UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA QUÍMICA

ANDREO CARLOS MAGALHÃES SOUZA

SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EMHD DE UM FLUIDO MICROPOLAR EM UM DUTO QUADRADO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

BELÉM - PA

2023

ANDREO CARLOS MAGALHÃES SOUZA

SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EMHD DE UM FLUIDO MICROPOLAR EM UM DUTO QUADRADO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Pará - PPGEQ, do Instituto de Tecnologia - ITEC, da Universidade Federal do Pará - UFPA, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Área de Concentração: Desenvolvimento de Processos
Linha de Pesquisa: Engenharia de Processos – Modelagem e Simulação

Orientador: Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
Co-orientador: Prof. Dr. Helder Kiyoshi Miyagawa

BELÉM – PA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C284s Souza, Andreo Carlos Magalhães.
SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EMHD DE UM FLUIDO MICROPOLAR EM UM DUTO QUADRADO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA
/ Andreo Carlos Magalhães Souza. —2023.
96 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
Coorientador(a): Prof. Dr. Helder Kiyoshi Miyagawa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Belém, 2023.

1. Eletromagnetohidrodinâmica. 2. Micropolar. 3. Microbombas. 4. GITT. 5. Força de Lorentz. I. Título.

CDD 620.100113

ANDREO CARLOS MAGALHÃES SOUZA

SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EMHD DE UM FLUIDO MICROPOLAR EM DUTO QUADRADO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Defesa de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Química, na área de concentração de Desenvolvimento de Processos.

Data da Aprovação: 28/09/2023

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. *João Nazareno Nonato Quaresma*
(PPGEQ/ITEC/UFPA – Orientador)

____

(FEQ/ITEC/UFPA – Coorientador)

____

(PPGEQ/ITEC/UFPA - Membro interno)

____

Prof. Dr. *Cleonor Crescêncio das Neves*
(IFAM - Membro Externo)

Dedico este trabalho aos meus primos Cleyton Leal e Cleyton Andry Leal.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus pela oportunidade de realizar esse trabalho e por todas as felicidades e realizações que tenho na minha vida. Só ele sabe de todas as dificuldades que passei para chegar até aqui e sou muito grato por ele me sustentar e me fortalecer diariamente com sua graça divina. Ele me guiou até onde estou e com ele seguirei caminhando em busca do sucesso.

Gostaria de agradecer à minha família: meus pais Antônio Carlos da Rosa Souza e Ana Dalila Magalhães Souza, à minha irmã Andrea Carla Magalhães Souza e ao meu sobrinho João Guilherme Magalhães Souza. Vocês são minha base e a razão de eu lutar diariamente em busca de meus objetivos e da nossa família. Amo vocês e sou muito agradecido a Deus por tê-los em minha vida. Se eu cheguei até aqui foi porque vocês foram e são minha base sólida e que me alegram diariamente.

Também quero agradecer à minha namorada Isabella Karoena da Costa Silva, você foi fundamental para eu chegar até aqui e não desistir nesse caminho que trilhei. Muito obrigado pelas palavras de incentivo e por todo amor que você tem por mim. Nesses dois anos de convivência você sempre esteve ao meu lado e me deu a relação que eu sempre sonhei. Quero continuar conquistando muito ao seu lado e também participar de suas futuras conquistas. Sua família também faz parte dessa minha conquista, em especial a Dona Rosa Maria, minha cunhada Isadora Graziella, minha sobrinha Verônica Barbosa e minha filha pet Lore.

Agradecer também aos meus tios, tias e primos que são parte da minha trajetória de vida, todos vocês fazem parte dessa minha conquista, em especial a minha prima Cleyce Leal e meu futuro sobrinho Noah, Mauro Lisboa, Mayra Lisboa, minha madrinha Rosemary Carvalho, minha tia Antoniete Magalhães, minha tia Adelaide Magalhães, meu tio Gui, meu sobrinho Gael, meu primo Cledyr e todos da minha família que me ajudaram a chegar aqui.

Não poderia esquecer dos meus amigos de curso e de profissão Victor Hugo, Roger Monteiro, Francisco Neto, Geovana Macedo, Delis Palheta e João Paulo. Também ao meu grupo de pesquisa do Matcam por todas as conversas durante esse curto período que passei.

Aos meus amigos Diego Rodrigues, Phablo Alves, Ana Luiza Renato, Livia Machado, Lucas Guilherme, Wanderley Veiga e minha afilhada Helena, João Vitor Ribeiro e a todos que fizeram parte desse árduo caminho.

Agradeço também ao meu orientador João Nazareno Nonato Quaresma por aceitar fazer parte desse trabalho junto ao professor Helder Kiyoshi Miyagawa por todo o apoio e conhecimento que me passou, você foi fundamental para eu concluir esse trabalho.

Agradeço à Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisa (FAPESPA) por todo o apoio financeiro que foi essencial para a conclusão dessa pesquisa e também quero agradecer o Apoio da coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior – Brasil (CAPES) pelo apoio estrutural dentro da Universidade Federal do Pará.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

“O SUCESSO REQUER A REPETIÇÃO DE AÇÕES CORRETAS”

RESUMO

SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EMHD DE UM FLUIDO MICROPOLAR EM UM DUTO QUADRADO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Área de Concentração: Desenvolvimento de Processos

Linha de pesquisa: Engenharia de Processos Inorgânicos

Este trabalho tem como objetivo realizar as análises cinética, microrrotacional e térmica de um escoamento eletromagnetohidrodinâmico (EMHD) de um fluidor micropolar no interior de um duto de seção quadrática submetidas a um campo magnético externo, onde a formulação matemática leva em consideração uma diferença de pressão pulsátil. O escoamento é transiente, bidimensional em regime laminar e têm propriedades físicas constantes. As Equações diferenciais não lineares resultantes (Equação de Navier-Stokes, Equação da Microrrotação e Equação da Energia) foram resolvidas a partir da técnica híbrida (analítico-numérica) GITT (Técnica da Transformada Integral Generalizada) e foi sintetizado um código computacional no software Wolfram Mathematica v. 11.3 com o objetivo da resolução numérica do modelo proposto. Visando analisar a consistência da técnica, foi feita inicialmente a análise de convergência das variáveis velocidade central, microrrotação central, temperatura central, velocidade média, temperatura média, tensão na parede e número de Nusselt. Em seguida é apresentada a verificação numérica do método comparando os resultados da GITT com o da rotina NDSolve do software utilizado. Também é realizada a análise dos parâmetros envolvidos no escoamento (número de Strouhal, número de Hartmann, número de Prandtl, número de Eckert, parâmetro elétrico, parâmetro de micropolaridade, gradiente de pressão médio, viscosidade de microrrotação e frequência do pulso de pressão) e a interpretação física da variação de cada um deles.

Palavras-chave: Eletromagnetohidrodinâmica (EMHD), Micropolar, Microrrotação, Microbomba, Força de Lorentz, Navier-Stokes, Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), Microcanal.

ABSTRACT

SIMULATION OF THE EMHD FLOW OF A MICROPOLAR FLUID IN A SQUARE DUCT USING THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE

Area of Concentration: Process Development

Research Line: Engineering of Inorganic Processes

This paper aims to perform the kinetic, microrotational and thermal analyses of an electromagnetohydrodynamic (EMHD) flow of a micropolar fluid within a quadratic section duct subjected to an external magnetic field, where the mathematical formulation takes into account a pulsatile pressure difference. The flow is transient, two-dimensional in laminar regime and has constant physical properties. The resulting nonlinear differential equations (Navier-Stokes Equation, Microrotation Equation and Energy Equation) were solved using the hybrid (analytic-numerical) GITT (Generalized Integral Transform Technique) technique and a computer code was synthesized in Wolfram Mathematica v. 11.3 software with the objective of numerically solving the proposed model. Aiming to analyze the consistency of the technique, the convergence analysis of the variables central velocity, central microrotation, central temperature, average velocity, average temperature, wall stress and Nusselt number was initially performed. Next, the numerical verification of the method is presented by comparing the results of GITT with that of the NDSolve routine of the software used. The analysis of the parameters involved in the flow (Strouhal number, Hartmann number, Prandtl number, Eckert number, electrical parameter, micropolarity parameter, mean pressure gradient, microrotation viscosity and pressure pulse frequency) and the physical interpretation of the variation of each of them is also performed.

Keywords: Electromagnetohydrodynamics (EMHD), Micropolar, Microrotation, Micropump, Lorentz force, Navier-Stokes, Generalized Integral Transform Technique (GITT), Microchannel.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

NOMENCLATURA

$\tilde{u}$	Autofunção Normalizada relacionada ao campo de velocidade
$\tilde{N}$	Autofunção Normalizada relacionada ao campo de microrrotação
N	Autofunção relacionada ao campo de microrrotação
u	Autofunção relacionada ao campo de velocidade
N(y,z,t)	Campo de Microrrotação do fluido
$\overline{\overline{N}}$	Campo de microrrotação transformado
P	Campo de pressão
T(y,z,t)	Campo de Temperatura do fluido
$\overline{\overline{\mathrm{U}}}$	Campo de velocidade transformado
E	Campo Elétrico
E_r	Campo eletrostático
B	Campo magnético
U(y,z,t)	Componente longitudinal da velocidade do fluido
k	Condutividade térmica
x,y,z	Coordenadas espaciais adimensionais
w	Escala característica de comprimento
f_p	Frequência do pulso do escoamento pulsátil
A_0	Gradiente de Pressão médio
Ec	Número de Eckert
Ha	Número de Hartmann
Nu	Número de Nusselt local
Pr	Número de Prandtl
St	Número de Strouhal
NM	Ordem de truncamento para as expansões do campo de microrrotação
NT	Ordem de truncamento para as expansões do campo de Temperatura
NV	Ordem de truncamento para as expansões do campo de velocidade
j	Parâmetro de densidade de microrrotação
E_0	Parâmetro Elétrico Adimensional
Ka	Parâmetro material de microrrotação
T_0	Temperatura inicial
T_w	Temperatura na parede
$\vec{B}$	Vetor Campo Magnético

$\vec{J}$	Vetor Densidade de Corrente Elétrica
$\vec{F}$	Vetor Força de Lorentz
$\vec{V}$	Vetor Velocidade do fluido

Letras gregas

$\tilde{\Gamma}$	Autofunção Normalizada relacionada ao campo de temperatura
Γ	Autofunção relacionada ao campo de temperatura
α	Autovalor relacionado ao campo de microrrotação
β	Autovalor relacionado ao campo de temperatura
μ	Autovalor relacionado ao campo de velocidade
$\bar{\bar{\Gamma}}$	Campo de temperatura transformado
σ	Condutividade elétrica do fluido
ρ	Massa específica do fluido
τ	Período de alternação
$\tau(t)$	Tensão na parede
ν	Viscosidade cinemática
μ	Viscosidade dinâmica

Índices subscritos

i,j,k,l,m,n,o,p,q	Ordem dos autovalores

Símbolos matemáticos

∇^2	Laplaciano
Σ	Somatório

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1. Introdução

1.1 Motivação

O desenvolvimento tecnológico humano ao longo das décadas se desenvolve em pesquisas nos mais variados campos de atuação. O conhecimento adquirido sobre mecânica dos fluidos fez o ser humano conhecer e dominar as leis físicas que envolvem o escoamento de fluidos em diversos canais com geometrias diferentes e com diversas aplicações tecnológicas e úteis para o dia a dia da sociedade, como por exemplo, as redes de abastecimento de água da cidade de Belém atuam com os conhecimentos da transferência da quantidade de movimento clássica e melhora a qualidade de vida de toda a população há muitos anos.

Todavia, quanto mais variado o campo de aplicação do estudo de escoamentos, maiores são os desafios e variáveis encontradas para pôr em prática os estudos teóricos que envolvem essas aplicações. A busca de tecnologias que melhorassem a vida fez com que surgisse um campo de aplicação do escoamento de fluidos inovador e desafiador: a microfluidíca. Escalas de proporção pequenas para fazer um fluido escoar é uma temática difícil pois envolve conhecimentos que o olho humano não consegue notar com facilidade (COSTA, 2006).

A aplicação da microfluidica nas áreas de saúde, indústria, pesquisa, ambiental, dentre outras é recente e faz com que a sociedade se desenvolva de uma forma mais detalhada e precisa. Como um médico conseguiria realizar cirurgias em vasos sanguíneos sem o conhecimento do comportamento dinâmico do sangue naquela determinada região? Ou como pesquisadores de uma indústria de medicamentos iriam prever qual a quantidade necessária de um medicamento para a sua atuação no corpo humano sem a análise do escoamento sanguíneo? Até mesmo um engenheiro, atuando no campo energético, de que forma ele irá prever o comportamento de células de combustível microfluidícas para gerar eletricidade de forma eficiente a partir de reações químicas controladas em pequena escala? (AOKI, 2011; RÊGO, 2010).

O estudo realizado neste trabalho tem como objetivo realizar a análise dos comportamentos de velocidade, microrrotação e do campo de temperatura no interior de um duto de seção quadrática, considerando um fluido micropolar sob a influência de um campo magnético transversal constante concomitante com o campo elétrico perpendicular ao magnético.

Destaca-se que em trabalhos anteriores, foram desenvolvidos os modelos hidrodinâmicos e térmicos de fluidos micropolares, porém sem considerar a influência da eletromagnetohidrodinâmica no escoamento, nesse trabalho é considerado mutuamente esses atributos para realizar as análises cinética, microrrotacional e térmica.

1.2 Justificativa

Apesar da Eletromagnetohidrodinâmica se basear em equações da hidrodinâmica clássica e eletromagnetismo, poucos trabalhos foram realizados em relação ao tema até à década de LX. Por conta de que o número de Reynolds é muito pequeno para valores mais práticos, da forma que o estudo em laboratório se torna bastante dificultoso. Ao mesmo tempo, o desenvolvimento do uso e aplicação de métodos numéricos na solução de modelos de escoamento tem ganhado mais destaque na comunidade científica internacional (PONTES, 2018; RÊGO, 2010; SCHERCLIFF, 1965).

A associação da microfluídica com microbombas é fundamental para entender o escoamento forçado de fluidos em microcanais. As microbombas atuam de maneira semelhante às de tamanho convencionais, entretanto sua estrutura e fundamento físico demonstram uma certa peculiaridade, que somente com o estudo adequado se consegue conhecer. Também é fundamental destacar a sua aplicação no campo da simulação do escoamento sanguíneo, visando contribuir para entender o comportamento do sangue com o auxílio de microbombas. Neste trabalho é considerada uma microbomba que funciona com fundamento na força de Lorentz, ou seja, a partir da aplicação mútua da força elétrica perpendicular à força magnética imposta no microcanal, o fluido adquire força suficiente para se movimentar na direção desejada (AOKI, 2011).

A equação de Navier-Stokes demonstra o comportamento da transferência de quantidade de movimento nos fluidos, ou seja, a conservação da energia cinética dentro de um canal. Entretanto em pequenas proporções essa equação ganha características particulares que serão demonstradas ao longo do trabalho. Nesse momento, deve-se destacar a atuação das forças viscosas no escoamento, que são expostas na equação a partir do termo de viscosidade, interferindo no escoamento e na troca térmica na região de camada limite do escoamento (CENGEL e SIMBALA, 2012).

Além disso, para esse trabalho é considerado o termo adicional da micropolaridade do fluido usado na análise do escoamento. As características micropolares permitem analisar como as partículas suspensas no fluido se comportam em razão da força de microinércia no escoamento e como tal característica pode ser fundamental para entender o comportamento de fluidos reais usados em aplicações tecnológicas em diversas áreas (ERINGEN, 1964).

Também é fundamental entender o termo adicional da influência da Eletromagnetohidrodinâmica (EMHD) nos termos de velocidade e energia dentro da equação de Navier-Stokes e da equação da energia, de modo que as direções dos campos energético e magnético são importantes fatores no incremento ou perda causados pela força resultante imposta.

A partir dessa combinação de fatores, a análise analítico-numérica realizada foi a solução mais adequada para resolver as equações resultantes, as quais não conseguem ser resolvidas analiticamente. Com isso foi utilizada uma técnica muito precisa para resolver analítico-numericamente equações diferenciais parciais no campo da modelagem e simulação: a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), a qual é uma metodologia híbrida, numérico-analítica que vem sendo desenvolvida de forma paralela aos métodos puramente numéricos, com o auxílio do software Wolfram Mathematica v. 11.3. É importante frisar que a escolha pela GITT se dá em função do trabalho representar uma contribuição ao método, estendendo sua aplicação no campo da EMHD (PONTES, 2018; RÊGO, 2010).

Dessa forma, o objetivo geral deste trabalho envolve analisar o comportamento físico do escoamento EMHD de fluidos micropolares.

Esse trabalho está divido em 5 capítulos. O capítulo 1 é a introdução geral do trabalho e nele está exposto a motivação pelo tema e os objetivos. O capítulo 2 é a Revisão bibliográfica e ela está dividida em explicações sobre a microfluidica, microbombas, fluidos micropolares, leis gerais que regem o escoamento EMHD e o fundamento e aplicações da GITT. No capítulo 3 é demonstrado o modelo físico do problema, a formulação matemática e a aplicação da GITT. O capítulo 4 é caracterizado pela exposição dos resultados e a discussão sobre a convergência dos dados, a verificação numérica e a análise dos principais parâmetros envolvidos. O capítulo 5 expõe as conclusões obtidas a partir dos resultados do trabalho e sugere trabalhos futuros envolvendo o escoamento EMHD associado à fluidos micropolares.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar o comportamento físico do escoamento EMHD de um fluido micropolar via GITT.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Estudar o modelo matemático para o escoamento EMHD de fluido micropolar fundamentado nas Equações de Navier-Stokes, Equações de Microrrotação e Equação da Energia;

- Aplicar a GITT na solução do modelo de Equações Diferenciais Não-lineares obtidas;

- Implementar um programa no Softwate Wolfram Mathematica v. 11.3 capaz de solucionar as equações parciais obtidas na GITT;

- Analisar a influência dos campos magnéticos, elétricos e das forças viscosas nos processos de transferência de quantidade de movimento, forças microrrotacionais e transferência de calor no interior do duto de seção quadrática;

- Verificar a convergência das principais variáveis com o aumento do número de truncamento das expansões e verificar numericamente os resultados.

- Desenvolver uma avaliação sobre os principais parâmetros que envolvem as equações (análise paramétrica);

- Avaliar a metodologia GITT, analisando a influência da sua aplicação no campo da EMHD associada ao escoamento de fluidos micropolares.

CAPÍTULO II

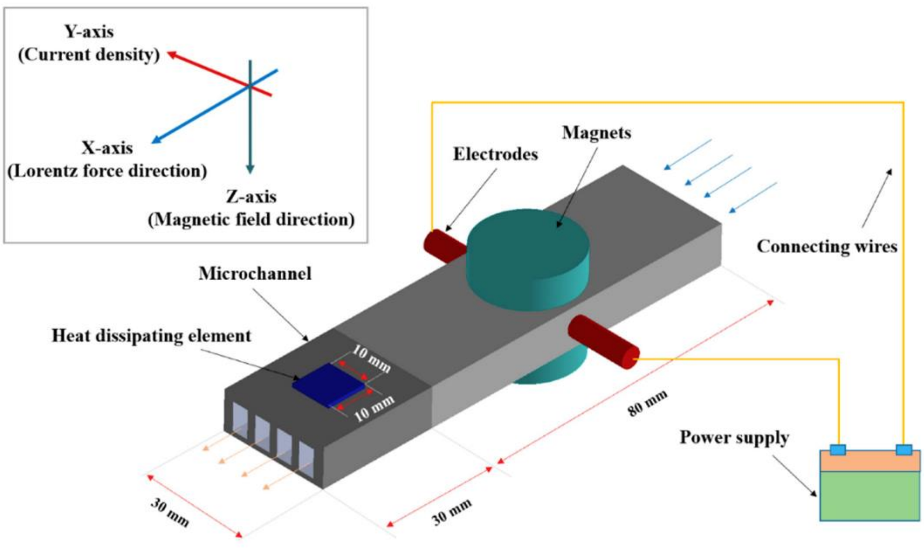
2. Revisão bibliográfica

2.1 Microbombas

Com o avanço da tecnologia em todo o mundo, inovações tecnológicas foram requeridas nas mais diversas áreas e, com isso, equipamentos foram surgindo para variadas aplicações, como por exemplo, bombas, que são dispositivos de transferência de fluidos funcionando a partir da conversão de energia mecânica em hidráulica pela produção do fluxo necessário para o desenvolvimento de pressão, que é uma função da resistência ao fluxo de fluido no sistema. Dentre os tipos de bombas, existem aquelas que são utilizadas em microcanais, de dimensões da ordem de µm à mm, essas são conhecidas como microbombas e são um marco da revolução tecnológica atual, pois atuam em dutos com pequenos diâmetros bombeando os fluidos em uma escala menor quando comparada às bombas convencionais (NETO *et al*, 2015).

Desse modo, microbombas são dispositivos que podem ser usados para controlar o fluxo de líquidos em microcanais. Esses dispositivos podem ser muito úteis em aplicações de microfluídica, como na análise de fluidos biológicos ou na síntese de materiais em pequena escala. Segundo Zhao *et al.* (2017), as microbombas podem ser baseadas em diferentes princípios, como eletroquímica, eletromagnética e mecânica, sendo que a escolha do princípio depende das necessidades específicas de cada aplicação. Além disso, as microbombas também podem ser projetadas com diferentes geometrias e materiais, para atender às exigências de cada aplicação. Um exemplo de microbomba é mostrado na figura a seguir.

Figura 1: Visão esquemática do escoamento de uma microbomba eletromagnetohidrodinâmica



Fonte: Seo et al. (2020)

Ainda nessa perspectiva, com base em um estudo realizado por Pamme (2006), as microbombas são dispositivos que utilizam diferentes tipos de energia para acionar o movimento dos fluidos em microcanais. De acordo com a autora, as microbombas mais comuns são as bombas de pressão, as bombas peristálticas e as bombas eletrocinéticas, que são projetadas para oferecer diferentes vantagens em termos de precisão, velocidade e facilidade de operação. Além disso, a escolha da técnica de bombeamento também depende das características do líquido a ser manipulado, como viscosidade e condutividade elétrica.

Segundo Neto *et al.* (2015) as mesmas são dispositivos miniaturizados capazes de gerar fluxos líquidos em microcanais. Tendo um papel importante em várias aplicações da engenharia química, como em sistemas de separação e detecção de amostras, análises químicas em pequena escala e desenvolvimento de dispositivos de diagnóstico médico. As microbombas podem ser baseadas em diversos princípios, como pressão hidrostática, eletrocinética, magnética e piezoelétrica. Uma das principais vantagens das microbombas é a capacidade de manipular pequenos volumes de líquidos com alta precisão e controle. Além disso, elas podem ser integradas a outros dispositivos microfluídicos, como válvulas e sensores, para formar sistemas completos em chips.

Um exemplo de aplicação de microbombas na engenharia química é em sistemas de microfluídica para síntese de materiais. Esses sistemas usam microcanais para produzir partículas com tamanhos e propriedades controlados, o que é importante para a produção de materiais avançados. As microbombas são usadas para controlar a vazão dos reagentes e produtos dentro dos microcanais, permitindo a produção precisa de partículas. Outra aplicação é em sistemas de análise química em pequena escala, onde as microbombas são usadas para transportar amostras e reagentes dentro dos microcanais. A alta precisão e controle das microbombas permitem a realização de análises químicas mais sensíveis e específicas, o que pode ser útil em aplicações médicas e ambientais.

Um dos exemplos de aplicação de microbombas na área ambiental é a tese de doutorado de Córdova (2008) onde o mesmo utilizou microbombas solenoides para o desenvolvimento de sistemas de análises em fluxo por multicomutação para determinação de poluentes ambientais na Universidade de São Paulo.

Jian e Si (2015) empregando o método de perturbação, apresentou as soluções analíticas aproximadas da velocidade e da taxa de fluxo volumétrica de uma microbomba EMHD de um fluido condutor de eletricidade entre duas placas paralelas com paredes enrugadas. As ondulações na parede são descritas como ondas sinusoidais periódicas de pequena amplitude. A partir da análise gráfica dos resultados, pôde-se concluir que os perfis de velocidade em fase e fora de fase são assimétricos e simétricos, respectivamente.

Jian *et al.* (2015) também estudaram o escoamento de microbombas, porém desta vez em placas paralelas planas. Usando o método de separação das variáveis, os autores analisaram o escoamento para três casos distintos: corrente elétrica uniforme e campo magnético variável, corrente elétrica variável e campo elétrico uniforme e ambos campos variáveis.

Já Merdj e Drid (2022), analisaram o comportamento sanguíneo de uma microbomba baseada na força de Lorentz e obtiveram resultados satisfatórios para os procedimentos experimentais propostos, de forma que este trabalho também pode ser analisado com um aspecto de simulação de um fluido sanguíneo em função do comportamento micropolar do sangue humano, desse modo, destaca-se a grande aplicabilidade da simulação de fluidos micropolares associados à microbombas para a análise da dinâmica sanguínea.

2.2 Microfluidos

2.2.1 Definição e aplicações na Engenharia Química

A partir dos conceitos e aplicações das microbombas anteriormente citadas, deve-se destacar a Microfluídica, pois os dois temas estão diretamente relacionados, sendo essa um campo multidisciplinar de pesquisa e tecnologia baseada na análise do comportamento, controle preciso e manipulação de volumes muito pequenos de fluidos em estruturas de dimensões micrométricas, bem como na fabricação e aplicação dessas estruturas. A transição entre o macro e o micro não é bem definida e, portanto, é conveniente associar à microfluídica algumas características como: pequenos volumes de fluidos (ρL à mL); pequenas dimensões das estruturas; escala dimensional onde os efeitos micrométricos predominam (Rahal, 2011).

Outra definição importante é que a microfluídica é uma área de pesquisa em constante crescimento, que tem sido amplamente explorada por sua ampla gama de aplicações em diversas áreas, como biotecnologia, diagnóstico médico, engenharia de materiais, química e muitas outras. Segundo Squires e Quake (2005), a microfluídica envolve o estudo de fluidos em escalas micrométricas, que permite a manipulação de volumes muito pequenos de líquidos em canais e dispositivos com geometrias precisas. Com a crescente demanda por tecnologias mais avançadas e precisas, a microfluídica tem se mostrado uma área de grande interesse para pesquisadores e indústrias que buscam soluções inovadoras para os desafios mais complexos de suas áreas de atuação.

Tem sido cada vez mais explorada em aplicações de engenharia química, como na síntese de materiais em pequena escala, separação de moléculas e produção de microcápsulas. Segundo Song *et al.* (2017), a microfluídica permite a manipulação precisa de fluidos em escalas micrométricas, o que pode oferecer vantagens significativas em relação aos métodos convencionais de processamento químico. Além disso, a microfluídica também pode ser integrada com outras técnicas de análise, como espectroscopia, para a obtenção de informações detalhadas sobre as reações químicas em escala micro.

Na espectroscopia, de acordo com Sun *et al.* (2013), oferece vantagens significativas em relação aos métodos convencionais de análise espectroscópica, como o uso de pequenas quantidades de amostra e a alta precisão na análise de moléculas individuais. Além disso, a microfluídica também permite a integração de múltiplas técnicas espectroscópicas em um único dispositivo, o que pode melhorar a eficiência da análise e permitir a obtenção de informações mais completas sobre as amostras.

Outra aplicação da microfluidíca na Engenharia Química é no campo das reações químicas, que segundo Zheng *et al.* (2010) a microfluídica permite a realização de reações em pequenas quantidades de reagentes, o que reduz o tempo e o custo dos experimentos, além de permitir uma maior precisão no controle das condições de reação. Além disso, a microfluídica também permite a realização de múltiplas reações simultaneamente em um único dispositivo, o que pode facilitar a análise de reações complexas e permitir a obtenção de informações mais completas sobre a cinética das reações.

Além disso, Khan *et al.* (2021) realizaram um desenvolvimento de um método de comutação magnética automatizada, acionado por galvanostato, a fim de gerar um bombeamento microfluídico unidirecional, demonstrando a gama de aplicações da microfluidica e sua importância dentro de diversas áreas.

Já na ótica do escoamento sanguíneo, tem-se o trabalho de Doherty (2020) que analisa as tensões envolvidas no escoamento sanguíneo newtoniano utilizando a hemodinâmica computacional, onde foi possível analisar o comportamento da tensão cisalhante e o decaimento de velocidade na camada limite laminar.

2.2.2 Características físicas do Regime Microfluídico

As equações básicas de fluxo de fluido e transferência de massa são as mesmas em sistemas microfluídicos e macroscópicos. No entanto, várias características importantes distinguem a dinâmica em microestruturas daquelas comumente vistas em sistemas macroscópicos. À medida que as características dimensionais do fluxo (volume e área da seção transversal do canal) diminuem, a importância das forças que atuam no volume do fluido (como a gravidade) em relação às forças que atuam na superfície (como a tensão superficial) diminui. A importância relativa das forças viscosas que atuam sobre o fluido também é reduzida. A razão entre as forças inerciais e viscosas é expressa como o número de Reynolds (Re), conforme mostrado na equação 1 (HERRERA, 2018).

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \tag{1}$$

Onde ρ (kg/m3) é a densidade do fluido, v (m/s) é a velocidade do fluido, D(m) é o diâmetro hidráulico característico do fluxo e μ (kg/ms) é a viscosidade dinâmica do fluido. Sendo o diâmetro hidráulico do fluído $D = \frac{4A}{P}$, em que A é a área da seção transversal do canal e P é o perímetro dessa seção. Essa equação deve ser usada quando a seção do microcanal não é circular. No caso de a seção ser circular o diâmetro hidráulico coincide com o diâmetro da seção.

Para velocidades aceitáveis e alcançáveis, o fluxo em microcanais da ordem de 50 μm é caracterizado por baixos números de Reynolds. Para Re < 100, o fluxo é laminar em vez de turbulento. Os diferentes fluidos em fluxo laminar se misturam apenas por difusão porque não há redemoinhos espontâneos entre eles carregando massa e momento. Essa propriedade do fluxo laminar permite o controle espacial das soluções por fluxo, mas atrasa a mistura e a transferência de massa eficiente nos limites entre eles (Whitesides; Stroock, 2001).

Na geometria do microcanal longo e estreito, a taxa de fluxo é predominantemente uniaxial: os movimentos são todos paralelos às paredes do microcanal. O significado do fluxo uniaxial é que todo o transporte de momento, massa e calor na direção perpendicular ao fluxo é devido a mecanismos moleculares: viscosidade molecular, difusividade molecular e condutividade térmica (Whitesides; Stroock, 2001).

2.3 Fluidos Micropolares

Como citado anteriormente por Whitesides e Stroock (2001) não há redemoinhos em fluxos laminares, entretanto quando se usa um fluido micropolar ocorrem fenômenos característicos dos mesmos. Os fluidos micropolares podem ser definidos como fluidos com microestrutura. Pertencem a uma classe de fluidos com tensor de tensão não simétrico que designaremos por fluidos polares, e incluem, como caso especial, o bem estabelecido modelo de Navier-Stokes dos fluidos clássicos, a que chamaremos fluidos ordinários. Fisicamente, os fluidos micropolares podem representar fluidos constituídos por partículas rígidas, orientadas aleatoriamente (ou esféricas) suspensas num meio viscoso, onde a deformação das partículas de fluido é ignorada. O modelo de fluidos micropolares introduzido por C.A. Eringen vale a pena ser estudado como um modelo muito equilibrado (Lukaszewicz, 1999).

A teoria dos microfluidos introduzida por Eringen (1964, 1965) trata de uma classe de fluidos que exibem certos efeitos microscópicos decorrentes da estrutura local e dos micro-movimentos dos elementos fluidos. A teoria dos microfluidos é, no entanto, demasiado complicada, mesmo no caso de uma teoria constitutivamente linear, e o problema matemático não é facilmente acessível à solução de problemas não triviais neste domínio.

Uma subclasse de fluidos são os fluidos micropolares que apresentam micro efeitos de rotação e inércia micro-rotacional. Esta classe de fluidos possui uma certa simplicidade e elegância na sua formulação matemática, o que deve agradar aos matemáticos. Fisicamente, podem representar adequadamente os fluidos constituídos por elementos semelhantes a barras. Certos fluidos anisotrópicos, por exemplo os cristais líquidos que são constituídos por moléculas em forma de halteres, são deste tipo. De fato, o sangue animal pertence a esta categoria. Outros fluidos poliméricos e fluidos com de certos aditivos podem ser representados pelo modelo matemático modelo matemático dos fluidos micropolares (Eringen, 1964).

Experiências de Vogel e Patterson (1964) e Eringen (1964) com fluidos contendo quantidades extremamente pequenas de aditivos poliméricos indicam que o atrito cutâneo próximo de um corpo rígido nesses fluidos são consideravelmente menores (até 30-35%) do que os mesmos fluidos sem aditivos.

Outro autor que realizou análises envolvendo os fluidos micropolares foi El-Sapa (2022), onde o mesmo fez a modelagem e simulação de modelos celulares através de uma esfera porosa. Ghadikolaei *et al.* (2018) realizaram estudos sobre análise da camada limite EMHD de um fluido micropolar contendo nanopartículas híbridas ($Cu.Al_2O_3$) sobre um meio poroso com a análise numérica com o método de Runge-Kutta truncado no termo de 5ª ordem.

Aydin e Pop (2005) estudaram a convecção natural de um aquecedor discreto em compartimentos com fluidos micropolares utilizando o método das diferenças finitas e chegaram à conclusão que o aumento do número de Rayleigh aumenta o valor do número de Nusselt, além disso, concluíram que o aumento do parâmetro do material reduz a transferência de calor.

Misra *et al.* (2013) também realizaram estudos envolvendo o escoamento de microfluidos em placas paralelas, onde seu estudo mostra que a amplitude da microrrotação é altamente sensível às alterações na magnitude de velocidade de sucção e da largura do microcanal. Por conseguinte, o aumento do parâmetro micropolar dá origem a uma diminuição da amplitude da microrrotação. As estimativas numéricas revelam que a microrrotação dos microelementos em suspensão no sangue também desempenha um papel importante no controle da dinâmica do fluxo eletro-osmoticamente em dispositivos microbio-fluídicos.

Pasha *et al.* (2021) estudaram a transferência de calor e o escoamento de um fluido micropolar entre duas placas planas com a utilização do software Maple com o método da decomposição de adomian (ADM) e o método da iteração de variação (VIM), o que representa outra alternativa de resolução de escoamentos de fluidos micropolares, como o que acontece neste trabalho que utiliza a GITT para resolver analítico-numericamente o problema.

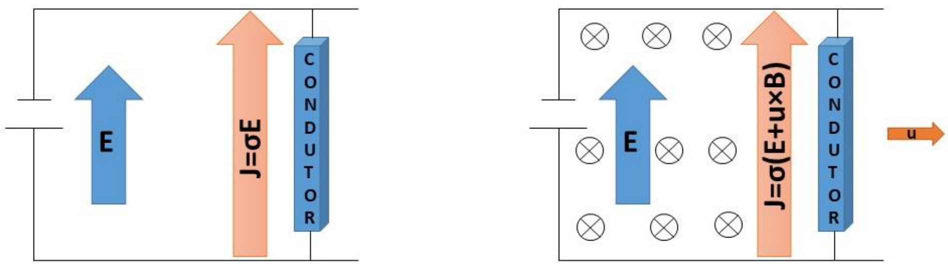
2.4 Conceito básicos de eletromagnetismo e eletrodinâmica

É importante explicar os fenômenos de eletromagnetismo e eletrodinâmica antes de demonstrar os conceitos de EMHD.

2.4.1 Leis da eletrodinâmica

2.4.1.1 Lei de Ohm e Lei de Faraday

Figura 2: Lei de Ohm para condutores (a) estacionários e em (b) movimento



(a) **(b)**

Fonte: Adaptado de Aoki (2011)

A lei de Ohm (Eq. 2) é um princípio fundamental da física que descreve a relação entre a tensão aplicada através de um condutor e a corrente resultante que flui através dele. Afirma que a corrente que flui através de um condutor é diretamente proporcional à tensão aplicada através dele, desde que a temperatura e outras condições físicas permaneçam constantes (Ohm, 1827).

Matematicamente, a lei de Ohm pode ser escrita como:

$$V = RI \tag{2}$$

Em que V é a tensão, I é a corrente e R é a resistência do condutor. Esta equação foi formulada pela primeira vez por Georg Simon Ohm em 1827 na sua obra "Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet" (O circuito galvânico investigado matematicamente).

A formulação física da lei de Ohm baseia-se no conceito de resistência elétrica, que é uma medida da oposição de um condutor ao fluxo de corrente. A resistência é determinada pelas propriedades físicas do condutor, como o seu comprimento, área da seção transversal e composição do material. A unidade SI de resistência eléctrica é o ohm (Ω), assim designado em honra de Georg Simon Ohm. A relação entre tensão, corrente e resistência é um dos princípios fundamentais da teoria dos circuitos elétricos e é amplamente utilizada no projeto e na análise de sistemas elétricos (AOKI, 2011).

Ainda segundo Aoki (2011), a lei de Faraday da indução eletromagnética é um princípio fundamental da física que descreve a relação entre um campo magnético variável e um campo elétrico induzido. Afirma que quando um campo magnético que passa através de um condutor se altera, é induzida uma força eletromotriz (FEM) no condutor, resultando numa corrente elétrica.

Matematicamente, a lei de Faraday (Eq. 3) pode ser expressa como:

$$FEM = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{3}$$

Em que FEM é a força eletromotriz, Φ é o fluxo magnético que passa através de uma superfície e t é o tempo. O sinal negativo indica que a FEM induzida cria uma corrente que se opõe à alteração do fluxo magnético.

A lei de Faraday foi descrita pela primeira vez por Michael Faraday em 1831 nas suas experiências com indução eletromagnética. O seu trabalho lançou as bases para o desenvolvimento da tecnologia eléctrica moderna. Faraday não chegou a formular equações para explicar seus resultados, mas percebeu que a intensidade da fem induzida dependia da rapidez com que movimentava o ímã. Medidas dessa fem induzida mostram que, na verdade, ela depende da taxa de variação do fluxo magnético ϕ através da bobina com o tempo, $d\phi/dt$, um resultado postulado originalmente por Neumann em 1847 e conhecido por alguns como “lei de Neumann” ou “lei de Faraday-Neumann” (Hessel *et al.*, 2015).

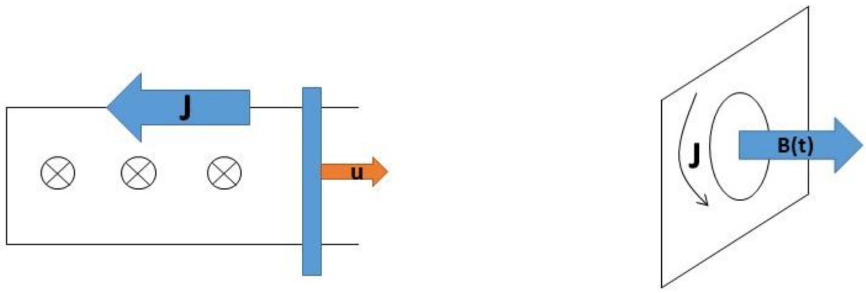
A formulação física da lei de Faraday baseia-se no conceito de fluxo magnético, que é uma medida da intensidade de um campo magnético que passa através de uma superfície. O fluxo magnético é determinado pela intensidade do campo magnético, a área da superfície e o ângulo entre o campo magnético e a superfície. A unidade SI de fluxo magnético é o weber (Wb), nomeado em homenagem a Wilhelm Eduard Weber.

Já para condutores estacionários, a lei de Ohm assume a forma $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma E}$ segundo Aoki (2011), onde E é o campo elétrico e J é a densidade de corrente. Sendo a densidade de corrente J proporcional à força de Coulomb $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{qE}$, que atua nos portadores de cargas livres, onde q é sua carga livre. Desse modo, se o condutor estiver se movendo em um campo magnético com velocidade **u**, as cargas sentirão uma força adicional $\boldsymbol{qu} \times \boldsymbol{B}$, sendo a Lei de Ohm resultante

$$J = \sigma(E + u \times B) \tag{4}$$

Percebe-se que o termo **E+u × B** representa a força total eletromagnética por unidade de carga e é representada por $\boldsymbol{Er} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{q}}$, sendo **Er** o campo elétrico medido.

Figura 3: (a) Força eletromotriz gerada pelo movimento de um condutor; (b) Força eletromotriz gerada por um campo magnético dependente do tempo



(a) **(b)**

Fonte: Adaptado de Aoki (2011)

Ainda de acordo com Aoki (2011), uma força eletromotriz é gerada quando um condutor passa por um campo magnético ou quando o mesmo sofre uma variação temporal. Sendo assim, a lei de Faraday pode ser escrita da seguinte forma:

$$fem = \oint_C Er.dl = -\frac{d}{dt}\int_S B.dS \tag{5}$$

Nesse caso, C é uma curva fechada composta por elementos dl, que pode ser fixa no espaço ou se mover juntamente com o meio condutor, S é a superfície composta pela curva C e Er indica o campo elétrico efetivo.

$$\oint_C B.dl = \mu \int_S J.dS \tag{6}$$

Por fim, a força resultante da interação elétrica e magnética é a força de Lorentz, tendo sua origem nas forças mencionadas que agem nos portadores de carga **f=q(u×B)**. Logo, sabe-se que a força por unidade de volume é dada por

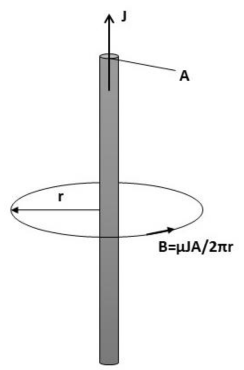
$$F = J \times B \tag{7}$$

2.4.1.2 Lei de Ampère

A lei de Ampère aborda o campo magnético gerado por uma distribuição de corrente. Se C é uma curva fechada, composta de elementos de linha $d\vec{l}$, e S é qualquer superfície limitada por tal curva, a lei de Ampère demonstra (RÊGO, 2010):

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_m \int_S \vec{J}.d\vec{S} \tag{8}$$

Figura 4: Lei de Ampère aplicada a um fio.



Fonte: Adaptado de Rêgo (2010)

A lei pode ser entendida como a circulação do campo magnético ao redor da curva C é igual ao fluxo (densidade) da corrente elétrica através da superfície (área, S) delimitada pela curva para a qual a circulação está sendo calculada. Na forma diferencial, aplicando o teorema de Gauss, a lei de Ampere é descrita como (RÊGO, 2010):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \vec{J} \tag{9}$$

Mais tarde, Maxwell demonstrou que a lei exigia a consideração de uma corrente de deslocamento anteriormente desconhecida (que é necessária para satisfazer o princípio da conservação da carga), de modo que a lei ficou conhecida como lei de Ampère-Maxwell. Na forma diferencial, é escrita como (RÊGO, 2010):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{10}$$

No entanto, a correção de Maxwell não é necessária em EMHD de metal líquido, de forma que é empregada na sua forma pré Maxwell (RÊGO, 2010).

2.4.1.3 Força de Lorentz

Jackson (1998) definiu a força de Lorentz como uma das forças fundamentais da natureza e surge da interação entre uma carga elétrica e um campo magnético. Essa força é responsável por curvar a trajetória de uma partícula carregada que se move em um campo magnético, de forma que a partícula descreve um movimento circular ou helicoidal. A magnitude da força de Lorentz é dada pelo produto vetorial entre a velocidade da carga e o campo magnético, e a direção é dada pela regra da mão direita, ou seja, a força é perpendicular tanto à velocidade da carga quanto ao campo magnético. Isso faz com que a carga se mova em uma trajetória curva, que pode ser descrita matematicamente pela equação da força centrípeta.

A força de Lorentz é fundamental na compreensão de muitos fenômenos físicos, incluindo o funcionamento de motores elétricos, geradores e transformadores, bem como em aplicações tecnológicas como discos rígidos e dispositivos de armazenamento de informações magnéticas. Além disso, a força de Lorentz é essencial em aceleradores de partículas, como o LHC (Large Hadron Collider), onde a força é utilizada para acelerar partículas subatômicas a altas velocidades. A força de Lorentz também é responsável pelo efeito Hall, que é a geração de uma diferença de potencial elétrico perpendicular a um campo magnético em um material condutor. Esse efeito é amplamente utilizado em dispositivos de sensoriamento, como sensores de posição e de corrente elétrica (DAUM, 1990).

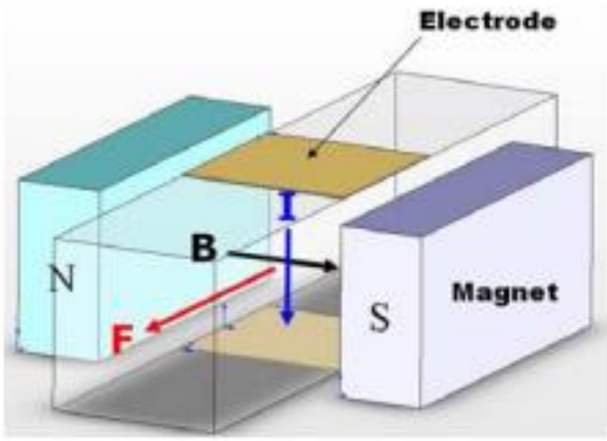
Em aceleradores de partículas, a força de Lorentz é utilizada para acelerar e desviar partículas carregadas, como elétrons e prótons, a altas velocidades através de campos magnéticos oscilantes. Um estudo realizado por B. D. Henderson *et al.* em 2009, intitulado "Magnetic quadrupole lens optimization in linear accelerators using a hybrid differential evolution algorithm", utilizou a força de Lorentz para otimizar as lentes quadrupolares magnéticas em aceleradores lineares, a fim de melhorar o foco de partículas aceleradas.

Já em relação ao efeito Hall, a força de Lorentz é fundamental para entender o efeito Hall quântico, pois é a força que atua nos elétrons em movimento em um campo magnético. Devido à força de Lorentz, os elétrons sofrem uma força perpendicular à sua direção de movimento e ao campo magnético. Esta força resulta em uma deflexão da trajetória dos elétrons, o que leva à formação da diferença de potencial elétrico que é medida no efeito Hall (Jiang *et al.*, 2007).

De acordo com Lim e Choi (2008) a força de Lorentz é a fonte de pressão para líquido condutor de eletricidade com condutividade. Para dar uma explicação mais pormenorizada, a Fig. 2 mostra o princípio básico da microbomba MHD. Num microcanal hexaédrico com densidade de corrente transversal (Jz) e perpendicular à densidade do fluxo magnético transversal (By).

$$F_x = J_z \times B_y \tag{11}$$

Figura 5: Diagrama dimensional da distribuição de forças



Fonte: Lim e Choi (2008)

Agora, é importante demonstrar a formulação física da força de Lorentz a partir de uma análise do campo elétrico, como demonstrado no trabalho de Pontes (2015) e Rêgo (2010).

Considerando uma partícula que está se movendo com velocidade $\vec{U}$ e transportando uma carga q, onde a mesma está submetida à três forças eletromagnéticas (PONTES, 2015):

$$\vec{F} = q\vec{E}_s + q\vec{E}_i + q\vec{U} \times \vec{B} \tag{12}$$

- O termo $q\vec{E}_s$ é a força eletrostática ou força de Coulomb que surge da repulsão ou atração mútua de cargas elétricas, onde $\vec{E}_s$ é o campo eletrostático.

- O termo $q\vec{E}_i$ é a força que a carga experimenta na presença de um campo magnético transiente, onde $\vec{E}_i$ é o campo elétrico induzido pelo campo.

- $q\vec{U} \times \vec{B}$ é a força de Lorentz que surge com o movimento da carga em um campo magnético.

A lei de Coulomb afirma que $\vec{E}_s$ é irrotacional, e a lei de Gauss estabelece a sua divergência. Assim Rêgo (2010) definiu:

$$\nabla.\vec{E}_s = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \qquad \nabla \times \vec{E}_s = 0 \tag{13;14}$$

Em que ρ_e é a densidade de carga total (cargas livres e de ligação) e ε_0 é a permissividade do espaço livre. Em função da Eq. (14), pode-se introduzir o potencial eletrostático V, definido por $\vec{E}_s = -\nabla V$, de maneira que da Eq. (13) tem-se $\nabla^2 V = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$. Já o campo elétrico induzido possui divergência nula, enquanto o seu rotacional é finito e governado pela lei de Faraday demonstrada na equação abaixo (PONTES, 2015):

$$\nabla.\vec{E}_i = 0; \qquad \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{15;16}$$

Dessa forma, é adequado definir o campo elétrico total como $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$, de tal maneira que se pode escrever de maneira geral (PONTES, 2015):

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{17;18}$$

Lei de Gauss **Lei de Faraday**

$$\vec{\mathrm{F}} = q\left(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}\right) \qquad \boldsymbol{Força\ Eletrostátisca + Força\ de\ Lorentz} \tag{19}$$

Se, diferentemente de $\vec{U}, \vec{B}\ e\ \vec{E}$, for medido um campo elétrico em um sistema com coordenadas fixo na carga em movimento, define-se o campo elétrico relativo ou efetivo (PONTES, 2015):

$$\vec{\mathrm{F}} = q\vec{E}_r; \qquad \vec{E}_r = \vec{E} + \vec{U} \times \vec{B} \tag{20;21}$$

2.4.1.4 Densidade de corrente elétrica $\vec{J}$

De acordo com Aoki (2011), a carga em movimento é constituída em uma corrente e o processo pelo qual a carga é transportada é chamado de condução. A corrente I (ampère) é definida como a razão onde a carga é transportada através de uma superfície em um sistema condutor. Sendo,

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{22}$$

Onde, Q=Q(t) é a carga líquida transportada em um tempo t.

Nos metais, a corrente elétrica é conduzida inteiramente por elétrons, enquanto os cátions pesados são fixados em posições regulares na rede; apenas os elétrons de valência estão livres para participar do processo de condução. No entanto, em um eletrólito, a corrente elétrica é conduzida por íons positivos e negativos, embora a condução de um íon predomine porque alguns íons se movem mais rápido que outros. Deve-se notar que tanto os íons positivos quanto os negativos se movem em direções opostas, ajudando assim a manter a corrente no mesmo sentido (AOKI, 2011).

Por convenção, a direção do movimento do transportador positivo ou a direção oposta do movimento do transportador de carga é tomada como a direção atual. Normalmente, uma corrente é induzida quando um campo elétrico é aplicado; se tal campo for colocado em um condutor, fará com que os portadores de carga positiva se movam na direção geral do campo, enquanto os condutores negativos se moverão na direção oposta. Portanto, a corrente resultante terá a mesma direção do campo. Vale a pena notar que no eletrólito, os íons não são gerados por uma corrente elétrica porque já estão em solução (AOKI, 2011).

A definição de densidade de corrente é:

$$J = \sum N_i q_i v_i \tag{23}$$

Como a densidade de carga é dada por

$$\rho = \sum N_i q_i \tag{24}$$

Pode-se integrar a corrente através de uma superfície S:

$$I = \int_S J.dS \tag{25}$$

A conservação de carga é expressa pela equação da continuidade

$$\nabla.J + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \tag{26}$$

2.4.1.5 Densidade de fluxo magnético $\vec{B}$

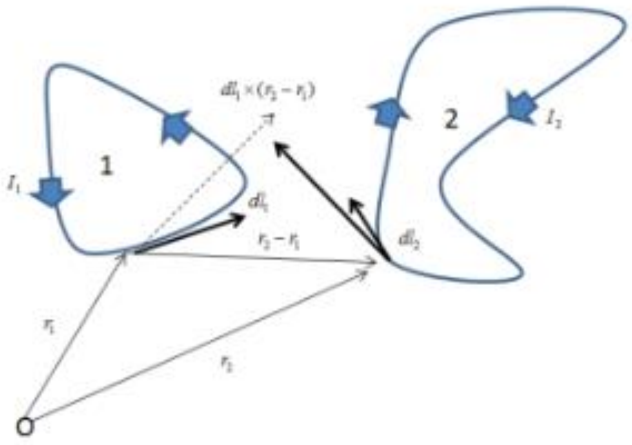
O segundo tipo de campo no estudo de eletricidade é o magnético, que de acordo com Aoki (2011), seus efeitos são conhecidos desde épocas antigas, como os observados no mineral-minério magnetita (Fe_3O_4). Tais efeitos, entretanto, eram pouco conhecidos e somente encontraram aplicação na navegação, por exemplo, nas bússolas de orientação. No século XIX, o físico Oersted fez uma descoberta importante ao perceber que uma corrente elétrica gerava um campo magnético. Posteriormente, os estudos de Gauss, Henry e Faraday reforçaram a conexão existente entre a eletricidade e o magnetismo. As pesquisas de Maxwell e outros teóricos confirmaram de maneira definitiva que essa associação é inerente e inseparável.

Logo após a descoberta de Oersted sobre os efeitos magnéticos das correntes elétricas, Ampère conduziu uma série de experimentos que são expressos na linguagem matemática da seguinte forma:

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{dl_2 \times [dl_1 \times (r_2 - r_1)]}{|r_2 - r_1|^3} \tag{27}$$

Onde F_2 é a força exercida sobre o circuito 2 devido à influência do circuito 1

Figura 6: Interação magnética de dois circuitos de corrente



Fonte: Aoki (2011)

O termo

$$dF = Idl \times B \tag{28}$$

Representa a força exercida sobre um elemento infinitesimal de um condutor de corrente. Integrando tal equação, tem-se a força sobre um circuito completo. Se ele for representado por um contorno C, logo (AOKI, 2011):

$$F = \int_C Idl \times B \tag{29}$$

Então,

$$B(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_1 \frac{dl_1 \times (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} \tag{30}$$

Essa equação é generalizada da Lei de Biot Savart, cuja forma diferencial também é representada por,

$$dB(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{dl_1 \times (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} \tag{31}$$

Posteriormente, tomando a seguinte forma:

$$B(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(r_1) \times (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} dV_1 \tag{32}$$

$$dB(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J(r_1) \times (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} dV_1 \quad (33)$$

Para uma distribuição contínua de corrente descrita pela densidade de corrente.

Desse modo, todos os campos de indução magnética podem ser descritos em termos da distribuição de corrente. Das equações acima, pode-se inferir que não há polos magnéticos isolados e que (AOKI, 2011),

$$\nabla . B = 0 \quad (34)$$

2.5 EMHD

As pesquisas nas áreas de eletromagnetismo se desenvolvem há alguns séculos. Abaixo é apresentado um pequeno histórico da descoberta de fenômenos relacionados com a eletromagnetohidrodinâmica, e suas cronologias de acordo com a dissertação de Mestrado de Danhone no ano de 2002.

Michael Faraday (1791- 1867) descobriu, entre outras coisas, que os imãs influenciavam ações mecânicas sobre materiais condutores percorridos por uma corrente. Faraday apresentou, no ano de 1846, uma teoria eletromagnética da luz depois de descobrir a influência de um campo magnético sobre a luz polarizada. Seus trabalhos sobre o diamagnetismo o levaram a estudar a ação concomitante entre eletricidade e gravitação.

No ano de 1831, o mesmo descobriu que uma corrente elétrica podia induzir uma outra corrente em um circuito diferente, elaborando uma teoria descritiva, que foi a base para o dínamo rudimentar de mesmo modo para teorias mais avançadas como a da relatividade de Albert Einstein (1879-1955), publicando em 1905 o artigo "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", onde estão as bases da relatividade restrita e da simultaneidade.

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), físico holandês, foi outro pesquisador dedicado ao fenômeno, que desenvolveu uma lei relacionada a este, levando seu nome. Um trabalho seu a respeito onde explica que ela influencia no campo magnético sobre as radiações rendeu-lhe um Prêmio Nobel em 1902 e suas pesquisas também tiveram espaço na teoria espacial da relatividade, com as Transformações de Lorentz.

Lorentz e G. F. Fitzgerald (1851-1901), introduziram a hipótese que os corpos em movimento se contraem na direção em que este ocorre (contração lorentziana), para a qual foram desenvolvidas as transformações de Lorentz.

Ao final do século XIX o interesse pelo fenômeno EMHD decaiu, talvez devido às dificuldades e rudimentos dos aparatos até então utilizados. Essa área de estudos apenas foi impulsionada novamente após a Segunda Guerra Mundial. O pós-guerra foi marcado por uma corrida tecnológica, impulsionando de forma mais acelerada as pesquisas em todas as áreas e particularmente a nuclear, com estreita relação com a eletromagnetohidrodinâmica. A Eletromagnetohidrodinâmica (EMHD) tem como definição a interação mútua entre o fluido em movimento e os campos magnéticos. O fluido em questão dever ser eletricamente condutor e não magnético e ter seu uso limitado apenas a metais líquidos, gases ionizados e eletrólitos. A interação mútua entre o campo magnético B e o campo de velocidade u deve-se parcialmente aos resultados das Leis de Faraday e Ampère e às forças de Lorentz para um corpo portador de corrente (AOKI, 2011).

Outra definição, segundo Al-Habahbeh et al. (2016), é que o princípio básico do EMHD é simples; a condução elétrica através de um fluido estabelece um fluxo de corrente unidirecional. Então, um campo magnético de alta resistência perpendicular ao fluxo de corrente é aplicado através do fluido. Essa combinação de um campo magnético ortogonal, um campo elétrico e o movimento relativo dos íons gera uma força de Lorentz, cuja direção é definida pelo produto vetorial dos vetores de corrente e campo magnético.

De acordo Shercliff (1965), uma corrente de densidade de corrente é induzida em um condutor (fluido ou sólido) na presença de um campo magnético variável pelo movimento de um ímã permanente ou solenóide alimentado por uma fonte de corrente transitória aplicada externamente, interagindo com o campo magnético original. Esse processo resulta em uma força eletromagnética que altera o gradiente de pressão do fluido ou o estado de movimento de um sólido como resultado do produto vetorial entre o vetor de densidade atual e o vetor de densidade de campo magnético aplicado.

Analisando a formulação matemática, Dias (2016) descreve que amplamente consideradas como as leis fundamentais do eletromagnetismo, as equações de Maxwell visam descrever a geração, propagação e interação de campos magnéticos e elétricos, independentemente das propriedades do meio em que residem. Essas equações envolvem os campos vetoriais **B**, **E** e **j**:

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \tag{35}$$

$$\nabla . B = 0 \tag{36}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{37}$$

$$\nabla \times E = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \tag{38}$$

Onde B representa o campo magnético, E o campo elétrico, j a densidade de corrente elétrica, $\mu 0$ a permeabilidade magnética do vácuo, $\varepsilon 0$ a permissividade elétrica do vácuo e ρe a densidade de carga total.

A equação (35) descreve a indução do campo elétrico E originada por uma alteração no campo magnético B. A equação (36) estabelece a impossibilidade física da existência de monopolos, afirmando que o campo magnético é solenoidal. A equação (37) representa a indução de um campo magnético através da alteração do campo elétrico. Por fim, a equação (38) relaciona o campo elétrico E com a carga elétrica.

Apesar de alguns trabalhos pioneiros do engenheiro Hartmann, que inventou a bomba eletromagnética em 1918 e em 1937 realizou um estudo teórico e experimental sistemático do fluxo de mercúrio sob um campo magnético uniforme (Hartmann é considerado o pai da magnetohidrodinâmica para metais líquidos, o termo "fluxo de Hartmann" é usado para descrever o fluxo em tubos na presença de um campo magnético), o desenvolvimento da magnetohidrodinâmica na engenharia, na verdade, só ocorre a partir da década de 1960. Este lento progresso deve-se em grande parte à baixa condutividade dos fluidos normalmente utilizados na engenharia: o mercúrio e alguns eletrólitos (RÊGO, 2010; PONTES, 2015).

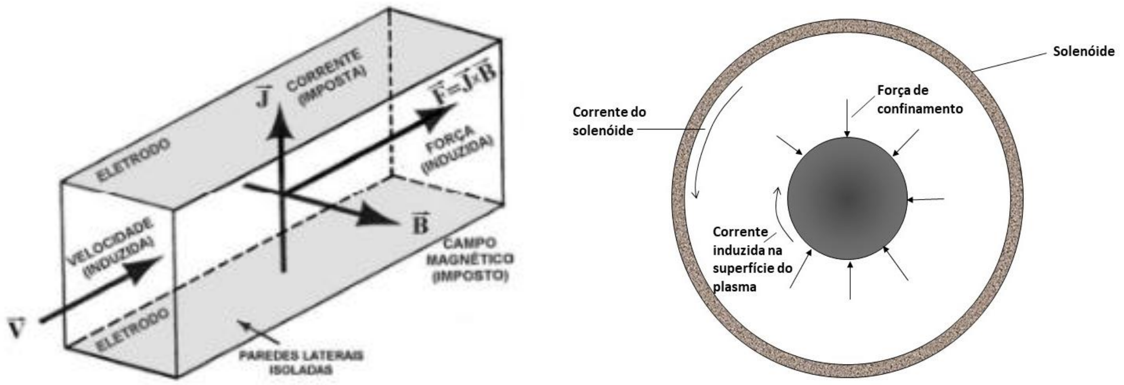
A força motriz da mudança vem principalmente de três inovações tecnológicas:

a) Reatores de alimentação/produção rápida, utilizando sódio líquido como refrigerante, requerem bombeamento (bombas eletromagnéticas – Figura 7.a);

b) fusão termonuclear controlada, que requer forças eletromagnéticas para manter o plasma quente longe da superfície do reator (Figura 7.b),

c) Geração de magnetohidrodinâmica, na qual gás ionizado é empurrado através de um campo magnético. Acontece que essa inovação se mostrou posteriormente uma técnica inviável.

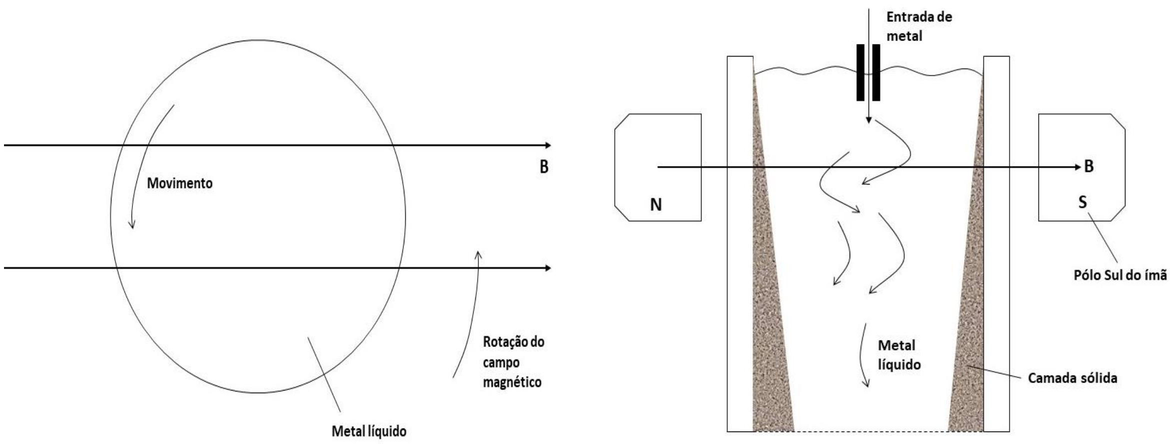
Figura 7: Esquema (a) de uma bomba eletromagnética e (b) do confinamento magnético de plasma.



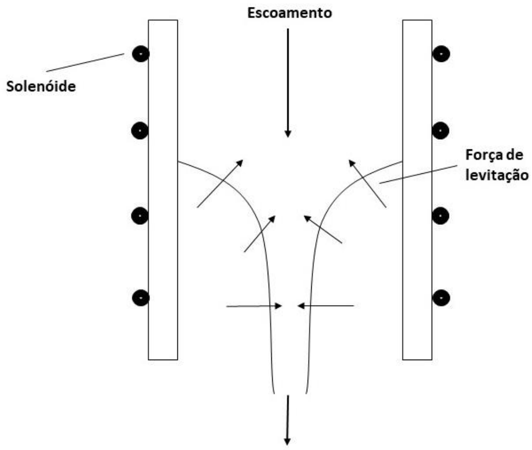
Fonte: a) Rêgo, 2010; b) Adaptado de Rêgo, 2010

Com o declínio das pesquisas em geração de energia, a indústria metalúrgica vinha demonstrando interesse pelo MHD. Duas décadas depois, os campos magnéticos eram usados rotineiramente nas indústrias metalúrgicas em todo o mundo para aquecer, bombear, agitar (Fig. 8.a), amortecer o movimento (Fig. 8.b) e levitar (Fig. 8.c) metais líquidos (RÊGO, 2010).

Figura 8: Esquema (a) de agitação magnética de um lingote, (b) do amortecimento magnético de movimento durante fundição e (c) de uma válvula eletromagnética.



(a) **(b)**



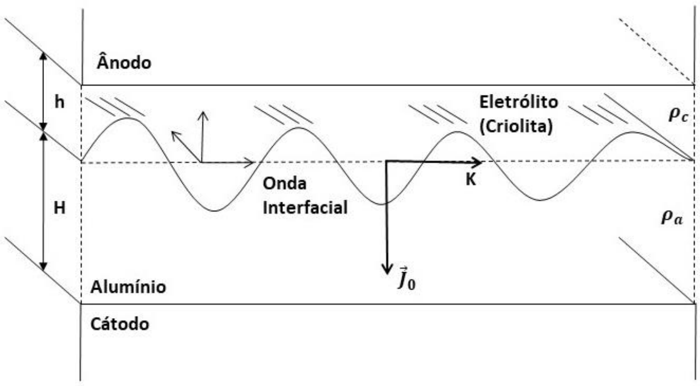
(c)

Fonte: Adaptado de Rêgo, 2010

O fundamental para essas aplicações é o fato de que a força de Lorentz fornece um método não invasivo de controlar o fluxo de metal. Assim, com a contínua pressão comercial para produzir materiais mais baratos, melhores e mais consistentes, a hidrodinâmica eletromagnética torna-se uma ferramenta única para maior controle nos processos de fundição e refino de metais (RÊGO, 2010).

A aplicação da eletromagnetohidrodinâmica aos processos de eletrólise também é muito importante, especialmente na redução eletrolítica de alumina a alumínio. A célula eletrolítica consiste em uma camada larga e rasa de criolita (eletrólito) no topo e alumínio líquido através do qual uma alta corrente (por volta de 200 kA) é passada. Através das duas camadas de cima para baixo, o óxido metálico é continuamente reduzido. O processo é intensivo em energia, principalmente por causa da alta resistência elétrica do eletrólito, combinado com isso, campos magnéticos de dispersão são conhecidos por desestabilizar A interface entre o eletrólito e o alumínio absorve energia do campo magnético através de ondas gravitacionais interfaciais, convertendo-a em energia cinética (Fig. 9). Para evitar essas inconsistências, a espessura da camada de criolita deve ser mantida a partir de um determinado valor crítico, ao custo de maior consumo de energia (PONTES, 2015).

Figura 9: Instabilidade em uma célula de redução de alumínio.



Fonte: Adaptado de Pontes, 2015

Outras aplicações de destaque em engenharia e metalurgia incluem fundição eletromagnética de alumínio, reformulação de superligas à base de titânio e níquel, remoção eletromagnética de inclusões não metálicas de metal fundido, propulsores/lançadores eletromagnéticos e o chamado processo de fundição por resfriamento por indução em cadinhos (vitrificação de lixo nuclear altamente reativo) (PONTES, 2015).

Pode-se constatar que a eletromagnetohidrodinâmica se estabeleceu de forma substantivamente importante na área da engenharia, principalmente na área de processamento de materiais, como uma ferramenta especial para maior controle na área de fundição e fabricação durante o refino do metal. Todas essas aplicações são possíveis porque a força de Lorentz fornece um meio não intrusivo de controlar o fluxo de metal. Tais aplicações são um importante destaque na indústria em meio à crescente pressão comercial para obtenção de materiais mais baratos, melhores, mais consistentes e mais sustentáveis (PONTES, 2015).

De acordo com Hamza *et al.* (2023) a utilização da eletromagnetohidrodinâmica para resolver diferentes problemas relacionados com a energia tem recebido ultimamente muita atenção. Os exemplos incluem a energia térmica, a refrigeração de sistemas electrónicos atuais, a eletricidade geotérmica, os sistemas de energia hidroelétrica, sistemas hidroelétricos e detectores de energias renováveis. Devido ao sucesso substancial do campo numa série de dificuldades, estas técnicas ganharam muita força nos últimos anos.

Jha e Aina (2017) examinaram a função de massa inicial do fluxo magnetohidrodinâmico num microcanal com paredes verticais infinitas paredes verticais infinitas paralelas e eletricamente isoladas. Num estudo preliminar, Hamza et al. (2021) investigaram o movimento de deslizamento por convecção natural de convecção natural MHD em estado estacionário numa geometria vertical e descobriram que o aumento do parâmetro de reatividade do contaminante não teve qualquer efeito no momento do fluido. Y. Daniel e S. Daniel (2015) investigaram a forma como a radiação e a flutuabilidade afetam o escoamento MHD.

2.6 Escoamento de fluidos

O desenvolvimento da mecânica dos fluidos ocorreu no final do século XVIII com a criação da Academia Francesa de Engenharia liderada por Riche de Prony. Prony e seus colegas da Ecole Polytechnique (Instituto de Tecnologia) e da Ecole Ponts et Chaussees (Instituto de Pontes e Represas) em Paris foram os primeiros a incluir cálculo e teoria científica na Engenharia. Antonie Chezy, Louis Navier, Gaspard Coriolis, Henry Darcy e muitos outros que fizeram contribuições para a teoria e engenharia de fluidos foram alunos dessas escolas e/ou Prof. Em meados do século XIX, o médico Jean Poiseuille mediu com precisão o fluxo de vários fluidos nos capilares; Na Alemanha, Gitthilf Hagen definiu a diferença entre escoamento laminar e turbulento em tubulações britânicas, Lord Osborne Reynolds continuou seu trabalho e desenvolveu o número adimensional que leva seu nome. Da mesma forma, ao mesmo tempo que o trabalho inicial de Navier, George Stokes completou as equações gerais de movimento para fluidos com atrito que também levam seu nome (Andrade, 2010).

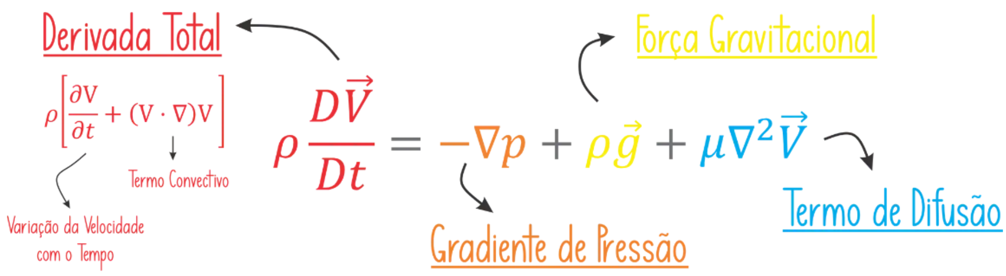
Ainda de acordo com Andrade (2010) a equação de Navier-Stokes tem sido amplamente utilizada na modelagem matemática de muitos fenômenos em mecânica dos fluidos. O uso de ferramentas computacionais para analisar pesquisas envolvendo escoamento de fluidos tem sido um campo crescente com diferentes áreas de aplicação e tem havido progresso no uso de fórmulas para lidar com equações da camada limite ou uso das equações de Navier-Stokes.

A resolução de problemas em engenharia que envolvem o fluxo de fluidos e a transferência de calor geralmente é desafiadora, devido ao fato de que as equações diferenciais parciais envolvidas raramente possuem soluções analíticas. Portanto, é necessário recorrer ao uso de métodos numéricos ou de abordagens híbridas, como os métodos analítico-numéricos, para obter as soluções desejadas (ANDRADE, 2010).

2.6.1 Equação de Navier-Stokes

De acordo com Álvarez (2019) no ano de 1822 o engenheiro e físico francês Claude -Louis Navier (1785 -1836), deduziu um sistema de equações que descrevia aproximadamente o comportamento de alguns fluidos. 20 anos mais tarde, o físico e matemático irlandês Sr George Gabriel Stokes (1819 - 1903), partindo de um modelo diferente, completou a descrição dessas equações, que então passou a receber o nome de Equações de Navier-Stokes em homenagem a ambos.

Figura 10: Descrição da Equação de Navier-Stokes



Fonte: Análise Diferencial do Movimento dos Fluidos (2023)

Çengel e Cimbala (2012) citam que equação de Navier-Stokes é a pedra fundamental da mecânica dos fluidos. Ela pode parecer muito inofensiva, mas trata-se de uma equação diferencial parcial não permanente, não-linear, de segunda ordem. Se fôssemos capazes de resolver essa equação para escoamentos de qualquer geometria, os livros de mecânica dos fluidos seriam reduzidos à metade. Infelizmente, soluções analíticas não podem ser obtidas exceto para campos de escoamento muito simples. Não está muito longe da verdade dizer que grande parte de seu livro é dedicado à resolução da Equação de Navier-Stokes. Realmente, muitos pesquisadores passaram a carreira inteira tentando resolver a equação mencionada.

Para escoamento incompreensível de um fluído newtoniano com propriedades constantes, a equação da continuidade é:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \tag{39}$$

A equação de Navier-Stokes é a seguinte:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \tag{40}$$

Para coordenadas cartesianas:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{41}$$

Ainda segundo Çengel e Cimbala (2012) embora tenhamos as equações diferenciais necessárias que descrevem o escoamento dos fluidos (equação da continuidade e equação de Navier-Stokes), resolvê-las é outra história. Para algumas geometrias simples (usualmente infinitas), as equações se reduzem a equações que se pode resolver analiticamente. Para geometrias mais complicadas, as equações são equações diferenciais parciais não-lineares, acopladas, de segunda ordem, que não podem ser resolvidas com lápis e papel. Deve-se então recorrer à soluções aproximadas ou soluções numéricas.

2.6.2 Acoplamentos da fluidodinâmica e do eletromagnetismo: A magnetohidrodinâmica

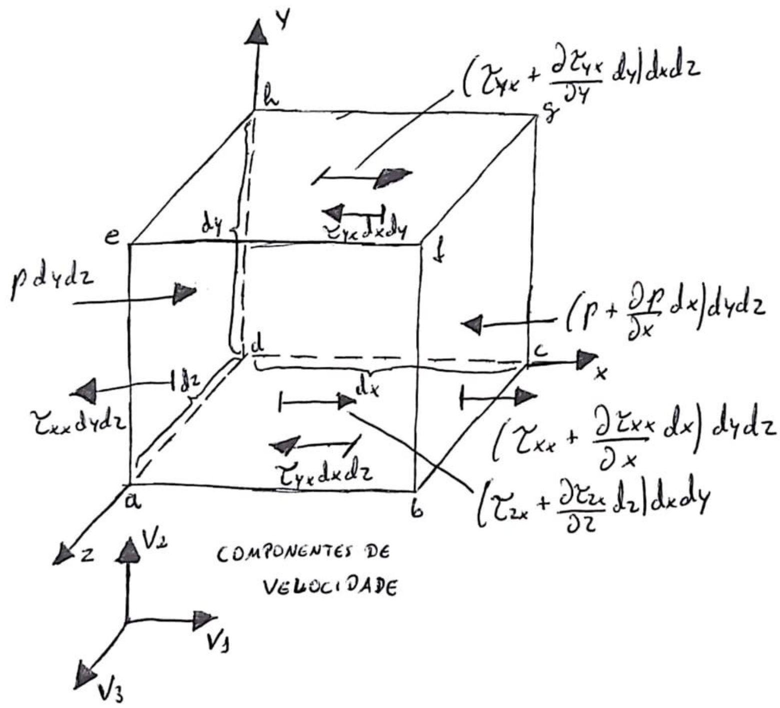
Os efeitos da magnetohidrodinâmica (MHD) na fluidodinâmica são obtidos ao incorporar o termo da força eletromagnética nas equações de Euler ou Navier-Stokes. A densidade de força magnética, denotada por JxB, é a soma de todas as forças de Lorentz que atuam em cada partícula carregada presente em um determinado volume do fluido. As equações de momento para um fluido em movimento podem ser expressas da seguinte maneira (AOKI, 2011):

$$\rho\frac{Dv_1}{Dt} = -\frac{\partial p}{dx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{dx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{zx}}{dz} + \rho f_x \tag{42}$$

$$\rho\frac{Dv_2}{Dt} = -\frac{\partial p}{dy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{dx} + \frac{\partial \tau_{yy}}{dy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{dz} + \rho f_y \tag{43}$$

$$\rho\frac{Dv_3}{Dt} = -\frac{\partial p}{dz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{dx} + \frac{\partial \tau_{yz}}{dy} + \frac{\partial \tau_{zz}}{dz} + \rho f_z \tag{44}$$

Figura 11: Elemento infinitesimal de um fluido se movendo. Apenas forças na direção x são mostradas. Modelo usado para o cálculo das componentes de x na equação do momento.



Fonte: Adaptado de Aoki (2011)

Onde x, y e z são componentes da equação de momento. Essas equações diferenciais parciais são obtidas a partir da aplicação fundamental da física, do princípio de um elemento de fluido infinitesimal. Como o elemento de fluido move-se na direção do escoamento, as equações (45), (46) e (47) encontram-se na forma não conservativa, onde, as mesmas são escalares e conhecidas como equações de Navier-Stokes; sua forma conservativa é obtida por meio de identidades vetoriais e de expansões derivativas. O resultado alcançado de acordo com Aoki (2011) é:

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_1 u) = -\frac{\partial p}{dx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{dx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{zx}}{dz} + \rho f_x \tag{45}$$

$$\frac{\partial(\rho v_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_2 u) = -\frac{\partial p}{dy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{dx} + \frac{\partial \tau_{yy}}{dy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{dz} + \rho f_y \tag{46}$$

$$\frac{\partial(\rho v_3)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_3 u) = -\frac{\partial p}{dz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{dx} + \frac{\partial \tau_{yz}}{dy} + \frac{\partial \tau_{zz}}{dz} + \rho f_z \tag{47}$$

Essas equações são a forma conservativa das equações de Navier-Stokes. Newton já estabeleceu que o estresse de cisalhamento é diretamente proporcional ao gradiente temporal da tensão, ou seja, ao gradiente de velocidade. Com base nessa característica, o fluido foi classificado como newtoniano. Já quando τ não é proporcional ao gradiente de velocidade, o fluido é considerado não newtoniano (AOKI, 2011). Portanto,

$$\tau_{xx} = \lambda(\nabla \cdot u) + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x} \tag{48}$$

$$\tau_{yy} = \lambda(\nabla \cdot u) + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial y} \tag{49}$$

$$\tau_{zz} = \lambda(\nabla \cdot u) + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{50}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \tag{51}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \tag{52}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \tag{53}$$

Sendo que μ é coeficiente de viscosidade dinâmica e λ é o segundo coeficiente de viscosidade, visto que,

$$\lambda = -\frac{2}{3}\,\mu \tag{54}$$

Por fim, considerando o fluido incompressível e newtoniano (ρ e μ constantes), sendo **u** a velocidade local, tem-se a influência do termo das forças eletromagnéticas e da micropolaridade do fluido:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + k\frac{\partial N}{\partial y} + \vec{J} \times \vec{B} \tag{55}$$

2.7 Generalized Integral Transform Technique (GITT)

Vários autores vêm utilizando a GITT na solução de problemas de escoamento e transferência de calor e tem mostrado excelentes resultados comparados com outros métodos, analíticos ou numéricos.

Andrade (2010) disserta sobre a Técnica da Transformada Integral Generalizada (G.I.T.T.) como uma técnica que surgiu há mais de duas décadas, destacando-se como uma ferramenta poderosa que permite a solução dos diversos e complexos problemas com o trabalho de ÖZISIK & MURRAY (1984) a partir das ideias da Técnica da Transformada Integral Clássica, MIKHAILOV & ÖZISIK (1974). A G.I.T.T. proporciona soluções híbridas numérico-analíticas para problemas de difusão e de convecção-difusão cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas. A partir disso a aplicação da G.I.T.T. tem solucionado problemas de classes mais gerais, tanto lineares, quanto não-lineares. O estudo mais detalhado e completo sobre G.I.T.T. foi feito por COTTA (1993).

A ideia principal é transformar o sistema original de equações diferenciais parciais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, expandindo-o em funções características e truncando o número de termos necessários para garantir a convergência. Do ponto de vista computacional, a principal questão é a escolha das ferramentas. Os valores numéricos facilitam a solução de problemas físicos através das equações em estudo. É bem conhecido na literatura que existem vários métodos numéricos e suas diversas implementações para resolver tais problemas. Dentre essas ferramentas, utilizaremos a Técnica de Transformação Integral Generalizada (GITT), que é reconhecida internacionalmente como uma importante ferramenta para a construção de resultados "benchmark", ou seja, um método adequado para validação de códigos numéricos. (PONTES, 2015).

Um atributo importante que distingue este método de outros métodos numéricos é a garantia de convergência satisfatória da solução para a ordem truncada crescente da série. Esse comportamento mostra que, para um determinado número de termos na expansão, podem ser obtidas soluções com grandes algarismos significativos de convergência. Devido à sua natureza híbrida, a técnica de transformação integral generalizada apresenta vantagens sobre métodos puramente numéricos, pois preserva a mesma base da solução analítica e não requer discretização de domínio ou geração de malha (LIMA, 2000).

Utilizando a GITT, pode-se resolver problemas de cinco principais classes de trabalho: problemas de difusão, problemas de convecção-difussão, problemas de auto-valor, equações de camada-limite e Equações de Navier-Stokes.

Resumidamente, a GITT, de acordo com Andrade (2010), é aplicada de acordo com os seguintes passos: escolher um problema auxiliar apropriado que contenha o maior número possível de informações a respeito do problema original, em seguida se deve solucionar o problema auxiliar e obter as autofunções, autovalores, normas e propriedade de ortogonalidade. Escreve-se o potencial original como uma expansão de autofunções oriundas do problema auxiliar e da propriedade da ortogonalidade, determinando-se o par de fórmulas da transformada-inversa. Após isso, ocorre a transformação do sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, utilizando-se o operador integral que contenha a autofunção do problema auxiliar possibilitando a eliminação de uma ou mais variáveis espaciais. Por fim, há a resolução numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através de um truncamento da série de uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, utilizando sub-rotinas numéricas disponíveis (IVPAG, BVPFD) e obtém-se os potenciais transformados. O último passo é utilizar a fórmula inversa definida anteriormente, a fim de recuperar o potencial original.

Alves *et al.* (2001) utilizaram o software computacional MATHEMATICA na solução de problemas não lineares de difusão e difusão-convecção através de equações diferenciais parciais unidimensionais em regime transiente. Eles usaram dois métodos para resolver o problema. O primeiro é realizar a transformação integral simbólica na equação diferencial que descreve o problema para eliminar suas coordenadas espaciais e, em seguida, usar a função intrínseca NDSOLVE no software para resolver numericamente a equação diferencial ordinária obtida. A segunda abordagem adotada é aplicar uma linha discreta a um sistema de equações diferenciais parciais unidimensionais, que também faz parte da função NDSOLVE. Eles concluíram que o procedimento intrínseco de integração direta é uma alternativa simples que fornece resultados numéricos com precisão suficiente para uma variedade de aplicações de engenharia. Eles também concluíram que a própria técnica de transformação integral é uma abordagem alternativa para resolver problemas com alta precisão ou baixa precisão, combinada com o próprio sistema de resolução de equações diferenciais ordinárias do software com tecnologia de resolução eficiente.

Ainda de acordo com Alves *et al.* (2001) as problemáticas de difusão não linear e de convecção-difusão estão entre as formulações matemáticas mais comuns na engenharia moderna e nas ciências físicas, de modo, que foram propostas diferentes metodologias de solução ao longo das últimas décadas para esta classe de problemas. Além das abordagens puramente numéricas mais clássicas para estas equações diferenciais parciais não lineares, como por exemplo as diferenças finitas mais conhecidas e os métodos de elementos finitos, nos últimos anos foram também avançados diversos procedimentos numérico-analíticos híbridos. Uma dessas abordagens híbridas, emergente na área de aplicação de calor e fluxo de fluidos, é a Técnica de Transformação Integral Generalizada (GITT) como uma extensão às transformações integrais clássicas para problemas de transformação linear. Essa abordagem computacional, baseada no Método da Transformação Integral Clássica (MIKHAILOV;OZISIK, 1984), oferece os benefícios do controle automático de erros globais, tal como numa solução puramente analítica, e apenas um pequeno aumento dos custos computacionais globais para um número crescente de variáveis independentes (coordenadas espaciais), uma vez que as tarefas numéricas em qualquer problema estão sempre concentradas numa única variável independente (tempo, por exemplo).

O estudo de escoamentos utilizando a GITT é relativamente pequeno, porém com muitos avanços tecnológicos, como por exemplo WANG e LONGWELL (1964), FRIEDMANN *et al* (1968) e MCDONALD *et al* (1972) que estudaram soluções das equações de Navier-Stokes empregando métodos numéricos. PAZ *et al* (2007), SILVA *et al* (2009), SILVA *et al* (2004) e PEREIRA *et al* (1998), estudaram a GITT na solução de escoamentos bidimensionais laminares ou turbulentos de fluidos.

Nascimento *et al.* (2006) utilizou a GITT para solucionar o escoamento de um fluido não-newtoniano através de tubos circulares, citando outros autores como Quaresma (1997), Magno (1998), Chaves (2001) e Cotta e Mikhailov (1997) que também utilizaram esse método muito eficiente para seus trabalhos. Trabalhos mais recentes, como o de Miyagawa *et al.* (2019), Matt *et al.* (2017), Pontes *et al.* (2018), Manchi e Ponalagusamy (2022) e Roja *et al.* (2023) demonstram que a EMHD segue em crescente desenvolvimento de pesquisas e demonstra que a resolução por métodos numéricos representa uma alternativa contundente para a área de microbombas.

CAPÍTULO III

3. Formulação matemática

3.1 Descrição do problema físico

O problema abordado nesse trabalho é definido considerando o escoamento Eletromagnetohidrodinâmico em um canal formado por um duto de seção quadrática, onde há eletrodos no qual flui uma corrente elétrica $\vec{E}$ na direção z e perpendiculares às anteriormente citadas há um campo magnético $\vec{B}$. O duto pode ser representado como de seção quadrática horizontal e semi-infinito. As placas que estão à mesma temperatura, transferem calor por convecção com o fluido micropolar.

O problema físico é formulado fazendo-se as seguintes hipóteses:

- Propriedades termofísicas e de transporte do fluido constantes;

- Impermeabilidade do contorno;

- Comprimento do canal nas direções y e z é pequeno quando comparado na direção x;

- Velocidade do fluxo da componente y e da componente z assumidas como zero;

- Campo magnético na direção y : $\vec{B} = (0, B, 0)$;

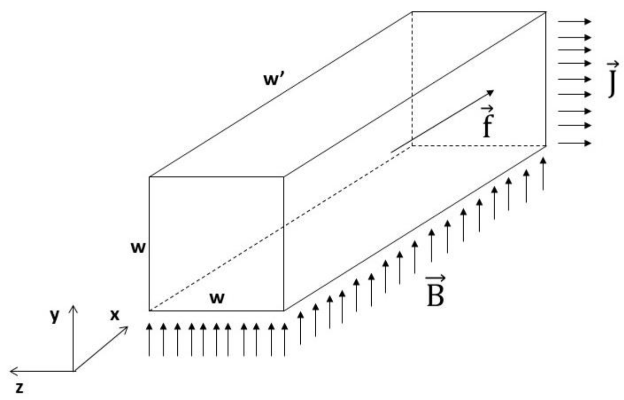
- Campo elétrico na direção z : $\vec{E} = (0,0, -E)$;

- Regime transiente;

- Escoamento bidimensional em regime laminar;

Na figura 12 é apresentado o modelo físico do problema ilustrando o escoamento e as forças atuantes sobre o mesmo:

Figura 12: Desenho esquemático do problema



Fonte: Autor

3.1.1 Formulação matemática para o componente de velocidade

Partindo da equação de Navier-Stokes, considerando o termo adicional dos efeitos viscosos do escoamento, o termo de conservação do momento angular em função da microrrotação envolvida no escoamento e do termo da força de Lorentz resultante envolvendo o escoamento eletromagnetohidrodinâmico, tem-se:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+(\mu+k)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+k\frac{\partial N}{\partial y}+\vec{J}\times\vec{B} \tag{56}$$

Considerando que os componentes da velocidade em y (v) e z (w) são muito pequenas em comparação com a velocidade ao longo do eixo x (u) e o termo $\frac{\partial u}{\partial x}\approx 0$ (Abdullah, 2008).

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x}+(\mu+k)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+k\frac{\partial N}{\partial y}+\vec{J}\times\vec{B} \tag{57}$$

$$\text{em } t=0;\quad 0\le y\le w;\; 0\le z\le w;\; u=0 \tag{58.a}$$
$$\text{em } t\ge 0;\quad y=0;\; 0\le z\le w;\; u=0 \tag{58.b}$$
$$\text{em } t\ge 0;\quad y=w;\; 0\le z\le w;\; u=0 \tag{58.c}$$
$$\text{em } t\ge 0;\quad 0\le y\le w;\; z=0;\; u=0 \tag{58.d}$$
$$\text{em } t\ge 0;\quad 0\le y\le w;\; z=w;\; u=0 \tag{58.e}$$

Determinação de $\vec{f}$ e $\vec{J}$:

$$\vec{E} = (0, 0, -E) \tag{59.a}$$

$$\vec{B} = (0, B, 0) \tag{59.b}$$

$$\vec{V} = (u, 0, 0) \tag{59.c}$$

$$\vec{V} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ u & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} = uB\vec{k} \tag{60}$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \tag{61}$$

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & uB - E \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} = \sigma(-uB^2 + EB) \tag{62}$$

$$\vec{J}.\vec{J} = \sigma^2(uB - E)^2 = \sigma^2(u^2B^2 - 2uBE + E^2) \tag{63}$$

Dividindo a equação (57) por μ:

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{(\mu + k)}{\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{k}{\mu}\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\mu} \tag{64}$$

Os grupos adimensionais utilizados estão expostos abaixo:

$$u = u_0 u^*; \quad t = \tau t^*; \quad y = wy^*; \quad z = wz^*; \quad K = \frac{k}{\mu} \qquad \text{(65.a,b,c,d,e,f)}$$

$$N = \frac{u_0}{w} N^*; \quad u_0 = \frac{\sigma B E w^2}{\mu}; \quad St^2 = \frac{w^2}{\tau \nu}; \quad Ha^2 = \frac{w^2 B^2 \sigma}{\mu} \qquad \text{(65.g,h,i,j)}$$

no qual, τ é o período de alternação entre o campo magnético e o campo elétrico (Abdullah, 2008), w é o comprimento da seção quadrática do duto nas direções y e z, w' é o comprimento na direção x, k é o vórtice da viscosidade, N é o componente do vetor de microrrotação no plano yz, μ é a viscosidade do fluido, ρ é a massa específica do fluido, ν é a viscosidade cinemática, Ha é o número de Hartman, St é o número de Strouhal (Aydin; Pop, 2005).

$$\frac{1}{\nu}\frac{u_0}{\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} + (1 + \mathrm{K})\frac{u_0}{w^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) + \mathrm{K}\frac{u_0}{w^2}\frac{\partial N^*}{\partial y^*} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\mu} \tag{66}$$

$$St^2 \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{w^2}{\mu u_0}\frac{\partial P}{\partial x} + (1 + \mathrm{K})\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) + \mathrm{K}\frac{\partial N^*}{\partial y^*} + \frac{w^2}{\mu u_0}\vec{J} \times \vec{B} \tag{67}$$

Considerando que o termo $\frac{\partial P}{\partial x}$ representa a natureza pulsátil do escoamento do fluido chamada de pressão axial gradiente no trabalho de Fung (1984).

$$-\frac{w^2}{\mu u_0}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{w^2}{\mu u_0}[A_0+A_1\cos(wt)]=Pz \tag{68}$$

em que A_0 é o gradiente de pressão médio e A_1 é a amplitude do componente pulsátil que é responsável pelas pressões sistólica e diastólica. Sendo $w=2\pi f_p$, onde f_p é a frequência do pulso. Os valores para A_0, A_1 e f_p são os que foram utilizados por Das e Saha (2009).

$$\frac{w^2}{\mu u_0}\vec{J}\times\vec{B}=-\frac{\sigma u_0 w^2 \overline{u}B^2}{u_0\mu}-\frac{EBw^2\sigma}{\mu\frac{\sigma EBw^2}{\mu}}=-Ha^2u^*+1 \tag{69}$$

Por fim, omitindo o símbolo “*” dos itens adimensionais para facilitar o entendimento da adimensionalização, tem-se o conjunto de Equações (70):

$$\begin{cases} St^2\dfrac{\partial u}{\partial t}=(1+\mathrm{K})\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mathrm{K}\dfrac{\partial N}{\partial y}-Ha^2u+1+Pz \\ \text{em } t=0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ 0\le z\le 1;\ \mathrm{u}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ \mathrm{y}=0;\ 0\le z\le 1;\ \mathrm{u}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ \mathrm{y}=1;\ 0\le z\le 1;\ \mathrm{u}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ \mathrm{z}=0;\ \mathrm{u}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ \mathrm{z}=1;\ \mathrm{u}=0 \end{cases} \tag{70}$$

3.1.2 Formulação matemática da equação da Microrrotação

A Eq. (71) representa fisicamente a conservação do momento angular do escoamento, onde tem-se a conservação do momento angular em termos da velocidade do fluido no tempo e no espaço, o termo dos efeitos viscosos do escoamento, o termo do rotacional para o momento angular e o termo de dissipação da microrrotação:

$$\rho\left(\frac{\partial N}{\partial t}+u\frac{\partial N}{\partial x}+v\frac{\partial N}{\partial y}+w\frac{\partial N}{\partial z}\right)=\frac{\gamma}{j}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)+\frac{k}{j}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{2k}{j}N \tag{71}$$

Também considerando que os componentes da microrrotação em y (v) e z (w) são negligenciados em comparação com a velocidade ao longo do eixo x (u) e o termo $\frac{\partial N}{\partial x}\approx 0$ e $\frac{\partial v}{\partial z}=0$ (Manchi e Ponalagusamy, 2022).

$$\rho\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\gamma}{j}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-\frac{k}{j}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2k}{j}N \tag{72}$$

$$\text{em } t = 0;\quad 0 \le y \le w;\ 0 \le z \le w;\ N = 0 \tag{73.a}$$

$$\text{em } t \ge 0;\quad y = 0;\ 0 \le z \le w;\ N = -n\frac{\partial u}{\partial y} \tag{73.b}$$

$$\text{em } t \ge 0;\quad y = w;\ 0 \le z \le w;\ N = -n\frac{\partial u}{\partial y} \tag{73.c}$$

$$\text{em } t \ge 0;\quad 0 \le y \le w;\ z = 0;\ N = -n\frac{\partial u}{\partial y} \tag{73.d}$$

$$\text{em } t \ge 0;\quad 0 \le y \le w;\ z = w;\ N = -n\frac{\partial u}{\partial y} \tag{73.e}$$

O caso n = 0 corresponde à uma forte concentração de microelementos. Isso indica que n=0 perto das paredes sugere que a concentração das partículas é suficientemente forte para que os microelementos são incapazes de rodar devido a esta concentração. O caso n =1/2 por outro lado, indica o desaparecimento da parte anti-simétrica do tensor de tensão e denota uma concentração fraca. O caso n = 1 pode ser utilizado para a modelação para modelar os fluxos de camada limite turbulenta (Aydin; Pop, 2005; Saleem *et al.*, 2011). Nesse trabalho foi considerado n=0.

Os grupos adimensionais utilizados para a equação da microrrotação são os seguintes:

$$u = u_0 u^*;\quad t = \tau t^*;\quad y = wy^*;\quad z = wz^*;\quad K = \frac{k}{\mu} \tag{74.a,b,c,d,e,f}$$

$$N = \frac{u_0}{w}N^*;\quad \gamma = \mu\left(1+\frac{K}{2}\right)j;\quad St^2 = \frac{w^2}{\tau\nu};\quad j = w^2\overline{j} \tag{74.g,h,i,j}$$

Sendo τ é o período de alternação entre o campo magnético e o campo elétrico (Abdullah, 2008), w é o comprimento da seção quadrática do duto nas direções y e z, w' é o comprimento na direção x, k é o vórtice da viscosidade, N é o componente do vetor de microrrotação no plano yz, μ é a viscosidade do fluido, ρ é a massa específica do fluido, ν é a viscosidade cinemática, Ha é o número de Hartman, St é o número de Strouhal (Aydin e Pop, 2005), γ é o parâmetro de viscosidade do fluido micropolar com gradiente de rotação, j é a viscosidade de microrrotação (Roja *et al.*, 2020).

$$\frac{\rho}{\tau}\frac{u_0}{w}\frac{\partial N^*}{\partial t^*}=\frac{\mu\left(1+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)ju_0}{jw^3}\left(\frac{\partial^2 N^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 N^*}{\partial z^{*2}}\right)-\frac{ku_0}{jw}\frac{\partial u^*}{\partial y^*}-\frac{2ku_0}{jw}N^* \tag{75}$$

Por fim, omitindo o símbolo "*" dos itens adimensionais para facilitar o entendimento da adimensionalização

$$\begin{cases} St^2\frac{\partial N}{\partial t}=\left(1+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-\frac{\mathrm{K}}{\bar{j}}\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\mathrm{K}}{\bar{j}}N \\ \text{em } t=0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ \ 0\le \mathrm{z}\le 1;\ \ \mathrm{N}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ \mathrm{y}=0;\ \ 0\le \mathrm{z}\le 1;\ \ \mathrm{N}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ \mathrm{y}=1;\ \ 0\le \mathrm{z}\le 1;\ \ \mathrm{N}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ \ \mathrm{z}=0;\ \ \mathrm{N}=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1\ \ \mathrm{z}=1;\ \ \mathrm{N}=0 \end{cases} \tag{76}$$

3.1.3 Formulação matemática da equação da Energia

A Eq. (76) representa a conservação de energia térmica dentro do escoamento, sendo o termo inicial a energia transiente do problema, também se tem o termo de condução da energia térmica nas direções y e z, o termo de dissipação térmica do escoamento em função dos efeitos viscosos do problema e por fim o termo de dissipação térmica a partir do efeito Joule do escoamento:

$$\rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\vec{J}.\vec{J}}{\sigma} \tag{77}$$

Sendo o produto $\vec{J}.\vec{J}=\sigma^2(uB+E)^2$ e os termos adimensionais expostos abaixo.

$$u=u_0u^*;\quad t=\tau t^*;\quad y=wy^*;\quad z=wz^*;\quad \theta=\frac{(T-T_w)}{(T_0-T_w)} \tag{78.a,b,c,d,e,f}$$

$$Ec=\frac{u_0^{\ 2}}{Cp(T_0-T_w)};\quad Ha=\frac{w^2B^2\sigma}{\mu};\quad St^2=\frac{w^2}{\tau\nu};\quad \Pr=\frac{\mu Cp}{k} \tag{78.g,h,i,j}$$

τ é o período de alternação entre o campo magnético e o campo elétrico, w é o comprimento da seção quadrática do duto nas direções y e z, w' é o comprimento na direção x, k é o vórtice da viscosidade, θ é o parâmetro adimensional da Temperatura, sendo T_0 a temperatura na entrada do duto e T_W a temperatura na parede, μ é a viscosidade do fluido, Cp é a calor específico do fluido micropolar, ν é a viscosidade cinemática, Ec é o número de Eckert, Ha é o número de Hartman Pr é o número de Prandtl, St é o número de Strouhal (Aydin e Pop, 2005)(Abdullah, 2008).

$$\frac{\rho Cp(T_0-T_w)}{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}=\frac{k(T_0-T_w)}{w^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^{*2}}\right)+\frac{\mu u_0^{\,2}}{w^2}\left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2+\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]+\frac{\vec{J}.\vec{J}}{\sigma} \tag{79}$$

$$St^2\frac{\partial\theta}{\partial t^*}=\frac{1}{\Pr}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^{*2}}\right)+Ec\left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2+\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]+\frac{w^2}{\mu Cp(T_0-T_w)}\frac{\vec{J}.\vec{J}}{\sigma} \tag{80}$$

$$\frac{w^2}{\mu Cp(T_0-T_w)}\frac{\vec{J}.\vec{J}}{\sigma}=\frac{w^2\sigma u_0^{\,2}B^2}{\mu Cp(T_0-T_w)}(u^*-\frac{E}{u_0B})^2=Ha^2Ec(u^*-E_0)^2 \tag{81}$$

Por fim, omitindo o símbolo "*" dos itens adimensionais para facilitar o entendimento da adimensionalização

$$\begin{cases} St^2\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\dfrac{1}{\Pr}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)+Ec\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]+Ha^2Ec(u-E_0)^2 \\ \text{em } t=0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ 0\le z\le 1;\ \theta=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ \mathrm{y}=0;\ 0\le \mathrm{z}\le 1;\ \theta=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ \mathrm{y}=1;\ 0\le \mathrm{z}\le 1;\ \theta=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ \mathrm{z}=0;\ \theta=0 \\ \text{em } t\ge 0;\ \ 0\le \mathrm{y}\le 1\ \ \mathrm{z}=1;\ \theta=0 \end{cases} \tag{82}$$

3.2 Metodologia de solução

3.2.1 Transformação Integral

A Técnica da Transformada Integral Generalizada é uma das principais técnicas para resolver problemas de Equações Diferenciais Parciais por meio de um sistema híbrido (analítico-numérico) conforme realizado por Cotta (1996), Cotta e Mikhailov (1997), Pontes (2018) e Miyagawa (2014). A mesma é aplicada conforme a sequência de passos:

3.2.1.1 Campo de velocidade:

Inicialmente, deve-se definir os problemas de auto-valores para a velocidade u nas direções y e z. Como as condições de contorno são todas de primeiro tipo para todos os potenciais envolvidos (campo de velocidade, campo de microrrotação e campo de temperatura), adota-se os mesmos problemas de auto-valores para tais potenciais.

$$\begin{array}{c|c}
Em \;\; y: & Em \;\; z: \\
\dfrac{d^2Y_i(y)}{dy^2} = -\alpha_i^2 Y_i & \dfrac{d^2Z_l(z)}{dz^2} = -\beta_l^2 Z_l \\
Y_i(0) = 0 & Z_l(0) = 0 \\
Y_i(1) = 0 & Z_l(1) = 0 \\
Y_i = sen(\alpha_i y) & Z_l = sen(\beta_l z) \\
\alpha_i = i\pi; & \beta_l = l.\pi \\
N_i = \int_0^1 Y_i^2(y)dy \begin{cases} 0, \text{i} \neq \text{j} \\ N_i, \text{i} = \text{j} \end{cases} = \dfrac{1}{2} & N_l = \int_0^1 Z_l^2(z)dz \begin{cases} 0, \text{i} \neq \text{j} \\ N_l, \text{i} = \text{j} \end{cases} = \dfrac{1}{2} \\
\tilde{Y}_i = \dfrac{Y_i}{\sqrt{N_i}} = \sqrt{2}.sen(\alpha_i y) & \tilde{Z}_l = \dfrac{Z_l}{\sqrt{N_l}} = \sqrt{2}.sen(\beta_l z)
\end{array}$$

(82.a,b)
(82.c,d)
(82.e,f)
(82.g,h)
(82.i,j)
(82.k,l)
(82.m,n)

Como proposto inicialmente, o uso da GITT baseia-se na ideia de que o potencial pode ser representado como uma expansão, que tem como base autofunções provenientes de um problema auxiliar associado ao problema original. Partindo dessa proposição, obtém-se a transformação para o campo de velocidade, nas direções "z" e "y", a partir dos pares transformada-integral abaixo:

Potencial Transformado:

$$\tilde{\tilde{U}}_{il}(t) = \int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)U(y,z,t)dydz \quad \text{Transformada} \tag{83}$$

Fórmula de Inversão:

$$U(y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\tilde{\tilde{U}}_{il}(t) \qquad \text{Inversa} \tag{84}$$

Seguindo o formalismo da GITT, faz-se uso do operador $\int_0^1\int_0^1 \_\_\_\_\_ \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)dydz$ multiplicando a Eq. (70), campo de velocidade adimensionalizado, resultando em um sistema infinito e acoplado visto abaixo:

$$St^2\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)U(y,z,t)dydz=(1+\mathrm{K})\int_0^1\int_0^1\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\left(\frac{d^2U(y,z,t)}{dy^2}+\frac{d^2U(y,z,t)}{dz^2}\right)dydz$$
$$+\mathrm{K}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\frac{dN}{dy}dydz-Ha^2\int_0^1\int_0^1\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)U(y,z,t)dydz \tag{85}$$
$$+(1-Pz)\int_0^1\int_0^1\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)dydz$$

Por fim, tem-se o problema transformado para o campo de velocidade:

$$\begin{cases} St^2\dfrac{d\tilde{\bar{U}}_{il}}{d\tau}=-(1+\mathrm{K})(\alpha_i^2+\beta_l^2)\tilde{\bar{U}}_{il}+\mathrm{K}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{ij}\delta_{lm}\tilde{\bar{N}}_{jm}-Ha^2\tilde{\bar{U}}_{il}+(1-Pz)\tilde{\bar{f}}_{im} \\ \tilde{\bar{U}}_{il}(0)=0;\quad \tilde{\bar{N}}_{il}(0)=0 \\ A_{ij}=\displaystyle\int_0^1\tilde{Y}_i\tilde{Y}_j'dy \\ \delta_{lm}=\begin{cases}0, & \mathrm{l}\neq\mathrm{m}\\ 1, & \mathrm{l}=\mathrm{m}\end{cases} \\ \tilde{\bar{f}}_{il}=\tilde{\bar{f}}_i\tilde{\bar{f}}_l=\displaystyle\int_0^1\tilde{Y}_i dy\int_0^1\tilde{Z}_l dz \end{cases} \tag{86}$$

3.2.1.2 Campo de Microrrotação:

O Par Transformada-inversa:

Potencial Transformado:

$$\tilde{\bar{N}}_{il}(t)=\int_0^1\int_0^1\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)N(y,z,t)dydz\quad \text{Transformada} \tag{87}$$

Fórmula de Inversão:

$$N(y,z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\tilde{\bar{N}}_{il}(t)\qquad \text{Inversa} \tag{88}$$

Seguindo o formalismo da GITT, multiplica-se o termo $\int_0^1\int_0^1 \underline{\qquad}\,\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)dydz$ na Eq. (75):

$$St^2\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\frac{dN(y,z,t)}{dt}dydz = \left(1+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\left(\frac{d^2N(y,z,t)}{dy^2}+\frac{d^2N(y,z,t)}{dz^2}\right)$$
$$-\frac{2\mathrm{K}}{j}\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)N(y,z,t)dydz-\frac{\mathrm{K}}{j}\sum_1^{NV}\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\frac{dU(y,z,t)}{dy}dydz \quad (89)$$

Desse modo, temos o problema transformado para a Microrrotação:

$$\begin{cases} St^2\dfrac{d\tilde{\tilde{N}}_{il}}{dt} = -(1+\dfrac{K}{2})(\alpha_i^2+\beta_l^2)\tilde{\tilde{N}}_{il}-\dfrac{2\mathrm{K}}{j}\tilde{\tilde{N}}_{il}-\dfrac{\mathrm{K}}{j}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{ij}\delta_{lm}\tilde{\tilde{U}}_{jm} \\ \tilde{\tilde{N}}_{il}(0)=0 \\ A_{ij}=\displaystyle\int_0^1 \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j' dy \\ \delta_{lm}=\begin{cases}0, & \mathrm{l}\neq\mathrm{m}\\ 1, & \mathrm{l}=\mathrm{m}\end{cases} \end{cases} \quad (90)$$

3.2.1.3 Campo de Temperatura

Sendo o Par Transformada-inversa:

Potencial Transformado:

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{il}(t)=\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\theta(y,z,t)dydz \quad \text{Transformada} \quad (91)$$

Fórmula de Inversão:

$$\theta(y,z,t)=\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\tilde{\tilde{\theta}}_{il}(t) \qquad \text{Inversa} \quad (92)$$

Ainda nesse raciocínio, seguindo o formalismo da GITT, multiplica-se o termo $\int_0^1\int_0^1 \_\_\_\_\_ \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)dydz$ na Eq. (81):

$$St^2\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\frac{d\theta(y,z,t)}{dt}dydz = \frac{1}{\Pr}\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\left(\frac{d^2\theta(y,z,t)}{dy^2}+\frac{d^2\theta(y,z,t)}{dz^2}\right)dydz +$$
$$+Ec\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)\left[\left(\frac{dU(y,z,t)}{dy}\right)^2+\left(\frac{dU(y,z,t)}{dz}\right)^2\right]dydz + \tag{93}$$
$$+Ha^2Ec\int_0^1\int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{Z}_l(z)(U(y,z,t)-E_0)^2dydz$$

Desse modo, temos a transformação final do problema está a seguir:

$$\begin{cases} St^2\dfrac{d\tilde{\bar{\theta}}_{il}}{d\bar{t}} = -\dfrac{(\alpha_i^2+\beta_l^2)}{\Pr}\tilde{\bar{\theta}}_{il} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[Ec\left(B_{ijk}C_{lmn}+D_{ijk}E_{lmn}\right)+Ha^2EcD_{ijk}C_{lmn}]\tilde{\bar{U}}_{jm}\tilde{\bar{U}}_{kn} + \\ -2Ha^2EcE_0\tilde{\bar{U}}_{il} + Ha^2EcE_0{}^2\tilde{\bar{f}}_{im} \\ \tilde{\bar{\theta}}_{il}(0)=0 \\ B_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j^{'}\tilde{Y}_k^{'}dy;\quad \mathrm{C}_{lmn} = \int_0^1 \tilde{Z}_l\tilde{Z}_m\tilde{Z}_n dz \\ D_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j\tilde{Y}_k dy;\quad \mathrm{E}_{lmn} = \int_0^1 \tilde{Z}_l\tilde{Z}^{'}_m\tilde{Z}^{'}_n dz \\ \tilde{\bar{f}}_{il} = \tilde{\bar{f}}_i\,\tilde{\bar{f}}_l = \int_0^1 \tilde{Y}_i dy\int_0^1 \tilde{Z}_l dz \end{cases} \tag{94}$$

Por fim, é importante resumir todas as equações transformados, conforme exposto a seguir:

$$
\begin{cases}
\text{Campo de velocidade} \\
St^2\dfrac{d\tilde{\bar{U}}_{il}}{d\tau} = -(1+\mathrm{K})(\alpha_i^2+\beta_l^2)\tilde{\bar{U}}_{il} + \mathrm{K}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{ij}\delta_{lm}\tilde{\bar{N}}_{jm} - Ha^2\tilde{\bar{U}}_{il} + (1-Pz)\,\tilde{\bar{f}}_{im} \\
\text{Campo de microrrotação} \\
St^2\dfrac{d\tilde{\bar{N}}_{il}}{dt} = -(1+\dfrac{K}{2})(\alpha_i^2+\beta_l^2)\tilde{\bar{N}}_{il} - \dfrac{2\mathrm{K}}{j}\,\tilde{\bar{N}}_{il} - \dfrac{\mathrm{K}}{j}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{ij}\delta_{lm}\tilde{\bar{U}}_{jm} \\
\text{Campo de temperatura} \\
St^2\dfrac{d\tilde{\bar{\theta}}_{il}}{d\bar{t}} = -\dfrac{(\alpha_i^2+\beta_l^2)}{\Pr}\,\tilde{\bar{\theta}}_{il} + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[Ec\left(B_{ijk}C_{lmn}+D_{ijk}E_{lmn}\right) + Ha^2EcD_{ijk}C_{lmn}]\tilde{\bar{U}}_{jm}\tilde{\bar{U}}_{kn} + \\
-2Ha^2EcE_0\tilde{\bar{U}}_{il} + Ha^2EcE_0{}^2\,\tilde{\bar{f}}_{im} \\
\text{Condições iniciais:} \\
\tilde{\bar{U}}_{il}(0)=0;\quad \tilde{\bar{N}}_{il}(0)=0;\quad \tilde{\bar{\theta}}_{il}(0)=0 \\
\text{Coeficientes} \\
A_{ij} = \displaystyle\int_0^1 \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j^{'}dy;\quad \delta_{lm} = \begin{cases}0, & \mathrm{l}\neq\mathrm{m}\\ 1, & \mathrm{l}=\mathrm{m}\end{cases};\quad \tilde{\bar{f}}_{il} = \tilde{\bar{f}}_i\tilde{\bar{f}}_l = \displaystyle\int_0^1\tilde{Y}_i dy\int_0^1\tilde{Z}_l dz \\
B_{ijk} = \displaystyle\int_0^1 \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j^{'}\tilde{Y}_k^{'}dy;\quad \mathrm{C}_{lmn} = \displaystyle\int_0^1 \tilde{Z}_l\tilde{Z}_m\tilde{Z}_n dz \\
D_{ijk} = \displaystyle\int_0^1 \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j\tilde{Y}_k dy;\quad \mathrm{E}_{lmn} = \displaystyle\int_0^1 \tilde{Z}_l\tilde{Z}^{'}_m\tilde{Z}^{'}_n dz
\end{cases}
$$

Para Silva (2011), visando a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas e infinitas, e do ponto de vista computacional, o sistema deve ser truncado em uma ordem finita, suficientemente grande que permita obter soluções convergidas para uma determinada precisão desejada. Antes de programar a versão truncada do sistema para solucionar o problema de valor inicial, o sistema de equações é reescrito de forma a contar as contribuições mais importantes de forma ordenada. O esquema de ordenação para expansão de autofunções multidimensionais é descrito em maiores detalhes em (MIKHAILOV e COTTA, 1996; COTTA e MIKHAILOV, 1997), e tem como objetivo reduzir os custos computacionais. Aqui, os critérios para o procedimento de ordenação envolvem a soma dos autovalores em cada sentido, ou:

$$\alpha^2{}_p = \alpha^2{}_i + \beta^2{}_l \tag{95}$$

Em seguida, os índices relacionados à expansão da função corrente e temperatura são reorganizados em um único índice. Assim:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \to \sum_{p}^{\infty}; \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \to \sum_{q}^{\infty}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \to \sum_{r}^{\infty}; \tag{95}$$

Por fim, tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases}
St^2 \dfrac{d\tilde{\bar{U}}_p}{d\tau} = -(1+\mathrm{K})\alpha_p^2 \tilde{\bar{U}}_p + \mathrm{K}\sum_{q=1}^{\infty} A_{pq}\tilde{\bar{N}}_q - Ha^2\tilde{\bar{U}}_p + (1-Pz)\,\tilde{\bar{f}}_p \\
St^2 \dfrac{d\tilde{\bar{N}}_p}{dt} = -(1+\dfrac{K}{2})\alpha_p^2 \tilde{\bar{N}}_p - \dfrac{2\mathrm{K}}{J}\tilde{\bar{N}}_p - \dfrac{\mathrm{K}}{J}\sum_{q=1}^{\infty} A_{pq}\tilde{\bar{U}}_q \\
St^2 \dfrac{d\tilde{\bar{\theta}}_p}{d\bar{t}} = -\dfrac{\alpha_p^2}{\Pr}\tilde{\bar{\theta}}_p + \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}[Ec\left(B_{pqr} + D_{pqr}\right) + Ha^2 Ec D_{pqr}]\tilde{\bar{U}}_q \tilde{\bar{U}}_r + \\
-2Ha^2 Ec E_0 \tilde{\bar{U}}_p + Ha^2 Ec E_0{}^2\,\tilde{\bar{f}}_p \\
\tilde{\bar{U}}_p(0) = 0; \quad \tilde{\bar{N}}_p(0) = 0; \quad \tilde{\bar{\theta}}_p(0) = 0 \\
A_{pq} = A_{ij}\delta_{lm} = \int_0^1 \tilde{Y}_{i(p)}\tilde{Y}'_{j(q)}\,dy\,\delta_{l(p)m(q)}; \quad \delta_{l(p)m(q)} = \begin{cases} 0, & \mathrm{l} \neq \mathrm{m} \\ 1, & \mathrm{l} = \mathrm{m} \end{cases}; \quad \tilde{\bar{f}}_p = \tilde{\bar{f}}_i \tilde{\bar{f}}_l = \int_0^1 \tilde{Y}_i dy \int_0^1 \tilde{Z}_l dz \\
B_{pqr} = B_{ijk}\mathrm{C}_{lmn} = \int_0^1 \tilde{Y}_{i(p)}\tilde{Y}'_{j(q)}\tilde{Y}'_{k(r)}\,dy \int_0^1 \tilde{Z}_{l(p)}\tilde{Z}_{m(q)}\tilde{Z}_{n(r)}\,dz \\
C_{pqr} = D_{ijk}E_{lmn} = \int_0^1 \tilde{Y}_{i(p)}\tilde{Y}_{j(q)}\tilde{Y}_{k(r)}\,dy \int_0^1 \tilde{Z}_{l(p)}\tilde{Z}'_{m(q)}\tilde{Z}'_{n(r)}\,dz \\
D_{pqr} = D_{ijk}C_{lmn} = \int_0^1 \tilde{Y}_{i(p)}\tilde{Y}_{j(q)}\tilde{Y}_{k(r)}\,dy \int_0^1 \tilde{Z}_{l(p)}\tilde{Z}_{m(q)}\tilde{Z}_{n(r)}\,dz
\end{cases}$$

CAPÍTULO IV

4. Resultados e discussão

Visando resolver o sistema infinito acoplado de equações diferenciais, um código computacional no software Wolfram Mathematica v. 11.3.

Para a convergência de todos os campos estudados, fez-se necessário uma ordem suficientemente grande de termos para várias situações analisadas. Os valores dos termos de expansão foram truncados em uma ordem finita N=NV=NM=NT, variando de N=10 até N=50 para um erro absoluto de 10^{-3}.

Os resultados obtidos foram analisados variando o número de Strouhal (St=2, 4, 6 e 8), além disso foi analisada a influência do campo magnético para o escoamento, dessa forma variou-se o Hartmann (Ha=0, 1, 2 e 5). Também foram variados o número de Prandtl (Pr=0,5, 1 e 2), Eckert (Ec=0,01, 0,05, 0,1 e 0,5), o parâmetro elétrico imposto nos eletrodos do canal (E0=-1, -0,5, 0 e 1), o parâmetro de micropolaridade (Ka=0, 1 e 2), sendo Ka=0 um fluido newtoniano, o gradiente de pressão médio (A_0=0, 1, 2 e 4), a viscosidade da microrrotação (j=0,1, 0,5 e 1) e a frequência do pulso de pressão (fp=0, 1,2 e 2,4).

A tabela 1 mostra os casos estudados de acordo com a variação dos parâmetros propostos.

Tabela 1 – Tabela de casos analisados

Caso	Ha	St	A_0	fp	Pr	Ec	E0	Ka	j
I	1	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
II	0	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
III	2	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
IV	5	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
V	1	4	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
VI	1	6	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
VII	1	8	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
VIII	1	2	0	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
IX	1	2	2	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
X	1	2	4	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
XI	1	2	1	0	0,5	1	1	0,1	0,1

XII	1	2	1	2,4	0,5	1	1	0,1	0,1
XIII	1	2	1	1,2	2	1	1	0,1	0,1
XIV	1	2	1	1,2	7	1	1	0,1	0,1
XV	1	2	1	1,2	0,5	0,01	1	0,1	0,1
XVI	1	2	1	1,2	0,5	0,05	1	0,1	0,1
XVII	1	2	1	1,2	0,5	0,1	1	0,1	0,1
XVIII	1	2	1	1,2	0,5	0,5	1	0,1	0,1
XIX	1	2	1	1,2	0,5	1	-1	0,1	0,1
XX	1	2	1	1,2	0,5	1	-0,5	0,1	0,1
XXI	1	2	1	1,2	0,5	1	0	0,1	0,1
XXII	1	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,1
XXIII	1	2	1	1,2	0,5	1	1	0,5	0,1
XXIV	1	2	1	1,2	0,5	1	1	1	0,1
XXV	1	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	0,5
XXVI	1	2	1	1,2	0,5	1	1	0,1	1

4.1 Análise de convergência

De acordo com Pontes (2018), pode-se definir análise de convergência no método de transformação integral como o processo de incremento gradual da ordem de truncamento das séries/expansões, de forma com que se obtenha um determinado critério de parada como um erro numérico nos valores dos campos analisados (campo de velocidade, campo de temperatura, campo de microrrotação, campo de velocidade média, campo de temperatura média, tensão na parede e número de Nusselt local). Nessa perspectiva, com o objetivo de analisar a natureza híbrida da metodologia aplicada, é mostrado a seguir um estudo da análise de convergência dos campos citados, em diferentes tempos do escoamento transiente.

Os parâmetros da análise são apresentados abaixo:

- $U(t)$: Campo de velocidade central

- $\theta(t)$: Campo de temperatura central

- $N(t)$: Campo de microrrotação central

- $\bar{U}(t)$: Campo de velocidade média

- $\bar{\theta}(t)$: Campo de temperatura média

- $\tau = (1+K)\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)$: Tensão na parede

- $Nu = \frac{1}{\bar{\theta}(t)}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)$: Número de Nusselt local

A análise de convergência para o campo de velocidade, campo de temperatura e campo de microrrotação foi analisada no centro do canal y=0,5 e z=0,5, enquanto que a tensão na parede foi analisada nas posições y=0 e z=0,5 e y=0,5 e z=0 e o número de Nusselt local na posição y=1 e z=0,5.

Tabela 2 – Análise de convergência para o Caso I

		U(0.5,0.5,t)		
NV\ t	1.25	2.5	3.75	5
10	0.13658	0.13588	0.13516	0.13442
20	0.14432	0.14359	0.14284	0.14208
30	0.14273	0.14201	0.14126	0.14050
40	0.14155	0.14083	0.14009	0.13933
50	0.14140	0.14068	0.13994	0.13918
		θ(0.5,0.5,t)		
NT\ t	1.25	2.5	3.75	5
10	0.02851	0.02854	0.02857	0.02860
20	0.03026	0.03029	0.03032	0.03035
30	0.02995	0.02998	0.03001	0.03004
40	0.02968	0.02971	0.02973	0.02976
50	0.02968	0.02971	0.02974	0.02977
		$N.10^{-19}$(0.5,0.5,t)		
NM \ t	1.25	2.5	3.75	5
10	-4.49359	-4.15279	-4.52576	-4.13243
20	-4.94561	-4.70033	-4.97946	-4.67805
30	-4.95368	-4.70032	-4.97863	-4.67920
40	-4.95363	-4.70038	-4.97866	-4.67913
50	-4.95363	-4.70038	-4.97866	-4.67913
		$\bar{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{t})$		
NV \ t	1.25	2.5	3.75	5
10	0.06810	0.06777	0.06742	0.06870
20	0.06865	0.06832	0.06796	0.06760
30	0.06862	0.06828	0.06793	0.06756
40	0.06875	0.06842	0.06806	0.06770
50	0.06869	0.06835	0.06800	0.06764
		$\bar{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t})$		
NT \ t	1.25	2.5	3.75	5
10	0.01005	0.01005	0.01006	0.01007
20	0.00997	0.00998	0.00999	0.01000
30	0.00997	0.00998	0.00999	0.00999

40	0.00995	0.00996	0.00997	0.00997
50	0.00995	0.00996	0.00997	0.00998
		$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})$		
NV \ t	1.25	2.5	3.75	5
10	2.30952	2.29843	2.28668	2.27437
20	2.43446	2.42311	2.41098	2.39821
30	2.41444	2.40312	2.39105	2.37834
40	2.47294	2.46152	2.44928	2.43636
50	2.47096	2.45954	2.44730	2.43438
		$\boldsymbol{Nu}(\boldsymbol{t})$		
NT \ t	1.25	2.5	3.75	5
10	12.21574	12.21527	12.21464	12.21386
20	13.02434	13.02354	13.02259	13.02139
30	12.93176	12.93109	12.9302	12.92912
40	13.29337	13.2925	13.29141	13.29011
50	13.29343	13.2925	13.29148	13.29018

A partir dos resultados da tabela 2, pode-se perceber que parâmetros como a velocidade central, temperatura central, microrrotação central, velocidade média e temperatura média tiveram taxas de convergência satisfatórias para um número pequeno de ordem de truncamento, mesmo para tempos iniciais, os valores convergiram satisfatoriamente com até cinco algarismos significativos.

Já os valores de Tensão na parede e Número de Nusselt local não tiveram uma convergência tão prematura por conta de suas convergências dependerem da convergência das derivadas dos termos de velocidade e temperatura, porém convergiram com N=50, demonstrando que, apesar de certa dificuldade de convergência, os resultados para a Técnica da Transformada Integral se mostram bastantes precisos para séries/expansões de truncamento elevadas.

Figura 13 – Erro absoluto para t=1,25

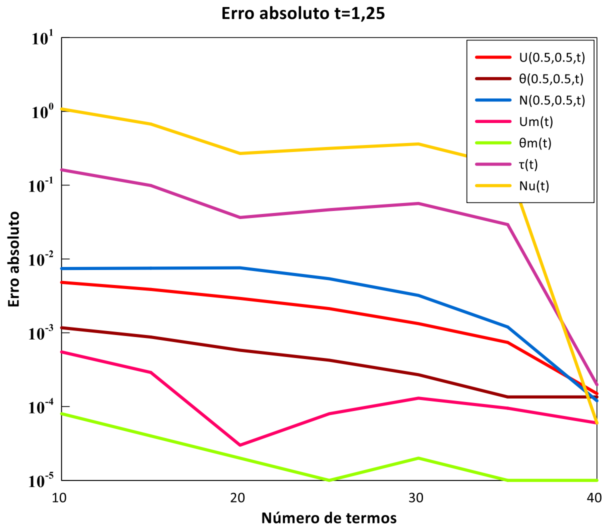


Figura 14 – Erro absoluto para t=2,5

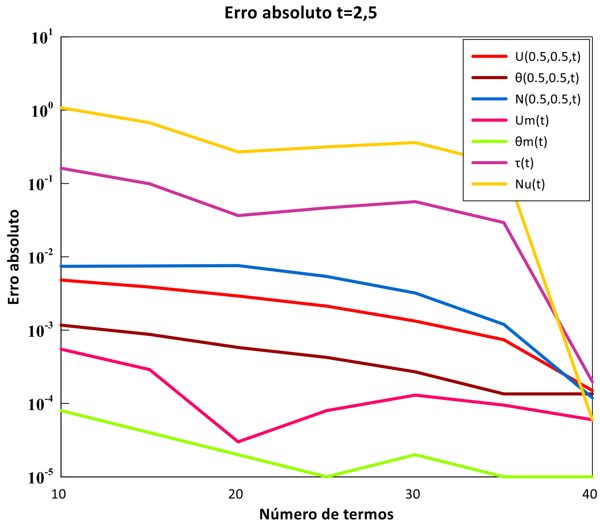


Figura 15 – Erro absoluto para t=3,75

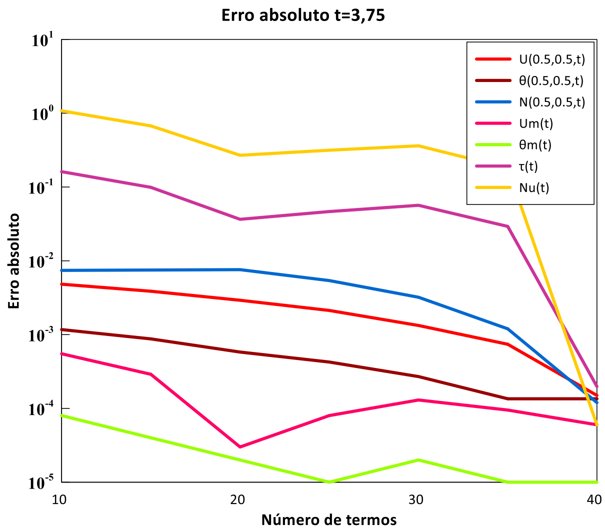
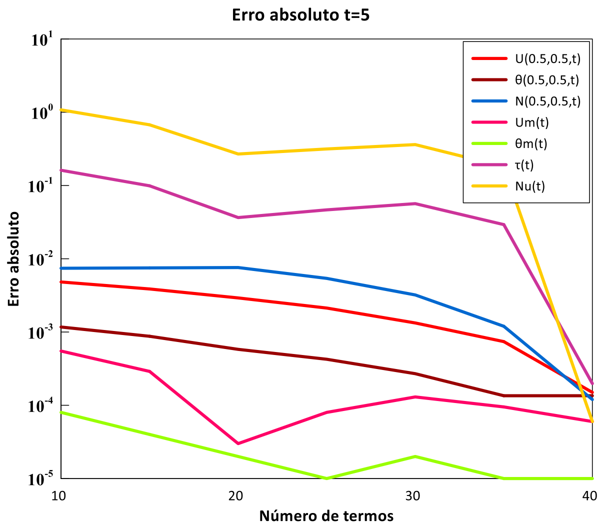


Figura 16 – Erro absoluto para t=5



As figuras 13, 14, 15 e 16 ratificam a ideia de que quanto maior a ordem de truncamento das séries, melhor a convergência dos resultados. Nessa perspectiva, um dos métodos de análise de convergência dos resultados foi o erro absoluto, que conforme demonstrado nas figuras, seguiu resultados parecidos independente do tempo em que foi realizada a análise. É importante salientar que para essa análise considerou-se satisfatório um erro absoluto da ordem de 10^{-3}, onde todos os resultados convergiram para esse valor de erro.

4.2 Verificação Numérica

Com o objetivo de comprovar a veracidade dos resultados, foi realizada uma comparação dos mesmos. A verificação numérica foi realizada a partir da rotina NDSolve no próprio código computacional. Nessa perspectiva, foram realizadas análises cinética, microrrotacional e térmica do escoamento variando em função do tempo, conforme o caso padrão do trabalho (Caso I).

Nas figuras 17, 18 e 19 são mostrados os resultados comparativos dos métodos da GITT e da rotina NDSolve dos campos de velocidade, temperatura e microrrotação para a série de expansões variando de 10 a 50 termos, conforme os valores de N=10 e N=50 expostos nas imagens.

Figura 17 – Comparação GITT/NDSolve Velocidade (t)

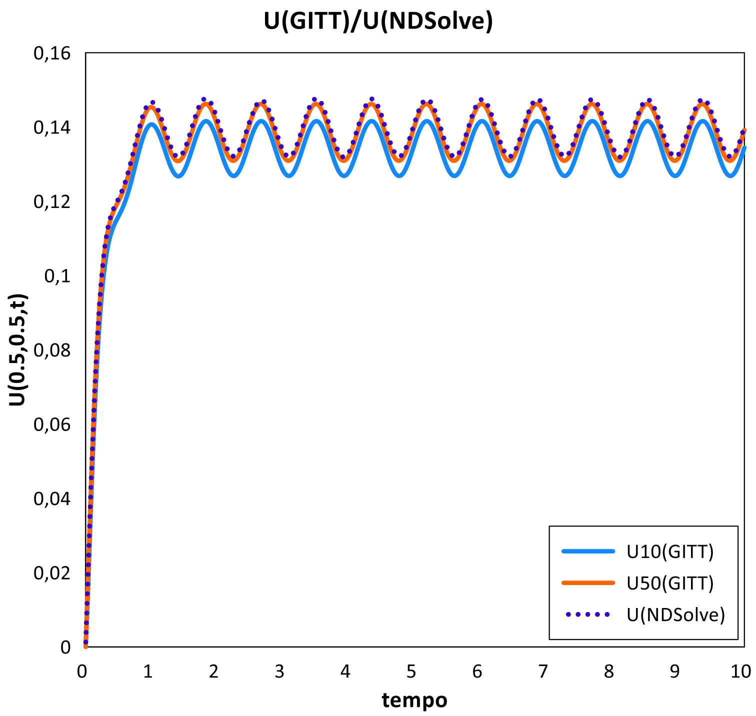


Figura 18 – Comparação GITT/NDSolve Temperatura (t)

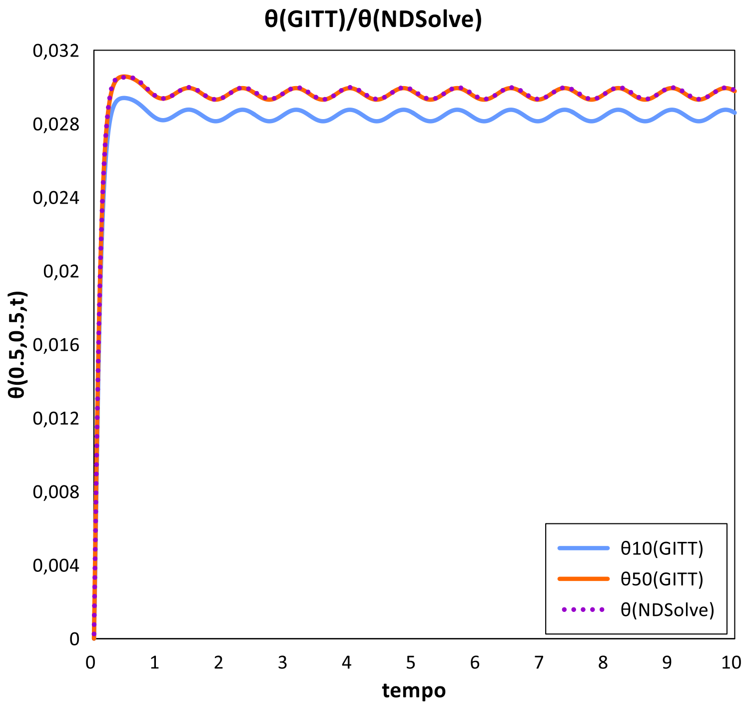
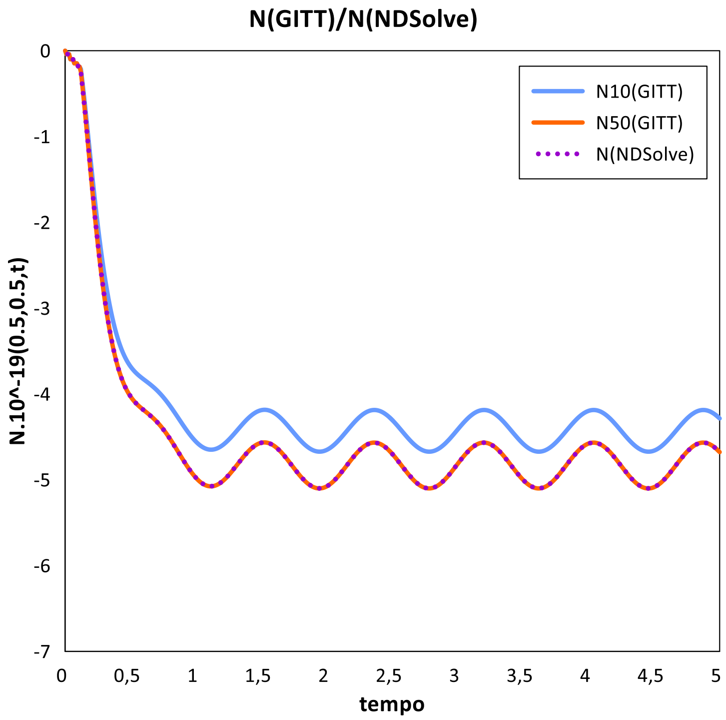


Figura 19 – Comparação GITT/NDSolve Microrrotação (t)



Percebe-se que há uma convergência entre os métodos de acordo com o aumento do número de termos da GITT, demonstrando assim que os resultados são satisfatórios e demonstram robustez do método da GITT para solução de problemas de Equações Diferenciais.

Figura 20 – Comparação GITT/NDSolve Velocidade (z)

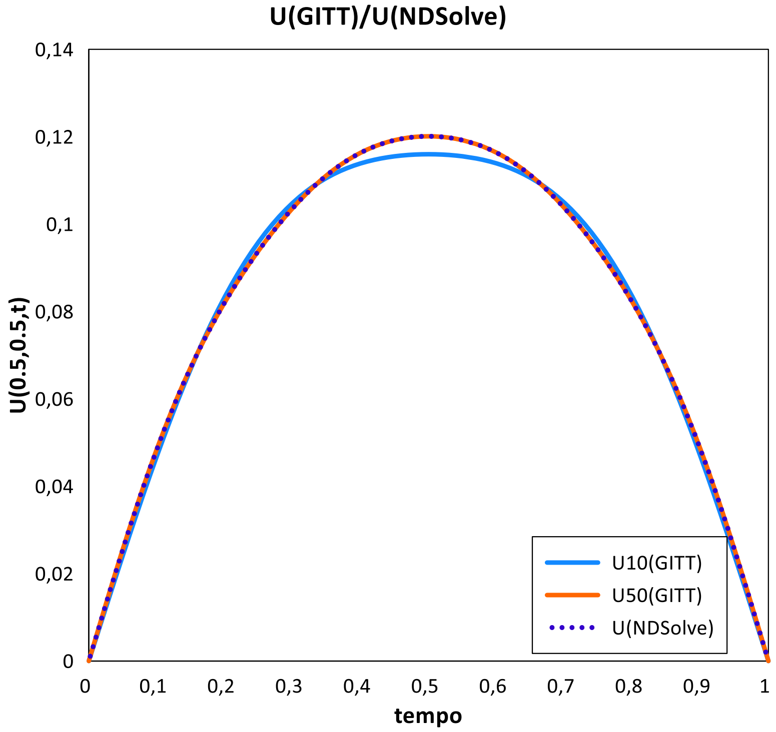


Figura 21 – Comparação GITT/NDSolve Temperatura (z)

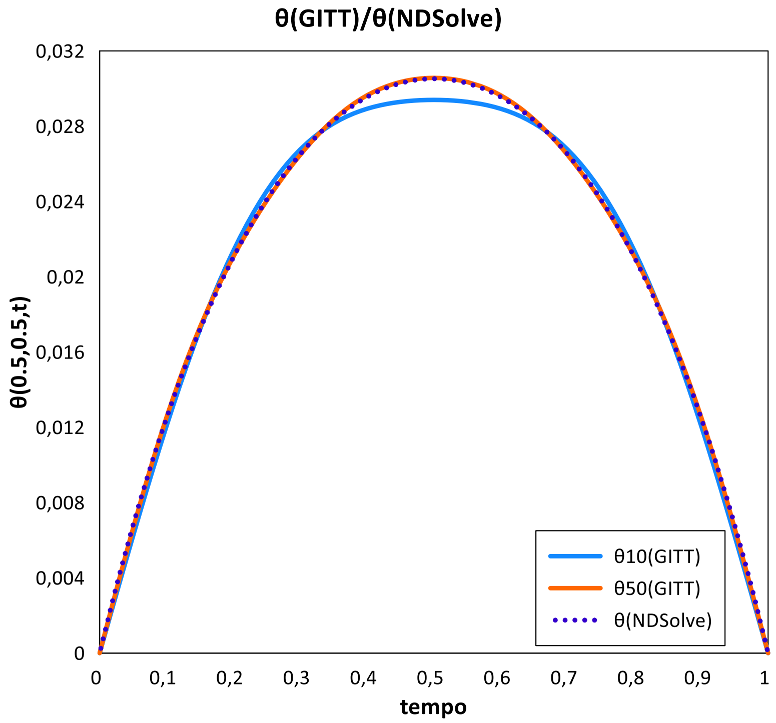
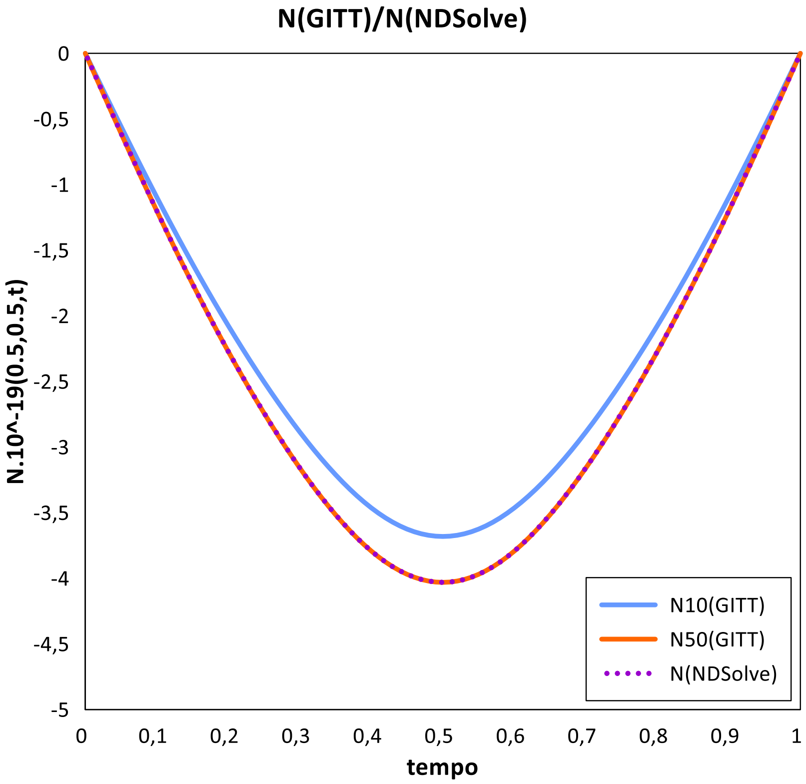


Figura 22 – Comparação GITT/NDSolve Microrrotação (z)



Do mesmo modo, nota-se a convergência da GITT com a rotina NDSolve para o caso das análises da velocidade, microrrotação e temperatura variando ao longo do eixo z do microcanal.

4.3 Análise dos parâmetros

A análise da variação dos parâmetros nos modelos físicos é de fundamental importância para entender o comportamento das principais variáveis. Nesse trabalho, um dos objetivos é estudar a influência de determinados parâmetros adimensionais na velocidade, microrrotação, temperatura, tensão na parede e Número de Nusselt. A variação desses parâmetros adimensionais tem como base para seus valores os trabalhos de Aydin e Pop (2005), Jian *et al.* (2015), Kiyasatfar *et al.* (2012), Miyagawa *et al.* (2019), Abdullah e Duwairi (2008) e Das e Saha (2009).

O número de Hartmann é definido como uma grandeza adimensional que descreve o fluxo magnético em um meio condutor sujeito a um campo magnético externo. É a razão entre a força magnética e a força viscosa de um fluido condutor.

O número de Strouhal é uma grandeza adimensional utilizada na análise de escoamentos fluidos. Descreve a relação entre a frequência das oscilações dos campos magnéticos e elétricos no escoamento EMHD e a velocidade desse fluido.

O parâmetro Ka é denominado parâmetro material de microrrotação e relaciona o vórtice de viscosidade e a viscosidade dinâmica do fluido micropolar.

O Parâmetro adimcnsional A_0 é o gradiente de pressão médio do escoamento pulsátil.

O número de Prandtl é uma grandeza adimensional que relaciona a taxa de difusão viscosa e a taxa de difusão térmica dentro do fluido, sendo a medida da eficiência das transferências de quantidade de movimento e de calor.

E_0 é o parâmetro elétrico do escoamento e está relacionado diretamente à diferença de potencial elétrico imposta no canal, sendo responsável por dimensionar, em parte, o aquecimento Joule no escoamento.

j é o parâmetro de microrrotação e é utilizado para descrever a microrrotação por quantidade de área, com o objetivo de descrever a magnitude da velocidade angular local, em relação ao escoamento principal.

O número de Eckert é um parâmetro adimensional responsável por descrever a relação entre a energia cinética do escoamento e a entalpia, sendo muito utilizado para caracterizar a dissipação viscosa do fluido.

O parâmetro fp é a frequência do pulso do escoamento pulsátil.

4.3.1 Variação do número de Hartmann

Nas figuras 23 e 24 são vistas as influências do número de Hartmann na velocidade média e temperatura média do escoamento EMHD.

Figura 23–Velocidade média Ha variando

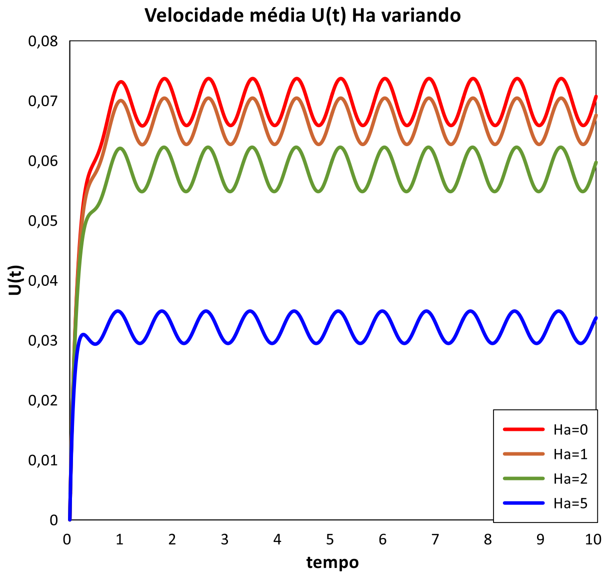
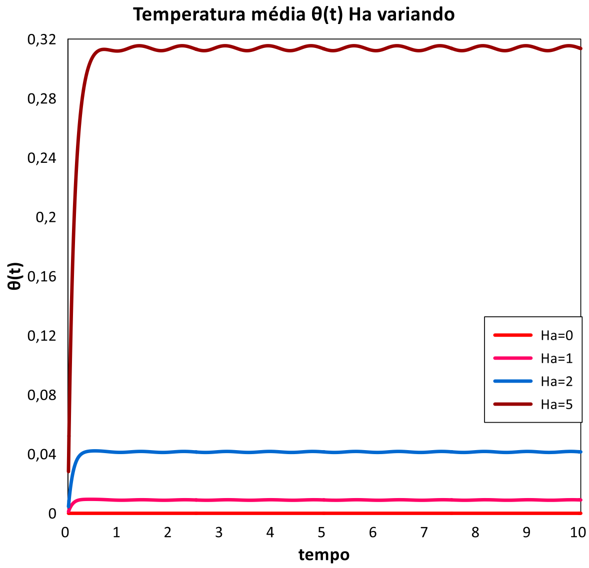


Figura 24–Temperatura média Ha variando



Os casos analisados foram justamente I, II, III e IV e demonstram que o aumento do número de Hartmann influencia negativamente na velocidade do escoamento, isso pode ser explicado pela análise vetorial do problema, em que o produto vetorial do campo magnético e do campo elétrico é influenciado negativamente com o incremento magnético, justamente pelo número de Hartmann ter uma influência negativa na equação (86). Além disso, fisicamente esse fenômeno é explicado pela alta influência do campo magnético na direção y em relação ao campo elétrico, dificultando o escoamento e diminuindo a força de Lorentz resultante.

Já para a análise térmica, o incremento gradual de Hartmann influencia positivamente na troca térmica dentro do escoamento, justamente pelo efeito Joule resultante do aumento do campo magnético concomitantemente à manutenção do campo elétrico no escoamento.

4.3.2 Variação do número de Strouhal

Abaixo (Figuras 25, 26 e 27) são mostradas as influências do número de Strouhal para o escoamento cinético e térmico utilizando os casos I (padrão), V, VI e VII.

Figura 25–Velocidade média St variando

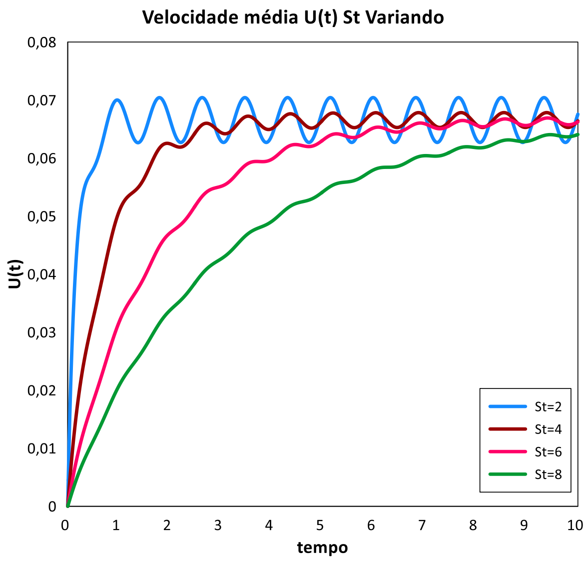
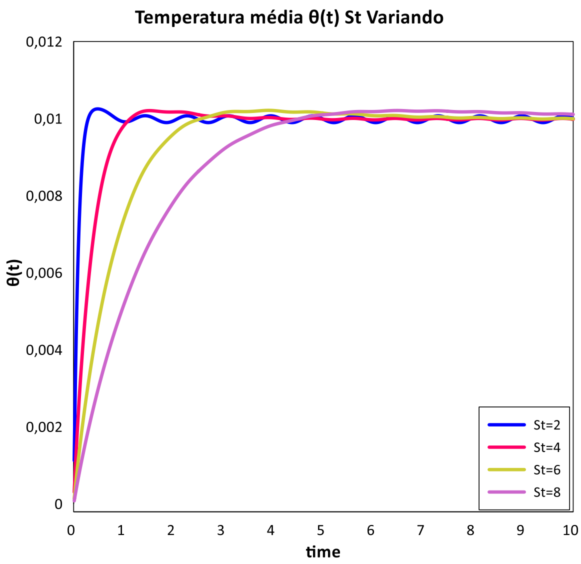


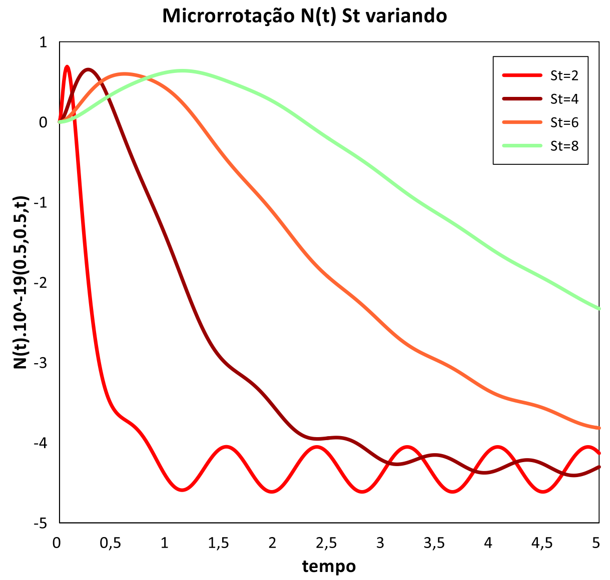
Figura 26–Temperatura média St variando



Percebe-se que para ambos os casos (Velocidade média e temperatura média) o aumento do número de Strouhal diminui a oscilação do escoamento, justamente pelo parâmetro em questão demonstrar uma diminuição de frequência entre o campo magnético e o elétrico e, consequentemente, tornar o fluxo contínuo gradativamente. Além disso, ele diminui a magnitude da velocidade do escoamento, em função do fluxo oscilatório ser menor pelo aumento do número de Strouhal, ou seja, se o fluxo oscilatório diminui, há uma diminuição também da energia adicionada ao sistema, e consequente menor velocidade.

Já para a temperatura média, o aumento do número de Strouhal também diminui a oscilação dos resultados, havendo um comportamento parecido com o da velocidade em função da semelhança do parâmetro Strauhol dentro das equações (86) e (95).

Figura 27–Microrrotação St variando

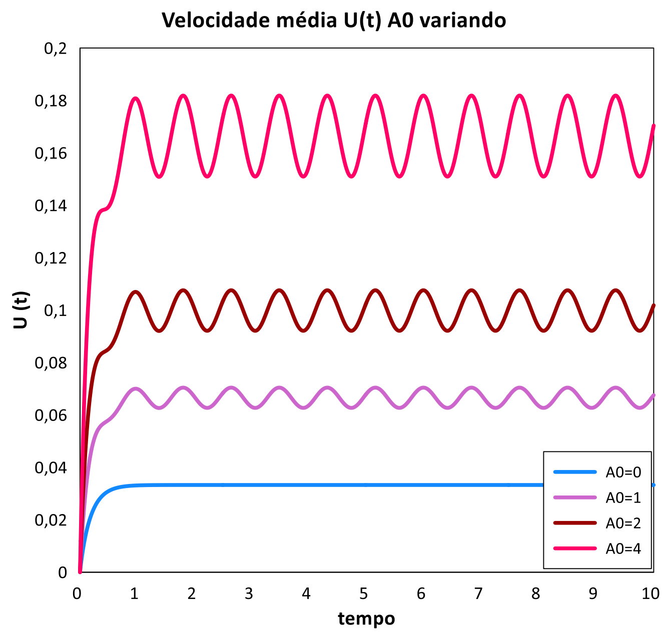


Para a microrrotação, não foi realizada uma análise média em função da variável ter efeitos pontuais no escoamento, porém o comportamento foi o mesmo da velocidade média e da temperatura média com magnitude inversa.

4.3.3 Variação do Gradiente de Pressão Médio

A figura 28 mostra os resultados obtidos com a variação de A_0 para os Casos I (padrão), VIII, IX e X.

Figura 28–Velocidade média A_0 variando

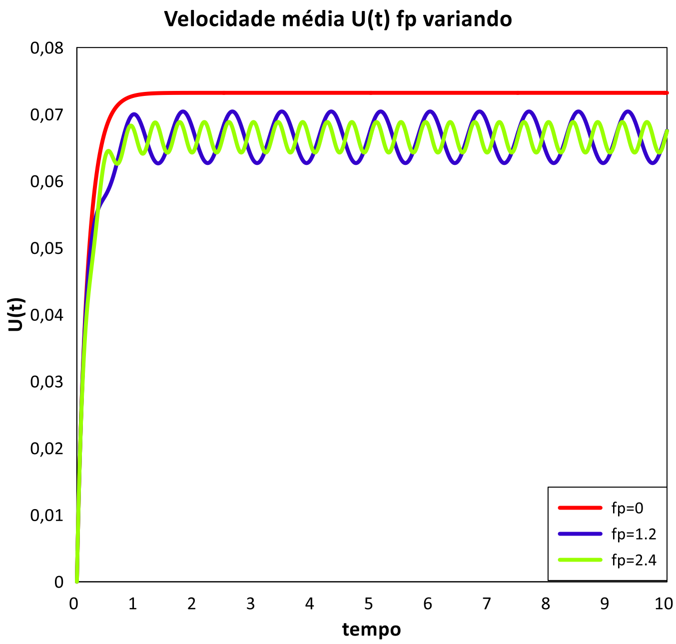


Como pode ser observado, o parâmetro A_0 está relacionado justamente ao escoamento pulsátil e os resultados demonstram o quanto esse fator influencia na variação da amplitude da onda em função da sua relação proposta por Das e Saha (2009) com o fator A_1 (A_1/A_0=0,2). Também é notado como o aumento de A_0 varia positivamente o valor da intensidade de seus resultados no escoamento de velocidade média.

4.3.4 Variação da frequência de pulso (fp)

Na figura 29 estão os resultados dos casos I (padrão), XI e XII.

Figura 29–Velocidade média fp variando

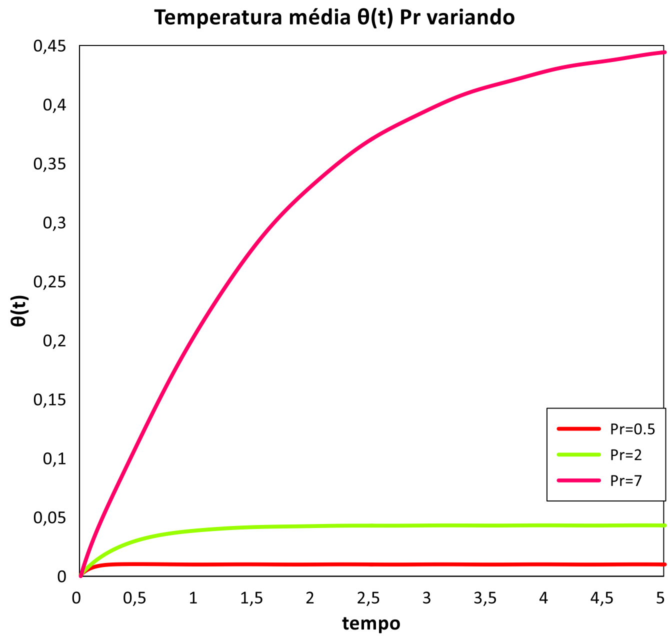


Como tal fator está relacionado diretamente à natureza da frequência pulsátil da pressão no escoamento do fluido micropolar, percebe-se que conforme há um aumento do valor de fp, a natureza da onda se torna mais variante e oscilante, justamente pelo perfil da função cossenoidal a qual a pressão pulsátil está ligada.

4.3.5 Variação do número de Prandtl

Os resultados dos casos I (padrão), XIII e XIV estão expostos na figura 30.

Figura 30–Temperatura média Pr variando

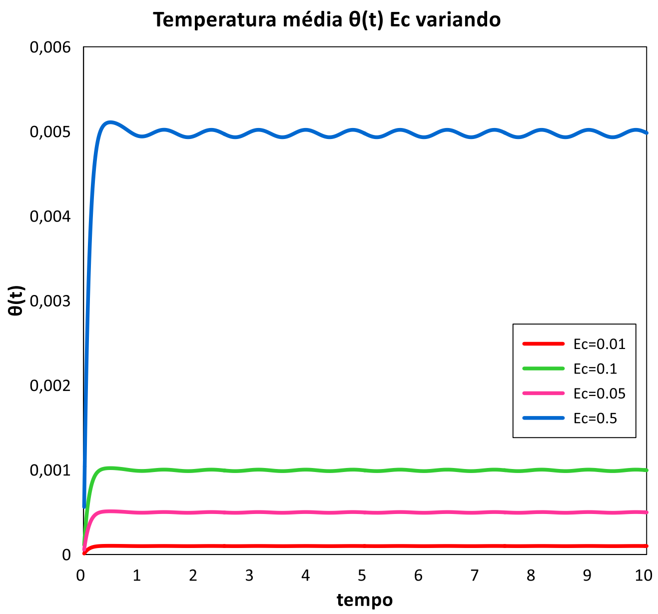


Percebe-se da figura 30 que a eficiência das forças viscosas com as forças térmicas no escoamento aumenta com a variação positiva de Prandtl. De acordo com os resultados ocorre uma variação positiva de entalpia à medida que Prandtl aumenta e consequente incremento do aquecimento do escoamento. Outra análise importante a ser feita sobre Prandtl é que o mesmo está diretamente ligado à difusividade térmica do fluido micropolar, desse modo quando Prandtl aumenta, ocorre uma diminuição da difusividade térmica e por consequência o calor se difunde de modo mais difícil, ou seja, há um aquecimento do escoamento, como pode ser visto na figura 32. É importante salientar que o valor de Pr=7 é o da literatura e representa o número de Prandtl para o escoamento sanguíneo, de acordo com Vasu *et al.* (2020).

4.3.6 Variação do número de Eckert

Os resultados dos casos XV, XVI, XVII e XVIII para a variação do número de Eckert estão na figura 31.

Figura 31–Temperatura média Ec variando

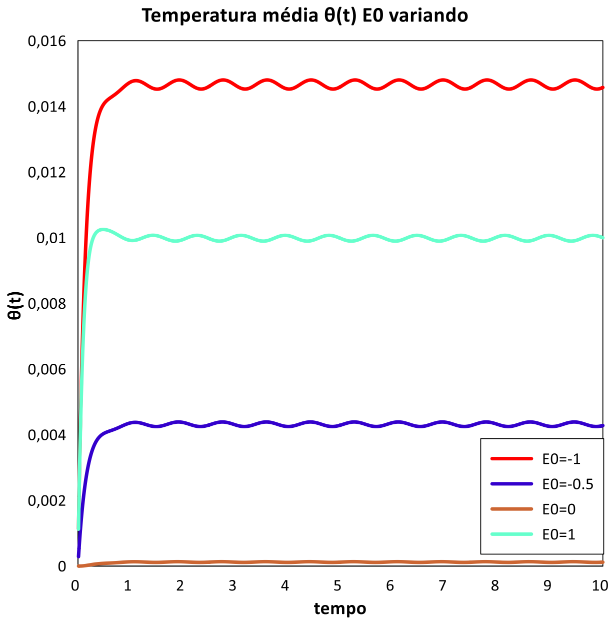


Em razão do número de Eckert medir a relação da energia cinética do fluxo e a variação da entalpia do fluido micropolar, ele foi utilizado para medir a dissipação térmica no escoamento e consequente variação de temperatura dentro do microcanal. Como pode ser observado na figura 33, o aumento de Eckert no escoamento é diretamente proporcional à taxa de dissipação térmica, elevando a variação de temperatura do escoamento.

4.3.7 Variação do parâmetro elétrico E_0

Os resultados dos casos padrão (I), XIX, XX e XXI com a diferença de potencial elétrica do campo elétrico estão expostos na figura 32.

Figura 32–Temperatura média E_0 variando



Uma análise do potencial elétrico é fundamental para entender o aquecimento Joule em função do campo elétrico do escoamento. Como pode-se notar, quando não há diferença de potencial elétrico, não há troca aquecimento no escoamento. Entretanto, independente da direção do potencial, ocorre aquecimento, principalmente quando o potencial é negativo, como se vê quando comparados os resultados de E_0=1 e E_0=-1, pois a influência do campo elétrico negativo aumenta o aquecimento, como pode ser notado analisando a equação (95).

4.3.8 Variação do parâmetro material de microrrotação Ka

Nas figuras 33 e 34 são vistos os comportamentos da variação do parâmetro material de microrrotação dos casos padrão, XXII, XXIII e XXIV para a velocidade média e para a microrrotação dentro do canal de placas paralelas.

Figura 33–Velocidade média Ka variando

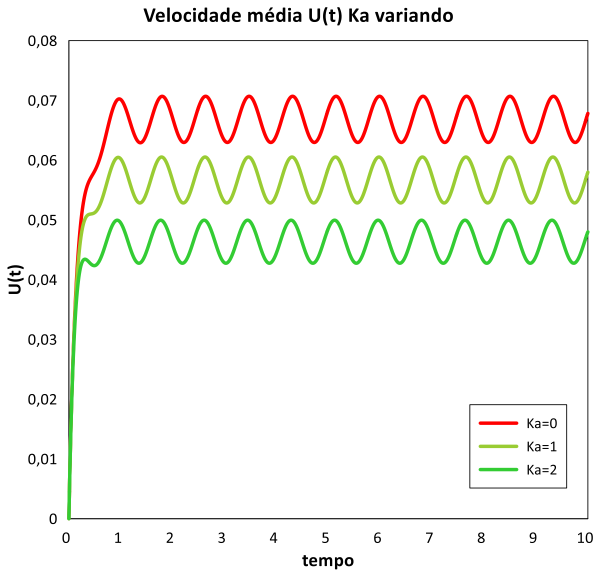
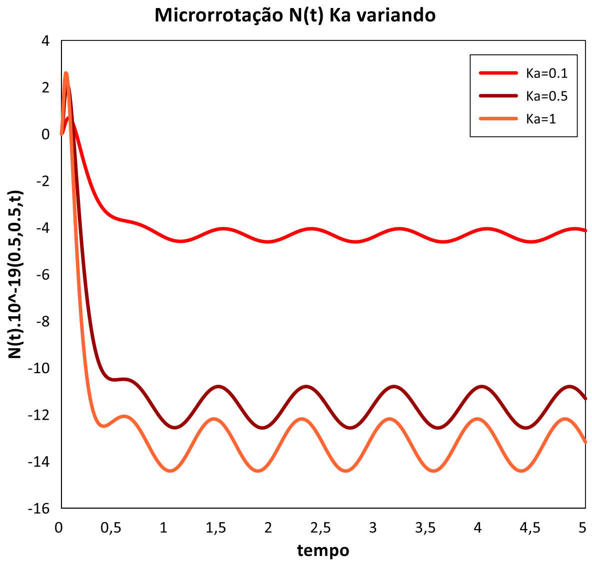


Figura 34–Microrrotação Ka variando



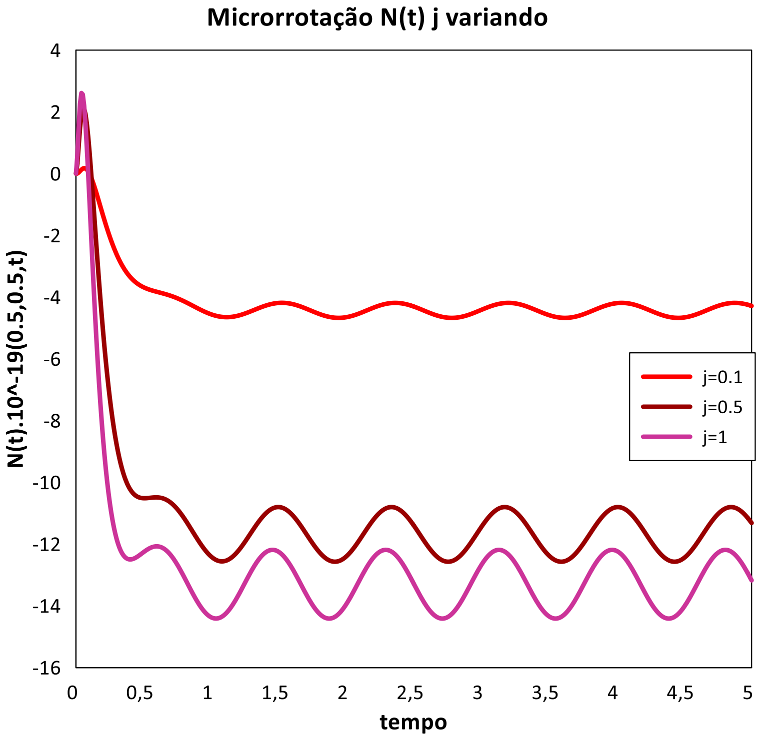
Analisando os resultados obtidos, percebe-se que a velocidade do escoamento decresce com o aumento do parâmetro de microrrotação, isso decorre em função do aumento das forças angulares de rotação diminuírem a força de velocidade de escoamento do fluido, sendo que apesar das forças microrrotacionais apresentarem magnitudes pequenas no escoamento, o termo $K\frac{\partial N}{\partial y}$ apresenta uma influência importante na velocidade, em outras palavras, é como se a microrrotação do fluido micropolar dificultasse o escoamento do fluido ao longo do canal em função do aumento da viscosidade.

Já para a microrrotação, é certo que analisando a figura 36 o aumento do parâmetro Ka, é diretamente proporcional à magnitude das forças microrrotacionais.

4.3.9 Variação da densidade de microinércia

Na figura 35 é analisada a influência da variação do parâmetro j no escoamento microrrotacional do fluido micropolar para os casos padrão, XXV e XXVI.

Figura 35–Microrrotação com j variando



A variação negativa do parâmetro j influencia positivamente a microrrotação do fluido micropolar, ou seja, quanto mais local é a análise, maior é a quantidade de efeitos microrrotacionais do escoamento. Justamente pelo fato de que o fenômeno da microrrotação é caracterizada por efeitos de vórtices locais dentro do escoamento.

4.4 Análise de Parâmetros de Engenharia

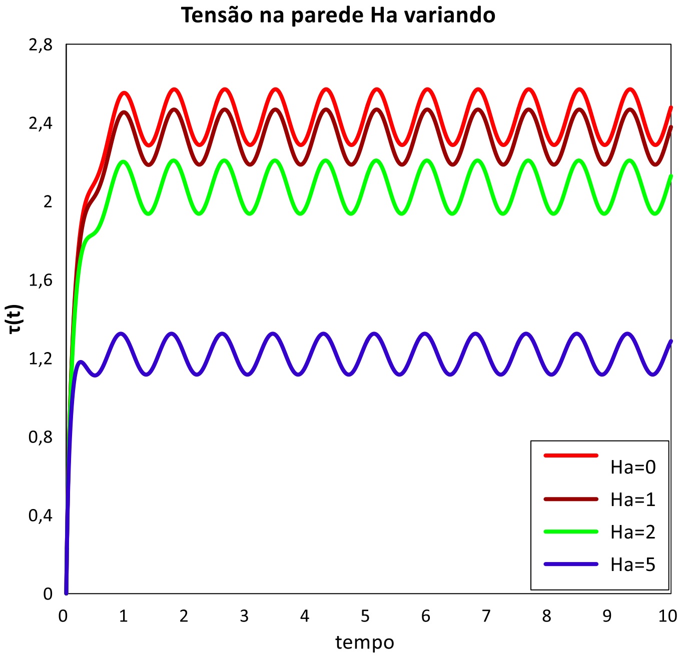
Visando uma análise mais completa do escoamento, foram analisados dois parâmetros fundamentais em escoamentos de fluidos: a tensão na parede e o número de Nusselt local.

4.4.1 Tensão na parede do escoamento

Sendo a tensão na parede um fator fundamental na modelagem e simulação de escoamento de fluidos para medir os efeitos viscosos do escoamento ao longo da superfície sólida a qual o fluido está exposto, fez-se uma análise da variação de alguns parâmetros adimensionais do escoamento (número de Hartmann, parâmetro Ka e número de Strouhal) que influenciam diretamente no atrito das paredes do escoamento.

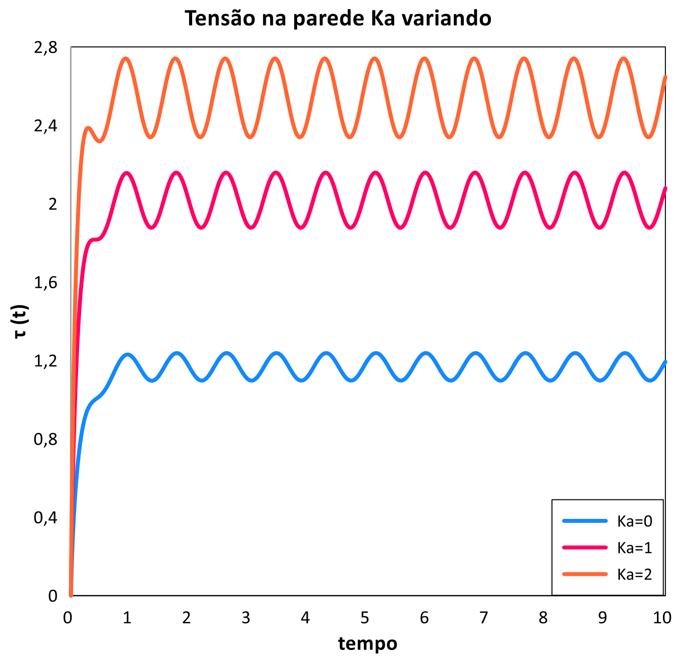
Na figura abaixo é apresentada a influência de Hartmann na τ.

Figura 36–Tensão na parede Ha variando



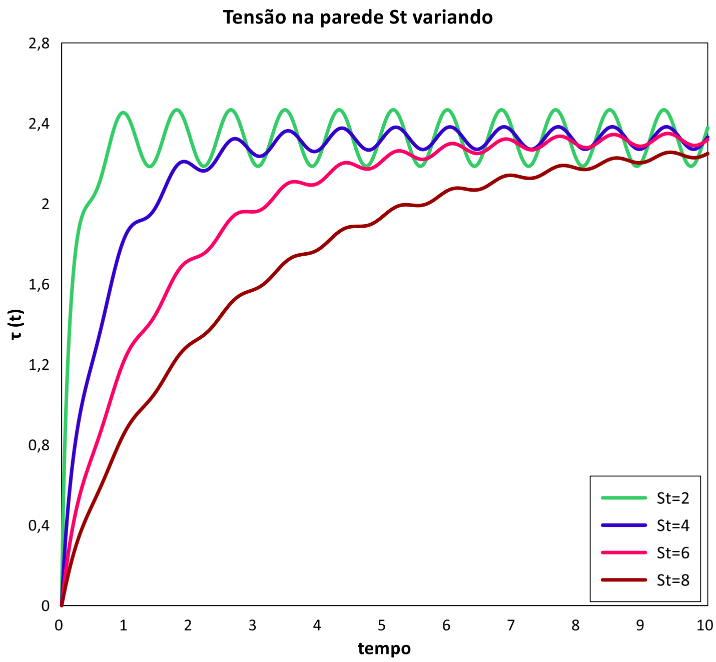
Percebe-se que a influência de Hartmann está diretamente relacionado ao aumento do campo magnético do escoamento, tal efeito é caracterizado pelo aquecimento joule no escoamento, conforme visto na figura 24, e consequente diminuição da viscosidade do fluido. Os efeitos viscosos de um fluido são diretamente proporcionais à tensão na parede, por esse motivo é notado o decrescimento de τ conforme Ha aumenta.

Figura 37–Tensão na parede Ka variando



Já para o parâmetro material Ka, o efeito é inverso ao de Ha, conforme o valor de Ka aumenta, as moléculas do fluido interagem mais com as moléculas da parede, essas interações resultam em forças de atrito maiores que retardam o movimento do fluido próximo à parede, principalmente em função das moléculas do fluido terem uma maior velocidade angular, aumentando o atrito com os sólidos. Por essa explicação, nota-se que conforme o valor de Ka cresce, os efeitos de tensão são diretamente proporcionais.

Figura 38–Tensão na parede St variando

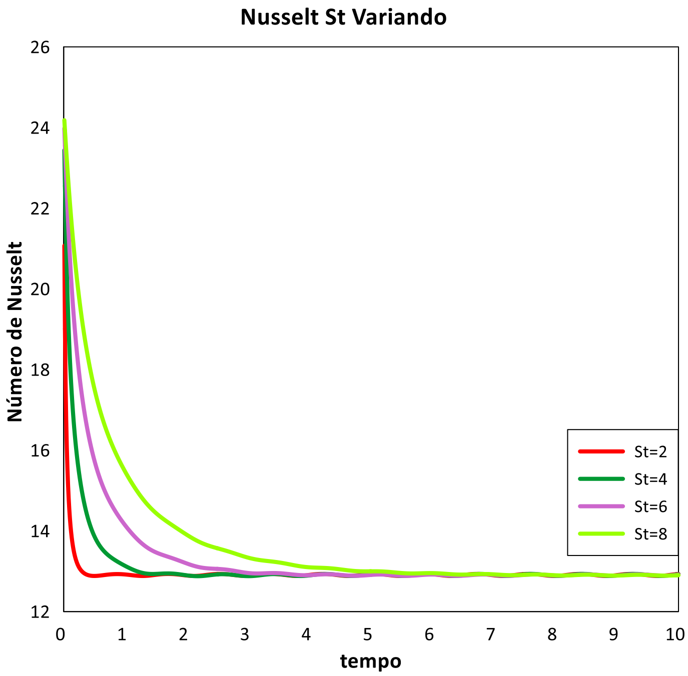


Analisando os resultados da figura 38, percebe-se que conforme o número de Strouhal aumenta, ocorre uma diminuição da frequência dos resultados e também da magnitude da tensão, fundamentada na consequente diminuição de energia adicionada ao sistema em razão do decréscimo de alternação dos pulsos magnéticos e elétricos, dessa forma diminuindo o aquecimento do escoamento e os efeitos viscosos na parede.

4.4.2 Número de Nusselt local

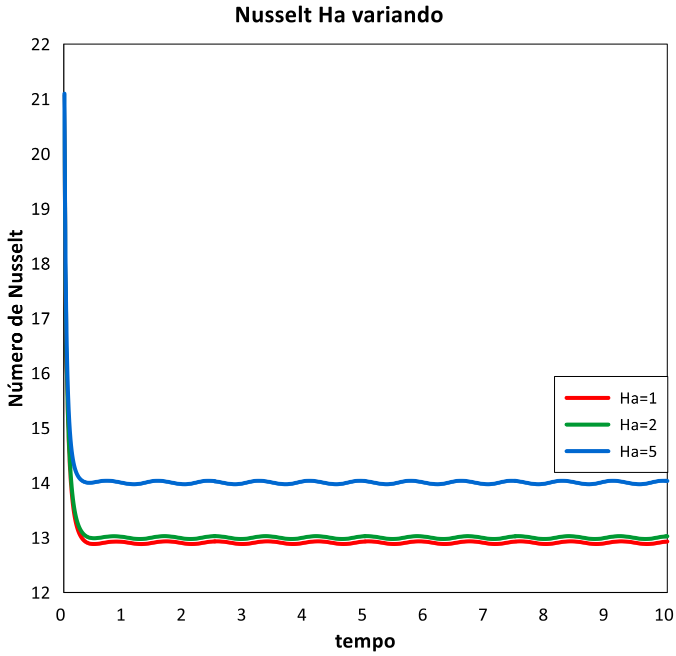
Como o número de Nusselt relaciona a taxa de transferência de calor do fluxo convectivo pelo fluxo de condução em uma determinada região da parede do escoamento, foram realizadas análises da variação dos parâmetros adimensionais Strouhal, Hartmann, Prandtl e E_0 na posição y=1 e z=0,5.

Figura 39– Número de Nusselt com St variando



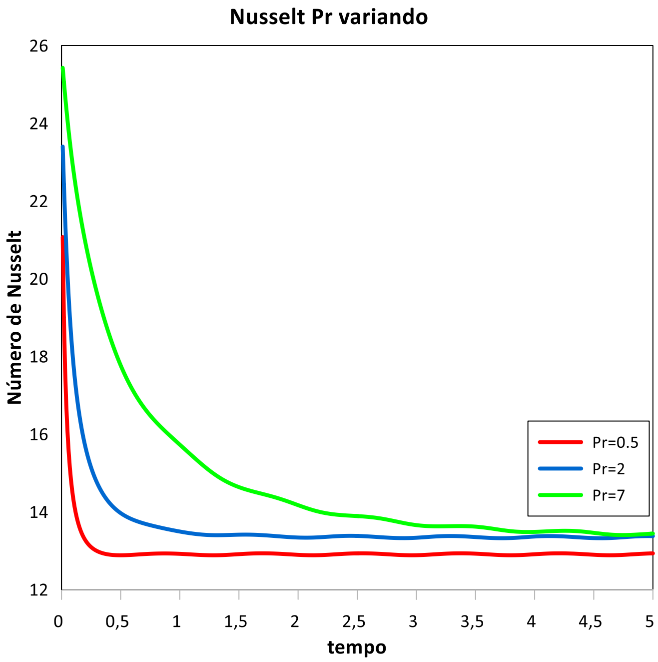
A partir dos resultados vistos acima, pode-se entender que conforme o número de Strouhal aumenta, a frequência de oscilação entre o pulso magnético e elétrico diminui, também diminuindo a velocidade do escoamento conforme visto na figura 25. A velocidade de escoamento menor significa um aumento no número de Nusselt, sendo a transferência de calor mais eficiente, com uma predominância maior do mecanismo convectivo em comparação ao condutivo, em razão do fluido conseguir absorver mais energia das paredes do microcanal quando a velocidade é menor, justamente pela superfície de contato das paredes na região de transferência de calor ficar exposta por mais tempo em contato com o fluido.

Figura 40– Número de Nusselt com Ha variando



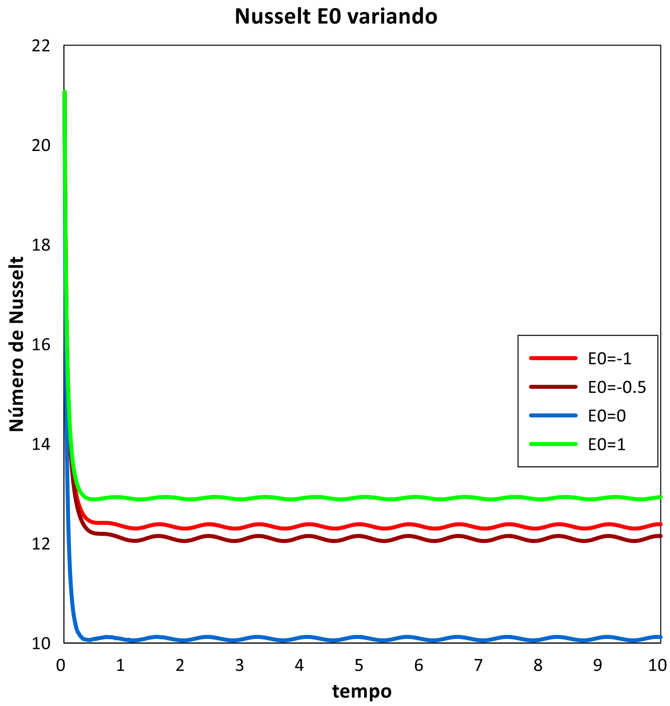
Já quando se analisa a variação do número de Hartmann, nota-se que conforme a força do campo magnético aumenta, ocorre o efeito Joule nas paredes do microcanal, favorecendo o mecanismo de troca térmica e consequente aumento do número de Nusselt no escoamento. De forma que a transferência de calor convectiva é favorecida por esse aquecimento.

Figura 41– Número de Nusselt com Pr variando



Como Nusselt está diretamente ligado à transferência de calor dentro do escoamento, uma análise da variação do número de Prandtl é fundamental para entender a transferência de troca térmica local, sendo que conforme o valor de Pr aumenta, nota-se que também o número de Nusselt varia positivamente, entendendo-se, desse modo, que a difusividade de massa se sobrepõe à difusividade térmica, ocasionando uma menor difusão térmica para as paredes do escoamento, e consequente aumento das forças convectivas da análise de Nusselt.

Figura 42– Número de Nusselt com E_0 variando



Por fim, o último fator analisado foi o parâmetro elétrico de diferença de potencial dos elétrodos no microcanal, sendo que, percebe-se uma variação positiva de Nusselt conforme há um aumento gradual do valor de E_0, explicado pelo fato do aquecimento Joule também ser maior dentro do escoamento, favorecendo a troca térmica convectiva em comparação ao aquecimento pela condução na parede do escoamento.

CAPÍTULO V

5. Conclusão

Nesse trabalho, foi analisada a convergência dos resultados, verificação numérica e análise dos parâmetros envolvidos na modelagem da velocidade, microrrotação e temperatura do escoamento eletromagnetohidrodinâmico (EMHD) dentro de um duto de seção quadrática de um fluido micropolar sujeita à ação de um campo magnético externo, sendo considerada uma diferença de pressão pulsátil na forma cossenoidal. As soluções das equações diferenciais não lineares (Navier-Stokes, Microrrotação e Energia) foram desenvolvidas a partir da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) com o código computacional formulado no software Wolfram Mathematica v. 11.3.

Pode-se concluir que as variáveis velocidade central, temperatura central, microrrotação central, velocidade média, temperatura média, tensão na parede e número de Nusselt obtiveram uma convergência satisfatória, de acordo com o erro absoluto de 10^{-3}, a partir do aumento do número da ordem de truncamento das expansões. Os cinco primeiros parâmetros citados convergiram com mais facilidade quando comparados aos dois últimos fatores, em função da tensão na parede e do número de Nusselt serem variáveis que dependem da convergência das derivadas das velocidades e das temperaturas do microcanal, por conta disso há uma demora na convergência.

Além disso, levando em consideração a falta de pesquisas envolvendo a EMHD juntamente à fluidos micropolares em escoamentos submetidos à pressão pulsátil, a verificação numérica se mostrou adequada de acordo com o caso padrão do trabalho, de modo que os valores da GITT foram condizentes com os valores obtidos a partir da rotina NDSolve no software Wolfram Mathematica v. 11.3, além disso também foi analisada a convergência numérica junto à verificação dos resultados, e desse modo, nota-se que os valores foram convergentes quanto maior foi a ordem de truncamento das séries. Dessa forma, conclui-se que a GITT se mostra uma técnica adequada para solução de problemas não lineares envolvendo microbombas EMHD.

É importante destacar que esse trabalho representa uma inovação em relação ao escoamento EMHD de fluidos micropolares em microcanais utilizando a GITT como solução das Equações não lineares propostas e a análise dos parâmetros envolvidos nos vinte e seis casos analisados demonstrou uma análise completa e detalhada do escoamento, sendo essencial entender a influência de cada um deles nas principais variáveis destacadas ao longo do trabalho.

Por fim, conclui-se que os objetivos do trabalho foram alcançados e o mesmo representa uma alternativa para solução de problemas EMHD envolvendo fluidos micropolares via GITT na literatura, possibilitando assim um avanço na pesquisa da área do eletromagnetismo com a modelagem e simulação de processos.

Algumas sugestões de futuros trabalhos envolvem a análise do escoamento em coordenadas cilíndricas, análise de nanofluidos com escoamentos EMHD, influência da velocidade axial nas direções y e z do escoamento e verificação numérica envolvendo o método das linhas.

6. Referências bibliográficas

ABDULLAH, M., & DUWAIRI, H. M. Thermal and flow analysis of two-dimensional fully developed flow in an AC magneto-hydrodynamic micropump. 14(8), 1117–1123. Microsystem Technologies. 2008.

AL-HABAHBEH, O.M. AL-SAQQA, M. SAFI, M. ABO KHATER, T. Review of magnetohydrynamic pump applications. Alexandria Engineering Journal. v. 55, p. 1347-1358, 2016.

ÁLVAREZ, E. E. V. Um Estudo das Equações de Navier-Stokes com Condições de Fronteira de Tipo Navier (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. 2019.

ALVES, L. S. B, COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D,"Covalidation of Integral Transform and Methodof Lines in Non-linear Convection-Diffusion with Mathematica.", Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 23, n. 3, pp. 303-319. 2001.

AOKI, L. P. Estudo do efeito magnetohidrodinâmico em um eletrólito a partir do uso de um dispositivo ejetor eletromagnético. Dissertação de mestrado (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

AYDIN, O. POP, I. Natural convection from a discrete heater in enclosures filled with micropolar fluid, Int. J. Eng. Sci. 43 1409–1418. 2005.

CENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações. 1. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

CHAVES, C.L. "Integral Transformation of the Momentum and Energy Equations in the Flow of Non-Newtonian Fluids in Irregular Ducts", M.Sc. Thesis (in Portuguese), Chemical Engineering Department, Universidade Federal do Pará, Belém, Brazil. 2001.

CÓRDOVA, C. M. I.. Desenvolvimento de sistemas de análises em fluxo por multicomutação para determinação de poluentes ambientais. 2008. 231 f. Tese (Doutorado em Química Analítica) - Instituto de Química, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

COTTA, R.M. AND MIKHAILOV, M.D. "Heat Conduction: - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation", John Wiley, New York, USA. 1997.

DANHONE, R. Análise de circulação induzida por MHD em fluido condutor através de velocimetria à laser. 2002. 73 p. Dissertação de mestrado (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de engenharia da universidade de São Carlos, São Paulo, 2002.

Daniel, Y. S. e Daniel, S. K., “Effects of buoyancy and thermal radiation on MHD flow over a stretching porous sheet using homotopy analysis method,” Alexandria Engineering Journal, vol. 54, pp. 705–712, 2015.

DAUM, C., ter Avest, D. Three-Dimensional Computation of Magnetic Fields and Lorentz Forces of an LHC Dipole Magnet Using the Method of Image Currents. In: Sekiguchi, T., Shimamoto, S. (eds) 11th International Conference on Magnet Technology (MT-11). Springer, Dordrecht. 1990.

DAS, K. SAHA, G.C. Arterial mhd pulsatile flow of blood under periodic body acceleration. Department of Mathematics, Kalyani Government Engineering College, Kalyani, Nadia, India. Bull. Soc. Math. Banja Luka. Vol. 16, 21-42. 2009.

DIAS, F. A. P. Modelação numérica de escoamento MHD em veículos de reentrada na atmosfera. 2016. 150 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletromecânica) - universidade da beira interior. Covilhã, Portugal, 2016.

DOHERTY, Rafael Vieira et al. Análise das Tensões do Escoamento Sanguíneo Newtoniano em Parede Vascular Utilizando Hemodinâmica Computacional. Rev. Cienc. Exatas Tecnol., [s. l.], v. 14, ed. 14, p. 9-12, 29 maio 2020.

ERINGEN, A. C., Int. J. Engineering Science, 2 205, 1964.

ERINGEN, A. C., Proc. 5th Symposium on Naval Hydrodynamics, Bergen, September 10, 1964.

ERINGEN, A. C., Proc. XI Intern. Congress of Appl. Mech. Springer-Verlag, 1965.

FRIEDMANN, M., GILLS J. E LIRON N. Laminar Flow in a Pipe at Low and Moderate Reynolds Numbers, Appl. Sci. Res v. 19, pp 426-438. 1968.

FUNG, Y.C., Biodynamics: Circulation (Springer Verlag, New York), p. 404 1984.

GHADIKOLAEI, S. S. et al. MHD boundary layer analysis for micropolar dusty fluid containing Hybrid nanoparticles (Cu Al2O3) over a porous medium. Journal of Molecular Liquids, [S. l.], n. 268, p. 813-823, 29 jul. 2018.

HAO, C.; LI, W.; YANG, Z.; ZHANG, X. Recent advances in microfluidic pumping technology: a review and outlook. Microfluidics and Nanofluidics, v. 21, n. 3, p. 45, 2017.

Hamza, M. M. Shehu, M. Z. e Tambuwal, B. H. “Steady state MHD free convection slip flow of an exothermic fluid in a convectively heated vertical channel,” Saudi Journal of Engineering and Technology, vol. 6, no. 10, pp. 364–370, 2021.

HAMZA, M. M. et al. Time-Dependent Magnetohydrodynamic (MHD) Flow of an Exothermic Arrhenius Fluid in a Vertical Channel with Convective Boundary Condition. Advances in Mathematical Physics, Sokoto, Nigeria, v. 2023, p. 1-13, 18 fev. 2023.

HENDERSON, B. D. et al. Magnetic quadrupole lens optimization in linear accelerators using a hybrid differential evolution algorithm. Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, v. 12, n. 1, 2009.

HERRERA, C. d. C. Desenvolvimento e Controle de Circuitos Microfluídicos. 2018. 147 p. Tese (Doutorado em Tecnologia Nuclear), Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN-CNEN/SP, São Paulo. Disponível em: <www.teses.usp.br> (14/05/2023).

HESSEL, Roberto et al. Lei de indução de Faraday: Uma verificação experimental. Revista Brasileira de Ensino de Física, [s. l.], v. 37, ed. 1, p. 1506-1512, 31 mar. 2015.

JACKSON, J. D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. Wiley, 1998.

Jha , B. K. Aina , B., “Effect of induced magnetic field on MHD mixed convection flow in vertical microchannel,” International Journal of Applied Mechanics and Engineering, vol. 22, pp. 567–582, 2017.

JIAN, Y. SI, D. CHANG, L. LIU, Q.. Transient rotating electromagnetohydrodynamic micropumps between two infinite microparallel plates. Chemical Engineering Science , [S. l.], n. 134, p. 12-22, 2 maio 2015.

JIAN, Y.; SI, D. Electromagnetohydrodynamic (EMHD) micropump of Jeffrey fluids through two parallel microchannels with corrugated walls. Journal of Physics D: Applied Physics, [S. l.], v. 48, p. 1-10, 15 fev. 2015.

JIANG, Z. ZHANG, Y. TAN, Y.W. STORMER, H. L. KIM, P. Quantum Hall effect in graphene. Solid State Communications, v. 143, p. 14-19, 2007.

KHAN, Foysal Z. et al. Sustaining Redox-Magnetohydrodynamics (R-MHD) Microfluidics by Switching Oppositely-Polarized Permanent Magnets: Synchronized Activation and Automation. Sensors and Actuators, University of Arkansas, Fayetteville, 6 nov. 2021.

KIYASATFAR, M., POURMAHMOUD, N., GOLZAN, M. M., & MIRZAEE, I. Thermal behavior and entropy generation rate analysis of a viscous flow in MHD micropumps. 26(6), 1949–1955. Journal of Mechanical Science and Technology. 2012.

LIM, SANGSOO; CHOI, BUMKYOO. A study on the MHD (magnetohydrodynamic) micropump with side-walled electrodes. Journal of Mechanical Science and Technology, v. 23, p. 739-749, 2009.

LIMA, J. A. Escoamento Turbulento em Canais de Placas Planas e Paralelas: Análise via Transformação Integral e Modelos Algébricos e K-L de Turbulência. Tese de D. Sc. UFPB, Agosto 2000.

LOBATO, B. estudo da magnetohidrodinâmica em dutos usando transformadas integrais. 2015. Tese de Doutorado (Doutor em Engenharia de Recursos Naturais) - Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia., Universidade Federal do Pará, 2015.

LUKASZEWICZ, Grzegorz. Micropolar Fluids: Theory and Applications. New York: Springer Science+Business Media, 1999. (Originally published by Birkhauser Boston in 1999). Softcover reprint of the hardcover 1st edition, 1999.

MACDONALD, J. W., DENNY, V. E. e MILLS, A. F. Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations in Inlet Regions, Journal of Applied Mechanics, v. 39, pp.873-878. 1972.

Magno, R.N.O."Solutions for the Boundary Layer Equations for a Non-Newtonian Fluid via Generalized Integral Transform Technique", M.Sc. Thesis (in Portuguese), Chemical Engineering Department, Universidade Federal do Pará, Belém, Brazil. 1998.

MANCHI, R; PONALAGUSAMY, R. Pulsatile Flow of EMHD Micropolar Hybrid Nanofluid in a Porous Bifurcated Artery With an Overlapping Stenosis in the Presence of Body Acceleration and Joule Heating. Brazilian Journal of Physics , [S. l.], p. 1-25, 13 fev. 2022.

MERDJ, Fátima; DRID, Said. Electromagnetic Forces Effects of MHD Micropump on the Blood Movement. Journal Européen des Systèmes Automatisés, University of Batna, Algeria, v. 55, n. 1, p. 147-153, 17 fev. 2022.

MIKHAILOV, M. D. AND OZISIK, M. N., "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley & Sons, New York, 1984.

MISRA, J. C.. Electroosmotic oscillatory flow of micropolar fluid in microchannels: application to dynamics of blood flow in microfluidic devices. Appl. Math. Mech. , England, n. 35, p. 749-766, 6 jul. 2013.

MIYAGAWA, H. K. The generalized integral transform technique of flow in two-dimensional pipelines with irregular geometry in sinusoidal form. Dissertation (Master's) - Federal University of Para. Institute of technology. Graduate program in chemical engineering, 2014.

MIYGAWA, H. K. CURCINO, I. V. PONTES, F. A. MACEDO, E. N. PONTES, P. C. QUARESMA, J. N. N. 2019. Hybrid Solution for the Analysis of MHD Micropolar Fluid Flow in a Vertical Porous Parallel-Plates Duct. Vol. 6 (SI) pp. 1107-1124. J. Appl. Comput. Mech.

NASCIMENTO, S. C. C. et al. Generalized Integral Transform Solution for Hydrodynamically Developing Non-Newtonian Flows in Circular Tubes. J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng, [S. l.], v. XXVIII, n. 1, p. 125-130, 1 mar. 2006.

NETO, A. G. DE S. B. LIRA, V. V. MOREIRA, C. DE S. Microbomba: desenvolvimento e aplicações. Revista principia. Divulgação científica e tecnológica do IFPB. n° 28. p. 156-168. João Pessoa – PB. Dezembro de 2015.

OHM, G. S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Annalen der Physik, v. 2, n. 6, p. 1-67, 1827.

PAMME, N. Microfluidics: technology for the manipulation of nanolitre volumes. Journal of Royal Society Interface, v. 3, n. 6, p. 1-20, 2006.

PASHA, Pooya et al. Application of numerical methods in micropolar fluid flow and heat transfer in permeable plates. Alexandria Engineering Journal, Faculty of Engineering, Alexandria University, Iran, v. 61, p. 2663-2672, 30 ago. 2021.

PAZ, S.P.A., MACÊDO, E.N. e QUARESMA, J.N.N. Eigenfunction Expansion Solution for Boundary – Layer Equations in Cilindrical Coordenates: Simultaneously developing Flow in Circular Tubes, Numerical Heat Transfer, parte A, v. 52. Pp 1123-1149. 2007.

PEREIRA, L. M., PEREZ GERRERO, J.S. e COTTA, R.M. Integral Transform of the Navier-Stokes Equations in Cylindrical Geometry. Computational Mechanics, v.21, pp 60-70. 1998.

PONTES, P. C. The use of the generalized integral transform technique in the simulation of the mass transfer process in membranes. Course completion paper (undergraduate). Federal University of Para. Institute of Technology. Faculty of chemical engineering, 2013.

QUARESMA, J.N.N. “Integral Transformation of the Navier-Stokes Equations in Three-Dimensional Laminar Flows”, D.Sc. Thesis (in Portuguese), Mechanical Engineering Department, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.1997.

RAHAL, F. A. DA S.. Desenvolvimento de sistemas de bombeamento microfluídicos de fluxo bidirecional: prova de conceito. 2011. Mestrado (Mestrado em Engenharia e Ciência dos Materiais) - Programa Interdisciplinar de Pós Graduação em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná., Curitiba, Paraná, 2011.

ROJA, A et al. MHD micropolar nanofluid flow through an inclined channel with entropy generation subjected to radiative heat flux, viscous dissipation and multiple slip effects. Emerald, Department of PG Studies and Research in Mathematics, Kuvempu University, Shimoga, India, p. 1-22, 5 mar. 2020. DOI 10.1108/MMMS-12-2019-0235. Disponível em: https://www.emerald.com/insight/1573-6105.htm. Acesso em: 24 maio 2023.

SEO, J.-H.; PATIL, M.S.; PANCHAL, S.; LEE, M.-Y. Numerical Investigations on Magnetohydrodynamic Pump Based Microchannel Cooling System for Heat Dissipating Element. Symmetry 12, 1713. 2020.

SHEN, F.; XIE, Y.; LI, X. Microfluidic chip-based technologies: applications in drug discovery, personalized medicine, and complex disease modeling. Chemical & Pharmaceutical Bulletin, v. 64, n. 2, p. 115-121, 2016.

SHERCLIFF, J. A. (1965). Magnetohydrodynamics. Warwick University, England.

SHREEN EL-SAPA; Cell models for micropolar fluid past a porous micropolar fluid sphere with stress jump condition. *Physics of Fluids* 1 August; 34 (8): 082014. 2022.

SILVA, C. A. M., COTTA, R. M. e QUARESMA, J. N. N., (2009). Integral Transform Solution of the Navier – Stokes Equations in Full Cylindrical Regions with Streamfunction Formulation. Communications in Numerical Methods in Engineering. Published online in Wiley InterScience.

SILVA, R. L., QUARESMA, J.N.N. e SANTOS C.A.C. (2004). Hybrid Solution for Flow Development in Irregular Ducts. 10 th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT, Rio de Janeiro, Brasil.

SONG, H.; CHEN, D.L.; ISMAGILOV, R.F. Reactions in droplets in microfluidic channels. Angewandte Chemie International Edition, v. 56, n. 31, p. 8882-8899, 2017.

SQUIRES, T.M.; QUAKE, S.R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. Reviews of Modern Physics, v. 77, n. 3, p. 977-1026, 2005.

SUN, X.; BAKHTIARI, K.; CHENG, J.-X. Applications of microfluidics and microscopy for single molecule analysis. Annual Review of Analytical Chemistry, v. 6, n. 1, p. 399-424, 2013.

VOGEL, W. M., & PATTERSON, A. M., An Experimental Investigation of the Effect of Additives Injected into the Boundary Layer of an Underwater Body, Pacific Naval Lab. of the Defense Res. Board of Canada, Rpt, 64-2. 1964.

WANG, Y. L. e LONGWELL, P. A. (1964). Laminar Flow in the Inlet Section of Parallel Plates. A.I.Ch.E. J, vol. 10, no 3, pp. 323-329.

WHITESIDES, G. M.; STROOCK, A. D. Flexible Methods for Microfluidics. Physics Today, American Institute of Physic, p. 42-48, 2001.

WOLFRAM, S. MATHEMATICA – a system for doing mathematics by computer, in: The Advanced Book Program. Addison Wesley, Reading, MA, 2005

ZHENG, B.; TAO, G.; ZHANG, H.; HAN, Y.; ZHANG, J. Microfluidic approaches for probing chemistry and reactions. Accounts of Chemical Research, v. 43, n. 5, p. 651-661, 2010.