Universidade Federal do Pará
Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática

Geometria Fractal

Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática

Hamilton Cunha de Carvalho

Hamilton Cunha de Carvalho

Geometria Fractal:

Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática

Dissertação apresentada ao Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC-UFPa) como pré-requisito à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática e orientada pelo Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo.

Belém-Pa
Junho de 2005

Assinatura (Orientador): ____

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

À minha mãe Raimunda, minha
esposa Joelma e minha filha
Carolina...

Agradeço aos meus professores pelas valiosas orientações dadas e aos meus colegas de curso que me ensinaram a me tornar capaz até nos momentos em que eu mesmo não achava que poderia ser...

RESUMO

A Geometria Fractal é um ramo novo da Matemática que vem sendo estudado desde sua descoberta nos anos sessenta por Benoit Mandelbrot. Por se tratar de uma geometria essencialmente intuitiva, muito se tem comentado a respeito da possibilidade de sua introdução ainda no Ensino Fundamental e Médio de nossas escolas. Assim, um grande número de atividades envolvendo Geometria Fractal foram e ainda estão sendo desenvolvidas com o intuito de tornar o conteúdo da Matemática curricular mais significativo ao aluno. Entretanto, muitas carecem de um estudo mais aprofundado no que tange ao seu verdadeiro grau de eficácia. Para tentar vislumbrar até que ponto estas atividades podem se caracterizar como um recurso didático válido, elaboramos e ministramos um curso sobre Geometria Fractal para onze alunos do 3° ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual na cidade de Santarém-Pa. O curso consistia de uma parte teórica sobre o assunto e algumas atividades selecionadas de tal forma que estas pudessem abranger alguns tópicos da Matemática curricular já visto por eles em suas trajetórias escolares. Aplicamos antes do curso um pré-teste e no final um pós-teste para avaliar a compreensão dos assuntos abordados. Os resultados obtidos mostram uma evolução tanto quantitativa, quanto qualitativa na (re)apropriação dos conceitos matemáticos trabalhados durante o curso. O estudo ainda sugere que a Geometria Fractal pôde proporcionar aos alunos uma relação mais forte entre os saberes do cotidiano e o escolar, além de ter proporcionado uma visão dinâmica da Matemática como uma ciência que avança, e não como um corpo de conhecimentos prontos e acabados.

SUMÁRIO

Introdução

‘Tenho certeza de que não vão gostar”, observou Pensamento Profundo.
“Conte-nos!”
“Pois bem”, disse Pensamento Profundo. “A resposta à Grande Questão...”
“Sim...!”
“Da Vida, do Universo e de Tudo...”, disse Pensamento Profundo.
“Sim...!”
‘É...”, disse Pensamento Profundo, e fez uma pausa.
“Sim...!”
“É...”
“Sim...!!! ...?”
“Quarenta e dois”, disse Pensamento Profundo, com majestade e calma infinitas.
Douglas Adams, O Guia do Mochileiro das Galáxias

Em nosso percurso como professor de Matemática na rede pública de ensino, muitas vezes nos deparamos com situações em sala de aula que nos fizeram refletir sobre a nossa prática docente. Nesses anos de trabalho, sempre nos incomodou o fato da Matemática ser tida pela maioria dos alunos como difícil de ser aprendida, chata e sem significado real na vida dos estudantes. Além dos inúmeros depoimentos que nos levaram às constatações anteriormente mencionadas, a grande quantidade de notas baixas nessa disciplina comprova o baixo rendimento/aproveitamento das nossas aulas por parte dos alunos.

Este quadro não muito animador acaba corroborando para engrossar as já bastante conhecidas estatísticas de reprovação, de evasão escolar e interferindo no próprio futuro dessas pessoas que não conseguirão utilizar a Matemática como um instrumento importante em suas vidas como cidadãos.

Essa inquietação nos levou a procurar meios/mecanismos que pudessem ajudar a mudar tais fatos. Ao estudar a bibliografia sobre Geometria Fractal, chamou-nos atenção o fato deste novo ramo dentro da Matemática parecer estar “antenado” com os novos horizontes da ciência atual e, principalmente, com novas propostas de atividades no ensino-aprendizagem da Matemática.

A estas novas propostas está veiculado o princípio de partir do intuitivo (formas, coisas, objetos ou situações do conhecimento dos alunos) para o formal (aquilo que é um dos principais objetivos do processo de ensino, ou seja, o conhecimento sistematizado), além de contar com a possibilidade da utilização das novas tecnologias e da visualização como forma de tornar a Matemática mais concreta/palpável ao aluno.

Na tentativa de elucidar um questionamento, podemos nos deparar com novas perguntas que desembocam em novos caminhos a serem trilhados. O raio de ação destas novas perguntas apreende, em maior ou menor grau, o nosso objeto principal e ajudam a compreender melhor cada uma de suas particularidades. Nesta investigação, para compor o arcabouço que delineia nosso foco principal de análise, partimos de alguns questionamentos que ajudaram a nortear nossos esforços:

- *A Matemática é realmente difícil de aprender?*

- *É possível tornar a Matemática mais fácil de ser aprendida?*

- *Até que ponto a contextualização propicia um melhor aprendizado de Matemática?*

-*A Geometria Fractal pode ajudar no processo de ensino-aprendizagem de Matemática?*

- *Quais as vantagens de se trabalhar com Geometria Fractal para que ocorra o aprendizado de Matemática?*

- *Em quais situações as atividades com Geometria Fractal realmente facilitam o aprendizado de Matemática?*

- *Que pontos são favoráveis à aplicação de atividades com Geometria Fractal para o aprendizado de Matemática?*

Estes questionamentos foram dando corpo à formulação de uma pergunta que direcionasse nosso trabalho. Para Araújo & Borba (2004), o processo de formulação de uma pergunta diretriz que direciona um trabalho de pesquisa constitui-se num "longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos" (p.27) que culminam em um questionamento que perpassa por todos os outros já realizados. Fomos levados, então, a elaborar uma pergunta geradora que pudesse jogar um pouco de luz sobre as interrogações anteriores:

Ao trabalhar com atividades de Geometria Fractal, quais são os fatores que influenciam no aprendizado de alguns tópicos da Matemática curricular em alunos do 3° ano do Ensino Médio?

Para tentar apreender estas questões, oferecemos um curso sobre Geometria Fractal para alunos do 3° ano do Ensino Médio da escola estadual Plácido de Castro, na cidade de Santarém-Pa. Dentre os fatores que foram decisivos na seleção das atividades relacionadas para este curso, destacam-se: a integração entre a Geometria Fractal e o conteúdo da Matemática curricular do Ensino Médio; e a possibilidade de proporcionar uma aprendizagem baseada na descoberta. As atividades em questão, mesmo retiradas da literatura existente sobre o assunto, sofreram algumas adaptações para que fossem direcionadas ao trabalho que queríamos desenvolver. Contudo, foi tomado todo o cuidado para não descaracterizá-las e, assim, preservar a idéia central de seus criadores. Todas podem ser encontradas nos apêndices que estão no final da obra.

Mas antes de passarmos a falar destas questões, é preciso deixar claro que este trabalho em nenhum momento teve como pretensão rediscutir as teorias matemáticas subjacentes à Geometria Fractal. Sabemos que este é um campo novo de estudos e cuja epistemologia carece de uma fundamentação teórica mais encorpada que respalde o seu uso. Porém, isso não se constituiu em qualquer espécie de empecilho, uma vez que nosso intuito foi utilizar parte dos trabalhos já existentes para o ensino da Matemática e, a partir deles, fomentar nossas discussões sobre o ensino e o aprendizado de alguns tópicos da Matemática curricular do Ensino Médio.

Para avaliar como as atividades puderam proporcionar a aprendizagem ou não desses tópicos, aplicamos duas avaliações idênticas; uma no começo do curso (pré-teste) e outra ao término (pós-teste).

Adotamos para o termo aprendizagem uma abordagem construtivista inspirada na definição dada por Coll *et al* (1999). Desse modo, referimo-nos à aprendizagem “dizendo que se trata de uma mudança de comportamento” (p.19). Coll et al (1999) destaca ainda que o comportamento pode ter um sentido bem amplo, porém, em nosso estudo, restringimos sua abrangência para o acerto ou não das questões propostas no pré e no pós-teste. Consideramos como aprendido, os conceitos que foram apresentados corretamente na resolução das questões do pós-teste que não o haviam sido no pré-teste.

Assim, em conseqüência disso, o termo (re)aprendizagem foi trabalhado por nós como a reaquisição de um conceito que sabemos já ter sido visto pelos alunos durante sua trajetória escolar, pois tivemos acesso aos conteúdos trabalhados por eles no Ensino Médio. Se um aluno apresentou dificuldades no conceito de área de um quadrado no pré-teste, por exemplo, e no pós-teste conseguiu se utilizar dele corretamente para resolver uma questão, este tipo de mudança de comportamento foi considerado como conceito (re)aprendido, uma vez que tal tópico foi trabalhado por ele no ensino regular.

Deparamo-nos com vários tipos de dificuldades para a implantação deste curso. A primeira delas foi de ordem física, pois o espaço que dispúnhamos não atendia todos os requisitos necessários para o tipo de trabalho que pretendíamos realizar. Muito do desenvolvimento da Geometria Fractal se deve aos avanços da computação e para trabalhar dentro desta área, é primordial o uso de computadores. Como a escola não possui laboratório de informática, tivemos que, em um dos cinco dias de curso, deslocar os alunos para uma sala aparelhada fora da escola (NTE - Núcleo Tecnológico Educacional) e desenvolver lá a parte destinada ao uso dos computadores.

Essas e outras dificuldades em momento algum nos desanimaram a prosseguir em nossa pesquisa. Em vários momentos, na escola, surgem obstáculos que podem ser determinantes na trajetória de qualquer educador. Não é de nossa índole deixar de realizar certas ações educativas quando nos deparamos com algum tipo de empecilho que pode ser contornado, pois vemos na educação o mecanismo transformador da sociedade. Pode soar meio utópico, mas certamente veremos que não. E mesmo que assim o fosse, parafraseando Ubiratan D'Ambrosio: "como ser educador sem uma utopia?".

Tentamos passar uma visão holística da Geometria Fractal e da própria Matemática no sentido de mostrar que o conhecimento é, acima de tudo, uma atividade humana e, como tal, é influenciada pelos aspectos culturais e pelas necessidades de cada sociedade. Com isso, tivemos a oportunidade de refletir sobre a interdependência das disciplinas utilizando a Geometria Fractal como o fio condutor das discussões. Portanto, na visão adotada, esses conhecimentos não se justapõem uns sobre os outros e, sim, se interligam como os fios de uma rede.

Mesmo enfatizando esta linha descompartimentalizadora, na exposição deste trabalho optamos por organizá-lo em quatro capítulos, mas que em seu todo apontam para uma abordagem holística, minimizando o tratamento disciplinar. No primeiro, expomos como foi realizada a pesquisa, a metodologia empregada e a forma de obtenção dos dados. No segundo, traçamos um perfil epistemológico da Geometria Fractal, dando ênfase aos aspectos históricos, à definição de fractal e às suas aplicações. Reservamos ao terceiro capítulo a análise dos testes e descrição dos dias do curso. Encerramos, no quarto capítulo, com um aporte teórico da Educação Matemática para subsidiar nossas inferências e tecermos nossas considerações finais.

No decorrer deste trabalho, também é nosso interesse mostrar os estudos e a aplicação da Geometria Fractal, o modo como foi realizado o curso, expondo as situações vivenciadas por nós e pelos alunos e a visão deles diante da Matemática em contraste com as principais tendências na área da Educação Matemática.

Finalmente, abordamos os aspectos da Geometria Fractal que parecem influenciar no aprendizado de alguns tópicos de Matemática através – principalmente, mas não exclusivamente – do enfoque baseado na metodologia referente à resolução de problemas.

Para preservar a identidade e por questões éticas, optamos por dar nomes fictícios aos alunos. Todos os anexos e apêndices podem ser consultados no final do trabalho. Para uma melhor compreensão, recomenda-se observá-los assim que citados durante o corpo do texto.

Capítulo 1
Pesquisa Qualitativa: Planejamento, Métodos e Execução

> É uma experiência como nenhuma outra que eu possa descrever; (...) compreender que alguma coisa que ocorreu na mente corresponde exatamente a alguma coisa que acontece na natureza. É surpreendente, todas as vezes que ocorre. Ficamos espantados com o fato de que em construto de nossa própria mente possa realmente materializar-se no mundo real que existe lá fora. Um grande choque, e uma alegria muito grande.
>
> *Leo Kadanoff*

Na sua incansável busca pelo saber, o homem procura conhecer os fenômenos a sua volta para interar-se das situações do meio, entender seus mecanismos de funcionamento e internalizá-los de forma lógica para sua compreensão. E é através da pesquisa que o conhecimento científico tenta compreender a realidade em que vivemos e fornecer explicações plausíveis para os fatos.

Para Minayo (1996), a pesquisa “é a atividade básica da Ciência na sua indagação e construção da realidade” (p.17). Portanto, a pesquisa constitui-se num momento crucial para a consolidação do conhecimento, visto que funciona como uma espécie de motor que impulsiona a aquisição das informações necessárias à formulação de novas teorias e/ou comprovação, sob um novo ângulo, das já existentes.

Existem dois tipos de abordagem em uma pesquisa: quantitativa e qualitativa. Na primeira, o foco central das inferências está situado somente nos dados brutos reduzindo a realidade em conclusões quantificáveis, ou seja, em termos analíticos; na segunda, além dos dados brutos, as inferências podem ser feitas através das impressões, das falas, dos acontecimentos e de outros fatores não identificáveis analiticamente, pois, para ela, os comportamentos dos sujeitos são extremamente influenciados pelo contexto em que se situam. Centraremos nossa atenção para os aspectos que envolvem a pesquisa qualitativa.

1.1) METODOLOGIA DA PESQUISA QUALITATIVA.

A *pesquisa qualitativa* em Educação não exclui os dados numéricos. Estes ajudam a reforçar as conclusões tiradas mediante outros dados coletados na realidade estudada como, por exemplo, depoimentos, transcrições de falas, descrições e o conteúdo de documentos que subsidiam a análise do fenômeno.

Nessa perspectiva, o ambiente natural constitui-se na principal fonte de coleta de dados. É nele que o trabalho de pesquisa estará inserido, na tentativa de captar a visão dos participantes sobre a realidade da qual fazem parte, sem a necessidade da criação de ambientes artificialmente controlados.

É notório que diante destas prerrogativas é essencial o contato direto e prolongado do pesquisador com o objeto estudado para presenciar o maior número de situações possíveis da manifestação dos fenômenos a serem analisados. Assim, é possível vivenciar o dinamismo interno das situações provenientes do ambiente e mergulhar em toda a sua teia de complexidade. Com isso, é o pesquisador que passa a ser o principal agente na construção de uma pesquisa qualitativa (LÜDKE & ANDRÉ, 2003). Sua imersão no meio estudado, seu contato direto com o contexto e a permanência onde a situação está sendo investigada passam a ser as características fundamentais neste tipo de pesquisa.

O *estudo de caso* é uma das formas sob a qual a pesquisa qualitativa pode se desenvolver. Consiste no recorte de um caso inserido em uma realidade maior, ou seja, o destaque "de uma unidade, mesmo que singular, mas que possui valor em si mesmo, dentro de um contexto mais amplo" (BARALDI, 1999, p.18). O objeto de estudo está inserido dentro do caso analisado que não pode ser totalmente desvinculado da realidade. Assume-se o risco das inferências não contemplarem toda a complexidade do fenômeno, mas, por outro lado, existe um maior direcionamento dos esforços em apreender suas particularidades.

Mesmo diante destas limitações, o estudo de caso tende a revelar novas descobertas no sentido de trazer à tona elementos relevantes à pesquisa, pois se fundamenta no pressuposto de que o conhecimento é algo inacabado, que se constrói e reconstrói constantemente. Isso só é possível se o pesquisador mantiver um posicionamento de busca constante de novas perguntas e de novas respostas no desenvolvimento do seu trabalho.

Para que a pesquisa proporcione diferentes visões sobre o objeto de estudo, Araújo & Borba (2004) chamam a atenção para a utilização da multiplicidade de procedimentos na coleta dos dados. Segundo estes autores, para a construção das conclusões, é necessário fazer a *triangulação* do conteúdo desses procedimentos, isto é, o confronto entre as informações obtidas. Dentre os procedimentos mais comuns na coleta de dados em um estudo de caso, podemos citar a observação, a aplicação de questionários e a análise documental.

A *observação* proporciona o contato direto e contínuo com os sujeitos da pesquisa. As observações contam com a vantagem de poder captar uma variedade de situações que, dificilmente, seriam perceptíveis por métodos mais diretos que, segundo Neto (1996), "transmitem o que há de mais imponderável e evasivo na vida real" (p.60). O observador, como principal instrumento da investigação, fica imerso no espaço de análise e, *in loco*, retira os elementos que considera importantes para a construção de suas hipóteses, para identificação de padrões ou para elaboração de categorias. Segundo Moroz & Gianfaldoni (2002):

> A observação é uma atividade que ocorre diariamente; no entanto, para que possa ser considerada um instrumento metodológico, é necessário que seja planejada, registrada adequadamente e submetida a controles de precisão. (p.65)

A falta de planejamento em uma observação pode fazer o pesquisador levar a registro fatos ou acontecimentos irrelevantes e/ou deixar de notar algum aspecto potencialmente importante. É com o planejamento que "se tem claro o que deve ser observado" (p.65). Levando em consideração o segundo ponto levantado pelas autoras, vemos que nenhuma atividade de observação estará completa se não for devidamente registrada e, de preferência, no exato momento em que acontece, dada a já reconhecida falibilidade da mente humana em gravar todos os fatos ocorridos. Mesmo registradas, é preciso que se verifique a verossimilhança dos dados a fim de que se evitem discrepâncias em sua análise.

Na *observação participante*, todos os indivíduos do grupo sabem a identidade e finalidade do trabalho do observador. Se, por um lado, há os que criticam este tipo de observação pelo fato de uma possível alteração da realidade pesquisada, por outro, há a vantagem de estar dentro dos padrões éticos de conduta. Sobre esses aspectos, Lüdke & André (2003), apoiadas em E. G. Guba e Y. S. Lincoln[1], afirmam que as modificações do ambiente pesquisado devido à presença do observador são mais sutis do que se possa imaginar. Colocam que, dependendo do grau de participação do observador, as alterações ocorridas, geralmente, não influenciam o resultado final da análise, pois "os ambientes sociais são relativamente estáveis, de modo que a presença de um observador dificilmente causará as mudanças que os pesquisadores procuram tanto evitar" (p.27), além, é claro, de relatarem a conveniência de não tentar se passar por aquilo que não se é na verdade.

Com relação ao teor do conteúdo observado, as autoras ainda apontam elementos que se configuram como parte essencial das anotações feitas pelo observador. Para elas, torna-se importante a descrição tanto dos sujeitos, destacando suas características físicas e comportamentais mais relevantes, quanto dos locais pesquisados, dando ênfase às condições e aos aspectos físicos do ambiente. As atividades promovidas dentro do estudo caso também devem ser relatadas, sendo que, para estas, os aspectos relevantes passam a ser os comportamentos apresentados pelos sujeitos, a seqüência em que as atividades foram desenvolvidas e como se deu o envolvimento dos participantes. A própria conduta do

[1] GUBA, E. G. and LINCOLN, Y. S. *Effective Evaluation*. San Francisco, Ca., Jossey-Bass, 1981.

pesquisador também é digna de registro, onde as ações, conversas e reconstrução dos diálogos com os participantes podem se revelar importantes à análise do caso.

Outra forma de coleta de dados comumente usado em estudos de casos é a aplicação do *questionário*. Para Moroz & Gianfaldoni (2002) um questionário "é um instrumento de coleta de dados com questões a serem respondidas por escrito sem a intervenção direta do pesquisador" (p.66). Diante disso, diferentemente da observação, o questionário pode minimizar uma possível interferência do pesquisador, já que privilegia a obtenção de informações sem o contato pessoal direto com os sujeitos. Conta com a vantagem de poder ser aplicado a um grande número de pessoas no mesmo instante e, por isso, é recomendável quando a disponibilidade de tempo dos pesquisados não é grande.

As questões a serem respondidas devem evidenciar os aspectos relevantes do objeto de estudo pesquisado. Portanto, as perguntas devem ser elaboradas com o intuito de tentar revelar as facetas do fenômeno. Existe sempre a possibilidade de se extrapolar os limites impostos pelo direcionamento das perguntas e, nesse caso, estas informações adicionais não devem ser descartadas, sendo aproveitadas de modo a enriquecer ainda mais a pesquisa sem perder de vista, evidentemente, o foco principal do estudo.

A *análise documental* tem como principal escopo os próprios documentos obtidos durante a pesquisa. Qualquer registro sobre o comportamento, a descrição de pessoas ou lugares, testes, provas, questionários ou outro material registrado textualmente, podem ser considerados documentos relevantes para ajudar a formular e/ou consolidar as hipóteses levantadas pelo pesquisador.

É pela *análise de conteúdo* que os documentos são discutidos. Gomes (1996) aponta este tipo de análise como um conjunto de técnicas objetivas e subjetivas aplicadas na interpretação dos dados. Segundo este autor, a análise de conteúdo pode ser desenvolvida em três fases não excludentes entre si, nas quais ocorre 1) a pré-análise, 2) a exploração do material e o tratamento dos dados obtidos e 3) a interpretação.

A primeira fase consiste na leitura do material no sentido de tornar o material mais "familiar" ao pesquisador, destacando, de acordo com os objetivos do estudo, trechos importantes e definindo as categorias ou unidades de registro mais relevantes. Na segunda, há a aplicação mais sistemática em cima do objeto de estudo do que foi definido anteriormente. E na terceira fase, as atenções se voltam para a interpretação, ou seja, desvendar as mensagens subjacentes explorando as "ideologias, tendências e outras determinações características dos fenômenos" (p.76).

1.2) APLICAÇÃO DOS MÉTODOS QUALITATIVOS.

Em nossa pesquisa, muito inspirados na metodologia utilizada por Baraldi (1999), optamos pelo enfoque qualitativo, em especial, do estudo de caso. Nosso caso consistiu num curso sobre Geometria Fractal ministrado por nós. O público alvo foram 11 alunos do 3° Ano do Ensino Médio, da escola Plácido de Castro, na cidade de Santarém-Pa. Nesta escola também trabalhamos lecionando a disciplina Matemática. É importante ressaltar que dos 11 alunos que iniciaram o curso, apenas 7 deles conseguiram concluí-lo. Todos eram nossos alunos no ensino regular. Optamos por atribuir-lhes nomes fictícios com intuito de preservar suas identidades. A descrição de suas características escolares mais relevantes aos nossos propósitos encontra-se abaixo:

Bill – 17anos. Cursou o Ensino Fundamental em escola pública municipal. Estuda na escola desde a 1ª série do Ensino Médio.

Márcio – 18 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Kelly – 18 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Veldenira – 19 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Dariane – 19 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estudou na escola a 1ª série do Ensino Médio, estudou a 2ª série no Oiapoque-AP e voltou a cursar a 3ª série na escola.

Lúcia – 19 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Júlia – 20 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Daniele – 20 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Suelly – 20 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental.

Rick – 21 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 6ª série do Ensino Fundamental.

Milton – 20 anos. Cursou em escola municipal o Ensino Básico. Estuda na escola desde a 1ª série do Ensino Médio.

O que mais nos impulsionou nessa tarefa foi a constatação de que existe um bom número de propostas de atividades e de abordagens sobre Geometria Fractal que relacionam conteúdo da Matemática curricular do Ensino Médio com sua utilização. Tais atividades têm por objetivo ajudar o ensino e o aprendizado de Matemática, mas carecem de um estudo mais aprofundado a respeito do grau de sua eficácia.

Figura I.1. Laboratório de informática do NTE: equipado com ar condicionado, cadeiras, mesa e 13 computadores ligados à Internet.

Figura I.2. Sala de vídeo da escola Plácido de Castro: equipada com cadeiras, mesa, quadro negro, vídeo-cassete e televisor.

O curso "Geometria Fractal para o Ensino Médio" teve a duração de cinco dias e foi ministrado por nós, em quatro dos cinco dias de curso, na sala de vídeo do colégio Plácido de Castro. Esta sala é equipada com carteiras escolares, quadro negro, televisor e aparelho de vídeo cassete. Em um dos dias, a aula foi ministrada fora da escola, no laboratório do NTE (Núcleo Tecnológico Educacional), localizado dentro da 5ª URE (Unidade Regional de Ensino), devido esse espaço estar equipado com os computadores necessários à aula deste dia, segundo nosso planejamento.

Cada dia de aula teve a duração de 3 horas, sem intervalo, das 14h30min às 17h30min, e ocorreram nos dias 10, 11, 17, 18 e 24 de agosto de 2004, conforme a disponibilidade dos participantes. A escolha do horário se deveu ao fato dos alunos estudarem no ensino regular pela parte da manhã estando, assim, disponíveis em alguns dias da semana no turno vespertino. A escolha das datas foi feita de modo a não coincidir com os dias de Educação Física que ocorria também pela parte da tarde.

Uma dificuldade encontrada por nós foi motivar os alunos a fazerem o curso. Nós atuávamos como professor de Matemática nesta escola para, aproximadamente, 150 alunos do 3° ano. Todos os participantes eram nossos alunos e, como não foi atribuída qualquer “pontuação extra” no ensino regular, a procura mostrou-se abaixo da esperada. E mesmo entre os que iniciaram, houve um número significativo de desistências (quatro ao todo).

Para a análise do nosso caso, recorremos a três fontes para a coleta dos dados: a observação direta, o teste específico e o questionário. Todos tomados durante o período do curso. Veremos a seguir, com mais detalhes, em que consistiu cada um desses recursos.

1.2.1) A observação direta.

A observação direta foi feita por nós durante as aulas ministradas no curso. Anotamos situações, falas e impressões do comportamento dos alunos durante e depois das aulas. Como revelamos no primeiro contato os motivos e os objetivos do curso e, conseqüentemente, de nossa pesquisa, assumimos, segundo Lüdke & André (2003), o papel de *observador como participante* no qual “a identidade do pesquisador e os objetivos do estudo são revelados ao grupo desde o início” (p.29). Mesmo correndo o risco das informações coletadas junto ao grupo sofrerem uma espécie de controle por parte deles, optamos por este tipo de observação por acharmos a mais adequada às nossas finalidades, visto que, com o pouco tempo disponível (15 horas ao todo), deveríamos focalizar melhor os esforços do grupo, sempre, é claro, tomando o máximo de cuidado possível para esta escolha não alterar as opiniões ou atitudes dos alunos no decorrer do trabalho.

1.2.2) O teste específico.

Consistiu em cinco questões aplicadas no início do curso (pré-teste) que abordavam alguns tópicos matemáticos do Ensino Médio e tinham como objetivo obter dados referentes ao aprendizado desses tópicos, às estratégias utilizadas na sua resolução e à compreensão, por parte dos alunos, das situações apresentadas. O mesmo teste voltou a ser aplicado ao final do curso (pós-teste) para que pudéssemos avaliar se a nossa atuação com as atividades do curso de Geometria Fractal haviam proporcionado alguma evolução na aprendizagem dos tópicos matemáticos envolvidos. Estes documentos foram de grande importância no intuito de revelar as habilidades (re)adquiridas pelos alunos com o curso e de como a Geometria Fractal pôde influenciar na (re)aquisição de conceitos matemáticos necessários para a sua resolução. A folha com o teste está em anexo, no final do trabalho.

1.2.3) O questionário.

Sua aplicação foi feita também no último dia do curso, logo após o pós-teste, e cada aluno teve disponível o tempo restante da aula daquele dia para respondê-lo. Os alunos Márcio, Bill, Valdenira e Júlia entregaram neste mesmo dia e os demais (Kelly, Dariane e Lúcia), por motivo de tempo, entregaram o questionário no dia seguinte. Nosso objetivo era tentar captar suas impressões acerca da Matemática, da Geometria Fractal, das atividades do curso e dos conteúdos matemáticos abordados tanto em suas trajetórias escolares, quanto dentro do curso. Foi de grande importância para o esclarecimento de alguns pontos referentes à nossa pesquisa, pois pudemos identificar questões relevantes que pareceram estar relacionadas ao desempenho dos alunos nas situações vivenciadas no curso. A íntegra do questionário aplicado também está em anexo, no final.

Capítulo 2
Geometria Fractal: Da Teoria às Aplicações

Temos um mapa do universo para micróbios, temos o mapa de um micróbio para o universo.
Miroslav Holub

Antes de abordarmos as particularidades da Geometria Fractal mais relevantes ao interesse do nosso trabalho, serão colocados em tela alguns fatores que contribuíram para a sua descoberta. Desde já, ressaltamos que não é nosso objetivo refazer todos os pormenores históricos que propiciaram seu aparecimento – tarefa que dificilmente possa ser conseguida. Também não é nosso interesse engendrar por completo a trama epistemológica que a constitui, mas, sim, indicar os fatos e/ou argumentos mais substanciais que levem ao seu entendimento e explicitem sua importância.

2.1) HISTÓRICO DA GEOMETRIA FRACTAL

No século XVII, Galileu Galilei disse que a Matemática era a linguagem da natureza e o seu alfabeto eram os círculos, triângulos e demais figuras geométricas euclidianas (BOYER, 1996). Isso dá idéia da força que a Geometria Euclidiana exerceu – e ainda exerce – sobre o pensamento matemático. Diante dos seus axiomas, postulados e teoremas, as formas euclidianas pareciam encaixar-se bem do ponto de vista teórico, sem quebras e sem lacunas. Talvez por isso permaneceram sem modificações significativas durante dois mil anos, dando a estas formas a forte impressão de naturalidade, uma vez que parecem tão familiares para nós.

Entretanto, para Lesmoir-Gordon *et al* (2000), se estas formas forem analisadas com mais frieza, certamente se perceberá que elas não parecem ter muita coisa de “natural”.

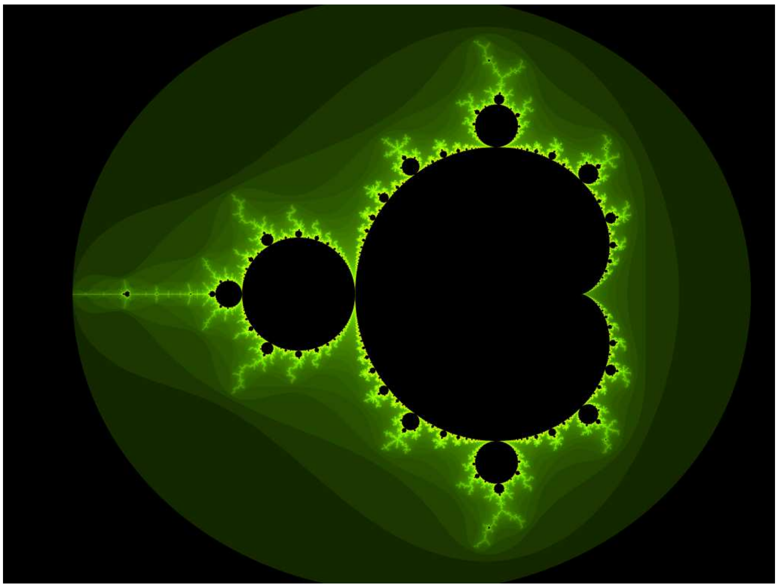
> As formas que Euclides estudou – linhas retas e círculos – tiveram tanto sucesso na explicação do universo que os cientistas ficaram cegos para suas limitações, classificando as formas que não se encaixavam dentro do esquema de Euclides como ‘não-intuitivas’ e até ‘patológicas’.[2] (p.9)

[2] “The shapes that Euclid studied – straight lines and circles – proved so successful in explaining the universe that scientists became blind to their limitations, denouncing patters that did not fit in Euclid’s scheme as ‘counter-intuitive’ and even ‘pathological’.” N.T.

Talvez o maior mérito da Geometria Fractal seja este: o de representar melhor as formas da natureza – as mesmas que a Geometria Euclidiana considera como desvio do padrão. O maior expoente da Geometria Fractal e seu criador, o matemático polonês naturalizado americano Benoit Mandelbrot, pode sintetizar esta afirmação na sua mais célebre frase do livro *Geometry of the nature* de 1975, marco inicial da Geometria Fractal: "*Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta*".

É preciso deixar claro que não estamos querendo fazer uma espécie de "apologia" contra o estudo da Geometria Euclidiana. Muito pelo contrário. Pensamos que seu estudo é essencial no desenvolvimento do pensamento geométrico e matemático. Mas é importante ressaltar que, como qualquer ramo da Ciência e/ou Matemática, este tratamento também possui um grau de abrangência limitado e seria contra o seu próprio princípio não tentar abrir/expor novas possibilidades, como a de descrever objetos naturais.

Diferentemente das formas euclidianas, as formas fractais apresentam irregularidades em sua estrutura. Em vez de tentar "contornar" tais irregularidades, os fractais parecem atacá-las



Reproduzido de http://people.bath.ac.uk/mfc20/m2.png

Figura II-1. O Conjunto de Mandelbrot é também chamado de 'boneco de pão de de frente e as incorporar em sua composição. Aparição quase que obrigatória em qualquer publicação sobre o tema é a figura fractal do “boneco de pão de mel” ou “Conjunto de Mandelbrot” (mostraremos como ele é obtido mais adiante).

A história do surgimento da Geometria Fractal se confunde com a própria história de seu criador, Benoit Mandelbrot. Com aptidão geométrica aguçada, Mandelbrot não viu com bons olhos a crescente *algebrização* da Matemática promovida por Bourbaki na primeira metade do século XX, na França, onde morava na época. Isso o fez mudar para os Estados Unidos, em 1948, para trabalhar no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM (International Business Machines Corporation) (BARBOSA, 2002).

Trabalhou em vários problemas que aparentemente não tinham qualquer relação entre si. Dentre eles estão as enchentes do rio Nilo, as cotações da Bolsa de Valores e outros. Para tentar entender como Mandelbrot cunhou o arcabouço teórico da Geometria Fractal, vamos nos ater a dois problemas em particular.

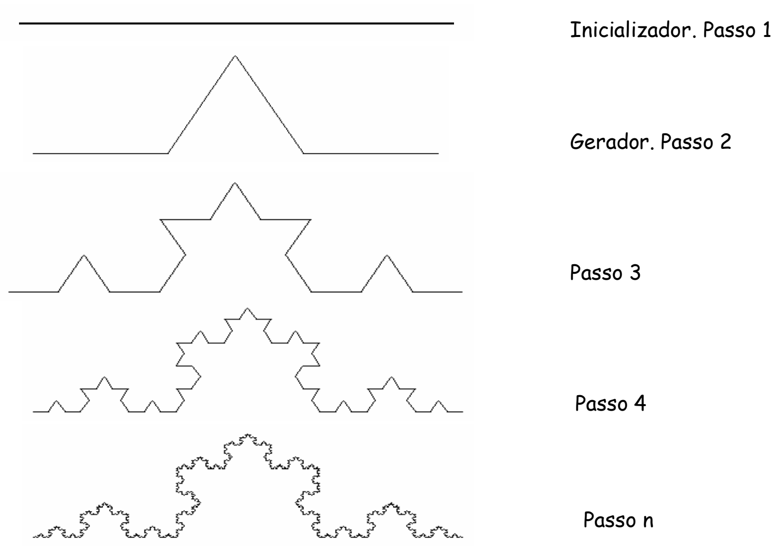


Figura II-2. Ao lado a construção da curva de Koch. Esta curva dá a idéia intuitiva

O primeiro começa pela indagação: “Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?”. Barbosa (2002) expõe a seguinte resposta encontrada por Mandelbrot:

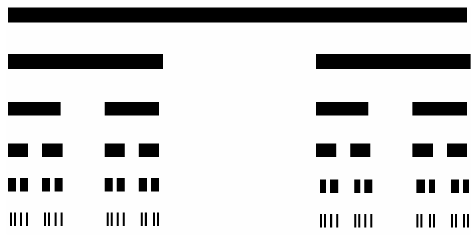
A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e penínsulas apareceram ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em documentos dos dois países vizinhos, a fronteira da Espanha com Portugal difere em cerca de 20%, o mesmo acontecendo por exemplo com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro que ao efetuar as medidas cada país empregou instrumentos com unidades de escalas diferentes. (p.12)

Na prática, significa dizer que para medir o tamanho de um litoral ou limite territorial, é preciso, antes de tudo, definir a escala. Se a base para medição for de um metro, as reentrâncias e/ou saliências menores que este valor não serão aferidas. Matematicamente falando, a base que poderia medir com exatidão uma extensão territorial deveria tender a zero o que na realidade seria inviável, pois faria o resultado final tender para o infinito. Uma resposta que acaba não satisfazendo por completo do ponto de vista analítico.

Outro problema estudado por Mandelbrot, agora dentro da IBM, foram os erros na transmissão de dados. Quando era preciso enviar informações de um computador a outro, via linha telefônica, ocorria a aparição de um "ruído" que interferia na transmissão. Mesmo sendo especialistas no assunto, os engenheiros não conseguiam encontrar um meio de resolver o problema.

Em vez de tentar eliminar o ruído, Mandelbrot fez o caminho inverso: considerou-os inevitáveis. Percebeu que os erros vinham em blocos que, se ampliados, revelavam outros blocos menores em sua estrutura intercalados pelos dados da transmissão. Dessa forma, tratou os erros de maneira semelhante à poeira de Cantor. Programando os computadores para trabalhar assim, conseguiu fazer com que os receptores diferenciassem a informação transmitida e o ruído indesejável. Mesmo não eliminando a chegada dos erros, eliminou a maior parte da interferência e tornou a comunicação viável.

Figura II-3. A Poeira de Cantor é obtida retirando-se o terço central de um segmento de reta e a partir daí retira-se sempre o terco central dos



Assim como Euclides o fez em "*Os Elementos*", Mandelbrot reuniu todos os seus trabalhos e os direcionou para aquilo que hoje se conhece como Geometria Fractal. Fractal foi o termo usado por ele para nomear as formas que fazem parte desta geometria e vem da palavra *fractus* que, em latim, significa quebrado, fragmentado. O termo parece ilustrar bem as irregularidades provenientes das figuras fractais, além de conotar a idéia de partição ordenada através das escalas.

2.2) DEFINIÇÃO DE FRACTAL

A definição de fractal é um problema em aberto na Matemática. Várias foram as tentativas de definir um fractal, mas todas deixam alguma lacuna. Acreditamos que isto não pode ser visto como um problema ou uma falha na sua estrutura que impossibilite seu uso/estudo. Segundo Mandelbrot (1989):

> Será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objecto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que um tal formalismo seria prematuro, adoptei (...) um método baseado numa caracterização aberta e intuitiva, onde os avanços se efectuam por retoques sucessivos. (p.14)

Barbosa (2002) reforça a conjectura de Mandelbrot para utilização dos fractais sem se apegar demasiadamente ao formalismo, trazendo a discussão para o campo educacional:

> "(...) o conceito de fractal ainda deixa muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal, que caiba ao ser e ao só ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, à qual pode simplesmente convir com uma conceituação simples e de fácil entendimento. Bastará considerarmos a auto-similaridade." (p.19)

Atrevemo-nos a colocar em tela uma definição que também possui "lacunas", mas servirá de base para caracterizar um objeto fractal. Um fractal, portanto, é "*uma figura geométrica em que uma parte se assemelha a toda figura, obtida através de um processo iterativo e que pode ter uma dimensão não inteira*". Esta definição aborda três características que consideramos fundamentais para designar um fractal: auto-similaridade, iteração e dimensão.

2.2.1) Auto-similaridade

Esta parece ser a característica mais marcante e elementar de um fractal. Tomando uma pequena parte de um círculo, por exemplo, e ampliando-a, percebe-se que esta parte é uma curva. Ao ampliar novamente uma pequena parte desta curva e repetirmos estas etapas indefinidamente, a curva tenderá para uma reta. Este processo é conhecido como *renormalização*.

Porém, em uma figura fractal as ampliações sempre se parecem com toda a figura. Para ilustrar esta propriedade, exibiremos um fractal clássico chamado de triângulo de Sierpinski. Sua construção é da seguinte forma: consideramos a área compreendida por um triângulo eqüilátero,seus lados e os pontos médios de cada lado, traçamos três segmentos de reta cujas extremidades são os pontos médios de modo que o triângulo inicial fica dividido em quatro outros triângulos menores (também eqüiláteros e iguais entre si) e desconsideramos a área do triângulo menor central. Marcamos os pontos médios de cada lado dos outros três triângulos menores restantes, traçamos novamente os segmentos de reta que vão dividir os triângulos em quatro outros e tornamos a desconsiderar a área triângulo central formado . A partir daí, aplica-se o mesmo procedimento aos triângulos restantes, *ad infinitum*.

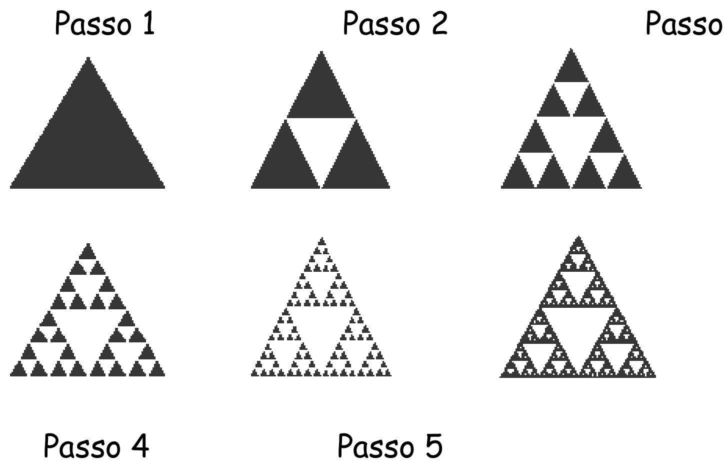
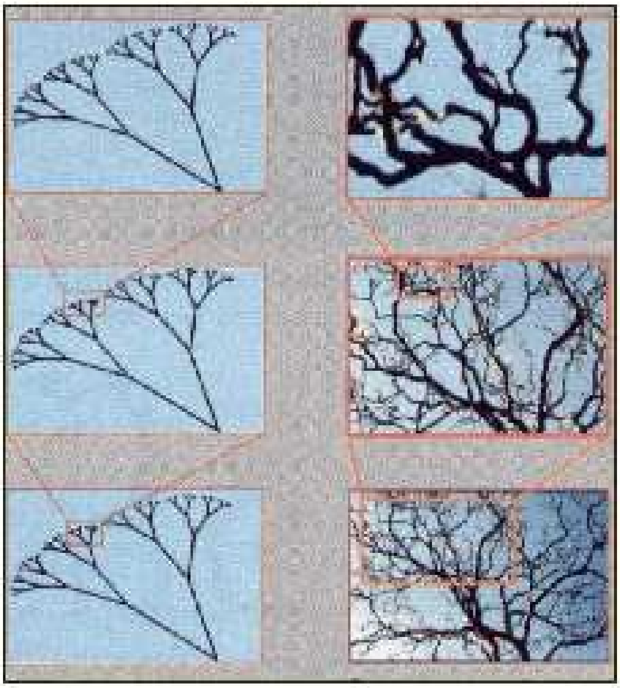


Figura II-4. O triângulo de Sierpinski é uma construção onde o triângulo central de cada triângulo remanescente é retirado. Mesmo assim, a figura no passo n não perde a similaridade com as construções anteriores obtidas.

Nota-se que no passo **n** cada um dos três triângulos maiores que compõem a figura são cópias exatas da figura maior. Essa invariância da forma, que independe da escala de ampliação, é chamada de auto-similaridade. Mandelbrot percebeu que esta propriedade está presente numa gama enorme de formas naturais. Tanto nas árvores, nuvens, linhas costeiras e outros; como nos gráficos da bolsa de valores e outros sistemas de comportamento complexo.

Figura II-5. Nos quadros da coluna à esquerda, há uma seqüência de ampliações de uma árvore artificial que são exatamente similares ao quadro anterior. Na coluna à direita, na árvore real, a similaridade também acontece nas ampliações, porém de forma



Retirado de Taylor (2003), p.86.

Existem dois tipos de auto-similaridade; a exata e a estatística. Na exata, as partes são a cópia exata dos padrões em diferentes ampliações. Na auto-similaridade estatística, os padrões não se repetem com exatidão, em vez disso, as qualidades estatísticas dos padrões é que se diferem (TAYLOR, 2003).

As formas naturais auto-similares são, na sua maioria, complicadas para serem descritas apenas em termos euclidianos fundamentais (ponto, reta ou plano). Ainda que intuitiva, a auto-similaridade pode ser usada para construir figuras mais complexas que se encaixam, retorcem, espremem com somente algumas regras iniciais.

Fica evidente que a utilização de segmentos de reta para formar imagens de árvores reais se configura em apenas uma representação grosseira da realidade. Até as mais sofisticadas técnicas de criação de imagens não descrevem as formas naturais em todos os seus detalhes. Mesmo assim, o tratamento fractal a termos euclidianos fundamentais cria imagens que conseguem estar mais próximas dos contornos de objeto. Com um programa de computador derivado da curva de Koch e criado por Michael Barnsley[3], é possível criar a imagem de uma samambaia que exibe em toda sua estrutura o padrão auto-similar exato, mas que parece mais

[3] M. F. Barnsley, *Fractal modelling of real-world images*. In: *The Science of Fractal Images*, H. -O. Peitgen and D. Saupe (eds.), Springer-Verlag, New York, 1988.

“natural” do que esta curva. Com relação ao estudo da Geometria Fractal, Peitgen *et al* (1992a) comenta:

> A importância da samambaia de Barnsley para o desenvolvimento do assunto é que esta imagem é parecida com uma samambaia, mas encontra-se na mesma categoria de construções como a curva de Koch e a poeira de Cantor. Em outras palavras, aquela categoria que não contém monstros extremos da matemática que parecem estar muito distantes da natureza, mas também inclui estruturas a formações naturais e que são obtidas pela simples modificação dos monstros. (p.276-277)

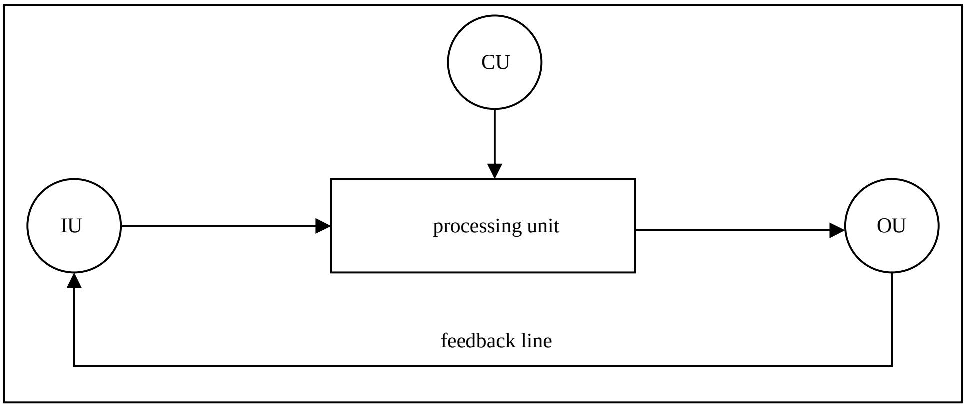
Reproduzido de www.cs.princeton.edu/ introcs/24inout/

Figura II-6. A seqüência mostra três etapas na construção da samambaia de Barnsley. Na primeira à esquerda, o programa gerador faz “cair” 500 pontos em um looping aleatório, no meio já são 1 000 pontos e à direita 10 000 pontos. Uma figura fractal de auto-

2.2.2) Iteração

É através desta propriedade que há o contraste entre a complexidade e a simplicidade de um fractal. Consiste em repetir o mesmo ato ou princípio infinitamente em uma espécie de feedback. Peitgen *et al* (1992a, p.21), representa esta rotina como um processo dinâmico chamado Feedback Machine.

Quando um dado inicial é inserido (IU), ele passa por um processamento (CU) até se tornar um dado de saída (OU). Este dado retorna ao começo (feedback line) no qual passa a ser IU e o processo é novamente iniciado.



The feedback machine with IU = input unit, OU =
output unit, CU = control unit

Reproduzido de Peitgen et al *(1992a, p.21).*

Figura II-7. O esquema (Feedback machine) ilustra o princípio fundamental para a efetivação de um processo iterativo.

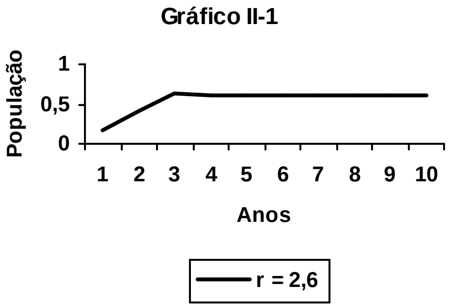
Em se tratando de processos iterativos dentro da Geometria Fractal, classificamos as iterações em dois tipos: a algébrica e a geométrica.

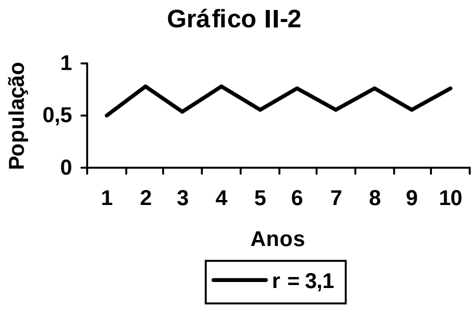
Iteração Algébrica

Na *iteração algébrica*, a rotina se dá com uma equação algébrica como unidade processadora. Basta atribuir um valor inicial para um x_n e encontrar x_{n+1}. A seguir, x_{n+1} é recolocado no lugar de x_n e encontra-se o valor de x_{n+2}. A partir daí, esse *looping* passa a "rodar" seguindo esta rotina para encontrar x_{n+3} , x_{n+4}., x_{n+5} , e assim sucessivamente.

Muito usado na Biologia por ecologistas, uma aplicação prática para ilustrar este tipo de iteração é o modelo de Verhulst para o crescimento populacional. Consiste em tomar a equação $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ – onde **r** é uma constante ajustável que representa os fatores que influenciam o crescimento da população – para prever o número de indivíduos de uma espécie em períodos de um ano. A iteração é efetuada tomando valores entre 0 e 1 para x_n e fixando o valor de **r**. Zero representa a extinção e 1 a população máxima.

Na modelagem do número de indivíduos de uma população de peixes, para $x_n = 0,2$ e fixando r = 2,6, por exemplo, após algumas iterações, o valor de x_n converge para 0,6154. Porém, fazendo r = 3,1, a iteração bifurca, ou seja, tende a se estabilizar nos dois valores distintos 0,5582 e 0,7645. Outra bifurcação ocorre quando o parâmetro r assume o valor 3,5 que faz a população se estabilizar nos valores 0,3828, 0,5011, 0,8270 e 0,8750.





Desse modo, à medida que o parâmetro r é aumentado, o número de pontos em que a rotina se estabiliza também tende a dobrar formando novas bifurcações. São tantas que rapidamente elas tendem para o infinito e tornam-se caóticas. Fazendo o gráfico parâmetro r *versus* população, são observadas pequenas "janelas de ordem" que se assemelham a todo o gráfico num padrão de auto-similaridade.

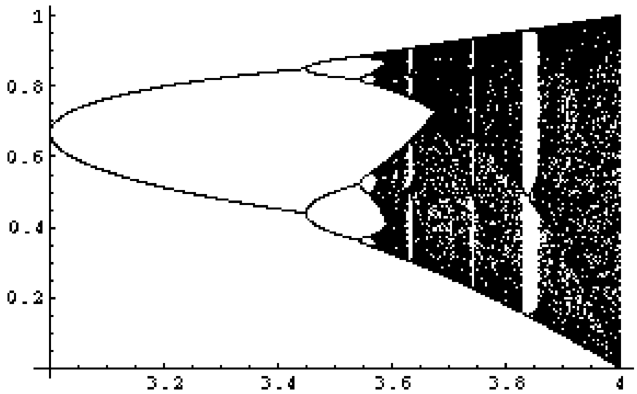
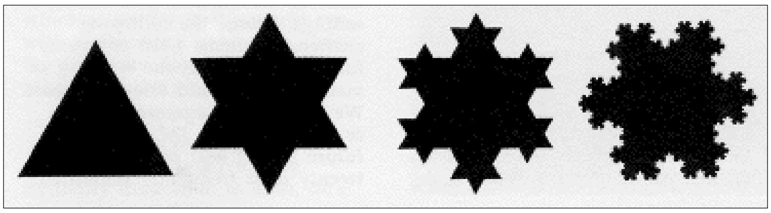


Figura II-8. Na árvore de Feigenbaum, como é conhecido o gráfico, o eixo horizontal representa o parâmetro r e o vertical a população. Aumentando o valor de r os períodos tendem a duplicar, o que leva a uma desordem aparente, mas que

Devido à semelhança, este gráfico recebe o nome de figueira (*fig tree*). Segundo Gleick (1989), o raio da distância entre as bifurcações sucessivas converge para o valor fixo de 4, 6692..., chamada de constante de Feigenbaum. Este número está presente em muitos fenômenos da natureza. Experimentos físicos de laboratório comprovaram que ele representa uma espécie de universalidade. Para Lesmoir-Gordon *et al* (2000), é tão fundamental quanto π (comprimento de uma circunferência dividido pelo diâmetro), pois ele aparece em qualquer que sejam os fenômenos governados por um processo de *feedback*. É interessante notar que todas essas conclusões foram derivadas de processos iterativos algébricos oriundos da simples equação logística de Verhulst e que acaba gerando um alto grau de complexidade.

Iteração geométrica.

Já na *iteração geométrica*, o processador é uma regra aplicada em uma figura geométrica ou em alguma parte específica dela. Geralmente, a regra induz uma "quebra" na figura e é nestas etapas de fragmentação que a regra será aplicada indefinidamente. A construção do fractal conhecido como floco de neve de Koch, abaixo, é um exemplo bem ilustrativo. Dado um triângulo eqüilátero, marcamos dois pontos em cada lado do triângulo de modo que estes dividam os lados em três partes iguais. A seguir, "subimos" três triângulos eqüiláteros menores a partir dos três segmentos centrais de cada lado do triângulo inicial e, posteriormente, descartamos estes três segmentos centrais. A partir daí, aplicamos o mesmo procedimento aos segmentos restantes indefinidamente.



Passo 1 Passo 2 Passo 3

Figura II-9. Com o decorrer das iterações, o floco de neve de Koch (Koch's snowflake) aumenta seu perímetro tendendo ao infinito, porém sua área, mesmo crescendo, atinge um valor limitado máximo.

Com a ajuda do computador e dos trabalhos de Pierre Fatou e Gaston Julia do início do Século XIX, Mandelbrot realizou iterações com elementos no plano complexo e criou o conjunto de Mandelbrot, mais tarde chamado de boneco de pão de mel. O conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os pontos no plano complexo que, quando submetidos ao mapeamento recursivo $z \rightarrow z^2 + c$, não divergem para o infinito.

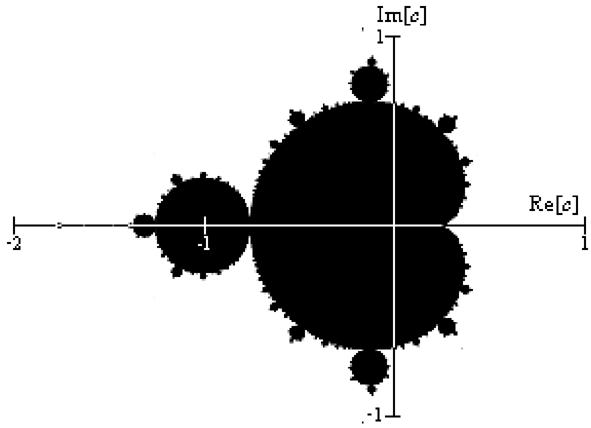
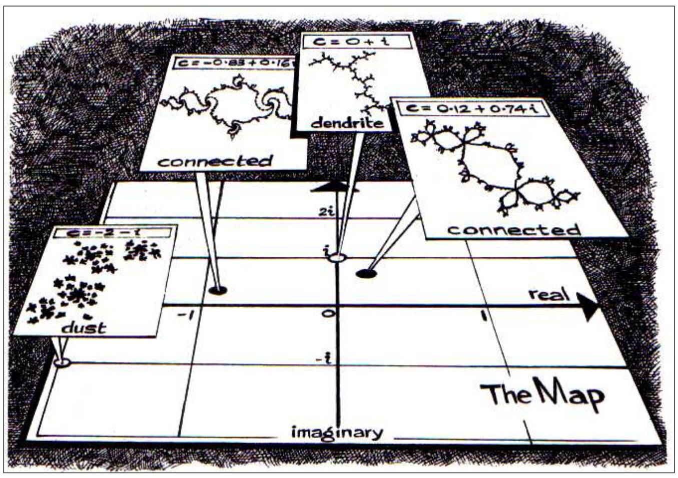


Figura II-10. A imagem mostra os pontos do conjunto de Mandelbrot. O eixo Re[c] representa os números reais e Im[c] os números complexos. Este conjunto é formado por todos os pontos iniciais c que não divergem para o infinito quando o

Fazendo $c = 1 + i$ e partindo de $z = 0$, por exemplo, as iterações sucessivas (mapeamento) apresentariam os seguintes valores:

$$z_1 = 0^2 + (1 + i)$$
$$z_2 = (1 + i)^2 + (1 + i)$$
$$z_3 = (1 + 3i)^2 + (1 + i)$$
....

Figura II-11. A figura mostra algumas localizações possíveis do ponto inicial c no mapeamento recursivo do plano complexo $z \rightarrow z^2 + c$. Quando o módulo de c é menor que dois, o mapeamento forma figuras de tamanho finito (connected e dentrite). Se o módulo de c for maior



Reproduzido de Lesmoir-Gordon et al (2000, p. 90).

Geralmente, quando o módulo dos números encontrados não passa do valor dois, ele acaba não divergindo para o infinito, fazendo uma espécie de *looping* em torno da origem. A marcação de cada ponto iterado dentro do plano complexo dá origem a figuras belíssimas conhecidas como Conjunto de Julia.

Cada figura obtida no conjunto de Julia pode ser encontrada dentro do conjunto de Mandelbrot. Para encontrá-las basta ampliar, em escala infinitesimal, as partes do conjunto de Mandelbrot que, por sua vez, pode ser ampliado infinitamente que sempre exibirá novas formas. É nessas ampliações que as imagens do conjunto de Julia também surgem fundindo-se umas às outras, localizadas exatamente em cima de seus valores **c** correspondentes.

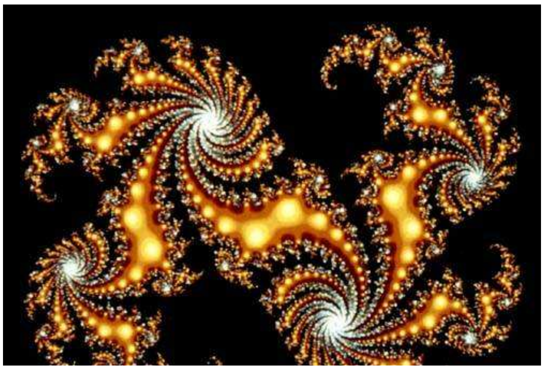


Figura II-12. Uma das imagens que fazem parte do conjunto de Julia. As formas intrincadas podem ser encontradas dentro do conjunto de Mandelbrot através de sucessivas ampliações

2.2.3) Dimensão

Usualmente diz-se que a dimensão de um objeto é o número de parâmetros independentes (coordenadas) necessários para uma descrição única de seus pontos. Essa idéia de dimensão era bem aceita até o Século XIX, pois conseguia satisfazer as necessidades da Matemática produzida até esta época. Tomando como base as formas euclidianas fundamentais e a idéia de Poincaré para dimensão, temos que:

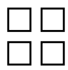
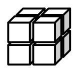
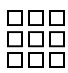
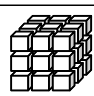
> Um ponto tinha dimensão 0. Enquanto que uma linha tinha dimensão 1, porque poderia ser cortada em duas partes por um ponto (o qual tinha dimensão 0). E um quadrado tinha dimensão 2, pois poderia ser cortado em duas partes por uma linha (a qual tinha

> dimensão 1). Um cubo tinha dimensão 3, porque poderia ser cortado em duas partes por um quadrado (o qual tinha dimensão 2). (PEITGEN *et al*, 1992a, p.122) [4]

A partir do surgimento das geometrias não-euclidianas e, principalmente, com o desenvolvimento da Topologia – ramo da Matemática que lida com as formas dos objetos e estuda as propriedades que permanecem constantes quando um objeto é curvado, esticado ou pressionado e que teve como marco inicial o próprio Poincaré – é que esta idéia de dimensão (ou definição de dimensão como acreditavam alguns) não conseguiu mais ser suficiente para ser usada em objetos que agora contavam com novas propriedades.

Dentre as várias maneiras de abordar seu significado, a definição de Hausdorf-Besicovitch para dimensão foi aquela escolhida por Mandelbrot para os fractais. Não trata propriamente do número de coordenadas independentes que possam descrever os pontos de um objeto, mas "torna-se uma maneira de medir propriedades que (...) não têm definição clara: o grau de aspereza, ou de fragmentação, ou de irregularidade de um objeto" (GLEICK, 1989, p.93). É uma dimensão mais qualitativa, que não se restringe aos números 0, 1, 2, 3 e admite números não inteiros e até irracionais.

Tabela II-1. Dimensão de Hausdorf-

	Linha	Quadrado	Cubo
Fator de ampliação 2			
Número de autocópias	2	4	8
	2^1	2^2	2^3
Fator de ampliação 3			
Número de autocópias	3	9	27
	3^1	3^2	3^3

---

[4] "A point has a dimension 0. Then a line has a dimension 1, because it can be split into two parts by a point (which has dimension 0). And a square has a dimension 2, because it can split into two parts by a point (which has dimension 1). A cube has a dimension 3, because it can be split into two parts by a square (which has dimension 2)." N. T.

Se tomarmos um segmento de reta podemos dividi-lo em duas partes iguais que são auto-semelhantes, da mesma forma que podemos dividir um quadrado em quatro outros quadrados auto-semelhantes, como também se pode subdividir um cubo em oito cubos menores idênticos. Poderíamos ter começado dividindo o segmento de reta em três partes, então o quadrado será dividido com o quadrado do número de partes e o cubo com o cubo dessas partes. Ao atentarmos para o expoente das subdivisões, veremos que eles representam exatamente a dimensão da forma que está sendo estudada.

Chamando de **m** o número de cópias de si mesmo e **n** o valor que cada cópia deve ser ampliada para voltar a ter o tamanho original, podemos obter a seguinte expressão para calcular a dimensão **d**:

$$m = n^d$$

Aplicando o logaritmo em ambos os membros:

$$d = \log m / \log n$$

Portanto, por esse método, um segmento de reta que foi dividido em duas partes iguais possui duas cópias de si mesmo e deverá ser ampliado pelo fator dois para voltar ao tamanho original. A dimensão desse segmento será dada por $d = \log 2 / \log 2 = 1$. Aplicando o mesmo procedimento para um quadrado dividido em quatro partes e para um cubo dividido em oito, suas dimensões serão $d_{quad} = \log 4 / \log 2 = 2$ e $d_{cubo} = \log 8 / \log 2 = = 3$, respectivamente.

Utilizando a expressão em fractais, para a curva de Koch, por exemplo, obteríamos $d_{koch} = \log 4 / \log 3 = 1{,}26...$ A análise deste resultado revela que a curva de Koch é mais que uma linha (dimensão 1), porém não chega a ser um plano (dimensão 2). Do mesmo modo, a dimensão da poeira de Cantor é obtida assim: $d_{cantor} = \log 2 / \log 3 = 0{,} 63...$, mais que um ponto (dimensão 0), porém menos que uma linha (dimensão 1).

Tanto a curva quanto o floco de neve de Koch apresentam uma certa semelhança com o contorno de um litoral. A esse respeito, Stewart (1991) coloca:

> A dimensão fractal do contorno de um litoral situa-se em geral entre 1, 15 e 1, 25, e a da curva do floco de neve é próxima de 1, 26. Portanto, litorais e flocos de neve são igualmente irregulares. (p.236-237)

Revendo o problema das linhas costeiras, Mandelbrot afirma que talvez não seja a resposta que não satisfaça a pergunta "*Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?*" e, sim, a própria pergunta que, segundo ele, deveria ser "*Qual a dimensão fractal do litoral da Grã-Bretanha?*" (Mandelbrot, 1989).

2.3) APLICAÇÕES E IMPLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL.

Seria muito difícil esmiuçar com elevado grau de exatidão quais são todas as aplicações da Geometria Fractal. Muitas pesquisas foram feitas na Biologia, Química, Física, dentre outras, que utilizaram as propriedades fractais como ferramentas de estudo e ainda existe muita pesquisa em andamento. É inegável que a Geometria Fractal mais descreve do que explica, no entanto, consegue dar forma a coisas, objetos e equações que antes se pensava não passar de rabiscos sem sentido. Veremos adiante algumas das aplicações e implicações da Geometria Fractal que consideramos mais pertinentes aos nossos propósitos.

2.3.1) Relação entre campos diversos via Geometria Fractal

Um dos aspectos inovadores – e também muito polêmico – da Geometria Fractal é a capacidade de conseguir se infiltrar por entre os mais variados ramos da ciência. Por exemplo, o sangue humano contém substâncias essenciais para o funcionamento saudável de todos os órgãos. Os vasos sangüíneos são os canais responsáveis para fazer o sangue escoar, e por isso, precisam estar presentes em todas as partes do corpo, de forma que mantenha um fluxo constante fazendo o sangue percorrer o trajeto corpóreo, voltar ao coração onde será bombeado, e fazer novamente o percurso para o corpo. É a disposição, o arranjo e as respectivas formas/espessuras dos vasos sangüíneos que permitem o funcionamento adequado da circulação.

Não obstante, as grandes bacias hidrográficas também exibem comportamentos semelhantes aos descritos acima. Pequenos córregos que se interligam e convergem para córregos maiores que deságuam em rios. Os rios, por sua vez, entrelaçam-se para formar rios maiores e com maior fluxo para, enfim, desembocar no oceano.

Nem é preciso entrar em detalhes sobre a disposição dos galhos da copa de uma árvore (responsáveis pela distribuição dos nutrientes pelo vegetal) e também pelo crescimento dos corais[5] (dada com agregação de partículas por depósito de materiais em sua superfície, chamado de percolação) para notarmos o mesmo padrão.

Esses exemplos exibem uma caracterização latente naquilo que já dissemos ser essencial para a definição de fractal: a auto-similaridade. A boa funcionalidade desses sistemas está condicionada ao fator de escala. É como se a natureza tivesse encontrado a mesma solução para vários tipos de problemas: a solução fractal (Stewart, 1991).

2.3.2) Geometria Fractal e Arte

É inegável a beleza das imagens fractais geradas pelo computador. O apelo estético dos fractais talvez seja um dos principais atrativos para o iniciante que quer se familiarizar com a Geometria Fractal. As formas irregulares que se retorcem, espremem, espiralam exibem uma exuberância capaz de serem comparadas às grandes obras de arte. Aos nossos olhos, o efeito do belo pode ficar ainda mais interessante quando estas figuras complexas começam a representar fenômenos, situações, objetos naturais ou não, equações e outros, revelando, além da beleza, uma aplicabilidade latente.

Figura II-13. *Blue Poles: Number 11* (Óleo sobre lona) de 1952 é considerada a obra-prima de Jackson Pollock. Com uma vareta de madeira, o artista deixava respingar a

[5] Estas disposições podem ser geradas fractalmente utilizando uma técnica conhecida como L-Systems. Consiste em empregar um processo de crescimento com uma estrutura recursiva que agregue partes menores e as encaixe numa estrutura maior resultando em uma forma auto-similar (PEITGEN *et al*, 1991b).

No mundo das artes plásticas, o pintor Jackson Pollock (1912-1956) dizia pintar seus quadros baseado no ritmo da natureza. Traços contorcidos de cores que se entrelaçavam em redemoinhos de tinta eram a marca registrada de Pollock. Essas obras extremamente abstratas faziam as opiniões dos críticos divergirem. Esse “estilo primitivo de pintar seria fruto de puro gênio ou tratava-se de um bêbado debochando das tradições artísticas?” (Taylor, 2003, p.86).

O físico Richard P. Taylor analisou, com a ajuda do computador, as obras de Pollock e comprovou que elas possuem propriedades fractais. Durante a pesquisa, descobriu que os valores da dimensão fractal dos quadros tinham um valor mais baixo no início da sua carreira e, gradativamente, foram aumentando com o passar dos anos. De 1,12 em 1945 para 1,7 em 1952.

Figura II-14. A charge mostra, de forma bem humorada, uma possível reflexão de Jackson Pollock com a descoberta de padrões fractais em suas obras. Sua frustração soa como se toda a sua genialidade fosse reduzida a algumas formas fractais. Na tradução: “*É o talento puro que*

Reproduzido de plus.maths.org/ issue9/news/Pollock/

Esse fato parece sugerir a abertura de um novo ramo de aplicação da Geometria Fractal. Estima-se que com o aprimoramento da técnica de análise fractal das obras de arte, seria possível identificar a autenticidade de pinturas e as datas de suas criações.

2.3.3) Implicações no campo científico.

As equações diferenciais que modelam o comportamento dos sistemas sempre se mostraram limitadas, isto é, acabam sendo aproximações da realidade, pois não comportam todas as variáveis do sistema. Não que haja alguma coisa de errado com isto. Basicamente, o papel da

Matemática Aplicada é tentar traduzir situações reais para a linguagem matemática. São incontáveis os méritos da formulação de modelos que expliquem a natureza, aliás, toda a ciência moderna está alicerçada desta forma. O que queremos salientar aqui é justamente isso: parece que se esqueceu que esta “leitura” da realidade é uma aproximação. E como aproximação, possui um grau de abrangência determinado pelo número de parâmetros e variáveis do sistema analisado.

Pelo paradigma positivista, para descrever o comportamento de um sistema natural, basta considerar todas as variáveis que podiam agir sobre o sistema. Com o advento da Teoria do Caos[6], ficou provado que essas variáveis eram infinitas, o que impossibilita tratar estas questões somente atribuindo os parâmetros e introduzindo as variáveis.

A Geometria Fractal parece fornecer a linguagem necessária para lidar com a não-linearidade. Sistemas dinâmicos que têm evolução temporal podem ser vistos agora, não como a exceção, mas como a regra da natureza. A Geometria Fractal descreve melhor tal fenômeno por fazer uso de seu caráter qualitativo, por visualizar as questões globalmente e contemplar as inter-relações subjacentes (MANDELBROT, 1989).

2.3.4) Geometria Fractal na Matemática

Por outro lado, dentro do âmbito da Matemática, o surgimento da Geometria Fractal conseguiu ampliar o leque de construções geométricas e reduzir o formalismo inerente a elas. Sobre isto Mandelbrot (1989) afirma:

> Estas figuras geométricas nunca tiveram quaisquer hipóteses de entrar no campo do ensino, mal passando de espantalho ‘moderno’ que, mesmo a título de exemplo, era demasiado específico para merecer qualquer tipo de atenção. (...) Demonstro que a carapaça formalista que as isolou impediu a revelação de seu verdadeiro significado: o facto de estas figuras terem algo de extremamente simples, concreto e intuitivo.
> Mostro não só que elas são realmente úteis, mas também que podem ser rapidamente utilizadas, com um formalismo muito reduzido. Não exigem quase que nenhum daqueles preliminares formais onde, conforme a experiência mostra, alguns encontram um deserto intransponível e outros um paraíso de onde não querem sair. (p.19)

Existem várias publicações referentes à aplicação da Geometria Fractal como um recurso para auxiliar o ensino da Matemática. Concordamos com a idéia de que tal aplicação possa ser útil no processo de aprendizagem da Matemática, nos vários níveis de ensino.

---

[6] A Teoria do Caos lida com sistemas extremamente sensíveis às condições iniciais e que exibem comportamentos praticamente imprevisíveis (ou muito complexos) com o passar do tempo.

Entretanto, é preciso tomar cuidado com os exageros. A Geometria Fractal não “derruba” a Geometria Euclidiana como *A Evolução* de Darwin fez com *A Lei do Uso e Desuso* de Lamark. Ela amplia seus “poderes”, ou seja, aumenta seu alcance, assim como a *Relatividade* de Einstein fez com a *Mecânica* de Newton.

A Geometria Fractal é tão aproximação quanto à euclidiana. Fica evidente que esta aproximação é bem melhor que a anterior na descrição de formas naturais, mas não é e nem pode ser encarada como solução para todos os problemas, conforme adverte Stewart (1991):

> A aplicabilidade dos fractais é ampla, mas não universal. (...) É preciso advertir também que nem todas as aplicações fazem uso do conceito de fractal em sua essência. (...) Há modas em ciência, e elas acompanham tanto os *slogans* quanto as grandes rupturas. (p.260)

No próximo capítulo, discutiremos mais detalhadamente a utilização da Geometria Fractal no campo educacional onde relataremos nossa atuação ministrando as aulas e atividades do curso “Geometria Fractal para o Ensino Médio”, bem como nossas impressões, análises e conclusões acerca do mesmo.

Capítulo 3
Atividades com Geometria Fractal e suas Aplicações no Ensino de Matemática

“Aqui chegamos ao ponto que talvez devêssemos ter partido. O do inacabamento do ser humano. Na verdade, o inacabamento do ser ou sua inconclusão é própria da experiência vital. Onde há vida, há inacabamento.”

Paulo Freire

Para elaboração do nosso curso, recorremos às atividades existentes na literatura atual sobre Geometria Fractal. Não foi nosso interesse montar um método definitivo que possa nos revelar um “manual de instruções” de como se deve utilizar a Geometria Fractal no ensino-aprendizagem de Matemática. Nossa preocupação esteve centrada nos aspectos dessa abordagem que levam o aluno a demonstrar ou não a aquisição de conceitos/elementos necessários à resolução das questões propostas no pré e pós-teste.

A elaboração do curso foi feita de modo a proporcionar aos alunos uma visão geral da Geometria Fractal, suas aplicações, propriedades e sua relação com outras disciplinas e com a Matemática que eles tiveram (ou ao menos deveriam ter tido) durante o Ensino Médio. Para que esses objetivos pudessem ser atingidos, elaboramos estratégias de ensino baseadas em aulas práticas dialogadas, colocando-nos na condição de orientador das atividades. Com isso, queríamos contemplar o favorecimento de dois processos que cremos serem essenciais em uma aprendizagem voltada para a (re)descoberta: a visualização e a experimentação.

Segundo Etcheverry *et al* (2004), por visualização podemos entender “o processo de formar imagens, seja mentalmente ou com o auxílio de lápis e papel ou tecnologia” (p.60)[7]. A partir da visualização é que as inferências acerca do problema ou, no nosso caso, das atividades vão se delineando. A compreensão matemática tende a se tornar mais substancial na medida em que a visualização estimula os alunos a tecerem suas próprias suposições. Já a experimentação está intrinsecamente ligada às explorações efetuadas individualmente ou em grupo que permitem a realização de conjecturas matemáticas envolvidas nas atividades (Idem).

Neste capítulo, veremos a análise do pré-teste, a descrição e observação das aulas do curso e, por fim, a análise do pós-teste. As apostilas e as atividades a que nos referiremos no texto estão em anexo e nos apêndices no final desta obra e, para uma melhor compreensão, é recomendável observá-las assim que mencionadas no decorrer da leitura.

[7] “ el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnologia.” N.T.

3.1) ANÁLISE DO PRÉ-TESTE.

Questão 1.

Docenilda é uma "chocólotra" compulsiva e viciada em Matemática. Os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(a + b)^6$ expressam exatamente a quantidade de chocolates que Docenilda come durante a semana na seguinte ordem: o primeiro coeficiente é a quantidade de chocolates comidos por ela no domingo; o segundo coeficiente, a quantidade da segunda-feira; o terceiro, a quantidade da terça; e assim por diante. Qual a quantidade total de chocolates que Docenilda come durante uma semana?

Objetivo:

Verificar a habilidade de encontrar os coeficientes do binômio de Newton, algebricamente ou via Triângulo de Pascal, mediante uma situação contextualizada.

Conexões:

- Operações algébricas
- Binômio de Newton
- Triângulo de Pascal

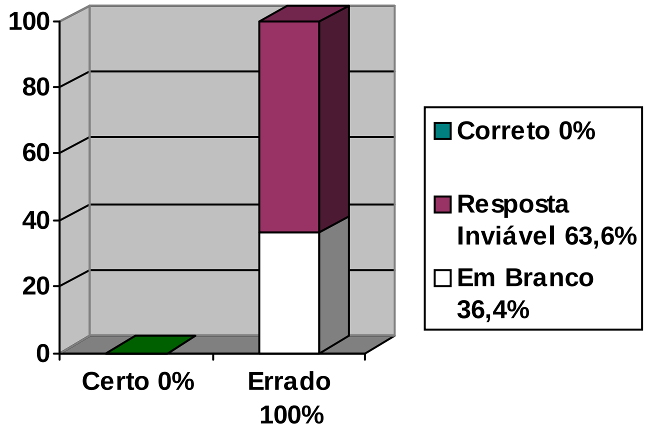
Análise Quantitativa:

Nome dos alunos	Teor das resoluções	
	Certo	Errado
Bill		X
Márcio		X
Kelly		X
Valdenira		X
Dariane		X
Lúcia		X
Júlia		X
Daniele		X
Suelly		X
Rick		X
Milton		X
Total	0%	100%

Análise Qualitativa:

A questão apresenta dois tipos de solução: na primeira, a resposta correta poderia ter sido obtida pela multiplicação dos seis termos (a + b) (a + b) (a + b) (a + b) (a + b) (a + b); na segunda, os coeficientes do binômio de Newton poderiam ter sido encontrados pela construção do triângulo de Pascal e a relação de sua sexta linha com o expoente 6 do binômio de Newton. Nenhum dos alunos conseguiu encontrar os coeficientes pedidos. Somente Valdenira percebeu que o segundo tipo de resolução poderia apresentar resposta satisfatória; chegou a tentar construir o triângulo de Pascal e relacionou uma de suas linhas com os coeficientes pedidos, mas tanto a construção quanto a relação se mostraram indevidas.

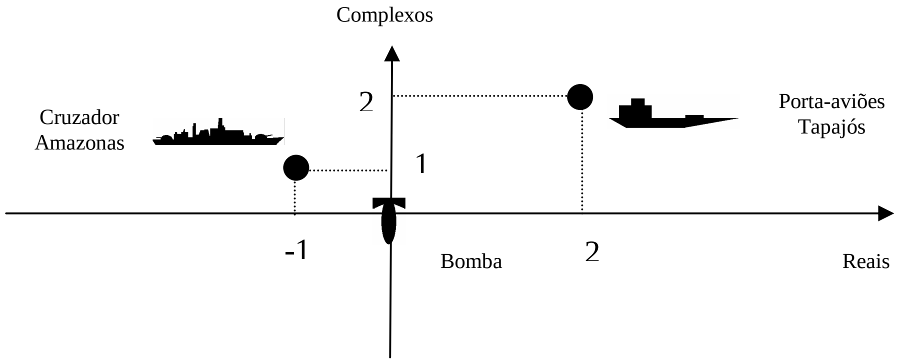
Gráfico III-1
Questão 1



Numericamente, 36,4% dos alunos deixaram a questão em branco, enquanto que 83,6% apresentaram resoluções inviáveis para a questão. Apenas 9,1% conseguiram apresentar um dos dois caminhos possíveis,

Questão 2.

A figura abaixo representa um sistema de radar que é utilizado no monitoramento de navios de guerra. A leitura desse sistema é feito através de coordenadas do plano complexo. O porta-aviões Tapajós está localizado no ponto referente ao número complexo $z_t = 2 + 2i$ *e o cruzador Amazonas está sobre o ponto* $z_a = -1 + i$*. Se uma bomba cujo raio de destruição eqüivale a 2 unidades do plano for jogada exatamente na origem (0, 0), os navios conseguirão sair intactos do ataque? Justifique sua resposta.*



Objetivo:

Verificar a noção de distância entre dois pontos dentro do plano complexo.

Conexões:

- Números Complexos
- Geometria Analítica

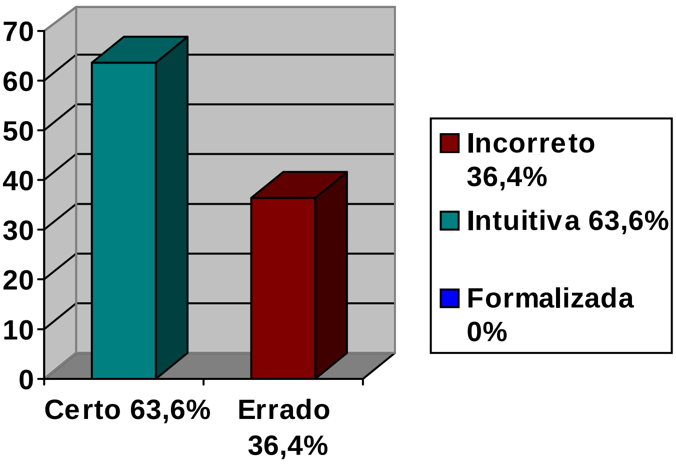
Análise Quantitativa:

Nome dos alunos	**Teor das resoluções** Certo	Errado
Bill	X	
Márcio	X	
Kelly		X
Valdenira	X	
Dariane		X
Lúcia	X	
Júlia	X	
Daniele		X
Suelly		X
Rick	X	
Milton		X
Total	63,6%	36,4%

Análise Qualitativa:

Entendemos como corretas as respostas que explicitarem que o cruzador Tapajós será atingido e o porta-aviões Amazonas não. Para nós, a justificativa nesta questão poderia ter se dado de duas formas: intuitiva e formal. Na intuitiva, a resposta se daria visualmente com a utilização da percepção geométrica de distância (percebendo o alcance da explosão através da construção mental de um círculo ao redor da bomba, por exemplo), podendo a justificativa ser dada geometricamente ou por extenso. Na formal, a resposta se daria com a utilização de técnicas apropriadas para calcular a distância entre a bomba e os navios que descreveriam, em números, o alcance da explosão.

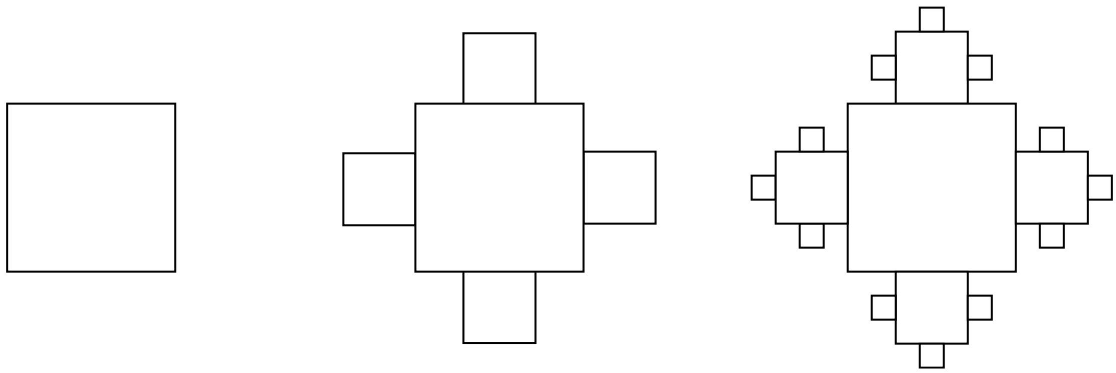
Gráfico III-2
Questão 2



Não houve nenhuma resposta formalizada. Todos os 63,6% alunos que acertaram a questão expuseram uma justificativa intuitiva, enquanto que 36,4% apresentaram resposta incorreta

Questão 3

Um fractal é uma figura geométrica que pode ser obtida através de processos iterativos. Observe o princípio de criação de um fractal com as iterações abaixo:



Iteração 1 Iteração 2 Iteração 3

Na primeira iteração o quadrado tem lado igual a 4. Na segunda, os quatro novos quadrados agrupados em cada lado da figura anterior possuem, cada um, metade do lado da iteração 1. Na terceira, cada novo quadrado tem a metade do lado da iteração anterior. Qual a área da figura formada na iteração 3?

Objetivo:

Verificar a compreensão do conceito de área de um quadrado e a utilização dessa compreensão em processos sucessivos de iteração.

Conexões:

- Geometria Plana
- Iteração

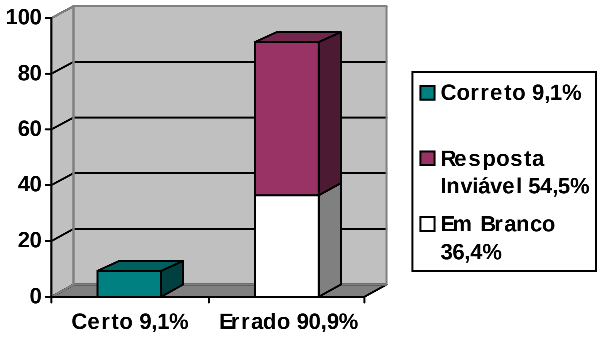
Análise Quantitativa:

Nome dos alunos	**Teor das resoluções** Certo	Errado
Bill		X
Márcio	X	
Kelly		X
Valdenira		X
Dariane		X
Lúcia		X
Júlia		X
Daniele		X
Suelly		X
Rick		X
Milton		X
Total	9,1%	90,1%

Análise Qualitativa:

O conceito de área de um quadrado é um dos conceitos fundamentais em geometria. Entendemos que uma boa apropriação deste conceito permite ao aluno sua utilização em situações diversas que necessitem de seu emprego e, com isso, ele pode transformá-lo em uma ferramenta que possibilite a compreensão e solução desta situação. Apenas Márcio conseguiu desenvolver a questão corretamente. Kelly, Valdenira, Dariane e Milton apresentaram respostas que demonstram um conhecimento equivocado do conceito de área de um quadrado e, portanto, não conseguem perceber o acréscimo de área quando mais quadrados são agregados ao quadrado inicial.

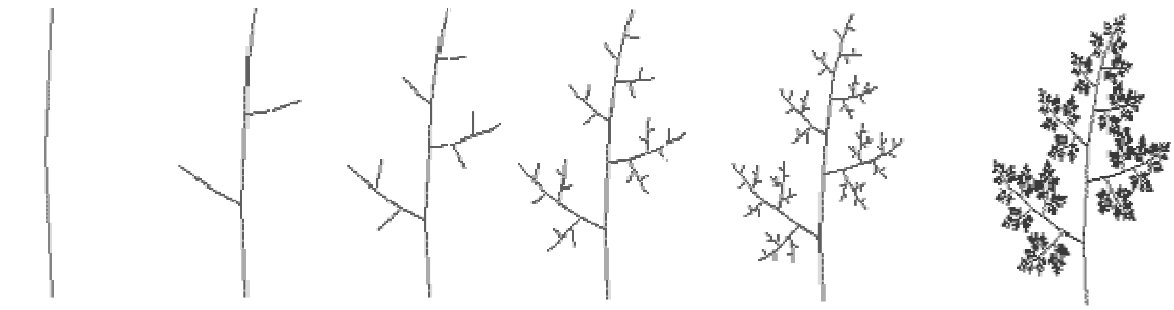
Gráfico III-3
Questão 3



Para os 90,1% das respostas erradas, 36,4 % dos alunos deixaram a questão em branco e 54,5% apresentaram uma resolução inviável. Somente 9,1% conseguiram respondê-la corretamente

Questão 4

A computação gráfica é uma área que se encontra em franca expansão. O que muita gente não sabe é que algumas das imagens mais belas e complexas são feitas por processos simples que se repetem várias vezes. Veja as etapas de criação do ramo abaixo:



Passo 1 Passo 2 Passo 3 Passo 4 Passo 5 Passo n

De acordo com a construção acima responda:
a) Qual a expressão que relaciona o número de passos com a quantidade de segmentos?
b) Quantos segmentos serão obtidos no passo 4?
c) O que acontece com o comprimento dos novos segmentos formados a cada novo passo?

Objetivo:

Verificar a habilidade de identificar, ainda que intuitivamente, o padrão e a tendência subjacente de processos iterativos, e a capacidade de transformar este padrão em uma equação que traduz a situação.

Conexões:

- Iteração
- Função exponencial
- Limite
- Progressão geométrica.

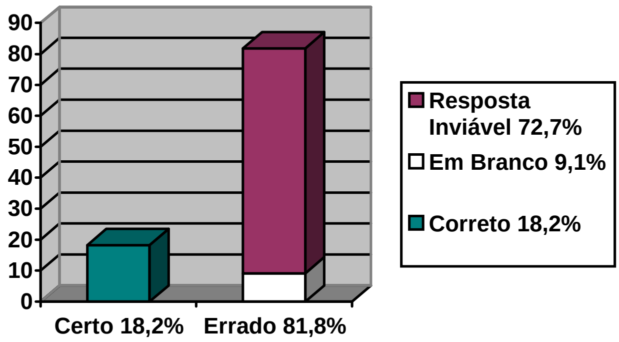
Análise Quantitativa:

Nome dos Alunos	**Teor das Respostas**					
	Item A		Item B		Item C	
	Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
Bill		X		X	X	
Márcio		X		X		X
Kelly		X		X		X
Valdenira	X		X		X	
Dariane		X		X		X
Lúcia		X		X		X
Júlia		X		X		X
Daniele		X		X	X	
Suelly		X		X		X
Rick		X		X	X	
Milton		X		X		X
Total	9,1%	90,9%	9,1%	90,9%	36,4%	63,6%

Análise Qualitativa:

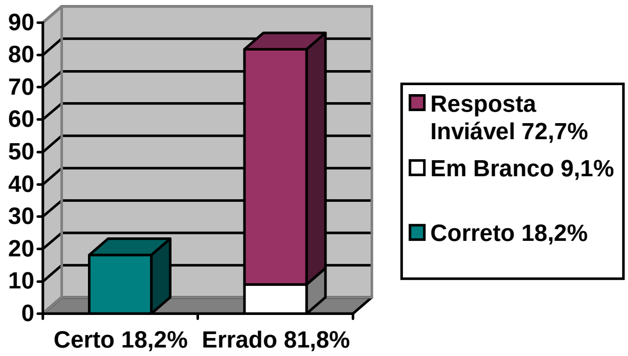
O conceito de função, além de ser um conceito fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático, possui certo grau de abstração. A apropriação deste conceito pode se tornar mais efetiva com a utilização de situações que propiciem ao aluno sua gradual percepção, partindo do intuitivo para o formal. Acreditamos que o problema apresentado possui características que podem fornecer elementos essenciais à percepção da situação de forma local (passo a passo) para depois generalizá-la globalmente (passo n) como pedido no item **a**. Apenas Valdenira apresentou uma equação correta. No item **b**, a resposta poderia ter sido dada em função da equação obtida anteriormente (caracterizando a aquisição da compreensão formal) ou através da percepção do número de segmentos em cada passo (caracterizando a compreensão intuitiva da situação). Apenas Valdenira e Rick responderam corretamente, sendo que a primeira se utilizou da equação obtida em **a** e o segundo percebeu intuitivamente sua resposta. No item **c**, entendemos como corretas as respostas que exprimem a diminuição do tamanho dos segmentos com o passar das iterações. Não houve nenhuma tentativa de esboçar uma resposta que pudesse sugerir uma convergência.

Gráfico III-4
Questão 4a



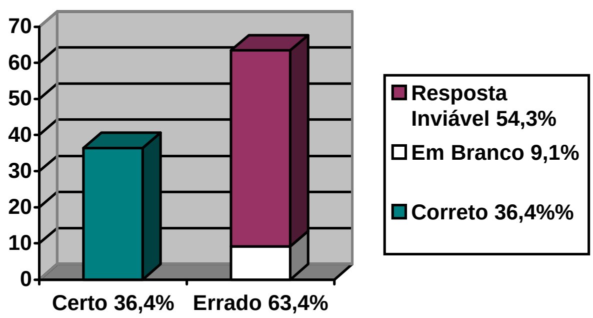
Para o item a, dos 90,9 % que responderam incorretamente, 81% apresentaram um resposta incompatível com a questão e 9,1% deixaram a questão em branco. Somente 9,1% conseguiram responder corretamente.

Gráfico III-5
Questão 4b



No item b houve um total de 18,2% de alunos que responderam corretamente. Para os outros 81,8% que erraram, 72,7% apresentaram

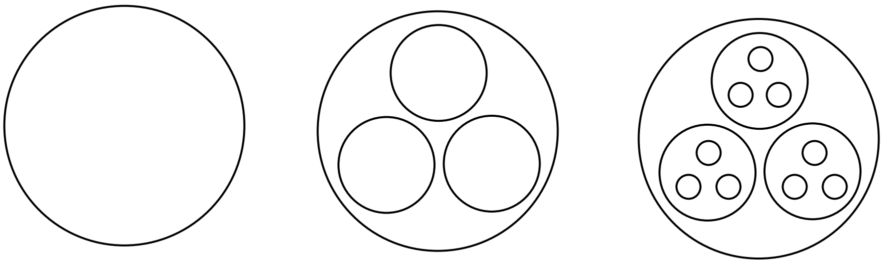
Gráfico III-6
Questão 4c



No item c foram consideradas corretas 36,4% das respostas. Das 63,4% respostas consideradas incorretas, 9,1% estavam em branco e 54,3% apresentavam solução inviável.

Questão 5

A fibra ótica vem causando uma revolução na transmissão de dados. Sem ela, por exemplo, as transmissões de TV, via cabo, seriam inviáveis. A informação é levada dentro de cabos espelhados internamente em forma de luz e, por isso, os dados são transportados a uma velocidade altíssima. Por motivo de economia, um cabo pode ter vários cabos internos e estes, por sua vez, outros mais. Abaixo vemos um corte frontal de um mesmo cabo em três etapas:



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

a) Se o cabo principal, na etapa 1, possui raio igual a 12 cm, qual a sua área?
b) Qual a área restante do cabo principal na etapa 2 se os cabos inseridos possuem raio três vezes menor que o cabo principal?
c) Se fosse possível que a inserção de cabos continuasse indefinidamente, qual seria a tendência da área dos novos cabos?

Objetivo:

Verificar a compreensão do conceito de área do círculo e sua aplicação em um problema dado, além de verificar, ainda que intuitivamente, a noção de tendência num processo iterativo.

Conexões:

- Geometria plana
- Iteração
- Limite

Análise Quantitativa:

Nome dos Alunos	Teor das Respostas					
	Item A		Item B		Item C	
	Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
Bill		X		X	X	
Márcio	X		X		X	
Kelly		X		X		X
Valdenira	X		X		X	
Dariane		X		X		X
Lúcia		X		X	X	
Júlia		X		X		X
Daniele		X		X		X
Suelly		X		X		X
Rick		X		X		X
Milton		X		X	X	
Total	18,2%	81,8%	18,2%	81,8%	45,4%	54,5%

Análise Qualitativa:

A correta compreensão do conceito de área certamente pode levar o aluno a utilizá-la de forma adequada nas situações propostas. Sendo assim, Bill revela que não conseguiu discernir a diferença entre o significado da equação $2\pi r$ da equação πr^2 o que, talvez por este motivo, acarretou uma resposta inviável ao item seguinte. Os alunos Márcio e Valdenira foram os únicos a responder o item **b** corretamente, pois nos parece que, devido a comprovada aquisição do conceito de área do círculo (responderam corretamente ao item **a**), conseguiram perceber que a área restante seria obtida pela diferença entre a área do círculo maior (etapa 1) e soma das áreas dos três círculos menores (etapa 2). Para nós, a percepção de que as áreas tendem a diminuir com o passar das iterações caracteriza que o aluno compreendeu a dinâmica do processo iterativo. A aluna Valdenira, entretanto, foi mais longe. Concluiu que elas deveriam convergir para um valor determinado (zero) revelando, deste modo, que sua percepção conseguiu avançar para além daquilo que nos propusemos a verificar.

Gráfico III-7
Questão 5a

No item a, 18,2% responderam corretamente. Para os 81,8% de respostas incorretas, 63,6% estavam em

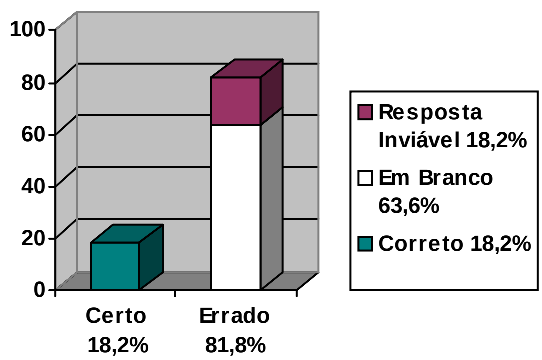
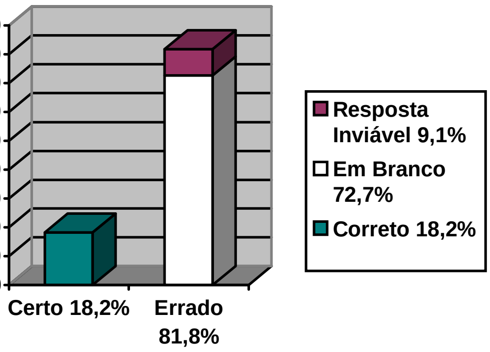
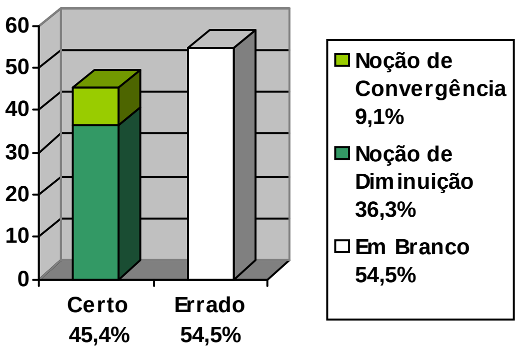


Gráfico III-8
Questão 5b



No item b desta questão, apenas 18,2% conseguiram responder corretamente. Para os 81,8% de respostas consideradas erradas, 72,8% foram deixadas em branco e apenas 9,1% tentaram esboçar alguma forma

Gráfico III-9
Questão 5c



No item c, todas os 54,5% de respostas consideradas erradas estavam em branco. Dos 45,4% de alunos que conseguiram acertar este item, 36,3% expressaram que os raios diminuíam, enquanto 9,1% perceberam que, além de diminuir, eles

3.2) DESCRIÇÃO DAS AULAS DO CURSO.

Veremos agora uma descrição das aulas do curso. Ao final dos trabalhos, colocou-se à disposição as apostilas e as atividades desenvolvidas com seus respectivos objetivos.

3.2.1) *Aula do dia 10/08/2004.*

Começamos com uma rápida apresentação nossa como ministrante do curso, dos dias e do formato que ele teria para os onze alunos que compareceram e, logo em seguida, foi aplicado o pré-teste. Não fizemos qualquer tipo de intervenção enquanto resolviam as questões e, exceto a máquina de calcular, não houve consulta a qualquer material que pudesse ajudá-los na prova e também não houve comunicação entre eles.

Após o recolhimento das provas, entregamos a atividade de “Descoberta da Geometria Fractal”. Na primeira questão, percebemos que os alunos não demonstraram muita dificuldade em relacionar os objetos com as figuras euclidianas pedidas. Na segunda questão, os alunos não conseguiram visualizar uma única figura geométrica, o que é comprovado quando Valdenira perguntou se “poderia ser a junção de várias figuras”.

Depois que os alunos perceberem esta dificuldade, discutimos que a Geometria Euclidiana consegue definir bem as formas feitas pelo homem, mas apresenta deficiências quando tenta descrever formas naturais. Expomos o fato de que, mesmo a Geometria Euclidiana tendo sido estudada e aplicada durante 2 000 anos, esta falha parece ter sido encoberta ou negligenciada pelos matemáticos nesse tempo e que a Geometria Fractal poderia descrever melhor tais formas.

Notamos que a discussão estava ficando interessante para eles, pois já questionavam esses argumentos entre si quebrando o silêncio de até então. Mas antes que pudessem pensar na Geometria Euclidiana como ultrapassada, deixamos claro o fato de que ela teve, tem ainda, e terá durante muito tempo, papel decisivo no avanço do conhecimento matemático.

Fornecemos o material da “Apostila I” para que pudéssemos começar a entender o que é a Geometria Fractal. Fomos lendo em voz alta e eles acompanhavam nossa leitura com seu próprio material. Fazíamos pequenas paradas para enfatizar ou detalhar melhor um ponto ou outro que achássemos necessário. Vimos uma introdução da parte de dimensão fractal, mas abordamos com mais ênfase a propriedade da auto-similaridade. Antes do encerramento da aula, sugerimos que, quando voltassem para casa, observassem as árvores, as nuvens e outras formas naturais tentando perceber o padrão auto-similar.

3.2.2) *Aula do dia 11/08/2004.*

No início da aula, perguntamos aos alunos se eles haviam observado as formas naturais como pedido no dia anterior. Houve uma pausa que, a princípio, interpretamos como uma resposta negativa, mas, antes que começássemos a trabalhar a “Apostila II”, Valdenira comentou: “eu já havia percebido isso (o padrão de auto-similaridade), mas achei que era só coincidência”. Essa afirmação nos revela que alguns conceitos de Geometria Fractal podem se manifestar ou já estar arraigados intuitivamente. Entendemos que estas e outras idéias incipientes devem ser potencializadas no intuito de ajudar a aquisição dos conhecimentos matemáticos de maneira formal. O trabalho com Geometria Fractal pode fornecer o ferramental apropriado para que esta “transição” ocorra, não só pelo seu caráter majoritariamente intuitivo, mas também pelo apelo estético e visual de suas formas.

Depois de “quebrado o gelo”, Dariane e Suelly comentaram que também notaram esta característica e que achavam isto algo sem tanta importância assim. Expomos que, segundo a literatura existente sobre fractais, as formas naturais parecem ter uma tendência implícita de se mostrarem auto-semelhantes. “Uma solução simples que gera formas bastante complexas”, comentamos.

Começamos a abordagem da Apostila II com alguns problemas que Mandelbrot se deparou antes de dar a forma da Geometria Fractal que conhecemos hoje. Nesse momento, pudemos refletir que o conhecimento científico é construído através de etapas que se sucedem. Passos que progridem ou retrocedem. Discutimos ainda que a Matemática, assim como qualquer outra ciência, possui do mesmo modo este caráter construtivo. Procuramos desmistificar a Matemática como pronta e acabada com o objetivo de esclarecer que ela faz parte de uma tecedura epistemológica dinâmica, influenciada por conjunturas sociais, culturais e históricas. Após nossa fala, houve um grande silêncio. Notamos que seus olhares estavam um pouco distantes, pensativos. Como se, no final de um filme de suspense, tivessem descoberto qual das personagens matou o mocinho. Após este pequeno momento de reflexão, percebemos um aumento do interesse deles pelo restante da aula.

Finalizado o trabalho com a Apostila II, passamos para a atividade da “Poeira de Cantor”. Expomos em linhas gerais como deveriam proceder para realizar a atividade revisando os conhecimentos matemáticos necessários para sua resolução, mas vimos que eles apresentavam dificuldades em resolver e interpretar as questões. Com a atividade do “Floco de Neve de Koch”, vimos que já se sentiam mais a vontade nas resoluções, inclusive com grande parte dos alunos interpretando melhor os resultados obtidos.

Para dar início a atividade do “Conjunto de Mandelbrot”, revimos alguns fractais contidos nas apostilas e retomamos a discussão de que imagens complexas podem ser geradas por regras simples. Revimos o conteúdo matemático necessário para realização da atividade e explicamos como um ponto no plano complexo pode ser considerado ou não dentro do conjunto de Mandelbrot. Abordamos como é feito e o que é o processo de iteração, relacionando a fabricação das imagens com a atividade. Não houve tempo para que toda a atividade fosse feita em sala de aula e pedimos para que terminassem em casa o restante. Pedimos também para que cada um trouxesse um dado e uma régua para a próxima aula.

3.2.3) ***Aula do dia 17/08/2004.***

Começamos a aula deste dia perguntando como haviam se saído com as tarefas deixadas para casa. A maioria apontou dificuldades na atividade do floco de neve de Koch, especialmente as questões que envolviam área. Tecemos alguns comentários a respeito dando dicas de como poderiam proceder, sempre tomando o cuidado de não dar a resposta pronta e, sim, fornecendo maneiras possíveis de resolução.

Passamos, então, para uma breve revisão. (Re)Vimos como o triângulo de Pascal é construído e também o desenvolvimento do binômio de Newton na forma $(a + b)^n$ atribuindo valores naturais para **n**. Pedimos para que observassem as duas construções que estavam dispostas no quadro e expusessem suas conclusões. Todos rapidamente conseguiram perceber que os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton coincidiam com as linhas do triângulo de Pascal. Também abordamos outros padrões que existem dentro do triângulo de Pascal, como os números triangulares e a simetria dos seus elementos.

A seguir, iniciamos a atividade do "Triângulo de Pascal". O que mais nos impressionou foi a sensação de surpresa que os alunos apresentavam ao completar as tarefas da atividade e descobrir fractais embutidos ali. Vários foram os comentários entre eles nesse sentido, dos quais destacamos o de Bill que exprimiu: "é muito bacana fazer desse jeito". Pareceu-nos que estes tópicos, finalmente, tinham ganhado um sentido ou, ao menos, um outro sentido potencialmente mais significativo para eles. Isso acaba comprovando o que nossos anos de prática como professor na rede pública de ensino já haviam detectado: a Matemática ensinada somente de forma mecânica e isolada acaba não oferecendo a possibilidade de proporcionar um aprendizado substancial ao aluno. Ao tornar evidente as conexões existentes entre o triângulo de Pascal, o binômio de Newton e a Geometria Fractal, pudemos notar que os alunos começaram a perceber mais concretamente que o corpo de conhecimentos matemáticos não estão isolados entre si, que não estão dispostos em um balcão separados por prateleiras que correspondem aos tópicos de Matemática vistos por eles em suas vidas escolares.

Depois de pedir que tentassem, em outro momento, descobrir novos padrões com os outros múltiplos, fechamos esta atividade com a pergunta: "será que o triângulo de Pascal é na verdade um fractal?".

Após quase dois minutos de silêncio, continuamos a aula com a atividade do "Jogo de Caos" onde pedimos para que lessem atentamente o comando e marcassem os pontos pedidos com o auxílio do dado e da régua solicitados na aula anterior. Terminada a marcação, expomos no quadro como era obtido o fractal chamado de triângulo de Sierpinski e explicamos que este método era conhecido como método da retirada. Mostramos outros fractais gerados por este mesmo método como o carpete de Sierpinki e a própria poeira de Cantor.

Inquirimos os alunos para que identificassem algum tipo de padrão existente na marcação que acabaram de executar e obtivemos resposta negativa de todos. Solicitamos, então, que localizassem os pontos médios de cada lado do triângulo e os ligassem. Perguntamos se algum ponto estava dentro do triângulo central. Suelly e Júlia responderam que havia alguns, mas os demais disseram ou que havia pouco ou que não havia nenhum. Pedimos para que encontrassem os pontos médios dos novos triângulos criados, excetuando-se o triângulo central e os ligassem novamente e voltamos a perguntar se existiam pontos dentro dos novos três triângulos centrais as respostas não variaram muito.

Nesse momento, fomos de carteira em carteira observar como estavam dispostos os pontos marcados e se todos estavam criando os novos triângulos de acordo com a construção do triângulo de Sierpinski visto há pouco. Fizemos as perguntas: “se continuarmos a marcar os pontos indefinidamente e, utilizando este método, formaremos algum tipo de figura? Surgirá algum padrão ou teremos um emaranhado de pontos sem sentido algum?”. Valdenira foi a única a nos responder que os pontos formariam o triângulo de Sierpinski.

Ao observamos as marcações de cada um, Valdenira tinha em sua atividade as linhas menos “tortas” que os outros, mesmo todos sendo auxiliados por réguas similares. A melhor precisão de Valdenira pode ter sido um dos fatores que influenciaram na sua resposta correta. Nos nossos anos de trabalho na escola pública onde utilizamos, na maioria das vezes, apenas o quadro negro e o giz como recursos didáticos, várias vezes nos deparamos, em sala de aula, principalmente em Geometria, com resoluções erradas pelo fato da “visualização da figura” não ter sido bem compreendida pelo aluno. Ora, por nossa “culpa”, pois, sem livros didáticos, desenhamos todas as figuras no quadro à mão livre. Ora por “culpa” do aluno, devido a sua incapacidade de repassá-las corretamente para o caderno. Não é dever nem do professor e nem do aluno tornarem-se exímios desenhistas para que se compreenda corretamente os conceitos que ficam mais evidentes com a visualização de determinadas formas. Não que isto não se faça necessário em alguns casos, mas para que o desenvolvimento do pensamento matemático possa ser o alvo principal das nossas aulas, entendemos que este “trabalho braçal” deva ser amenizado/facilitado com recursos que possam favorecer a aquisição/apropriação dos conteúdos matemáticos. Deixar de fazer o aluno somente trabalhar com os punhos e começar fazê-lo trabalhar com mais ênfase o desenvolvimento de seu raciocínio.

Somente mais tarde, com nossa ajuda e com a interação entre eles, aos poucos todos foram percebendo a convergência do processo para o triângulo de Sierpinski. Finalizamos esta atividade explicando que de processos aparentemente caóticos podem emergir padrões e vice-versa e que este é um dos motivos para a Geometria Fractal ser apelidada de “visualização do caos”.

Passamos para a atividade dos “Materiais Manipulativos”. Colocamos uma grande mesa retangular no meio da sala e em seu centro depositamos todas as peças. Pedimos para que eles respondessem as atividades com o auxílio das peças e todos se posicionaram ao redor da mesa.

Percebemos que todos respondiam às questões da atividade baseados na compreensão da montagem dos fractais. Com isso, Júlia exclamou que “ficou mais fácil ver os fractais assim”. Notamos que os outros alunos também tinham opiniões semelhantes à opinião de Júlia. Diante desses comentários, refletimos que talvez tivesse sido mais interessante que esta atividade fosse realizada no início do curso para que eles percebessem, de maneira mais concreta, a formação de um fractal. Finalizamos expondo que este tipo de construção fractal recebe o nome de “agregamento” e que vários organismos vivos se utilizam desta técnica para crescer. Como é o caso das algas marinhas. Informamos que a próxima aula ocorreria no laboratório de informática do NTE e que no dia seguinte todos se dirigissem para lá no mesmo horário.

3.2.4) *Aula do dia 18/08/2004.*

Neste dia, a aula foi realizada no Núcleo Tecnológico Educacional (NTE) onde dispúnhamos de uma sala informatizada e com computadores ligados a Internet. Devido a sala estar equipada com um número de máquinas superior ao número de alunos, a relação computador/aluno foi de um para um. Instalamos na área de trabalho de cada máquina dois aplicativos simples retirados da página *www.efg2.com* que geravam passo a passo o triângulo de Sierpinski em um deles, e a curva e floco de neve de Koch no outro com variações. Fizemos um breve comentário sobre as funções de cada botão e, em seguida, ficaram à vontade para experimentar os limites dos programas. Como os aplicativos possuíam um número máximo de iterações, aproveitamos para dizer que os computadores podiam gerar fractais com muitos detalhes, mas não com todos já que para isso eles precisariam iterar os passos e exibir os detalhes infinitamente, o que é impossível atualmente.

Pedimos para que todos abrissem o programa *explorer* e entrassem no site *www.shodor.org/interactivate.activities.index.html*. Esta página contém uma lista de atividades voltadas para o ensino da Matemática e, entre elas, existem várias sobre fractais. Nós a escolhemos por ser de fácil compreensão, sem se fazer necessário conhecimentos avançados sobre informática e/ou programação.

Vimos todas as atividades anteriores, porém utilizando o auxílio do computador. Os alunos constataram que todos os processos de iteração que haviam feito manualmente poderiam ter sido realizados pela máquina. Pudemos perceber o grande interesse em realizar as tarefas que, basicamente, consistiam em refazer as anteriores com um novo tipo de ferramenta e sob uma nova perspectiva. Com o novo recurso, pudemos abordá-las mais rapidamente dando tempo para vermos a construção de outros fractais contidos no site.

Em especial, destacamos o grande número de comentários quando revimos a atividade do Jogo do Caos: “Ah! Agora sim.” (Bill), “Então é assim é?” (Dariane) e outros que não pudemos registrar, mas que deduzimos expressarem significados semelhantes. Essas afirmações nos dão a impressão de que esta atividade feita apenas com lápis e papel, assim como algumas outras, pode se tornar um obstáculo para sua total compreensão. A ajuda do computador pôde proporcionar a visualização das situações fazendo com que eles percebessem a convergência para o triângulo de Sierpinski. Na medida em que houve uma melhor percepção visual da atividade, também houve um melhor entendimento da mesma. Quantas vezes em sala de aula nos deparamos com situações semelhantes e encaramos isto como falta de habilidade por parte do aluno, sem nos darmos conta de que talvez este insucesso possa ter outra causa e, sem perceber, alimentamos a estatística do fracasso escolar?

Deixamos os alunos à vontade para navegar na Internet nos trinta minutos restantes para o término da aula. Fornecemos o endereço de outros sites que lidam com fractais, mas só Valdenira e Márcio pesquisaram mais sobre Geometria Fractal; os demais entraram na página *www.globo.com* para saber mais detalhes sobre os próximos capítulos da novela *Malhação* ...

3.2.5) ***Aula do dia 24/08/2004.***

Começamos este último dia com a atividade das árvores fractais. Durante a atividade, percebemos que os alunos já demonstravam bastante desenvoltura ao construir geometricamente os modelos apresentados. Já possuíam algum domínio sobre o desenvolvimento dos processos iterativos, mas ainda percebemos dificuldades na realização de tarefas que necessitavam da parte formal do conhecimento matemático como, por exemplo, a generalização de um crescimento exponencial.

Após a atividade, aplicamos o pós-teste e o questionário encerrando as atividades do nosso curso. Valdenira, Bill e Márcio foram os primeiros a entregarem suas folhas e, enquanto os outros ainda estavam respondendo o questionário, sentaram-se perto de nossa mesa. Disseram-nos que tinham gostado do curso e que gostariam de participar de outros cursos que, por ventura, nós viéssemos a ministrar. Como é nosso primeiro ano como professor deste colégio, contaram-nos que nos anos anteriores não havia incentivo algum por parte da direção ou do corpo técnico em inseri-los em iniciativas como esta. “Aqui todos só estão preocupados com a banda” disse Bill referindo-se à banda marcial do colégio que se apresentaria no próximo dia 7 de setembro. Para Valdenira, se mais oportunidades como estas fossem ofertadas “estaríamos mais preparados para o vestibular”, afirma. Márcio nos falou que, mesmo tendo estudado com afinco a maioria dos conteúdos matemáticos aqui apresentados e conseguido excelentes notas, ele se sentia “meio perdido em fazer as atividades”.

Independentemente do motivo de cada um, pudemos notar que estes alunos procuravam algo que não estavam encontrando dentro de sala de aula. Talvez uma maneira de se apropriar melhor daquilo que vinham estudando, ou talvez tentando se preparar da melhor maneira possível para o vestibular. De qualquer forma, este fato nos preocupou bastante, já que somos o professor de Matemática destes alunos e, portanto, deveríamos ter suprido estas necessidades ou, no mínimo, tê-las identificado. Muitas vezes, como professores, somos levados a cumprir rigorosamente o conteúdo programático e a seguir os métodos de ensino mais “aconselháveis” pelos programas e não percebemos que, ao agir desta maneira, podemos estar extirpando a criatividade dos nossos alunos, privando-os de se tornarem o principal agente na construção do seu próprio conhecimento. O curso, como vimos antes, serviu para atentar diferentes objetivos vislumbrados pelos alunos, mas, principalmente, deu-nos a oportunidade de, como professor, repensar a nossa própria prática.

A seguir veremos as respostas do pós-teste.

3.3) ANÁLISE DO PÓS-TESTE.

Questão 1.

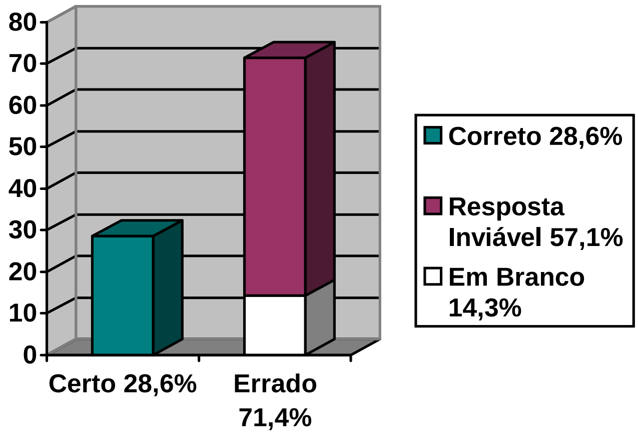
Análise Quantitativa:

Nome dos alunos	Teor das resoluções	
	Certo	Errado
Bill		X
Márcio	X	
Valdenira	X	
Dariane		X
Lúcia		X
Júlia		X
Suelly		X
Total	28,6%	71,4%

Análise Qualitativa:

Bill, Suelly, Dariane e Lúcia apresentaram um caminho possível demonstrando terem as habilidades necessárias para a construção do triângulo de Pascal. Portanto, percebemos que a atividade proporcionou um aprendizado satisfatório nesta parte da questão o que mostra um avanço em relação ao primeiro momento. Porém, para estes alunos, ela não potencializou a relação do triângulo de Pascal com o binômio de Newton para a resolução completa da questão e as resoluções foram consideradas incorretas. Valdenira e Márcio conseguiram desenvolver acertadamente todo o problema. Isso mostra que, para eles, a atividade foi totalmente válida na resolução da questão. De qualquer forma, com exceção de Júlia, todos apresentaram uma melhoria significativa tanto na tentativa de encontrar uma solução possível e/ou um caminho válido, quanto na compreensão da situação dada.

Gráfico III-10
Questão 1



Numericamente, 14,3 % dos alunos deixaram a questão em branco, enquanto que 57,1% apresentaram resoluções inviáveis para a questão. As respostas

Questão 2.

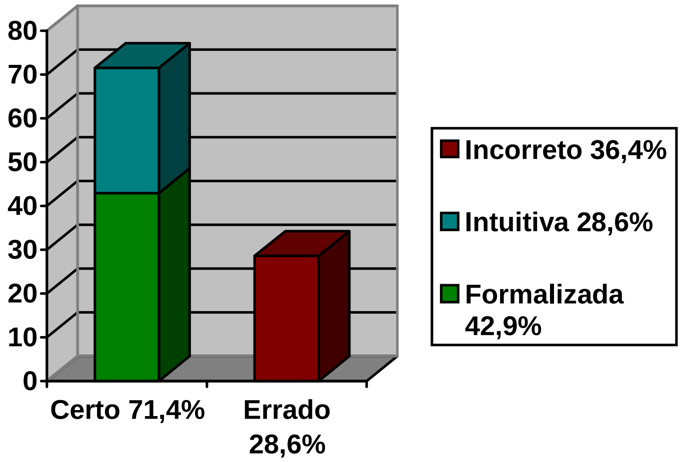
Análise Quantitativa:

Nome dos alunos	Teor das resoluções Certo	Errado
Bill	X	
Márcio	X	
Valdenira	X	
Dariane		X
Lúcia	X	
Júlia	X	
Suelly		X
Total	71,4%	28,6%

Análise Qualitativa:

Percebemos que alguns alunos mostraram tendência em apresentar justificativas com argumentações mais consistentes. Bill, Valdenira e Márcio, que no pré-teste demonstraram possuir apenas a noção intuitiva de distância entre dois pontos no plano complexo, conseguiram explicitar suas justificativas formalmente. O trabalho com Geometria Fractal parece ter proporcionado a eles o aprendizado formal deste conceito, e isto, para nós, representa uma melhora qualitativa na compreensão da situação apresentada. Para Lúcia e Júlia, o uso dos cálculos necessários para encontrar a distância entre a bomba e os navios não foi apresentado. Entretanto, ambas conseguiram responder corretamente caracterizando que possuem intuitivamente a noção da distância requerida. Portanto, para elas, não houve alteração relevante com relação ao pré-teste visto que as respostas foram semelhantes, o mesmo ocorrendo com Suelly e Dariane que responderam incorretamente a questão nos dois momentos.

Gráfico III-11
Questão 2



Dos 71,4% de alunos que acertaram a questão, 42,9% apresentaram uma justificativa formalizada e 28,6% justificativa intuitiva. Houve 28,6% de

Questão 3.

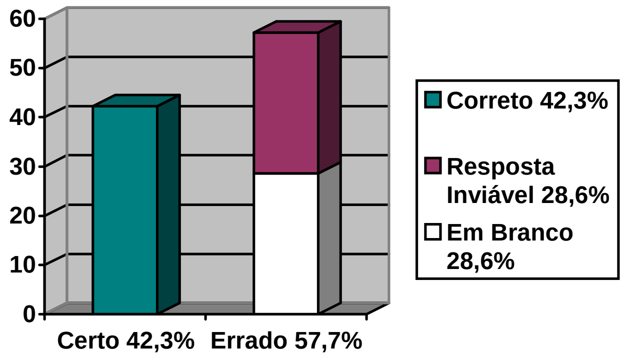
Análise Quantitativa:

Nome dos alunos	Teor das resoluções Certo	Errado
Bill	X	
Márcio	X	
Valdenira	X	
Dariane		X
Lúcia		X
Júlia		X
Suelly		X
Total	42,3%	57,7%

Análise Qualitativa:

Notamos que os alunos Bill e Valdenira conseguiram se (re)apropriar adequadamente de conceito de área do quadrado e perceberam o processo iterativo subjacente respondendo satisfatoriamente a questão. Isto sugere que as atividades com Geometria Fractal oportunizaram o (re)aprendizado dessas duas habilidades, já que ambos apresentaram respostas erradas no pré-teste. Márcio desenvolveu a resolução desta questão corretamente nos dois momentos. Dariane e Suelly, que no pré-teste deixaram a questão em branco, esboçaram tentativas de resolução que se mostraram inviáveis pela falta das habilidades mencionadas anteriormente. Os demais deixaram a questão em branco.

Gráfico III-12
Questão 3



Para as 57,7% das respostas erradas, 28,6 % dos alunos deixaram a questão em branco e 28,6% apresentaram uma resolução inviável. 42,3% conseguiram

Questão 4.

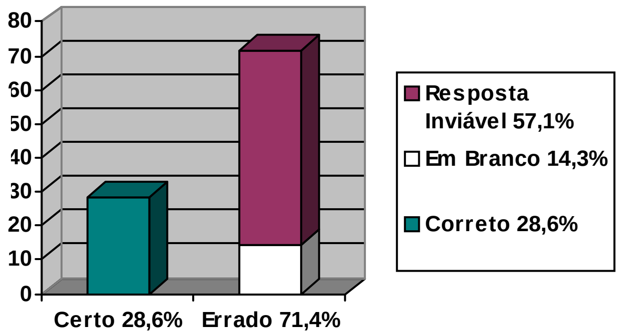
Análise Quantitativa:

Nome dos Alunos	**Teor das Respostas**					
	Item A		Item B		Item C	
	Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
Bill		X		X	X	
Márcio	X		X		X	
Valdenira	X		X		X	
Dariane		X		X		X
Lúcia		X		X		X
Júlia		X		X		X
Suelly		X		X		X
Total	28,6%	71,4%	28,6%	71,4%	42,9%	57,1%

Análise Qualitativa:

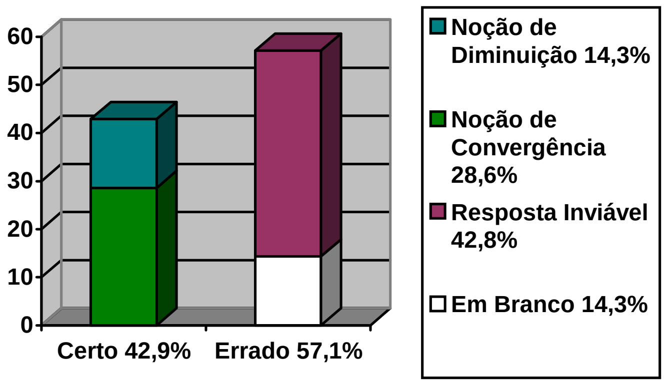
Apesar de Márcio e Valdenira serem os únicos a conseguirem responder corretamente os itens **a** e **b**, percebemos uma significativa melhora na qualidade das respostas dos demais alunos que, com exceção de Lúcia que deixou toda a questão em branco, tentaram descobrir/identificar o padrão existente nas iterações. Entendemos esta tentativa, ainda que incorreta, como um avanço no sentido de formalizar em uma expressão matemática uma situação concreta. No item **c**, percebemos o aumento do número de respostas corretas caracterizando a compreensão do processo iterativo. Além disso, dentre as respostas corretas, pudemos constatar que os alunos Márcio e Valdenira perceberam a convergência da iteração. Ou seja, para este item, houve a elevação do número de respostas corretas (melhora quantitativa) e, entre essas respostas corretas, houve o aumento da percepção da convergência do processo (melhora qualitativa).

Gráfico III-13
Questão 4 itens a e b



Os porcentuais dos itens a e b foram idênticos. Dos 71,4% que responderam incorretamente, 57,1% apresentaram respostas inviáveis e 14,3% deixaram a

Gráfico III-14
Questão 4c



Dos 42,9% de alunos que acertaram este item, 14,3% perceberam que os segmentos dimuíam e 28,6% conseguiram perceber que eles tenderiam a zero. Para os 57,1% de respostas consideradas erradas, 42,8% apresentaram uma

Questão 5.

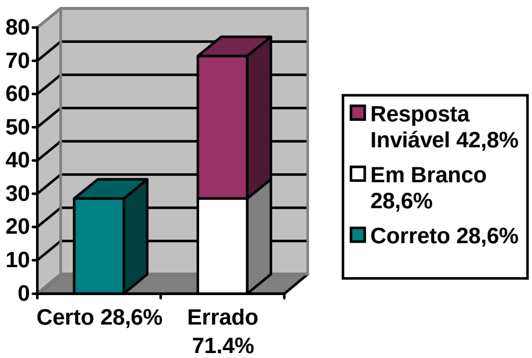
Análise Quantitativa:

Nome dos Alunos	Teor das Respostas					
	Item A		Item B		Item C	
	Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
Bill		X		X	X	
Márcio	X		X		X	
Valdenira	X		X		X	
Dariane		X		X		X
Lúcia		X		X		X
Júlia		X		X		X
Suelly		X		X	X	
Total	28,6%	71,4%	28,6%	71,4%	57,1%	42,9%

Análise Qualitativa:

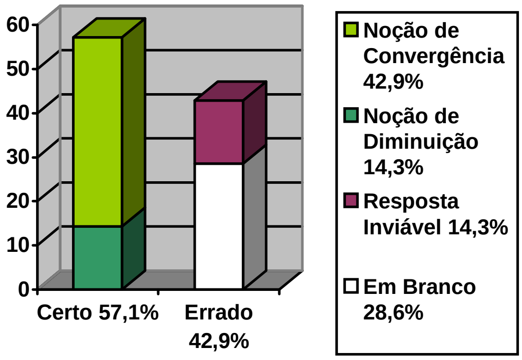
Assim como na questão anterior, nos itens **a** e **b**, houve uma significativa melhora na qualidade das respostas incorretas ainda no sentido de formalizar a situação em uma equação matemática. Com relação a elas, chamou-nos atenção a resposta dada por Bill que considerou $2\pi r$ como a fórmula que expressa a área de um círculo e, mesmo assim, desenvolveu os itens corretamente, porém com a fórmula errada. Por vezes, em nossa prática como professores, enchemos nossos alunos com fórmulas sem nos preocuparmos se elas estão potencializando algum real sentido para eles. Esta falta de sentido pode ter influenciado Bill a optar/escolher por $2\pi r$ em vez de πr^2. Ao refletir sobre este fato, notamos também que em nenhum momento durante o curso (re)vimos como calcular a área de um círculo, o que provavelmente poderia ter ajudado os alunos a responder melhor esta questão. No item **c**, Bill, Valdenira, Suelly e Márcio perceberam corretamente a tendência do processo iterativo e, dentre eles, Valdenira e Márcio conseguiram notar que as áreas convergiriam para zero.

Gráfico III-15
Questão 5a e 5b



Os itens a e b apresentaram mesmo porcentual. Foram consideradas corretas 28,6% das respostas. Para os 71,4% de respostas incorretas, 28,6% estavam em branco e

Gráfico III-16
Questão 5c



Para as 42,9% de respostas incorretas, houve 14,3% de respostas inviáveis e 28,6% deixaram este item em branco. Já nas respostas consideradas corretas, 14,3% notaram que os raios diminuíam e 42,9% conseguiram perceber que, além de

3.4) COMPARATIVO QUANTITATIVO.

Diante das análises feitas no pré-teste e no pós-teste, faremos um comparativo quantitativo entre os resultados obtidos nestes dois momentos. Utilizaremos neste quadro apenas as respostas consideradas corretas.

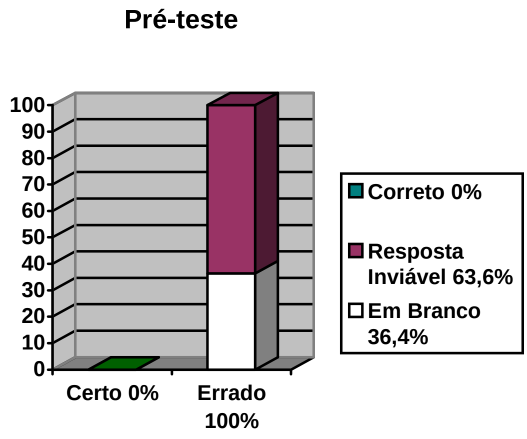
	Alunos que resolveram corretamente (%)	
Questões	**Pré-teste***	**Pós-teste****
1ª Questão	0	28,6
2ª Questão	63,6	71,4
3ª Questão	9,1	42,3
4ª Questão (A)	9,1	28,6
4ª Questão (B)	18,2	28,6
4ª Questão (C)	36,4	42,9
5ª Questão (A)	18,2	28,6
5ª Questão (B)	18,2	28,6
5ª Questão (C)	36,4	57,1

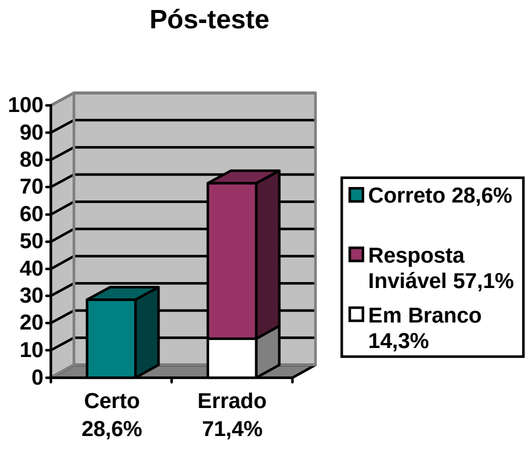
*Teste feito por 11 alunos.
** Teste feito por 7 alunos.

3.5) COMPARATIVO QUALITATIVO.

Também baseados nas respostas apresentadas pelos alunos no pré e no pós-teste, faremos uma análise qualitativa na qual serão consideradas tanto as respostas consideradas corretas, quanto as incorretas juntamente com o teor destas resoluções.

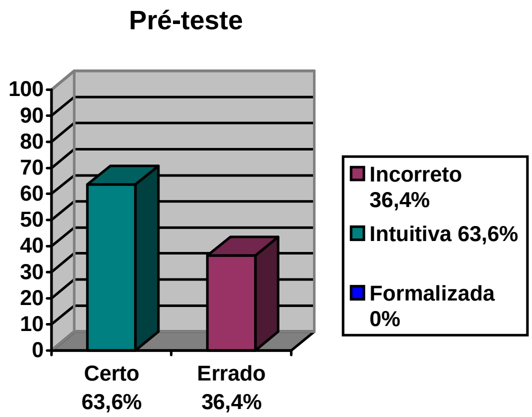
Questão 1

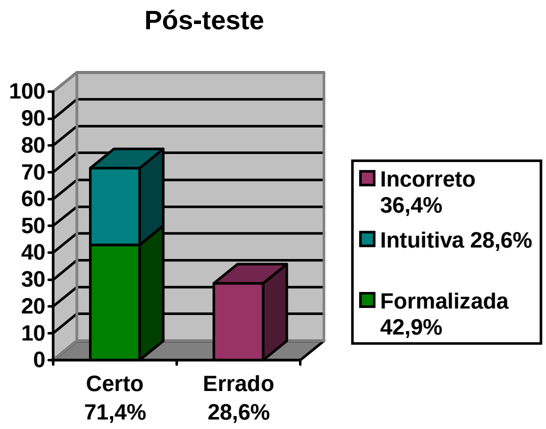




Notamos que no primeiro momento todos os alunos erraram a questão. Houve um aumento de 28,6% nas respostas corretas no segundo momento, mas que, mesmo assim, ainda representam um número baixo de acertos. O que mais nos chamou a atenção foi a diminuição do porcentual de respostas em branco. Isso demonstra que, se no pré-teste os alunos sequer imaginaram uma resolução possível, no pós-teste já houve a apresentação de um caminho válido. O trabalho com a atividade do Triângulo de Pascal pôde dar uma visão mais ampla da situação, mas que ainda se mostrou insuficiente na resolução da questão por parte destes alunos.

Questão 2

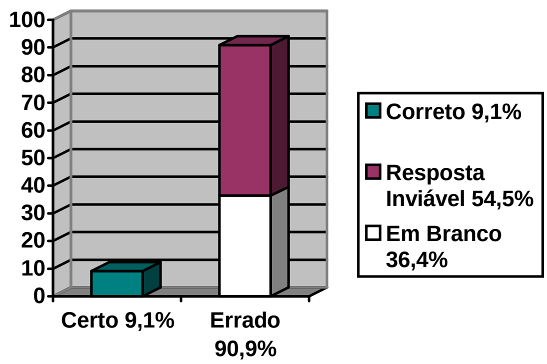




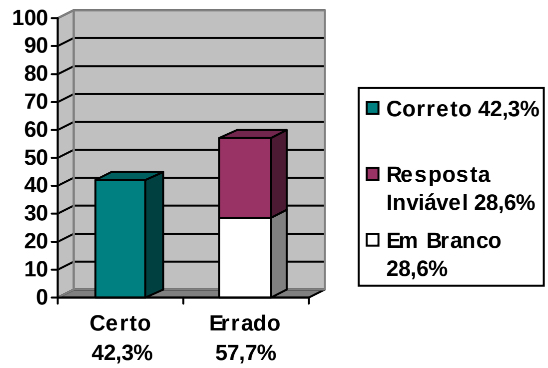
Houve um ligeiro aumento no porcentual da respostas corretas. Dentre estas respostas, percebemos também o aumento das resoluções formalizadas, isto é, a apresentação correta de uma justificativa matemática plausível. Isso sugere que a atividade do Conjunto de Mandelbrot pôde proporcionar a esses alunos o ferramental necessário não só para responder acertadamente, mas para se utilizar dos conceitos matemáticos necessários que o problema exigira.

Questão 3

Pré-teste



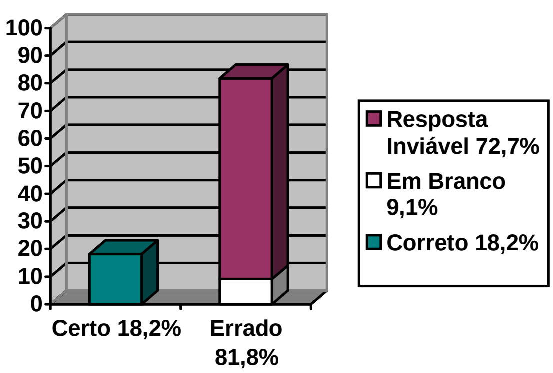
Pré-teste



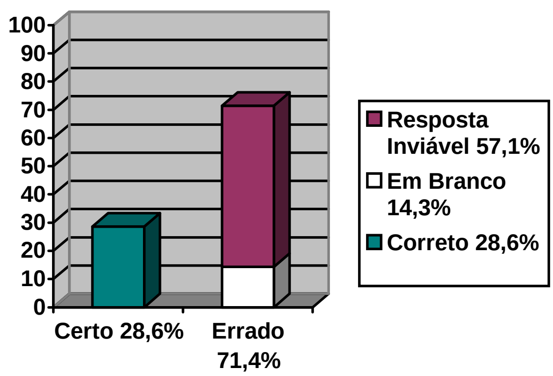
Como dito antes, nesta questão era essencial dominar o conceito de área de um quadrado e o entendimento do processo iterativo. Na comparação entre os dois gráficos e pelas tabelas anteriores, notamos a "migração" dos alunos que apresentaram resposta inviável no pré-teste para aqueles que apresentaram resposta correta no pós-teste. Com as atividades de Geometria Fractal, mais especificamente a do Floco de Neve de Koch, esses alunos conseguiram "saltar" de um patamar mais baixo, ou seja, a deficiência na compreensão de um dos conceitos acima, para a resolução correta da questão.

Questão 4 (Itens a e b)

Pré-teste

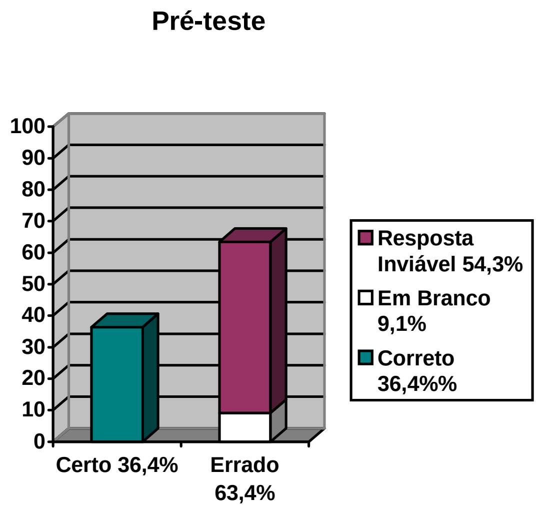


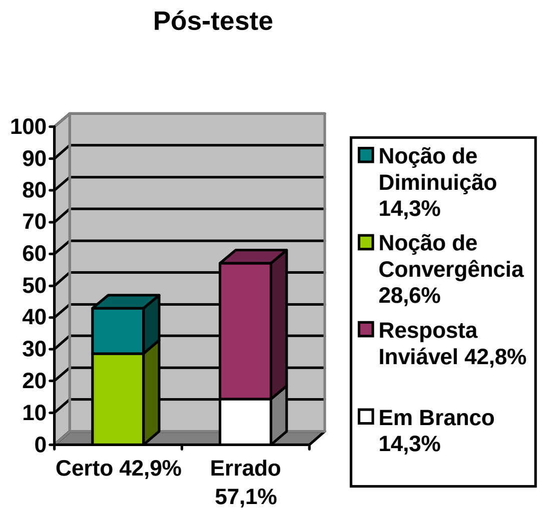
Pós-teste



Mesmo com o aumento de 10,4% nas respostas corretas, percebemos que os quadros não se alteraram tanto quanto se desejava. Para estes dois itens, as atividades não puderam proporcionar a aquisição dos conceitos matemáticos necessários para a resolução satisfatória do problema, como a modelação de uma situação real em uma equação e a compreensão do processo iterativo.

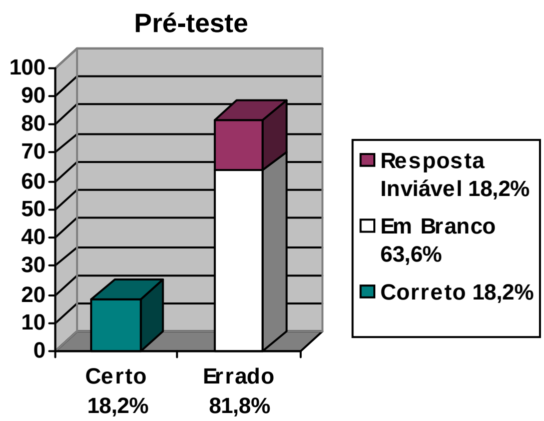
Questão 4 (Item c)

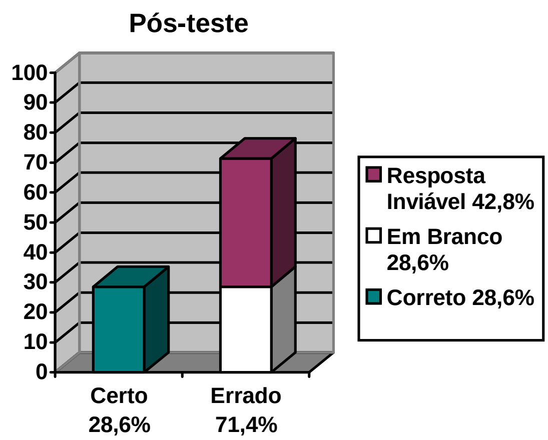




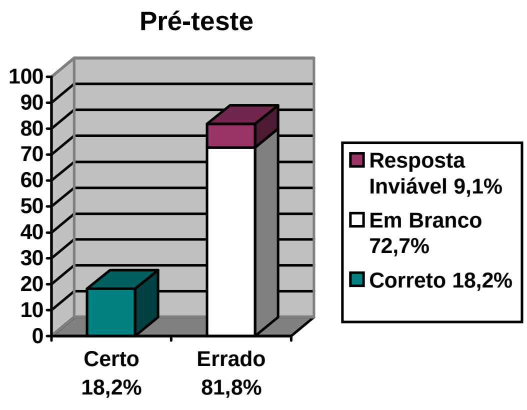
Mesmo não havendo uma dilatação significativa no aumento das respostas corretas, percebemos que elas se mostraram mais completas. As atividades com Geometria Fractal podem ter fornecido elementos essenciais para que estes alunos notassem que esses segmentos, além de diminuírem, tenderiam para um valor determinado.

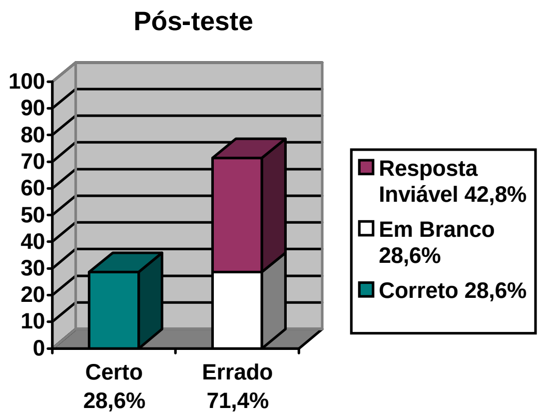
Questão 5 (Item a)





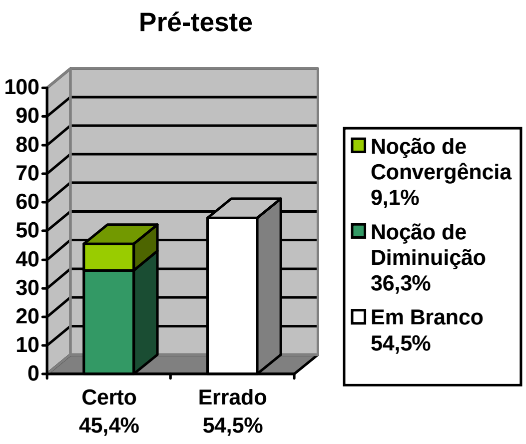
Questão 5 (Item b)

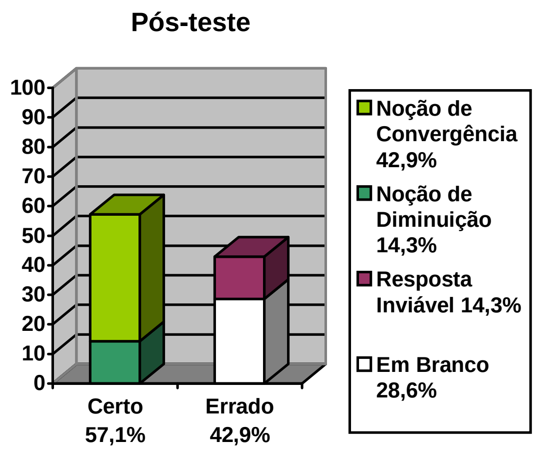




Nos dois itens **a** e **b** da 5ª questão, vale ressaltar o grande porcentual de alunos que, no primeiro momento, deixaram a questão em branco e, no segundo, tentaram resolvê-la. Percebemos que as atividades com Geometria Fractal deram condições a esses alunos de visualizar uma solução possível, mesmo que esta visualização tenha se mostrado insuficiente, visto que as resoluções não apresentaram o uso correto de todos os conceitos matemáticos necessários.

Questão 5 (Item c)





Na análise deste item, dentre as respostas consideradas corretas, foi notado novamente um aumento significativo do porcentual de alunos que apresentaram noção de convergência. As atividades com Geometria Fractal parecem ter ajudado na compreensão de que os segmentos tenderiam para zero.

Capítulo 4
Geometria Fractal Dentro do Ensino de Matemática

‘Não é por acaso que quando fiz o serviço militar fui mandado para artilharia. Claro, fazia o curso de matemática e portanto tinha suficiente base teórica para apontar canhões sobre populações. Se eu não fosse aluno do curso de matemática teria sido encaminhado para infantaria: aprenderia a matar um de cada vez!”
Ubiratan D’Ambrosio

A Educação Matemática é um campo que vem se consolidando no meio educacional, principalmente durante as duas últimas décadas. Lida com áreas que vão da formação do professor de Matemática ao estudo dos mecanismos de ensino-aprendizagem que visam o aprimoramento dos processos decorrentes do mesmo.

Dentro da Educação Matemática, existem algumas correntes, direções por onde grupos de pesquisadores focalizam seus esforços e seus ramos de interesse. Esses focos norteadores são conhecidos mais comumente como tendências.

No presente capítulo, colocaremos em tela algumas das principais tendências em Educação Matemática e faremos uma espécie de contraste com a utilização feita por nós da Geometria Fractal no curso “Geometria Fractal para o Ensino Médio”. Optamos pelas tendências em Educação Matemática para fundamentar teoricamente nossa pesquisa pelo fato de percebermos que a Geometria Fractal pode ser abordada, em maior ou menor grau, por todas elas. Para nós, o caráter dinâmico da Geometria Fractal permite uma abordagem teórica mais ampla, sem que para isso seja sacrificada a especificidade de nossa análise.

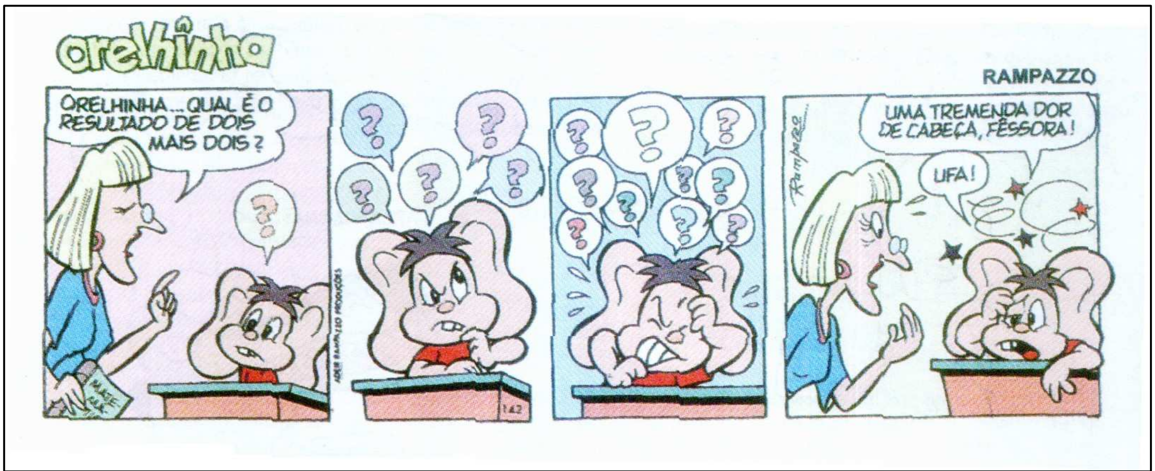
Segundo Mendes & Fossa (1998), são oito as principais tendências em Educação Matemática: o uso de jogos, o uso de material concreto (manipulativo), a Etnomatemática, a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática, o uso da História da Matemática, o uso de novas tecnologias e os estudos psicológicos. Daremos ênfase maior à Resolução de Problemas devido ser essa a metodologia utilizada por nós na análise do pré-teste e do pós-teste. Fundamentaremos nossas asserções com o auxílio da análise feita do questionário que foi respondido pelos alunos Valdenira, Márcio, Suelly, Dariane, Júlia e Lúcia.

4.1) TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

4.1.1) O uso de jogos.

A utilização de jogos no ensino da Matemática é uma prática comumente associada ao Ensino Fundamental. Encontramos na literatura várias formas de abordagem, desde as quatro operações até, com menos intensidade, expressões algébricas mais complexas. As iniciativas de sua utilização no Ensino Médio são mais voltadas para introduzir tópicos ou para recreação o que, de modo algum, diminui a potencialidade dessa tendência.

Uma de suas principais finalidades é servir como elemento motivador ou, propriamente dito, um facilitador da aprendizagem. Os jogos podem "trazer" o aluno para o campo da Matemática despertando seu interesse de forma prazerosa, desmistificando o estereótipo "sisudo" da disciplina e rompendo com a idéia de matéria "difícil" exemplificada nos quadrinhos abaixo.



Reproduzido de O Liberal (14/11/2004).

Figura IV-1. Nas tirinhas de quadrinho um exemplo da Matemática sendo encarada com uma matéria difícil.

Seguindo por esse raciocínio, Júlia, na transcrição a seguir, conta-nos que uma forma descontraída de abordagem poderia se tornar eficaz: "*Bom eu acho que para ficar mais fácil de aprender, as aulas de matemática deveria ser um pouco diferente para não ficar essa rotina de sempre. (...)O professor poderia fazer gincanas de forma que a gente aprendesse matemática.*"

É necessário esclarecer que a utilização de jogos no ensino da Matemática possui a característica de ser voltada para o que se chama de *uso episódico*, ou seja, sua abrangência é limitada (local), servindo de apoio no ensino de um ou mais tópicos específicos. Um jogo só pode ser considerado direcionado ao aprendizado de Matemática se puder propiciar a aquisição de habilidades lógicas a que se destina. Por esse fato, sua utilização geralmente se restringe à apresentação de um tópico ou à prática ou fixação de habilidades/conteúdos matemáticos já trabalhados, mas isso não impede que, com planejamento, seu uso se entenda à exploração e/ou à construção do conhecimento novo.

Mais do que o jogo em si, o que vai promover uma boa aprendizagem é o clima de discussão e troca com o professor, permitindo tentativas e respostas divergentes ou alternativas, tolerando os erros, promovendo a sua análise e não simplesmente corrigindo-os ou avaliando o produto final. Esses, talvez, sejam alguns dos obstáculos para a implementação efetiva dos jogos como recurso didático. Num ambiente desses, é mais difícil para o professor controlar as ações dos educandos, o que gera certo desconforto e insegurança por parte dos educadores.

4.1.2) O uso de materiais concretos.

Ao contrário do uso de jogos, a utilização de materiais concretos ou manipulativos tem um grau de abrangência bem maior. Pode se constituir em uma metodologia de uso prolongado que, dependendo do planejamento e dos objetivos do professor, pode durar bimestres inteiros. Para Mendes & Fossa (1998), a aplicação adequada de materiais manipulativos ocorre em atividades que “têm uma estrutura matemática a ser redescoberta pelo aluno que, assim, se torna um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático” (p.13). Os autores também chamam a atenção para o uso inapropriado dos materiais que, na maioria das vezes, são usados episodicamente como simples motivador ocasional ou para demonstrar algum teorema/fórmula que, segundo eles, tornam o aluno um mero expectador.

Já Fiorentini & Miorim (2003) vão mais além e ampliam a reflexão sobre o uso inadequado dos materiais manipulativos. Para eles, a principal função do ensino da Matemática é ensinar Matemática. Lembram que, muitas vezes, o material mais bonito ou mais moderno nem sempre pode ser o mais adequado. Ou seja, nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos, objetos concretos ou atividades no ensino da Matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina.

Por outro lado, dentre as vantagens desse tipo de metodologia, podemos salientar a possibilidade desenvolver as atividades em grupos. Neles, os materiais serviriam de ferramentas para o desenvolvimento do raciocínio matemático entre os integrantes das equipes o que pode favorecer o surgimento de um espaço propício ao confronto de idéias.

Como visto no capítulo 3, reservamos parte do terceiro dia de curso para o trabalho com materiais manipulativos (Apêndice 7). Procuramos relacionar, sempre que possível, os materiais trabalhados com os fractais criados. A proposta era partir do concreto (os objetos) para a formalização dos conceitos matemáticos. Tivemos a preocupação de não deixar o material virar o centro do processo, pois o mais importante na construção da figuras não eram as formas em si, mas os conceitos matemáticos que poderiam ser aprendidos a partir delas.

4.1.3) Etnomatemática.

Cada grupo social possui uma forma própria de criar, utilizar e interpretar a Matemática. Considerando a disciplina influenciada pelo contexto dos indivíduos que a praticam, a etnomatemática resgata os conhecimentos por eles produzidos e os utiliza no ensino-aprendizado de Matemática destes grupos.

A Etnomatemática parte de conceitos arraigados no seio de cada grupo social para facilitar o aprendizado da Matemática no intuito de valorizar os conhecimentos já adquiridos por eles. Com isso, valoriza a produção cultural dos mesmos e os conhecimentos informais já constituídos fazendo deles ponto de partida para a abordagem formal dos conceitos matemáticos.

A Etnomatemática não trata a Matemática como uma disciplina desvinculada das relações de poder dentro da sociedade. Para exemplificar isso, D'Ambrosio (2003) faz a comparação entre os atuais praticantes da Matemática (mundo capitalista) e os grandes matemáticos do passado (europeus em sua maioria). Para ele, muito do que se vê na sala de aula não se encontra no contexto do aluno, pois foi imposta a todo o mundo no período colonial, desprezando a cultura do local. Para o autor:

> (...) falar dessa matemática em ambientes culturais diversificados, sobretudo em se tratando de nativos ou afro-americanos ou outros não europeus, de trabalhadores oprimidos e de classes marginalizadas, além de trazer a lembrança do conquistador, do escravista, enfim do dominador, também se refere a uma forma de conhecimento que foi construída por ele, dominador, e da qual ele se serviu e serve para exercer seu domínio. (p.113)

D’Ambrosio conclui chamando a atenção para a idéia de universalidade, exatidão, rigor e precisão da Matemática que, a reboque, elevam esta concepção de Matemática e, principalmente, seus impositores para o mais alto patamar do pensamento humano.

> Lamentavelmente continuamos a insistir que a inteligência e racionalidade estão identificadas com a matemática. Que essa construção do pensamento mediterrâneo, levado à sua forma mais pura pelos povos acima do paralelo 42º, é a essência do ser racional. E assim se justifica que esses povos acima do paralelo 42º tenham tratado e continuem tratando a natureza como celeiro inesgotável e a humanidade como seus servos. (p.115)

Ao tratar das questões epistemológicas da Geometria Fractal (Apostilas I e II), tentamos deixar claro o caráter evolutivo da Matemática enquanto Ciência. Abordamos as necessidades e as conjunturas da época de Benoit Mandelbrot e que, mesmo que a Geometria Fractal seja considerada uma “nova” Matemática, para o seu surgimento existiu toda uma série de fatores que favoreceram sua criação na forma sistemática como temos hoje, inclusive fatores de ordem social e cultural.

4.1.4) Modelagem Matemática.

A tradução de uma situação e/ou fenômeno em um modelo matemático talvez seja uma das principais atividades da Matemática Aplicada[8].

> Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo. (BASSANEZI, 2002, p.19)

É na construção de um modelo matemático que a Modelagem Matemática se fundamenta e este, por sua vez, se caracteriza como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (idem, ibdem, p.20).

[8] Assim como Machado (2001), não corroboramos com a idéia difundida no meio acadêmico da distinção entre a Matemática Pura (que supostamente lidaria somente com abstrações não mantendo vínculo significativo com a realidade) e a Matemática Aplicada. Com relação à segunda, o autor argumenta que não se pode caracterizá-la como um corpo sistematizado de conhecimentos devido a sua fragmentação em campos diversos. “Com relação à pretensa objetividade intrínseca da Matemática enquanto Pura, só se pode aceitá-la sem discussões por um ato de fé” (p.93), visto que qualquer construção mental, por mais teórica que seja, sofre a influência do mundo real. Portanto, a nosso ver, tal discussão/distinção não tem sentido. Por motivos didáticos e dentro do campo do ensino, chamamos aqui de Matemática Aplicada a parte da Matemática que lida com situações dentro do contexto do aluno, ou seja, aquela que trata em seu cerne das questões de aplicação prática imediata no seu cotidiano.

Para que o processo de construção do modelo se inicie, é preciso a apresentação de uma situação-problema aos alunos. Para Biembengut & Hein (2002), “uma vez formulada a situação-problema, passa-se à resolução ou análise com o *ferramental* matemático de que se dispõe” (p.14). Por isso, é preciso que a tentativa de criação de um modelo que venha a ser aplicado na situação-problema exposta, seja de tal forma que surja a necessidade de empregar conhecimentos e habilidades matemáticas para que estas sejam adquiridas e/ou fixadas durante o processo. Com relação ao procedimento, os autores destacam três etapas que surgem no trabalho com Modelagem Matemática: 1) a interação, 2) a matematização e 3) e o modelo matemático.

Na *interação*, há uma familiarização com os componentes da situação-problema proposta que é caracterizada pela busca de um ferramental teórico referente ao tema. Com a *matematização*, a situação começa a ser decodificada para a linguagem matemática sendo que as variáveis e constantes mais relevantes são “pinçadas” da porção de realidade estudada. Depois dessa seleção, o *modelo matemático* é criado e passa por um processo de interpretação e validação que consiste na avaliação do grau de confiabilidade do modelo na situação-problema.

Não obstante, para que a construção do modelo possibilite o aprendizado, é essencial que este esteja dentro das possibilidades da turma e de que ele possa perpassar pelos conteúdos desejados. Todo o processo pode incitar a investigação, por parte do aluno, em uma atividade de (re)descoberta que pode levá-lo a transcender os limites impostos pela própria disciplina e fazê-lo enveredar por outras áreas do conhecimento.

Como o aluno tem uma noção de aplicação dos conteúdos necessários à resolução da situação-problema, a Matemática tende a fazer-lhe mais sentido. Nesse sentido – com o perdão do trocadilho – Valdenira relata sobre os conteúdos vistos por ela durante o Ensino Médio: “*(...) o que fazemos lá* [nas aulas de Matemática] *como as áreas de figuras planas ou geometria espacial podemos ver ao nosso redor, mas outras coisas como logaritmo, conjunto, etc., só faz sentido se entendermos perfeitamente como eles funcionam”*.

Uma de nossas propostas durante o curso foi de utilizar as figuras fractais criadas por processos iterativos presentes nas atividades (vide apêndices) como um modelo matemático e, a partir dele, fazer as conexões necessárias para trabalhar tópicos dentro da Matemática. Pudemos perceber também que os modelos também conseguiram propiciar discussões bastante proveitosas em outras áreas. Em uma delas, após termos comentado sobre como a natureza tende a exibir figuras fractais, Suelly disse: “*é engraçado como algumas coisas que o senhor fala me lembram coisas que o professor de Química e a professora de Biologia falaram no bimestre passado*.”

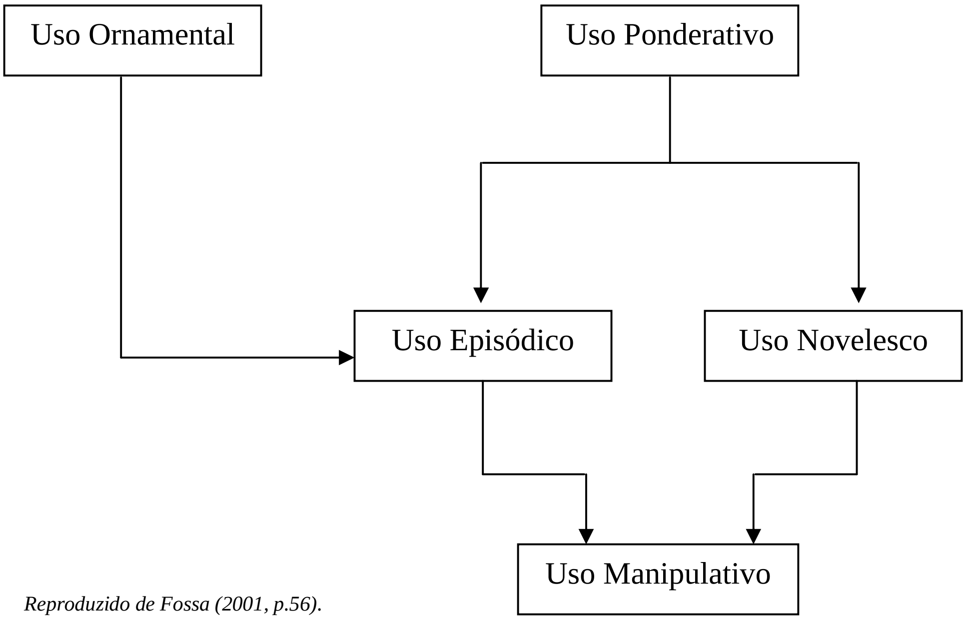
4.1.5) História da Matemática.

Com a crescente busca de contextualização da Matemática, a História da Matemática vem sendo bastante estudada como ferramenta de ensino. Procura situar o aluno na época em que o conhecimento matemático foi constituído mostrando a necessidade de produção e utilização da Matemática em um período definido. Enfatiza as características da Matemática como uma ciência que avança, que sofre influência das necessidades e dos interesses sociais e das relações de poder em um determinado tempo histórico. Fossa (2001) aponta dois tipos de uso da História da Matemática no ensino: o *uso ornamental* e o *uso ponderativo*.

Segundo o autor, o uso ornamental é constituído basicamente de notas históricas colocadas no final dos capítulos dos livros didáticos e/ou fatos curiosos a respeito de algum grande matemático do passado. O autor reconhece que este tipo de abordagem “não é um instrumento apropriado para o ensino de conceitos matemáticos” (p.54). Serve, na maioria das vezes, como uma válvula de escape momentânea para fugir do campo das contas e operações. Mas, em contrapartida, adverte que isso não é motivo para banir o uso ornamental dos livros, pois, para ele, o uso ornamental deve ser explorado mesmo com tais restrições.

> (...) quem – especialmente em se tratando de matemáticos! – não se regozija com um belo *pattern* ou um sublime desenho? Simplesmente queremos delimitar seu papel para evitar falsas expectativas e, ao mesmo tempo, aproveitar ao máximo tudo o que o uso ornamental tem a oferecer. (p.54)

Já o uso ponderativo envolve a discussão de temas históricos que desembocam em atividades e problemas de aplicação prática. Segundo Fossa, o uso ponderativo pode ser subdividido em uso novelesco, “que segue a trilha da História da Matemática durante toda a disciplina” (p.55); e o uso episódico, que se caracteriza “pela utilização da História da Matemática para abordar tópicos selecionados dentro da própria disciplina” (idem). Todos esses tipos de abordagens tendem a ser bem mais eficazes quando culminam no que ele chama de uso manipulativo, ou seja, atividades estruturadas utilizando objetos concretos.



Reproduzido de Fossa (2001, p.56).

Figura IV-2. Esquema dos vários tipos de abordagens do ensino da Matemática através da História da Matemática.

Durante o curso, procuramos situar historicamente (Apostila II) os alunos sobre a Geometria Fractal por entendermos que esta abordagem poderia fornecer uma noção básica da necessidade de sua criação e do contexto na qual estava inserida. Com relação ao tipo de abordagem, procuramos realizar uma alternância entre o uso ornamental e o uso ponderativo. A nosso ver, esta escolha mostrou-se bastante proveitosa, pois, se por um lado abrangeu uma competência específica, por outro pôde dar a oportunidade de incutir elementos que negam a visão de estagnação da Matemática.

4.1.6) O uso de novas tecnologias.

Existem várias novas tecnologias que se aplicam ao ensino de Matemática e outras disciplinas. Entretanto, para não fugir dos nossos objetivos e da abrangência do nosso curso, trataremos aqui a informática apenas como o uso do computador, dos softwares e da Internet.

A informática é uma ferramenta que vem revolucionando a sociedade nos últimos tempos e sua influência, inevitavelmente, também é percebida na Educação e mais precisamente no ensino da Matemática. Basta lembrar que grande parte dos trabalhos que levaram ao descobrimento dos fractais se deve ao uso dos computadores.

Parece haver consenso entre os educadores sobre o potencial didático das novas tecnologias em sala de aula. Para aqueles que ainda se opõem ao uso da informática no ensino, Borba (2001) contra-ataca expondo o conceito de mídia. Para ele, mídia é qualquer meio que possa estender a memória. Desse modo, a fala e a escrita são consideradas mídias, pois conseguem "armazenar" os dados de forma que possam ser posteriormente utilizados. O papel da informática é semelhante aos dois anteriores, porém com uma potência bem maior o que, conclui o autor, caracteriza a informática como uma mídia também, só que com a vantagem de permitir "que linearidade do pensamento seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea" (p.46).

Nós vemos no uso dos computadores uma grande ferramenta facilitadora do aprendizado. Isso não significa que o foco central do trabalho do professor seja deslocado para o aperfeiçoamento de técnicas que ajudem o aluno a "mexer" corretamente na máquina. A informática deve servir, antes de tudo, para criar ambientes propícios para investigação, (re)descoberta e construção do conhecimento matemático.

Todos os alunos responderam que antes do curso não haviam trabalhado com o computador em Matemática. É importante ressaltar ainda que a escola em que estudam não possui laboratório de informática e todos afirmaram não possuir computadores em casa. Significa dizer que a exclusão digital esteve presente em suas trajetórias escolares durante todo o Ensino Básico. Para eles, o curso foi o primeiro contato com este tipo de tecnologia. Vejamos algumas de suas impressões após o curso:

"(...)consegui observar o quanto a matemática se tornaria mais fácil com o uso do computador" (Suelly).

"(...)eu tenho vontade de ter contato [com as novas tecnologias], *porque parece que a matemática fica mais fácil de entender e também fica mais divertida"* (Júlia).

"(...)com o computador, por exemplo, eu teria uma biblioteca à disposição" (Valdenira).

Quando Suelly e Júlia se referem ao quanto o computador pôde tornar mais fácil a compreensão da Matemática, é provável que elas estejam se referindo a melhor qualidade da visualização das atividades propostas durante o curso. Esta, certamente, é uma das grandes potencialidades do computador, uma vez que priva o aluno de trabalhos pouco criativos (como desenhar à mão livre as figuras das atividades, por exemplo) e "liberta" a mente para reflexões mais fecundas que reorganizam o pensamento.

É claro que somente o fato de poder ver melhor uma figura não será suficiente para garantir o aprendizado. Mas é inegável sua eficácia, no mínimo, como elemento motivador, pois pudemos perceber como os alunos ficaram bem mais satisfeitos em realizar as atividades com a ajuda do ocmputador.

4.1.7) Estudos Psicológicos.

Procura estudar que mecanismos cognitivos podem influenciar no aprendizado. Mendes & Fossa (1998) colocam que os estudos psicológicos podem basear os seus esforços tomando como referência o ensino tradicional e, dentro dessa perspectiva, encontrar meios de tornar o ensino mais proveitoso. Por outro lado, existem estudos de cunho psicológico, ligados ao construtivismo, que "tentam determinar como o conhecimento matemático é construído pelo sujeito epistemológico e, a partir desses resultados, elaborar estratégias alternativas de ensino" (p.17).

4.1.8) Resolução de Problemas.

Diferentemente da Modelagem Matemática que lida com situações práticas e de cunho mais abrangente, a Resolução de Problemas tem um foco mais centrado em torno da Matemática. Tenta delinear quais as características de um bom resolvedor de problemas ou ensinar o aluno a se tornar um mediante reflexões e/ou questionamentos. Também estuda métodos eficazes que privilegiem o "aprender-aprendendo" nos quais o aluno procura por si só meios, hipóteses ou caminhos que possam levá-lo à solução de um problema.

Existem vários fatores que podem fazer com que uma situação seja entendida como problema. Geralmente há uma tendência em se confundir um problema com um exercício. Este último é concebido como uma aplicação direta de conhecimentos já adquiridos ou para a fixação dos mesmos, já o primeiro requer um grau de raciocínio mais elevado onde a solução não é obtida através do simples uso de algoritmos já preconcebidos.

Segundo Onuchic & Allevato (2004), um problema "é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer" (p.221). As autoras levam em consideração a vontade de elucidar um fato para a caracterização de problema. Isso implica a preocupação por parte do resolvente em querer desvendar a situação apresentada e, em vista disso, os conteúdos/aspectos envolvidos no problema devem ser potencialmente significativos, caracterizando certo grau de envolvimento do resolvente.

As autoras tocam em um ponto que foi evidenciado por nós durante a pesquisa: para se encontrar a solução de um problema, deve haver o interesse em resolvê-lo o que implica, de certa forma, em gostar daquilo que se está fazendo. Valdenira e Márcio foram os únicos alunos a responder corretamente todas as questões no pós-teste. Durante todo o curso, percebemos um interesse bem maior que os demais sobre a Geometria Fractal. Nas suas próprias palavras: "*nada é difícil aprender quando há interesse*" (Márcio), "*pra mim a matemática é a junção das coisas boas da vida, aprendi a me dar bem com ela e até hoje amo a matemática*" (Valdenira). Essa relação de interesse/gosto pela Matemática com os bons resultados obtidos, parece-nos ter sido um dos fatores determinantes para a resolução correta das questões.

Diante disso, achamos importante salientar que o curso de Geometria Fractal também foi elaborado de modo que ele pudesse transformar os problemas do pré-teste em exercícios no pós-teste. Ou seja, as questões que a princípio pudessem parecer problemas no primeiro momento, com o auxílio do conteúdo e das atividades com Geometria Fractal, tenderiam a ser convertidas em exercícios. Como colocado no capítulo anterior, era nosso intento verificar no pós-teste quais questões ainda se constituíam em problemas e quais passaram a se constituir em exercícios.

Para Polya (1995), existem quatro fases que geralmente ocorrem durante a resolução de um problema: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto. Estas fases serviram de suporte para as correções do teste. Vejamos a seguir em que consiste cada uma delas.

a) Compreensão do problema:

Para que a solução do problema se processe, é necessária a compreensão do problema a ser resolvido. O resolvente deve considerar atentamente cada parte envolvida na questão como a incógnita, as condicionantes e os dados. Segundo Polya, além do problema estar em um nível compatível ao do aluno, este deve também ser de seu interesse, pois a motivação pode auxiliar no entendimento global do problema.

b) Estabelecimento de um plano:

Nesta fase, já existe uma “rota” a ser seguida. Ainda que rudimentarmente, já se delineou um caminho possível. Esta idéia seminal caracteriza-se como um dos pontos chaves na resolução do problema proposto e pode surgir depois de várias tentativas sem sucesso de fazê-lo. Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita torna-se essencial e, se preciso, ajustes devem ser feitos para que isto ocorra.

Por vezes, pode ser necessária a comparação do problema com o que Polya chama de “problema correlato”, um problema que possui algumas características semelhantes ao problema proposto. Geralmente, um problema correlato só fornece algumas pistas deixando por conta do resolvente a adaptação para a questão, podendo surgir a necessidade de construções adicionais.

c) Execução do plano:

É a etapa em que o aluno, depois e conceber o roteiro a ser seguido, executa o plano. O aluno tende a estar convicto de que a execução dos passos de seu plano o levará impreterivelmente à solução. É necessário que o aluno tente verificar se o passo está correto, se o tratamento dos dados pode ser trabalhado daquela forma. Em alguns casos, o professor pode ajudá-lo a notar a diferença entre perceber e demonstrar, se o passo é correto ou não.

d) Retrospecto:

Quando a execução do plano é finda, as reconsiderações de cada etapa anterior, de todos os passos seguidos, das idéias apresentadas tornam-se um instrumento útil à consolidação do conhecimento. É possível verificar a plausibilidade dos argumentos utilizados e, em muitos casos, até determinar caminhos diferentes para sua resolução.

É claro que o processo cognitivo de resolução de um problema é bastante complexo e seria ingenuidade tentar reduzi-lo somente às etapas descritas por Polya. Existem outros fatores que devem ser levados em consideração e, dentre eles, achamos conveniente salientar o tratamento do erro nesse processo.

Se existe erro, é porque existe a adoção de um padrão tido como correto (LUCKESI, 1998). Segundo o autor, tendo em vista um determinado objetivo, o erro é resultado de uma ação insatisfatória. Se levarmos em conta que este mesmo erro pode se tornar um poderoso aliado para verificar se houve ou não aprendizado, ele deixa de ter um sentido de culpa, pesar ou incapacidade e passa a ser visto como mais um degrau na aquisição desse conhecimento. Ou seja, neste caso, “não há erro, mas sucesso ou insucesso nos resultados de nossa ação” (p.137).

O padrão tido como correto e adotado por nós na correção dos testes, foi a apresentação de uma resolução satisfatória, matematicamente falando, das questões propostas. Nesta perspectiva, foi levado em consideração que os erros apresentados pelos alunos no pré-teste, serviriam de suporte para a nossa pesquisa, e que a presença ou ausência deles no pós-teste serviriam de parâmetro para verificar, em parte, como a abordagem matemática com Geometria Fractal influenciou nas resoluções apresentadas.

4.2) GEOMETRIA FRACTAL *versus* TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Dentro da análise de todas as Tendências em Educação Matemática, não conseguimos classificar o uso da Geometria Fractal em nenhuma delas especificamente. Primeiro porque a Geometria Fractal perpassa pelos conteúdos da matemática e por suas respectivas formas de abordagem e de ensino. Em uma hora, serve de modelo no processo de modelagem matemática (Anexo “Poeira de Cantor” e Anexo “Floco de Neve de Koch”). Em outra, serve de elemento motivador (Apêndice “Triângulo de Pascal” e Apêndice “Jogo do Caos”) ou no uso de novas tecnologias (aula do dia 18/08/04). Também pode ser explorada manipulativamente (Apêndice “Materiais Manipulativos”), e assim por diante. Segundo por entendermos que o trabalho com Geometria Fractal tanto pode voltar-se para dentro da matemática em si, como pode extrapolar seus limites e se estender por outras disciplinas e/ou áreas do conhecimento (Anexos “Apostila I” e “Apostila II”).

Nesta perspectiva, então, teremos de destacar que a Geometria Fractal possui um caráter local e global ao mesmo tempo. Esta dualidade se revela quando é explorada para tentar facilitar/favorecer a aprendizagem de um tópico em específico, revelando sua acepção micro. Por outro lado, pode estar imbricada em/por entre um todo maior, uma espécie de "pano de fundo", assim como um tema transversal que deixa as especialidades livres para se intercomunicar em uma acepção macro.

Portanto, tentar enquadrar a Geometria Fractal em uma tendência especificamente seria como colocá-la em uma camisa-de-força e desbastar todas suas possibilidades, muitas delas ainda não exploradas. Ou seja, seria contra sua própria natureza, dada sua grande abrangência dentro e fora da Matemática.

Não obstante, parece-nos que a Matemática tende a ser transformada juntamente com a própria sociedade que a utiliza. Não entraremos em detalhes com relação ao rigor dos seus construtos teóricos, pois esses, em nossa opinião, deverão e devem ser mantidos. Queremos salientar o fato de que essa transformação passa também por uma mudança de postura com relação a diversas áreas que estão se desenvolvendo atualmente. Portanto, ao falar do futuro da Matemática e de seu ensino, concordamos com D'Ambrósio (2003) quando afirma que:

> Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama de matemática discreta e igualmente o que se chamavam "casos patológicos", desde a não-linearidade até a teoria do caos, fractais, fuzzies, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica. Lamentavelmente isso só se é estudado em algumas especialidades de matemática aplicada. Justamente por representar a matemática do futuro, é muito mais interessante para o jovem. Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê na TV e nos computadores. (p.59)

Podemos observar que as possíveis mudanças para que isto ocorra estão diretamente relacionadas com o desenvolvimento das "Matemáticas atuais" e do dinamismo da própria necessidade de fazer Matemática. Adequar os conteúdos aos contextos, aos avanços, às necessidades. É injustificável continuar abordando um tópico simplesmente por ele estar há muito tempo no currículo. Isto não significa deixar de lado as peculiaridades inerentes à própria Matemática (rigor, lógica, etc.) e nem tampouco retirar o que simplesmente possa ser considerado "velho". Mas, encarando a Matemática como uma ciência que também avança, reavaliar as prioridades para o seu aprendizado e/ou desenvolvimento.

Portanto, é essencial fazer do estudo de Matemática algo que possa ser tangível ao aluno, assim como tentamos mostrar que se revelou as aulas sobre Geometria Fractal, pois, nas palavras de Márcio quando se refere a sua conclusão final após o curso: "*a matemática não é tão absurda quanto eu pensava, tudo depende da ótica com que se veja*". É preciso tornar a Matemática significativa em suas vidas ou em suas trajetórias escolares, não apenas no Ensino Médio, nosso foco principal de análise, mas em todos os níveis de ensino para que, dentre outras coisas, possam fazer dela uma ferramenta decisiva ao exercício pleno de sua cidadania.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“Não, não tenho caminho novo. O que tenho de novo é o jeito de caminhar.”
Thiago de Mello

Iniciamos este trabalho com a seguinte pergunta: ao trabalhar com atividades de Geometria Fractal, quais são os fatores que influenciam no aprendizado de alguns tópicos da Matemática curricular em alunos do 3° ano do Ensino Médio? Para tentar responder este questionamento, trilhamos um percurso onde pudemos debater sobre vários aspectos referentes à Geometria Fractal dentro do campo do ensino da Matemática. Dizer que este ou aquele fator isoladamente foi o responsável por influenciar este ou aquele resultado seria um reducionismo que poderia dar um caráter, no mínimo, ingênuo de resposta única à questão. Porém, vimos durante as análises que essas inferências tendem a estabelecer teias de relações bem mais complexas que esta visão simplista fazendo de um “sim” ou um “não” muito pouco para abranger tais questionamentos. Mesmo correndo esse risco, vamos expor algumas de nossas considerações que, mesmo penetrando apenas alguns centímetros nessa quilométrica crosta que é o ensino da Matemática, já terão cumprido o seu papel.

As atividades com Geometria Fractal puderam contribuir significativamente na (re)aquisição de conceitos matemáticos necessários à resolução correta das questões propostas. O gráfico comparativo do capítulo 3 pôde ilustrar quantitativamente esse fato, visto que, em todos os itens, houve um aumento percentual nas respostas corretas. Porém, mais que isso, queremos ressaltar também o teor das resoluções apresentadas. Mesmo naquelas resoluções consideradas incorretas, pudemos perceber uma compreensão maior dos tópicos matemáticos necessários para responder as questões, ainda que esta compreensão se apresentasse insuficiente para respondê-las corretamente.

Não foi nosso interesse discutir as teorias matemáticas subjacentes à Geometria Fractal. Entretanto, como toda a tentativa de responder a pergunta geradora de uma pesquisa aponta para outros novos questionamentos, não poderíamos deixar de citar (e apenas citar!) nossas impressões acerca da Geometria Fractal dentro da Matemática enquanto ciência epistemologicamente constituída e de seu ensino. Vimos os aspectos mais relevantes, segundo nosso interesse, da Geometria Fractal e, alguns deles em particular, chamaram-nos a atenção. Vendo que a dimensão fractal pode ter valores não inteiros e irracionais, é de se imaginar que a Geometria Fractal é uma geometria que complementa a Geometria Euclidiana, já que esta só admite valores inteiros. Essa linha de raciocínio ganha força se levarmos em consideração também que a Geometria Fractal, além de descrever formas euclidianas pode descrever formas naturais. Seria razoável a essa altura admitir que Geometria Euclidiana possa ficar mais rica com o acréscimo das formas e tratamentos fractais. E se assim o fosse, e levando em consideração que a Geometria Euclidiana fornece conceitos fundamentais e a Geometria Fractal um novo olhar sobre elas, não seria melhor ensinar geometria através de ambas?

Ainda nesta linha, sempre são levados em consideração termos euclidianos para a construção de qualquer fractal. Qual coisa é mais euclidiana do que a construção da curva de Koch que começa com um segmento de reta que se dilui em infinitos pontos? Até mesmo as construções que lembram formas naturais apresentam na sua estrutura pontos ou retas. A samambaia (fig. II-6), por exemplo, não passa de uma colocação aleatória de pontos que convergem para a formação da imagem. Então, podemos imaginar que a única diferença entre as duas geometrias, se é que existe alguma, é com relação ao tratamento. Ou seja, o que a Geometria Fractal faz, na realidade, é utilizar-se dos termos euclidianos para criar imagens através de iterações recursivas infinitas.

Encontramos nestas considerações um campo fértil para debates, que poderiam ser melhor aprofundadas em outro momento mais oportuno. De qualquer forma, independentemente dos caminhos que esta discussão pode levar, o que queríamos explicitar é a constatação, com os resultados da pesquisa, de que o ensino atual de Matemática é vista pelos alunos como algo estéril e por vezes longe de suas realidades. O trabalho com as atividades de Geometria Fractal pareceu ter tornado o aprendizado de alguns tópicos da Matemática curricular mais proveitoso. Partindo da descrição de formas naturais palpáveis aos alunos, pudemos notar durante as aulas do curso o aumento da motivação em resolver um problema, uma vez que o trabalho com as atividades dava ênfase à descoberta dos “pra quês” e “porquês” em vez do “como” resolvê-lo simplesmente. O aprendizado se torna mais rico e completo na medida em que os conteúdos passam a ter sentido para o aluno.

Finalmente, o que queríamos com este trabalho é contribuir para a discussão sobre o que é possível fazer para tornar o ensino da Matemática mais significativo ao aluno. Constatar que a simples mecanização de conceitos desfavorece o desenvolvimento do raciocínio de forma contextualizada e problematizada.

Romper com esta “algoritmização” do saber matemático pareceu ser uma das vantagens ao se trabalhar com as atividades de Geometria Fractal, pois, a nosso ver, elas acenam para a possibilidade de trilhar caminhos que podem levantar questionamentos no sentido de tornar a Geometria Fractal um recurso didático válido dentro do ensino e dirimir a idéia de que a Matemática é apenas um conjunto de fórmulas e números que regem uma forma de pensar automatizada e incompatível com a realidade.

APÊNDICES

"Descoberta da Geometria Fractal"

Objetivos:

Baseada na proposta de Randi & Westerberg (1999), a atividade tem por objetivo fazer com que o aluno perceba as limitações da geometria euclidiana. A associação das formas construídas pelo homem, com as formas vistas na natureza, poderá abrir caminho para uma discussão/apresentação de uma geometria que possa representar melhor as irregularidades dos objetos/coisas não feitas pelo homem.

1- De acordo com a tabela abaixo, preencha corretamente os espaços em branco relacionando os objetos vistos dentro de sala com uma figura geométrica conhecida.

Objeto observado	Figura associada

2- De acordo com a tabela abaixo, preencha corretamente os espaços em branco relacionando os objetos vistos fora de sala com uma figura geométrica conhecida.

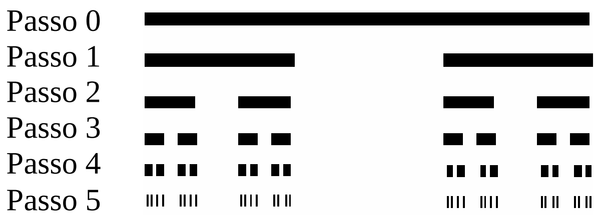
Objeto observado	Figura associada

“Poeira de Cantor”

Objetivos:

Baseada na proposta de Barbosa (2002) e Randi & Westerberg (1999), têm por objetivos trabalhar conceitos básicos de geometria euclidiana elementar, familiarizar o aluno com processos de generalização, além de dar noções intuitivas de limite.

1- De acordo com a figura, preencha corretamente os espaços em brancos da tabela abaixo de acordo com cada iteração da Poeira de Cantor, sabendo que o inicializador tem comprimento igual a 1 e que, a cada nova iteração, sempre é retirado o terço central de cada segmento.



Passos	Comprimento de cada segmento	Nº de segmentos	Soma do comprimento de todos os segmentos
0	1	1	1
1			
2			
3			
4			

2- Com os resultados obtidos na tabela anterior, encontre a fórmula geral para cada uma das colunas.

Passos	Comprimento de cada segmento	Nº de segmentos	Soma do comprimento de todos os segmentos

3- Baseando-se nas fórmulas encontradas acima, encontre o comprimento de cada segmento, seu número e a soma de todos eles na iteração 8.

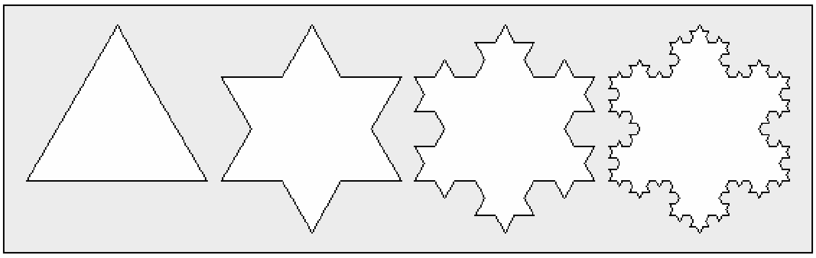
4- O que acontece com o comprimento dos segmentos quando o número de iterações tende ao infinito? Justifique sua resposta.

“Floco de Neve de Koch”

Objetivos:

Baseada na proposta de Barbosa (2002) e Randi & Westerberg (1999), a atividade tem os mesmos objetivos da atividade “Poeira de Cantor” acrescida da abordagem da área de triângulos.

1- De acordo com a figura do floco de neve de Koch, preencha corretamente a tabela abaixo sabendo que o lado do triângulo inicial mede 1 e que, a cada nova iteração, todos os segmentos têm comprimento igual à terça parte dos segmentos da iteração anterior.



Passo 0 Passo 1 Passo 2 Passo 3

Passos	Comprimento de cada segmento	Nº de segmentos	Perímetro
0	1	3	3
1			
2			
3			
4			

2- Com os resultados obtidos na tabela anterior, encontre a fórmula geral para cada uma das colunas.

Passos	Comprimento de cada segmento	Nº de segmentos	Perímetro

3- Baseando-se nas fórmulas encontradas acima, encontre o comprimento de cada segmento, o nº de segmentos e o perímetro na iteração 8.

4- Considerando a área do triângulo inicializador da iteração 0 igual a 1, preencha corretamente a tabela abaixo:

Passos	Área de cada triângulo	Nº de triângulos	Área total
0			
1			
2			
3			

4			

5- Com os resultados obtidos na tabela anterior, encontre uma fórmula geral para cada coluna.

Passos	Área de cada triângulo	Nº de triângulos	Área total

6- Baseando-se nas fórmulas encontradas acima, encontre a área de cada triângulo, o n° de triângulos e a área total na iteração 8.

7- O que acontece quando com o perímetro da curva de Koch quando o número de iterações tende ao infinito? E com a área? Justifique suas respostas.

“Conjunto de Mandelbrot”

Objetivos:

A atividade a seguir foi baseada na proposta de Frantz & Lazarnicks (1991) e o objetivo principal desta atividade é tentar levar o aluno a ter uma noção formal da distância entre a origem e um ponto qualquer no plano complexo (módulo).

1- Com o mapeamento $z_{n+1} = z_n^2 + c$, encontre os próximos valores de z para cada iteração e seus respectivos módulos.

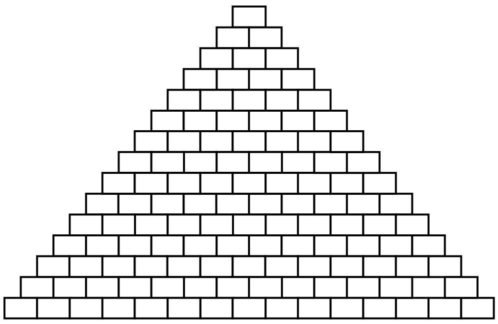
1. Iterações	Módulo	2. Iterações	Módulo
$z_1 = 1 - i$		$z_1 = 0{,}8$	
$z_2 =$		$z_2 =$	
$z_3 =$		$z_3 =$	
$z_4 =$		$z_4 =$	
$z_5 =$		$z_5 =$	
3. Iterações	**Módulo**	**4. Iterações**	**Módulo**
$z_1 = -0{,}8i$		$z_1 = -0{,}5 + 0{,}5i$	
$z_2 =$		$z_2 =$	
$z_3 =$		$z_3 =$	
$z_4 =$		$z_4 =$	
$z_5 =$		$z_5 =$	

“Triângulo de Pascal”

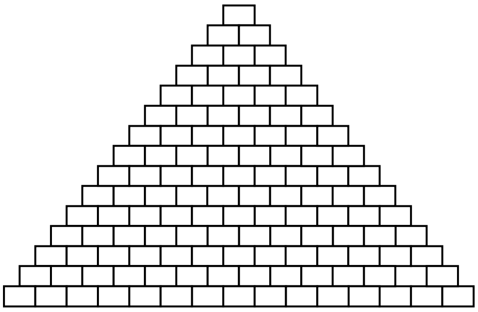
Objetivos:

A atividade a seguir, adaptada de Barbosa (2002) e Peitgen *et al* (1992), tem por objetivo mostrar, de forma criativa, uma das possibilidades de explorar a construção do triângulo de Pascal e correlacionar, via geometria fractal, alguns de seus aspectos interessantes. Entendemos que esta forma de abordagem pode ser um elemento motivador capaz de despertar no aluno a criatividade e a (re)descoberta de propriedades inerentes ao triângulo de Pascal bem como sua própria construção.

1- Nas casas em branco abaixo, com o lápis, coloque os números correspondentes ao triângulo de Pascal. Em seguida, hachure as casas que contenham os números pares e deixe as casas com os números pares em branco.



2- Utilizando o mesmo procedimento da questão anterior, hachure os múltiplos de três e deixe em branco as demais casas.



Conclusões:

____

____

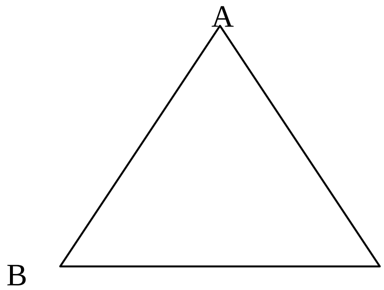
____

“O Jogo do Caos”

Objetivos:

Baseada na proposta de Barbosa (2002) e Peitgen *et al* (1992), ao final da atividade, o aluno deverá ser capaz de compreender que, analisando os pontos encontrados, eles se agrupam em regiões onde uma espécie de previsão pode ser realizada. Se o processo se estender infinitamente, os pontos formaram o triângulo de Sierpinski. Isso caracteriza o principal objetivo desta atividade: por trás de um processo aleatório, pode surgir uma ordem subjacente.

Marque um ponto aleatoriamente dentro do triângulo abaixo, diferente do ponto localizado exatamente no meio (baricentro).
Com a ajuda do dado, sorteie um dos vértices e ligue, levemente, o ponto ao vértice do sorteio.
Marque o ponto médio do segmento criado.
Sorteie novamente outro vértice.
Ligue, levemente, o ponto médio marcado ao vértice sorteado.
Marque o ponto médio desse novo segmento criado.
Repita o procedimento 15 vezes.



Conclusões: ____

____

____

____

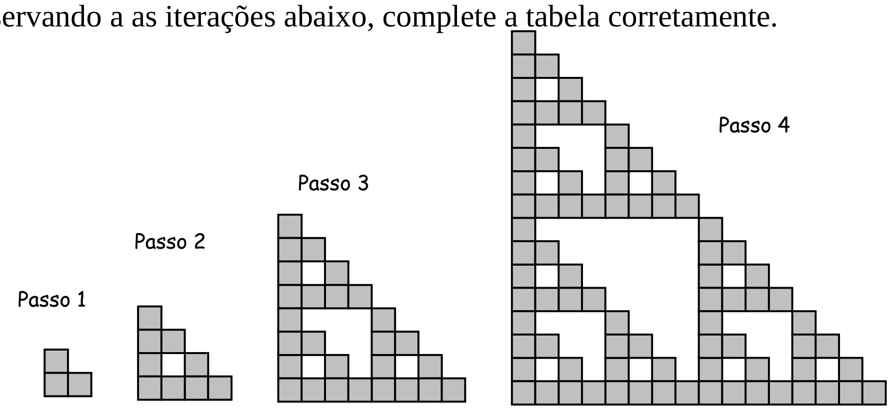
____

“Materiais Manipulativos”

Objetivos:

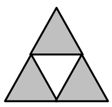
Baseada na proposta de Coes (1993) e de Barbosa (2002), a atividade objetiva a construção de fractais através de formas euclidianas planas no intuito de levar o aluno a criar e/ou perceber padrões geométricos e algébricos existentes na figuras criadas.

1- Observando a as iterações abaixo, complete a tabela corretamente.

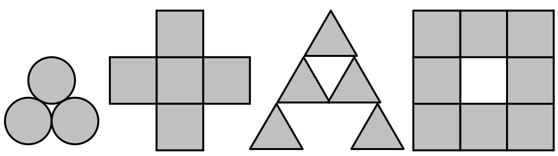


Passos	Nº de peças
1	
2	
3	
4	
...	...
n	

2- Dado o inicializador a seguir (passo 1), construa os três passos seguintes e compare o número de peças usados em cada passo com o utilizado na questão anterior.



3- Com os inicializadores abaixo, para cada um, construa os três passos seguintes, forneça e complete uma tabela semelhante à primeira questão e descubra a dimensão fractal.



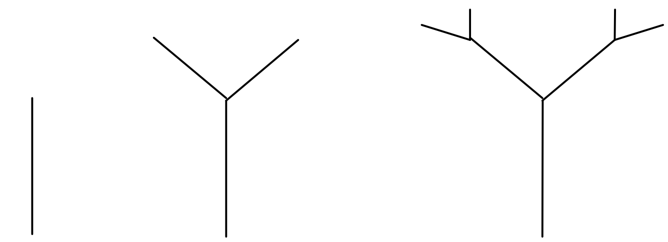
4- Com as peças utilizadas nas questões anteriores, crie seu próprio fractal.

“Árvores Fractais”

Objetivos:

Baseada na proposta de Naylor (1999), os objetivos mais pertinentes nesta atividade são: a familiarização com as generalizações algébricas, o trabalho com formas geométricas elementares e visualização da real possibilidade de descrever forma arbóreas com tratamento matemático adequado.

1- Nas iterações abaixo, cada novo segmento criado é duas vezes menor que o criado no passo anterior. Com base nisso, complete a tabela.



Passos	Nº de segmentos em cada passo	Soma de todos os segmentos	Comprimento do segmento criado	Soma do comprimento de todos os segmentos
1	1	1	L	L
2				
3				
...	...	...	...	...
n				

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. de C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO J. L. (orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BARALDI, I. M. *Matemática na Escola*: que ciência é esta? Bauru: EDUSC, 1999.

BARBOSA, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. e HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* 2ª Ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BORBA, M. C. e PENTEADO M. G. *Informática e Educação Matemática.* 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

COES, L. Building fractal models with manipulatives. In: *Math Teacher*, 84, p. 646-651, 1993.

COLL, *et al*. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo: Ática, 1999.

ETCHEVERRY, N.; EVANGELISTA. N.; REID, M.; TORROBA, E. y VILLAREAL, M. Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimetación y la visualización. In: *Zetetiké*, vol.12, 21, p. 57-81, jan-jun 2004.

FIORENTINI, D. e MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática. In: *Boletim SBEM-SP*, ano 4, n° 7, 2003.

FOSSA, J. A. *Ensaios sobre a educação matemática*. Belém: EDUEPA, 2001.

FRANTZ, M. and LAZARNICKS, S. The Mandelbrot set in the classroom. In: *Math Teacher*, 84, p. 173-177, 1991.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia:* Saberes necessários à prática educativa. 13ª Ed. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

GLEICK, J. *Caos: A criação de uma nova ciência* (Trad.). Rio de Janeiro: Campus, 1989.

LESMOIR-GORDON, N.; ROOD, W. and EDNEY, R. *Introducing Fractal Geometry*. Cambridge: Icon Books, 2000.

LORNELL, R. and WESTERBERG, J. Fractals in High School: Exploring a new geometry. In: *Math Teacher*, 92, p. 260-269, 1999.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação*: Abordagens qualitativas. 6ª reimpressão. São Paulo: EPU, 2003.

LUCKESI, C. C. Prática Escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtudes. In: *Série Idéias,* 08, p.133-140, 1998.

MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade:* Análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 5ª Ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MANDELBROT, B. P. *Objectos Fractais*. Lisboa: Gradiva, 1989.

MENDES, I. A. e FOSSA, J. A. Tendências atuais na Educação Matemática: experiências e perspectivas. In: FOSSA, J. A. *XIII encontro de pesquisa educacional do nordeste.* Natal: EDUFRN, 1998.

MINAYO, M. C. S. Ciência, técnica e arte: o desfio da pesquisa social. In: MINAYO, M. C. S. (org.). *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. 5ª Ed. Petrópolis: Vozes, 1996.

MOROZ, M.; GIANFALDONI, M. H. T. A. *O processo de pesquisa*: iniciação. Série Pesquisa em Educação. Brasília: Editora Plano, 2002.

NAYLOR, M. Exploring fractals in the classroom. In: *Math Teacher,* 92, p. 360-364, 1999.

NETO, O. C. O trabalho de campo como descoberta e criação. In: MINAYO, M. C. S. (org.). *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. 5ª Ed. Petrópolis: Vozes, 1996.

ONUCHIC, L. R. e ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. G. e BORBA, M. C. (orgs). *Educação Matemática:* pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H. and SAUPE, D. *Fractals for the classroom*: Part one, introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Velag, 1992a.

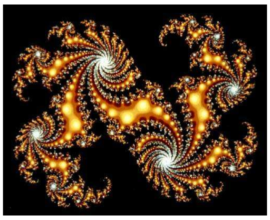
PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H. and SAUPE, D. *Fractals for the classroom*: Part two, complex systems and Mandelbrot set. New York: Springer-Velag, 1992b.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

STEWART, I. S*erá que Deus joga dados?* A nova matemática do caos. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1991.

TAYLOR, R. P. Ordem no caos de Jackson Pollock. In: *Scientific American Brasil*, n.8, 84-89, jan. 2003.

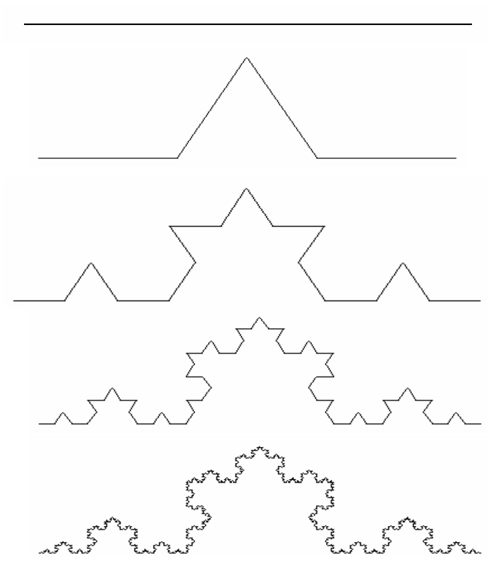
Apostila I



Introdução à Geometria Fractal

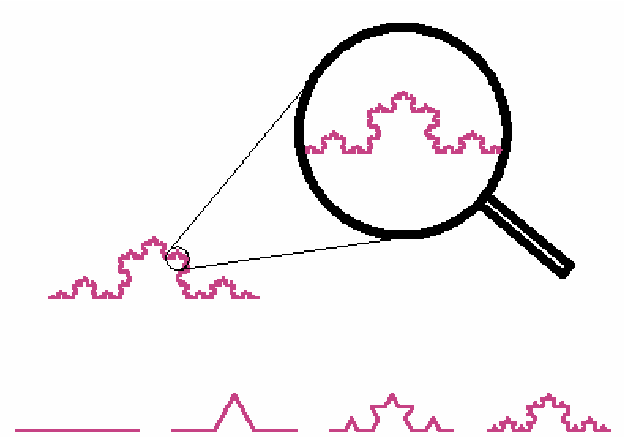
O que é um fractal?

Afinal o que é um fractal? Esta palavra foi criada pelo matemático polonês naturalizado americano Benoit Mandelbrot para descrever um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura qualquer que seja a distância de visão. Deriva do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar. Mandelbrot classificou desta forma os seus objetos de estudo, pois estes possuíam uma dimensão fracionária, uma dimensão não inteira. As dimensões fracionárias tornaram-se uma forma de quantificar qualidades que, de outro modo, permaneceriam sem dimensão precisa: o grau de irregularidade ou tortuosidade de um objeto. Uma linha de costa sinuosa, por exemplo, impossibilita a sua medição em termos de comprimento, mas possui um grau determinado de irregularidade. A palavra fractal acima de tudo significa auto-semelhante.



Acima a construção da curva de Koch. Esta curva dá a idéia intuitiva da descrição de

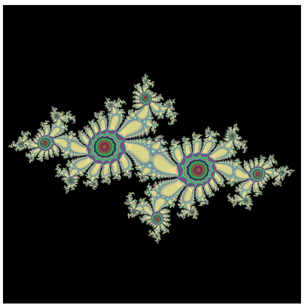
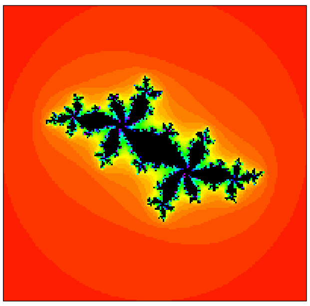
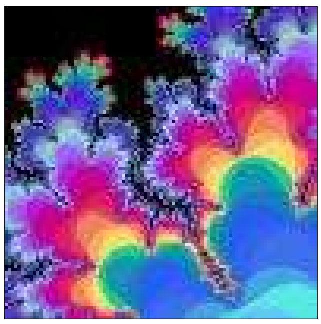
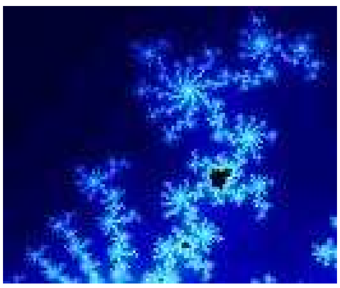
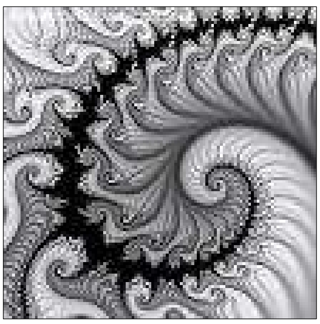
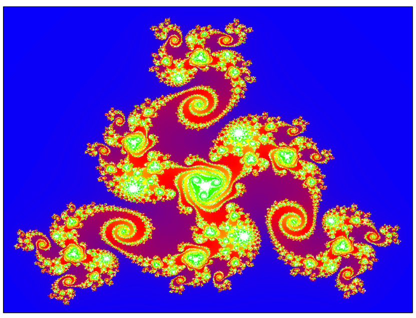
A **auto-semelhança** é a simetria através das escalas, ou seja, um objeto possui auto-semelhança se apresenta sempre o mesmo aspecto a qualquer escala em que seja observado. Se repararmos, todas as formas geométricas ortodoxas perdem a sua estrutura quando são ampliadas ou diminuídas. Um círculo numa escala muito maior não é nada mais do que uma reta. Basta ter em mente que à apenas 500 anos se pensava que a Terra era plana. Isto acontece porque à escala humana não vemos mais do que uma linha reta no horizonte. No entanto a maior parte dos objetos com que lidamos no nosso dia-a-dia não são retas, nem esferas e nem cones.



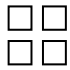
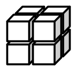
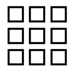
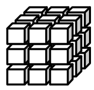
Se ampliarmos uma pequena parte da curva de Koch, veremos que ela é exatamente igual a toda figura. Essa invariância que independe da escala é chamada auto-similaridade.

Olhando, por exemplo, para um tronco de uma árvore, verificamos que é extremamente rugoso e irregular. Se observarmos um pequeno pedaço desse tronco ao microscópio observamos novas rugosidades e irregularidades que antes não tínhamos observado. No entanto esta imagem assemelha-se bastante à anterior. É esta irregularidade regular que caracteriza um fractal.

A **iteração** consiste em repetir o mesmo ato em uma espécie de rotina. As imagens de fractais geradas por computador são o resultado de iterações, operadas num sistema não linear, de forma recursiva e que possibilitam a quem os observa, imagens de grande beleza e a compreensão desses mesmos sistemas.

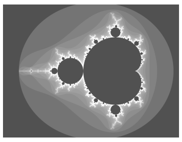
A **dimensão** é uma característica dos fractais que chama bastante atenção. A tabela abaixo dá uma idéia de como podemos ter noção de dimensão de um objeto. Se uma linha for dividida em duas partes iguais, por exemplo, precisaríamos ampliá-la pelo fator 2 para voltarmos ao tamanho original. O mesmo ocorre como um quadrado dividido em quatro partes iguais e com um cubo dividido em oito partes idênticas. Se o número correspondente às partes for escrito na base dois, o expoente coincidirá com a dimensão do objeto.

	Linha	Quadrado	Cubo
Fator de ampliação 2			
Número de autocópias	2	4	8
	2^1	2^2	2^3
Fator de ampliação 3			
Número de autocópias	3	9	27
	3^1	3^2	3^3

O mais interessante é notar que para formas euclidianas como a linha, o plano e o cubo acima, a dimensão é sempre um número inteiro. Já para as formas fractais, a dimensão quase sempre resulta em um número decimal e até irracional!

A maior aplicação dos talvez seja a de descrever melhor as formas da natureza. Um exemplo disso é a construção da samambaia abaixo feita por um processo recursivo de uma equação iterada muitas vezes que marca pontos aleatórios. Note que cada ramo é auto-similar a toda a planta. Diante da figura, vem a pergunta: todas as formas da natureza não seriam obtidas por processos parecidos?

Apostila II



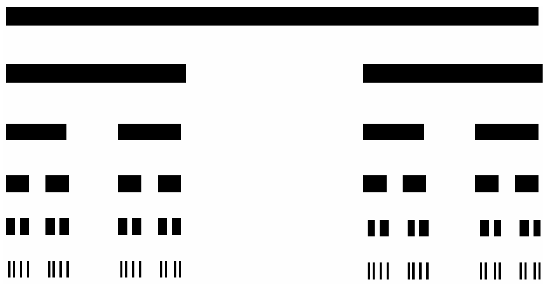
O desenvolvimento da Geometria Fractal

O desenvolvimento da Geometria Fractal se deve, principalmente, por seu criador, o matemático polonês naturalizado americano Benoit Mandelbrot.

Trabalhando na IBM, deparou-se com um ruído na linha de transmissão de dados. Esses ruídos se acumulavam de tal forma que os engenheiros não compreendiam sua dinâmica e, portanto, não conseguiam eliminá-lo ocasionando a perda de alguns dados na transmissão.

Mandelbrot percebeu que os erros na transmissão de dados podiam ser reduzidos a períodos em que eles pudessem se repetir, mas em possibilidade de aferir tais erros com disposição semelhante aos da Poeira de Cantor (Fig. 1.1). Isso quer dizer que um erro, se ampliado, possui erros menores dentro de si e assim por diante. Programado os receptores para trabalhar levando em consideração essa disposição dos ruídos, minimizou a faixa de interferências e melhorou a chegada dos dados.

A Poeira de Cantor é obtida retirando-se o terço central de um segmento de reta e a partir daí retira-se sempre o terço central dos segmentos restantes indefinida-mente.



Outro trabalho estudado por Mandelbrot foi o artigo de Lewis Richardson de 1961 intitulado “Qual a extensão do litoral da Grã-Bretanha?” que expunha discrepâncias das várias medições do litoral daquele país de até vinte por cento. A questão era que se a medição fosse efetuada de dez em dez metros, por exemplo, certamente as depressões e as saliências menores que esse valor não seriam computadas. Essas pequenas diferenças vão se acumulando até se tornarem bem diferentes de outra medição que adota outra escala. O valor da extensão do litoral tende a aumentar à medida que se diminui o tamanho da escala, então como definir essa extensão?

Os dois problemas aparentemente não se relacionam, mas possuem algo em comum: o fator de escala. Isso aliado aos trabalhos dos matemáticos franceses Gaston Julia e Pierre Fatou sobre mapeamentos no plano complexo elaborados no início do século XX, ajudou Mandelbrot, nos anos setenta, a criar imagens surpreendentes geradas por computador com regras iniciais simples.

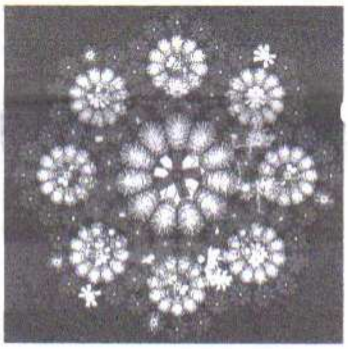
A dimensão fractal, diferentemente da dimensão usual (euclidiana), geralmente não é um número inteiro. Para calcular a dimensão dessas formas deveremos utilizar a propriedade da auto-similaridade de uma forma geral que se aplica às duas geometrias dadas por Félix Hausdorff em 1919, antes mesmo da “descoberta” da Geometria Fractal. Chamando de m o número de cópias de si mesmo e n o fator que cada cópia deve ser ampliada para voltar ao tamanho original, mediante a tabela acima, podemos obterá seguinte expressão para calcular a dimensão d:

$$m = n^d$$

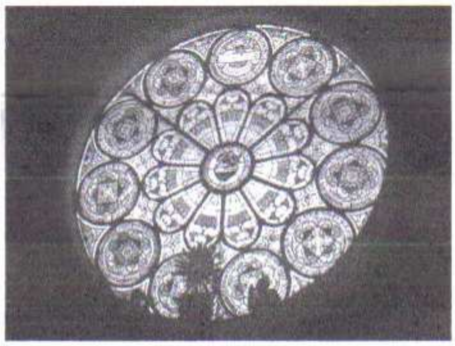
Aplicando o logaritmo em ambos os membros:

$$d = \log m / \log n$$

O mérito de Mandelbrot foi reunir os trabalhos de deslocados de uma direção e agrupá-los para um fim comum. Isso significa dizer que os fractais não foram inventados e, sim, descobertos. Em muitas outras culturas antigas são encontradas formas que se assemelham aos fractais em vários aspectos na forma de mandalas, vitrais e na própria arte.



Mandala Céltica



Vitral secular da Igreja de Bocaiúna-Brasil

Os fractais ganharam notoriedade na comunidade científica não só pela bela esteticidade das imagens, mas também pela descrição mais precisa de alguns fenômenos de outras áreas. Os estudos realizados por vários cientistas conseguiam se conectar, de alguma forma, com as imagens fractais o que possibilitou sua difusão na comunidade científica. Hoje, a palavra fractal significa atualidade, pois, como afirma o matemático J. A. Wheeler, “ninguém será considerado cientificamente atualizado se não for familiarizado com os fractais”.

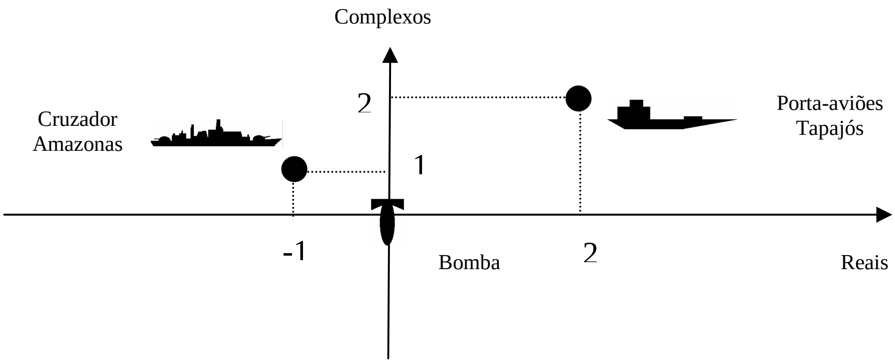
TESTE ESPECÍFICO

Nome:____

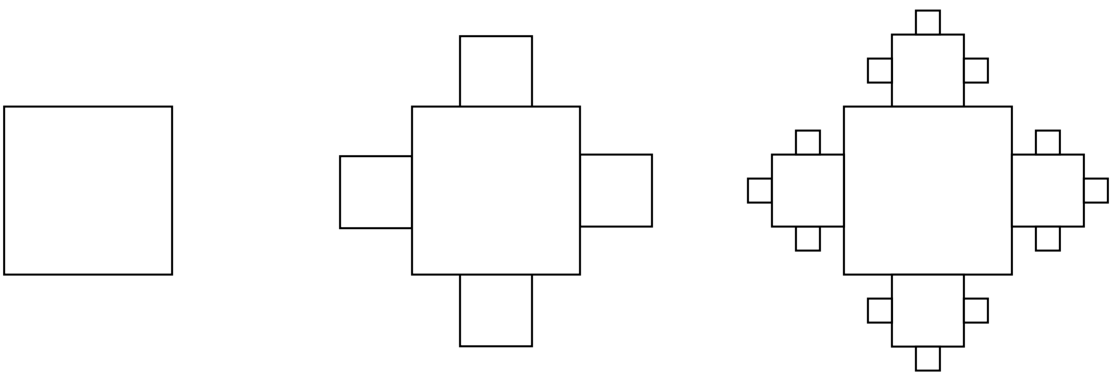
(Tente responder as questões abaixo da forma mais clara possível. As suas respostas são importantíssimas para o nosso trabalho. Muito Obrigado!)

1- Docenilda é uma "chocólotra" compulsiva e viciada em Matemática. Os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(a + b)^6$ expressam exatamente a quantidade de chocolates que Docenilda come durante a semana na seguinte ordem: o primeiro coeficiente é a quantidade de chocolates comidos por ela no domingo; o segundo coeficiente, a quantidade da segunda-feira; o terceiro, a quantidade da terça; e assim por diante. Qual a quantidade total de chocolates que Docenilda come durante uma semana?

2- A figura abaixo representa um sistema de radar que é utilizado no monitoramento de navios de guerra. A leitura desse sistema é feito através de coordenadas do plano complexo. O porta-aviões Tapajós está localizado no ponto referente ao número complexo $z_t = 2 + 2i$ e o cruzador Amazonas está sobre o ponto $z_a = -1 + i$. Se uma bomba cujo raio de destruição eqüivale a 2 unidades do plano for jogada exatamente na origem (0, 0), os navios conseguirão sair intactos do ataque? Justifique sua resposta.



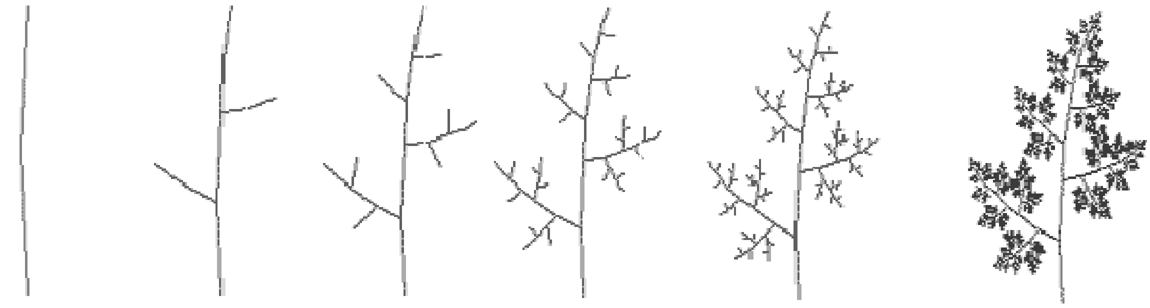
3- Um fractal é uma figura geométrica que pode ser obtida através de processos iterativos. Observe o princípio de criação de um fractal com as iterações abaixo:



Iteração 1 Iteração 2 Iteração 3

Na primeira iteração o quadrado tem lado igual a 4. Na segunda, os quatro novos quadrados agrupados em cada lado da figura anterior possuem, cada um, metade do lado da iteração 1. Na terceira, cada novo quadrado tem a metade do lado da iteração anterior. Qual a área da figura formada na iteração 3?

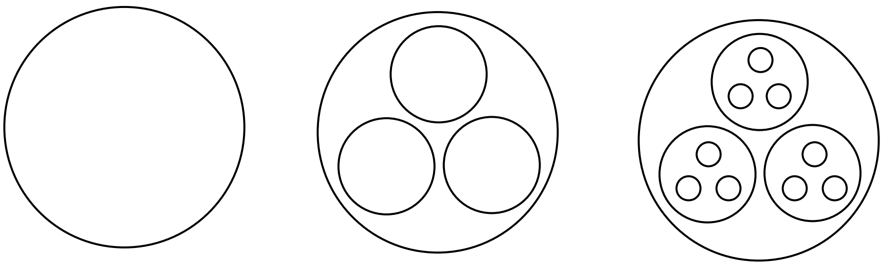
4- A computação gráfica é uma área que se encontra em franca expansão. O que muita gente não sabe é que algumas das imagens mais belas e complexas são feitas por processos simples que se repetem várias vezes. Veja as etapas de criação do ramo abaixo:



Passo 1 Passo 2 Passo 3 Passo 4 Passo 5 Passo n

De acordo com a construção acima responda:
a) Qual a expressão que relaciona o número de passos com a quantidade de segmentos?
b) Quantos segmentos serão obtidos no passo 4?
c) O que acontece com o comprimento dos novos segmentos formados a cada novo passo?

5- A fibra ótica vem causando uma revolução na transmissão de dados. Sem elas, por exemplo, as transmissões de TV via cabo seriam inviáveis. A informação é levada dentro de cabos espelhados internamente em forma de luz e, por isso, os dados são transportados a uma velocidade altíssima. Por motivo de economia, um cabos pode ter vários cabos internos e estes, por sua vez, outros mais. Abaixo vemos um corte frontal de um mesmo cabo em três etapas:



a) Se o cabo principal, na etapa 1, possui raio igual a 12 cm, qual a sua área?
b) Qual a área restante do cabo principal na etapa 2 se os cabos inseridos possuem raio três vezes menor que o cabo principal?
c) Se fosse possível que a inserção de cabos continuasse indefinidamente, qual seria a tendência da área dos novos cabos?

QUESTIONÁRIO

(Responda a todas as perguntas de forma mais clara possível. Suas respostas são muito valiosas para o nosso trabalho.)

1- O que você pensa da Matemática?
2- Por que você acha que estuda Matemática?
3- A Matemática vai servir para alguma coisa no seu futuro?
4- A Matemática é difícil de aprender? Por quê?
5- O que deveria acontecer para melhorar o ensino da Matemática?
6- Aquilo que foi visto na escola sobre Matemática faz sentido? Qual?
7- O curso de Geometria Fractal fez sentido? Qual?
8- O conteúdo de Matemática do Ensino Médio está de acordo com sua realidade?
9- E o conteúdo de Geometria Fractal? Por quê?
10- A Matemática estudada até aqui auxiliou de alguma forma nas outras disciplinas do Ensino Médio? O conteúdo visto no curso de Geometria Fractal poderá auxiliar?
11- Você já teve contato com algum recurso tecnológico para auxiliá-lo a aprender Matemática?

Sim	**Não**
Ele pôde ajudar?	Ele podia ter ajudado?