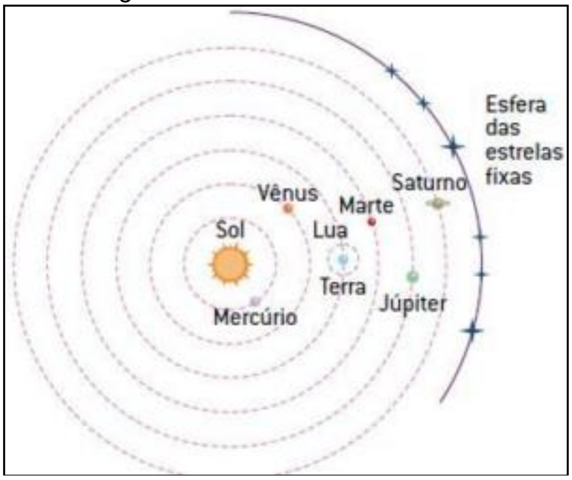
Para Repcheck (2011, p. 36), outro grande motivo para o interesse de Copérnico em revolucionar as teorias astronômicas foram os ataques à astrologia por Giovanni Pico Della Mirandola (1463-1494) em seu livro cujo título era *Disputationes adversus astrologiam divinatricem* (Disputas contra divinações astrológicas), publicado quase na mesma época do Epítome.

Repcheck (2011, p. 70) frisa que, de 1503 a 1513, Copérnico descobriu a Teoria heliocêntrica dos céus. Ele redigiu um relatório ou memorando e fez circular entre os amigos interessados em astronomia, antes de 1514. Esse manuscrito de seis páginas expõe a teoria na qual afirma que a Terra se move enquanto o Sol permanece parado.

Para Repcheck (2011, p. 70), o referido manuscrito passou a ser chamado de *Commentariolus*, mas não se sabe que título Copérnico deu a ele e também não se sabe se ele chegou a se identificar como autor. É provável que o manuscrito não tenha recebido nenhum título e que tenha sido anônimo.

A partir de então surgiu a primeira ideia sobre o Heliocentrismo, que tem origem das palavras gregas *Helios* (sol) e *Kentron* (centro). Esse sistema consiste em afirmar que o Sol é o centro do universo e não mais a Terra.

Figura 6 - Sistema Heliocêntrico



Fonte: Site da Universidade Federal de Minas Gerais. (https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo/#:~:text=Nicolau%20Cop%C3%A9rnico%20(1473%2D1543),do%20deus%20Sol%20dos%20romanos. Acessado em: 20/04/2023)

As primeiras folhas do *Commentariolus* de Copérnico começam com a seguinte declaração:

> As teorias planetárias de Ptolomeu e da maioria dos outros astrônomos, embora consistentes com os dados numéricos, parecem apresentar dificuldade não pequena. Essas teorias não eram adequadas, a menos que certos equantes fossem concebidos; ainda assim, parecia que um planeta não se movia com velocidade uniforme em seu deferente (órbita principal) nem ao redor do centro do seu epiciclo (órbita secundária). Portanto, um sistema desse tipo não parecia suficientemente completo nem suficientemente agradável à mente. Tornando-me consciente destas falhas, com frequência me perguntei se não haveria, talvez, uma disposição mais razoável dos círculos, da qual toda desigualdade aparente poderia ser derivada e na qual tudo se moveria de modo uniforme ao redor do próprio centro, como exige a lei do movimento absoluto (REPCHECK, 2011, p. 72).

No seu manuscrito, Copérnico pede ao leitor que aceite sete hipóteses, que ele chama de axiomas. Destacamos como os principais: o segundo, o terceiro e o quinto axiomas, que diz:

> O segundo axioma é: " O centro da Terra não é o centro do universo". O terceiro é: " todas as esferas giram em torno do sol e, portanto, o Sol é o centro do universo". O quinto axioma é: "A Terra (...) efetua uma completa rotação ao redor de seus polos fixos em um movimento diário, enquanto o firmamento e o céu superior permanecem inalterados". Não se pode deixar de ressaltar quão revolucionárias eram tais afirmações (REPCHECK, 2011, p. 72).

Repcheck (2011, p. 72) comenta que o manuscrito é breve e não contém provas matemáticas, pois a pretensão de Copérnico era de revelá-las em sua obra maior. Essa obra maior é uma referência ao trabalho que se tornaria *As revoluções dos orbes celestes*, publicado em 1543, com a ajuda e incentivo de Rheticus.

Repcheck (2011, p.70) o considera revolucionário, pois ele desafiou praticamente todos os fatos que eram aceitos sobre os corpos celestes, desde o tempo de Aristóteles e formalizados por Ptolomeu e era imposto pelos ensinamentos da igreja.

Essas teorias incentivaram grandes estudos sobre tabelas trigonométricas, pois para se chegar a resultados de grandes dimensões, só era possível fazer estimativas por meio delas. Apresentamos sobre sua evolução no subtópico a seguir.

3.2 O surgimento das Tabelas Trigonométricas

A trigonometria tem uma história extensa e abrangente. Buscou-se tratar sobre as tabelas trigonométricas, que têm seu marco inicial no século II a. C. com a contribuição de um matemático grego chamado Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.). A ele foi atribuído o nome “Pai da trigonometria”, pois construiu a primeira tabela trigonométrica em que relaciona cada arco da circunferência com a sua respectiva corda. Foi ele quem atribuiu a divisão do círculo em 360º, que pode ter sido motivada pela astronomia babilônica (MENDES, 2010, p. 80 – 81).

Hiparco compilou um tratado em 12 livros referentes a uma tábua de corda, relacionando valores correspondentes de corda de um círculo arbitrário para vários ângulos. Essa obra é considerada a primeira tabela trigonométrica.

Outro personagem que também estudou uma tábua de cordas, foi Cláudio Ptolomeu que, por volta de 150 a.C., escreveu uma importante obra grega para a trigonometria, cujo título era "*Syntaxis mathematica*", que ficou conhecida como "Almagesto". Trata-se da mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade, que contém 13 livros. O livro 1 contém uma tábua de corda de arco que varia de (½)º a 180º para cada (½)º, que tem como base os escritos de Hiparco. Além disso, o livro aborda como a tábua de corsa foi obtida a partir da proposição geométrica conhecida como Teorema de Ptolomeu (BORGES, 2021, p. 23).

No século XIV, conforme Costa (1997, p. 13), na Inglaterra, Georg Peurbach, também conhecido por Johann Peurbach, retomou a obra de Ptolomeu[4] e calculou uma nova tábua dos senos.

Antes disso, com o famoso astrônomo vienese Georg Peubach (1423 – 1461), Regiomontanus estava engajado na reforma da astronomia geocêntrica e, após morte do primeiro, ele completou o resumo dos estudos de Ptolomeu, *Almagest Epítome em Almagestum Ptolemaei* (1496) que mais tarde também foi usado por Copérnico. Significativamente, o resumo era mais do que uma versão abreviada do antigo tratado, pois incluía uma explicação abrangente de antigos procedimentos matemáticos, a descrição de instrumentos e métodos observacionais e era adicionalmente anexado com materiais extraídos dos trabalhos de astrônomos islâmicos (WTODARCZYK, 2015, p. 16).

Regiomontanus, um dos maiores matemáticos do século XV que foi aluno de Peubach, escreveu um "Tratado sobre triângulo" contendo uma trigonometria completa. Esse tratado é descrito por Roegel (2010, p. 3) como a obra "*Tabulæ directionum profectionumque"*, provavelmente impressa em 1490, tinha apenas 30 páginas e fornecia os senos para cada minuto em um raio de 60 000, aperfeiçoando as tábuas de seno de Peurbach.

---

[4] Trata-se da mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade, a *Syntaxis Matemática*, que contém 13 livros.

A partir deste tratado, ele introduziu a tangente na trigonometria europeia, por meio da pequena tabela de tangentes (mas não com esse nome) que foi calculada a partir das tabelas dos senos, por divisão, em que a maioria das tabelas publicadas no século XVI é baseada nas tabelas desse tratado ou em outras construídas por Regiomontanus (ROEGEL, 2010, p. 3).

Na Europa, Regiomontanus estabeleceu a trigonometria como uma ciência independente da astronomia, sendo, possivelmente, o primeiro trabalho impresso em trigonometria. Em 1520, Copérnico Complementou alguns trabalhos de Regiomontanus e incluiu em um capítulo de seu "*De Lateribus et Angulis Triangulorum*", publicado separadamente por seu discípulo Rheticus, em 1542 (COSTA, 1997, p. 13).

Em 1545, Gemma Frisius (1508 – 1555), que foi médica, matemática, cartógrafa e filósofa, nasceu em Dokkum, Holanda. Seu interesse por matemática e geografia a fez produzir e publicar seu trabalho intitulado *"De Radio Astronômico et Geométrico"* que incluía uma tabela de cotangentes, que foi copiada de Regiomontanus, assim como continha uma tabela de arcotangentes (ROEGEL, 2021b, p. 77).

As seis funções trigonométricas foram pela primeira vez definidas e incluídas em uma só tabela por Rheticus, na sua obra "*Canon Doctrinae Triangulorum"*, publicada em 1551 em Leipzig. Salientamos uma análise da obra no capítulo VI deste trabalho.

Para Roegel (2010, p. 6), diversos outros matemáticos deram continuidade aos estudos das tabelas, alguns provavelmente inspirados na tabela de Rheticus, como foi o caso de Francesco Maurolico (1494 – 1575) e François Viète (1540 – 1603). Relatamos sobre a influência de Rheticus no capítulo V desta pesquisa.

Maurolico, em 1558, publicou um comentário que continha tabelas curtas de senos, tangentes e secantes, sendo em partes recalculado diretamente usando as tabelas de senos de Regiomontanus. Enquanto Viète construiu uma nova tabela, que chamou de "*Canon Mathematicus*", uma tabela sofisticada que continha as seis funções trigonométricas, mas não fez mais sucesso que a primeira tabela de Rheticus (ROEGEL, 2010, p.6).

Roegel (2010, p.6) revela que Rheticus, após a conclusão de cânone de 1551, continuou trabalhando em um projeto mais amplo, no qual as seis funções trigonométricas seriam dadas a cada 10’’ por um raio de 10^{10}, porém esse trabalho só foi concluído após a morte de Rheticus, por Valentinus Otto e publicado em 1596.

Com base em Danielson (2006, p. 198), as tabelas publicadas por Otto continham erros e precisavam ser recalculadas. Tal tarefa foi assumida pelo teólogo e matemático Bartholomew Pitiscus (1561 – 1613), que foi o primeiro a usar o termo “Trigonometria”. Ele percebeu que para obter resultados mais precisos em dez casas para razões de ângulos próximos de zero ou próximos de noventa graus, seria preciso fazer cálculos para quinze casas.

Após a morte de Otto, em 1602, Pitiscus teve acesso a alguns manuscritos de Rheticus, o que permitiu uma revisão mais detalhada do *Opus Palatinum*. O resultado foi outro volume de fólio monumental, sendo este intitulado *Mathematical Treasury: or, Canon of Sines for a Radius of 100,000,000,000,000 Units...* como anteriormente computado com incrível esforço e custo por Georg Joachim Rheticus. Nesse sentido, produziu tabelas tão utilizáveis que só foram substituídas por trabalhos que apareceram no início do século XX (DANIELSON, 2006, p. 199 - 200).

A tabela de Rheticus era muito rara e quase desconhecida, quando Augustus De Morgan (1806 – 1871) encontrou uma cópia dela em 1840, foi ele o primeiro a descrever a estrutura da tabela, em que um layout semelhante foi usado por Rheticus e Otto em “*Opus palatinum*”. O Cânone de 1551 foi reimpresso em 1565 em Basel (ROEGEL, 2010, p. 5).

3.3 As influências de Regiomontanus e Copérnico para Rheticus

Para estudos sobre Astronomia antes do século XV, a trigonometria estava atrelada como uma ferramenta para os estudos, ou seja, a Trigonometria era uma ciência voltada para resolver problemas em Astronomia. Entretanto, para Pereira (2010, p.11), no século XV a XVII houve sua emancipação como uma ciência independente.

Essa emancipação aconteceu pela obra intitulada *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* de Johann Muller Regiomontanus (1436 – 1476). Pereira (2010, p. 41) menciona que essa obra, infelizmente, está inacabada, e teve sua primeira versão editada por John Schoner e publicada por John Petrus, em Nuremberg, em 1533 (p.81). Tal fato podemos comprovar quando Saito (2015, p. 181) afirma:

> Regiomontanus subtraiu a trigonometria da astronomia, inaugurando uma nova vertente de estudos matemáticos. A partir da publicação de *De triangulis omnimodis*, outros estudiosos puderam investigar sobre trigonometria como objeto essencialmente matemático, refinando e definindo seus conceitos, até o século XIX (SAITO, 2015, p. 181).

A referente obra foi produzida no século XV, um século em que a Europa despertava para um novo interesse humanístico pelos escritores da antiguidade. Para Saito (2015, p. 94), o "[...] interesse pela magia, alquimia e astrologia, por exemplo, era tão estimulante quanto a abstração matemática e experimentação".

Saito (2015, p. 95) relata que foi um período em que as próprias matemáticas apresentaram novos e impressionantes avanços, e que Regiomontanus contribuiu em diferentes segmentos do conhecimento, principalmente matemáticos.

O que incentivou Regiomontanus a escrever a obra *De triangulis* foi a *Epítome do Almagesto,* de Ptolomeu. Trata-se de uma breve tradução com comentários e esclarecimentos. Um pedido realizado pelo Cardeal Bessarion especialmente a Peuerbech, que concordou com a proposta. Todavia, com sua morte prematura em abriu de 1461, obteve a promessa do seu discípulo, Regiomontanus, para concluir os trabalhos e apresentá-los ao Cardeal Bessarion.

Como já mencionado, o interesse da época por estudar obras antigas era evidente. Por isso, era necessária uma tradução do *Almagesto*, pois se tratava de uma obra em que predominavam os estudos sobre Astronomia até então.

Após a finalização da tradução e comentários sobre a obra de Ptolomeu, em 1462, Regiomontanus desenvolveu o trabalho sobre triângulos e registrou no *De triangulis*, pois seria útil aos leitores do *Epítome,* segundo Pereira (2010, p.41):

> O trabalho poderia servir como base para cálculos geométricos e astronômicos como ele havia originalmente planejado e deveria ser usado para calcular diariamente as coisas do céu e o tamanho e distância de cometas. A verdadeira ferramenta útil aqui era Trigonometria (PEREIRA, 2010, p. 41).

A obra *De Triangulis* é composta por cincos livros, dos quais os dois primeiros abordam a Trigonometria Plana (57 páginas) e os outros três a Trigonometria Esférica (74 páginas) (PEREIRA, 2010, p. 60).

Destacando os pontos mais importantes para a nossa discussão, no livro um: dos teoremas 20 a 57, propõe-se soluções geométricas para triângulos retângulos, isósceles e escalenos, porém dos teoremas 20 27 e 28 são exceções, pois usam explicitamente o seno de um ângulo. Os teoremas 49, 50, 52 e 53 estudam os casos de triângulos oblíquos, porém não mencionam o uso da função seno (PEREIRA, 2010, p. 68-69).

Sobre o teorema 20, Pereira (2010, p. 68) mostra a definição do seno como:

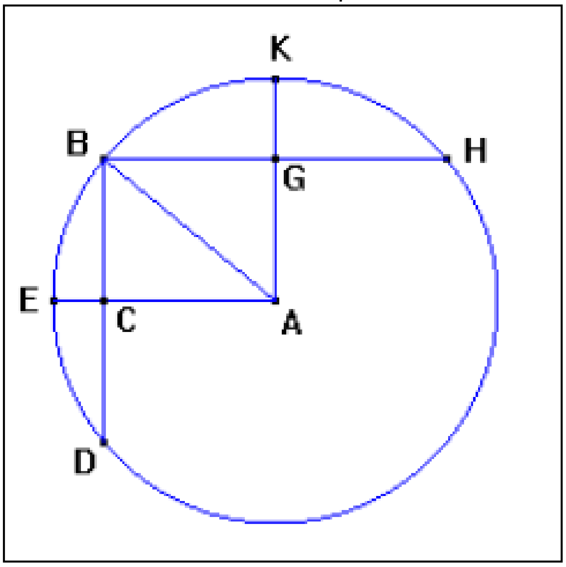
> Em todo triângulo retângulo, um dos quais o vértice agudo é o centro de um círculo e cuja [hipotenusa] é seu raio, o lado que subtende a este ângulo agudo é o seno reto do arco adjacente ao lado oposto ao ângulo dado, e o terceiro lado do Triângulo é igual ao Seno do complemento do arco (HUGHES, 1967, p. 58 apud PEREIRA, 2010, p. 68).

Vale ressaltar que a definição de seno que tínhamos nos séculos XV e XVI é diferente da definição de função seno que temos atualmente.

> O seno, como usado em sua obra, é uma perpendicular traçada de uma extremidade de um arco de um círculo para o diâmetro que foi traçado pela outra extremidade do arco. O seno do complemento do arco é o seno da diferença entre o arco e o quadrante; consequentemente, se o arco é menor que 90°, o complemento do arco é 90° menos os graus do arco, mas, se o arco é maior que 90°, o complemento é levado a ser os graus do arco menos 90° (PEREIRA, 2010, p. 67).

Pereira (2010) atualizou os vértices representados com letras minúsculas para letras maiúsculas, que é como usamos atualmente. Como podemos observar na Figura a seguir:

Figura 7 - Referente ao teorema 20 do primeiro livro do *De Triangulis*

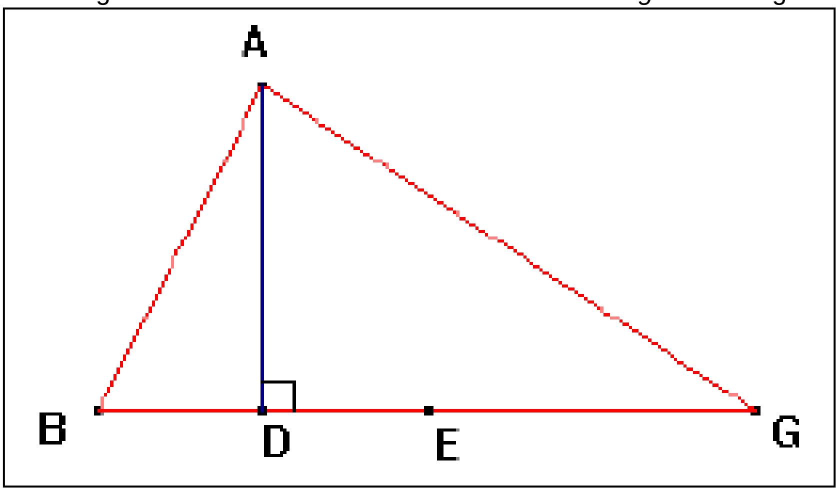


Fonte: PEREIRA (2010, p. 68)

Pereira (2010, p. 68) profere que Regiomontanus tomou o raio da circunferência igual a 1, pois definiu o sen BÂC = $\overline{BC}$ e o cos BÂC = $\overline{AC}$, mas para esse último utilizou o termo "seno reto do complemento do Arco BE".

Já no livro dois, Regiomontanus menciona sobre razões entre lados de um triângulo para provar o seu teorema 12, quando ressalta que esses teoremas não podem ser provados a partir de meios geométricos, utilizando aparatos da álgebra: “se a perpendicular é dada e a base e a razão dos lados são conhecidas, cada lado pode ser encontrado”. Realiza a demonstração a partir da figura a seguir (PEREIRA, 2010, p. 72-73).

Figura 8 - Triângulo utilizado no teorema 12 da obra *De Triangulis* de Regiomontanus



Fonte: PEREIRA (2010, p. 73).

Evidencia sobre razões novamente no teorema 10 do livro dois, porém desta vez relacionado com a área de um triângulo: se a área de um triângulo é determinada justamente com as razões dos lados, qualquer um destes lados pode ser identificado. Consequentemente, os ângulos podem ser medidos (HUGHES, 1967, p. 116-117 apud PEREIRA, 2010, p. 74).

Alguns pontos de influência de Regiomontanus a Rheticus, destacamos sobre as razões, pois até então algumas funções trigonométricas eram definidas a partir de corda e semicorda. Alguns desses teoremas podem ter influência sobre a decisão de Rheticus de usar razões entre os lados do triângulo retângulo para definir as seis funções trigonométricas, para nós razões trigonométricas, e realizar um registro de todas juntas.

É importante também comentar que, para Pereira (2010, p.75). Regiomontanus utilizou uma aritmética mais moderna comparada com a maioria dos seus contemporâneos e seus sucessores do século XV, visto que faz em alguns teoremas uso de arredondamento do resultado da divisão de números grandes.

Essa questão do arredondamento também foi notada nas tabelas trigonométricas produzidas por Rheticus, o que será melhor comentado no capítulo IV, mas podemos ponderar que seja outro fator de influência de Regiomontanus nos estudos de Rheticus.

Nas pesquisas históricas citadas por alguns autores, como Costa (1997) e Roegel (2021b), Rheticus calculou as seis razões para ângulos de 0º até 45º e depois determinou os mesmos valores para as suas razões de ângulos complementares de 45º a 90º. Observamos isso no teorema 26 de Regiomontanus. Pereira (2010, p. 76) explicita que "encontramos a lei dos senos para triângulos esféricos. Para sua demonstração, Regiomontanus utiliza a fórmula em que o cosseno de um arco é igual ao seno do seu complemento".

Figura 9 - Parte do teorema 26 do Livro Quatro do *De Triangulis*

XXVI.

Tribus angulis trianguli rectanguli cognitis, omnia eius latera patefient.

Sit triangulus a b g cuius tres anguli noti habeantur. Dico q omnia eius latera fient cognita. Aut enim duo eorum sunt recti, aut unus tantũ. Si duo, sint ipsi
P 2 uerbi
uerbi gratia, b & g, erit igitur per huius pũctus a polus circuli b g, & per huius uterq; arcuum a b & a g quadrans cognitus, sed & arcus b g determinat quantitatem anguli b a g noti, unde & ipse notus habetur. Tria itaq; trianguli latera nota reddidimus. Si uero unus duntaxat angulus, uerbi gratia, b sit rectus, huius consulemus. erit enim proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, tanq̃ sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, tres autem horum sinuũ notos faciũt anguli per hypothesim dati, quare & sinus complementi arcus a b cognitus ueniet, cuius arcus, uidelicet ipsum complementũ ex quarta circumferentiæ demptus relinquet arcum a b notum si arcus a b minor quadrante extiterit, aut additus quadranti ipsum arcũ a b notum cõstituet, si arcus a b quadrantẽ superauerit. Arcus autẽ a b qualis fuerit respectu quadrantis, angulus a g b huius dirigente indicabit. Similiter per omnia notũ reddemus latus b g, & tandẽ per præcedentẽ latus tertiũ a g innotescet. Verũ inuento arcu a b hãc uiã ingredi licebit. Proportio sinus anguli a g b per huius ad sinum arcus a b est ut sinus anguli b a g ad sinum lateris b g. Tres autem huiusmodi sinus noti sunt, quare & quartus, & ideo arcus b g cognitus habebitur. similiter reperiemus arcũ a g mediante angulo a b g recto. Cautum profecto te uelim esse in accipiendis arcubus per sinus datos, ne centies idem repetendo membrana cõtaminetur. unumquẽq; eñ sinũ minorẽ sinu toto duobus respondere arcubus sæpenumero dictũ est, quoꝝ alter quadrante maior, alter eo minor existit. Volenti ergo sinui dato arcũ suum reddere, cõsiderandum est, sit ne arcus suus maior quadrante aut minor eo, quòd nimirũ superiores conclusiones satis apertũ tradidere. Idem præterea de cõplementis arcuum & anguloꝝ obseruandũ est, quẽadmodum enim unumquodq; cõplementũ arcuale duobus seruit arcubus, quoꝝ alter quadrante maior, aliter autem eo minor est, ita & omne cõplementum angulare duos respicit angulos, hunc quidẽ maiorẽ, illũ autẽ recto minorem. Si igitur cõplemento arcuali reddere conaris arcũ suũ, prius exploratũ habeas, sit ne arcus ille maior quadrante aut minor eo. si maior, cõplementum suum additũ quadranti arcum constituet quæsitũ. si uero minor, cõplementũ ex quadrante reiectum arcus quæsiti relinquet quantitatem. Non aliter circa angulos procedemus, nisi q ubi pridem arcus erat, nunc angulum intelligamus. Operatio huius. Si trian

Fonte: Hughes (1967, p. 248 apud Pereira, 2010, p. 77)

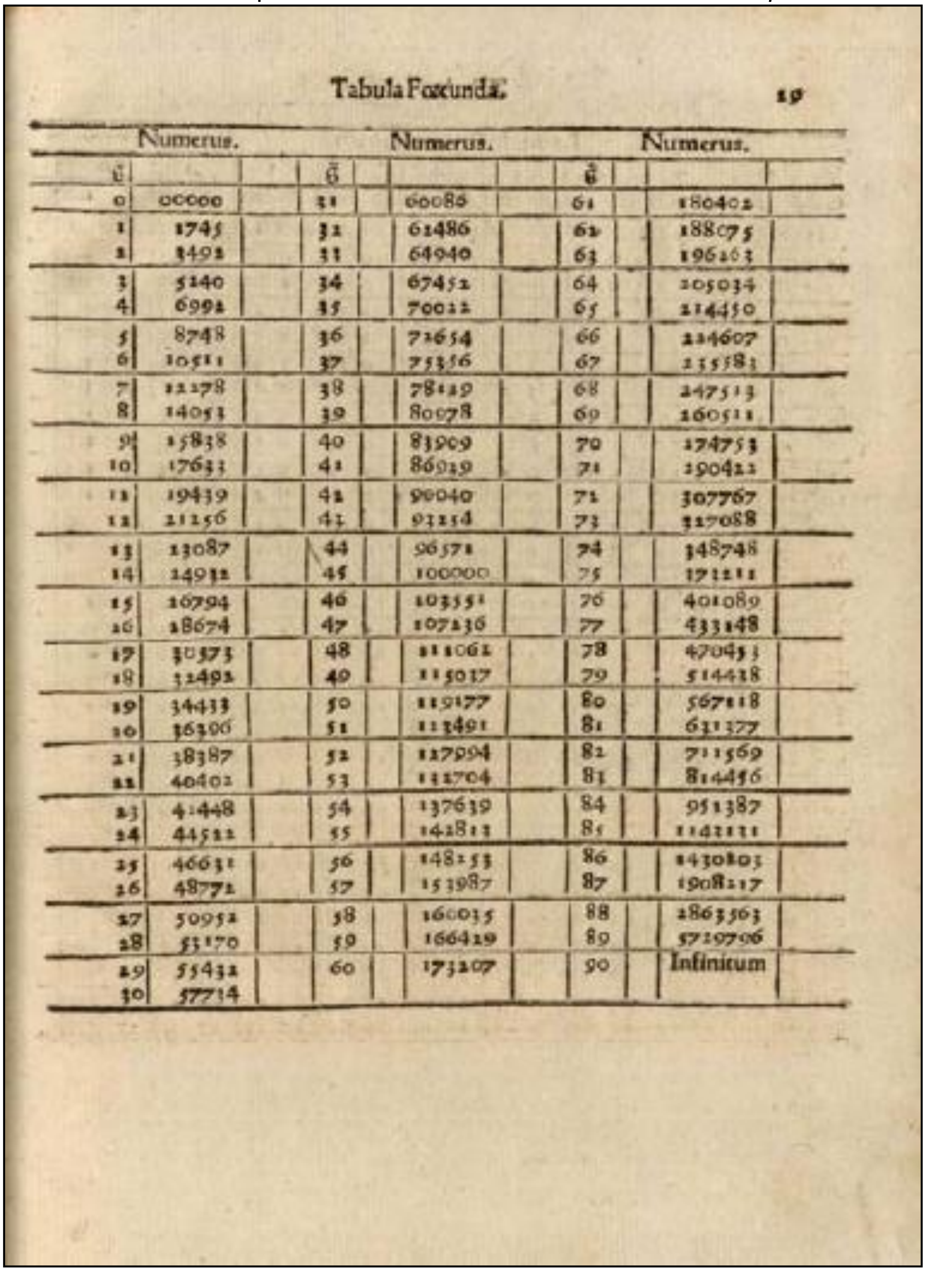
Como já fora dito, a obra *De Triangulis* não chegou a ser totalmente finalizada. Ficou terminada apenas parcialmente, em Veneza, no verão de 1463 (PEREIRA, 2010, p. 41).

Regiomontanus produziu, incluindo esse, outros trabalhos de importância para o desenvolvimento da Trigonometria e Astronomia. Repcheck (2011, p. 37-41) destaca que foram muito usados no início do século XVI e posteriormente. São eles: *Epítome do Almagesto* de Ptolomeu, Tratado dos Triângulos (*De Triangulis*)*, Tábuas de direções e Efemérides.*

> O mais importante tinha o título *Tábuas de direções*, impresso em 1490. Tábuas ajudavam a determinar as posições de corpos celestes com base na rotação diária percebida do céu noturno; (...). Esse seria um dos primeiros livros que Copérnico viria a possuir (REPCHECK, 2011, p. 37).

Pereira (2010) também cita outra obra em que Regiomontanus comentou sobre suas tábuas, quando ele se referiu a uma tabela de senos com o seno de 90° e registrou na sua obra Tabulae Directionum, feita na Hungria. Pontuou o seno de 90° igual a 60.000, porém, na seção 10, ressaltou que uma tábua de seno com seno 90° igual a 100.000 seria mais útil. Nesta mesma seção, ele introduziu a *Tabula fecunda*, isto é, uma tábua de tangentes com tg 45° = 100.000 e mostrou suas vantagens (PEREIRA, 2011, p. 45 – 46).

Figura10 - *Tabula fecunda* apresentada no livro *Tabulae directionum et profectionum*, 1490.



Tabula Fœcunda. 19

G.	Numerus.	G.	Numerus.	G.	Numerus.
0	00000	31	60086	61	180402
1	1745	32	62486	62	188075
2	3491	33	64940	63	196263
3	5240	34	67452	64	205034
4	6992	35	70022	65	214450
5	8748	36	72654	66	224607
6	10511	37	75356	67	235583
7	12278	38	78129	68	247513
8	14053	39	80978	69	260511
9	15838	40	83909	70	274753
10	17633	41	86929	71	290422
11	19439	42	90040	72	307767
12	21256	43	93254	73	327088
13	23087	44	96572	74	348748
14	24932	45	100000	75	373211
15	26794	46	103553	76	401089
16	28674	47	107236	77	433148
17	30573	48	111062	78	470453
18	32492	49	115037	79	514438
19	34433	50	119177	80	567128
20	36396	51	123491	81	631377
21	38387	52	127994	82	711569
22	40402	53	132704	83	814456
23	42448	54	137639	84	951387
24	44522	55	142813	85	1143131
25	46631	56	148253	86	1430203
26	48772	57	153987	87	1908217
27	50952	58	160035	88	2863563
28	53170	59	166429	89	5729796
29	55432	60	173207	90	Infinitum
30	57734				

Fonte: PEREIRA (2010, p. 47).

Pereira (2010, p. 47) salienta que Nicolau Copérnico usou as tábuas de Regiomontanus e descreve que:

> O tratado tabulae Directium possui trinta e um problemas astronômicos que ilustram o uso das tabelas formando a parte principal do texto. Esses problemas são de naturezas diversas: achar a declinação de um planeta cujo lugar no Zodíaco é conhecido brevemente; calcular a declinação de alguma estrela fixa ou planeta proposta em geral; e calcular a ascensão certa de algum planeta fixo facilmente (PEREIRA, 2010, p. 47).

É provável que com esta recomendação de Regiomontanus, de usar seno 90° igual a 100.000 seria mais útil, tenha inspirado Rheticus a construir as tabelas contidas no *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551), mas com hipotenusa igual a 10^7.

A prova de que Regiomontanus foi um grande influenciador para a obra de Rheticus ocorreu por intermédio de Schoner, pois com a leitura da tese de Pereira (2010) observamos que Schoner era um grande estudioso dos trabalhos de Regiomontanus, principalmente as observações astronômicas, e foi quem enviou Rheticus à Copérnico, com uma carta de recomendação. Zeller (1994) apud Pereira (2010, p. 84) afirma que Copérnico e Rheticus tiveram em mãos alguns trabalhos de Regiomontanus, sendo assim de grande influência para seus estudos.

Como fora dito no subtópico sobre Geocentrismo e Heliocentrismo, é provável que as críticas de Regiomontanus ao sistema de Ptolomeu tenham sido um ponto de influência para que Copérnico tivesse o interesse de mencionar suas ideias sobre sua revolucionária teoria heliocêntrica.

Copérnico foi um personagem dos séculos XV e XVI de grande influência para Rheticus. Afinal, Rheticus foi seu único aluno e discípulo, que contribuiu com a publicação de uma das maiores obras astronômicas o *De Revolutionibus.*

Seus caminhos não se cruzaram tão diretamente. Tudo começou quando Rheticus já era professor da Universidade de Wittemberg, na qual o reitor da Universidade e amigo de Rheticus, Melanchtcon, que tinha tanto interesse em astrologia quanto Rheticus, lhe concedeu uma licença da Universidade. Segundo Repcheck (2011, p.132), isso ocorreu a partir do intuito de que fosse enviado para estudar com alguns dos mais eruditos estudiosos da Europa, a começar por Nuremberg, onde estudaria com um grande e talentoso amigo, Johann Schoner, que o apresentaria aos outros.

Ao chegar em Nuremberg, Rheticus tinha consciência de estar na cidade do grande Regiomontanus, sendo que uma sucessão de astrônomos havia se dedicado a manter e enriquecer o legado de Regiomontanus. Um desses astrônomos era Johann Schoner (REPCHECK, 2011, 132 - 146).

Rheticus sempre teve um grande interesse por astrologia, e precisava da Astronomia para ser mais preciso em suas predições. Enquanto estava com Schoner, conforme Repcheck (2011, p. 151), talvez tivesse uma cópia ou havia lido um breve ensaio de Copérnico sobre a teoria heliocêntrica.

Ao encontrar Copérnico, Rheticus o presenteou com três livros. O primeiro volume continha dois trabalhos: *Elementos* de Euclides, uma edição grega de 1533; e *o Tratado dos triângulos*, de Regiomontanus, editado por Schoner e publicado também 1533. O segundo volume continha três obras: *Instrumentum primi mobilis* de Peter Apin, *De astronomia libri IX*, de Geber e *Pespectiva* de Witelo, todo publicado por Petreius em 1534. O terceiro e último volume era um grande prêmio: *Almagesto*, de Ptolomeu, na tradução grega publicada em 1538 (REPCHECK, 2011, p. 156 - 157).

Passou 2 anos ao lado de seu mestre, tal como se referia a Copérnico. Impressionado com as ideias de Copérnico, pediu autorização para publicar uma espécie de primeiro relato sobre a teoria heliocêntrica, o que lhe foi concedido. Para Roegel (2010, p. 4), o primeiro relato do sistema copernicano não foi publicado por Copérnico e sim por Rheticus em sua obra Narratio Prima, em 1540.

Após a publicação da obra revolucionária de Copérnico, em 1543, que Repcheck (2011, p. 204) afirma ser muito teórica para diversos leitores, os astrólogos, em especial, desejavam utilizar os dados que indicavam as posições dos planetas. Por esse motivo, eram muito importantes as tabelas astronômicas baseadas nos cálculos de Copérnico. Em razão do interesse de Rheticus pela área de estudo e, de acordo com Danielson (2006, p. 133), com o senso de missão copernicana, ele utilizou tais conhecimentos para produzir a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* publicada em 1551.

Podemos observar a grande influência desses dois grandes personagens, Regiomontanus, Copérnico e outro personagens adjacentes, na história da vida e, principalmente, obra do nosso personagem em questão, Rheticus. Abordaremos uma análise da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) no próximo capítulo.

4 ANÁLISE DA OBRA *CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM*

Este capítulo é dedicado a descrever a estrutura da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* e comentar algumas de suas características por intermédio de análise própria estabelecendo relações com outro autor como Roegel (2010).

Pondera-se que o *Canon Doctrinae Triangulorum*, conforme a classificação de "textos históricos" de Brandemberg (2021, p.29), é um texto clássico tendo em vista que sua produção ocorreu antes de 1820; texto de matemática, pois trata-se da produção de conteúdo (tabelas trigonométricas); um livro fonte, já que foi utilizado para pesquisa cujo o intuito é facilitar os cálculos astronômicos; Quanto à investigação, utilizamos a fonte principal, o próprio *Canon*, e as fontes complementares, Danielson (2006) e Roegel (2010). Em relação ao contexto, foi baseado no século XVI, um período de grandes transformações científicas por conta do Renascimento.

Com base em Brandemberg (2021) e balizado em Chaquiam (2022), apresentamos uma análise da obra iniciando por uma pesquisa histórica de como aconteceu sua construção, seguida pela descrição dos elementos que compõem o *Canon* com suas características, como também uma análise da estrutura e valores contidos nas tabelas. Para a análise dos valores, reproduzimos os triângulos com auxílio do software GeoGebra, que destacamos como uma importante ferramenta para trabalhar a trigonometria.

4.1 A construção da obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551)

Após seu retorno para Leipzig, agora como professor e reitor da Universidade de Leipzig, Rheticus entrou nos dois dos anos mais produtivos da sua vida. Além das funções administrativas que agora eram de sua responsabilidade, ele deu palestras sobre astronomia, matemática e geometria (DANIELSON, 2006, p. 132).

Para Danielson (2006, p. 133), Rheticus começou, com o senso de missão copernicana, a trabalhar em uma tabela que seria útil para os estudos em astronomia, mas ele percebeu a quantidade excessiva de tempo, dinheiro e ajuda extra que essas tabelas trigonométricas exigiam, objetivando chegar a um resultado correto e preciso dos valores de seno e cosseno, o que era necessário para mapear o mundo, porém isso teria que competir com outras tarefas de Rheticus.

A questão financeira preocupava Rheticus. Desse modo, conforme Danielson (2006, p.133), a luta em busca de financiamento para o seu projeto dominaria grande parte do resto da carreira de Rheticus, já que a Universidade de Leipzig se manteve firme em sua decisão de não conceder um aumento de salário. Rheticus estava dividido, tal como ocorre com alguns acadêmicos hoje em dia, quando se encontram entre a pesquisa especializada e o trabalho que poderia atrair um público mais amplo.

Rheticus começou a produzir calendários e, em uma carta enviada para o bispo Tiedemann Geise, informava que os venderia não visando ao lucro, mas precisaria do dinheiro para financiar seus projetos do próximo ano (DANIELSON, 2006, p.134).

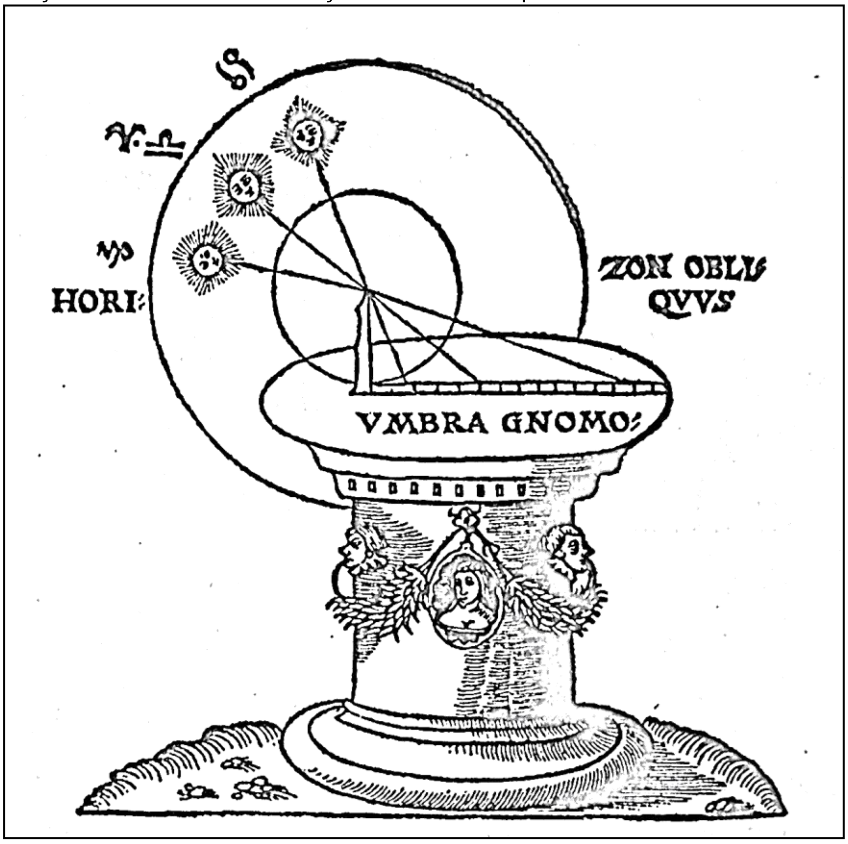
Em seus estudos sobre triângulos, desenvolveu uma tabela trigonométrica que, para Danielson (2006, p. 140), foi a maior e mais significativa obra científica que Rheticus produziu durante esse período, um pequeno panfleto titulado *Canon of the Science of Triangler*, que apareceu no início de 1551.

A relevância dos triângulos para Rheticus já havia sido ilustrada em um trabalho anterior intitulado “*Tabulae Astronomicae*” (Tabelas Astronômicas), publicado em 1542. As tabelas permitiam que astrônomos e geógrafos fizessem cálculos rápidos derivando distâncias de medidas e ângulos. Danielson (2006, p.142) profere que os triângulos podem ser construídos:

> Por um bastão de sombra vertical, ou gnômon, pela linha da sombra ao longo de uma placa horizontal e pela linha diagonal (a hipotenusa) projetada pelo ângulo dos raios do sol. Na ilustração, o sol do meio-dia projeta sombras diferentes no solstício de inverno (marcado pelo símbolo de capricórnio), nos equinócios (Áries e Libra) e no solstício de verão (Câncer). Usando a trigonometria, pode-se usar a escala horizontal para calcular latitude. Cálculos precisos de tempo e latitude podem, por sua vez, ser usados como base para outras observações astronômicas, como as da posição lunar e planetária. E quanto mais alto for o gnômon, mais precisas podem ser as medidas (DANIELSON, 2006, p. 142, tradução nossa).

A ilustração a qual o autor se refere pode ser observada na Figura 7. Como é relatado por Danielson (2006), a figura aparecia nas páginas de rosto da maioria das obras de Rheticus, incluindo o *Canon*.

Ilustração 5 – Gnômon. Ilustração de Rheticus para as Tabelas Astronômicas



Fonte: Danielson (2006, p. 142).

Observando a figura, fica evidente um triângulo retângulo cujo o ângulo varia de acordo com o raio do sol.

A partir dessas informações, Rheticus definiu suas razões trigonométricas, relacionando os lados do triângulo formado no decorrer do tempo em minutos. Portanto, as seis funções trigonométricas foram definidas pela primeira vez por Rheticus a partir dos lados de triângulos retângulos, na sua obra "*Canon Doctrinae Triangulorum*", publicada em 1551 em Leipzig. Conforme Costa (1997, p. 13):

> Rheticus (1514-1576) retomou, um século depois, as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante e de dez em dez segundos para o arco de 1º. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45º e completando a tabela com o uso da igualdade sen x = cos (π/2-x). Deve-se também a Rheticus a introdução das secantes na trigonometria europeia e os cálculos do sen n θ, em termos de sen θ, que foram retomados e aprimorados por Jacques Bernoulli, em 1702 (COSTA, 1997, p. 13).

Com base no relato acima, podemos observar que, para encontrar os valores das razões em ângulos acima de 45º, Rheticus utilizou uma característica de ângulos complementares (quando a soma dos ângulos é igual a 90º), em que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar, assim como a cossecante de um ângulo é igual à secante do seu complementar e tangente de um ângulo é igual à cotangente de seu complementar e vice-versa.

Roegel (2010, p. 5) especifica que a tabela de senos foi compilada de Regiomontanus (1436-1476), mas a das tangentes e secantes foram recalculadas a partir dos senos, visto que não considerou ângulos em círculo e sim triângulos em que um dos lados era constante e deu os comprimentos dos outros lados em função do ângulo tomado com relação a base, no centro. Rheticus foi o primeiro a publicar uma tabela de secantes, na qual teve que calcular cerca de 1080 razões (90x6x2). Os nomes seno, tangente e secantes não foram dados por Rheticus, e os lados foram denominados como *basis* (base), *perpendiculum* (perpendicular) e *hypotenusa* (hipotenusa).

De fato, com exceção do seno e do cosseno, as outras nomenclaturas são do início do século XVII.

Para Danielson (2006, p.00), Rheticus teve computadores trabalhando para ele por 12 anos, sendo esses computadores financiados pelo imperador Maximiliano II. Custando 50 vezes mais que o salário anual de Rheticus em Wettenberg.

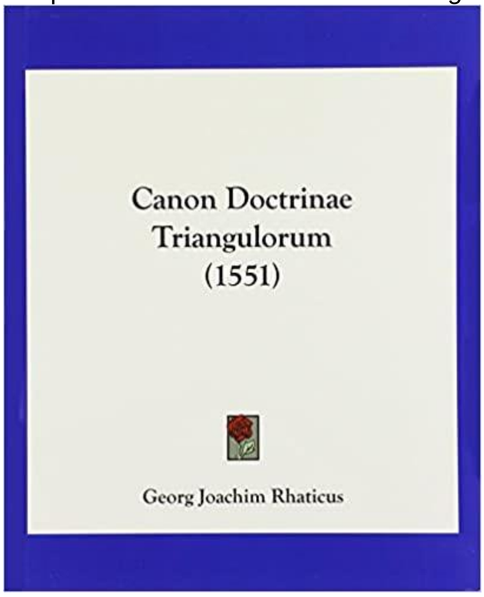
Rheticus frisa que a principal causa dos erros nas observações não era tanto a imprecisão dos instrumentos, mas sim os erros nas tabelas trigonométricas utilizadas para os cálculos. Ele, portanto, resolveu recalcular essas tabelas com muito mais precisão. O *Canon Doctrinae Triangulorum* de 1551, sobre o qual apresentamos uma descrição a seguir, foi apenas um primeiro passo nessa empreitada (ROEGEL, 2010, p.4).

4.2 Descrição e características do *Canon*

Buscando uma análise a priore do *Canon*, Roegel (2010, p. 6) fornece a informação de que o livro de Rheticus continha uma capa, um poema Introdutório, a tabela trigonométrica e seis páginas de explicações.

Comparando as informações prestadas por Roegel (2010) e o livro *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) do autor Georg Joachim Rheticus, essas informações conferem. Acrescentamos que a capa, um poema Introdutório, a tabela trigonométrica e seis páginas de explicações estão em latim, enquanto as demais páginas estão em espanhol.

Ilustração 6 - Capa do livro *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551)



Fonte: Site da Amazon.

O livro citado é da editora Kessinger Publishing, com data de publicação em 24 setembro 2009. Possui 194 páginas e dimensões 19.05 x 1.04 x 23.5 cm. Além desse livro, recentemente encontramos os escritos de Rheticus na Biblioteca Nacional Austríaca (*Osterreichische Mationalbibliothek*) de forma *on-line.*

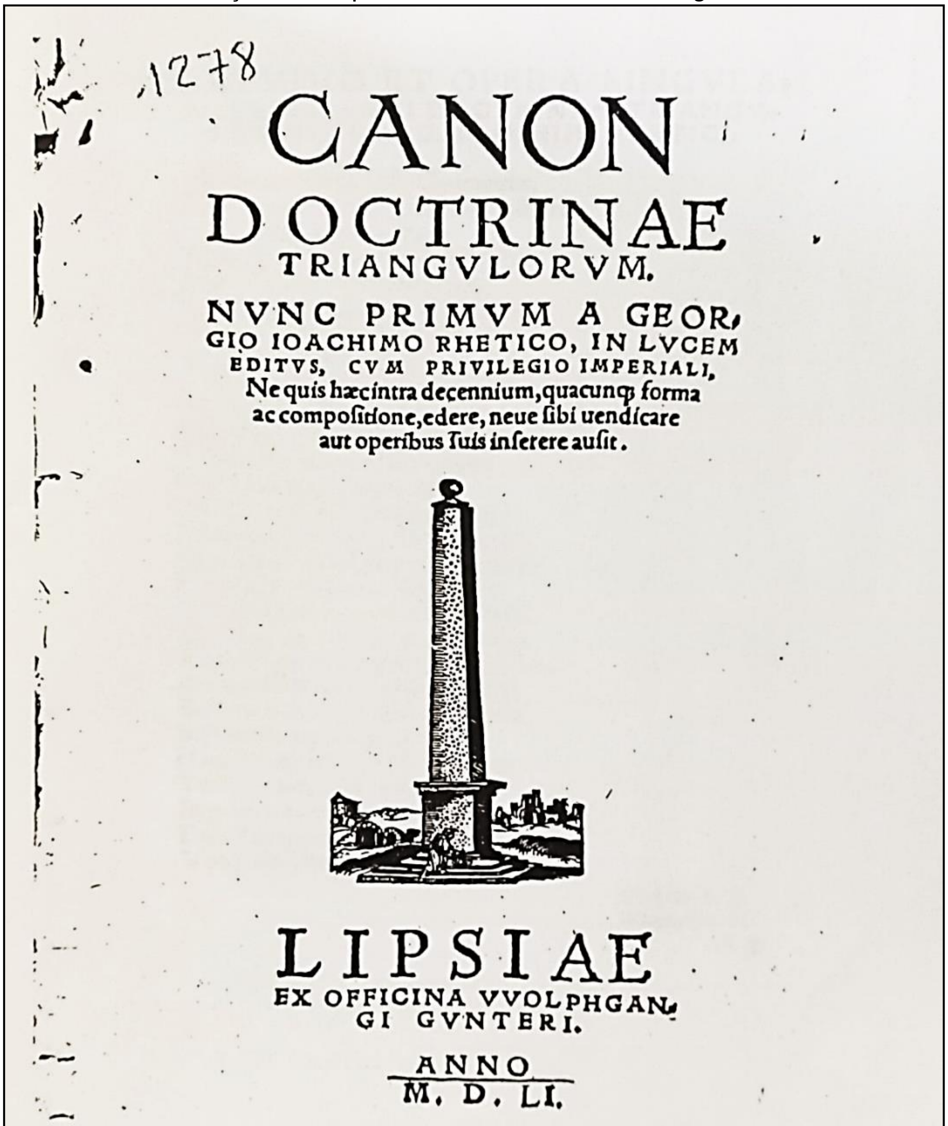
4.3 Análise das tabelas do *Canon*

Na apresentação da obra investigada, em sua versão digitalizada, temos a seguinte nota editorial esclarecedora, na qual consta:

> No interesse de criar uma seleção mais extensa de reimpressões de livros históricos raros, optamos por reproduzir este título, mesmo que possa ter imperfeições ocasionais, como páginas ausentes e borradas, texto ausente, fotos ruins, marcações, fundos escuros e outras reproduções questões fora do nosso controle. Como este trabalho é culturalmente importante, o disponibilizamos como parte de nosso compromisso de proteger, preservar e promover a literatura mundial. Obrigado pela sua compreensão (tradução nossa).

A capa do *Canon* de Rheticus, além do título, traz uma frase escrita em latim com o nome do autor, a data de publicação e a imagem de um Gnômon. Como destacado em Danielson (2006), Rheticus costumava utilizar em suas capas de trabalho a imagem do instrumento astronômico citado.

Ilustração 7 - Capa do *Canon Doctrinae Triangulorum*



1278

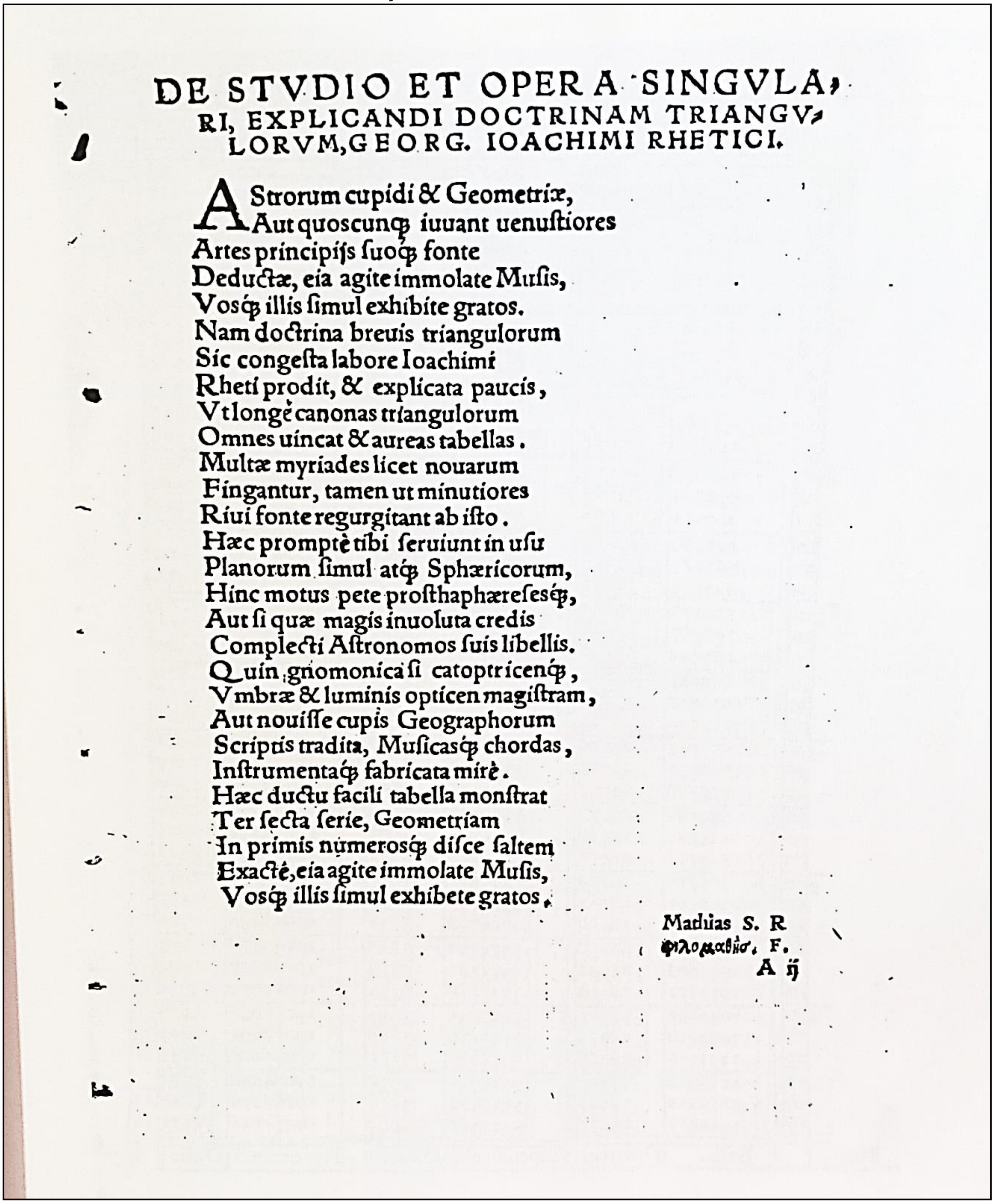
CANON
DOCTRINAE
TRIANGVLORVM.
NVNC PRIMVM A GEOR-
GIO IOACHIMO RHETICO, IN LVCEM
EDITVS, CVM PRIVILEGIO IMPERIALI,
Ne quis hæc intra decennium, quacunq; forma
ac compositione, edere, neue sibi uendicare
aut operibus suis inserere ausit.

LIPSIAE
EX OFFICINA VVOLPHGAN-
GI GVNTERI.
ANNO
M. D. LI.

Fonte: *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) pela editora Kessinger Publishing (2009).

O prefácio da obra é composto por um poema em Latim, escrito por Mathias. S. R.

Ilustração 8 - Prefácio do *Canon*



DE STVDIO ET OPERA SINGVLARI, EXPLICANDI DOCTRINAM TRIANGVLORVM, GEORG. IOACHIMI RHETICI.

Aſtrorum cupidi & Geometriæ,
Aut quoscunq; iuuant uenuſtiores
Artes principiis ſuoq; fonte
Deductæ, eia agite immolate Muſis,
Vosq; illis ſimul exhibite gratos.
Nam doctrina breuis triangulorum
Sic congeſta labore Ioachimi
Rheti prodit, & explicata paucis,
Vt longè canonas triangulorum
Omnes uincat & aureas tabellas.
Multæ myriades licet nouarum
Fingantur, tamen ut minutiores
Riui fonte regurgitant ab iſto.
Hæc promptè tibi ſeruiunt in uſu
Planorum ſimul atq; Sphæricorum,
Hinc motus pete proſthaphæreſesq;,
Aut ſi quæ magis inuoluta credis
Complecti Aſtronomos ſuis libellis.
Quin gnomonica ſi catoptricenq;,
Vmbræ & luminis opticen magiſtram,
Aut nouiſſe cupis Geographorum
Scriptis tradita, Muſicasq; chordas,
Inſtrumentaq; fabricata mirè.
Hæc ductu facili tabella monſtrat
Ter ſecta ſerie, Geometriam
In primis numerosq; diſce ſaltem
Exactè, eia agite immolate Muſis,
Vosq; illis ſimul exhibete gratos.

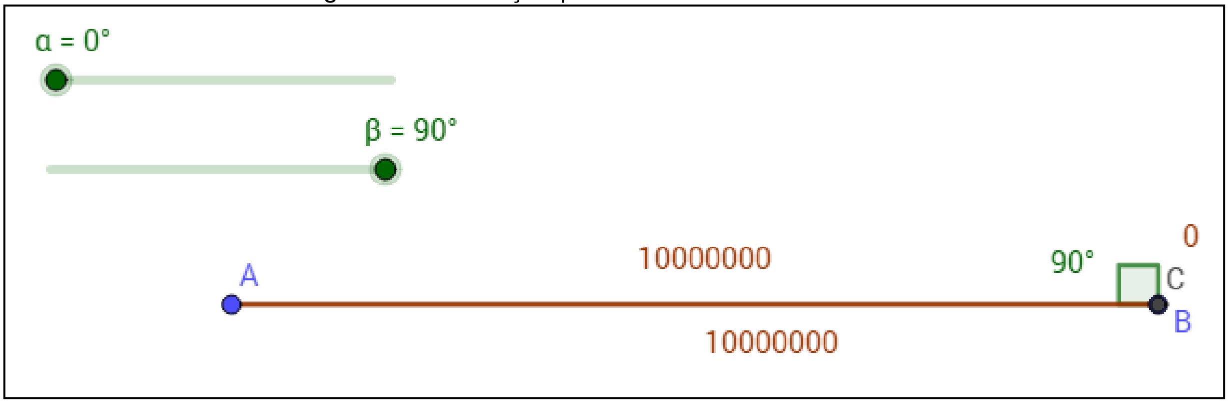
Mathias S. R
φιλομαθής, F.
A ῆ

Fonte: *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) pela editora Kessinger Publishing (2009).

Nas páginas subsequentes, temos as tabelas trigonométricas. Para que fossem construídas, Rheticus utilizou os lados de um triângulo retângulo e deles calculou seis razões, sendo esses cálculos para inclinações de 10’ em 10’ (dez em dez minutos), partindo da inclinação zero e base 10.000.000 (dez milhões), registrando os valores nas tabelas que compõem o *Canon*.

Para ilustrar, buscamos reproduzir suas ideias com a ajuda de um software de geometria dinâmica. Como reproduzimos a seguir:

Figura 11 - Ilustração para o cálculo na base de 10^7



Fonte: Paulo e Brandemberg (2023, p. 11432).

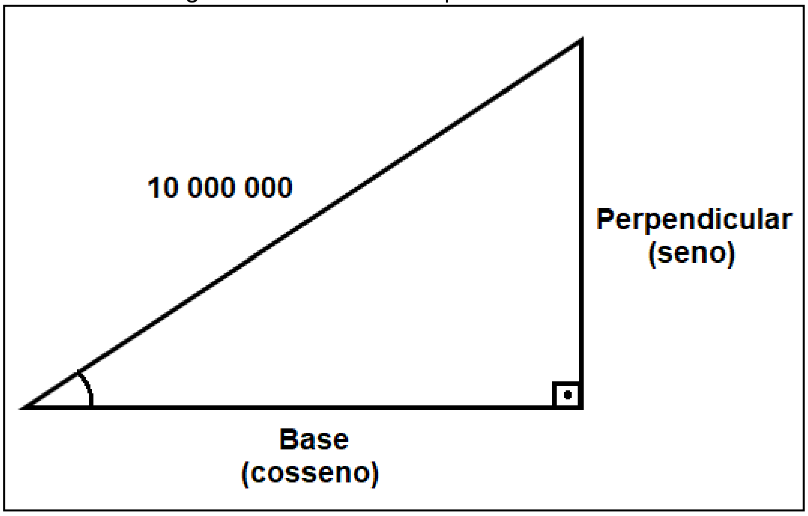
Com seu intervalo de inclinação de 10’ em 10’, quando formava 60’ o matemático Rheticus transformava em 1º, fazendo assim até o ângulo de 45º. Calculou as seis razões trigonométricas para todos os ângulos do primeiro quadrante, sendo que para ângulos maiores que 45º utilizou a relação de ângulos complementares, ou seja, o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complementar, assim como a cossecante de um ângulo é igual à secante do seu complementar e a cotangente de um ângulo é igual à tangente de seu complementar. De fato, com os valores obtidos diferentes de zero, é possível inverter as razões.

Quando aumentava a inclinação dos ângulos, obtinha novos lados do triângulo retângulo e as seis razões eram calculadas novamente, com até a 7 casa decimal, sem a utilização da vírgula, e se registrava a diferença de razões de um ângulo para o outro ao lado de cada razão.

Para Roegel (2010, p. 6), Rheticus não usa os nomes seno, cosseno etc. Entretanto, usa os nomes dos lados de um triângulo, Base, Perpendicular e Hipotenusa. A tabela é dividida em três colunas abrangendo duas páginas. Observamos que a primeira e a metade da segunda coluna estão na página inicial e a outra metade da segunda e a terceira coluna estão na segunda página.

Na primeira coluna, a hipotenusa é constante em 10^7 e a "perpendicular" e a "base" são nossos seno e cosseno, respectivamente. Obtendo os valores os senos e cossenos no intervalo de 10'. Como observamos na figura:

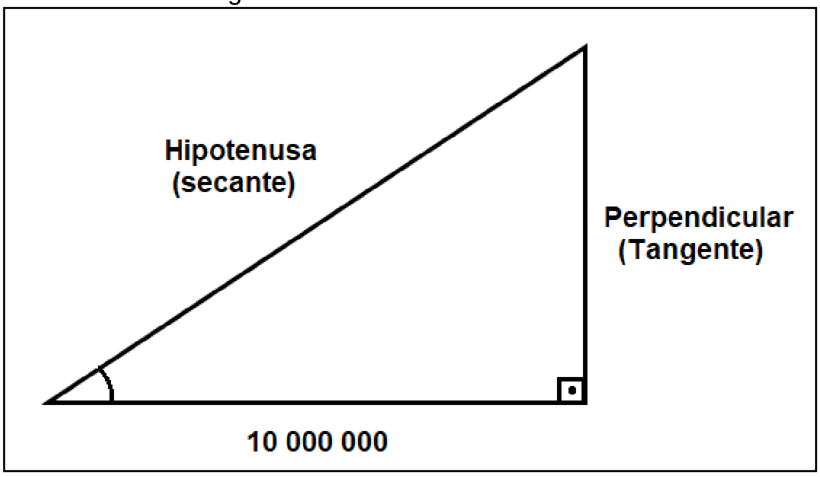
Figura 12 - Fixando a hipotenusa em 10^7



Fonte: Elaborado pela autora.

Na coluna do meio, a base é feita 10^7, ao passo que a hipotenusa e a perpendicular são nossa secante e tangente, respectivamente. Ou seja, para o registro da segunda coluna ele fixou a base com o valor do raio e obteve os valores de secantes e tangentes para intervalos de 10'.

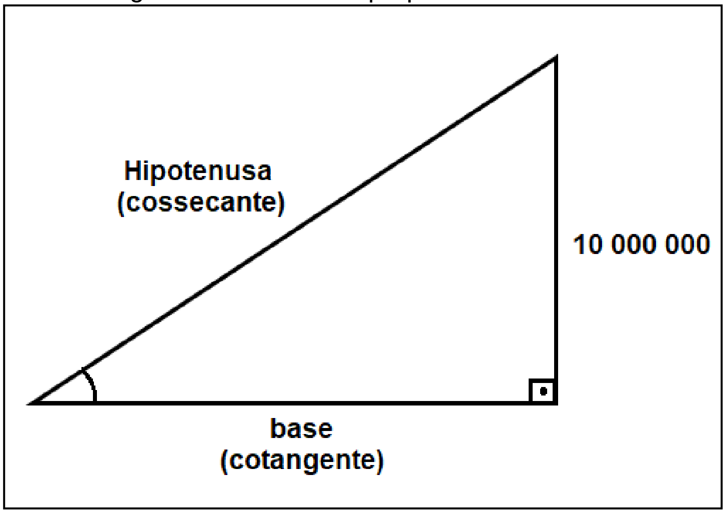
Figura 13 - Fixando a base em 10^7



Fonte: Elaborado pela autora.

No último caso, a perpendicular torna-se constante a 10^7. A hipotenusa e base são nossas cossecantes e cotangentes, respectivamente. Logo, fixando a perpendicular em 10^7, obtém-se os valores de cossecantes e cotangentes para cada intervalo de 10'.

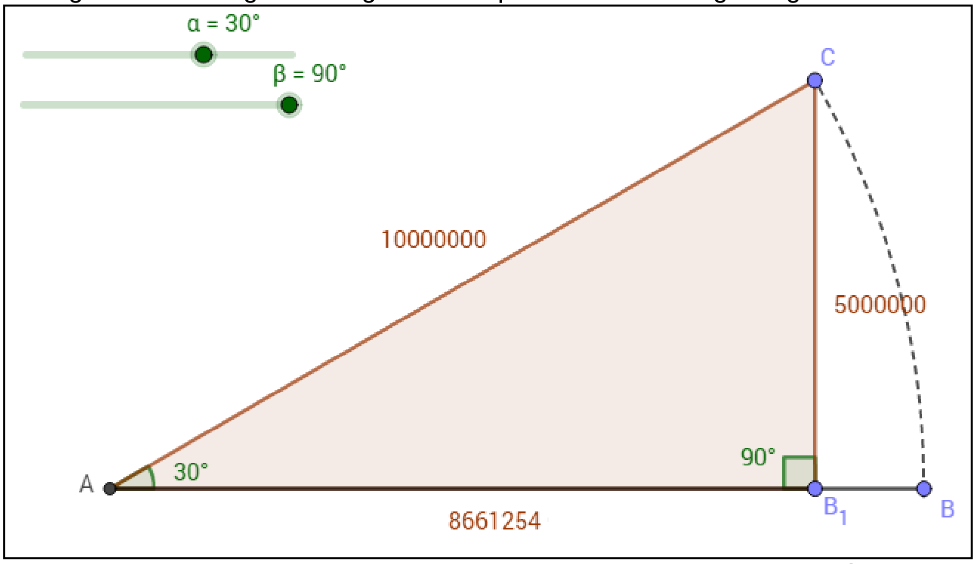
Figura 14 - Fixando a perpendicular em 10^7



Fonte: Elaborado pela autora

Para um exemplo prático, tomamos a hipotenusa fixa com valor de 10^7. Observamos como a base e a perpendicular alteram seus valores, com o auxílio do software GeoGebra. No caso de fixarmos a Hipotenusa (Figura 13), mostramos a seguir.

Figura 15 - Triângulo retângulo com hipotenusa 10^7 e ângulo agudo de 30º



Fonte: Paulo e Brandemberg (2023, p. 11433) de acordo com a linha 180 da página 9 do *Canon.*

Como uma das formas de comprovarmos tais lados do triângulo, aplicamos o teorema de Pitágoras ou a relação fundamental da trigonometria nos valores de seno e cosseno dados na tabela trigonométrica de Rheticus, para determinar o valor da Hipotenusa pelo teorema de Pitágoras, partindo dos valores dos outros dois lados (catetos) dados, temos:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$

$$(\text{Hipotenusa})^2 = 8660254^2 + 5000000^2$$

$$(\text{Hipotenusa})^2 = 74.999.999.344.516 + 25.000.000.000.000$$

$$(\text{Hipotenusa})^2 = 99.999.999.344.516$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{99.999.999.344.516}$$

$$\text{Hipotenusa} \cong 9.999.999{,}9$$

Utilizando o método do arredondamento, a hipotenusa se aproxima de 10.000.000 satisfazendo, assim, a hipótese que fixa o valor da Hipotenusa para todos os outros ângulos. Com isso, encontramos os valores de senos e cossenos para essas inclinações.

Se considerarmos, para esclarecimento, esse triângulo retângulo inscrito em uma circunferência, temos que a hipotenusa é o raio da circunferência que vale 10^7. Com o aumento da inclinação do ângulo agudo, percebemos também que a base vai diminuindo. No exemplo da figura, ela saiu do ponto B em que o comprimento do segmento valia 10^7 para o ponto B' que agora vale 8661254, enquanto isso a perpendicular vai aumentando seu tamanho.

Para esse triângulo retângulo, calcularmos-se o seno de 30º utilizando a divisão entre o cateto oposto pela hipotenusa. Obtemos o valor 0,5 (meio), mas em sua tabela Rheticus usa esse valor relacionado ao raio de 10 milhões da circunferência, ou seja, metade do raio é 5.000.000, que é o valor registrado em sua tabela trigonométrica.

O mesmo acontece com todas as outras razões anotadas na tabela, por exemplo, a cossecante que é o inverso do seno, sendo a divisão da hipotenusa pelo cateto oposto (perpendicular) é igual a 2, ou seja, o dobro do raio de 10.000.000, obtendo o valor de 20.000.000, conforme a linha 210, da página 11 do Canon.

Os valores das seis razões trigonométricas estão registrados em 07 (sete) tabelas. A primeira tem um intervalo de ângulo de 0º a 6º, contando as inclinações de 10' em 10' para todas as tabelas. A segunda tabela o ângulo varia 7º a 13º, A terceira de 14º a 20º, a quarta de a quarta de 21º a 27º, a quinta de 28º a 34º, a sexta 35º a 41º e a sétima de 42º a 45º. Neste sentido, de 0º a 45º (de cima para baixo) a ordem das razões trigonométricas ficou da seguinte maneira: o seno, o cosseno, a secante, a tangente, a cossecante e a cotangente, todas referentes à inclinação do ângulo agudo, escritas na notação de Rheticus.

Os mesmos valores registrados para ângulos de 0º a 45º são reutilizados nas sete tabelas, dessa vez com o complemento de cada ângulo, ou seja, de 45º a 90º. Indo de trás para frente. Temos a sétima tabela que escreve os valores das razões para ângulos de 45º a 48º. A sexta varia de 49º a 55º, a quinta de 56º a 62º, a quarta de 63º 69º, a terceira de 70º a 76º, a segunda de 77º a 83º e a primeira de 84º a 90º. Neste sentido, de 45º a 90º (de baixo para cima) as razões trigonométricas ficaram organizadas assim: cosseno, seno, cossecante, cotangente, secante e tangente, todas referentes ao ângulo agudo. Esquematizado da seguinte maneira:

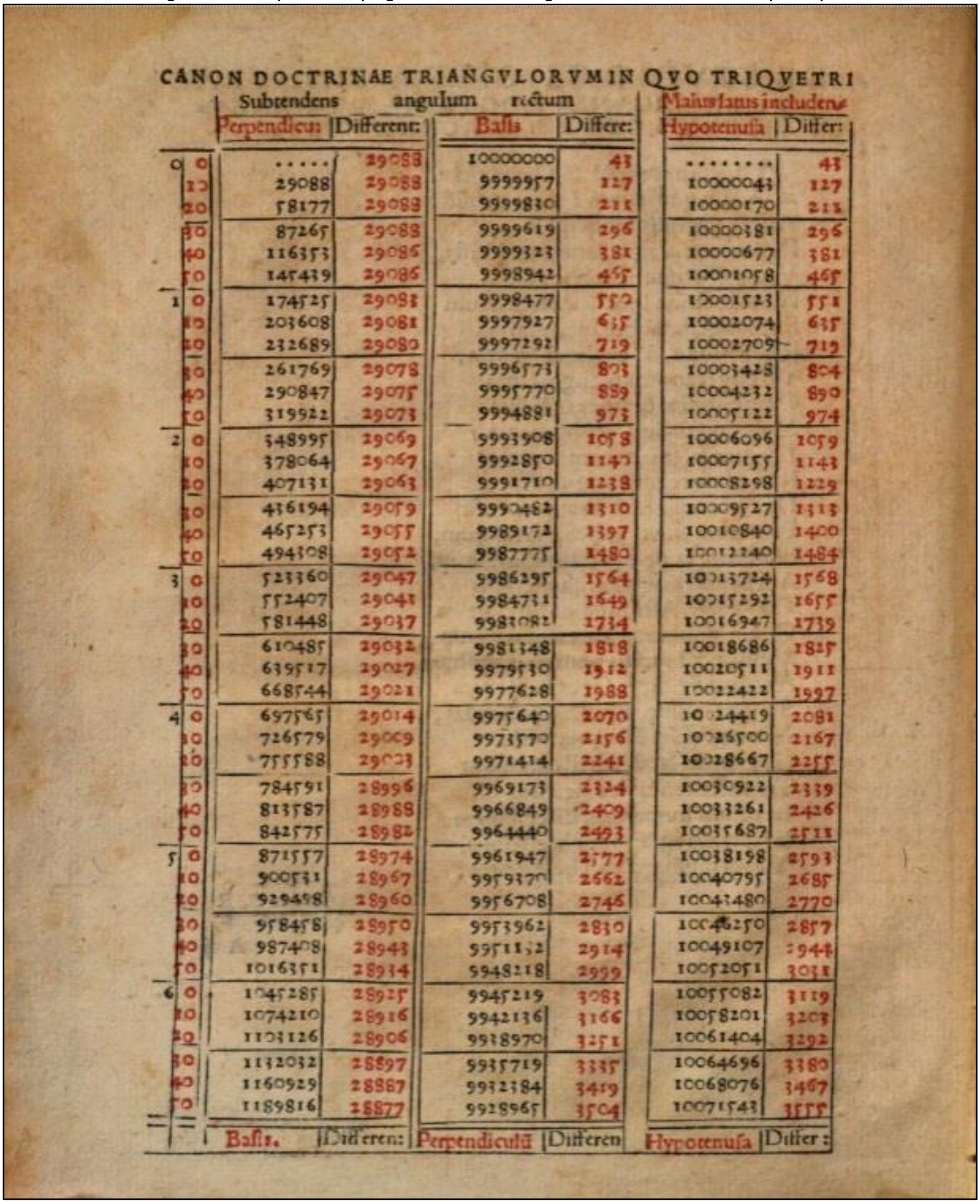
Quadro 3 - Esquema da organização do *Canon* (1551)

		SEN	DIF.	COS	DIF.	SEC	DIF.	TG	DIF.	COSSEC	DIF.	COTG	DIF.		
0º	0′													0′	**90º**
	10′													50′	
	20′													40′	
	30′													30′	
	40′													20′	
	50′													10′	
1º	0′													0′	**89º**
		COS	DIF.	SEN	DIF.	COSSEC	DIF.	COTG	DIF.	SEC	DIF.	TG	DIF.		
		1ª coluna				**2ª coluna**				**3ª coluna**					

Fonte: Elaborado pela autora.

As tabelas aparentemente foram produzidas em modo paisagem. Logo, no texto ao que tivemos acesso, uma tabela está representada em duas folhas subsequentes. Como podemos observar (nas Figuras 16 e 17) a seguir, na primeira tabela, de cima para baixo temos os valores das seis razões para os ângulos de 0º a 6º e de baixo para cima os ângulos de 84º a 90º.

Figura 16 - A primeira página da tabela trigonométrica do *Canon* (1551)

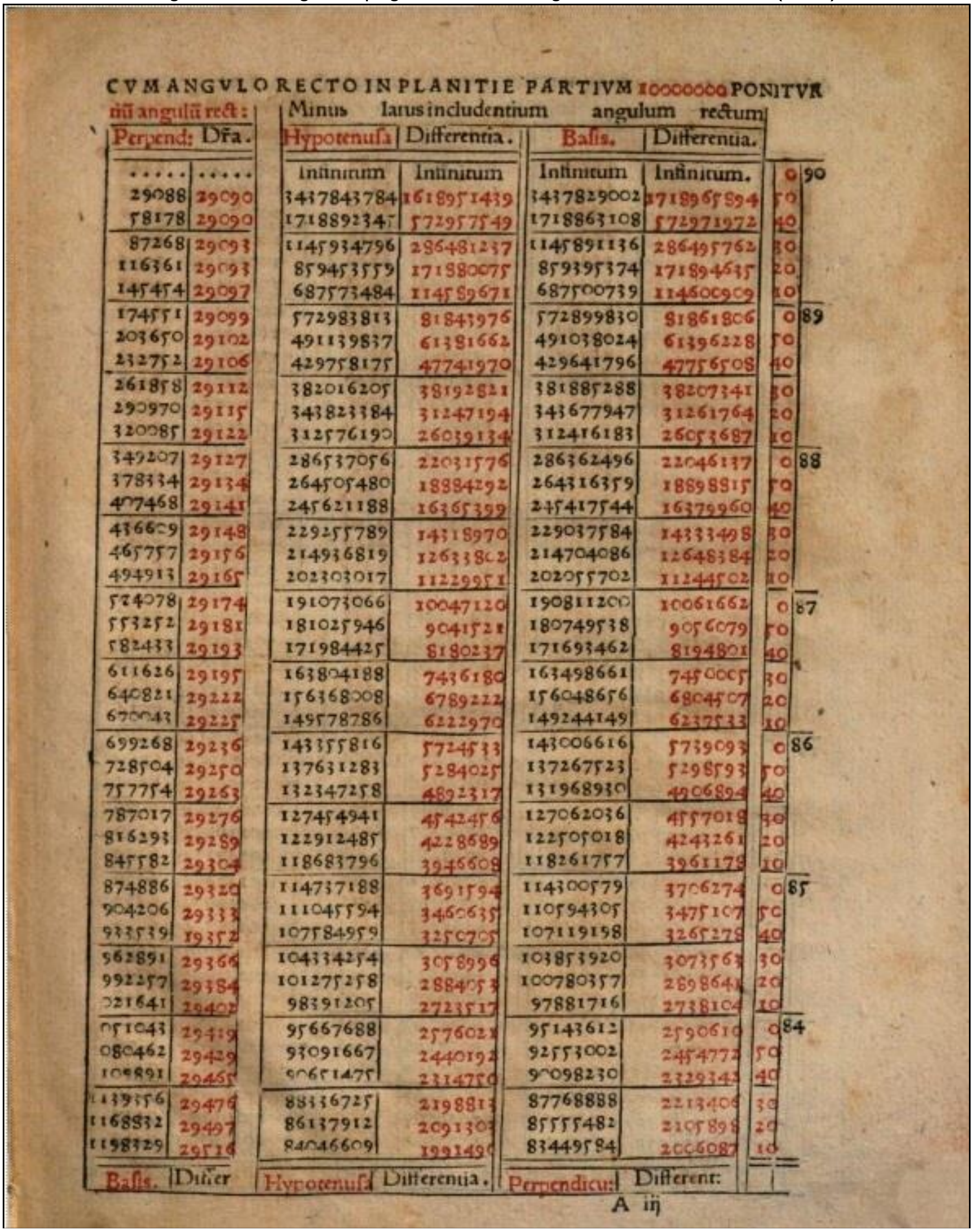


CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens	angulum	rectum		Maius latus includens	
		Perpendicu:	Different:	Basis	Differe:	Hypotenusa	Differ:
0	0	.....	29088	10000000	43	....	43
	10	29088	29088	9999957	127	10000043	127
	20	58177	29088	9999830	211	10000170	211
	30	87265	29088	9999619	296	10000381	296
	40	116353	29086	9999323	381	10000677	381
	50	145439	29086	9998942	465	10001058	465
1	0	174525	29083	9998477	550	10001523	551
	10	203608	29081	9997927	635	10002074	635
	20	232689	29080	9997292	719	10002709	719
	30	261769	29078	9996573	803	10003428	804
	40	290847	29075	9995770	889	10004232	890
	50	319922	29073	9994881	973	10005122	974
2	0	348995	29069	9993908	1058	10006096	1059
	10	378064	29067	9992850	1140	10007155	1143
	20	407131	29063	9991710	1238	10008298	1229
	30	436194	29059	9990482	1310	10009527	1313
	40	465253	29055	9989172	1397	10010840	1400
	50	494308	29052	9987775	1480	10012240	1484
3	0	523360	29047	9986295	1564	10013724	1568
	10	552407	29041	9984731	1649	10015292	1655
	20	581448	29037	9983082	1734	10016947	1739
	30	610485	29032	9981348	1818	10018686	1825
	40	639517	29027	9979530	1912	10020511	1911
	50	668544	29021	9977628	1988	10022422	1997
4	0	697565	29014	9975640	2070	10024419	2081
	10	726579	29009	9973570	2156	10026500	2167
	20	755588	29003	9971414	2241	10028667	2255
	30	784591	28996	9969173	2324	10030922	2339
	40	813587	28988	9966849	2409	10033261	2426
	50	842575	28982	9964440	2493	10035687	2511
5	0	871557	28974	9961947	2577	10038198	2593
	10	900531	28967	9959370	2662	10040795	2685
	20	929498	28960	9956708	2746	10043480	2770
	30	958458	28950	9953962	2830	10046250	2857
	40	987408	28943	9951132	2914	10049107	2944
	50	1016351	28934	9948218	2999	10052051	3031
6	0	1045285	28925	9945219	3083	10055082	3119
	10	1074210	28916	9942136	3166	10058201	3203
	20	1103126	28906	9938970	3251	10061404	3292
	30	1132032	28897	9935719	3335	10064696	3380
	40	1160929	28887	9932384	3419	10068076	3467
	50	1189816	28877	9928965	3504	10071543	3555
		Basis.	Differen:	Perpendiculũ	Differen	Hypotenusa	Differ:

Fonte: *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551, p. 1).

Figura 17- A segunda página da tabela trigonométrica do *Canon* (1551)



CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR

ñũ angulũ rect: | Minus latus includentium angulum rectum

Perpend:	Dfa.	Hypotenusa	Differentia.	Basis.	Differentia.		
.....	.....	Infinitum	Infinitum	Infinitum	Infinitum.	0	90
29088	29090	3437843784	1618951439	3437829002	1718965894	50	
58178	29090	1718892347	572957549	1718863108	572971972	40	
87268	29093	1145934796	286481237	1145891136	286495762	30	
116361	29093	859453559	171880075	859395374	171894635	20	
145454	29097	687573484	114589671	687500739	114600909	10	
174551	29099	572983813	81843976	572899830	81861806	0	89
203650	29102	491139837	61381662	491038024	61396228	50	
232752	29106	429758175	47741970	429641796	47756508	40	
261858	29112	382016205	38192821	381885288	38207341	30	
290970	29115	343823384	31247194	343677947	31261764	20	
320085	29122	312576190	26039134	312416183	26053687	10	
349207	29127	286537056	22031576	286362496	22046137	0	88
378334	29134	264505480	18884292	264316359	18898815	50	
407468	29141	245621188	16365399	245417544	16379960	40	
436609	29148	229255789	14318970	229037584	14333498	30	
465757	29156	214936819	12633802	214704086	12648384	20	
494913	29165	202303017	11229951	202055702	11244502	10	
524078	29174	191073066	10047120	190811200	10061662	0	87
553252	29181	181025946	9041521	180749538	9056079	50	
582433	29193	171984425	8180237	171693462	8194801	40	
611626	29195	163804188	7436180	163498661	7450005	30	
640821	29222	156368008	6789222	156048656	6804507	20	
670043	29225	149578786	6222970	149244149	6237533	10	
699268	29236	143355816	5724533	143006616	5739093	0	86
728504	29250	137631283	5284025	137267523	5298593	50	
757754	29263	132347258	4892317	131968930	4906894	40	
787017	29276	127454941	4542456	127062036	4557018	30	
816293	29289	122912485	4228689	122505018	4243261	20	
845582	29304	118683796	3946608	118261757	3961178	10	
874886	29320	114737188	3691594	114300579	3706274	0	85
904206	29333	111045594	3460635	110594305	3475107	50	
933539	29352	107584959	3250705	107119158	3265278	40	
962891	29366	104334254	3058996	103853920	3073563	30	
992257	29384	101275258	2884053	100780357	2898641	20	
021641	29402	98391205	2723517	97881716	2738104	10	
051043	29419	95667688	2576021	95143612	2590610	0	84
080462	29429	93091667	2440192	92553002	2454772	50	
109891	29465	90651475	2314750	90098230	2329343	40	
1139356	29476	88336725	2198813	87768888	2213406	30	
1168832	29497	86137912	2091303	85555482	2105898	20	
1198329	29516	84046609	1991499	83449584	2006087	10	
Basis.	Differ	Hypotenusa	Differentia.	Perpendicul	Different:		

A iij

Fonte: *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551, p.2).

Ao analisar os valores dessas tabelas, com apoio em Roegel (2010), identificamos alguns erros nos valores das razões, como as razões calculadas para o ângulo zero, por exemplo. Na tabela acima, o matemático Rheticus considerou o seno do ângulo como "**........**". Acreditamos que isso significa a não existência dessa razão em relação a esse ângulo quando, na verdade, o seno de 0º equivale a zero; o cosseno do mesmo ângulo atribuiu o valor 10000000, que corresponde de fato ao seu valor cos 0º = 1; a secante do ângulo classificou da mesma maneira que o seno, o que não corresponde, pois, a secante é o inverso do cosseno. Logo, também deveria valer 10000000; a tangente também é classificada da mesma forma quando, na verdade, a tangente de 0º equivale a zero; a cossecante e a cotangente do ângulo consideram infinito, o que de fato é, pois em ambas as razões o denominador é a perpendicular, o que para o ângulo de 0º é igual a zero. Logo, o resultado de uma divisão de um número não-nulo por zero tende ao infinito.

Essa percepção o autor Roegel (2010) também observou. Com isso, reconstruiu a tabela de Rheticus com valores mais precisos, diferenciando poucos valores como podemos comparar na figura a seguir:

Figura 18 - Tabela de Rheticus recalculada por Roegel (2010) – primeira parte

CANON DOCTRINÆ TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens	angulum		rectum	Maius latus includen-	
		Perpendicu:	Differen:	Basis	Differen:	Hypotenusa	Differen:
0	0	0	29089	10000000	42	10000000	42
	10	29089	29088	9999958	127	10000042	127
	20	58177	29088	9999831	212	10000169	212
	30	87265	29088	9999619	296	10000381	296
	40	116353	29086	9999323	381	10000677	381
	50	145439	29085	9998942	465	10001058	465
1	0	174524	29084	9998477	550	10001523	550
	10	203608	29082	9997927	635	10002073	635
	20	232690	29079	9997292	719	10002708	720
	30	261769	29078	9996573	803	10003428	804
	40	290847	29075	9995770	889	10004232	889
	50	319922	29073	9994881	973	10005121	974
2	0	348995	29070	9993908	1057	10006095	1059
	10	378065	29066	9992851	1142	10007154	1144
	20	407131	29063	9991709	1227	10008298	1229
	30	436194	29059	9990482	1311	10009527	1314
	40	465253	29055	9989171	1396	10010841	1398
	50	494308	29052	9987775	1480	10012239	1484
3	0	523360	29046	9986295	1564	10013723	1570
	10	552406	29042	9984731	1649	10015293	1654
	20	581448	29037	9983082	1734	10016947	1740
	30	610485	29032	9981348	1818	10018687	1825
	40	639517	29027	9979530	1903	10020512	1911
	50	668544	29021	9977627	1986	10022423	1996
4	0	697565	29015	9975641	2072	10024419	2082
	10	726580	29009	9973569	2156	10026501	2168
	20	755589	29002	9971413	2240	10028669	2253
	30	784591	28996	9969173	2324	10030922	2339
	40	813587	28989	9966849	2409	10033261	2426
	50	842576	28981	9964440	2493	10035687	2511
5	0	871557	28975	9961947	2577	10038198	2598
	10	900532	28967	9959370	2662	10040796	2684
	20	929499	28959	9956708	2746	10043480	2771
	30	958458	28950	9953962	2830	10046251	2857
	40	987408	28943	9951132	2915	10049108	2944
	50	1016351	28934	9948217	2998	10052052	3031
6	0	1045285	28925	9945219	3083	10055083	3117
	10	1074210	28916	9942136	3167	10058200	3205
	20	1103126	28906	9938969	3250	10061405	3292
	30	1132032	28897	9935719	3335	10064697	3380
	40	1160929	28887	9932384	3419	10068077	3467
	50	1189816	28877	9928965	3503	10071544	3554
		Basis:	Differen:	Perpendiculū	Differen:	Hypotenusa	Differen:

Fonte: Roegel (2010, p.16).

Figura 19 - Tabela de Rheticus recalculada por Roegel (2010) – segunda parte

CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR

tiū angulū rect:		Minus latus includentium angulum rectum.					
Perpend:	Differen:	Hypotenusa	Differen:	Basis.	Differen:		
0	29089	Infinitum	Infinitum	Infinitum	Infinitum	0	90
29089	29089	3437751619	1718868537	3437737075	1718883082	50	
58178	29091	1718883082	572952947	1718853993	572967492	40	
87269	29092	1145930135	286474049	1145886501	286488594	30	
116361	29093	859456086	171882491	859397907	171897035	20	
145454	29097	687573595	114586710	687500872	114601256	10	
174551	29099	572986885	81846265	572899616	81860810	0	89
203650	29103	491140620	61383486	491038806	61398033	50	
232753	29106	429757134	47741634	429640773	47756180	40	
261859	29111	382015500	38192337	381884593	38206884	30	
290970	29116	343823163	31247393	343677709	31261942	20	
320086	29122	312575770	26038687	312415767	26053234	10	
349208	29127	286537083	22031987	286362533	22046537	0	88
378335	29134	264505096	18883868	264315996	18898418	50	
407469	29140	245621228	16365372	245417578	16379923	40	
436609	29148	229255856	14319093	229037655	14333645	30	
465757	29156	214936763	12633923	214704010	12648475	20	
494913	29165	202302840	11229614	202055535	11244168	10	
524078	29173	191073226	10047038	190811367	10061593	0	87
553251	29183	181026188	9041848	180749774	9056405	50	
582434	29192	171984340	8180258	171693369	8194814	40	
611626	29203	163804082	7436155	163498555	7450714	30	
640829	29214	156367927	6789111	156047841	6803671	20	
670043	29225	149578816	6222946	149244170	6237507	10	
699268	29237	143355870	5724721	143006663	5739285	0	86
728505	29250	137631149	5283984	137267378	5298548	50	
757755	29262	132347165	4892217	131968830	4906783	40	
787017	29276	127454948	4542425	127062047	4556992	30	
816293	29290	122912523	4228818	122505055	4243388	20	
845583	29304	118683705	3946573	118261667	3961144	10	
874887	29319	114737132	3691640	114300523	3706213	0	85
904206	29334	111045492	3460608	110594310	3475184	50	
933540	29350	107584884	3250579	107119126	3265155	40	
962890	29367	104334305	3059081	103853971	3073660	30	
992257	29384	101275224	2883997	100780311	2898579	20	
1021641	29401	98391227	2723505	97881732	2738087	10	
1051042	29420	95667722	2576023	95143645	2590610	0	84
1080462	29437	93091699	2440187	92553035	2454774	50	
1109899	29457	90651512	2314797	90098261	2329387	40	
1139356	29476	88336715	2198814	87768874	2213406	30	
1168832	29497	86137901	2091315	85555468	2105910	20	
1198329	29517	84046586	1991496	83449558	2006094	10	
Basis.	Differen:	Hypotenusa	Differen:	Perpendicu:	Differen:		

Fonte: Roegel (2010, p.17).

Realizamos, na elaboração das Figuras 18 e 19, em concordância com Brandemberg (2020), por se tratar de textos históricos, a mais recente tabela reconstruída por Roegel (2010) a partir de Rheticus (1551). Na Figura 18, temos as razões seno, cosseno e secante, respectivamente. Na Figura 19, temos as razões tangente, cossecante e cotangente.

Percebemos que Roegel (2010) fez as devidas correções nas seis razões para o ângulo de 0º, sendo o seno de 0º igual a zero, o cosseno e secante igual a 10000000, a tangente também igual a zero, a cossecante e a tangente tendendo ao infinito.

Outros valores também foram alterados, mas observamos que a diferença é registrada no final das razões. Por exemplo, para a cotangente de 1º Rheticus registrou o valor 572899830, enquanto Roegel (2010) corrigiu para 572899616. Só se nota a diferença nos três últimos algarismos.

Após a análise da obra em questão, percebemos sua importância para os cálculos astronômicos do século XVI, pois está bem estruturada em relação às outras tabelas já produzidas. Seguindo os objetivos da pesquisa e buscando responder à questão norteadora, salientamos no próximo capítulo a relação da obra analisada e o desenvolvimento da Trigonometria.

5 RELAÇÕES ENTRE A OBRA *CANON* E O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Nesse capítulo, destacamos a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) de George Joachim Rheticus na relação com os trabalhos sobre trigonometria desenvolvidos nos séculos XVI e XVII. Mostramos uma influência relevante de Rheticus nas tabelas trigonométricas produzidas por Otto, Pitiscus, Maurolico e Viète.

5.1 A influência da obra de Rheticus no século XVI e XVII

Após a morte de Rheticus, seus documentos e o trabalho sobre as “ciências dos triângulos” ficaram a cargo do seu discípulo Otto Valentin. Tudo só foi publicado em 1596, com o título *Opus Palatinum*.

Maximiliano encontrou inconsistências nos cálculos registrado por Otto, pois que alegava a obra *Opus Palatinum* não era confiável. Sendo assim, houve uma necessidade de revisar e corrigir a obra, mas Otto já não estava mais em condições físicas e psicológicas para exercer essa missão.

O seu último financiador, Frederic, delegou essa função ao matemático Bartholomew Pitiscus (1561 - 1613), que já havia composto seu próprio livro sobre triângulos e intitulou Trigonometria, em 1595 (Ilustração 9). Foi a primeira vez que esse termo apareceu, e assim ficaram conhecido os estudos sobre triângulos. (DANIELSON, 2016, p. 199).

Ilustração 9 - *Trigonometria: Sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* (1595, primeira edição impressa em Heidelberg)

Fonte: Bartholomaeus Pitiscus Wikipedia (disponível em: https://alchetron.com/Bartholomaeus-Pitiscus#img)

Conforme Danielson (2016, p. 199), Pitiscus percebeu que para obter resultados mais precisos era necessário fazer cálculos para 15 casas. Rheticus preparou a mesa para 15 lugares, de acordo com informações que recebeu de Otto, mas Otto havia negligenciado usá-las na preparação das tábuas, e sua memória não mais ajudava Pitiscus a identificar onde estavam.

Otto veio a falecer em 1602, pouco mais de cinquenta anos, e o que restou das propriedades literárias de Rheticus foi herdada por amigo de Otto, Jacob Christmann, reitor da Universidade de Heidelberg. Foi quem descobriu o próprio Canonê que Pitiscus tanto ansiava. Com os documentos e papéis deixados por Rheticus em mão, colheu informações e dedicou-se uma revisão do *Opus Palatinum*. Como resultado, surgiu outro volume intitulado *Mathematical Treasury: or, Canon of Sines for a Radius of 1.000.000.000.000.000 Units*... *as Formerly Computed at Incredible Effort and Cost* *bu Georg Joachim Rheticus.* (Tesouro Matemático: ou Canôn de Senos para um Raio de 1.000.000.000.000.000 Unidades... como calculados anteriormente com incríveis esforços e custos por Georg Joachim Rheticus) (Figura 20) (DANIELSON, 2016, p. 199).

Como relata Danielson (2016, p. 199-201), Pitiscus “revisou com sucesso o trabalho de Rheticus com a ajuda de Rheticus”, bem como melhorou as tabelas tão utilizáveis que só foram substituídas por trabalhos desenvolvidos no início do século XX.

Para Danielson (2016, p. 201), a obra “O Tesouro” de Ptiscus foi publicada em 1613, noventa e nove anos após o nascimento do autor original das tabelas. Do mesmo modo, o nome desse autor não foi totalmente esquecido, pois, em 1634, um livro intitulado *Trigonometric Key of the Universe*, publicado em Hamburgo, prestou homenagem a Rheticus citando seu nome logo na primeira página, sendo que a citação foi emprestada do Canôn da Ciência dos Triângulos, de 1551.

Figura 20 - Tabela de Pitiscus, publicada em 1613

80

CANON SINUUM

13	Sinus	Diff. I.	II.	III.	Sinus complementi	Diff. I.	II.	III.	
0	22495.10543.43864	47238529401	528736	109	97437.00647.85234	10904789767	2290203	25	60
10	22499.82928.73265	47238000556	528845	111	97435.91577.05264	10907079970	2290174	29	50
20	22504.55308.73822	47237471599	528957	111	97434.82483.55120	10909370144	2290151	43	40
30	22509.27683.45420	47236942531	529068	111	97433.73366.74825	10911660295	2290125	28	30
40	22514.00052.87951	47236413353	529178	113	97432.64227.24407	10913950418	2290102	22	20
50	22518.72417.01304	47235884062	529291	110	97431.55064.83888	10916240519	2290072	25	10
1	22523.44775.85366	47235354661	529401	109	97430.45879.55297	10918530591	2290047	25	59
10	22528.17129.40027	47234825151	529510	114	97429.36671.32659	10920820638	2290022	25	50
20	22532.89477.65178	47234295527	529624	110	97428.27440.21999	10923110660	2289997	25	40
30	22537.61820.60705	47233765793	529734	111	97427.18186.21342	10925400657	2289970	27	30
40	22542.34158.16498	47233235948	529845	110	97426.08909.30715	10927690627	2289945	25	20
50	22547.06490.62446	47232705993	529955	113	97424.99609.50143	10929980572	2289918	27	10
2	22551.78817.68439	47232175925	530068	109	97423.90286.79653	10932270490	2289895	23	58
10	22556.51139.44364	47231645748	530177	113	97422.80941.19268	10934560385	2289866	29	50
20	22561.23455.90112	47231115458	530290	109	97421.71572.69017	10936850251	2289843	23	40
30	22565.95767.05570	47230585059	530399	102	97420.62181.28923	10939140094	2289815	28	30
40	22570.68072.90629	47230054548	530511	111	97419.52766.99014	10941429909	2289792	23	20
50	22575.40373.45177	47229523926	530622	111	97418.43329.79313	10943719701	2289764	28	10
3	22580.12668.69103	47228993193	530733	110	97417.33869.69848	10946009465	2289739	25	57
10	22584.84958.62296	47228462350	530843	114	97416.24386.70644	10948299104	2289713	26	50
20	22589.57243.24646	47227931393	530957	109	97415.14880.81727	10950588917	2289689	24	40
30	22594.29522.56039	47227400327	531066	111	97414.05352.03121	10952878606	2289660	29	30
40	22599.01796.56366	47226869150	531177	110	97412.95800.34855	10955168266	2289638	22	20
50	22603.74065.25516	47226337863	531287	113	97411.86225.76951	10957457904	2289609	29	10
4	22608.46328.63379	47225806463	531400	109	97410.76628.29438	10959747513	2289586	23	56
10	22613.18586.69842	47225274954	531509	113	97409.67007.92539	10962037099	2289557	29	50
20	22617.90839.44796	47224743332	531622	110	97408.57364.65683	10964326656	2289534	23	40
30	22622.63086.88128	47224211600	531732	111	97407.47698.49493	10966616190	2289507	27	30
40	22627.35328.99728	47223679757	531843	112	97406.38009.43796	10968905697	2289482	25	20
50	22632.07565.79485	47223147802	531955	109	97405.28297.48617	10971195179	2289456	26	10
5	22636.79797.27287	47222615738	532064	112	97404.18562.63982	10973484635	2289429	27	55
10	22641.52023.43025	47222083562	532176	111	97403.08804.89918	10975774064	2289404	25	50
20	22646.24244.26587	47221551275	532287	111	97401.99024.26450	10978063468	2289379	25	40
30	22650.96459.77862	47221018877	532398	111	97400.89220.73603	10980352847	2289352	27	30
40	22655.68669.96739	47220486368	532509	111	97399.79394.31404	10982642199	2289328	24	20
50	22660.40874.83107	47219953748	532620	111	97398.69544.99877	10984931527	2289299	29	10
6	22665.13074.36855	47219421017	532731	111	97397.59672.79051	10987220826	2289276	23	54
10	22669.85268.57872	47218888175	532842	111	97396.49777.68949	10989510102	2289249	27	50
20	22674.57457.46047	47218355222	532953	112	97395.39859.69598	10991799351	2289224	25	40
30	22679.29641.01269	47217822157	533065	108	97394.29918.81023	10994088575	2289196	28	30
40	22684.01819.23426	47217288984	533173	114	97393.19955.03252	10996377771	2289173	23	20
50	22688.73992.12410	47216755697	533287	110	97392.09968.36308	10998666944	2289147	26	10
7	22693.46159.68107	47216222300	533397	110	97390.99958.80217	11000956091	2289118	29	53
10	22698.18321.90407	47215688793	533507	113	97389.89926.35008	11003245209	2289094	24	50
20	22702.90478.79200	47215155173	533620	109	97388.79871.00705	11005534303	2289070	24	40
30	22707.62630.34373	47214621444	533729	112	97387.69792.77332	11007823373	2289041	29	30
40	22712.34776.55817	47214087603	533841	111	97386.59691.64918	11010112414	2289017	24	20
50	22717.06917.43420	47213553651	533952	111	97385.49567.63487	11012401431	2288990	27	10
8	22721.79052.97071	47213019588	534063	110	97384.39420.73066	11014690421	2288966	24	52
10	22726.51183.16659	47212485415	534173	112	97383.29250.93679	11016979387	2288937	29	50
20	22731.23308.02074	47211951130	534285	111	97382.19058.25555	11019268324	2288914	23	40
30	22735.95427.53204	47211416734	534396	110	97381.08842.68117	11021557238	2288887	27	30
40	22740.67541.69938	47210882228	534506	111	97379.98604.21992	11023846125	2288861	26	20
50	22745.39650.52166	47210347611	534617	113	97378.88342.87006	11026134986	2288835	26	10
9	22750.11753.99777	47209812881	534730	108	97377.78058.63185	11028423821	2288810	25	51
10	22754.83852.12658	47209278043	534838	114	97376.67751.50554	11030712631	2288782	28	50
20	22759.55944.90701	47208743091	534952	109	97375.57421.49141	11033001413	2288759	23	40
30	22764.28032.33792	47208208030	535061	112	97374.47068.58969	11035290172	2288731	28	30
40	22769.00114.41822	47207672857	535173	109	97373.36691.80066	11037578903	2288706	25	20
50	22773.72191.14679	47207137575	535282	113	97372.26294.12457	11039867609	2288678	28	10
	Sinus complementi	Diff. I.	II.	III.	Sinus	Diff. I.	II.	III.	50

76

Fonte: Danielson (2016, p. 200)

As tabelas de Rheticus descritas no *Canon* são muito raras e eram praticamente desconhecidas. Por esse motivo, no século XVI outros autores como Rheinhold, em 1554, e Fincke, em 1583, ainda continuaram a fornecer tabelas mais simples com base nas elaboradas por Regiomontanus. Entretanto, alguns autores foram influenciados diretamente por Rheticus, e o primeiro deles foi Francesco Maurolico (ROEGEL, 2010, p.5).

> Em 1558, Francesco Maurolico (1494 – 1575) publicou seu comentário sobre as esféricas de Teodósio. Este comentário continha tabelas curtas de senos, tangentes e secantes, provavelmente inspiradas na tabela de Rheticus, mas em parte recalculado diretamente usando as tabelas originais de senos de Regiomontanus (ROEGEL, 2010, .6, tradução nossa).

Como o autor Roegel (2010) não afirma se Maurolico teve como inspiração a tabela de Rheticus, buscamos investigar se o *Canon Doctrinae Triangulorum* foi uma obra que influenciou Maurolico na publicação de sua tabela em 1558.

Observamos que talvez esse desconhecimento sobre a obra de Rheticus tenha tido destaque, segundo Roegel (2010, p. 3), por conta dos livros de Rheticus que foram condenados pela igreja católica em 1550. Essa condenação se aplicava aos seus estudos sobre de trigonometria, sendo colocados no *Index Expurgatorius*.

Por esse motivo, Brummelen e Byrne (2021) defendem que Maurolico não copiou as tabelas de secante de Rheticus e não teve acesso ao *Canon* de 1551, porque na obra de Maurolico não havia sinal da estrutura das tabelas de Rheticus ou referência ao seu nome. Ademais, os métodos utilizados são bastante diferentes.

Brummelen e Byrne (2021) alegam que não existem evidências de que Maurolico usou as tabelas de Rheticus e sim que Maurolico se inspirou na *Tabula Fecunda* de Regiomontanus, mas há coincidências que nos fazem pensar o contrário, tendo em vista que na construção do Triângulo Maurolico utilizou um gnomôn, um instrumento que está estampado em capas de trabalhos de Rheticus.

Outra evidência sobre a influência de Rheticus tem ligação com o que Brummelen e Byrne (2021, p. 202) dizem em relação a *Tabulae beneficae* de Maurolico: "Colunas adicionais fornecem as diferenças usuais entre valores tabulares sucessivos para fins de interpolação". Vale ressaltar que, para cada coluna de "função", Rheticus registra a diferença de uma linha a outra, sendo que na *Tabula Fecunda* de Regiomontanus não encontramos registros de tais diferenças.

As tabelas de Maurolico estão apresentadas em Roegel (2010, p. 3), tendo sido publicadas em 1558 são compostas por três mesas. Cada uma dá o valor de uma função (seno, tangente, secante) para cada grau do quadrante, e com um raio R = 100000. As diferenças são dadas em cada valor, tanto decimal quanto sexagesimal.

Figura 21 - Tabela para senos de Maurolico

TABELLA SINVS RECTI. 65

g	Sinus.	Dfa	6^{ma}	g	Sinus.	Dfa	6^{ma}
1	1745	1745	29. 5	46	71934	1223.	20. 23
2	3490	1745	29. 5	47	73135	1201.	20. 1
3	5234	1744	29. 4	48	74315	1180.	19. 40
4	6976	1742	29. 2	49	75471	1156.	19. 16
5	8716	1740	29. 0	50	76604	1133.	18. 53
6	10453	1737	28. 57	51	77715	1111.	18. 31
7	12187	1734	28. 54	52	78801	1086	18. 6
8	13917	1730	28. 50	53	79864	1063	17. 43
9	15643	1726	28. 46	54	80902	1038	17. 18
10	17365	1722	28. 42	55	81915	1013	16. 53
11	19081	1716	28. 36	56	82904	989	16. 29
12	20791	1710	28. 30	57	83867	963	16. 3
13	22495	1704	28. 24	58	84805	938	15. 38
14	24192	1697	28. 17	59	85717	912	15. 21
15	25882	1690	28. 10	60	86603	886	14. 46
16	27564	1682	28. 2	61	87462	859	14. 19
17	29237	1673	27. 53	62	88295	833	13. 53
18	30902	1665	27. 45	63	89101	806	13. 26
19	32557	1655	27. 35	64	89879	778	12. 58
20	34202	1645	27. 25	65	90631	752	12. 32
21	35837	1635	27. 15	66	91355	724	12. 4
22	37461	1624	27. 4	67	92051	696	11. 36
23	39073	1612	26. 52	68	92718	667	11. 7
24	40674	1601	26. 41	69	93358	640	10. 40
25	42262	1588	26. 28	70	93969	611	10 11
26	43837	1575	26. 15	71	94552	583	9. 43
27	45399	1562	26. 2	72	95106	554	9. 14
28	46947	1548	25. 48	73	95631	525	8. 45
29	48481	1534	25. 34	74	96126	495	8. 15
30	50000	1519	25. 19	75	96593	467	7. 47
31	51504	1504	25. 4	76	97030	437	7. 17
32	52992	1488	24. 48	77	97437	407	6. 47
33	54464	1472	24. 32	78	97815	378	6. 18
34	55919	1455	24. 15	79	98163	348	5. 48
35	57358	1439	23. 59	80	98481	318	5. 18
36	58779	1421	23. 41	81	98769	288	4. 48
37	60182	1403	23. 23	82	99027	258	4. 18
38	61566	1384	23. 4	83	99255	228	3. 48
39	62932	1366	22. 46	84	99452	197	3. 17
40	64279	1347	22. 27	85	99620	168	2. 48
41	65606	1327	22. 7	86	99756	139	2. 16
42	66913	1307	21. 47	87	99863	107	1. 47
43	68200	1287	21. 27	88	99939	76	1. 6
44	69466	1266	21. 6	89	99985	46	0. 46
45	70711	1245	20. 45	90	100000	15	0. 15

Fonte: Roegel (2021a, p.4).

Figura 22 - Tabela para tangentes de Maurolico

TABELLA FOECVNDA.

g	Vmbra	Dfa	6^{m}	g	Vmbra	Dfa	6^{m}
1	1745.	1745	29. 5	46	103551	3551.	59. 11
2	3492	1747	29. 7	47	107236	3685.	61. 25
3	5241	1749	29. 9	48	111062	3826.	63. 46
4	6992	1751	29. 11	49	115037	3975.	66. 15
5	8748	1756	29. 16	50	119197	4160.	69. 20
6	10510	1762	29. 22	51	123491	4294	71. 34
7	12278	1768	29. 28	52	127994	4503	75 5
8	14053	1775	29. 35	53	132704	4710	78. 30
9	15838	1785	29. 45	54	137639	4935	82. 15
10	17633	1795	29. 55	55	142813	5174	86. 14
11	19439	1806	30. 6	56	148253	5440	90. 40
12	21256	1817	30. 17	57	153987	5734	95. 34
13	23087	1831	30. 31	58	160033	6046	100.46
14	24932	1845	30. 45	59	166429	6396	106.36
15	26794	1862	31. 2	60	173205	6776	112.56
16	28674	1880	31. 20	61	180405	7200	120. 0
17	30573	1899	31. 39	62	188073	7668	127.48
18	32492	1919	31. 59	63	196261	8188	136.28
19	34433	1941	32. 21	64	205030	8769	146. 9
20	36396	1963	32. 43	65	214451	9421	157. 1
21	38387	1991	33. 1,1	66	224603	10152	167. 12
22	40402	2015	33. 35	67	235585	10982	103. 2
23	42448	2046	34. 6	68	247509	11924	198.44
24	44522	2074	34. 34	69	260509	13000	216. 40
25	46631	2109	35. 9	70	274747	14238	237.18
26	48772	2141	35. 41	71	290421	15674	261. 14
27	50952	2180	36. 20	72	307768	17347	289. 7
28	53170	2218	36. 58	73	327084	19316	321. 56
29	55432	2262	37. 42	74	348742	21658	360. 58
30	57735	2303	38. 23	75	373205	24463	407. 43
31	60086	2351	39. 11	76	401078	27873	464. 33
32	62486	2400	40. 0	77	433148	32070	534. 30
33	64940	2454	40. 54	78	470453	37305	621. 45
34	67452	2512	41. 51	79	514455	44002	733. 22
35	70022	2570	42. 50	80	567128	52673	877. 53
36	72654	2632	43. 52	81	631375	64247	1070. 47
37	75356	2702	45. 2	82	711537	80162	1336. 2
38	78129	2773	46. 13	83	814435	102898	1714. 18
39	80978	2849	47. 29	84	951436	137001	2283. 21
40	83909	2931	48. 51	85	1143005	191569	3192.49
41	86929	3020	50. 20	86	1430067	287062	4784.22
42	90040	3111	51. 51	87	1908113	478046	7567. 26
43	63252	3212	53. 52	88	2863625	955512	15923. 12
44	96571	3319	55. 19	89	5728995	2865370	47756.10
45	100000	3429	57. 9	90	Infinitum.	Infinitum.	Infinitum.

89. 15. . . . . . 7638998.
89. 30. . . . . 11458872.
89. 45. . . 22918163.
89. 55 . . . 68754439.
89. 59. . 343772546.

Fonte: Roegel (2021a, p.5).

Figura 23 - Tabela para secantes de Maurolico

TABELLA BENEFICA 66

g	Radius	Dfa	60^m^	g	Radius	Dfa	60^m^
1	100015	.. 15	0. 15	46	143955	.2534	42. 14
2	100061	.. 46	0. 46	47	146628	.2673	44. 33
3	100137	.. 76	1. 16	48	149448	.2820	47. 0
4	100244	.. 107	2. 47	49	152425	.2977	49. 37
5	100382	.. 138	2. 18	50	155572	.3147	52. 27
6	100551	.. 169	2. 49	51	158902	.3330	55. 30
7	100751	.. 200	3. 25	52	162427	.3525	58. 45
8	100983	.. 232	3. 52	53	166165	.3738	62. 18
9	101246	.. 264	4. 24	54	170131	.3966	66. 6
10	101543	.. 297	4. 57	55	174344	.4213	70. 13
11	101871	.. 328	5. 28	56	178830	.4486	74. 46
12	102234	.. 363	6. 3	57	183608	.4778	79. 38
13	102630	.. 396	6. 35	58	188708	.5100	85. 0
14	103061	.. 431	7. 11	59	194160	.5452	90. 52
15	103528	.. 467	7. 47	60	200000	.5840	97. 20
16	104030	.. 502	8. 22	61	206267	.6267	104. 27
17	104569	.. 539	8. 59	62	213006	.6739	112. 19
18	105146	.. 577	9. 37	63	220265	.7263	121. 3
19	105762	.. 616	10. 16	64	228117	.7848	130. 43
20	106418	.. 656	10. 56	65	236620	.8503	141. 43
21	107115	.. 697	11. 37	66	245859	.9239	153. 59
22	107854	.. 739	12. 19	67	255930	10071	167. 51
23	108636	.. 782	13. 2	68	266947	11017	183. 37
24	109464	.. 828	13. 48	69	279043	12096	201. 36
25	110338	.. 874	14. 34	70	292380	13337	222. 17
26	111260	.. 922	15. 22	71	307155	14775	246. 15
27	112233	.. 973	16. 13	72	323607	16452	274. 12
28	113257	. 1024	17. 4	73	342030	18423	307. 3
29	114335	. 1078	17. 58	74	362796	20766	346. 6
30	115470	. 1135	18. 55	75	386370	23574	392. 54
31	116664	. 1194	19. 54	76	413357	26987	449. 47
32	117918	. 1254	20. 54	77	444541	31184	519. 44
33	119236	. 1318	21. 58	78	480973	36432	607. 12
34	120621	. 1385	23. 5	79	524084	43111	718. 31
35	122078	. 1457	24. 17	80	575877	51793	863. 13
36	123606	. 1528	25. 28	81	639245	63368	1056. 8
37	125214	. 1608	26. 48	82	718530	79285	1321. 25
38	126902	. 1688	28. 8	83	820552	102022	1700. 22
39	128676	. 1774	29. 34	84	956677	136125	2268. 45
40	130541	. 1865	31. 5	85	1147371	190694	3178. 14
41	132501	. 1960	32. 40	86	1433558	286187	4769. 47
42	134563	. 2062	34. 22	87	1910732	477174	7952. 54
43	136733	. 2170	39. 10	88	2865371	954639	15910. 39
44	139016	. 2283	38. 3	89	5729868	2864497	47741. 37
45	141421	. 2405	40. 5	90	Infinitum.	Infinitum.	Infinitum.

0. 0 100000
89. 15 . . . 7639653
89. 30 . . . 11459309
89. 45 . . . 22918381
89. 55 . . . 68754512
89. 59 . . . 343772560.

Fonte: Roegel (2021a, p.6).

Em Brurke-Gaffney (1937), existe um relato de Maurolico em um pós-escrito acerca de um tratado intitulado *De Sphaera Liber Unus*, que diz:

> Escrevi o trabalho anterior, caro leitor, não para que você leia apenas meu tratamento e ignore todos os outros, mas para que você entenda melhor os outros por causa de minha discussão e aprenda com ela o que foi omitido pelos outros (BRURKE-GAFFNEY, 1937, p. 150-156 apud O'CONNOR e ROBERTSON, 2010, tradução nossa).

Para Brummelen e Byrne (2021, p. 190), ele pode ser mais conhecido por suas críticas contundentes ao sistema copernicano em *De Sphaera*, argumentando que Copérnico merecia um chicote ou flagelo em vez de uma refutação. Isso faz com que se pense, mesmo não concordando com a teoria de Copérnico, ele precisou estudar para justamente discordar.

Vale ressaltar que não há evidências de que Maurolico copiou as tabelas de Rheticus, o que afirma Roegel (2021b, p. 83) quando relata que, ao contrário do que von Braunmühl escreveu, Maurolico desconhecia o *Canon Doctrinae Triangulorum* de Rheticus publicado em 1551.

O que talvez tenha gerado essa confusão de que Rheticus influenciou Maurolico foi o fato de que Fnicke pensou que Maurolico havia copiado suas secantes de Rheticus, porém baseado no que Brummelen e Byrne (2021, p. 200) afirmam, Maurolico já trabalhava com essa ideia, em 1550, antes da publicação do *Canon,* em 1551. Por isso, é muito provável ser uma obra independente da de Rheticus.

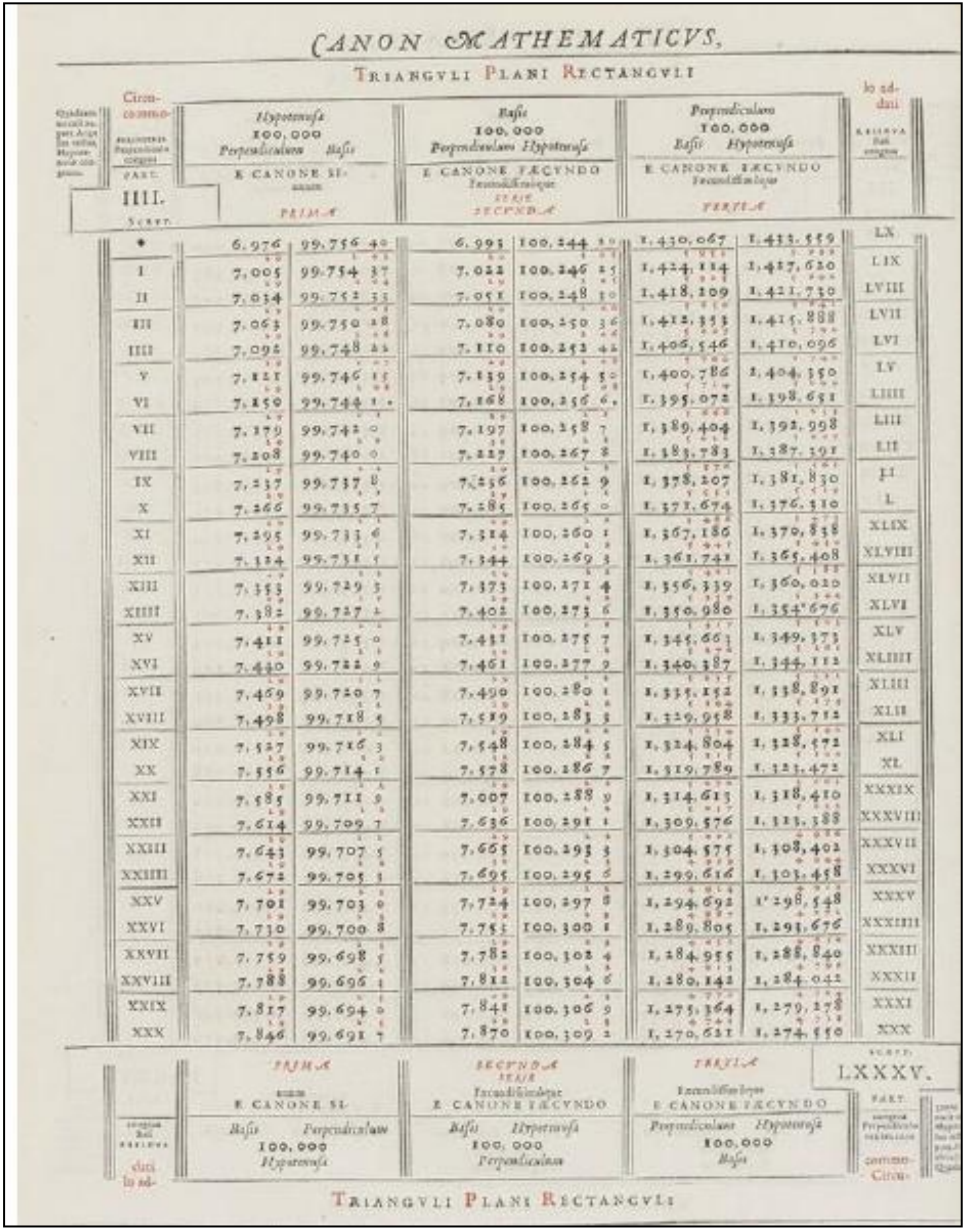
Roegel (2021b, p. 85) profere que Magini também assumiu que o trabalho de Maurolico era independente e não influenciado por Rheticus. É possível ponderar que foi calculado diretamente de Regiomontanus, provavelmente da edição de 1541.

Acreditamos ainda que existam discordâncias sobre a influência de Rheticus e as tabelas de Maurolico. De certo, ele não copiou as secantes de Rheticus, como afirma Brummelen e Byrne (2021), porém existem algumas semelhanças entre suas tabelas, como o registro das diferenças, o que nos faz duvidar se Maurolico não teve acesso ao *Canon* (1551) de Rheticus.

Diferentemente do que podemos alegar sobre Viète, que teve influência direta da obra de Rheticus. Roegel (2021, p. 89) alega que Viéte, inspirado por Rheticus e a obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551), construiu uma nova tabela, chamada de *Canon Mathematicus*. Este trabalho continha uma tabela tipograficamente sofisticada das seis funções trigonométricas para cada minuto do quadrante e com o raio de 10^5. A impressão da tabela foi iniciada em 1571, mas só foi finalizada em 1579.

Zeller (1944, p.73, apud SAMPAIO, 2008, p. 61) também afirma que Viète conhecia muito o trabalho de Rheticus. No seu primeiro trabalho sobre trigonometria, o *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* (Tratado Matemático ou para entender os triângulos com apêndices), preparou extensas tabelas de cordas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos. Nessa obra, observa-se uma utilização sistemática dos números decimais.

Figura 24 - Tabela de Viète do *Canon mathematicus* (1579)



CANON MATHEMATICVS,

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

PART. IIII. Scrup.	Hypotenusa 100,000 E CANONE SINUUM PRIMÆ: Perpendiculum	Basis	Basis 100,000 E CANONE FÆCVNDO SERIE SECVNDÆ: Perpendiculum	Hypotenusa	Perpendiculum 100,000 E CANONE FÆCVNDO TERTIÆ: Basis	Hypotenusa	
•	6.976	99.756 40	6.993	100.244 10	1.430.067	1.433.559	LX
I	7,005	99.754 37	7.022	100.246 25	1.424.114	1.427.620	LIX
II	7.034	99.752 33	7.051	100.248 10	1.418.209	1.421.730	LVIII
III	7.063	99.750 28	7.080	100.250 36	1.412.353	1.415.888	LVII
IIII	7.092	99.748 22	7.110	100.252 42	1.406.546	1.410.096	LVI
V	7.121	99.746 15	7.139	100.254 50	1.400.786	1.404.350	LV
VI	7.150	99.744 1.	7.168	100.256 6.	1.395.072	1.398.651	LIIII
VII	7.179	99.742 0	7.197	100.258 7	1.389.404	1.392.998	LIII
VIII	7.208	99.740 0	7.227	100.267 8	1.383.783	1.387.391	LII
IX	7.237	99.737 8	7.256	100.262 9	1.378.207	1.381.830	LI
X	7.266	99.735 7	7.285	100.265 0	1.372.674	1.376.310	L
XI	7.295	99.733 6	7.314	100.260 1	1.367.186	1.370.838	XLIX
XII	7.324	99.731 5	7.344	100.269 3	1.361.741	1.365.408	XLVIII
XIII	7.353	99.729 3	7.373	100.271 4	1.356.339	1.360.020	XLVII
XIIII	7.382	99.727 2	7.402	100.273 6	1.350.980	1.354.676	XLVI
XV	7.411	99.725 0	7.431	100.275 7	1.345.663	1.349.373	XLV
XVI	7.440	99.722 9	7.461	100.277 9	1.340.387	1.344.112	XLIIII
XVII	7.469	99.720 7	7.490	100.280 1	1.335.152	1.338.891	XLIII
XVIII	7.498	99.718 5	7.519	100.283 3	1.329.958	1.333.712	XLII
XIX	7.527	99.716 3	7.548	100.284 5	1.324.804	1.328.572	XLI
XX	7.556	99.714 1	7.578	100.286 7	1.319.789	1.323.472	XL
XXI	7.585	99.711 9	7.007	100.288 9	1.314.613	1.318.410	XXXIX
XXII	7.614	99.709 7	7.636	100.291 1	1.309.576	1.313.388	XXXVIII
XXIII	7.643	99.707 5	7.665	100.293 3	1.304.575	1.308.402	XXXVII
XXIIII	7.672	99.705 3	7.695	100.295 6	1.299.616	1.303.458	XXXVI
XXV	7.701	99.703 0	7.724	100.297 8	1.294.692	1.298.548	XXXV
XXVI	7.730	99.700 8	7.753	100.300 1	1.289.805	1.293.676	XXXIIII
XXVII	7.759	99.698 5	7.782	100.302 4	1.284.955	1.288.840	XXXIII
XXVIII	7.788	99.696 3	7.812	100.304 6	1.280.142	1.284.042	XXXII
XXIX	7.817	99.694 0	7.841	100.306 9	1.275.364	1.279.278	XXXI
XXX	7.846	99.691 7	7.870	100.309 2	1.270.621	1.274.550	XXX
	PRIMÆ E CANONE SI: Basis	Perpendiculum; 100,000 Hypotenusa	SECVNDÆ SERIE E CANONE FÆCVNDO: Basis	Hypotenusa; 100,000 Perpendiculum	TERTIÆ E CANONE FÆCVNDO: Perpendiculum	Hypotenusa; 100,000 Basis	Scrup. LXXXV.

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

Fonte: Roegel (2010, p.7).

A figura anterior faz referência a uma página das tabelas contidas no *Canon Mathematicus* (1579) de Viète. Conforme Roegel (2010), da esquerda para a direita estão expressos os valores de seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante para ângulos de 4º a 4º30’ e de 85º30’ a 86º. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viéte no século XVI. O *layout* da tabela é semelhante ao usado em 1551, no *Canon Doctrinae Triangulorum*. (ROEGEL, 2010, p.4).

Viète aplicou em trigonometria problemas algébricos e aritméticos. No livro “*Canon msthematicus seu ad triangula”*, mesmo Roegel (2010, p. 6) alegando que as tabelas de Viète não teriam feito mais sucesso em relação à primeira tabela de Rheticus, existem grandes contribuições à trigonometria.

No tratamento de Viète em seus escritos, continham fórmulas que transformavam o produto de funções em uma soma ou diferença, assim como cálculos de funções envolvendo ângulos de 30º, 45º e 90º. Com Viète, a trigonometria foi praticamente concluída, mas todos os cálculos foram simplificados no século XVII com a invenção dos logaritmos (BELL, 1992, p. 121 apud SAMPAIO, 2008, p.63).

Além da evolução das tabelas trigonométricas para as de logaritmos no século XVII, com a divulgação dos trabalhos de Rheticus, em particular o *Canon* e o *De Lateribus,* ocorreu uma propagação do estudo das razões entre os lados de triângulos retângulos semelhantes, nos moldes de Thales de Mileto (625 b.C.), que considera fixar um ângulo, e não sua medida, a tomar as razões entre as medidas de seus lados, tendo em vista os triângulos retângulos semelhantes, o ângulo fixo e a proporcionalidade entre os lados.

Os termos como tangente e cotangente só vieram a ser usados no final do século XVI e no início do século XVII. Para Cajori (1919, p.151 apud SAMPAIO, 2008, p. 64), o termo cosseno foi cunhado pelo astrônomo inglês, criador do quadrante, Edmund Gunter (1581-1626), em 1620, para abreviação do seno complementar, surgindo dessa forma *co-sinus*, em português cosseno, assim como inventou o termo a cotangente também. Em Rheticus, Base/Perpendicular. Ademais, para Roegel (2010, p. 4) os nomes “secantes” e “tangentes” foram usados pela primeira vez, em 1583, por Thomas Fincke (1561 – 1656).

Eves (2011, p. 313) pondera que Rheticus seja o principal astrônomo matemático teutónico do século XVI. Ele dedicou 12 anos de sua vida, auxiliado por calculadores remunerados, à construção de duas tábuas trigonométricas notáveis e ainda úteis hoje. Suas contribuições não se resumem apenas às tabelas, tal como o relato a seguir.

> O editor das obras completas de Kepler sugere que foi a visão copernicana de Rheticus da "harmonia celestial" "geometricamente definida" que iniciou o programa de pesquisa ao qual Kepler dedicou sua vida (DANIELSON, 2006, p. 204, tradução nossa).

O primeiro relato de Rheticus sobre a teoria de Copérnico estava longe de se tornar obsoleto, pois se tratava de um texto de fácil leitura para os tratados copernicanos. Desse modo, o *Narratio Prima* apareceu lado a lado com o trabalho de Kepler, na edição do Mistério Cosmográfico, em 1621. Rheticus, portanto, desempenhou um papel crítico não apenas no lançamento, mas também na extensão da Revolução Científica (DANIELSON, 2006, p.204).

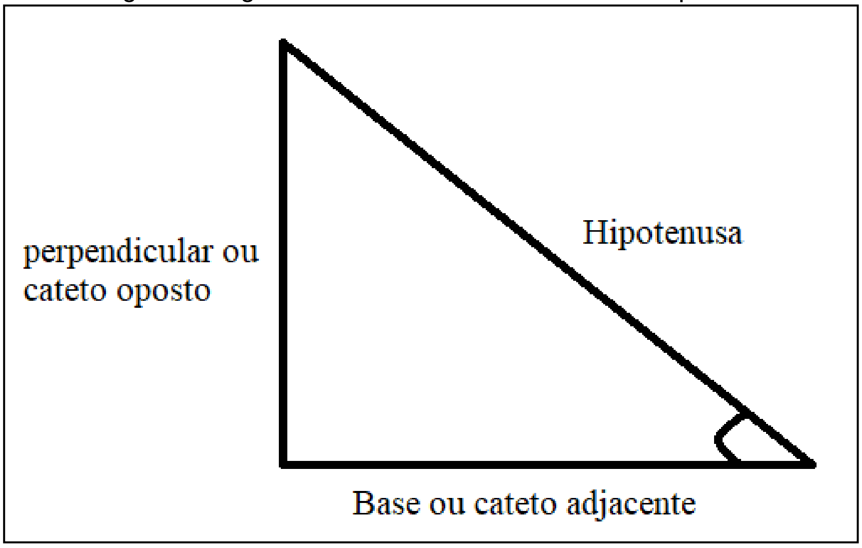
Tendo em vista a influência de Rheticus e sua obra para o desenvolvimento da astronomia e das tabelas trigonométricas, visto que foi o primeiro a reunir as seis funções trigonométricas calculadas a partir de lados do triângulo retângulo, ressaltamos a seguir um estudo do tratamento dos termos utilizados por Rheticus e comparando com o estudo das razões trigonométricas que estudamos atualmente.

5.2 Relacionando a escrita de Rheticus ao ensino atual

Atualmente, no ensino básico se estuda as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente e as razões inversas, secante, cossecante e cotangente, por meio de triângulos, sendo que os três lados do triângulo são chamados de hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente, o que na linguagem matemática de Rheticus se relaciona com a hipotenusa, a perpendicular e a base.

Na figura a seguir, associamos os lados do triângulo descrito por Rheticus e a nomenclatura que utilizamos no ensino atual.

Figura 25 - Triângulo retângulo associado aos lados nomeados por Rheticus e a atual



Fonte: Paulo e Brandemberg (2022, p. 255).

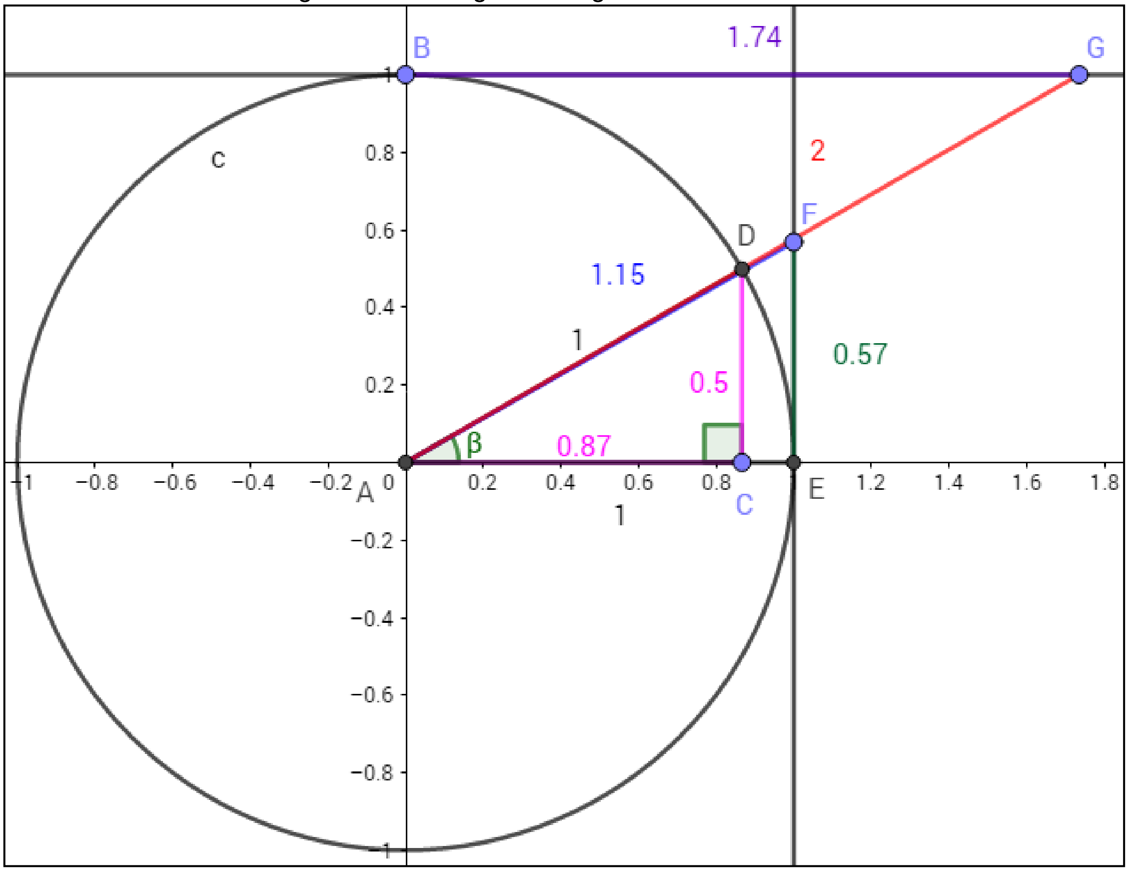
Cada razão trigonométrica pode ser calculada pela divisão entre dois lados do triângulo, sendo que os tamanhos desses lados dependem da inclinação do ângulo, exceto a base, pois Rheticus a considerou uma constante. Com isso, demonstramos que o seno pode ser calculado a partir da divisão entre cateto oposto e a hipotenusa. No caso do cosseno, basta dividir o cateto adjacente pela hipotenusa e a tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Com as razões inversas como a secante devemos inverter a razão do cosseno. A cossecante é o inverso do seno e para a cotangente invertemos a tangente.

Podemos utilizar essa ideia e tabelas de Rheticus como um recurso didático para introduzir o assunto de razões trigonométricas para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ou 2º ano do Ensino Médio, contribuindo com o enriquecimento do ensino de tal assunto, bem como o conhecimento dos alunos.

5.3 As razões trigonométricas no triângulo inscrito na circunferência

Com base nos triângulos de Rheticus, mas tomando a hipotenusa (raio da circunferência) igual a 1, introduzimos o triângulo retângulo com valores numéricos dos lados, dentro de uma circunferência para comprovar que as retas referentes a cada “função” trigonométrica correspondem ao resultado das razões entre os lados do triângulo, como observamos a seguir:

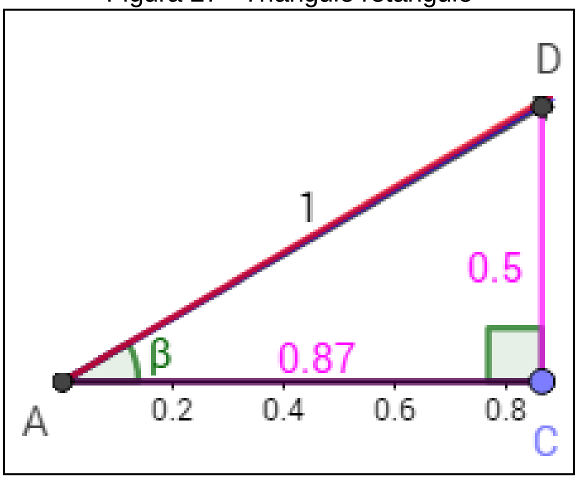
Figura 26 - Triângulo retângulo na circunferência



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra.

Introduzindo esse triângulo dentro de uma circunferência unitária (raio igual a 1) teremos as relações das seis razões trigonométricas a partir dos lados do triângulo e cada segmento de reta representado, por exemplo, se considerarmos inicialmente somente o triângulo retângulo:

Figura 27 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra.

E estabelecendo a razão perpendicular pela hipotenusa, temos:

$$\frac{\text{Perpendicular}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 = \overline{\text{CD}} = \text{sen } \beta$$

Percebemos, como a hipotenusa é igual a 1 e está no denominador, o valor do sen β acaba se tornando igual ao lado CD (perpendicular) do triângulo retângulo. Agora fazendo a razão entre base pela hipotenusa, obtemos:

$$\frac{\text{base}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{0{,}87}{1} = 0{,}87 = \overline{\text{AC}} = \cos \beta$$

Novamente com a hipotenusa igual a 1 está no denominador. Portanto, o valor do cos β acaba se tornando igual ao lado AC (base) do triângulo retângulo. Já com a razão entre a perpendicular e a base estabelecemos a seguinte relação:

$$\frac{\text{Perpendicular}}{\text{base}} = \frac{0{,}5}{0{,}87} \cong 0{,}57 = \overline{\text{EF}} = \text{tg } \beta = \frac{\overline{\text{CD}}}{\overline{\text{AC}}} = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}$$

Observamos que o segmento de reta $\overline{\text{EF}}$ igual a 0,57 (levando em conta duas casas decimais) é igual a razão entre a perpendicular e a base concluindo, assim, que a tangente do ângulo pode ser calculada pela razão entre o seno e cosseno do mesmo ângulo.

As três razões foram as primeiras a serem definidas. Logo, as demais razões são tidas como inversas ao seno, cosseno e tangente.

Ainda utilizando os lados desse triângulo retângulo e realizando a razão inversa da primeira, sendo agora a hipotenusa pela perpendicular, temos:

$$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Perpendicular}} = \frac{1}{0{,}5} = 2 = \overline{\text{AG}} = \text{cossec } \beta = \frac{1}{\text{sen } \beta}$$

Invertendo a razão que foi estabelecida como sen β, obtemos o valor da razão cossec β . Comparando com o seguimento $\overline{\text{AG}}$ da Figura 1, observamos que os valores correspondem. Agora fazendo a razão entre hipotenusa pela base, obtemos:

$$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Base}} = \frac{1}{0{,}87} = 1{,}15 = \overline{\text{AF}} = \sec \beta = \frac{1}{\cos \beta}$$

Aplicando a mesma inversão da razão $\cos$ β, determinamos a razão sec β, cujo seu valor corresponde ao segmento de reta $\overline{\text{AF}}$ da Figura1. Já quanto à razão entre a base e a perpendicular, estabelecemos a seguinte relação:

$$\frac{\text{Base}}{\text{Perpendicular}} = \frac{0{,}87}{0{,}5} = 1{,}74 = \overline{\text{BG}} = \text{cotg } \beta = \frac{1}{\text{tg } \beta} = \frac{\cos \beta}{\text{sen } \beta}$$

Invertendo a razão tg β, obtemos o resultado da razão cotg β que, comparando com os valores obtidos no triângulo retângulo inserido na circunferência (Figura 1), corresponde ao segmento $\overline{\mathrm{BG}}$.

O ensino das razões trigonométricas é um pré-requisito para os estudos das funções trigonométricas, sendo enfatizadas e descritas as habilidades necessárias para o ensino básico na BNCC

Com o intuito de que os resultados dessa pesquisa contribuam com o ensino do nosso objeto matemático, analisamos os valores das seis razões trigonométricas anotadas nas tabelas de Rheticus. Reproduzimos algumas ideias de triângulos e realizamos alguns cálculos trigonométricos para testar a veracidade dos lados dos triângulos que acreditamos terem sido usados por Rheticus para a construção das tabelas. Para tanto, construímos no *software GeoGebra*, que apontamos como uma ferramenta favorável para o ensino das razões trigonométricas.

5.4 A construção do triângulo no GeoGebra

Buscando verificar os dados obtidos por Rheticus no seu *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551), pensamos em construir os triângulos no *software* GeoGebra. Com isso, construímos um triângulo retângulo fixando a base em 10^7.

Os *softwares* educativos e a *internet* são poderosas ferramentas que podem ser utilizadas no processo educativo das escolas, auxiliando professores e alunos como complemento no processo de conhecimento e da aprendizagem.

Com o passar do tempo, o avanço tecnológico foi evidente. Os *softwares* passaram a ser uma ferramenta que auxilia os professores em suas aulas, na apresentação de conteúdo, na ilustração, podendo tornar tudo mais interessante e interativo em relação ao educando.

O Geogebra é um *software* livre que pode ser utilizado no Ensino Fundamental, Médio ou mesmo Superior, sendo de grande auxílio para o ensino de geometria, trigonometria e analítica. Seu criador Markus Hohenwarter iniciou o projeto em 2001, na Universidade de Salzburg, e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University. O GeoGebra é um instrumento que pode ser utilizado para uma maior percepção de significado dos conceitos.

A construção do triângulo no *software* GeoGebra, além de auxiliar em nossa análise dos valores contidos na tabela, também é um bom recurso tecnológico para auxiliar nas aulas referentes a esse assunto. Já deixamos esclarecida a utilização do software, caso seja de interesse de algum pesquisador e/ou professor.

Assim como o *Software* é uma ferramenta que pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, a História da Matemática também pode extrair aspectos epistemológicos de informações históricas que contribuem no sentido de explicar tais conteúdos. Como já destacado em nosso referencial teórico, em que Mendes (2020, p. 8) chama a atenção para que a História da Matemática seja entendida como conhecimento que está em constante transformação. É necessário que os professores proponham práticas desafiadoras em sala de aula que estimulem os alunos na busca por revalidar verdades formadas por meio de pesquisa histórica, com o objetivo de ampliar seus conhecimentos e trazer aplicações práticas em determinadas profissões.

Brandemberg (2021, p.26) também defende que associar aspectos históricos aos conteúdos matemáticos se faz importante para conhecermos o desenvolvimento de tais conceitos. Defendemos a ideia de elaborar atividades para o ensino que contribuam com o desenvolvimento do conhecimento sobre os conteúdos propostos segundo a BNCC.

As atividades seguem a estrutura com os elementos: um tema, os objetivos bem definidos, o conteúdo histórico, o material utilizado, a operacionalização da atividade, os desafios propostos, o exercício de sistematização e formalização do conhecimento e atividades complementares. Além de apresentar uma atividade seguindo a estrutura citada anteriormente, enfatiza que a atividade deve ser adaptada às necessidades do currículo escolar e ao nível cognitivo dos estudantes. (BRANDEMBERG, 2020, p. 270 – 272).

A pesquisa proposta abordou informações que podem contribuir com a elaboração das atividades direcionadas ao ensino, que relacionamos ao desenvolvimento da Trigonometria do século XVI, destacando a influência de Rheticus e sua obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551) em algumas tabelas posteriormente desenvolvidas em Otto, Pisticus, Maurolico e Viète, sobre os valores das novas razões trigonométricas calculadas por Rheticus e difundidas posteriormente pelos matemáticos citados, contribuindo com a evolução e criação das tabelas de logaritmos, para o século XVII.

Por intermédio dos estudos em *Canon* e o *De Lateribus,* observamos que contribuíram com uma propagação do estudo das razões entre os lados de triângulos retângulos semelhantes, nos moldes de Thales de Mileto (625 b.C.) que, para Pereira (2005), veio parar nos livros didáticos e logo na sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos concluir, concordando com Danielson (2006), O´Connor e Robertson (1998), Gingerich (2011) e Wtodarczyc (2015) que, na primavera de 1539, um jovem prodígio matematico austríaco, Georg Joachim Rheticus (1514-1574), aos vinte e cinco anos, vindo de Wittenberg, na Alemanha, realizou uma difícil jornada ao norte da Polônia para conhecer o astrônomo amador, já bastante comentado, Nicolau Copérnico (1473-1543).

Um Copérnico idoso que, tendo apenas publicado um anúncio, *o Comentariolus*, sobre o tema de sua nova cosmologia, uma teoria revolucionária, não seguia os moldes da igreja quando afirmava que “o sol, e não a terra, estava no centro do universo”. Rheticus, em verdade, buscava encontrar um manuscrito que Copérnico tinha quase concluído sobre o assunto para, com isso, tentar fazer com que Copérnico autorizasse sua publicação.

Com a intenção de ficar um mês, Rheticus passou três anos na companhia de Copérnico, durante os quais procurou de todas as formas apresentar ao mundo a beleza das ideias visionárias e brilhantes de seu preceptor: uma cosmologia que movimenta a terra e imobiliza o sol, o heliocentrismo em oposição ao geocentrismo de Ptolomeu (150 d.c).

Das conversas com Copérnico, ele é autorizado a escrever uma introdução ao *De Revolutionibus*. Surge, então, o *Narratio Prima* em 1540*.* Se *o Comentariolus* foi um anúncio, o *Narratio* foi uma excelente propaganda do trabalho de Copérnico. De fato, *o Narratio* trouxe ainda mais reconhecimento a Copérnico e poucos bônus para Rheticus.

Somente no início do outono de 1541, tendo Copérnico concluído seu manuscrito, *De Revolutionibus Orbi Motun*, Rheticus, com a ajuda dos admiradores, patrocinadores e típicos assessores, às vezes opositores de Copérnico, Tiedmann Giese (1480-1550) e Johannes Dantiscus (1485-1548), persuadiu seu mentor a deixá-lo levar o manuscrito a uma gráfica na Alemanha para publicação. Um trabalho extremamente aguardado e que tornou Copérnico um dos mais representativos nomes da astronomia mundial.

Com isso, podemos inferir a importância de relacionar Rheticus ao desenvolvimento da Trigonometria. Inicialmente, temos a célebre frase de Danielson (2006) *no Rheticus, no Copérnicus* e das discussões de orientação durante a qualificação. Compreendemos que Rheticus, ao longo de três anos, com Copérnico, teve contato com os novos cálculos sobre triângulos retângulos, o que resultou na publicação do *De Lateribus et angulis triangulorum*, em 1542, obre os auspícios de Copérnico.

Os estudos na produção do *De* Lateribus, com Copérnico e as influências do trabalho de Regiomontanus (1436-1476), principalmente o *De Triangulis Omnimodis* (1464), foram determinantes. De posse destes conhecimentos, Rheticus produz uma de suas obras mais significativas, o *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551), uma tabela, ou tabelas, contendo as seis razões entre os lados de um triângulo retângulo.

O *Canon*, com explicitado em Brummelen e Byrne (2021), Roegel (2010, 2021) e Wtodarczyc (2015), nesta ordem, destaca sua influência no que se refere à estrutura e valores obtidos das demais razões trigonométricas, como a secante nos trabalhos de Maurolico (1494-1575), Viète (1540-1603) e Kepler (1571-1630), seus contemporâneos e sucessores.

Nas tabelas de Rheticus que compõem o *Canon*, além de uma reescrita dos valores dos senos e cossenos de Regiomontanus, com alguns acertos, Rheticus introduz os valores para tangentes, secantes, cotangentes e cossecantes. Como vimos, com uma nomenclatura própria, que envolve os termos de designação dos lados do triângulo, a saber: Base, Perpendicular e Hipotenusa.

Com exceção de seno e cosseno, os nomes como as razões são conhecidas atualmente começam a surgir no século XVI, com as grandes navegações, principalmente com a necessidade de construir tangentes. Copérnico e, consequentemente, Rheticus já conheciam a secante, que denominava Hipotenusa. Na notação de Rheticus: Hipotenusa/Base.

De fato, os nomes como tangente e cotangente só vieram a ser usados no final do século XVI e no início do século XVII. Segundo Cajori (1919, p.151 apud SAMPAIO, 2008, p. 64), o termo cosseno foi cunhado pelo astrônomo inglês, criador do quadrante, Edmund Gunter (1581-1626), em 1620, para abreviação do seno complementar, surgindo o *co-sinus*, em português cosseno, assim como inventou o termo a cotangente também. Em Rheticus, Base/Perpendicular. Para Roegel (2010, p.4), os nomes “secantes” e “tangentes” foram usados pela primeira vez, em 1583, por Thomas Fincke (1561 – 1656).

Um primeiro desdobramento de nossa pesquisa poderia verificar se Gunter leu Rheticus, em particular o *Canon*. É provável que tenha lido Copérnico. Para Gingerich (2011), uma tarefa difícil.

Um segundo desdobramento da pesquisa seria verificar (ou trazer) se Rheticus veio parar nos livros didáticos. De fato, vimos que Viète leu Rheticus e Viète, conforme Dornelas e Pereira (2012) e Santos (2020), entre outros, está presente em livros didáticos brasileiros, explicitamente até o início dos anos 1970, que tratam do método de Viéte para resolução de equações. Este seria um caminho.

Temos com a divulgação dos trabalhos de Rheticus, em particular o *Canon* e o *De Lateribus,* uma propagação do estudo das razões entre os lados de triângulos retângulos semelhantes, nos moldes de Thales de Mileto (625 b.C.), que considera fixar um ângulo, e não sua medida e tomar as razões entre as medidas de seus lados, levando em conta triângulos retângulos semelhantes, ângulo fixo e a proporcionalidade entre os lados. Thales, tal como frisado por Pereira (2005), veio parar nos livros didáticos e na sala de aula.

A experiência ao produzir a tese foi enriquecedora por proporcionar conhecimentos a respeito de um personagem significativo. Vale salientar que não se ouvia falar, a não ser um breve relato quando, na maioria das vezes, o personagem principal era Copérnico, sendo que Rheticus foi primordial para a publicação da Teoria Heliocêntrica.

O conhecimento sobre o objeto matemático da pesquisa, as razões trigonométricas, tendo em vista o estudo desse tema no Ensino Básico, limita-se aos ângulos notáveis, 30º, 45º e 60º. As aplicações ou o entendimento da utilização de tais tabelas são pouco exploradas em sala de aula. Desenvolver a pesquisa possibilitou ampliar nossa visão sobre o conteúdo, bem como entender que essas tabelas tiveram importância nos séculos anteriores, principalmente quanto aos cálculos astronômicos. Hoje, além de serem importantes para a astronomia, também contribuem com as construções civis.

Portanto, nossa tese trouxe um relato da vida de Rheticus, um discípulo da teoria copernicana, como um dos fundadores da trigonometria moderna e defensor de uma nova ciência cosmológica para os tempos modernos. Nossa escrita biográfica evidencia um olhar por meio do qual vislumbramos o alvorecer da revolução copernicana. Uma teoria que mudou o curso da civilização, pois, sem a intervenção do jovem matemático Rheticus, o trabalho de Copérnico teria caído no esquecimento. Em vez disso, sua publicação introduziu uma nova compreensão do universo. Um marco da história científica e cultural.

REFERÊNCIAS

BORGES, J. A. C. **Um estudo do seno:** da história até o som. 2021. 140f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

BRANDEMBERG,J. C. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. *In:* PEREIRA, A.C.C; MARTINS, E. B. (org). **Investigações científicas envolvendo a História da Matemática sob o olhar da pluralidade**. Curitiba: CRV, 2021, p. 23 – 34.

BRANDEMBERG, J. C. Uma Proposta Para o Uso da História no Ensino de Matemática: sobre a Potencialidade Didática de Textos Históricos e o Desenvolvimento de Conceitos. **Revista Paradigma**, Vol. XLI, Nº Extra 1; abril de 2020. p. 266 – 284.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRITO, A. J.; MOREY. B.B. Geometria e Trigonometria: dificuldades de professores do Ensino Fundamental. In: FOSSA. J.A. (org.). **Presenças matemáticas**. Natal: EDUFRN, 2004. p. 9 – 33.

BRUMMELEN, G. V.; BYRNE, J. S. Maurolico, Rheticus, and the Birth of the Secant Function**.** 2021, **Journal for the History of Astronomy**, Vol. 52(2) 189–211.

CHAQUIAM, M. História e Matemática: um ele e quatro contextos. **Revista Cocar**. Edição especial, N.14/2022, p. 1 – 23.

COSTA, L. M. L. (1997). **História da Trigonometria.** Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf . Acessado em: 19 de maio de 2021.

DALFOVO, M. S; LANA, R. A; SILVEIRA, A. Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. **Revista Interdisciplinar Científica Aplicada**, Blumenau, v.2, n.4, p.01- 13, Sem II. 2008

DANIELSON, D. **The First Copernican**: Georg Joachim Rheticus and the Rise of the Copernican Revolution. Walker & Company, New York, 2006.

DORNELAS, G. N.; PEREIRA, M. T. Uma Análise no Livro Didático Sobre a Abordagem da Pré-Álgebra Inserida no Sexto Ano do Ensino Fundamental**.** **Saber Digital**, v. 5, n. 1, p. 108-123, 2012.

EVES, H**. Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FONTELLES, M.J.; SIMÕES, M.G.; FARIAS, S.H.; FONTELLES, R.G.S. Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa.

Revista paraense de Medicina. 23 (3), jul. – set., 2009. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo_C8_NONAME.pdf. Acesso em: 24 jun. 2022.

GINGERICH, O. **O livro que ninguém leu:** em busca das Revoluções de Nicolau Copérnico. Tradução de Bruna Harstein, Rio de Janeiro: Record, 2011.

MARINHO, A. **Curiosidades sobre o médico e matemático italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576).** Disponível em: https://clube.spm.pt/news/curiosidades-sobre-o-mdico-e-matemtico-italiano-girolamo-cardano-1501-1576. Acesso em: 20 abr. 2023

MENDES, I. A. (2020). História do Ensino da Matemática: Transformação e Mobilização do Conhecimento Matemático para a Escola. **Pesquisa Pedagógica**, 5 (3), em0072.Disponíve em: https://doi.org/10.29333/pr/8284. Acesso em: 20 Mai. 2019.

MENDES, I. A; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

MENDES, M. J. F. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico *De Revolutionibus Orbium Coelestium*.** 2010. 193f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F (1998). **Georg Joachim von Lauchen Rheticus**. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rheticus/. Acesso em: 25 mai. 2021.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **Francesco Maurolico**. Disponível em: https://mathshistory-st--andrews-ac-uk.translate.goog/Biographies/Maurolico/?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc. Acesso em: 15. Abr. 2023.

PAULO, S. G. O. **Da catenária a trigonometria hiperbólica.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2014.

PAULO, S. G. O. **Saberes Docentes na Licenciatura em Matemática acerca do Ensino de Derivada**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém, 2016.

PAULO, S. G. O.; BRANDEMBERG, J. C. Uma análise da obra Canon Doctrinae Triangulorum (1551) de Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574). **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v.9, n.3, p. 11427-11440, mar, 2023.

PAULO, S. G. O.; BRANDEMBERG, J. C. Sobre Uma Biografia de Georg Joachim Rheticus e Sua Obra *Canon Doctrinae Triangulorum* (1551). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – Volume 9, Número 26, 242 – 257, 2022.

PEREIRA, A. C. C. **Teorema De Thales: Uma Conexão Entre os Aspectos Geométrico e Algébrico em Alguns Livros Didáticos De Matemática**. 2005. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2010.

PEREIRA. A. C. C. **A obra *De triangulis Omnimodis Libri Quinque* de Johann Muller Regiomontanus (1436 – 1476)**: uma contribuição para o desenvolvimento da Trigonometria. 2010. 329f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

REPCHECK, J. **O segredo de Copérnico**: como a revolução científica começou. Tradução de J. R. Souza, Rio de Janeiro: Record, 2011.

RHETICUS, G. J. ***Canon Doctrinae Triangulorum*.** Lipisiae, 1551. Documento digitalizado. Editora: Kessinger Publishing, 2009.

ROEGEL, D. A reconstruction of the tables of Rheticus' Canon doctrinæ triangulorum (1551). **HAL archives-ouvertes,** 2010. Dispónível em: https://hal.inria.fr/inria-00543931. Acesso em: 02 abr. 2021.

ROEGEL, D. **A reconstruction of Maurolico's tables of sines, tangentes and secants (1558)**. LOCOMAT, 2021a. Disponível em: https://locomat.loria.fr/maurolico1558/maurolico1558doc.pdf. Acesso em: 15 abr. 2023

ROEGEL. D. **A survey of the main fundamental European trigonometric tables printed in the 15th and 16th centuries**. Technical report, LORIA, Nancy, 2021b.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SAMPAIO, **Uma Abordagem Histórico-Filosófica na Educação Matemática: Contribuições ao Processo de Aprendizagem de Trigonometria no Ensino Médio.** 2008. 192f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2008.

SANTOS, M. L. S. **Uma perspectiva educacional da história da álgebra**. 2020. Disponível em: https//:edisciplinas.usp.br. Acesso em: 12. Abr. 2023

TRALDI JÚNIOR, A. **As Concepções de Professores do Curso de Licenciatura em Matemática Sobre o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral**. IX Encontro Nacional em Educação Matemática, 2007. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html. Acesso em: 11 Nov. 2013.

WESTMAN, R. S. **Copernicus and the Astrologers.** Dibner Library Lecture, 2013.

WTODARCZYK, J. **Narratio prima**: or First Account of the Books *On the Revolutions* by Nicolaus Copernicus, de Georg Joachim Rheticus. 2015.

WUSSING, H. **Lessiones de Historia de las Matemáticas.** Madrid: Siglo veintiuno editores, 1998.

ANEXOS

TABELAS CONTIDAS NO *CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM* (1551)

(Disponível em: Biblioteca Nacional Austríaca
<<http://digital.onb.ac.at/OnbViewer/viewer.faces?doc=ABO_%2BZ184409708>)

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includens	
		Perpendicu:	Different:	Basis	Differe:	Hypotenusa	Differ:
0	0	......	29088	10000000	43	....	43
	10	29088	29088	9999957	127	10000043	127
	20	58177	29088	9999830	211	10000170	211
	30	87265	29088	9999619	296	10000381	296
	40	116353	29086	9999323	381	10000677	381
	50	145439	29086	9998942	465	10001058	465
1	0	174525	29083	9998477	550	10001523	551
	10	203608	29081	9997927	635	10002074	635
	20	232689	29080	9997292	719	10002709	719
	30	261769	29078	9996573	803	10003428	804
	40	290847	29075	9995770	889	10004232	890
	50	319922	29073	9994881	973	10005122	974
2	0	348995	29069	9993908	1058	10006096	1059
	10	378064	29067	9992850	1140	10007155	1143
	20	407131	29063	9991710	1228	10008298	1229
	30	436194	29059	9990482	1310	10009527	1313
	40	465253	29055	9989172	1397	10010840	1400
	50	494308	29052	9987775	1480	10012240	1484
3	0	523360	29047	9986295	1564	10013724	1568
	10	552407	29041	9984731	1649	10015292	1655
	20	581448	29037	9983082	1734	10016947	1739
	30	610485	29032	9981348	1818	10018686	1825
	40	639517	29027	9979530	1912	10020511	1911
	50	668544	29021	9977628	1988	10022422	1997
4	0	697565	29014	9975640	2070	10024419	2081
	10	726579	29009	9973570	2156	10026500	2167
	20	755588	29003	9971414	2241	10028667	2255
	30	784591	28996	9969173	2324	10030922	2339
	40	813587	28988	9966849	2409	10033261	2426
	50	842575	28982	9964440	2493	10035687	2511
5	0	871557	28974	9961947	2577	10038198	2593
	10	900531	28967	9959370	2662	10040795	2685
	20	929498	28960	9956708	2746	10043480	2770
	30	958458	28950	9953962	2830	10046250	2857
	40	987408	28943	9951132	2914	10049107	2944
	50	1016351	28934	9948218	2999	10052051	3031
6	0	1045285	28925	9945219	3083	10055082	3119
	10	1074210	28916	9942136	3166	10058201	3203
	20	1103126	28906	9938970	3251	10061404	3292
	30	1132032	28897	9935719	3335	10064696	3380
	40	1160929	28887	9932384	3419	10068076	3467
	50	1189816	28877	9928965	3504	10071543	3555
		Basis.	Differen:	Perpendiculū	Differen	Hypotenusa	Differ:

CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR

tiũ anguliũ rect:		Minus latus includentium angulum rectum					
Perpend:	Dfa.	Hypotenusa	Differentia.	Basis.	Differentia.		
.....	.....	Infinitum	Infinitum	Infinitum	Infinitum.	0	90
29088	29090	3437843784	1618951439	3437829002	1718965894	50	
58178	29090	1718892347	572957549	1718863108	572971972	40	
87268	29093	1145934796	286481237	1145891136	286495762	30	
116361	29093	859453559	171880075	859395374	171894635	20	
145454	29097	687573484	114589671	687500739	114600909	10	
174551	29099	572983813	81843976	572899830	81861806	0	89
203650	29102	491139837	61381662	491038024	61396228	50	
232752	29106	429758175	47741970	429641796	47756508	40	
261858	29112	382016205	38192821	381885288	38207341	30	
290970	29115	343823384	31247194	343677947	31261764	20	
320085	29122	312576190	26039134	312416183	26053687	10	
349207	29127	286537056	22031576	286362496	22046137	0	88
378334	29134	264505480	18884292	264316359	18898815	50	
407468	29141	245621188	16365399	245417544	16379960	40	
436609	29148	229255789	14318970	229037584	14333498	30	
465757	29156	214936819	12633802	214704086	12648384	20	
494913	29165	202303017	11229951	202055702	11244502	10	
524078	29174	191073066	10047120	190811200	10061662	0	87
553252	29181	181025946	9041521	180749538	9056079	50	
582433	29193	171984425	8180237	171693462	8194801	40	
611626	29195	163804188	7436180	163498661	7450005	30	
640821	29222	156368008	6789222	156048656	6804507	20	
670043	29225	149578786	6222970	149244149	6237533	10	
699268	29236	143355816	5724533	143006616	5739093	0	86
728504	29250	137631283	5284025	137267523	5298593	50	
757754	29263	132347258	4892317	131968930	4906894	40	
787017	29276	127454941	4542456	127062036	4557018	30	
816293	29289	122912485	4228689	122505018	4243261	20	
845582	29304	118683796	3946608	118261757	3961179	10	
874886	29320	114737188	3691594	114300579	3706274	0	85
904206	29333	111045594	3460635	110594305	3475107	50	
933539	19352	107584959	3250705	107119198	3265278	40	
562891	29366	104334254	3058996	103853920	3073563	30	
992257	29384	101275258	2884053	100780357	2898641	20	
021641	29402	98391205	2723517	97881716	2738104	10	
051043	29419	95667688	2576021	95143612	2590610	0	84
080462	29429	93091667	2440192	92553002	2454772	50	
109891	29465	90651475	2314750	90098230	2329343	40	
1139356	29476	88336725	2198813	87768888	2213406	30	
1168832	29497	86137912	2091303	85555482	2105898	20	
1198329	29516	84046609	1991490	83449584	2006087	10	
Basis.	Differ	Hypotenusa	Differentia.	Perpendicu:	Different:		

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includens	
		Perpendicul:	Differen:	Basis.	Differe:	Hypotenusa	Differe:
7	0	1218693	28867	9925461	3587	10075098	3648
	10	1247560	28857	9921874	3670	10078741	3729
	20	1276417	28845	9918204	3755	10082470	3819
	30	1305262	28834	9914449	3839	10086289	3907
	40	1334096	28824	9910610	3922	10090196	3994
	50	1362920	28811	9906688	4007	10094190	4085
8	0	1391731	28800	9902681	4090	10098275	4172
	10	1420531	28788	9898591	4175	10102447	4263
	20	1449319	28775	9894416	4257	10106710	4350
	30	1478094	28763	9890159	4342	10111060	4441
	40	1506857	28751	9885817	4425	10115501	4530
	50	1535608	28737	9881392	4509	10120031	4620
9	0	1564345	28724	9876883	4592	10124651	4710
	10	1593069	28710	9872291	4675	10129361	4799
	20	1621779	28697	9867616	4760	10134160	4891
	30	1650476	28683	9862856	4842	10139051	4980
	40	1679159	28669	9858014	4927	10144031	5072
	50	1707828	28654	9853087	5009	10149103	5162
10	0	1736482	28639	9848078	5093	10154265	5254
	10	1765121	28625	9842985	5177	10159519	5345
	20	1793746	28609	9837808	5259	10164864	5439
	30	1822355	28594	9832549	5342	10170303	5529
	40	1850949	28578	9827207	5426	10175832	5620
	50	1879527	28563	9821781	5509	10181452	5714
11	0	1908090	28546	9816272	5592	10187166	5807
	10	1936636	28530	9810680	5674	10192973	5900
	20	1965166	28513	9805006	5759	10198873	5993
	30	1993679	28497	9799247	5840	10204866	6086
	40	2022176	28480	9793407	5924	10210952	6179
	50	2050656	28461	9787483	6007	10217131	6274
12	0	2079117	28445	9781476	6089	10223405	6369
	10	2107562	28426	9775387	6172	10229774	6462
	20	2135988	28408	9769215	6255	10236236	6559
	30	2164396	28391	9762960	6337	10242795	6652
	40	2192787	28371	9756623	6420	10249447	6749
	50	2221158	28353	9750203	6503	10256196	6845
13	0	2249511	28333	9743700	6584	10263041	6940
	10	2277844	28315	9737116	6666	10269981	7036
	20	2306159	28295	9730450	6751	10277017	7135
	30	2334454	28275	9723699	6831	10284152	7229
	40	2362729	28255	9716868	6914	10291381	7328
	50	2390984	28235	9709954	6997	10298709	7428
		Basis.	Differen:	Perpendicul:	Differe:	Hypotenusa	Differen

CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR

dum angulum rectum. | Minus latus includentium angulum rectum.

Perpendic:	Different:	Hypotenusa	Different:	Basis.	Different:		
1227845	29539	82055119	1898654	81443497	1913262	0	83
1257384	29560	81056465	1812162	79530235	1826757	50	
1286944	29581	78344303	1731332	77703478	1745939	40	
1316525	29604	76612971	1655846	75957539	1670456	30	
1346129	29628	74957125	1595247	74287083	1599853	20	
1375757	29641	73371878	1518912	72687230	1533531	10	
1405408	29646	71852966	1456755	71153699	1471369	0	82
1435084	29701	70396211	1398289	69682330	1412917	50	
1464785	29724	68997922	1342953	68269413	1353189	40	
1494509	29752	67654969	1291671	66916224	1310684	30	
1524261	29779	66363298	1242512	65605540	1257132	20	
1554040	29805	65120786	1196268	64348408	1210910	10	
1583845	29833	63924518	1152598	63137498	1167232	0	81
1613678	29859	62771920	1111237	61970266	1125872	50	
1643637	29889	61660683	1072101	60844394	1086749	40	
1673426	29918	60588582	1034960	59757645	1049601	30	
1703344	29946	59553622	999718	58708044	1014371	20	
1733290	29979	58553904	966210	57693673	980860	10	
1763269	30010	57587694	934154	56712813	949170	0	80
1793279	30037	56653340	904087	55763643	918599	50	
1823316	30074	55749253	875203	54845044	889866	40	
1853390	30106	54874050	847710	53955178	862375	30	
1883496	30136	54026340	821465	53092803	836143	20	
1913632	30171	53204875	796446	52256660	811121	10	
1943803	30204	52408429	772499	51445539	787182	0	79
1974007	30240	51635930	749644	50658357	764323	50	
2004247	30276	50886286	727760	49894034	742456	40	
2034523	30318	50158526	706846	49151578	721536	30	
2064841	30341	49451680	686797	48430042	701496	20	
2095182	30384	48764883	667542	47728546	682247	10	
2125566	30422	48097341	649199	47046299	664078	0	78
2155988	30460	47448142	631400	46382221	645939	50	
2186448	30493	46816742	614476	45736282	629194	40	
2216941	30545	46202266	598201	45107088	612919	30	
2247486	30577	45604065	582504	44494169	597233	20	
2278063	30619	45021561	567455	43896936	582184	10	
2308682	30660	44454106	552943	43314752	567674	0	77
2339342	30702	43901163	539018	42747078	553760	50	
2370044	30736	43362145	525576	42193318	540328	40	
2400780	30795	42836569	512623	41652990	527377	30	
2431575	30830	42323946	500144	41125613	514910	20	
2462405	30875	41823802	488147	40610703	502895	10	
Basis.	Different:	Hypotenus:	Different:	Perpendic:	Different:		

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includens	
		Perpendicul:	Differen:	Basis.	Differen:	Hypotenusa	Differe:
14	0	2419219	28215	9702957	7078	10306137	7524
	10	2447434	28194	9695879	7160	10313661	7621
	20	2475628	28172	9688719	7243	10321282	7722
	30	2503800	28152	9681476	7324	10329004	7819
	40	2531952	28130	9674152	7406	10336823	7919
	50	2560082	28108	9666746	7488	10344742	8020
15	0	2588190	28087	9659258	7569	10352762	8118
	10	2616277	28065	9651689	7651	10360880	8220
	20	2644342	28041	9644038	7733	10369100	8322
	30	2672383	28021	9636305	7815	10377422	8422
	40	2700404	27996	9628490	7896	10385844	8524
	50	2728400	27975	9620594	7977	10394368	8623
16	0	2756375	27950	9612617	8058	10402991	8710
	10	2784323	27927	9604559	8140	10411721	8812
	20	2812250	27905	9596419	8222	10420553	8937
	30	2840153	27880	9588197	8301	10429490	9037
	40	2868033	27855	9579896	8383	10438527	9142
	50	2895888	27829	9571513	8465	10447669	9248
17	0	2923717	27806	9563048	8546	10456917	9353
	10	2951523	27781	9554502	8626	10466270	9457
	20	2979304	27754	9545876	8707	10475727	9564
	30	3007058	27730	9537169	8787	10485291	9670
	40	3034788	27704	9528382	8868	10494961	9776
	50	3062492	27678	9519514	8949	10504737	9885
18	0	3090170	27652	9510565	9029	10514622	9992
	10	3117822	27626	9501536	9109	10524614	10099
	20	3145448	27599	9492427	9190	10534712	10209
	30	3173047	27573	9483237	9270	10544922	10318
	40	3200620	27545	9473967	9351	10555240	10429
	50	3228165	27517	9464616	9430	10565669	10537
19	0	3255682	27489	9455186	9510	10576206	10638
	10	3283171	27463	9445676	9591	10586854	10751
	20	3310634	27435	9436085	9670	10597615	10871
	30	3338069	27406	9426415	9750	10608486	10984
	40	3365475	27377	9416665	9829	10619470	11096
	50	3392852	25349	9406836	9910	10630566	11211
20	0	3420201	27321	9396926	9989	10641777	11325
	10	3447522	27291	9386937	10067	10653102	11437
	20	3474813	27261	9376870	10148	10664539	11554
	30	3502074	27232	9366722	10227	10676093	11669
	40	3529306	27202	9356495	10305	10687762	11785
	50	3556508	27171	9346190	10386	10699547	11905
		Basis.	Differen:	Perpendicul:	Differe:	Hypotenusa	Differe:

CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 POSITVR

cium angulum rectũ. | Minus latus includentium angulum rectum.

Perpedicul:	Differẽ.	Hypotenusa	Different:	Basis.	Different:		
2493280	30920	41335655	476534	401078 8	491299	0	76
2524200	30966	40859121	465331	39616509	480100	50	
2555166	31010	40393790	454497	39136409	469279	40	
2586176	31058	39939293	444073	38667130	458854	30	
2617234	31105	39495220	433971	38208276	449759	20	
2648339	31152	39061249	424209	37758517	438003	10	
2679491	31199	38637040	414788	37320514	429585	0	75
2710690	31255	38222252	405661	36890929	420465	50	
2741945	31299	37816591	396805	36470464	411617	40	
2773244	31347	37419786	388290	36058847	403108	30	
2804591	31408	37031496	379979	35655739	394802	20	
2835999	31454	36651517	371947	35260937	386785	10	
2867453	31506	36279560	364187	34874152	379022	0	74
2898959	31561	35915373	356657	34495132	371498	50	
2930520	31615	35558716	349346	34123634	364196	40	
2962135	31669	35209370	342268	33759438	357117	30	
2993804	31724	34867102	335380	33402321	350238	20	
3025528	31778	34531722	328686	33052083	343556	10	
3057306	31838	34203036	322223	32708527	337098	0	73
3089144	31894	33880813	315927	32371429	330804	50	
3121038	31950	33564886	309791	32040625	324679	40	
3152988	32010	33255095	303865	31715946	318755	30	
3184998	32070	32951230	298084	31397191	312983	20	
3217068	32129	32653146	292467	31084208	307374	10	
3249197	32190	32360679	287008	30776834	301919	0	72
3281387	32253	32073671	281698	30474915	296616	50	
3313640	32313	31791976	276525	30178299	291452	40	
3345953	32378	31515448	271502	29886847	286435	30	
3378331	32441	31243946	266566	29600412	281539	20	
3410772	32505	30977380	261850	29318873	276768	10	
3443277	32569	30715530	257172	29042105	272126	0	71
3475846	32636	30458358	252664	28769979	267629	50	
3508482	32704	30205694	248174	28502350	263225	40	
3541186	32770	29957520	244033	28239125	258934	30	
3573956	32838	29713487	239759	27980191	254738	20	
3606794	32908	29473728	234781	27725453	250676	10	
3639702	32981	29238947	232606	27474777	246707	0	70
3672683	33045	29006341	227814	27228070	242819	50	
3705728	33112	28778527	224020	26985251	239037	40	
3738840	33199	28554507	220070	26746214	235350	30	
3772039	33261	28334437	216969	26510864	231744	20	
3805300	33340	28117468	213184	26279120	228226	10	
Basis.	Differ.	Hypotenusa	Different:	Perpendicul:	Different:		

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includens	
		Perpendicul:	Different:	Basis.	Different:	Hypotenusa	Dra.
21	0	3583679	27142	9335804	10463	10711450	12018
	10	3610821	27111	9325341	10543	10723468	12137
	20	3637932	27080	9314798	10622	10735605	12257
	30	3665012	27050	9304176	10700	10747862	12374
	40	3692062	27018	9293476	10779	10760236	12495
	50	3719080	26986	9282697	10858	10772731	12615
22	0	3746066	26955	9271839	10936	10785346	12737
	10	3773021	26923	9260903	11015	10798083	12858
	20	3799944	26890	9249888	11093	10810941	12981
	30	3826834	26858	9238795	11170	10823922	13102
	40	3853692	26826	9227625	11249	10837024	13127
	50	3880518	26793	9216376	11326	10850251	13351
23	0	3907311	26761	9205050	11406	10863602	13477
	10	3934072	26727	9193644	11483	10877079	13503
	20	3960799	26692	9182161	11560	10890682	13728
	30	3987491	26659	9170601	11637	10504410	13855
	40	4014150	26626	9158964	11716	10918265	13984
	50	4040776	26590	9147248	11793	10932249	14113
24	0	4067366	26557	9135455	11871	10946362	14242
	10	4093923	26523	9123584	11947	10960604	14372
	20	4120446	26486	9111637	12024	10974976	14502
	30	4146932	26453	9099613	12101	10989478	14634
	40	4173385	26417	9087512	12178	11004112	14766
	50	4199802	26381	9075334	12256	11018878	14901
25	0	4226183	26345	9063078	12332	11033779	15033
	10	4252528	26310	9050746	12408	11048812	15169
	20	4278838	26273	9038338	12485	11063581	15304
	30	4461978	26014	8949344	13017	11174001	16278
	40	4487992	25976	8936327	13093	11190279	16420
	50	4513968	25937	8923234	13169	11206699	16563
27	0	4539905	25899	8910065	13244	11223263	16707
	10	4565804	25861	8896821	13318	11239969	16851
	20	4591665	25821	8883503	13395	11256820	16999
	30	4617486	25782	8870108	13469	11273819	17145
	40	4643268	25744	8856639	13544	11290964	17294
	50	4669012	25704	8843095	13619	11308258	17442
		Basis.	Different:	Perpendic:	Different:	Hypotenusa	Dra.

CV MANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR

tium angulum rectū | Minus latus includentium angulum rectum.

Perpendic	Differ.	Hypotenusa	Different:	Basis.	Different:		
3838640	33412	27904284	209752	26050894	224798	0	69
3972052	33489	27698532	206388	25826096	221445	50	
3905541	33565	27488144	203104	25604651	218169	40	
3939106	33640	27285040	199905	25386482	214976	30	
3972746	33719	27085135	196765	25171506	211847	20	
4006465	33797	26888370	193699	24959659	208790	10	
4040262	33877	26694671	190711	34750869	205808	0	68
4074139	33958	26503960	187783	24545061	202891	50	
4108097	34038	26316177	184916	24342170	200033	40	
4142135	34121	26131261	182120	24142137	197242	30	
4176256	34203	25949141	179387	23944895	194519	20	
4210459	34288	25769754	176706	23750376	191849	10	
4244747	34374	25593048	174093	23558527	189244	0	67
4279121	34459	25418955	171524	23369283	186685	50	
4313580	34544	25247431	169005	23182598	184172	40	
4348124	34631	25078426	166552	22998426	181732	30	
4382755	34721	24911874	163153	22816694	179339	20	
4417476	34810	24747721	161786	22637355	176985	10	
4452286	34901	24585935	159487	22460370	174696	0	66
4487187	34992	24426448	157231	22285674	172444	50	
4522179	35093	24269217	155005	22113230	170230	40	
4557272	35167	24114212	152848	21943000	168081	30	
4592439	35272	23961364	150718	21774919	165962	20	
4627711	35366	23810646	148633	21608957	163889	10	
4663077	35462	23662013	146589	21445068	161855	0	65
4698539	35559	23515424	144593	21283213	159866	50	
4734098	35657	23370831	142627	21123347	157911	40	
4769755	35756	23228204	140703	20965436	155997	30	
4805511	35858	23087501	138820	20809439	154126	20	
4841369	35958	22948681	136964	20655313	152278	10	
4877327	36058	22811717	135147	20503035	150471	0	64
4913385	36164	22676570	133368	20352564	148704	50	
4949549	36267	22543202	131613	20203860	146961	40	
4985816	36373	22411589	129909	20056899	145268	30	
5022189	36479	22281680	128223	19911631	143582	20	
5058668	36587	22153457	126564	19768049	141945	10	
5095255	36694	22026893	124945	19626104	140334	0	63
5131949	36783	21901948	123355	19485770	138751	50	
5168732	36939	21778503	121787	19347019	137198	40	
5205671	37017	21656806	120250	19209821	135672	30	
5242688	37151	21536556	118749	19074149	134179	20	
5279839	37256	21417807	117264	18939970	132703	10	
Basis.	Differen:	Hypotenusa	Different:	Perpendicul	Different:		

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum,				Maius latus includens	
		Perpendicul:	Different:	Basis.	Dfa.	Hypotenusa	Differen
28	0	4694716	25664	8829476	13695	11325700	17591
	10	4720380	25624	8815781	13767	11343291	17745
	20	4746004	25584	8802014	13843	11361036	17895
	30	4771588	25544	8788171	13916	11378931	18048
	40	4797132	25503	8774255	13992	11396979	18203
	50	4822635	25461	8760263	14066	11415182	18358
29	0	4848096	25421	8746197	14139	11433540	18514
	10	4873517	25380	8732058	14214	11452054	18672
	20	4898897	25338	8717844	14287	11470726	18829
	30	4924235	25297	8703557	14360	11489555	18988
	40	4949532	25256	8689197	14435	11508543	19150
	50	4974788	25212	8674762	14508	11527693	19312
30	0	5000000	25171	8660254	14581	11547005	19474
	10	5025171	25128	8645673	14654	11566479	19638
	20	5050299	25085	8631019	14727	11586117	19703
	30	5075384	25043	8616292	14800	11605920	19970
	40	5100427	24998	8601492	14873	11625890	20137
	50	5125425	24956	8586619	14946	11646027	20306
31	0	5150381	24913	8571673	15018	11666333	20476
	10	5175294	24868	8556655	15090	11686809	20647
	20	5200162	24824	8541565	15163	11707456	20820
	30	5224986	24780	8526402	15235	11728276	20994
	40	5249766	24735	8511167	15307	11749270	21168
	50	5274501	24691	8495860	15379	11770438	21345
32	0	5299192	24647	8480481	15450	11791783	21522
	10	5323839	24602	8465031	15522	11813305	21702
	20	5348441	24555	8449509	15594	11835007	21882
	30	5372996	24511	8433915	15665	11856889	22064
	40	5397507	24465	8418250	15737	11878953	22248
	50	5421972	24418	8402513	15807	11901201	22431
33	0	5446390	24373	8386706	15878	11923632	22618
	10	5470763	24327	8370828	15950	11946250	22805
	20	5495090	24280	8354878	16020	11969055	22994
	30	5519370	24233	8338858	16090	11982049	23184
	40	5543603	24187	8322768	16161	12015233	23376
	50	5567790	24139	8306607	16231	12038609	23571
34	0	5591929	24092	8290376	16301	12062180	23763
	10	5616021	24045	8274075	16372	12085943	23962
	20	5640066	23996	8257703	16441	12109905	24159
	30	5664062	23950	8241262	16511	12134064	24358
	40	5688012	23900	8224751	16581	12158412	24562
	50	5711912	23852	8208170	16650	12182984	24862
		Basis.	Differrnt:	Perpendic:	Different:	Hypotenusa	Differe:

ium angulum rectũ.		Minus latus includentium angulum rectum					
Perpendic:	Differen:	Hypotenusa	Differen:	Basis.	Different:		
5317095	37370	21300543	115806	18807263	131262	0	62
5354465	37487	21184737	114180	18676001	129843	50	
5391952	37606	21070357	113185	18546158	128451	40	
5429558	37723	20957172	111390	18417707	127080	30	
5467281	37845	20845782	110208	18290627	125738	20	
5505126	37964	20735574	108920	18164889	124410	10	
5543090	38087	20626654	107592	18040479	123113	0	61
5581177	38214	20519062	106303	17917366	121841	50	
5619391	38336	20412729	105044	17795525	120583	41	
5657727	38466	20307715	103785	17674942	119347	30	
5696193	38590	20203930	102570	17555595	118144	20	
5734783	38720	20101360	101360	17437451	116943	10	
5773503	38851	20000000	100180	17320508	115774	0	60
5812354	38982	19899820	99013	17204734	114619	50	
5851336	39114	19800807	97865	17090115	113484	40	
5890450	39253	19702942	96741	16976631	112373	30	
5929703	39381	19606201	95624	16864258	111268	20	
5969084	39523	19510577	94538	16752990	110196	10	
6008607	39660	19416039	93465	16642794	109134	0	59
6048767	39800	19322574	92404	16533660	108085	50	
6088067	39941	19230170	91363	16425575	107059	40	
6128008	40084	19138807	90339	16318516	106047	30	
6168092	40227	19048468	89329	16212469	105050	20	
6208319	40374	18959139	88219	16107419	104072	10	
6248693	40521	18870920	87482	16003347	103108	0	58
6289214	40670	18783438	86401	15900239	102161	50	
6329884	40818	18697037	85447	15798078	101221	40	
6370702	40971	18611590	84519	15696857	100305	30	
6711673	41125	18528071	83597	15596552	99399	20	
6452798	41277	18443474	83189	15497153	98502	10	
6494075	41435	18360285	81300	15398651	97626	0	57
6535510	41594	18278985	80921	15301025	96764	50	
6577104	41752	18198064	80055	15204261	95910	40	
6618856	41912	18118009	79200	15108351	95068	30	
6660768	42077	18038809	78362	15013283	94245	20	
6702845	42240	17960447	77531	14919038	93437	10	
6745085	42406	17882916	76715	14825601	92617	0	56
6787491	42575	17806201	75913	14732984	91838	50	
6830066	42743	17730288	75115	14641146	91055	40	
6872809	42917	17655173	74339	14550091	90292	30	
6915726	43087	17580834	73564	14459799	89532	20	
6958813	43262	17507270	72801	14370267	88787	10	
Basis.	Differen:	Hypotenusa	Different.	Perpendicul:	Different:		

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includens	
		Perpendicul.	Different:	Basis.	Different:	Hypotenusa	Differēt:
35	0	5735764	23804	8191520	16718	12207746	24966
	10	5759568	23756	8174802	16789	12232712	25175
	20	5783324	23706	8158013	16858	12257887	25382
	30	5807030	23657	8141155	16926	12283269	25591
	40	5830687	23608	8124229	16995	12308860	25804
	50	3854295	23557	8107234	17064	12334664	26016
36	0	5877852	23509	8090170	17132	12360680	26231
	10	5991361	23459	8073038	17200	12386911	26447
	20	5924820	23408	8055838	17269	12413358	26668
	30	5948228	23358	8038569	17337	12440026	26887
	40	5971586	23308	8021232	17404	12466913	27109
	50	5994894	23256	8003828	17472	12494022	27335
37	0	6018150	23207	7986355	17540	12521357	27560
	10	6041357	23154	7968815	17607	12548917	27788
	20	6064511	23103	7951206	17675	12576705	28019
	30	6087614	23053	7933533	17741	12604724	28251
	40	6110667	23000	7915792	17809	12632975	28486
	50	6133667	22948	7897983	17875	12661461	28720
38	0	6156615	22897	7880108	17942	12690181	28960
	10	6179512	22844	7862166	18009	12719141	29201
	20	6202356	22790	7844157	18075	13748342	29444
	30	6225146	22739	7826082	18141	12777786	29688
	40	6247885	22687	7807941	18208	12807474	29936
	50	6270572	22632	7789733	18273	12837410	30185
39	0	6293204	22580	7771460	18339	12867595	30436
	10	5315784	22526	7753121	18405	12898031	30691
	20	6338310	22472	7734716	18470	12928722	30948
	30	6360782	22419	7716246	18536	12959670	31206
	40	6383201	22365	7697710	18600	12990876	31466
	50	6405566	22310	7679110	18665	13022342	31730
40	0	6427876	22256	7660445	18730	13054072	31996
	10	6450132	22201	7641715	18795	13086068	32264
	20	6472333	22157	7622920	18860	13118332	32537
	30	6494480	22092	7604060	18924	13150869	32810
	40	6516572	22037	7585136	18988	13183679	33086
	50	6538609	2198	7566148	19052	13216765	33364
41	0	6560590	2192	7547096	19116	13250129	33647
	10	9582516	2187	7527980	19179	13283776	33929
	20	6604386	2181	7508801	19244	13317705	34220
	30	6626200	2175	7489557	19306	13351925	34507
	40	6647959	2170	7470251	19369	13386432	34797
	50	6669661	2164	7450882	19434	13421229	35099
		Basis	Different:	Perpendic.	Different:	Hypotenusa	Differēt:

CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR.

tium augulum rectum — Minus latus includentium angulum rectum.

Perpendicul:	Different:	Hypotenusa	Differēt:	Basis.	Differēt:		
7002075	43439	17434469	72056	14281480	88051	0	55
7045514	43619	17362413	71319	14193429	87331	50	
7089133	43798	17291094	70588	14106098	86617	40	
7132931	43980	17220506	69869	14019481	85910	30	
7176911	44165	17150637	69161	13933571	85219	20	
7221076	44349	17081476	68459	13848352	84531	10	
7265425	44538	17013017	67773	13763821	83862	0	54
7309963	44728	16945244	67095	13679959	83195	50	
7354691	44920	16878149	66320	13596764	82539	40	
7399611	45113	16811729	65760	13514225	81894	30	
7444724	45310	16745969	65107	13432331	81256	20	
7490034	45506	16680862	64460	13351075	80827	10	
7535540	45710	16616402	63830	13270448	80009	0	53
7581250	45907	16552572	63197	13190439	79394	50	
7627157	46112	16489375	62578	13111045	78791	40	
7673269	46322	16426797	61972	13032254	78199	30	
7719591	46528	16364825	61365	12954055	77610	20	
7766119	46738	16303460	60769	12876445	77028	10	
7812857	46952	16242691	60184	12799417	76461	0	52
7859809	47167	16182507	59602	12722956	75896	50	
7906976	47383	16122905	59025	12647060	75336	40	
7954359	47603	16063881	58464	12571724	74789	30	
8001962	47829	16005416	57908	12496935	74252	20	
8049791	48049	15947506	57351	12422683	73711	10	
8097840	48279	15890157	56810	12348972	73186	0	51
8146119	48507	15833347	56271	12275786	72666	50	
8194626	48680	15777076	55739	12203120	72149	40	
8243306	49032	15721337	55216	12130971	71649	30	
8292338	49210	15666121	54699	12059322	71139	20	
8341548	49448	15611422	54184	11988183	70646	10	
8390996	49691	15557238	53679	11917537	70159	0	50
8440687	49935	15503559	53180	11847378	69677	50	
8490622	50184	15450379	52688	11777701	69204	40	
8540806	50433	15397691	52214	11708497	68733	30	
8591239	50687	15345477	51720	11639764	68269	20	
8641926	50941	15293773	51241	11571495	67810	10	
8692867	51200	15242532	50773	11503685	67359	0	49
8744067	51460	15191759	50308	11436326	66910	50	
8795527	51725	15141451	49845	11369416	66442	40	
8847252	51992	15091606	49395	11302944	66035	30	
8899244	52221	15042211	48945	11236909	65603	20	
8951505	52536	14993266	48499	11171306	65181	10	
Basis	Different:	Hypotenusa	Differēt:	Perpendicula	Differēt:		

CANON DOCTRINAE TRIANGVLORVM IN QVO TRIQVETRI

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includens	
		Perpendiculum	Different:	Basis.	Different:	Hypotenusa	Differen
42	0	6691306	21589	7431448	19495	13456328	35393
	10	6712895	21532	7411953	19559	13491721	35697
	20	6734427	21475	7392394	19621	13527418	36000
	30	6755902	21418	7372773	19683	13563418	36307
	40	6777320	21361	7353090	19745	13595725	36617
	50	6798681	21303	7333345	19808	13636342	36932
43	0	6819984	21245	7313537	19869	13673274	37259
	10	6841229	21188	7293668	19931	13710523	37568
	20	6862417	21129	7273737	19993	13748091	37893
	30	6881546	21071	7253744	20055	13785984	38219
	40	6904617	21013	7233689	20115	13824203	38551
	50	6925630	20954	7213574	20176	13862754	38882
44	0	6946584	20895	7193398	20237	13901636	39119
	10	6967479	20837	7173161	20298	13940855	39561
	20	6988316	20777	7152863	20359	13980416	39906
	30	7009093	20717	7132504	20418	14020322	40250
	40	7029810	20659	7112086	20479	14060572	40604
	50	7050469	20599	7091607	20539	14101176	40959
45	0	7071068		7071068		14142135	
		Basis.	Different:	Perpendic:	Different:	Hypotenusa	Dif.

CVM ANGVLO RECTO IN PLANITIE PARTIVM 10000000 PONITVR

tium angulũ rectum		Minus latus includentium angulum rectum.					
Perpedicul:	Differæ:	Hypotenusa	Differen.	Basis.	Differen.		
9004041	52836	14944767	47064	11106125	64759	0	48
9056877	53187	14896703	47630	11041366	64346	50	
9110064	53248	14849073	47201	10977020	63935	40	
9163312	53657	14801872	46777	10913085	63531	30	
9216969	53945	14755095	46360	10840554	63131	20	
9270914	54237	14708735	45944	10786423	62736	10	
9325151	54531	14662791	45535	10723687	62346	0	47
9379682	54832	14617256	45131	10661341	61960	50	
9434514	55131	14572125	44729	10599381	61580	40	
9489645	55439	14527396	44334	10537801	61204	30	
9545084	55746	14483062	43943	10476597	60890	20	
9600830	56058	14439119	43555	10415707	60404	10	
9656888	56374	14395564	43170	10355303	60100	0	46
9713262	56694	14352394	42794	10295203	59741	50	
9769956	57018	14309600	42419	10235462	59390	40	
9826974	57341	14267181	42045	10176072	59068	30	
9884315	57676	14225136	41682	10117004	58656	20	
9941991	58009	14183454	41319	10058348	58348	10	
10000000				10000000		0	45
Basis.	Differa:	Hypotenusa	Differen.	Perpendicul:	Differen.		