



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO - VIBRAÇÕES E ACÚSTICA**

**SÉRGIO LUIZ MATOS DA CRUZ**

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL OPERACIONAL EM  
SISTEMAS SUJEITOS A EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS COM A  
PRESENÇA DE COMPONENTE HARMÔNICO**

Belém – Pará – Brasil

Fevereiro 2006

**SÉRGIO LUIZ MATOS DA CRUZ**

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL OPERACIONAL EM  
SISTEMAS SUJEITOS A EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS COM A  
PRESENÇA DE COMPONENTE HARMÔNICO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal  
do Pará como requisito para obtenção do Título  
de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: **Prof. Dr. Alexandre Luiz Amarante Mesquita.**

Belém – Pará – Brasil

Fevereiro 2006

**SÉRGIO LUIZ MATOS DA CRUZ**

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL OPERACIONAL EM  
SISTEMAS SUJEITOS A EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS COM A  
PRESENÇA DE COMPONENTE HARMÔNICO**

Dissertação submetida à Banca Examinadora  
para a obtenção do Título de Mestre em  
Engenharia Mecânica na Área de Vibrações e  
Acústica.

Belém-Pará, 17 de fevereiro de 2006.

BANCA EXAMINADORA:

---

Orientador Prof. Dr. Alexandre Luiz Amarante Mesquita  
Universidade Federal do Pará

---

Prof. Dr. Alberto Carlos Guimarães Castro Diniz  
Universidade de Brasília

---

Prof. Dr. Newton Sure Soeiro  
Universidade Federal do Pará

***Dedicatória***

***Aos meus Pais José e Arlete,***  
*Que me deram vida e educação, me ensinando a*  
*sempre buscar e realizar meus sonhos.*

***A Cintia,***  
*Por todo apoio e força que me deu ao longo de minha*  
*trajetória.*

***Ao “Joca”,***  
*Que sempre está ao meu lado, dando e pedindo*  
*atenção.*

## *Agradecimentos*

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal do Pará – UFPA e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, por proporcionarem esta oportunidade de aperfeiçoamento.

Ao Prof. Alexandre Mesquita, pela sua orientação e disponibilidade, sempre que foi necessário.

Aos Professores Newton, Remo e Gustavo que contribuíram de forma decisiva em minha formação.

À ELETRONORTE, através dos Engenheiros Paulo Thadeu e Sinimbú, que me deram apoio na etapa experimental.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para minha dissertação, em especial, aos colegas Marcus, Alan, Marlenne, Rubenildo, Aviz, Reginaldo, Alexandre e Benevenuto.

## RESUMO

CRUZ, Sérgio Luiz Matos da, *Estudo de Técnicas de Análise Modal Operacional em Sistemas Sujeitos a Excitações Aleatórias com a Presença de Componente Harmônico*, Universidade Federal do Pará, Dissertação (Mestrado), Belém, 2006.

A metodologia tradicional de identificação de parâmetros na análise modal de estruturas é realizada a partir de sinais medidos de força de entrada e de movimento de resposta da estrutura em condições laboratoriais controladas. Entretanto, quando é necessária a obtenção dos parâmetros modais de estruturas de máquinas em operação, as condições para controlar e medir a excitação nestas situações impossibilita a realização da análise modal tradicional. Neste caso, o teste modal é realizado utilizando somente dados de resposta do sistema. A Análise Modal Operacional (AMO) é um método de extração modal em que nenhuma excitação artificial necessita ser aplicada ao sistema, utilizando-se a própria excitação operacional como entrada para medição da resposta do sistema. A técnica clássica de Análise Modal Operacional NExT considera, para isso, que a excitação operacional do sistema seja um ruído branco. Esta técnica faz a consideração de que as funções de correlação obtidas de estruturas podem ser consideradas como funções de resposta ao impulso e então métodos tradicionais de identificação modal no domínio do tempo podem ser empregados. Entretanto, caso a excitação operacional contenha componentes harmônicos que se sobressaíam, estes podem ser confundidos como modos naturais do sistema. Neste trabalho é demonstrada que através da função densidade de probabilidade da banda estreita contendo o pico de um modo, é possível identificá-lo como natural ou operacional (proveniente da excitação operacional da estrutura). É apresentada também uma modificação no método de identificação modal Exponencial Complexa Mínimos Quadrados (LSCE), passando a considerar sinais harmônicos de frequências conhecidas presentes na excitação operacional, em um ensaio utilizando a técnica NExT. Para validação desses métodos, utiliza-se um modelo teórico de parâmetros modais conhecidos analiticamente e como estudo de caso experimental, um sistema formado por uma viga bi-apoiada suportando um motor elétrico com desbalanceamento de massa.

*Palavras Chave:* Análise Modal Operacional, NExT, LSCE, parâmetros modais.

## ABSTRACT

CRUZ, Sérgio Luiz Matos da, *Study of Techniques of Operational Modal Analysis in the Presence of Random Excitations and Harmonic Component*, Universidade Federal do Pará, Dissertação (Mestrado), Belém, 2006.

Traditional modal parameter identification usually require measurements of both the input force and the resulting response in laboratory conditions. However, when modal properties are to be identified from large structures in operation, usually the possibilities to control and measure the loading on the structure is rather limited. In this case, the modal testing is usually performed using response data only. Operational Modal Analysis (OMA) or Operational Modal Testing is a method where no artificial excitation needs to be applied to the structure or force signals to be measured. In this case, the modal parameters estimation is based upon the response signals, thereby minimizing the work of preparation for the test. However, standard OMA techniques, such as NExT, are limited to the case when excitation to the system is a white stationary noise. The NExT assumes that the correlation functions are similar to the impulse response functions, and then, traditional time domain identification methods can be applied. However, if harmonic components are present in addition to the white noise, these components can be misunderstood as natural modes in the plot of response spectrum. In this work, it is shown that it is possible identify if a peak in the response spectrum correspond to a natural mode or an operational mode. It is achieved through the application of the probability density function. It is also presented a modification in the LSCE algorithm in such manner that it can support harmonics in the operational excitation. In order to validate the methods presented in this work, it is shown numerical and experimental cases. In the former, results for a mass-spring-damper of five degree of freedom are presented, and in the latter a beam supporting an unbalanced motor is analyzed.

*Key Words:* Operational Modal Analysis, NExT, LSCE, modal parameters.

## SUMÁRIO

RESUMO .....	vi
ABSTRACT .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	xi
LISTA DE TABELAS .....	xv
NOMENCLATURAS .....	xvii
I- INTRODUÇÃO .....	1
1.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2- OBJETIVOS .....	2
1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	2
1.4- METODOLOGIA .....	4
1.5- DIVISÃO DO TRABALHO .....	5
II- FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA .....	7
2.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	7
2.2- FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA .....	7
2.3- FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E DENSIDADE ESPECTRAL .....	16
2.4- FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE .....	19
2.4.1- Funções Densidade de Probabilidade especiais .....	23
III- ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL .....	27
3.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	27
3.2- OBJETIVOS DO TESTE MODAL .....	28
3.3- PREPARAÇÃO PARA O TESTE MODAL .....	29
3.3.1- Condições de Contorno .....	30
3.3.2- Definição do Modelo Geométrico e Medição da Excitação e	

Resposta .....	30
3.3.3- Sinais de Excitação .....	31
3.3.4- Mecanismos de Excitação .....	33
3.4- ESTIMAÇÃO DAS FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA .....	37
3.5- IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS .....	41
3.5.1 - Método da Exponencial Complexa e Exponencial Complexa – Mínimos Quadrados .....	43
3.6- VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS .....	48
IV- ANÁLISE MODAL OPERACIONAL .....	50
4.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	50
4.2- MÉTODO NEXT DE ANÁLISE MODAL OPERACIONAL .....	51
4.3- IDENTIFICAÇÃO DA NATUREZA DO MODO ATRAVÉS DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE .....	54
4.4- MÉTODO DE MOHANTY & RIXEN .....	56
V- ANÁLISE DE RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL .....	59
5.1– CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	59
5.2– MODELO ANALÍTICO ADOTADO .....	59
5.3– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL TRADICIONAL .....	61
5.4– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL SOMENTE COM RUÍDO BRANCO .....	64
5.5– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL COM RUÍDO BRANCO E COMPONENTE HARMÔNICO .....	66
5.5.1– Aplicando Diretamente o Método NExT .....	66
5.5.2– Extrair o Componente Harmônico e Aplicando o Método NExT	68
5.5.3– Aplicando o Método de Mohanty & Rixen .....	71
VI- ANÁLISE DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	75
6.1– CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	75
6.2– SISTEMA EXPERIMENTAL ADOTADO .....	75
6.3– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	

TRADICIONAL .....	79
6.4- RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL SOMENTE COM RUIDO BRANCO .....	81
6.5 – RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL COM RUIDO BRANCO E COMPONENTE HARMÔNICO .....	83
6.5.1- Resultados Obtidos para a Técnica NExT .....	83
6.5.2- Resultados Obtidos para o Método de Mohanty & Rixen .....	85
VII- CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .....	89
7.1- CONCLUSÕES .....	89
7.2- SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .....	90
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	92
ANEXOS .....	96
A- ALGORITMOS ELABORADOS: .....	96
A.1- Algoritmo para obtenção dos parâmetros modais de forma analítica .....	96
A.2- Algoritmo para o método LSCE para vários gdl .....	97
A.3- Algoritmo para o método LSCE para detalhar um gdl .....	100
A.4- Algoritmo para obtenção dos valores de MAC .....	102
A.5- Algoritmo para simulação de uma análise modal operacional .....	103
A.6- Algoritmo de aplicação de filtro passa/rejeita banda .....	105
A.7- Algoritmo de Mohanty & Rixen para vários gdl .....	106
A.8- Algoritmo de Mohanty & Rixen para detalhar um gdl .....	109

## LISTA DE FIGURAS

2.1- Matriz de função de resposta em frequência. A matriz contém todas as possíveis funções de resposta em frequência entre pontos de teste da estrutura (Schmidtberg & Pal, 1986, modificado) .....	11
2.2- (a) Função harmônica e suas respectivas funções: (b) de auto-correlação e (c) de auto-densidade espectral; (d) Função harmônica somada a ruído aleatório e suas respectivas funções: (e) de auto-correlação e (f) de auto-densidade espectral (Bendat & Piersol, 1980) .....	18
2.3- (a) Sinal aleatório de banda estreita e suas respectivas funções: (b) de auto-correlação e (c) de auto-densidade espectral; (d) Sinal aleatório de banda larga e suas respectivas funções: (e) de auto-correlação e (f) de auto-densidade espectral (Bendat & Piersol, 1980) .....	19
2.4- Conjunto de funções amostras formando um processo aleatório (Bendat & Piersol, 1986) .....	19
2.5- Função distribuição de probabilidade (Bendat & Piersol, 1980) .....	20
2.6- Função distribuição de probabilidade de uma função aleatória estacionária (Bendat & Piersol, 1980) .....	21
2.7- Medida da densidade de probabilidade (Bendat & Piersol, 1980) .....	22
2.8- Probabilidade calculada da função densidade (Bendat & Piersol, 1980) .....	22
2.9- Funções de distribuição de probabilidade e densidade de probabilidade Gaussiana padronizada. (a) Função distribuição. (b) Função densidade de probabilidade (Bendat & Piersol, 1980) .....	24
2.10- Função densidade de probabilidade padronizada para uma onda senoidal (Bendat & Piersol, 1980) .....	25
2.11- Função densidade de Probabilidade para uma onda senoidal em ruído Gaussiano (Bendat & Piersol, 1980, modificado) .....	26
3.1- Teste modal usando o excitador de vibrações (Maia & Silva, 1997, modificado) .....	27
3.2- (a) Acelerômetro de carga e seu condicionador e (b) acelerômetro ICP com sua fonte externa .....	31
3.3- Teste modal usando excitação por impacto .....	34
3.4- Modelos de entrada e saída em sistemas lineares- (a) No domínio do tempo	

e (b) no domínio da frequência .....	38
3.5- (a) Espectro de frequência de uma estrutura levemente amortecida tendo modos bem espaçados; (b) Espectro de frequência de outra estrutura, porém fortemente amortecida tendo modos acoplados (“Application Note” 343-3 da HP, 1986, modificado) .....	42
3.6- Classificação geral dos métodos de identificação de parâmetros (Maia & Silva, 1997) .....	42
3.7- Métodos de identificação de parâmetros no domínio do tempo (Maia & Silva, 1997) .....	43
3.8- Métodos de identificação de parâmetros no domínio da frequência (Maia & Silva, 1997) .....	43
4.1- Funções densidades espectrais contendo seis picos correspondendo a cinco modos naturais e um modo operacional em 20 Hz (indicado pela seta) .....	55
4.2- Densidade de probabilidade do sinal filtrado no 1º pico ( $13,7 \pm 1$ Hz) .....	55
4.3- Densidade de probabilidade do sinal filtrado no 2º pico ( $20 \pm 1$ Hz) .....	55
5.1- Sistema com cinco graus de liberdade (Ishihara & Dias, 1999, modificado) .	59
5.2- FRFs fornecidas e respostas obtidas para o algoritmo LSCE .....	62
5.3- Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pelo algoritmo LSCE (25 gdl) .....	63
5.4- Funções densidade espectrais fornecidas e respostas obtidas somente para ruído branco .....	64
5.5- Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pela técnica NExT (13 gdl) .....	65
5.6- Funções densidade espectrais fornecidas com sinal harmônico de 14 Hz e respostas obtidas para a técnica NExT .....	66
5.7- Funções densidade espectrais fornecidas com sinal harmônico de 13,7 Hz e respostas obtidas para a técnica NExT .....	67
5.8- Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 14 Hz filtrado e respostas obtidas para a técnica NExT .....	69
5.9- Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pela técnica NExT extraindo o harmônico (12 gdl) .....	69
5.10- Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 13,7 Hz filtrado e respostas obtidas para a técnica NExT .....	70

5.11- Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pela técnica NExT extraindo o harmônico (10 gdl) .....	71
5.12- Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 14 Hz e respostas obtidas para o método de Mohanty & Rixen .....	72
5.13- Valores de MAC calculados para 18 gdl para o método de Mohanty & Rixen .....	73
5.14- Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 13,7 Hz e respostas obtidas para o método de Mohanty & Rixen .....	73
5.15- Valores de MAC calculados para 29 gdl para o método de Mohanty & Rixen .....	74
6.1- Analisador de Sinais .....	76
6.2- Motor elétrico utilizado .....	76
6.3- Excitador de vibrações .....	77
6.4- Amplificador de Potência .....	77
6.5- “Stinger” e conexão deste com o excitador de vibrações e a viga .....	77
6.6- Esquema da montagem do sistema para o ensaio de análise modal operacional .....	78
6.7- Martelo de impacto .....	78
6.8- FRF $H_{65}(\omega)$ fornecida e respostas de frequência e amortecimento obtidas pelo método LSCE .....	80
6.9- Respostas obtidas para funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado somente com ruído branco .....	81
6.10- Valores de MAC obtidos entre os vetores da referência e os vetores a técnica NExT considerando 15 gdl .....	82
6.11- Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 30 Hz .....	83
6.12- Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 20 Hz .....	84
6.13- Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 30 Hz utilizando o método de Mohanty & Rixen .....	86
6.14- Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 20 Hz utilizando o método de	

Mohanty & Rixen .....	87
6.15- Valores de MAC obtidos entre a os vetores da referência e os vetores do método de Mohanty & Rixen considerando 22 gdl na presença do harmônico de 20 Hz .....	88

## LISTA DE TABELAS

5.1- Parâmetros físicos adotados .....	60
5.2- Matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez do modelo analítico utilizado	60
5.3a- Parâmetros modais do modelo analítico utilizado .....	60
5.3b- Parâmetros modais do modelo analítico utilizado .....	61
5.4- Faixa de amortecimento representado pelas cores .....	62
5.5- Resultados de frequência e amortecimento obtidos para o método LSCE (25 gdl) .....	63
5.6- Resultados obtidos considerando 13 gdl para a técnica NExT .....	65
5.7- Resultados obtidos para 12 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 14 Hz .....	67
5.8- Resultados obtidos para 10 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 13,7 Hz .....	68
5.9- Resultados obtidos para 12 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 14 Hz filtrado .....	69
5.10- Resultados obtidos para 10 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 13,7 Hz filtrado .....	71
5.11- Resultados obtidos considerando 18 gdl para o método de Mohanty & Rixen com um harmônico de 14 Hz .....	72
5.12- Resultados obtidos considerando 29 gdl para o método de Mohanty & Rixen com um harmônico de 13,7 Hz .....	74
6.1. Faixa de amortecimento representado pelas cores .....	79
6.2a- Parâmetros modais obtidos pelo algoritmo LSCE na análise modal experimental .....	80
6.2b- Parâmetros modais obtidos pelo algoritmo LSCE na análise modal experimental .....	81
6.3- Resultados para a técnica NExT estimando 15 gdl .....	82
6.4- Resultados da técnica NExT para 24 gdl na presença de um harmônico de 30 Hz .....	84
6.5- Resultados para a técnica NExT para 25 gdl na presença de um harmônico de 20 Hz. ....	85
6.6- Resultados para o método de Mohanty & Rixen para 16 gdl na presença de	

um harmônico de 30 Hz .....	86
6.7- Resultados para o método de Mohanty & Rixen para 22 gdl na presença de um harmônico de 20 Hz .....	87
7.1- Síntese dos resultados obtidos .....	90

## NOMENCLATURAS

### *Letras Latinas*

$A$	constante modal
$c, C$	amortecimento
$f(t), F(t)$	força
$H(\omega)$	função de resposta em frequência
$H(t)$	função de resposta ao impulso
$j$	$\sqrt{-1}$
$k, K$	rigidez
$L$	número de intervalos de tempo
$m, M$	massa
$N$	número de graus de liberdade
$p(x)$	função densidade de probabilidade
$P(x)$	função distribuição de probabilidade
$q(t)$	coordenada generalizada
$R(\tau)$	função correlação cruzada ou auto-correlação
$s$	autovalores
$S(\omega)$	função densidade espectral ou auto densidade
$t$	tempo
$V$	variável do polinômio de Prony
$x$	coordenada generalizada da massa
$X(\omega)$	resposta no domínio da frequência
$z$	variável normalizada

### *Letras Gregas*

$\beta$	coeficiente do polinômio de Prony
$\phi$	vetor modal
$\Phi$	matriz modal
$\gamma^2$	função coerência
$\mu$	valor médio
$\pi$	número pi

$\theta$	ângulo de fase
$\sigma$	desvio padrão
$\tau$	deslocamento de uma função em relação a outra
$\omega, f$	freqüência
$\xi$	fator de amortecimento
$\Psi$	matriz modal normalizada pela massa

### *Sobrescritos*

$T, '$	transposto
*	conjugado

### *Abreviaturas*

amort.	amortecimento
<i>diag</i>	elementos da diagonal principal da matriz
Eq.	equação
gdl	graus-de-liberdade
freq.	freqüência
Fig.	figura
Mag	magnitude
Prob	probabilidade
Tab.	tabela

### *Siglas*

ACRF	“Advanced Characteristic Response Function”
AME	Análise Modal Experimental
AMO	Análise Modal Operacional
ARMA	“AutoRegressive Moving-Average”
CE	“Complex Exponential”
CEFD	“Complex Exponential Frequency Domain”
CRF	“Characteristic Response Function”
DFT	“Discrete Fourier Transform”
DSPI	“Direct System Parameter Identification”
E – Gleson	“Ewins and Gleeson”

ERA	“Eiginsystem Realisation Algorithm”
ERA – FD	“Eiginsystem Realisation Algorithm in the Frequency Domain”
FDD	“Frequency Domain Decomposition”
FDPM	“Frequency Domain Prony Method”
FFT	“Fast Fourier Transform”
FRI	Função Resposta ao Impulso
FRF	Função Resposta em Freqüência
GRFP	“Global Rational Fraction Polynomial”
GSH	Gaukroger-Skingle-Heron
ICP	“Integrated Circuit Piezoeletric”
ISSPA	“Identification of Structural System Parameters”
ITD	“Ibrahim Time-Domain”
LSCE	“Least Squares Complex Exponential”
MAC	“Modal Assurance Criterion”
MCF	“Modal Confidence Factor”
MDOF	“Multiple Degree of Freedom methods”
MIMO	“Multi-Input Multi-Output”
MISO	“Multi-Input Single-Output”
MQC	“Maxi Quadrature Component”
MSCC	“Mode Shape Correlation Coefficient”
NExT	“Natural Excitation Technique”
PRCE	“PolyReference Complex Exponential”
PRFD	“PolyReference Frequency Domain”
RFP	“Rational Fraction Polynomial”
SDOF	“Single Degree of Freedom methods”
SFD	“Simultaneous Frequency Domain”
SIMO	“Single-Input Multi-Output”
SISO	“Single-Input Single-Output”
SSI	“Stochastic Subspace Identification”

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A metodologia tradicional de identificação de parâmetros na análise modal de estruturas é realizada a partir de sinais medidos de força de entrada e de movimento de resposta, da estrutura, em condições laboratoriais controladas. Entretanto, para grandes estruturas ou estruturas com equipamentos em operação, torna-se difícil o controle e a medição da força de entrada. Para suprir esta limitação, são conhecidas técnicas de determinação de parâmetros modais utilizando somente os dados de resposta do sistema. Estas técnicas são chamadas de análise modal operacional devido poder utilizar as próprias forças geradas pela operação do sistema como fonte de excitação (Schwarz & Richardson, 2001).

As técnicas de análise modal operacional costumam considerar as forças de excitação como sendo um ruído branco estacionário, o que pode trazer problemas, caso existam componentes harmônicos inseridos nas forças geradas pela operação do sistema (Mohanty & Rixen, 2004a). Nestes casos, o gráfico da função de densidade ou auto-densidade espectral da resposta apresentará picos correspondendo a modos naturais e picos correspondendo a modos operacionais (respostas às excitações senoidais). Desta forma, os métodos tradicionais de AMO irão considerar erroneamente tais picos de modos operacionais como sendo modos naturais.

Neste trabalho, é apresentado a aplicação de algoritmos baseados em um método de análise modal operacional, o NExT (Natural Excitation Technique) (James III et al, 1995), verificando a eficiência deste na presença de componentes harmônicos em um modelo analítico e em um sistema de bancada experimental. Em seguida, é mostrado um método de distinção entre modos reais e componentes harmônicos no sinal medido da resposta. Este método, desenvolvido por Brincker et al. (2000a), utiliza a função densidade de probabilidade nos sinais filtrados em uma faixa de frequência contendo um modo, para a verificação se este corresponde a um modo natural ou operacional.

Finalmente, é mostrada a aplicação de um algoritmo baseado no método apresentado por Mohanty & Rixen (2004a) onde o componente harmônico passa a ser considerado no Polinômio de Prony, melhorando as estimativas obtidas de parâmetros modais. Este caso é aplicado ao modelo analítico e a um caso experimental e confrontado com os resultados obtidos através do NExT com e sem a filtragem dos modos operacionais (somente para o modelo analítico).

## **1.2- OBJETIVOS**

Elaboração de um algoritmo que utiliza a metodologia apresentada em Mohanty & Rixen (2000a), que visa efetuar identificação de parâmetros modais em ensaios de análise modal operacional baseados na técnica NExT na presença de componentes harmônicos na excitação operacional.

Objetivos secundários se fazem presentes, como a elaboração e validação analítica e experimental de um algoritmo baseado no método de identificação modal exponencial complexa - mínimos quadrados, validação analítica e experimental deste algoritmo utilizando a técnica NExT de análise modal operacional, estudo e validação analítica de um método de distinção de modos operacionais e naturais.

## **1.3- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

A bibliografia referente à análise modal experimental tradicional é bastante vasta. A análise modal operacional já possui uma quantidade considerável de artigos sobre o assunto, mas citações muito discretas em livros didáticos. Sobre análise modal operacional na presença de componentes harmônicos, somente recentemente poucos trabalhos foram publicados.

A seguir, é feita uma rápida citação sobre os métodos de análise modal operacional.

Os métodos tradicionais de análise modal são limitados a testes em que a força de excitação é controlável e mensurável. Contudo, quando testes modais são realizados em estruturas de equipamentos em regime de operação, as condições reais de carregamento da estrutura estão presentes e são difíceis, se não impossíveis, de serem medidas (pelo menos com a instrumentação usual de análise modal). Como exemplos de tais carregamentos, pode-

se citar, ação do vento, ondas marítimas, carregamento devido tráfego de automóveis, etc. Nestes casos, apenas os dados de resposta operacional são disponíveis. Portanto, há um considerável interesse em extrair modelos modais diretamente dos dados de resposta operacional. Esta metodologia de obtenção dos parâmetros modais é denominada de Análise Modal Operacional (Schwarz & Richardson, 2001).

Existem diversos métodos de análise modal operacional, dentre eles: a Média Móvel Autoregressiva (Hermans & Van Der Auweraer, 1999), o NExT - “Natural Excitation Technique” (James III *et al*, 1995 Shen *et al*, 2003), o FDD - “Frequency Domain Decomposition” (Brincker *et al*, 2000*b* e 2000*c*, Moller *et al*, 2000*a* e 2000*b*) e o SSI - “Stochastic Subspace Identification” (Brincker *et al*, 2000*b*, Moller *et al*, 2000*a* e 2000*b*). Dentre estas, a técnica de Excitação Natural (NExT) tem-se mostrado uma das mais utilizadas. Esta técnica usa as funções de correlação cruzada das respostas medidas acopladas com métodos convencionais de identificação de parâmetros no domínio do tempo sob a consideração de que a entrada desconhecida é um ruído branco.

Muitas estruturas podem estar sujeitas a excitações harmônicas além da excitação aleatória estacionária; como por exemplo, um rotor desbalanceado. Devido à presença de excitação harmônica, os procedimentos usuais de análise modal operacional podem vir a fornecer resultados de parâmetros modais imprecisos.

Em Parloo *et al* (2003), é apresentado um estudo para identificação de forças localizadas em análises modais operacionais.

Em Brincker *et al* (2000*a*), é demonstrado uma forma de se diferenciar os modos naturais das componentes harmônicas no espectro da resposta, mas esta técnica é válida apenas para casos com modos espaçados e que não estejam próximos das componentes harmônicas.

Recentemente, desenvolveram-se adaptações de métodos aplicados à análise modal tradicional no domínio do tempo (método da exponencial complexa - mínimos quadrados (LSCE), método de Ibrahim e o método ERA) para análise modal operacional que tem como característica principal a consideração da componente harmônica operacional do sistema (Mohanty & Rixen, 2004*a*, Mohanty & Rixen, 2004*b* e Mohanty & Rixen, 2003) mesmo que

esta componente esteja próxima de uma frequência natural da estrutura. Neste contexto, este trabalho propõe o estudo e implementação de rotinas para análise modal operacional em estruturas que possuam características harmônicas em sua excitação operacional através dos métodos apresentados por Mohanty e Rixen.

#### **1.4- METODOLOGIA**

Para desenvolver o algoritmo final que se destina à análise modal operacional com componentes harmônicos, inicialmente optou-se por desenvolver um algoritmo baseado no método exponencial complexa - mínimos quadrados (LSCE), para que mais posteriormente fosse adaptado para a metodologia elaborada por Mohanty & Rixen (2000a).

O algoritmo LSCE desenvolvido também pode ser utilizado na aplicação da técnica NExT, o que possibilita a verificação do comportamento dessa técnica na presença de componente harmônico.

Com um modelo discreto massa-mola-amortecimento de parâmetros modais conhecidos analiticamente, aplicou-se os programas computacionais desenvolvidos com o intuito de validá-los. Para isso, desenvolveu-se uma metodologia de simulação de análise modal operacional, extraíndo funções densidades espectrais para a resposta à excitação somente por ruído branco e com um componente harmônico somado ao ruído branco. Nesta simulação, utilizou-se também a técnica apresentada por Brincker et al. (2000a) para identificação de modos operacionais através da função densidade de probabilidade em bandas de frequências onde surge o pico do modo. Após a identificação do pico no espectro correspondente ao modo operacional, este é filtrado e então é aplicado o método de identificação.

Com os algoritmos validados nesta primeira simulação, foi elaborada uma bancada experimental que possibilitasse o ensaio de análise modal experimental tradicional, além de ensaios de análise modal operacional somente na presença de ruído branco e adicionando-se componente harmônico ao ruído branco, com o intuito de validar experimentalmente todas as técnicas estudadas neste trabalho.

## 1.5- DIVISÃO DO TRABALHO

Segundo a metodologia adotada, o trabalho está apresentado da seguinte forma:

O capítulo II apresenta fundamentações matemáticas que são diretamente aplicadas neste trabalho, como as bases para entendimento das funções de resposta em frequência, funções de correlação, função densidade espectral e funções de densidade de probabilidade.

No capítulo III, é feita uma revisão sobre análise modal experimental, com foco nas suas etapas, além dos fundamentos dos métodos de identificação modal Exponencial Complexa e Exponencial Complexa - Mínimos Quadrados.

O capítulo IV tem como foco a análise modal operacional, destacando a técnica NExT de identificação modal e a análise modal operacional considerando sinais harmônicos, com uma técnica apresentada por Brincker et al. (2000a), que visa obter a distinção entre modos operacionais e naturais através da análise da função densidade de probabilidade do pico do modo, e a teoria da técnica desenvolvida por Mohanty & Rixen (2000a), que considera o sinal harmônico no polinômio de Prony.

No capítulo V é apresentado um modelo teórico e seus parâmetros modais obtidos analiticamente. Este modelo é utilizado para validação dos algoritmos elaborados. São mostrados os resultados obtidos para a aplicação do algoritmo LSCE diretamente nas Funções Resposta em Frequência (FRFs) e nas funções densidade espectrais extraídas de uma simulação de análise modal operacional, utilizando a técnica NExT. O método de Mohanty & Rixen, também é validado pelos dados oriundos da simulação da análise modal operacional, verificando a eficiência deste.

O capítulo VI apresenta uma bancada experimental montada para a aplicação dos algoritmos desenvolvidos e os resultados para os métodos estudados, com o intuito de validar os algoritmos LSCE, aplicado na análise modal tradicional e técnica NExT, e Mohanty & Rixen em aplicações práticas.

No capítulo VII são apresentadas às considerações finais sobre o trabalho elaborado, destacando os objetivos alcançados, a eficiência das técnicas avaliadas e os possíveis trabalhos complementares que podem ser desenvolvidos a partir deste.

Nos anexos, são apresentados os algoritmos desenvolvidos neste trabalho.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

#### 2.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo trata dos fundamentos teóricos a respeito de algumas funções que são utilizadas neste trabalho. Inicialmente é feita uma revisão da formulação da Função de Resposta em Frequência (FRF), considerando inicialmente o amortecimento viscoso proporcional e depois considerando o caso geral de amortecimento viscoso. Então, a partir da formulação da FRF, obtém-se a expressão da Função de Resposta ao Impulso (FRI), através da aplicação da transformada inversa de Fourier. Em seguida, são mostrados os conceitos de Funções de Correlação (auto-correlação e correlação cruzada) e suas relações com as Funções Densidade Espectral (auto-densidade espectral e densidade espectral cruzada). Finalmente, apresenta-se a Função Distribuição de Probabilidade e a sua derivada, a Função Densidade de Probabilidade. Sendo que esta última é usada ao longo deste trabalho com a finalidade de distinguir se um pico na resposta espectral corresponde a um modo natural ou a uma resposta devido a uma excitação harmônica.

#### 2.2- FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E FUNÇÃO DE RESPOSTA AO IMPULSO

A equação do movimento para um sistema forçado, com  $N$  graus de liberdade, modelado com amortecimento viscoso, é do tipo:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.1)$$

sendo  $[M]$ , representando a matriz de massa,  $[K]$ , a matriz de rigidez,  $\{x(t)\}$  representa o vetor de coordenadas generalizadas do movimento das massas e  $f(t)$  o vetor das forças externas agindo nas massas. A matriz  $[C]$  é a matriz de amortecimento viscoso, que sendo proporcional, pode ser escrita como:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (2.2)$$

Para o caso de excitação harmônica do tipo  $\{f(t)\} = \{F\}e^{j\omega t}$ , o vetor resposta, em regime permanente, pode ser escrito como  $\{x(t)\} = \{X\}e^{j\omega t}$ . Substituindo o vetor de excitação e o vetor resposta na Eq. (2.1), obtém-se:

$$([K] - \omega^2[M] + j\omega[C])\{X\}e^{j\omega t} = \{F\}e^{j\omega t} \quad (2.3)$$

e então,

$$\{X\} = ([K] - \omega^2[M] + j\omega[C])^{-1} \{F\} \quad (2.4)$$

ou

$$\{X\} = [H(\omega)]\{F\} \quad (2.5)$$

em que a matriz  $[H(\omega)]$  é conhecida como a matriz das funções de resposta em frequência (FRFs). Esta matriz contém todas as informações sobre as características dinâmicas do sistema.

As funções de resposta em frequência definidas como a relação entre a amplitude do deslocamento da resposta e a amplitude da excitação harmônica são denominadas de funções de receptância. No caso de uma FRF ser apresentada como a relação entre a velocidade e a excitação, esta função é denominada de função de mobilidade. Se for usada a aceleração como resposta, a FRF é denominada de função de inertância.

Portanto, em termos de parâmetros espaciais a matriz de FRFs é dada por:

$$[H(\omega)] = ([K] - \omega^2[M] + j\omega[C])^{-1} \quad (2.6)$$

Para se ter a expressão da matriz de FRFs escrita em termos de parâmetros modais, parte-se da inversa da expressão acima, ou seja:

$$[H(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2[M] + j\omega[C]) \quad (2.7)$$

Pré-multiplicando a expressão acima pela transposta da matriz modal e pós-multiplicando pela matriz modal, tem-se:

$$[\Phi]^T [H(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T ([K] - \omega^2 [M] + j\omega [C]) [\Phi] \quad (2.8)$$

Aplicando as seguintes propriedades de ortogonalidade dos vetores modais em relação às matrizes de massa, rigidez e amortecimento (esta última, por ser proporcional às duas primeiras)

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [\text{diag}(\bar{k}_r)] \\ [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [\text{diag}(\bar{m}_r)] \\ [\Phi]^T [C] [\Phi] &= [\text{diag}(\bar{c}_r)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

a Eq. (2.8) torna-se:

$$[\Phi]^T [H(\omega)]^{-1} [\Phi] = ([\text{diag}(\bar{k}_r)] - \omega^2 [\text{diag}(\bar{m}_r)] + j\omega [\text{diag}(\bar{c}_r)]) \quad (2.10)$$

sendo  $\bar{m}_r$  o escalar conhecido como massa modal do modo  $r$  ou massa generalizada do modo  $r$ , da mesma forma que  $\bar{k}_r$  é conhecido como rigidez modal do modo  $r$  ou rigidez generalizada do modo  $r$  e  $\bar{c}_r$  é conhecido como coeficiente de amortecimento modal do modo  $r$ .

Para isolar a matriz acima, deve-se inverter a Eq. (2.10) e depois pré-multiplicar o resultado pela matriz modal e pós-multiplicar pela transposta da matriz modal. Assim, tem-se:

$$[H(\omega)] = [\Phi] ([\text{diag}(\bar{k}_r)] - \omega^2 [\text{diag}(\bar{m}_r)] + j\omega [\text{diag}(\bar{c}_r)])^{-1} [\Phi]^T \quad (2.11)$$

Caso seja usada a matriz modal normalizada pela massa, ou seja:

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [M] [\Psi] &= [I] \\ [\Psi]^T [K] [\Psi] &= [\text{diag}(\omega_r^2)] \\ [\Psi]^T [C] [\Psi] &= [\text{diag}(a_0 + a_1 \omega_r^2)] = [\text{diag}(2\zeta_r \omega_r)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

A Eq. (2.11) torna-se:

$$[H(\omega)] = [\Psi]([diag(\omega_r^2 - \omega^2)] + j[diag(2\xi_r\omega, \omega)]^{-1}[\Psi]^T \quad (2.13)$$

A matriz de receptância é composta por elementos que representam a FRF entre o  $j$ -ésimo elemento do vetor da amplitude da resposta e o  $k$ -ésimo elemento do vetor de força, considerando que todos os elementos remanescentes deste último vetor sejam nulos.

A expressão geral de um elemento da matriz de FRFs, ou seja, a expressão de uma FRF é dada por:

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{jr})(\psi_{kr})}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r\omega\omega_r} \quad (2.14a)$$

ou

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr})(\phi_{kr})}{\bar{m}_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r\omega\omega_r)} \quad (2.14b)$$

ou ainda

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{j_k A_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r\omega\omega_r} \quad (2.14c)$$

sendo  $(\phi_{jr})$  o  $j$ -ésimo elemento do autovetor (vetor modal)  $r$  e  $j_k A_r$  é conhecido como constante modal.

Experimentalmente, cada elemento da matriz de receptância seria uma medida particular da FRF de uma estrutura, onde a excitação agiria no ponto  $k$  da estrutura e a resposta seria captada no ponto  $j$  da mesma. A Fig. 2.1 ilustra uma matriz de função de resposta em frequência e seus elementos. Na expressão de uma FRF individual, no caso de não haver amortecimento, verifica-se que tanto o numerador, quanto o denominador, possuem valores reais, logo, a receptância é uma quantidade real. No caso de haver amortecimento no sistema, isto não é verdadeiro, como mostram as Eq. (2.14).

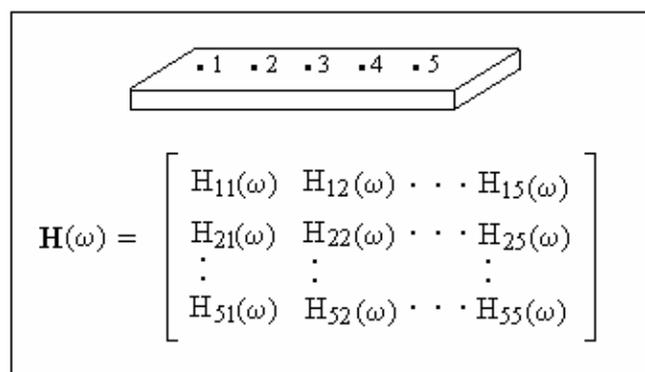


Figura 2.1 - Matriz de função de resposta em frequência. A matriz contém todas as possíveis funções de resposta em frequência entre pontos de teste da estrutura (Schmidtberg & Pal, 1986, modificado).

No caso geral de distribuição de amortecimento no sistema, isto é, no caso onde a matriz formada pelo produto triplo ( $[\Phi]^T[C][\Phi]$ ) não seja diagonal, as equações do movimento não serão desacopladas com base nestes autovetores reais do sistema.

No caso de amortecimento viscoso não-proporcional, considerando a parte homogênea da Eq. (2.1), ao assumir a solução  $\{x(t)\} = \{X\}e^{st}$ , obtém-se o seguinte problema de autovalor e autovetor:

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \{X\} = \{0\} \quad (2.15)$$

Se o sistema for sub-amortecido, existirão  $N$  pares de autovalores  $s_r$  complexos conjugados e para cada autovalor existirá um autovetor correspondente que também ocorrerão em pares complexos conjugados (Meirovitch, 1967). Então, a solução pode ser constituída em duas matrizes: a matriz diagonal dos autovalores complexos e seus conjugados e a matriz contendo os autovetores e seus complexos conjugados. Esta última matriz será de ordem  $N \times 2N$  e não poderá desacoplar as equações diferenciais dadas na equação matricial (2.1), pois a ordem das matrizes espaciais é de  $N \times N$ .

Para se obter o desacoplamento das Eq. (2.1) e a determinação a matriz de receptância do sistema, o procedimento utilizado é através da técnica de vetor de estado. Este procedimento, conforme se verifica em Ewins (1984) e Meirovitch (1967), consiste em

primeiramente definir um novo vetor de coordenadas  $\{y(t)\}$  de ordem  $2N \times 1$  da seguinte maneira:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

com este novo vetor de coordenadas, a Eq.(2.1) pode ser escrita como:

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = \{f'(t)\} \quad (2.17)$$

sendo

$$\{f'(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad [A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Assumindo a solução  $\{y(t)\} = \{Y\}e^{st}$  para a equação homogênea correspondente a Eq.(2.17), chega-se ao seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$([A]s + [B])\{Y\} = \{0\} \quad (2.19)$$

Em termos de matriz modal,  $[\Phi]$ , e matriz dos autovalores,  $[diag(\omega_r^2)] = [S]$ , do sistema, as soluções da Eq. (2.19) são da forma:

$$[\Phi'] = \begin{bmatrix} [\Phi] & [\Phi]^* \\ [S][\Phi] & [S]^*[\Phi]^* \end{bmatrix}, \quad [S'] = \begin{bmatrix} [S] & [0] \\ [0] & [S]^* \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Os autovalores do sistema podem ser expressos em termos dos parâmetros modais (Ewins, 1984):

$$s_r = \omega_r (-\xi_r + j \sqrt{1 - \xi_r^2}) \quad (2.21)$$

Os autovetores deste sistema também possuem propriedades de ortogonalidade (Ewins, 1984), ou seja:

$$[\Phi']^T [A] [\Phi'] = [\text{diag}(a_r)] \quad (2.22)$$

$$[\Phi']^T [B] [\Phi'] = [\text{diag}(b_r)] \quad (2.23)$$

É possível demonstrar que os valores dos coeficientes  $a_r$  e  $b_r$ , apresentados nas Eq. (2.22) e (2.23), relacionam-se com os autovalores do sistema da seguinte forma (Hurty & Rubstein, 1964):

$$s_r = \frac{-b_r}{a_r}, \quad r = 1, \dots, 2N \quad (2.24)$$

Neste caso, para o desacoplamento das Eq. (2.17) usa-se a nova transformação de coordenadas:

$$\{y(t)\} = [\Phi'] \{p(t)\} \quad (2.25)$$

Então, aplicando a transformação dada por (2.25), pré-multiplicando por  $[\Phi']^T$  e considerando as propriedades de ortogonalidade (2.22) e (2.23), chega-se a:

$$[\text{diag}(a_r)] \{\dot{p}(t)\} + [\text{diag}(b_r)] \{p(t)\} = [\Phi']^T \{f'(t)\} \quad (2.26)$$

que representam um conjunto de equações desacopladas que podem ser escritas por:

$$\dot{p}_r(t) - s_r p(t) = \frac{1}{a_r} \{\phi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad r=1, \dots, 2N \quad (2.27)$$

Considerando excitação harmônica e resposta em regime permanente também harmônica dadas, respectivamente, por:

$$\{f(t)\} = \{F\} e^{j\omega t} \quad (2.28)$$

$$\{p(t)\} = \{P\}e^{j\omega t} \quad (2.29)$$

então a Eq. (2.27) torna-se:

$$(\{P\}j\omega - s_r \{P\})e^{j\omega t} = \frac{1}{a_r} \{\phi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (2.30)$$

ou,

$$(j\omega - s_r) \{P_r\} = \frac{1}{a_r} \{\phi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

logo,

$$\{P_r\} = \frac{1}{(j\omega - s_r)} \frac{1}{a_r} \{\phi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

De acordo com a Eq. (2.29), a expressão da transformação de coordenadas pode ser escrita pelo seguinte somatório:

$$\{y(t)\} = [\Phi'] \{p(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\phi'\}_r \{P_r\} e^{j\omega t} \quad (2.33)$$

Então, substituindo (2.32) em (2.33) chega-se à expressão do vetor resposta  $\{y(t)\}$  descrito em termos de composição modal:

$$\{y(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\phi'\}_r \left( \frac{1}{(j\omega - s_r)} \right) \frac{1}{a_r} \{\phi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (2.34)$$

ou

$$\{y(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\psi'\}_r \left( \frac{1}{(j\omega - s_r)} \right) \{\psi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (2.35)$$

sendo que  $\{\psi'\}$  é o autovetor normalizado em relação a  $a_r$ , ou seja:

$$\{\psi'\}_r = \frac{1}{\sqrt{a_r}} \{\phi'\}_r \quad (2.36)$$

e lembrando que  $\{\psi^r\}$  é um autovetor da forma:

$$\{\Psi^r\} = \begin{Bmatrix} \{\Psi\}_r \\ \{\Psi^r\}_r s_r \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

De acordo com (2.16) e (2.36) a resposta  $\{y(t)\}$  é dada por:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ j\omega\{X\} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \sum_{r=1}^{2N} \{\Psi^r\}_r \left( \frac{1}{(j\omega - s_r)} \right) \{\Psi^r\}_r^T \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (2.38)$$

então, o vetor de amplitudes da resposta forçada (em regime permanente) dado por composição modal é:

$$\{X\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\Psi^r\}_r \left( \frac{1}{(j\omega - s_r)} \right) \{\Psi^r\}_r^T \{F\} \quad (2.39)$$

Logo, define-se a matriz de FRFs:

$$\{X\} = [H(\omega)] \{F\} \quad (2.40)$$

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^{2N} \{\Psi^r\}_r \left( \frac{1}{j\omega - s_r} \right) \{\Psi^r\}_r^T \quad (2.41)$$

Uma FRF individual da matriz  $[H(\omega)]$  é definida como sendo a razão entre a resposta na coordenada  $j$  e a força de excitação agindo na coordenada  $k$ , com todas as outras forças sendo zero:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{(\Psi_{jr})(\Psi_{kr})}{j\omega - s_r} \quad (2.42)$$

Devido aos autovalores e autovetores surgirem em pares complexos conjugados, a Eq. (4.42) pode ser reescrita por:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{(\psi_{jr})(\psi_{kr})}{j\omega - s_r} + \frac{(\psi_{jr})^*(\psi_{kr})^*}{j\omega - s_r^*} \right) \quad (2.43a)$$

ou

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{j_r A_r}{j\omega - s_r} + \frac{j_r A_r^*}{j\omega - s_r^*} \right) \quad (2.43b)$$

Neste caso de sistemas com amortecimento não-proporcional, as formas modais são complexas, como já mencionado anteriormente. Estruturas possuindo formas modais complexas, ao vibrarem em um de seus modos complexos, terão todos os seus pontos vibrando na mesma frequência. Porém, eles não atingirão suas máximas excursões e nem passarão através de suas posições zero no mesmo instante. Conseqüentemente suas linhas nodais não serão mais estacionárias. Portanto, ao descrever elementos destes autovetores complexos, deve-se levar em conta suas amplitudes e relações de fase.

A Função de Resposta ao Impulso (FRI) entre os graus de liberdade  $j$  e  $k$  pode ser obtida através da aplicação da transformada inversa de Fourier da FRF, logo esta função pode ser expressa como:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^N j_k A_r e^{s_r t} + j_k A_r^* e^{s_r^* t} \quad (2.44)$$

### 2.3- FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E DENSIDADE ESPECTRAL

Considere dois sinais ou duas funções de energia finita  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . A Função de Correlação Cruzada entre estas funções é dada por:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t+\tau) dt \quad (2.45a)$$

De modo análogo, a função de correlação cruzada entre as funções  $x_2(t)$  e  $x_1(t)$  é dada por:

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)x_1(t+\tau) dt \quad (2.45b)$$

A função de correlação  $R_{12}(\tau)$  ou  $R_{21}(\tau)$  fornece uma medida da semelhança ou de interdependência entre as funções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  em função do parâmetro  $\tau$  (deslocamento de uma função em relação a outra). Se  $R_{12}(\tau) = 0 \forall \tau$ , então  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são não correlacionados.

Se  $x_1(t)=x_2(t)$ , a função é denominada função de auto-correlação:

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1(t+\tau) dt \quad (2.46)$$

A transformada de Fourier da função de correlação é a chamada Função de Densidade Espectral, que descreve a distribuição de energia da função ou do sinal em função da frequência. Este é o teorema de Wiener-Kintchine, cuja prova é descrita a seguir:

A transformada de Fourier da função  $x_2(t+\tau)$  é dada por (segundo a propriedade de deslocamento no tempo de transformadas de Fourier):

$$\mathfrak{F}\{x_2(t+\tau)\} = X_2(f)e^{j2\pi f\tau} \quad (2.47)$$

em que  $X_2(f)$  é a transformada de Fourier de  $x_2(t+\tau)$ . Logo, a função  $x_2(t+\tau)$  pode ser escrita por:

$$x_2(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f)e^{j2\pi f\tau} e^{j2\pi ft} df \quad (2.48)$$

Substituindo a Eq.(2.48) na Eq.(2.45a), vem:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f)e^{j2\pi f\tau} e^{j2\pi ft} df \right] dt \quad (2.49)$$

ou

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{j2\pi ft} dt \right] X_2(f)e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.50)$$

logo,

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(f) X_2(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.51)$$

então,

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.52)$$

$$R_{12}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{S_{12}(f)\} \quad (2.53)$$

Portanto, chega-se a expressão que denota que a transformada de Fourier da função de correlação cruzada é a função de densidade espectral cruzada:

$$S_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.54)$$

Quando  $x_1(t)=x_2(t)$ , a transformada de Fourier desta é a função auto-densidade espectral:

$$S_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.55)$$

Nas Fig. 2.2 e 2.3 são mostradas algumas funções e suas respectivas funções de auto-correlação e auto-densidade espectral.

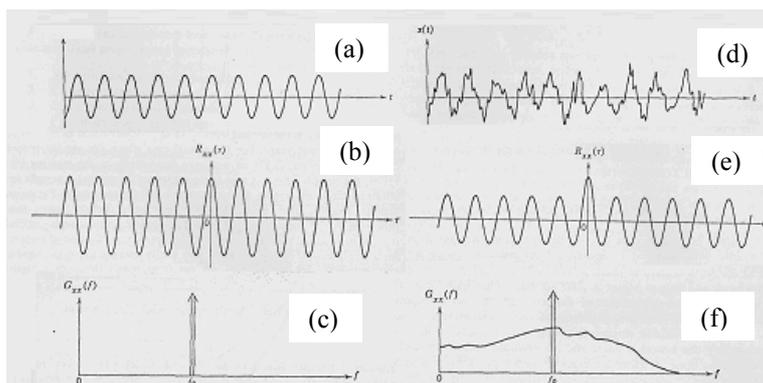


Figura 2.2 – (a) Função harmônica e suas respectivas funções: (b) de auto-correlação e (c) de auto-densidade espectral; (d) Função harmônica somada a ruído aleatório e suas respectivas funções: (e) de auto-correlação e (f) de auto-densidade espectral (Bendat &

Piersol, 1980).

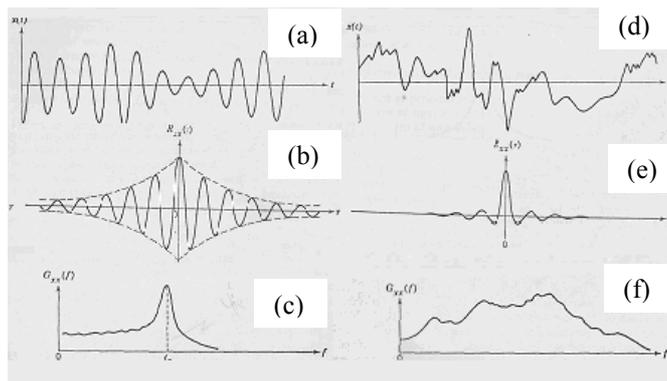


Figura 2.3 – (a) Sinal aleatório de banda estreita e suas respectivas funções: (b) de auto-correlação e (c) de auto-densidade espectral; (d) Sinal aleatório de banda larga e suas respectivas funções: (e) de auto-correlação e (f) de auto-densidade espectral (Bendat & Piersol, 1980).

## 2.4- FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Antes de apresentar a função densidade de probabilidade, é importante entender o conceito da função distribuição de probabilidade. Seja um conjunto de funções aleatórias que formam um processo aleatório (Figura 2.4). Cada uma das funções aleatórias é chamada de função amostra deste processo aleatório (Bendat & Piersol, 1980).

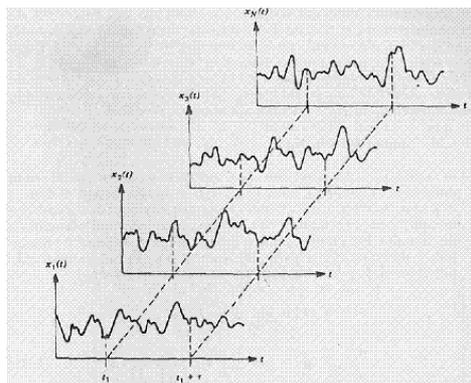


Figura 2.4 – Conjunto de funções amostras formando um processo aleatório (Bendat & Piersol, 1986).

Considerando que haja um interesse em um valor medido em um tempo  $t_1$ , no processo aleatório, que seja igual ou menor que o valor  $\xi$ . Logo, a probabilidade desta ocorrência é:

$$\text{Prob}[x(t_1) \leq \xi] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N[x(t_1) \leq \xi]}{N} \quad (2.56)$$

sendo  $N[x(t_1) \leq \xi]$  o número de medições com uma amplitude igual ou menor que  $\xi$  no tempo  $t_1$ .

O enunciado de probabilidade da Eq. (2.56) pode ser generalizado fazendo a amplitude  $\xi$  tomar qualquer valor. A função resultante de  $\xi$  é chamada Função Distribuição de Probabilidade do processo aleatório  $\{x(t)\}$  no tempo  $t_1$ , e é dado por:

$$P_x(\xi, t_1) = P(x, t_1) = \text{Prob}[x(t_1) \leq \xi] \quad (2.57)$$

A função Distribuição de Probabilidade define a probabilidade com que um valor instantâneo de  $x(t)$  de um futuro experimento no tempo  $t_1$  seja igual ou menor do que a amplitude  $\xi$  de interesse.

Para o caso geral em um processo aleatório não-estacionário, esta probabilidade variará com o tempo  $t_1$  (Figura 2.5).

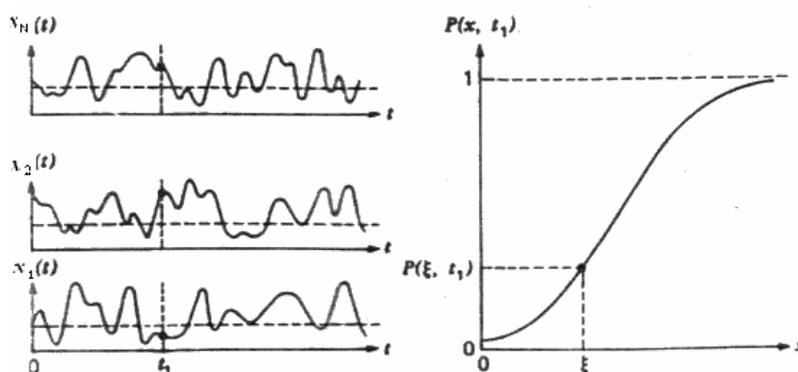


Figura 2.5 – Função distribuição de probabilidade (Bendat & Piersol, 1980).

Para o caso de processo aleatório estacionário, a função distribuição de probabilidade será a mesma para todos os tempos, e se o processo aleatório estacionário for ergótico, a função distribuição de probabilidade pode ser determinada a partir de uma única função amostra  $x(t)$  por:

$$P(x) = \text{Prob}[x(t) \leq \xi] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T[x(t) \leq \xi]}{T} \quad (2.58)$$

Sendo  $T[x(t) \leq \xi]$  o tempo total em que  $x(t)$  é igual ou menor que a amplitude  $\xi$ , como ilustrado na Fig. 2.6.

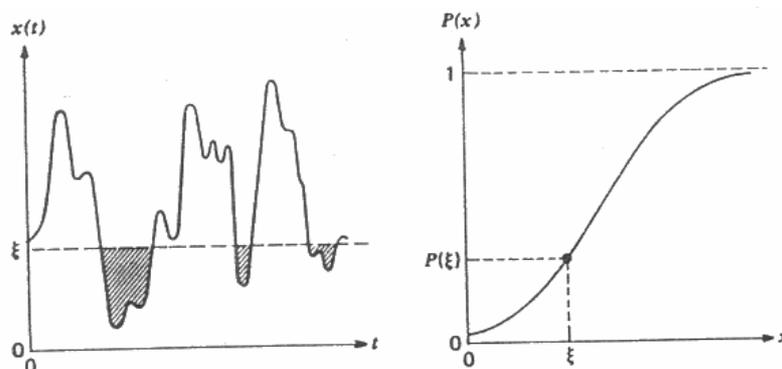


Figura 2.6 – Função distribuição de probabilidade de uma função aleatória estacionária (Bendat & Piersol, 1980).

A maneira que ocorre a transição de  $P(x) \cong 0$  para  $P(x) \cong 1$  é que distingue dados com diferentes estruturas de probabilidade. Então, é comum descrever a estrutura de probabilidade dos processos aleatórios em termos de inclinação da função de distribuição, dada pela derivada:

$$p(x, t_1) = \frac{dP(x, t_1)}{dx} \quad (2.59)$$

onde a função resultante  $p(x, t_1)$  é chamada de função densidade de probabilidade para um processo  $x(t)$  e tempo  $t_1$ . Para um processo ergótico, não existe dependência no tempo, então  $p(x, t_1) = p(x)$ .

Outra forma de se entender a função densidade de probabilidade é considerando uma janela estreita de amplitude  $\Delta x$  centrada em  $\xi$ , como mostra a Fig. 2.7. para dados ergóticos, a probabilidade que  $x(t)$  caia dentro desta janela em um tempo arbitrário é dada por:

$$\text{Prob}[x(t) \in \Delta x_\xi] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T[x(t) \in \Delta x_\xi]}{T} \quad (2.60)$$

em que  $T[x(t) \in \Delta x_\xi]$  é o tempo que  $x(t)$  está no intervalo  $\Delta x$ . A função densidade de probabilidade então é obtida da seguinte forma:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}[x(t) \in \Delta x_\xi]}{\Delta x} \quad (2.61)$$

Em outras palavras, a função densidade de probabilidade é a taxa de variação da probabilidade com a amplitude.

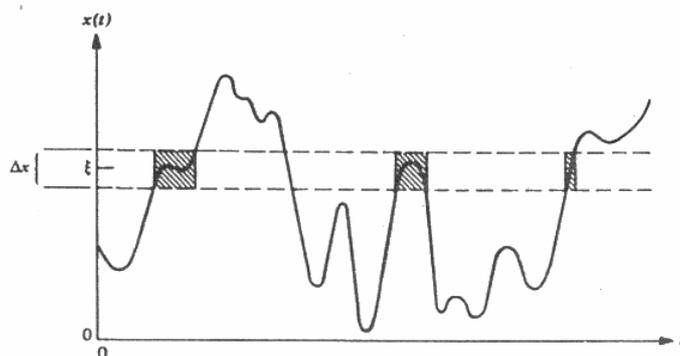


Figura 2.7 – Medida da densidade de probabilidade (Bendat & Piersol, 1980).

Enunciados de probabilidade são gerados integrando a função densidade de probabilidade, isto é, calculando a área de  $p(x)$  entre quaisquer duas amplitudes de interesse, como é ilustrado na Fig. 2.8.

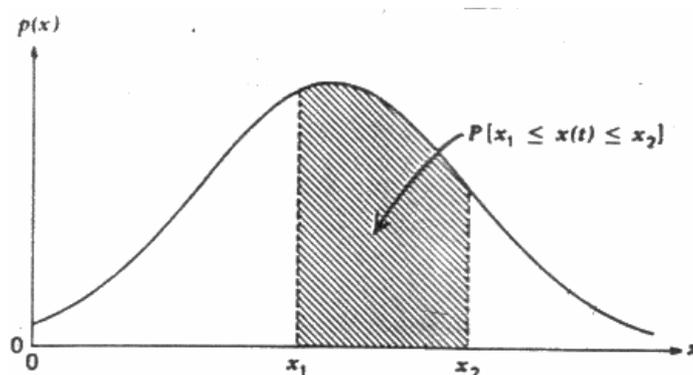


Figura 2.8 – Probabilidade calculada da função densidade (Bendat & Piersol, 1980).

$$\text{Pr ob}[x_1 \langle x(t) \rangle x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = P(x_2) - P(x_1) \quad (2.62)$$

Se considerar  $x_1 \rightarrow -\infty$  na Eq. (2.62), tem-se:

$$\text{Pr ob}[-\infty \langle x(t) \rangle x_2] = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx = P(x_2) \quad (2.63)$$

Isto é, a área de  $p(x)$  compreendida até  $x_2$  é o valor de  $P(x_2)$ . Agora, se considerar  $x_2 \rightarrow +\infty$  na Eq. (2.63), então:

$$\text{Pr ob}[-\infty \langle x(t) \rangle +\infty] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (2.64)$$

Isto mostra que a área total de  $p(x)$  é igual a 1, o que quer dizer que a amplitude em qualquer tempo cairá entre menos e mais infinito.

#### 2.4.1- Funções Densidade de Probabilidade especiais

Existem diversas funções densidade de probabilidade associadas com fenômenos aleatórios. Aqui, serão mostradas três destas: as funções densidade de probabilidade para (a) ruído gaussiano ou normal, (b) ondas senoidais, e (c) ondas senoidais em ruído gaussiano.

##### a) Ruído Gaussiano ou Normal

Dados apresentando uma grande coleção de fenômenos físicos aleatórios na prática tendem a ter funções densidades de probabilidade aproximadamente na forma:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (2.65)$$

sendo que  $\mu$  e  $\sigma$  são respectivamente o valor médio e o desvio padrão dos dados.

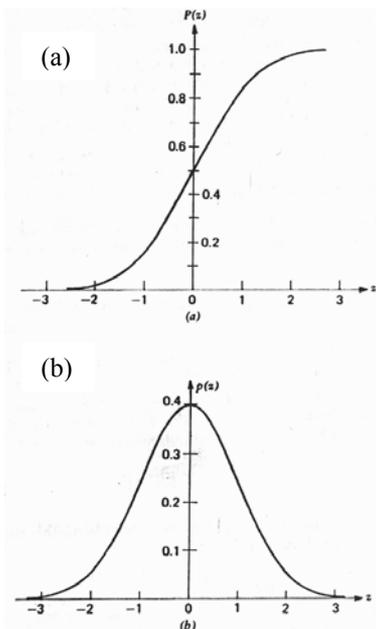


Figura 2.9 – Funções de distribuição de probabilidade e densidade de probabilidade Gaussiana padronizada. (a) Função distribuição. (b) Função densidade de probabilidade (Bendat & Piersol, 1980).

Se definir a variável normalizada  $z=(x-\mu)/\sigma$  e possuindo valor médio zero e desvio padrão unitário, então:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (2.66)$$

que é chamada de função densidade de probabilidade gaussiana ou normal padronizada. Da Eq. (2.63), a função distribuição de probabilidade normal padronizada é apresentada da forma:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz \quad (2.67)$$

A Fig. 2.9 ilustra uma possível função distribuição de probabilidade gaussiana padronizada e sua respectiva função densidade de probabilidade.

### b) Ondas Senoidais

Seja uma onda senoidal dada por  $x(t)=X\text{sen}(2\pi ft+\theta)$ . Caso  $\theta$  for uma variável aleatória, então a função senoidal pode ser visualizada como um processo aleatório, e a função distribuição de probabilidade do processo senoidal, assumindo valor médio zero, pode ser mostrada da seguinte forma:

$$P(x) = (\pi\sqrt{2\sigma^2 - x^2})^{-1} \quad |x| < X$$

$$= 0 \quad |x| \geq X \quad (2.68)$$

sendo  $\sigma = X / \sqrt{2}$  é o desvio padrão da onda senoidal. O gráfico desta função densidade de probabilidade padronizada para  $\sigma = 1$  é mostrada na Fig. 2.10.

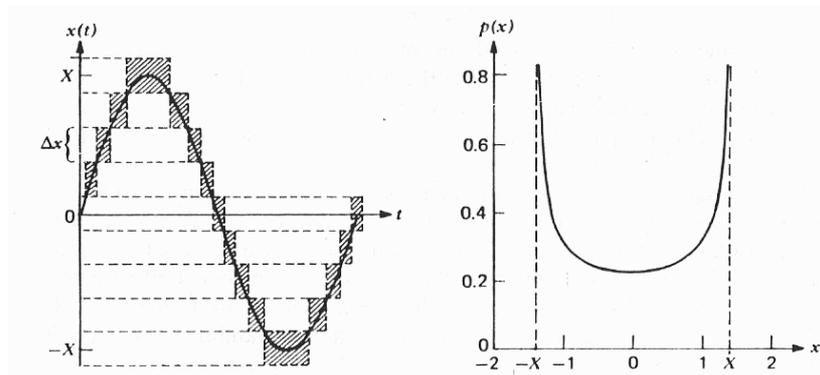


Figura 2.10 – Função densidade de probabilidade padronizada para uma onda senoidal (Bendat & Piersol, 1980).

### c) Onda senoidal em ruído gaussiano

Agora considerando um caso em que um histórico temporal aleatório estacionário (ergódico) é na forma  $x(t)=n(t)+s(t)$ , onde  $n(t)$  é um ruído aleatório Gaussiano e  $s(t)=S\text{sen}(2\pi ft+\theta)$ , uma onda senoidal. A função densidade de probabilidade de  $x(t)$  é simplesmente a convolução das funções densidade individuais nas Eq. (2.65) e (2.68). Assumindo valores médios zero para  $n(t)$  e  $s(t)$ , a função densidade de probabilidade pode ser mostrada na forma:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_n \pi \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \exp \left[ - \left( \frac{x - S \cos \theta}{4\sigma_n} \right)^2 \right] d\theta \quad (2.69)$$

sendo que  $\sigma_n$  é o desvio padrão do ruído Gaussiano  $n(t)$ , e  $S$  e  $\theta$  são respectivamente a amplitude e a fase da onda senoidal. Gráficos de  $p(x)$  para várias relações de variância da onda senoidal com a variância do ruído  $R = \sigma_s^2 / \sigma_n^2$  são mostradas na Fig. 2.11.

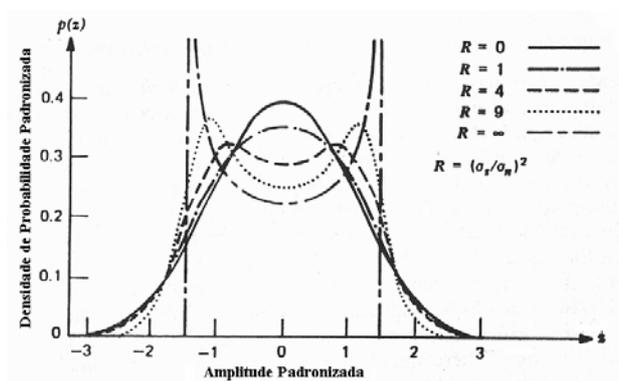


Figura 2.11 – Função densidade de Probabilidade para uma onda senoidal em ruído Gaussiano (Bendat & Piersol, 1980, modificado).

## CAPÍTULO III

### ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

#### 3.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Análise Modal Experimental ou Teste Modal é o processo de determinação experimental de características dinâmicas de um sistema, as quais são usadas para formulação de um modelo matemático do comportamento dinâmico do sistema. Estas características são, geralmente, os parâmetros modais, ou seja, frequências naturais, formas modais (ou vetores modais) e amortecimentos modais. Estes parâmetros constituem o modelo modal do sistema dinâmico. Este modelo modal representa um modelo linear do sistema. Portanto, caso a estrutura apresente características de não-linearidades bem acentuadas, o modelo não representará com precisão a dinâmica da mesma. Contudo, um grande número de estruturas mecânicas podem ser bem representadas por um modelo linear (Schmidtberg & Pal, 1986).

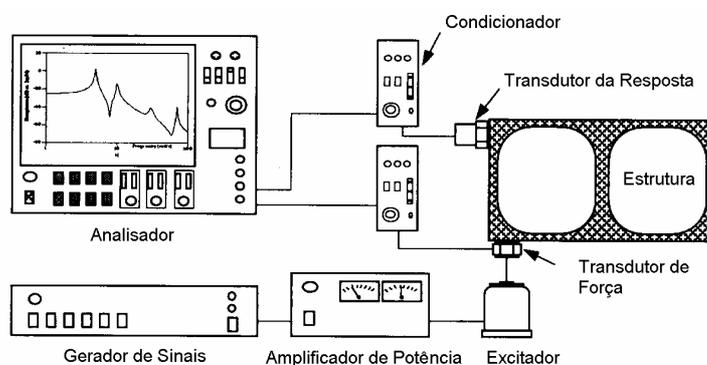


Figura 3.1 – Teste modal usando o excitador de vibrações (Maia & Silva, 1997, modificado).

O método da análise modal experimental consiste em excitar a estrutura de teste em um ou vários pontos e medir simultaneamente o(s) sinal(is) de força de excitação e o(s) sinal(is) de resposta nos pontos considerados. Os históricos temporais dos sinais de excitação e resposta são enviados a um analisador de sinais ou computador, que estima as Funções de Resposta em Frequência (FRFs) entre os pontos considerados e, se for necessário, as Funções de Resposta ao Impulso (FRIs) entre os mesmos pontos. O teste modal é então concluído por meio de aplicação de métodos de identificação de parâmetros nas funções obtidas, ou seja, existem

métodos de identificação que trabalham com os dados no domínio do tempo (trabalham com as FRIs) assim como existem métodos que tratam os dados no domínio da frequência (trabalham com as FRFs). Um possível aparato experimental para a análise modal é apresentado na Fig. 3.1.

As fases que constituem a análise modal experimental podem ser classificadas, segundo Dovel (1989), como:

- (i) Objetivo do Teste Modal (Aplicação do Modelo Modal);
- (ii) Preparação para o Teste;
- (iii) Estimação da FRFs (e das FRIs, se for o caso);
- (iv) Identificação dos Parâmetros Modais;
- (v) Validação dos Parâmetros Identificados.

A seguir, cada uma destas fases são detalhadas.

### **3.2- OBJETIVOS DO TESTE MODAL**

Ao se iniciar um teste modal, já se deve ter especificado o objetivo do teste, ou seja, qual o tipo de aplicação em que o modelo modal obtido será utilizado. Dentre as aplicações, pode-se citar:

- Predição da Resposta Forçada: Ao possuir o modelo modal de um sistema, pode-se prever a resposta do sistema sujeito a forças de excitação conhecidas.

- Identificação de Forças de Excitação: Seria o caso inverso do item anterior. Isto é, quando um sistema estiver sujeito à ação de forças de excitação desconhecidas, ou difíceis de se medir, pode-se determiná-las medindo a resposta do sistema, quando já se conhecem as propriedades dinâmicas do mesmo.

- Modificação Estrutural: Pode-se prever o efeito no modelo modal ao se fazer modificações na massa, rigidez ou amortecimento da estrutura. Ao se fazer qualquer mudança em pelo menos um desses elementos, um novo modelo modal será obtido a partir das características conhecidas do modelo original.

- Subestruturamento: Pode-se determinar o modelo modal de uma estrutura complexa constituída de várias partes, caso se conheça as características dinâmicas de cada parte constituinte. Esta análise de acoplamento de subestruturas pode ser realizada em conjunto com análise de elementos finitos. O sistema acoplado ao ser dividido em várias partes, àquelas que seriam complexas para se fazer a modelagem via elementos finitos, seriam modeladas experimentalmente, e as mais simples seriam modeladas numericamente (Dovel, 1989).

- Correlação com Modelos Numéricos: Frequentemente é necessário validar os resultados de uma modelagem numérica, como por exemplo, de uma análise feita por elementos finitos, através de uma comparação com o modelo obtido experimentalmente, e vice-versa. Este processo de correlação é geralmente um procedimento iterativo no qual comparam-se as frequências naturais e formas modais entre os dois modelos (Ibrahim, 1988; Ewins, 1984). Porém, quando os resultados numéricos são comparados com resultados experimentais, pode ser que o grau de correlação não seja suficientemente satisfatório para permitir a aplicação do modelo numérico com confiança. Mottershead & Friswell (1993) citam três principais causas prováveis na imprecisão do modelo numérico: (i) erros nos parâmetros do modelo: provenientes de erros na entrada dos parâmetros físicos e/ou erros no modelamento das condições de contorno e falta de informações a respeito de amortecimento; (ii) erros na ordem do modelo: devido a erros na discretização da estrutura complexa, resultando em um modelo de ordem insuficiente; e (iii) erros estruturais do modelo: provenientes a incertezas concernentes às equações físicas governantes, devidas principalmente a forte comportamento não-linear da estrutura. As discrepâncias quando na comparação dos modelos podem ser também devidas a erros no modelo experimental.

### **3.3- PREPARAÇÃO PARA O TESTE MODAL**

Nesta fase é que será definida a maneira de se realizar os testes modais, ou seja, qual a forma de suporte da estrutura de teste (as condições de contorno); quantos pontos da estrutura irão ser utilizados no teste, ou seja, a definição do modelo geométrico; quais as formas de medição da excitação e resposta da estrutura; qual o tipo de sinal de excitação e qual o mecanismo de excitação a serem usados. Cada um destes itens será explicado a seguir.

### **3.3.1- Condições de Contorno**

O primeiro passo, para a realização dos testes, será definir como a estrutura estará suportada, ou seja, definir as condições de contorno da estrutura. Existem duas condições ideais de suporte. Na primeira, a estrutura não é suportada por nenhum vínculo, isto é, está em uma condição totalmente livre. Na segunda condição, a estrutura é fixada, em alguma região de seu contorno, por um suporte totalmente rígido. Todavia, na prática não se obtém estas condições ideais. Nos testes para simulação de condição livre, a estrutura deve estar de alguma maneira suportada, como, por exemplo, estar sobre uma espuma de plástico ou pendurada por barbantes elásticos.

A condição de suporte totalmente rígido também não será obtida. Sempre existirá alguma flexibilidade da base na qual a estrutura de teste estará fixada, além também da flexibilidade dos pontos de fixação entre a base e a estrutura, como por exemplo, pontos de soldagem, rebites ou parafusos. Uma maneira possível de verificar estes problemas seria medir, nos pontos de fixação, a FRF da base da estrutura, na faixa de frequência de interesse. Em seguida, verificar se esta resposta é significativamente mais baixa do que a resposta da estrutura de teste. Caso esta condição seja satisfeita para todas as coordenadas nas quais está sendo verificada a condição de vínculo forçado, pode-se considerar a base como sendo rígida. (Ewins, 1984; "Application Note" 243-3 da HP, 1986)

### **3.3.2- Definição do Modelo Geométrico e Medição da Excitação e Resposta**

A próxima etapa é definir o modelo geométrico estrutural que será utilizado. Em outras palavras, especificar o número de pontos na estrutura de teste, onde serão fixados os transdutores de excitação e resposta. Quanto maior o número de pontos a serem escolhidos, menor será o risco de não identificar certos modos devido a medições em linhas nodais (linhas de deslocamento nulo) e também maior será a precisão das formas modais determinadas (Patrick, 1985).

A fase seguinte é a escolha da forma de se captar o sinal de excitação e o sinal do movimento de resposta da estrutura, ou seja, escolher os tipos de transdutores a serem utilizados no teste. Os transdutores mais populares utilizam cristais piezoelétricos.

O sinal de excitação será captado por um transdutor piezoelétrico de força. A forma da seleção do sensor é baseada no tipo de sinal escolhido e características de operação do sensor, tais como, temperatura, limite de carga e de choque, sensibilidade e resposta em frequência. Quanto ao sinal de resposta, o transdutor mais comumente utilizado é o acelerômetro piezoelétrico devido às suas vantagens de ampla faixa de frequência, boa linearidade, fácil fixação e baixo peso. Atualmente a maioria dos acelerômetros construídos é do tipo voltagem, ou seja, já há um circuito interno integrado a eles que dispensa o uso de amplificadores de carga, apenas necessitando de uma fonte para energizar o circuito. Estes acelerômetros são também conhecidos como acelerômetros ICP. A Fig. 3.2 ilustra os dois tipos de acelerômetros comumente usados em medições de vibração. Vale ressaltar que em analisadores modernos, a fonte de energia para o circuito intergrado do analisador ICP já vem embutido no próprio dispositivo.

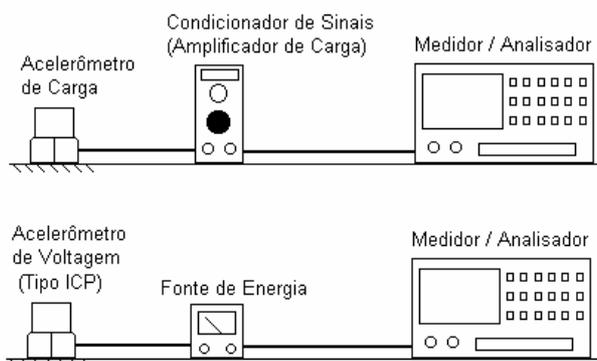


Figura 3.2 – (a) Acelerômetro de carga e seu condicionador e (b) acelerômetro ICP com sua fonte externa

### 3.3.3- Sinais de Excitação

Para a realização do teste modal deve ser definido também, o tipo de sinal de excitação a ser usado. Os tipos de excitação usados em testes modais podem ser classificados, de acordo com Ramsey (1976) e Stroud (1987), da seguinte maneira: excitação aleatória, excitação senoidal e excitação transiente.

a) Excitação Aleatória ou Randômica:

Existem três tipos de sinais aleatórios que podem ser utilizados: (i) Aleatório Puro; (ii) Pseudo-Aleatório; e (iii) Aleatório em Pacotes ("Burst Random").

O sinal aleatório puro é um sinal contínuo não determinístico. O pseudo-aleatório é um sinal aleatório durante um certo período de tempo, após este período o sinal se repete e o aleatório em pacotes é um sinal aleatório cuja amplitude decai a zero no período de análise ("time record") do analisador de sinais.

Devido a falta de repetibilidade do sinal aleatório puro, a FRF estará sempre sujeita ao efeito de "leakage". "Leakage" é um fenômeno que tende a espalhar a energia contida numa linha espectral em linhas de frequência adjacentes no espectro, distorcendo-o, e fazendo com que a amplitude seja subestimada e o fator de amortecimento seja superestimado (Stroud, 1987, McConnel, 1995). Este fenômeno ocorrerá quando o sinal não for periódico ou não couber totalmente no período de análise do analisador de sinais.

A grande vantagem de se utilizar o sinal aleatório puro, tomando um grande número de registros do sinal, está na redução dos efeitos de não-linearidades, ruídos, e distorções nas medidas. Pois, com o sinal aleatório, cada registro de  $T$  segundos do sinal será diferente do anterior e do posterior, e ao se fazer sucessivas médias nos registros, os efeitos de não-linearidades, ruídos e distorções nas medidas tenderão ao valor esperado de zero. Desta forma uma medida muito melhor da resposta linear estimada pode ser obtida (Ramsey, 1976).

O sinal pseudo-aleatório traz como vantagem poder evitar a ocorrência de "leakage" (o que não ocorre com o sinal aleatório puro), pois pode ser repetido no período de análise,  $T$ , do analisador. Porém, devido a cada registro ser igual ao anterior e ao posterior, ao se tomar um grande número de médias, os efeitos de não-linearidades não são minimizados e apenas tem-se a redução de ruídos. O sinal aleatório em pacotes, devido a sua forma, reúne as vantagens dos outros dois tipos de sinais aleatórios, pois sua amplitude é zero ao final do registro temporal, eliminando a possibilidade de "leakage", e não se repete em cada registro tomado pelo analisador.

#### b) Excitação Senoidal

O teste utilizando este tipo de sinal era o método clássico até antes do advento dos analisadores de Fourier (Ramsey, 1976). Certos tipos de analisadores de Fourier, além de poderem gerar uma senóide com uma amplitude e frequência fixas, podem gerar sinais senoidais não estacionários, ou seja, com a frequência variável. Este sinal é conhecido como "Chirp" ou Rápida Varredura Senoidal. O "chirp" é um sinal que pode ser repetitivo ("Periodic Chirp") ou ser transiente se apresentando em pacotes ("Burst Chirp") no período de análise do analisador. Estes dois sinais, devido às suas características podem evitar o efeito de "leakage".

#### c) Excitação por Impacto

Existem dois tipos de excitação transiente: (i) Relaxação de um Degrau ("Step Relaxation"); e (ii) Excitação por Impacto.

O primeiro tipo é gerado a partir da retirada de uma carga estática aplicada à estrutura. Este procedimento é realizado através do rompimento de um cabo de peso reduzido que traciona a estrutura. Quando este é rompido, mede-se a resposta transiente. Este método se aplica em estruturas muito frágeis ou muito robustas para serem excitadas por um martelo, ou seja, frágeis no sentido que o martelo possa danificar a estrutura e robustas no sentido de que o martelo não insira energia suficiente para excitar a estrutura.

O sinal de excitação por impacto é gerado através da aplicação de um pulso gerado pelo impacto de um Martelo Excitador na estrutura. Maiores detalhes a respeito das características dos testes modais utilizando o martelo de impacto, assim como o excitador de vibrações, são apresentados a seguir.

### **3.3.4- Mecanismos de Excitação**

Nesta seção são apresentadas as características de testes modais utilizando dois mecanismos de excitação comumente usados: o martelo de impacto e o excitador de vibrações ("shaker"). A escolha do mecanismo de excitação está relacionada com o tipo de sinal a ser

escolhido. Para sinal de impacto usa-se o martelo e para sinais aleatórios e senoidais usas-se o “shaker”.

a) Testes com o Martelo de Impacto

O esquema do aparato instrumental para um teste modal utilizando um martelo de impacto é apresentado na Fig. 3.3. Os sinais de excitação e resposta são captados, respectivamente, pelos transdutores de força e de aceleração, que os enviam ao analisador de sinais (após serem condicionados). No analisador são processadas as funções de resposta em frequência. Após as aquisições das FRFs cruzadas e direta, ou das FRIs, é feita a extração dos parâmetros modais.

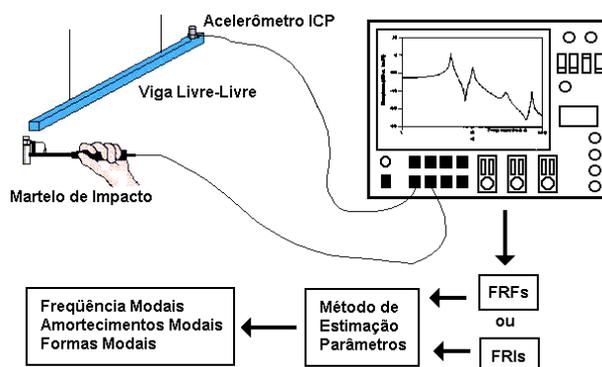


Figura 3.3 - Teste modal usando excitação por impacto.

A força de impacto como é teoricamente um impulso, o nível de energia aplicado à estrutura é função da massa e da velocidade do martelo, já que impulso linear é igual à variação de momento linear. Como há dificuldade de se controlar a velocidade do martelo, o nível de força será controlado pela massa do martelo. Diferentes tipos de martelos de impacto de massas variadas são disponíveis no mercado, e boa parte destes vem acompanhado de um elemento de massa adicional, fazendo o martelo aplicável para uma gama variada de estruturas de teste ("Application Note" 243-3 da HP, 1986).

A faixa de frequência útil para a análise modal é função da dureza das superfícies de contato e da massa do martelo. A dureza das superfícies de contato afeta a forma do pulso de força, que por sua vez determina o conteúdo de frequência de seu espectro. Esta faixa é

inversamente proporcional a massa do martelo e diretamente proporcional a dureza da ponta utilizada no martelo ("Application Note" 243-3 da HP, 1986 e Halvorsen & Brown, 1977).

Na aquisição dos sinais para a análise modal, dois problemas podem surgir no processamento de sinais temporais. O primeiro, é a presença de ruído nos sinais de força e/ou resposta, decorrentes de um período de análise muito longo, e o segundo é o fenômeno de "leakage", que ocorre quando o registro temporal for muito curto. No primeiro caso, como o pulso de força é geralmente muito curto em relação ao período de análise, o que vem após o término do pulso é ruído. Este ruído é então processado como parte do sinal de força, por estar contido no período de análise do analisador. Isto resulta em erros no processamento da FRF. Este problema pode ser minimizado através de uma função janela, chamada "janela de força". A pequena oscilação ("filter ring") que ocorre no final do pulso (devido ao processamento digital) faz parte do mesmo e não deve ser truncada pela janela ("Application Note" 243-3 da HP, 1986; McConnel, 1995). A resposta ao pulso é uma função exponencial decrescente e pode decair a zero antes ou depois do final do período de análise. Geralmente o sinal decairá a zero antes se a estrutura for fortemente amortecida, então o sinal remanescente será ruído, e novamente será necessário o uso de uma função janela para eliminar o ruído. Se a estrutura for levemente amortecida, o sinal continuará a cair além do final do período de análise, e neste caso também se deverá utilizar uma função janela para forçar artificialmente o sinal a decair a zero ao final do período de análise, para assim minimizar o efeito de "leakage". A janela utilizada, em ambos os casos, é a chamada "janela exponencial". Um inconveniente do uso desta janela no segundo caso é que ela tem o efeito de adicionar amortecimento ao sistema, contudo, este amortecimento "artificial" pode ser calculado ("Application Note" 243-3 da HP, 1986 e McConnel, 1995).

Outro problema relacionado com testes de impacto é a possibilidade de ocorrência de múltiplos impactos no registro temporal do analisador. Múltiplos impactos podem ocorrer, por exemplo, quando a estrutura de teste é levemente amortecida, pois desta forma, a estrutura reage contra o martelo antes do mesmo deixar a estrutura após o impacto inicial (Halvorsen & Brown, 1977). Então para se obter bons resultados nos testes, é também necessário monitorar o sinal de força a fim de rejeitar medições indesejadas.

## b) Testes com o Excitador de Vibrações (“Shaker”)

Um esquema da instrumentação para testes modais utilizando o excitador de vibrações ou “shaker” está apresentado na Fig. 3.1, onde o sinal de excitação é proveniente de um gerador de funções externo. Contudo, nos analisadores modernos já há internamente um gerador de funções. Este sinal antes de ser enviado ao excitador, é amplificado pelo amplificador de potência, para que o primeiro possa excitar a estrutura de teste. Os sinais captados pelos transdutores de força e de aceleração são amplificados e enviados ao analisador, que processará as FRFs (e FRIs).

O excitador de vibrações é um dispositivo que produz um movimento mecânico ao qual a estrutura de teste irá se sujeitar. Estes dispositivos podem ser mecânicos, hidráulicos (ou eletrohidráulicos) ou eletrodinâmicos. Com o desenvolvimento da eletrônica os excitadores mecânicos tornaram-se praticamente obsoletos (Rao & Gupta, 1984). O excitador hidráulico ou eletrohidráulico é tipicamente usado em casos em que a faixa de frequência é baixa, até 1KHz, e tipicamente na faixa de 0 Hz a 20 Hz, em que pode gerar um grande deslocamento (até 50 cm) e também gerar um alto nível de força (50 ton ou mais). Contudo, o excitador mais utilizado atualmente é o eletrodinâmico (Rao & Gupta, 1984 e Broch, 1980).

Desde que uma função de resposta em frequência é função de uma única entrada, o excitador deve transmitir apenas uma componente de força que esteja na mesma direção do eixo principal da célula do transdutor de força. Contudo, em situações práticas, a estrutura de teste, quando deslocada ao longo de uma direção retilínea, responderá não apenas nesta mesma direção, mas também nas outras 2 direções e nas 3 direções rotacionais. Este movimento de resposta já é esperado, porém ele pode fazer surgir outras formas de excitação na estrutura. Sendo a parte móvel do excitador, a mesa, flexível na linha de ação, porém, rígida nas outras, causará forças resistentes ou momentos a serem gerados devido ao movimento da estrutura em direções diferentes da linha de ação do excitador. Estas forças resistentes terão o efeito de outras excitações aplicadas à estrutura e o acelerômetro captará a resposta não devida só a força principal desejada, mas também outras desconhecidas. A solução para este problema é conectar o excitador à célula de carga (que está fixa na estrutura) através de uma pequena haste delgada, denominada de “Stinger”, que tem a característica de ser bem rígida em uma direção (na linha de ação desejada) e ao mesmo tempo flexível nas outras direções. Ao se utilizar o “stinger” deve-se sempre verificar a existência de

ressonâncias causadas pelo mesmo nos espectros das FRF's, o que causaria resultados insatisfatórios.

Para construção de um "stinger", Ewins (1984) recomenda um arame (uma corda de piano por exemplo) de 5 a 10 mm de comprimento com 1 mm de diâmetro. O Manual do excitador 4808 da B&K (1977) também fornece indicações para a construção de "stingers".

Nos testes com o excitador, um possível problema que pode ocorrer ao se utilizar estruturas leves, é que o transdutor de força pode adicionar apreciável massa à estrutura. Isto causa aumento na força medida pelo próprio transdutor de força. Este problema é conhecido na literatura (Ewins, 1984 e "Application Note" 243-3 da HP, 1986) como "loading mass". Tal problema pode ocorrer também com o martelo de impacto devido a massa da ponta do martelo estar a frente do sensor de força (McConnel & Sanh-Bo Han, 1986).

Outro problema associado com o excitador eletrodinâmico é o não casamento de impedância ("impedance mismatch") que existe entre a estrutura e a bobina do "shaker" ("shaker coil"). A impedância elétrica do excitador varia com a amplitude do movimento da bobina. Nas ressonâncias, com uma pequena massa efetiva, uma pequena força é requerida para produzir a resposta. Isto pode resultar em um decaimento no espectro de força nas frequências de ressonância, causando a medida de força ser susceptível a ruído ("Application Note" 243-3 da HP, 1986).

### **3.4- ESTIMAÇÃO DAS FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA**

Existem métodos de identificação de parâmetros que trabalham no domínio da frequência, ou seja, se aplicam às FRFs, ou trabalham no domínio do tempo com as FRIs. Contudo, a FRI é obtida através da transformada inversa de Fourier da FRF. Portanto, para qualquer método de identificação que se esteja trabalhando, é sempre necessária a obtenção da FRF.

Para a obtenção da função de resposta em frequência, entre dois pontos da estrutura (coincidentes ou não), é necessário obter o espectro de frequência da força de excitação agindo em um ponto e o espectro do movimento de resposta do outro ponto (ou no mesmo). Estes espectros são obtidos da seguinte maneira: Os sinais analógicos temporais de força e de

movimento de resposta, captados pela célula de carga e pelo acelerômetro, respectivamente, são amplificados e enviados a um Analisador de Sinais, onde são discretizados através de seu conversor analógico-digital e então transformados para o domínio da frequência através do algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (Newland, 1984). Por essa razão estes analisadores são chamados de Analisadores FFT.

Estes analisadores devem possuir no mínimo dois canais para a entrada simultânea dos sinais de excitação e resposta. Os testes utilizando apenas dois canais são conhecidos como testes de única entrada e única saída. Em testes utilizando mais de dois canais, como por exemplo, única entrada e múltiplas saídas, vários canais são utilizados para a medição da excitação em um ponto e a medição da resposta em vários outros, simultaneamente. Este último tipo de teste traz algumas vantagens em relação ao primeiro, como por exemplo, adquirir um conjunto de FRF's em muito menos tempo (Dovel, 1989).

A seguir é apresentada a teoria envolvida para a estimação das FRFs.

A entrada (excitação) e a saída (resposta) de um sistema linear são relacionadas como mostra a Fig. 3.4.

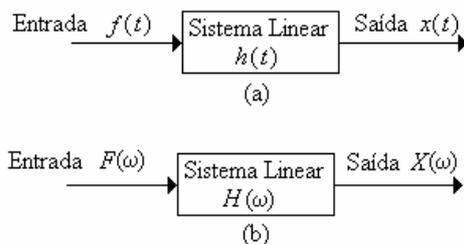


Figura 3.4 - Modelos de entrada e saída em sistemas lineares: (a) No domínio do tempo e (b) no domínio da frequência

No domínio do tempo a entrada e saída são relacionadas através da Integral de Convolução, da seguinte maneira:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = f(t) \otimes h(t), \quad (3.1)$$

em que  $h(t)$  é a função de resposta ao impulso do sistema, uma quantidade inerente ao sistema. Essas quantidades também podem ser relacionadas no domínio da frequência através do uso da Transformada de Fourier. No caso de sinais discretos (digitais), como trabalha o analisador de sinais, é utilizada a Transformada de Fourier Discreta (DFT). No domínio da frequência, em vez de se ter uma operação de convolução, tem-se uma simples multiplicação, ou seja:

$$X(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (3.2)$$

logo,

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (3.3)$$

em que  $H(\omega)$  é a função de resposta em frequência (FRF), que é a razão da amplitude da resposta com a amplitude da excitação no domínio da frequência. A FRF é a transformada de Fourier da função de resposta ao impulso.  $X(\omega)$  e  $F(\omega)$  são as transformadas de Fourier da resposta e da excitação no domínio do tempo, respectivamente.

Para sinais senoidais e transientes, a FRF pode ser estimada diretamente pela Eq. (3.3), mas não para sinais aleatórios. Desta forma, é necessária uma metodologia de estimação que seja apropriada para todos os tipos de sinais. Existem duas metodologias comumente usadas para a estimação da FRF, que são referidos como estimadores  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$ , os quais são detalhadas a seguir.

O estimador  $H_1(\omega)$  é obtido através da multiplicação de  $F^*(\omega)$  (conjugado de  $F(\omega)$ ) na Eq. (3.2), portanto:

$$F^*(\omega)X(\omega) = F^*(\omega)F(\omega)H(\omega) \quad (3.4)$$

ou

$$S_{fx}(\omega) = S_{ff}(\omega)H_1(\omega) \quad (3.5)$$

sendo  $S_{fx}(\omega)$  a densidade espectral cruzada entre a entrada e a saída e  $S_{ff}(\omega)$  a auto-densidade espectral da entrada.

Então, o estimador  $H_1(\omega)$  é dado por:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (3.6)$$

A segunda estimativa da FRF é encontrada através da multiplicação de  $X^*(\omega)$  (conjugado de  $X(\omega)$ ) na Eq. (3.2), portanto:

$$X^*(\omega)X(\omega) = X^*(\omega)F(\omega)H(\omega) \quad (3.7)$$

ou

$$S_{xx}(\omega) = S_{xf}(\omega)H_2(\omega) \quad (3.8)$$

sendo  $S_{xf}(\omega)$  a densidade espectral cruzada entre a saída e a entrada e  $S_{xx}(\omega)$  a autodensidade espectral da saída.

Então, o estimador  $H_2(\omega)$  é dado por:

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \quad (3.9)$$

Os valores de  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  geralmente são diferentes, devido a presença de ruído nos sinais de entrada e de saída medidos (McConnel, 1995).

Para verificar a qualidade das medições, pode-se usar a Função de Coerência, que indica o quanto da saída de um sistema foi causada devido à entrada desejada neste sistema. Esta função é dada por:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega)} \quad (3.10)$$

O valor da função de coerência varia de 0 a 1. Se o valor da função de coerência for igual a 1, então o sinal de resposta deve-se totalmente à força de excitação aplicada, no entanto, se a função de coerência for menor que 1, a resposta se deve, além da entrada desejada, a ruídos estranhos e/ou não-linearidades no sistema (Bendat & Pierson, 1986; Ramsey, 1975). Outros fatores que fazem a função de coerência ser menor que 1 podem ser encontrados em McConnel (1995).

Pode-se perceber que, de acordo com as Eq. (3.6), (3.9) e (3.10), a função de coerência é dada pela razão entre os estimadores  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$ , desde que  $S_{fx}(\omega)$  e  $S_{xf}(\omega)$  são complexos conjugados. Logo:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \quad (3.11)$$

Desta forma, a Eq. (3.11) implica que  $H_2(\omega) \geq H_1(\omega)$ , desde que a função de coerência é sempre menor ou igual a 1. Portanto, o estimador  $H_1(\omega)$  tende a subestimar a verdadeira FRF e o estimador  $H_2(\omega)$  tende a superestimar a verdadeira FRF quando a coerência for menor que 1 (McConnel, 1995).

### 3.5- IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

Podemos classificar os métodos de identificação em métodos no domínio do tempo, que identificam os parâmetros modais (ou espaciais) a partir das funções de resposta ao impulso (FRI's), e métodos no domínio da frequência, que identificam os parâmetros a partir das funções de resposta em frequência (FRF's). Estes dois grupos podem ser divididos em métodos indiretos (modal) e métodos diretos. Os métodos indiretos identificam o modelo modal (frequências naturais, amortecimentos modais e formas modais) de uma estrutura, enquanto os métodos diretos identificam o modelo espacial (matrizes de massa, rigidez e amortecimento). Uma outra classificação pode ser feita quando em relação ao número de modos identificados simultaneamente. Podemos ter métodos modo a modo (SDOF – “Single Degree of Freedom methods”), que identificam um modo de cada vez, ou métodos multimodos (MDOF – “Multiple Degree of Freedom methods”), que identificam vários modos simultaneamente. Os primeiros métodos nesta última classificação são adequados em

sistemas que possuem modos com baixo amortecimento e que haja um fraco acoplamento entre os mesmos, como exemplifica a Fig. 3.5.

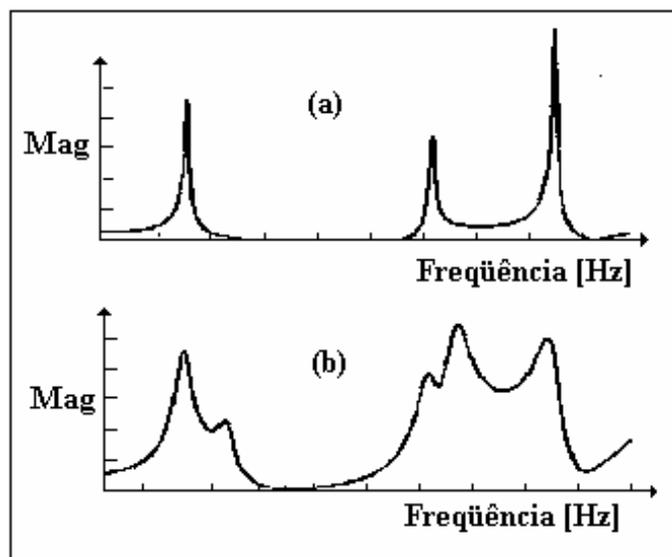


Figura 3.5 – (a) Espectro de frequência de uma estrutura levemente amortecida tendo modos bem espaçados; (b) Espectro de frequência de outra estrutura, porém fortemente amortecida tendo modos acoplados (“Application Note” 243-3 da HP, 1986, modificado).

Outra classificação de métodos de identificação diz respeito ao número de pontos de medição usados simultaneamente em um ensaio modal. Quando são usados apenas dois pontos, um para a medição do sinal de entrada e outro para a medição do sinal de saída, temos os métodos SISO (“Single-Input Single-Output”). Podemos ter também métodos SIMO e MIMO (o significado de cada um é óbvio). Os métodos MISO também são usados, mas, em menor escala (Maia & Silva, 1997). As Fig. 3.6, 3.7 e 3.8 sintetizam essas classificações.

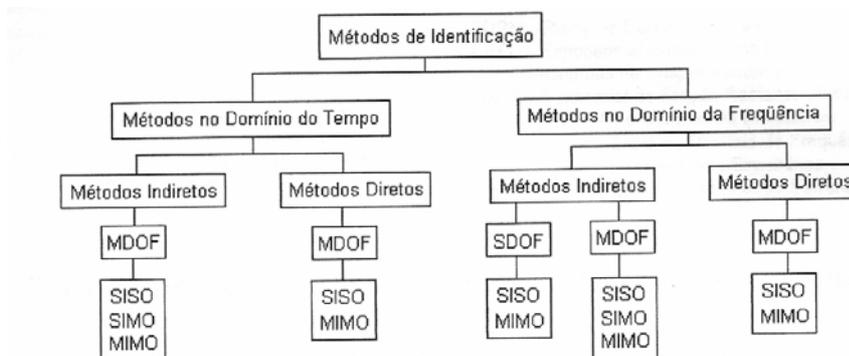


Figura 3.6 – Classificação geral dos métodos de identificação de parâmetros (Maia & Silva, 1997).



Figura 3.7 – Métodos de identificação de parâmetros no domínio do tempo (Maia & Silva, 1997).

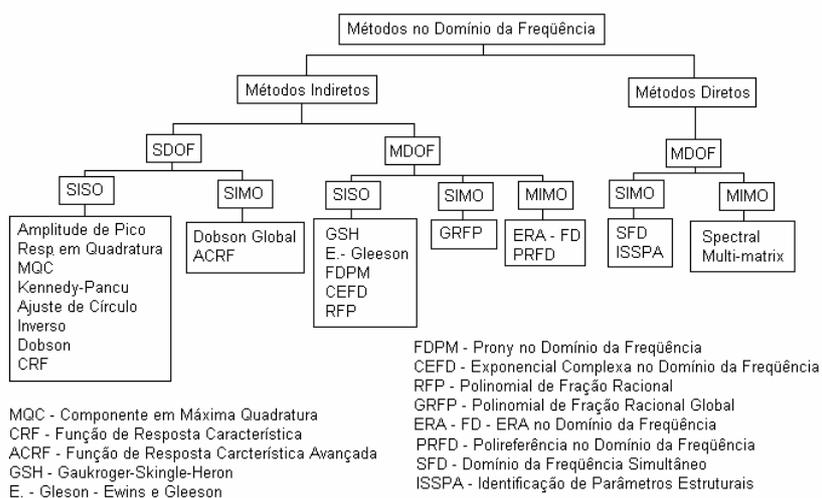


Figura 3.8 – Métodos de identificação de parâmetros no domínio da frequência (Maia & Silva, 1997).

Neste trabalho é usado extensivamente a o método, no domínio do tempo, da exponencial complexa mínimos quadrados, que deriva do método simples da exponencial complexa (ou método de Prony). Desta forma, a seguir é apresentada em maiores detalhes a teoria desta metodologia.

### 3.5.1- Método da Exponencial Complexa e Exponencial Complexa - Mínimos Quadrados

A função de resposta ao impulso entre os graus de liberdade  $j$  e  $k$  pode ser escrita na forma (Maia & Silva (1997) e Iglesias (2000)):

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^N jk A_r e^{s_r t} + jk A_r^* e^{s_r^* t} \quad (3.12)$$

Esta função pode ser obtida aplicando a transformada inversa de Fourier na FRF mostrada na Eq. (2.43b). Pode-se reescrever a Eq. (3.12) de forma mais compacta como:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} jk A_r e^{s_r t} \quad (3.13)$$

ou, para simplificar:

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r t} \quad (3.14)$$

sendo  $s_r = -\omega_r \xi_r + i \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$ .

A resposta  $h(t)$  (quantidade real) a uma série de  $L$  intervalos de tempo igualmente espaçados  $\Delta t$  é:

$$\begin{aligned} h_0 = h(0) &= \sum_{r=1}^{2N} A_r \\ h_1 = h(\Delta t) &= \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r \Delta t} \\ &\vdots \\ h_L = h(L\Delta t) &= \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r L\Delta t} \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou, simplesmente,

$$\begin{aligned}
h_0 &= h(0) = \sum_{r=1}^{2N} A_r \\
h_1 &= h(\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r \\
&\vdots \\
h_L &= h(L\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^L
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo,

$$V_r = e^{s_r \Delta t} \tag{3.17}$$

Deve ser notado que em (3.16) os valores de  $A_r$  e  $V_r$  não são conhecidos. A forma de determinação destes parâmetros foi criada em 1795 por Prony, e, portanto o método também é conhecido como Método de Prony.

Existirá sempre um polinômio em  $V_r$  de ordem  $L$ , com coeficientes reais  $\beta_j$  (chamados coeficientes autoregressivos) tal que a seguinte relação é verificada:

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_L V_r^L = 0 \tag{3.18}$$

Para calcular os coeficientes  $\beta_j$  e em seguida calcular  $V_r$ , é necessário multiplicar ambos lados da Eq. (3.16) de  $\beta_0$  até  $\beta_L$  e somar o resultado. Isto fornece:

$$\sum_{j=1}^L \beta_j h_j = \sum_{j=1}^L \left( \beta_j \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^j \right) = \sum_{r=1}^{2N} \left( A_r \sum_{j=1}^L \beta_j V_r^j \right) \tag{3.19}$$

O somatório interno em (3.19) é exatamente o polinômio (3.18). Como esse polinômio é igual a zero para cada valor de  $V_r$ , então:

$$\sum_{j=1}^L \beta_j h_j = 0 \quad , \text{ para cada } V_r. \tag{3.20}$$



Da equação (3.26), pode-se calcular os coeficientes autoregressivos. Conhecendo-se estes coeficientes é possível calcular as raízes  $V_r$  do polinômio (3.18). Usando (3.17) é possível calcular as frequências naturais e os fatores de amortecimento. Com os valores de  $V_r$ , pode-se usar (3.16) para calcular os resíduos, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ V_1 & V_2 & V_3 & \dots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & V_3^2 & \dots & V_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_1^q & V_2^q & V_3^q & \dots & V_{2N}^q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_q \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

sendo que  $q \geq 2N$ .

O Método da Exponencial Complexa é um método MDOF, indireto e SISO. É um método simples que não requer estimativas iniciais para os parâmetros modais, e a única incógnita é o número de modos que deve ser considerado na análise. Um número superestimado de modos é geralmente fornecido, e desta forma será necessário posteriormente distinguir os modos verdadeiros dos modos computacionais. Isto pode ser feito através das informações do diagrama de estabilização ou do coeficiente MCF (“Modal Confidence Factor” - Fator de Confiança Modal, Ibrahim, 1978). Este fator compara o valor esperado de um modo  $\{\widehat{\Phi}_r\}$  (à partir do modo calculado  $\{\Phi_r\}$ ) para um intervalo de tempo com o valor calculado de  $\{\widehat{\Phi}_r\}$  para o intervalo de tempo seguinte.

Nesta metodologia da Exponencial Complexa, analisa-se apenas uma FRI. A extensão da metodologia para o método LSCE é muito simples, uma vez que se tomar como referência a Eq. (3.25) pode-se estabelecer que os coeficientes  $\beta$ , que permitem a solução do polinômio característico da Eq. (3.18), são quantidades globais, isto é, devem ser os mesmos para cada Função Impulsiva usada. Portanto, reescrevendo a Eq. (3.24) para  $p$  Funções Respostas Impulsivas, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} [h]_1 \\ [h]_2 \\ [h]_3 \\ \vdots \\ [h]_{p-1} \\ [h]_p \end{bmatrix} \{\beta\} = \begin{bmatrix} \{h'\}_1 \\ \{h'\}_2 \\ \{h'\}_3 \\ \vdots \\ \{h'\}_{p-1} \\ \{h'\}_p \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [h_G]_{2N \times p} \cdot \{\beta\}_{2N \times 1} = \{h'_G\}_{2N \times 1} \quad (3.28)$$

A solução de mínimos quadrados pode ser encontrada através da técnica da pseudo-inversa, como:

$$\{\beta\} = \left( [h_G]^T [h_G] \right)^{-1} [h_G]^T \{h'_G\} \quad (3.29)$$

Uma solução deste tipo para a Eq. (3.25) já poderia ter sido aplicada no método da exponencial complexa, considerando-se que mais do que  $2N$  conjuntos de pontos já seriam uma forma de melhorar os resultados, principalmente, devido ao fato de se poder varrer uma quantidade maior de pontos da Função Resposta Impulsiva e, assim, minimizar os efeitos dos ruídos de medição. Portanto, na Eq. (3.29), podemos ter mais do que  $2N$  conjuntos de pontos de medição.

Conhecidos os coeficientes do vetor  $\{\beta\}$ , obtém-se os valores de  $Vr$ , resolvendo como antes, a Eq. (3.18) e, então, para cada Função Resposta Impulsiva, os resíduos  $A$  podem ser determinados usando-se novamente a Eq. (3.28).

### 3.6- VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Como forma de validar os resultados obtidos em um teste modal, algumas funções e coeficientes podem ser utilizados.

Primeiramente, pode-se utilizar a função coerência para validar as FRFs medidas. Em seguida, após a obtenção dos vetores modais, pode-se utilizar o MAC entre os próprios vetores modais experimentais para verificar se os mesmos são linearmente independentes.

O MAC (“Modal Assurance Criterion”) (Allemang, 1982), também conhecido como MSCC (“Mode Shape Correlation Coefficient”), é um coeficiente de correlação entre dois vetores modais (formas modais) quaisquer. Este coeficiente é uma quantidade real, inclusive se os elementos dos vetores modais forem complexos. Se o MAC entre duas formas modais for igual a 1,0, então estes vetores estão perfeitamente correlacionados. Na prática, qualquer valor entre 0,9 e 1,0 é considerada uma boa correlação. Se o coeficiente tiver valor menor, então haverá um grau de inconsistência inversamente proporcional ao valor do coeficiente. A expressão matemática do MAC, entre dois vetores, é dada por:

$$MAC(\{e_i\}, \{u_j\}) = \frac{|\{e_i\}^T \{u_j^*\}|^2}{(\{e_i\}^T \{e_i^*\})(\{u_j\}^T \{u_j^*\})} \quad (3.30)$$

onde  $\{e_i\}$  é o  $i$ -ésimo vetor modal de um modelo (experimental, por exemplo),  $\{u_j\}$  o  $j$ -ésimo vetor modal do mesmo modelo ou de outro (numérico, por exemplo) e “\*” denota o complexo conjugado do vetor.

Também, como forma de verificar a precisão dos modos estimados, pode-se regenerar as FRFs a partir dos parâmetros modais estimados e comparar estas FRFs regeneradas com as FRFs medidas.

## CAPITULO IV

### ANÁLISE MODAL OPERACIONAL

#### 4.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A metodologia tradicional de identificação de parâmetros na análise modal de estruturas é realizada a partir de sinais medidos de força de entrada e de movimento de resposta, da estrutura, em condições laboratoriais controladas. Entretanto, para grandes estruturas ou estruturas de equipamentos em operação, torna-se difícil o controle e a medição da força de entrada. Para suprir esta limitação, foram desenvolvidas técnicas de determinação de parâmetros modais utilizando somente os dados de resposta do sistema.

Estas técnicas são conhecidas por análise modal operacional, devido poderem utilizar as próprias forças geradas pela operação do sistema como fonte de excitação. Contudo, as técnicas de análise modal operacional costumam considerar as forças de excitação como sendo um ruído branco estacionário, o que pode trazer problemas, caso existam componentes harmônicos inseridos nas forças geradas pela operação do sistema.

Neste capítulo, apresenta-se a teoria de um método tradicional de análise modal operacional, o NExT (Natural Excitation Technique) (James III et al, 1995 e Shen et al, 2003). É também sugerida a aplicação dessa técnica em estruturas que contenham componentes harmônicos em suas excitações operacionais.

Com o intuito de eliminar as respostas harmônicas do sinal a ser avaliado pelo método de identificação modal, é apresentada uma forma de distinção de modos, onde se torna possível a identificação e posterior eliminação de modos operacionais (provenientes das respostas aos componentes harmônicos) com o intuito de tornar pelo menos satisfatório a estimativa dos parâmetros modais. Isso é possível através da metodologia apresentada por Brincker et al. (2000a) utilizando a análise da função densidade de probabilidade de banda estreita onde se localiza o pico do modo.

Finalmente, é apresentado neste capítulo a metodologia de análise modal operacional de Mohanty & Rixen (2004a) que prevê a presença de componentes harmônicos (de frequências conhecidas) na excitação operacional do sistema, apresentando adaptações ao método LSCE, a ser aplicado na técnica NExT, para melhorar a estimativa dos parâmetros, fornecendo resultados mais precisos comparado ao método LSCE tradicional.

#### 4.2- MÉTODO NExT DE ANÁLISE MODAL OPERACIONAL

Quando um sistema é excitado por um ruído branco, a técnica NExT assume que a função de correlação  $R_{ij}(t)$  entre os sinais de resposta medidos nos pontos  $i$  e  $j$  é similar à resposta da estrutura no ponto  $i$  devido a um impulso em  $j$  (Shen et al., 2003). Assumindo que o sistema é pouco amortecido, esta função de correlação é dada pela Eq. (4.1).

$$R_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_i(\tau) q_j(\tau - t) d\tau = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri} A_{rj}}{m_r \omega_r^d} e^{(-\xi_r \omega_r^d t)} \text{sen}(\omega_r^d t + \theta_r) \quad (4.1)$$

sendo  $\phi_{ri}$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor modal  $r$  do sistema conservativo,  $A_{rj}$  é a constante associada ao  $j$ -ésimo sinal de resposta tomado como referência,  $m_r$  é a  $r$ -ésima massa modal,  $\xi_r$  e  $\omega_r^d$  são, respectivamente, o  $r$ -ésimo fator de amortecimento modal e a  $r$ -ésima frequência natural amortecida e  $\theta_r$  é o ângulo de fase associado com a  $r$ -ésima resposta modal. Então, a correlação entre sinais de resposta é uma superposição de oscilações decaindo no tempo, possuindo amortecimentos e frequências iguais aos amortecimentos e frequências dos modos naturais.

Devido à aproximação da função de resposta ao impulso através da função de autocorrelação, métodos de identificação de parâmetros modais, tal como o método da exponencial complexa - mínimos quadrados (LSCE) podem ser usados para extrair os parâmetros modais somente com a informação dos sinais de resposta do sistema. Em termos de modos complexos da estrutura, a função de correlação pode ser escrita como:

$$R_{jk}(t) = \sum_{r=1}^N {}_{jk} A_r e^{s_r t} + \sum_{r=1}^N {}_{jk} \bar{A}_r e^{\bar{s}_r t} \quad (4.2)$$

sendo  $s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$  e  ${}_{jk} A_r$  a constante associada com o  $r$ -ésimo modo para  $k$ -ésima resposta, que é o sinal de referência.  $t$  é o tempo de amostragem e sobrescrito (-) denota o complexo conjugado. Contudo, a Eq. (4.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$R_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}_{jk} A_r' e^{s_r t} \quad (4.3)$$

Como  $s_r$  surge em complexos conjugados na Eq. (4.3), então existe um polinômio de ordem  $2N$  no qual  $e^{s_r t}$  são as raízes do polinômio apresentado na Eq. (4.4) (polinômio de Prony):

$$\beta_0 + \beta_1 V_r^1 + \beta_2 V_r^2 + \cdots + \beta_{2N-1} V_r^{2N-1} + V_r^{2N} = 0 \quad (4.4)$$

Para determinar os valores de  $\beta_i$ , multiplica-se a resposta ao impulso Eq. (4.3) da amostra  $k$  pelo coeficiente  $\beta_j$  e realiza-se o somatório para valores de  $j=0, \dots, 2N$ :

$$\sum_{j=0}^{2N} \beta_j R_{jk}(j\Delta t) = \sum_{j=0}^{2N} \left( \beta_j \sum_{r=1}^{2N} {}_{jk} A_r' V_r^j \right) = \sum_{j=0}^{2N} \left( {}_{jk} A_r' \sum_{r=1}^{2N} \beta_j V_r^j \right) = 0 \quad (4.5)$$

Os coeficientes  $\beta_i$  satisfazem a equação linear cujos coeficientes são as respostas ao impulso (ou funções de correlação) em  $(2N+1)$  amostras sucessivas. De forma a determinar estes coeficientes, a relação da Eq. (4.5) é escrita  $2N$  vezes. Em outras palavras, são escritas  $2N$  equações para construir um sistema linear que determina os coeficientes  $\beta_i$ :

$$\beta_0 R_n + \beta_1 R_{n+1} + \cdots + \beta_{2N-1} R_{n+2N-1} = -R_{n+2N}, \quad n = 0, \dots, 2N-1 \quad (4.6)$$

Da Eq. (4.6), obtém-se  $2N$  equações para determinar  $\beta_i$ , contudo, mais equações podem ser usadas para formar um sistema de equações superdeterminado. Isto é útil no sentido de se realizar médias, a fim de se eliminar o ruído de medição. Neste caso,  $n$  na Eq. (4.6) é variado até  $L \geq 2N-1$ . O sistema linear pode ser reescrito na forma matricial apresentada na Eq. (4.7).

$$[R]\{\beta\} = -\{R'\} \quad (4.7)$$

sendo que  $[R]$  é uma matriz ( $L \times 2N$ ) cujas linhas são as seqüências das respostas impulsivas amostradas. Uma vez calculados os coeficientes  $\{\beta\}$ , os autovalores  $s_r$  são determinados calculando as raízes da Eq. (4.4).

Este procedimento usa uma única função de correlação. De forma a melhorar a robustez do método, pode-se escrever a Eq. (4.7) para  $p$  funções de correlação para vários graus de liberdade em relação a um único sinal de resposta de referência. Uma vez obtido o sistema superdeterminado:

$$\begin{bmatrix} [R]_1 \\ [R]_2 \\ \vdots \\ [R]_p \end{bmatrix} \{\beta\} = - \begin{bmatrix} [R']_1 \\ [R']_2 \\ \vdots \\ [R']_p \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

Uma solução em mínimos quadrados pode ser determinada para  $\{\beta\}$ . Este é o mesmo procedimento apresentado no Capítulo II, seção 3.5.1, método da Exponencial Complexa - Mínimos Quadrados aplicado em funções densidade espectrais no lugar de FRF, ou seja, a função de correlação ( $R$ ) no lugar da FRI ( $h$ ) (Mohanty & Rixen, 2004a).

Na seção 5.4 do Capítulo V, é feita a validação dessa metodologia para um sistema analítico excitado com ruído branco. Na seção 5.5, é verificado a eficiência dessa metodologia para o caso de uma excitação composta por ruído branco com componente harmônico. Nas seções 6.4 e 6.5 do Capítulo VI essa metodologia é aplicada a um sistema experimental, verificado também sua eficiência na presença de sinal harmônico.

Grande parte dos métodos de análise modal operacional possui uma limitação devido à consideração de que a fonte de excitação é um ruído branco (Mohanty & Rixen, 2004a). Caso a excitação operacional do sistema inclua componentes harmônicos, as técnicas que utilizam a consideração citada terão sua eficiência comprometida, o que não é difícil ocorrer em se tratando de excitações operacionais em sistemas rotativos ou mesmo em estruturas civis excitadas por condições periódicas. Nestes casos, o gráfico da função de auto-densidade

espectral da resposta apresentará picos correspondendo a modos naturais e picos correspondendo a modos operacionais (respostas às excitações senoidais). Desta forma, os métodos tradicionais de AMO irão considerar erroneamente tais picos de modos operacionais como sendo modos naturais.

#### **4.3- IDENTIFICAÇÃO DA NATUREZA DO MODO ATRAVÉS DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE**

Nesta seção, é apresentada uma metodologia que se destina a identificação da natureza do modo (se natural ou se operacional), onde, caso seja identificado um modo operacional, pode se aplicar um filtro rejeita banda neste.

Segundo Brincker et al. (2000a), uma maneira de identificar se um pico na função densidade espectral da resposta corresponde a um modo operacional (resposta harmônica) ou a um modo natural é através da função de densidade de probabilidade do sinal contendo apenas aquele modo. Se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de ruído branco, ou seja, uma densidade de probabilidade gaussiana ou normal (Bendat & Piersen, 1980), então o modo sob análise corresponde a um modo natural. Por outro lado, se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de uma função harmônica, então o modo sob análise corresponde a um modo operacional.

Para efeito de demonstração da eficiência deste procedimento, considere que haja uma excitação harmônica de 20 Hz adicionada ao ruído branco de entrada em um modelo de 5 graus de liberdade (mesmo modelo utilizado no Capítulo V). A Fig. 4.1 mostra um gráfico com o conjunto de funções densidades espectrais da resposta do sistema em relação a uma referência. Pode-se observar que se destacam seis picos no gráfico, cinco correspondentes a modos naturais (13,7 Hz, 25,34 Hz, 31,46 Hz, 37,9 Hz e 38,81 Hz) e apenas um correspondendo a modo operacional (20 Hz). Aplicou-se um filtro passa-banda de 2 Hz centrado em cada um dos picos apresentados e analisou a função densidade de probabilidade de cada sinal (domínio do tempo) filtrado.

A Fig. 4.2 mostra a densidade de probabilidade da função filtrada no primeiro pico (13,7 Hz). A forma da curva apresentada ilustra que este modo trata-se de um modo natural

do sistema. Repetindo-se o mesmo procedimento para os demais picos, verificou-se o mesmo tipo de comportamento para a função densidade de probabilidade, confirmando que se tratam também de modos naturais, com exceção do sinal filtrado na banda central de 20 Hz. A Fig. 4.3 mostra o gráfico da função densidade de probabilidade da banda de 20 Hz. Pode-se perceber pelo formato da curva que esta tende a aproximar-se de uma função densidade de probabilidade típica de um sinal senoidal, comprovando que o modo sob análise é um modo operacional.

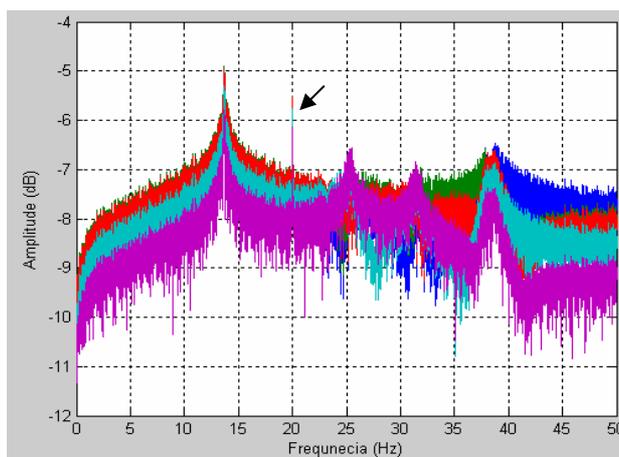


Figura 4.1 – Funções densidades espectrais contendo seis picos correspondendo a cinco modos naturais e um modo operacional em 20 Hz (indicado pela seta).

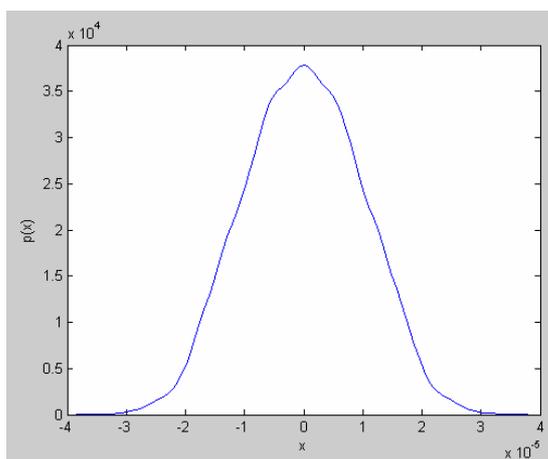


Figura 4.2 - Densidade de probabilidade do sinal filtrado no 1º pico ( $13,7 \pm 1$  Hz).

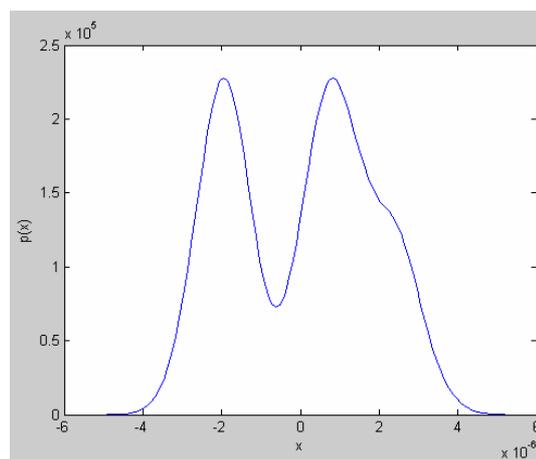


Figura 4.3 - Densidade de probabilidade do sinal filtrado no 2º pico ( $20 \pm 1$  Hz).

Efetuada a identificação e a filtragem dos modos operacionais, pode ser aplicado um método de análise modal operacional nas funções e então os modos naturais serem estimados. No Capítulo V, seção 5.5.2, é aplicada essa metodologia em dois exemplos,

um com o modo operacional próximo ao primeiro modo natural e outro com o modo operacional praticamente coincidindo com o primeiro modo natural com o intuito de avaliar a eficiência deste procedimento (Cruz & Mesquita, 2005).

#### 4.4 - MÉTODO DE MOHANTY & RIXEN

Esta é uma metodologia onde o sinal harmônico é inserido no polinômio de Prony, melhorando as estimativas de parâmetros modais através de análise modal operacional, mesmo esta possuindo componentes harmônicos.

Mohanty & Rixen (2004a) propõem esta metodologia de análise modal operacional que considera no sinal de entrada (não medido) componentes harmônicos além do sinal aleatório. Então os dados de correlação terão uma componente harmônica não-amortecida em adição à resposta impulsiva. Esta componente extra pode então ser considerada como um modo virtual não-amortecido do sistema. Então o procedimento da análise modal operacional descrito na Seção 4.2 pode ser usado inclusive na presença de excitação harmônica.

Quando uma excitação de frequência conhecida  $\omega$  está presente, pode ser facilmente mostrado que as funções de correlação têm a forma da Eq. (4.3) com mais dois termos extra, correspondendo aos autovalores  $s_r = \pm i\omega$ . Existem, então, duas raízes extras no polinômio de Prony:  $V_r = e^{s_r t} = e^{\pm i\omega t}$ .

Estes dois autovalores extras podem ser escritos da seguinte forma (usando a Equação de Euler):  $V_r = \cos(\omega_r t) - i \operatorname{sen}(\omega_r t)$  e  $V_r = \cos(\omega_r t) + i \operatorname{sen}(\omega_r t)$ . Re-arranjando as equações de Prony para estes autovalores, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen}(\omega\Delta t) & \cdots & \operatorname{sen}(\omega(2N-1)\Delta t) \\ 1 & \cos(\omega\Delta t) & \cdots & \cos(\omega(2N-1)\Delta t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(2N\omega\Delta t) \\ \cos(2N\omega\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Em um caso geral, assume-se  $m$  frequências harmônicas dentro da faixa de frequências trabalhada. Usando as relações da Eq. (4.9) ao sistema da Eq. (4.8), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 R_0 & \cdots & R_{2m-1} & R_{2m} & \cdots & R_{2N-1} \\
 \vdots & \textcircled{A} & \vdots & \vdots & \textcircled{C} & \vdots \\
 R_{L_p-1} & \cdots & R_{L_p+2m-2} & R_{L_p+2m-1} & \cdots & R_{L_p+2N-2} \\
 \hline
 0 & \cdots & \text{sen}(\omega_1(2m-1)\Delta t) & \text{sen}(\omega_1 2m\Delta t) & \cdots & \text{sen}(\omega_1(2N-1)\Delta t) \\
 1 & \cdots & \text{cos}(\omega_1(2m-1)\Delta t) & \text{cos}(\omega_1 2m\Delta t) & \cdots & \text{cos}(\omega_1(2N-1)\Delta t) \\
 \vdots & \textcircled{B} & \vdots & \vdots & \textcircled{D} & \vdots \\
 0 & \cdots & \text{sen}(\omega_m(2m-1)\Delta t) & \text{sen}(\omega_m 2m\Delta t) & \cdots & \text{sen}(\omega_m(2N-1)\Delta t) \\
 1 & \cdots & \text{cos}(\omega_m(2m-1)\Delta t) & \text{cos}(\omega_m 2m\Delta t) & \cdots & \text{cos}(\omega_m(2N-1)\Delta t)
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c}
 \beta_0 \\
 \beta_1 \\
 \textcircled{b_1} \\
 \beta_{2m-2} \\
 \beta_{2m-1} \\
 \hline
 \beta_{2m} \\
 \textcircled{b_2} \\
 \beta_{2N-1}
 \end{array} \right\} = \\
 & = \left\{ \begin{array}{c}
 R_{2N} \\
 \vdots \\
 \textcircled{E} \\
 R_{L_p+2N-1} \\
 \hline
 \text{sen}(\omega_1 2N\Delta t) \\
 \text{cos}(\omega_1 2N\Delta t) \\
 \vdots \\
 \textcircled{F} \\
 \text{sen}(\omega_m 2N\Delta t) \\
 \text{cos}(\omega_m 2N\Delta t)
 \end{array} \right\} \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Em forma simbólica, pode-se escrever:

$$\begin{array}{c}
 [A] \{b_1\} + [C] \{b_2\} = \{E\} \\
 \begin{smallmatrix} (L_p \times 2m) & (2m \times 1) & (L_p \times 2N-2m) & (2N-2m \times 1) & (L_p \times 1) \end{smallmatrix}
 \end{array} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{array}{c}
 [B] \{b_1\} + [D] \{b_2\} = \{F\} \\
 \begin{smallmatrix} (2m \times 2m) & (2m \times 1) & (2m \times 2N-2m) & (2N-2m \times 1) & (2m \times 1) \end{smallmatrix}
 \end{array} \tag{4.12}$$

De acordo com a Eq. (4.12),

$$\{b_1\} = [B]^{-1}(\{F\} - [D]\{b_2\}) \tag{4.13}$$

e substituindo na Eq. (4.11), obtém-se:

$$([C] - [A][B]^{-1}[D])\{b_2\} = \{E\} - [A][B]^{-1}\{F\} \quad (4.14)$$

De acordo com o sistema superdeterminado da Eq. (4.14),  $\{b_2\}$  pode ser determinado por solução de mínimos quadrados.  $\{b_1\}$  é então calculado através da Eq. (4.13). Os vetores  $\{b_1\}$  e  $\{b_2\}$  fornecem os coeficientes do polinômio de Prony. As raízes do polinômio incluirão as frequências harmônicas.

No Capítulo V, seção 5.5.3, esta metodologia é validada através de um modelo analítico e no Capítulo VI, seção 6.5.2, é demonstrado sua aplicação em bancada experimental de laboratório.

## CAPÍTULO V

### ANÁLISE DE RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

#### 5.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, é mostrada a aplicação dos algoritmos desenvolvidos para um modelo analítico simulando a análise modal experimental, a análise modal operacional com o sistema excitado apenas por ruído branco e a análise modal operacional com o sistema excitado por ruído branco com a presença de componente harmônico. Neste ultimo caso, são aplicadas: (i) a metodologia NExT; (ii) a metodologia de extração do sinal harmônico para a posterior utilização do NExT; e (iii) o método de Mohanty & Rixen.

#### 5.2- MODELO ANALÍTICO ADOTADO

O modelo utilizado para a validação analítica dos métodos e outros procedimentos adotados neste trabalho consiste de um modelo com parâmetros concentrados massa-mola-amortecedor de 5 graus de liberdade proposto em Ishihara & Dias (1999). Este modelo apresenta dois modos acoplados, o que serve para verificar a eficiência do algoritmo nesta situação. A Fig. 5.1 mostra esquematicamente a disposição dos parâmetros concentrados e a Tab. 5.1 apresenta os parâmetros concentrados adotados e a Tab. 5.2 apresenta as matrizes de massa  $[M]$ , amortecimento  $[C]$  e rigidez  $[K]$  do modelo da Fig. 5.1.

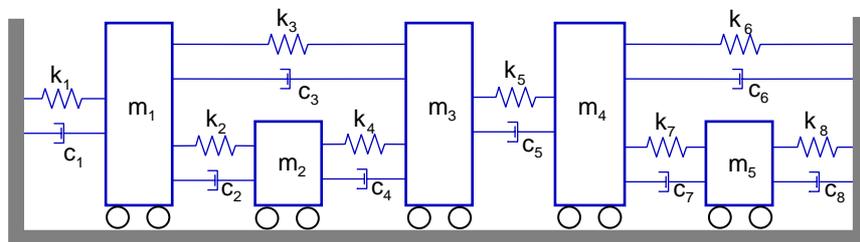


Figura 5.1 – Sistema com cinco graus de liberdade (Ishihara & Dias, 1999, modificado).

Tabela 5.1: Parâmetros físicos adotados.

Parâmetros de Massa	$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1\text{kg.}$
Parâmetros de Amortecimento	$c_1 = c_4 = 1,1\text{N.s/m; } c_2 = 1,5\text{N.s/m; } c_3 = 1,2\text{N.s/m;}$ $c_5 = 1,21\text{N.s/m; } c_6 = 1,6\text{N.s/m; } c_7 = 0,8\text{N.s/m;}$ $c_8 = 2,3\text{N.s/m.}$
Parâmetros de Rigidez	$k_1 = 20000\text{N/m; } k_2 = k_4 = k_6 = 16000\text{N/m;}$ $k_3 = k_5 = 12000\text{N/m; } k_7 = 8000\text{N/m, } k_8=24000\text{N/m.}$

Tabela 5.2: Matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez do modelo analítico utilizado.

$[M]$ (kg)	$[C]$ (N.s/m)	$[K]$ (N/m)
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,8 & -1,5 & -1,2 & 0 & 0 \\ -1,5 & 2,8 & -1,1 & 0 & 0 \\ -1,2 & -1,1 & 3,51 & -1,21 & 0 \\ 0 & 0 & -1,21 & 3,61 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 3,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 48000 & -16000 & -12000 & 0 & 0 \\ -16000 & 32000 & -16000 & 0 & 0 \\ -12000 & -16000 & 40000 & -12000 & 0 \\ 0 & 0 & -12000 & 36000 & -8000 \\ 0 & 0 & 0 & -8000 & 32000 \end{bmatrix}$

Aplicando-se a metodologia de obtenção de parâmetros modais partindo de parâmetros espaciais (Inman, 1994, Iglesias, 2000 e Maia & Silva, 1997), determinam-se os parâmetros modais do sistema que são apresentados na Tab. 5.3.

O algoritmo utilizado para a determinação destes parâmetros modais de forma analítica é ilustrado no anexo A.1.

Tabela 5.3a: Parâmetros modais do modelo analítico utilizado.

1º Modo de Vibração	2º Modo de Vibração	3º Modo de Vibração
Frequência = 13,6991 Hz	Frequência = 25,3357 Hz	Frequência = 31,4618 Hz
$\xi = 0,3321 \%$	$\xi = 0,7547 \%$	$\xi = 0,9254$
Vetor Modal: $\begin{Bmatrix} -0,0049 + 0,0006i \\ 0,0030 + 0,0003i \\ 0,0020 - 0,0001i \\ -0,0008 - 0,0007i \\ 0,0008 - 0,0002i \end{Bmatrix}$	Vetor Modal: $\begin{Bmatrix} -0,0030 + 0,0004i \\ 0,0014 + 0,0001i \\ -0,0014 + 0,0000i \\ 0,0029 + 0,0024i \\ -0,0029 + 0,0008i \end{Bmatrix}$	Vetor Modal: $\begin{Bmatrix} -0,0010 + 0,0001i \\ -0,0004 - 0,0000i \\ 0,0004 - 0,0000i \\ 0,0035 + 0,0029i \\ 0,0033 - 0,0009i \end{Bmatrix}$

Tabela 5.3b: Parâmetros modais do modelo analítico utilizado.

4° Modo de Vibração	5° Modo de Vibração
Frequência = 37,8983 Hz	Frequência = 38,8123 Hz
$\xi = 0,9873 \%$	$\xi = 1,0836 \%$
Vetor Modal: $\begin{Bmatrix} -0,0066 + 0,0008i \\ -0,0024 - 0,0002i \\ 0,0021 - 0,0000i \\ 0,0003 + 0,0002i \\ -0,0014 + 0,0004i \end{Bmatrix}$	Vetor Modal: $\begin{Bmatrix} -0,0075 + 0,0009i \\ -0,0003 - 0,0001i \\ -0,0027 + 0,0001i \\ -0,0013 - 0,0011i \\ 0,0015 - 0,0004i \end{Bmatrix}$

Os parâmetros mostrados aqui serviram como referência para verificação da eficiência dos parâmetros calculados pelos métodos de identificação: LSCE aplicado à análise modal tradicional, pela técnica NExT de análise modal operacional e o método de Mohanty & Rixen.

### 5.3– RESULTADOS OBTIDOS PELA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL TRADICIONAL

Para a validação do algoritmo para identificação modal LSCE, utilizou-se o conjunto de cinco funções respostas em frequência (FRFs), que no algoritmo LSCE eram transformados para funções respostas impulsivas (FRIs) através da transformada inversa de Fourier. Tomando como referência coordenada da massa 1, foram obtidas as seguintes FRFs:  $H_{11}(\omega), H_{12}(\omega), H_{13}(\omega), H_{14}(\omega)$  e  $H_{15}(\omega)$ , simulando um ensaio utilizando martelo de impacto, ou seja, sempre medindo o deslocamento na massa 1 e aplicando o impacto nas massas de 1 a 5.

Fornecendo as 5 FRFs como dado de entrada do algoritmo LSCE implementado em linguagem Matlab® (Anexo A.2), é obtido, em um primeiro momento, um gráfico com as FRFs e as respostas obtidas de frequência com uma cor indicativa de uma faixa de amortecimento onde esta se encontra para cada número de graus-de-liberdade (gdl) estimados, variando-se esta estimativa de 5 a 25 gdl (ordenada dos gráficos de resultados) sobreposto as funções formando um diagrama de estabilização. Destes resultados, excluíram-se os valores acima da faixa de frequência analisada, os que apresentaram MCF abaixo de 0,9 e amortecimentos elevados, resultados estes considerados incoerentes para o problema. Desta

forma, montou-se um diagrama de estabilização, onde pôde ser verificada a tendência de modos reais com facilidade, enquanto os computacionais, neste caso, todos foram excluídos. A Fig. 5.2 mostra o gráfico das funções fornecidas e respostas obtidas utilizando o ponto 1 como referência de resposta.

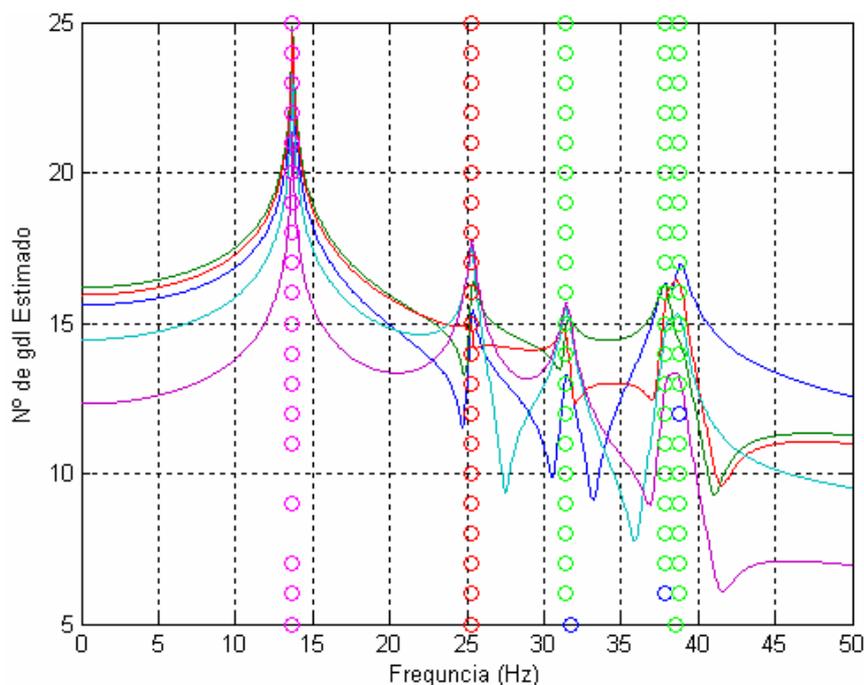


Figura 5.2 - FRFs fornecidas e respostas obtidas para o algoritmo LSCE.

Nota-se nesta figura que todas as respostas se encontram na linha de frequência dos picos das funções fornecidas. A Tab. 5.4 indica a faixa de amortecimento que a cor da resposta representa.

Tabela 5.4: Faixa de amortecimento representado pelas cores.

Cor	Preto	Amarelo	Violeta	Ciano	Vermelho	Verde	Azul
Amort. (%)	0 a 0,1	0,1 a 0,3	0,3 a 0,5	0,5 a 0,7	0,7 a 0,9	0,9 a 1,1	1,1 a 1,3

Em um segundo momento, em outro algoritmo (anexo A.3), com uma pequena modificação do algoritmo anterior, escolhe-se uma linha de gdl estimado onde se encontre resultados que representem a tendência das respostas encontradas e detalha-se seus resultados. Neste caso, apenas as linhas de 5, 6, 9, 11 e 12 gdl devem ser evitadas, pois apresentam discrepância quanto ao amortecimento ou não apresentam respostas em alguma linha de tendência em frequência. Optou-se então pela linha de 25 gdl. A Tab. 5.5 apresenta uma

síntese dos resultados obtidos, além de apresentar uma estimativa de erro destes em relação ao valor calculado analiticamente.

Tabela 5.5: Resultados de frequência e amortecimento obtidos para o método LSCE (25 gdl).

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1º Modo	1	13,691	/	0,06	0,33206	/	0,01
2º Modo	1	25,32	/	0,06	0,75468	/	0,00
3º Modo	1	31,442	/	0,06	0,9254	/	0,00
4º Modo	1	37,875	/	0,06	0,98738	/	0,01
5º Modo	1	38,788	/	0,06	1,0836	/	0,00

Nota-se que os erros encontrados tanto das estimativas das frequências quanto as estimativas dos amortecimentos são muito baixos. Outro fator que confirma a qualidade dos resultados é o MCF calculado que alcançou a máxima eficiência possível.

A Fig. 5.3 mostra o gráfico dos MACs encontrados entre a matriz modal obtida analiticamente e a matriz modal encontrada para esta estimativa. Estes valores foram determinados pelo algoritmo apresentado no anexo A.4. Os quatro primeiros elementos da diagonal principal foram igual a 1 e o quinto apresentou apenas um pequeno resíduo, demonstrando a excelente estimativa dos vetores modais.

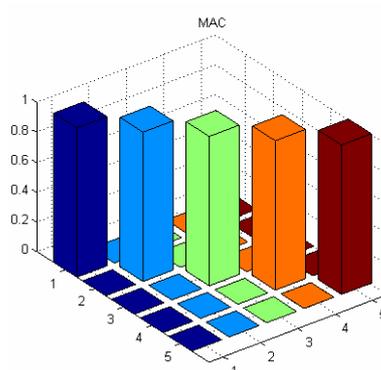


Figura 5.3 - Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pelo algoritmo LSCE (25 gdl).

Vale ressaltar que nesta validação, não foi inserido ruído de fundo para simular possíveis ruídos de medição, o que auxiliou na obtenção de resultados com margens de erros bastante reduzidas.

#### 5.4– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL SOMENTE COM RUÍDO BRANCO

Para validação do algoritmo LSCE com uma aquisição utilizando a técnica NExT, utilizou-se as mesmas FRFs anteriores para gerar as respostas das massas devido a entrada de ruído branco excitando a massa 1 (anexo A.5).

Depois de determinada as respostas em frequência e geradas as funções densidades espectrais e autodensidade espectral, aplicou-se a transformada inversa de Fourier nestas funções para obter as funções de correlação cruzadas e auto-correlação.

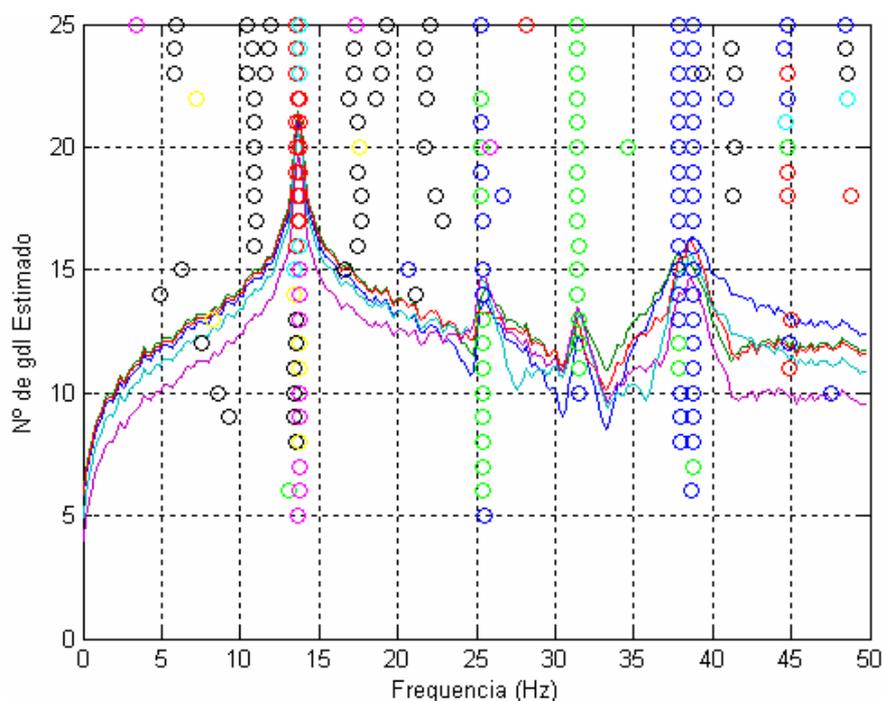


Figura 5.4 - Funções densidade espectrais fornecidas e respostas obtidas somente para ruído branco.

A Fig. 5.4 mostra os resultados obtidos para as funções de densidades espectrais obtidas tomando como referência o ponto 1 (massa  $m_1$ ). Os resultados obtidos, comparados ao caso anterior, apresentam alguns valores fora das linhas de tendência, mas observam-se linhas de

resultados bem definidas nos modos naturais do sistema. Quanto ao amortecimento, apresentam-se variações maiores que no caso anterior, porém também apontando para uma tendência próxima as do valor teórico do sistema. Especificamente neste caso apresentado, tomando como referência o ponto 1, as estimativas do amortecimento do segundo modo não apontaram para o valor teórico, fluando com um erro de estimativa de 20 a 50 %, como é ilustrado nos resultados obtidos estimando-se 13 gdl, apresentado na Tab. 5.6.

Observa-se na Tab. 5.6 que as estimativas de amortecimento dos outros modos não foram tão exatas como a do caso anterior, mas se encontraram dentro de um padrão aceitável e os valores de MCF determinados quando não atingiram 1,0, ficaram bem próximos.

Tabela 5.6: Resultados obtidos considerando 13 gdl para a técnica NExT.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1º Modo	1	13,772	/	0,53	0,31671	/	4,63
2º Modo	0,99982	25,38	/	0,17	1,091	/	44,56
3º Modo	0,99507	31,466	/	0,01	1,0104	/	9,19
4º Modo	0,999	37,892	/	0,02	1,118	/	13,24
5º Modo	0,99974	38,776	/	0,09	1,1653	/	7,54

Na Fig. 5.5, observa-se que os valores de MAC encontrados entre os vetores modais analítico e obtidos pelo algoritmo apresentaram um bom resultado, com valores na diagonal bem próximos a 1.

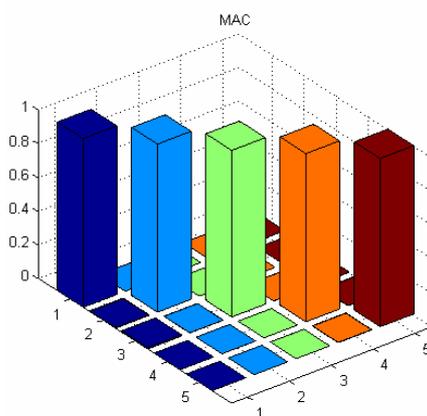


Figura 5.5 - Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pela técnica NExT (13 gdl).

## 5.5– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL COM RUIDO BRANCO E COMPONENTE HARMÔNICO

Com o intuito de verificar a eficiência dos procedimentos utilizados, é apresentado aqui duas simulações com a presença de componente harmônico, uma com o harmônico a 14 Hz, (valor próximo ao primeiro modo natural do modelo), e com o harmônico de 13,7 Hz (valor que coincide com o primeiro modo natural do modelo).

Para cada caso, avaliaram-se os resultados de forma semelhante às apresentadas nas seções 4.1 e 4.2 e também se utilizou como referência o ponto 1.

### 5.5.1– Aplicando Diretamente o Método NExT

No primeiro caso, com o harmônico a 14 Hz, observa-se o surgimento de uma linha dupla de tendência próxima à primeira frequência natural com valores mais elevados de amortecimento do que o conhecido analiticamente. Para os outros modos, apresentaram-se resultados dentro do esperado.

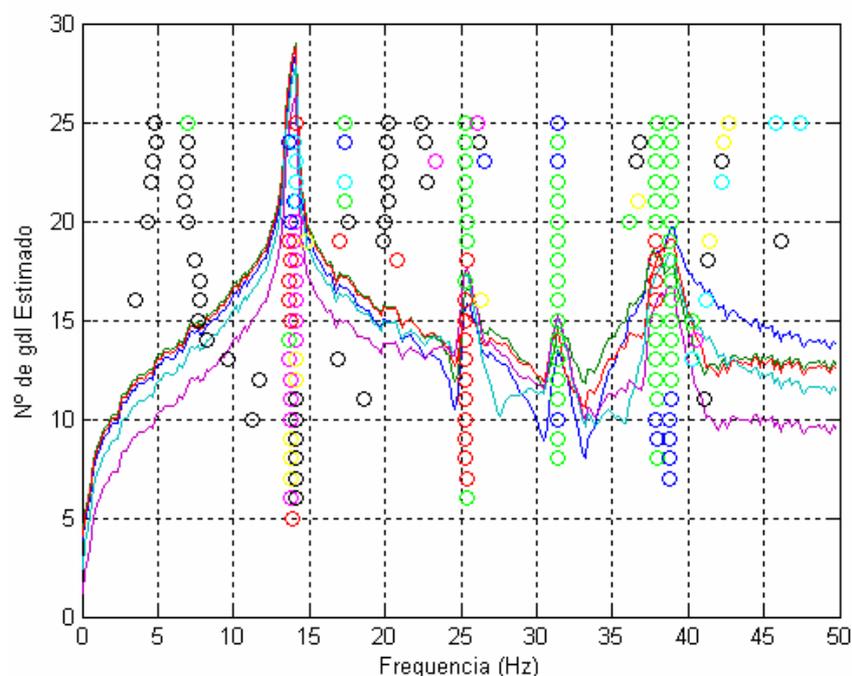


Figura 5.6 - Funções densidade espectrais fornecidas com sinal harmônico de 14 Hz e respostas obtidas para a técnica NExT.

Os resultados obtidos estimando 12 gdl, apresentados na Tab. 5.7, confirmam o ilustrado na Fig. 5.6, apresentando um amortecimento elevado para o primeiro modo, mostrando que o sinal harmônico influencia na estimativa deste primeiro modo, e boas estimativas de frequência e amortecimento para os outros quatro modos.

Tabela 5.7: Resultados obtidos para 12 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 14 Hz.

	MCF	Freq. (Hz) / Erro (%)	Amort. (%) / Erro (%)
1° Modo	1	13,756 / 0,42	0,46697 / 40,61
Harmônico	1	14,092 / 0,66	0,135160 / -
2° Modo	0,99994	25,332 / 0,01	0,79338 / 5,13
3° Modo	0,99874	31,415 / 0,15	0,97666 / 5,54
4° Modo	0,99961	37,895 / 0,01	1,0002 / 1,31
5° Modo	0,99986	38,827 / 0,04	1,0846 / 0,09

No segundo caso, com o harmônico a 13,7 Hz, observa-se um aumento do pico da primeira frequência natural em relação aos demais e valores menos elevados de amortecimento do que o conhecido analiticamente. Para os outros modos, obtiveram-se resultados dentro do esperado, como é mostrado na Fig. 5.7.

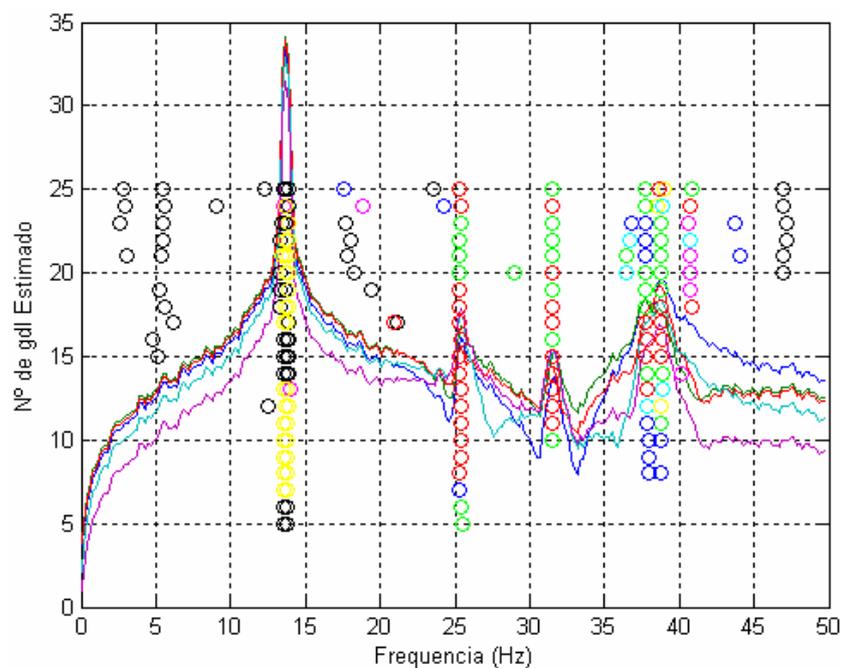


Figura 5.7 - Funções densidade espectrais fornecidas com sinal harmônico de 13,7 Hz respostas obtidas para a técnica NExT.

Os resultados obtidos para uma estimativa de 10 gdl, apresentados na Tab. 5.8, mostram os dois modos (natural e o operacional) próximos e com um erro de amortecimento bastante alto, confirmando novamente a influência do modo operacional na estimativa dos parâmetros modais do modo natural mais próximo.

Tabela 5.8: Resultados obtidos para 10 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 13,7 Hz.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo /	1	13,589	/	0,80	0,13934	/	58,04*
Harmônico	1	13,815	/	0,84	0,137410	/	58,62*
2° Modo	0,99932	25,353	/	0,07	0,84096	/	11,43
3° Modo	0,9814	31,495	/	0,11	1,0045	/	8,55
4° Modo	0,9973	37,959	/	0,16	1,1843	/	19,95
5° Modo	0,99936	38,726	/	0,22	1,2996	/	19,93

\* Em relação ao amortecimento do 1° Modo obtido analiticamente

### 5.5.2– Extraíndo o Componente Harmônico e Aplicando o Método NExT

Após identificar os componentes harmônicos através do método apresentado no Capítulo IV, seção 4.3.1, aqui, será utilizada como dados de entrada, as mesmas funções de correlação utilizadas na seção anterior, só que aplicando um filtro rejeita banda (nos sinais de respostas) de 0,2 Hz centrados na frequência do harmônico identificado utilizando o algoritmo apresentado no anexo 1.6. Destas respostas filtradas foram extraídas as funções de correlação utilizadas nesta seção.

Para o primeiro caso, com o harmônico de 14 Hz, foram obtidos bons resultados, como ilustra a Fig. 5.8, onde são vistos os resultados tomando o ponto 1 como referência.

A Tabela 5.9 apresenta os resultados estimando 12 gdl e comprova os excelentes resultados obtidos. Os valores de MAC continuaram a apresentar resultados próximos a 1,0 na diagonal principal, como é mostrado na Fig. 5.9.

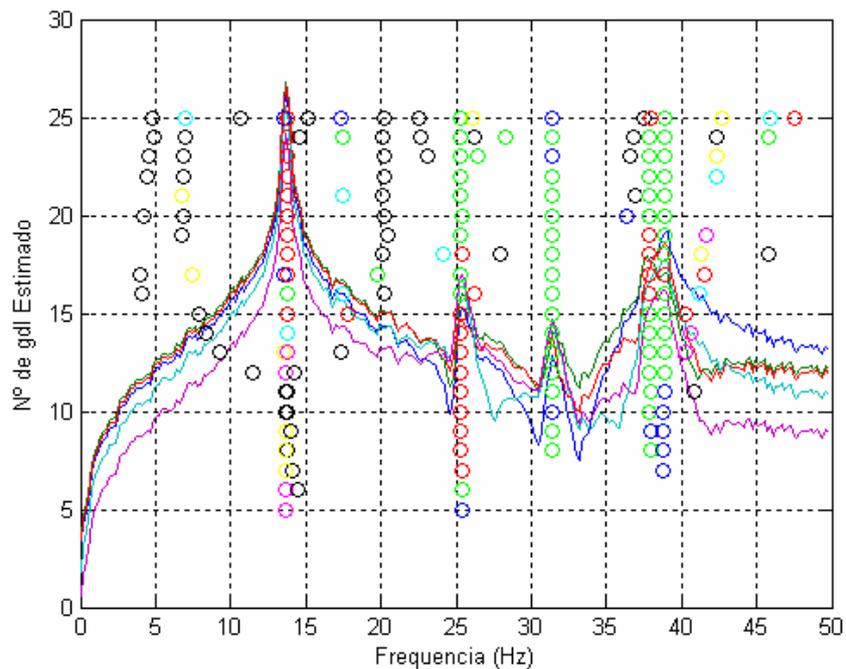


Figura 5.8 - Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 14 Hz filtrado e respostas obtidas para a técnica NExT.

Tabela 5.9: Resultados obtidos para 12 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 14 Hz filtrado.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	1	13,675	/	0,18	0,34242	/	3,11
2° Modo	0,99994	25,332	/	0,01	0,79475	/	5,31
3° Modo	0,9987	31,415	/	0,15	0,9777	/	5,65
4° Modo	0,9996	37,896	/	0,01	1	/	1,29
5° Modo	0,99985	38,827	/	0,04	1,0855	/	0,18

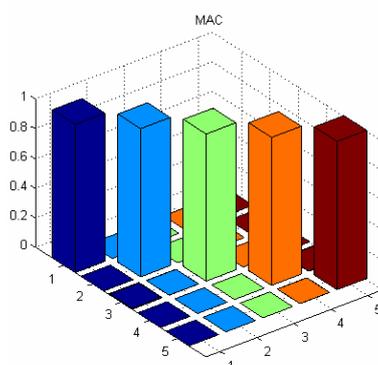


Figura 5.9 - Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pela técnica NExT extraíndo o harmônico (12 gdl).

Para o segundo caso, com o harmônico de 13,7 Hz, obtiveram-se resultados satisfatórios para o amortecimento do segundo modo quando se utilizou o ponto 1 como referência, como pode ser visto na Fig. 5.10. Quanto ao primeiro modo, com a aplicação do filtro rejeita-banda, surgiu um pico com ponta dupla apresentando dois resultados próximos em torno da banda rejeitada, ambos com valor de amortecimento elevado, comparando-os com o valor analítico obtido.

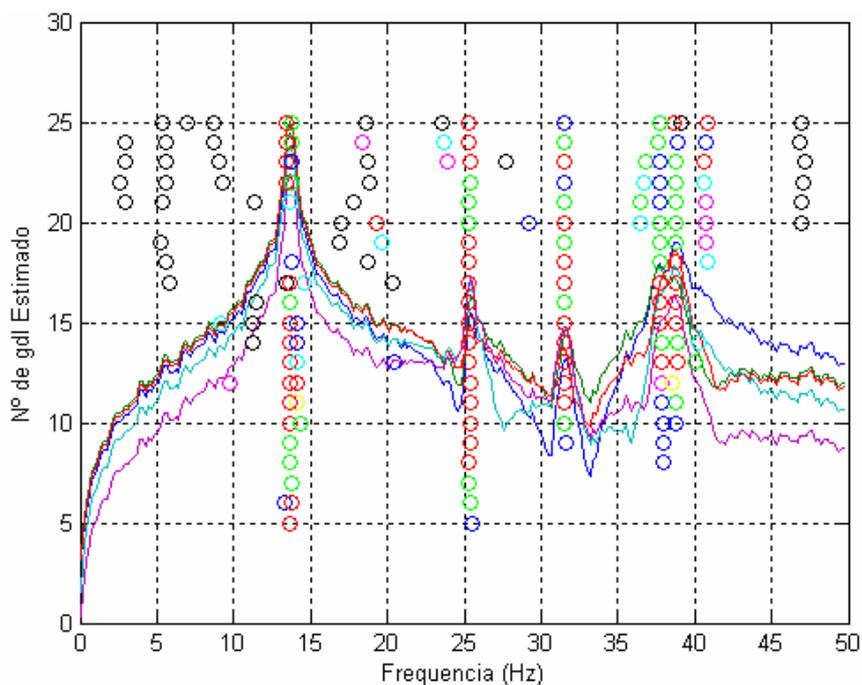


Figura 5.10 - Funções densidade espectrais fornecidas com harmônico de 13,7 Hz filtrado e respostas obtidas pela a técnica NEXt.

A Tab. 5.10 mostra os resultados obtidos ao estimar 10 gdl, tendo o ponto 1 como referência. Nesta tabela, nota-se que os dois possíveis resultados para o primeiro modo apresentam valores de amortecimento bem maior do que o de referência, além de que os demais resultados continuaram se apresentando coerente, com exceção do amortecimento do segundo modo que assume um valor um pouco mais elevado que o calculado analiticamente.

Dos resultados apresentados aqui, destaca-se este caso em que o MAC apresentou resultados baixos. O coeficiente correspondente ao quarto modo apresentou um valor inferior a 0,9, que indica alguma falta de precisão na determinação do quarto vetor modal para este caso. Na Fig. 5.11, pouco se percebe essa baixa estimativa.

Tabela 5.10: Resultados obtidos para 10 gdl usando a técnica NExT e um harmônico de 13,7 Hz filtrado.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	1	13,65	/	0,36	0,8434	/	153,96
	0,99999	14,312	/	4,47	1,0388	/	212,80
2° Modo	0,99938	25,354	/	0,07	0,83832	/	11,08
3° Modo	0,98654	31,491	/	0,09	0,96571	/	4,36
4° Modo	0,99818	37,953	/	0,14	1,1846	/	19,98
5° Modo	0,99955	38,727	/	0,22	1,2824	/	18,35

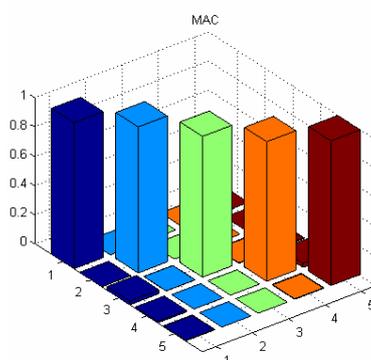


Figura 5.11 - Valores de MAC calculados entre os vetores obtidos analiticamente e pela técnica NExT extraindo o harmônico (10 gdl).

### 5.5.3– Aplicando o Método de Mohanty & Rixen

Desta vez, as funções de correlação utilizadas na seção 5.5.1 são analisadas através do algoritmo que utiliza o método de Mohanty & Rixen (utilizando os algoritmos apresentados nos anexos A.7 e A.8), ou seja, considerando o harmônico no polinômio de Prony.

Para o primeiro conjunto de funções que contém sinal harmônico de 14 Hz, obtiveram-se resultados globais satisfatórios, exceto a estimativa do amortecimento do primeiro modo, que para menos de 15 gdl, apresentou valor baixo de amortecimento e para mais de 15 gdl, valor alto de amortecimento. Já o amortecimento para o segundo modo, apresentou melhores resultados para estimativas abaixo de 18 gdl e os outros modos tiveram uma melhor média em torno do resultado analítico, como pode ser visto na Fig. 5.12.

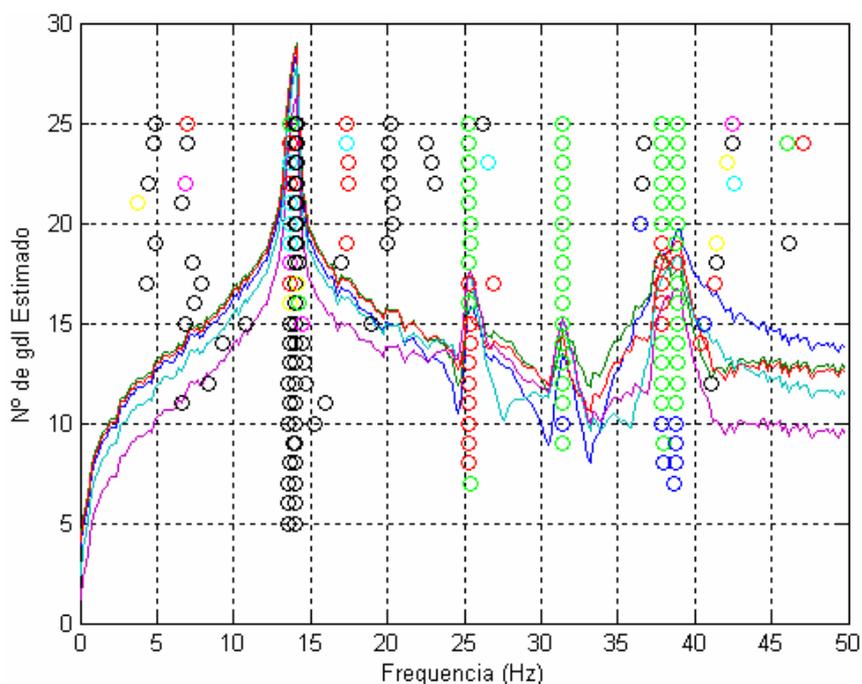


Figura 5.12 - Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 14 Hz e respostas obtidas para o método de Mohanty & Rixen.

A Tab. 5.11 apresenta os resultados para uma estimativa de 18 gdl. Esta estimativa é a que apresentou resultados satisfatórios para o primeiro modo, em compensação, apresentou-se um erro de estimativa na determinação do amortecimento dos modos em geral. Destaca-se que o harmônico aparece com os parâmetros coerentes, diferente do que ocorreu na seção anterior.

Tabela 5.11: Resultados obtidos considerando 18 gdl para o método de Mohanty & Rixen com um harmônico de 14 Hz.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1º Modo	1	13,63	/	0,50	0,37801	/	13,82
Harmônico	1	14	/	0,00	0,000000	/	-
2º Modo	0,99942	25,339	/	0,01	0,93201	/	23,49
3º Modo	0,99897	31,393	/	0,22	1,0469	/	13,13
4º Modo	0,99921	37,842	/	0,15	0,77374	/	21,63
5º Modo	0,99978	38,828	/	0,04	0,88767	/	18,08

A Fig. 5.13 demonstra que os valores encontrados para o MAC apresentaram resultados muito bons.

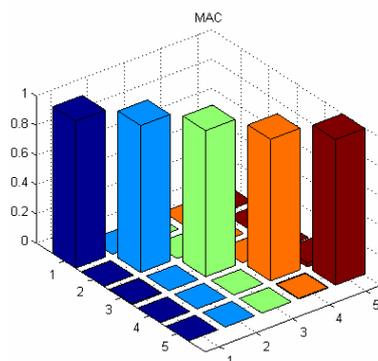


Figura 5.13 - Valores de MAC calculados para 18 gdl para o método de Mohanty & Rixen.

Para o conjunto de Funções que contem o harmônico de 13,7 Hz inserido no sinal de excitação, apresentou-se novamente uma grande variação de resultados na determinação do amortecimento do primeiro modo, com as estimativas entre 11 e 21 gdl apresentando valores muito baixos. Quanto aos outros modos, o segundo variou menos em função do número de gdl, enquanto os três últimos apresentaram quase sempre variações com erro entre 15 e 30 %, como se pode visualizar na Fig. 5.14.

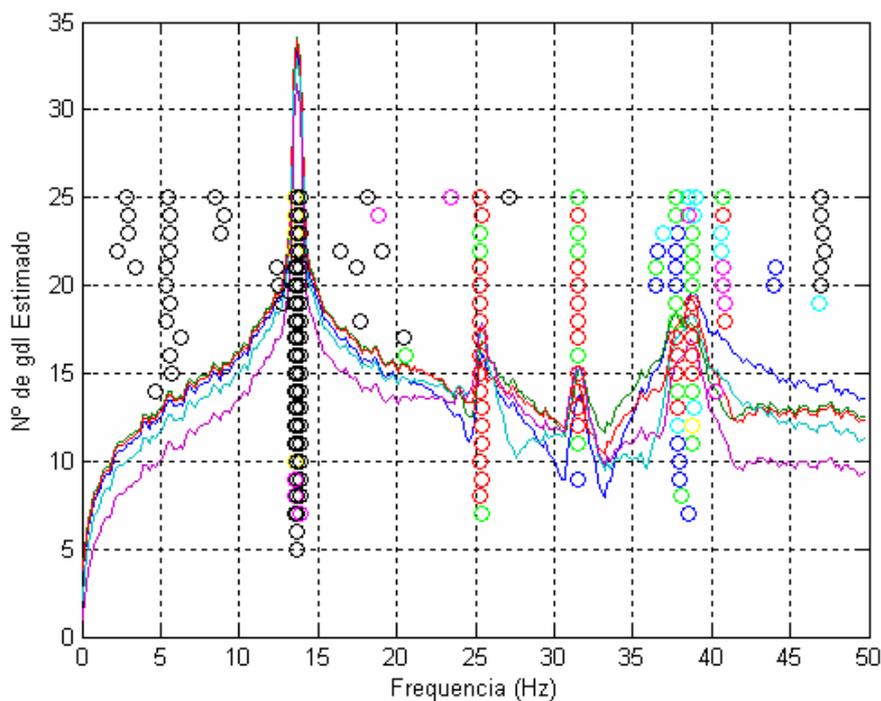


Figura 5.14 - Funções densidade espectrais fornecidas com o sinal harmônico de 13,7 Hz e respostas obtidas para o método de Mohanty & Rixen.

Utilizando a estimativa para 29 gdl, pode se observar resultados satisfatórios, com um erro maior apresentado na estimativa do amortecimento do quarto modo. Em geral, os amortecimentos tenderam a ser levemente sub-estimado, com exceção do quarto modo que foi sobre-estimado, como pode ser visto na Tab. 5.12. Os valores de MAC obtidos se mantiveram próximos de 1, como é ilustrado na Fig. 5.15.

Tabela 5.12: Resultados obtidos considerando 29 gdl para o método de Mohanty & Rixen com um harmônico de 13,7 Hz.

	MCF	Freq. (Hz) / Erro (%)	Amort. (%) / Erro (%)
1º Modo	1	13,499 / 1,46	0,33256 / 0,14
Harmônico	1	13,7 / 0,00	0,000000 / -
2º Modo	1	25,342 / 0,02	0,8759 / 16,06
3º Modo	0.99959	31,575 / 0,36	0,81943 / 11,45
4º Modo	0.9998	37,725 / 0,46	1,2421 / 25,81
5º Modo	0.99996	38,736 / 0,20	1,0152 / 6,31

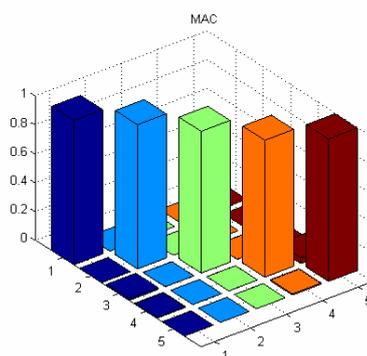


Figura 5.15 - Valores de MAC calculados para 29 gdl para o método de Mohanty & Rixen.

## CAPITULO VI

### ANÁLISE DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS

#### 6.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, são apresentados e comentados os resultados obtidos para os algoritmos LSCE e de Mohanty & Rixen aplicados a um sistema experimental montado em uma bancada com o intuito de simular uma situação que possibilitasse a avaliação pelo método de análise modal experimental tradicional e análise modal operacional.

Para a análise modal operacional, é aplicado a técnica NExT nas situações de excitação com ruído branco e excitação com ruído branco mais a presença de componente harmônico. O algoritmo de Mohanty & Rixen é aplicado apenas nesta segunda situação de excitação.

#### 6.2 – SISTEMA EXPERIMENTAL ADOTADO

Para efetuar a validação experimental das rotinas desenvolvidas, montou-se um sistema que permitisse a aplicação de todos os métodos estudados neste trabalho. O sistema consiste em uma viga bi-apoiada com um motor elétrico desbalanceado, posicionado na mediana longitudinal desta, possibilitando efetuar uma análise modal experimental utilizando um martelo de impacto. Para efetuar a análise modal operacional, a entrada aleatória foi fornecida através de um excitador eletrodinâmico. A componente harmônica era adicionada ao ligar o motor elétrico, regulando-se a frequência deste harmônico através do controlador de rotação.

A estrutura foi montada nas instalações do Laboratório de Vibrações vinculado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pará em uma bancada universal da TECQUIPAMENT, modelo TM-16. A seguir, a lista dos equipamentos utilizados:

- Viga de aço de 0,0254 x 0,0127 x 0,8128m;
- Analisador de frequência Hewlett–Packard modelo 35665A (Figura 6.1);

- Motor Elétrico Electro Craft Corporation modelo E 586 SA (Figura 6.2);
- Controlador de rotação TECEQUIPMENT modelo E11 Precision Motor Speed Unit;
- Excitador de Vibração Brüel & Kjær Type 4809 (cedido pela Eletronorte) (Figura 6.3);
- Amplificador de Potência Brüel & Kjær Type 2706 (cedido pela Eletronorte) (Figura 6.4);
- Kit para ensaio modal (2 acelerômetros ICP, Martelo de Impacto e cabos);
- Stinger (Figura 6.5).



Figura 6.1 - Analisador de Sinais.



Figura 6.2 - Motor elétrico utilizado.



Figura 6.3 - Excitador de vibrações.



Figura 6.4 – Amplificador de Potência.

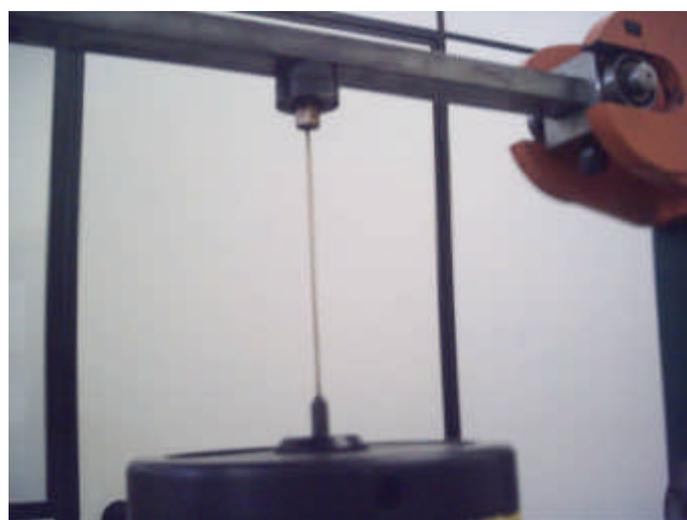


Figura 6.5 – “Stinger” e conexão deste com o excitador de vibrações e a viga.

A figura 6.6 ilustra esquematicamente a forma que o sistema foi montado para realizar a análise modal operacional utilizando a técnica NExT, onde foram medidas as funções de correlação entre os pontos medidos entre o canal 1, que ficou fixo no ponto 5 e o canal 2 que varreu todos os pontos.

Para a validação do algoritmo LSCE utilizando a técnica NExT, acionou-se o excitador de vibrações com um sinal de ruído branco fornecido pelo próprio analisador de frequências.

Em outro ensaio, acionou-se também o motor elétrico, em um primeiro momento a uma frequência não muito próxima ao primeiro modo natural do sistema (30 Hz) e em um segundo momento a uma frequência mais próxima ao primeiro modo natural do sistema (20 Hz), possibilitando verificar a validade da técnica NExT nestas situações e validar experimentalmente o algoritmo de Mohanty & Rixen.

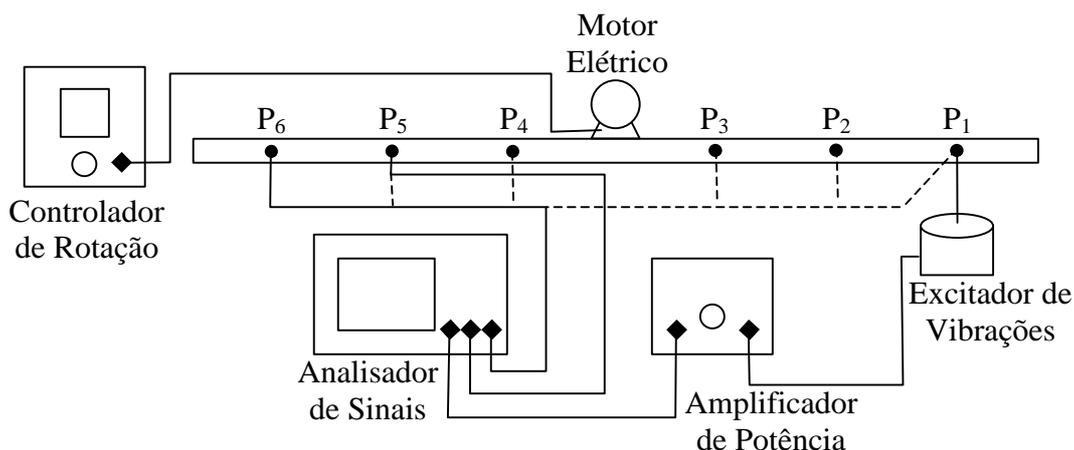


Figura 6.6 – Esquema da montagem do sistema para o ensaio de análise modal operacional.

Para o ensaio de análise modal experimental, usou-se basicamente a mesma configuração experimental. Considerando o ensaio usando martelo de impacto, este foi ligado ao canal 1 do analisador e o acelerômetro (fixado no ponto 5) foi conectado ao canal 2. O motor elétrico, apesar de desligado, foi parte integrante do sistema.



Figura 6.7 - Martelo de impacto.

Optou-se por utilizar a faixa de frequência de 0 a 400 Hz com o intuito de captar pelo menos 4 modos naturais do sistema, com uma resolução de 800 pontos.

### 6.3– RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL TRADICIONAL

Para analisar os resultados obtidos pelo ensaio de análise modal experimental tradicional, utilizou-se os resultados obtidos pelo algoritmo LSCE que foi validado no Capítulo V, seção 5.3.

O conjunto de FRFs utilizadas é mostrado juntamente com o diagrama de estabilização dos resultados para diferentes números de modos calculados. De forma a obter um diagrama de estabilização apenas para os valores mais coerentes, foram excluídos os resultados que apresentam: frequências fora da faixa analisada (0 a 400 Hz), valores de MCF abaixo de 0,99 ou valores de amortecimento acima de 6%.

Estes gráficos sobrepostos permitem uma melhor indicação do número de modos a serem utilizados para uma melhor estimativa das frequências, amortecimentos e formas modais. Como no capítulo anterior, a cor das respostas plotadas indica uma faixa de amortecimento a qual essa resposta se encontra, conforme é apresentado na Tab. 6.1.

Tabela 6.1: Faixa de amortecimento representado pelas cores.

Cor	Preto	Amarelo	Magneta	Ciano	Vermelho	Verde	Azul
Amort. (%)	0 a 0,1	0,1 a 0,5	0,5 a 1	1 a 1,5	1,5 a 2	2 a 2,5	2,5 a 3

A Fig. 6.8 apresenta os resultados filtrados com estimativa de 5 a 25 gdl.

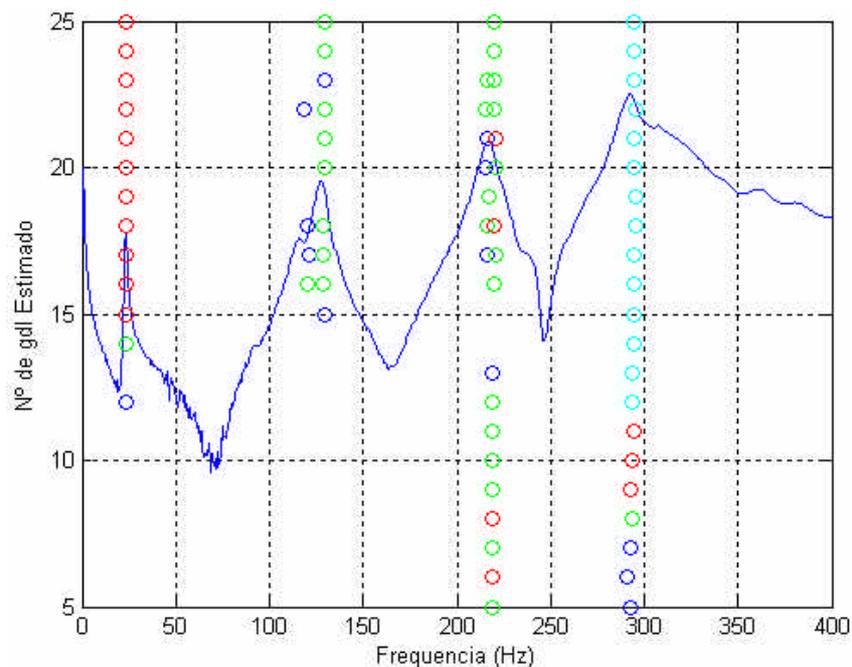


Figura 6.8 - FRF  $H_{65}(\omega)$  fornecida e respostas de frequência e amortecimento obtidas pelo método LSCE.

Analisando a Fig. 6.8, optou-se por refinar os resultados para 17 gdl. Os parâmetros modais encontrados para esta estimativa de gdl (apresentados na Tab. 6.2) são utilizados como referência para comparação com os resultados obtidos na análise modal operacional.

Tabela 6.2a: Parâmetros modais obtidos pelo algoritmo LSCE na análise modal experimental.

1º Modo de Vibração	2º Modo de Vibração
Frequência = 23,358 Hz	Frequência = 121,09 Hz
$\xi = 1,8519 \%$	$\xi = 2,519 \%$
Vetor Modal = $\begin{bmatrix} -8,1967 - 566,49i \\ -27,345 - 1032,6i \\ -49,478 - 1375,4i \\ -75,635 - 1356,7i \\ -12,208 - 1034,4i \\ -6,0236 - 540,34i \end{bmatrix}$	Vetor Modal = $\begin{bmatrix} -731,23 + 5181,8i \\ 453,69 + 7893,6i \\ -102,32 + 7064,5i \\ 1443,2 - 6358,7i \\ 980,98 - 7277,2i \\ 171,14 - 3293i \end{bmatrix}$

Tabela 6.2b: Parâmetros modais obtidos pelo algoritmo LSCE na análise modal experimental.

3° Modo de Vibração	4° Modo de Vibração
Frequência = 216,33 Hz	Frequência = 294,41 Hz
$\xi = 2,604 \%$	$\xi = 1,2677 \%$
Vetor Modal = $\begin{Bmatrix} 6210,4 + 6821,6i \\ 6804,9 + 10356i \\ -2256,4 + 2155,3i \\ -257,18 + 165,43i \\ -6213,7 - 6359,4i \\ -13748 - 19666i \end{Bmatrix}$	Vetor Modal = $\begin{Bmatrix} 9329,9 - 24663i \\ 12837 - 27337i \\ 2646,8 - 19221i \\ 6189,9 - 23981i \\ 35202 - 37908i \\ 30546 - 20417i \end{Bmatrix}$

#### 6.4- RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL SOMENTE COM RUÍDO BRANCO

A seguir, é apresentado os resultados para um conjunto de Funções densidade espectrais utilizadas para obter as funções de correlação requeridas pela técnica NExT provenientes da aplicação de ruído branco pelo excitador de vibrações.

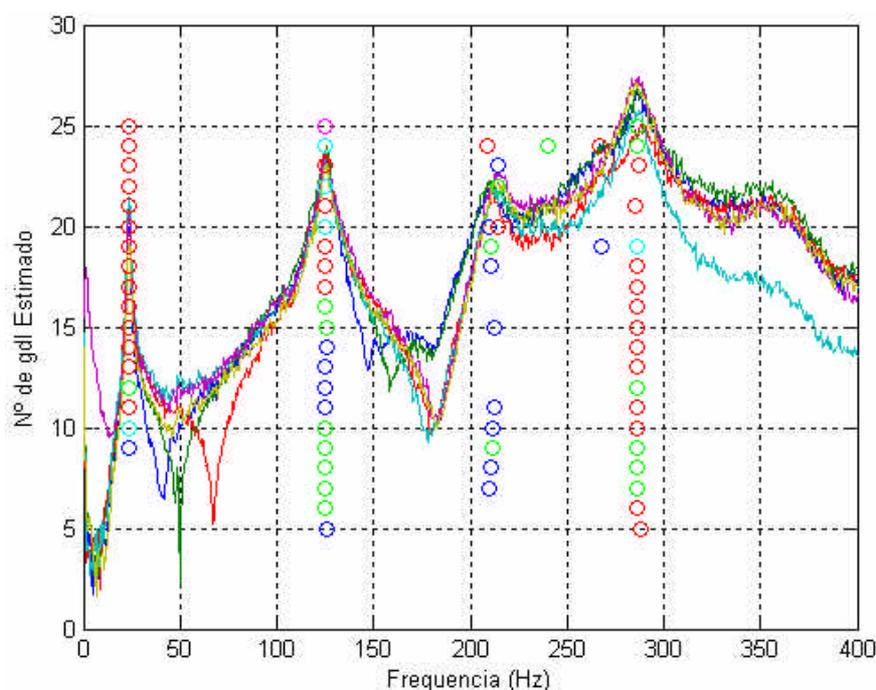


Figura 6.9 - Respostas obtidas para funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado somente com ruído branco.

A Fig. 6.9 apresenta o conjunto de Funções densidades espectrais fornecidas ao algoritmo LSCE e os resultados obtidos para esse algoritmo, da mesma forma que foi realizado no tópico 6.3.2.

Analisando a Fig. 6.9, verifica-se que, comparado ao obtido pelo método LSCE de FRFs provenientes da análise modal experimental tradicional (Fig. 6.10), houve uma tendência de sobre-estimar o terceiro e quarto modos. Isso se deve, provavelmente, pela presença do excitador de vibrações próximo a pontos de máximos deslocamentos destes modos, aumentando estes amortecimentos. A Tab 6.3 compara os resultados obtidos para a estimativa de 15 gdl com os parâmetros encontrados na seção 6.3 e confirma o que foi visualizado na Fig. 6.9.

Tabela 6.3: Resultados para a técnica NExT estimando 15 gdl.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	0,99991	23,516	/	0,68	1,9093	/	3,10
2° Modo	0,99947	125,51	/	3,65	2,4337	/	3,39
3° Modo	0,99799	212,81	/	1,63	2,987	/	14,71
4° Modo	0,99978	286,18	/	2,80	1,9601	/	54,62

Calculando-se o MAC entre os vetores modais dos dois casos (os obtidos aqui e os obtidos na seção 6.3), confirmaram-se erro também na obtenção dos vetores modais do terceiro e quarto modos, provavelmente pelo mesmo motivo do erro de amortecimento. A Fig. 6.10 mostra o MAC apenas entre os dois primeiros modos dos vetores modais encontrados com os vetores da seção 6.3.

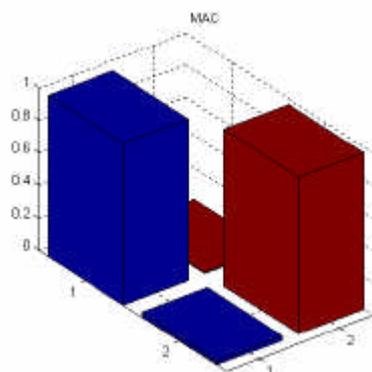


Figura 6.10 – Valores de MAC obtidos entre os vetores da referência e os vetores a técnica NExT considerando 15 gdl.

## 6.5- RESULTADOS OBTIDOS PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL COM RUÍDO BRANCO E COMPONENTE HARMÔNICO

Aqui, são apresentados resultados para dois conjuntos de funções densidade espectral obtidas: uma resultante da aplicação de ruído branco pelo excitador de vibrações e um harmônico de 30 Hz proveniente do motor elétrico, e outra proveniente da aplicação do ruído branco e de um harmônico de 20 Hz.

Esses dois conjuntos de funções é analisado primeiramente pelo algoritmo LSCE, a fim de verificar a influencia dos harmônicos na técnica NExT e posteriormente pelo algoritmo de Mohnaty & Rixen, afim de validá-lo.

### 6.5.1- Resultados Obtidos para a Técnica NExT

A Fig. 6.11 mostra as funções densidade espectral obtidas a partir da resposta ao sistema do ruído branco junto com o harmônico de 30 Hz ao algoritmo LSCE e os resultados obtidos utilizando os mesmos critérios de exclusão de resultados incoerentes adotados na seção 6.4.

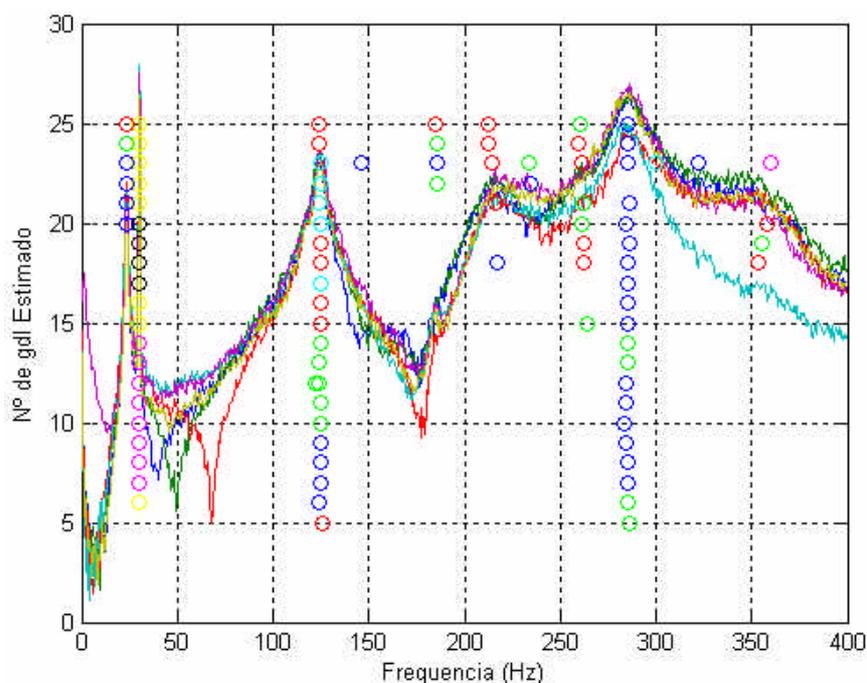


Figura 6.11 - Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 30 Hz.

Observa-se na Fig. 6.11 que, da mesma forma que ocorreu para o modelo teórico, o modo próximo ao harmônico apresentou um amortecimento acima do indicado pela análise modal experimental tradicional. Foi necessário diminuir o critério de exclusão pelo MCF de 0,99 para 0,95 para poder ser visualizados resultados para o terceiro modo.

Observa-se na Tab. 6.4 que os parâmetros de amortecimento encontrados foram bastante prejudicados, principalmente os dois últimos, os quais já tinham apresentado erros consideráveis para o caso anterior.

Tabela 6.4: Resultados da técnica NEXt para 24 gdl na presença de um harmônico de 30 Hz.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	0,99986	23,231	/	0,54	2,1301	/	15,02
Harmônico	1	29,989	/	0,04	0,118820	/	-
2° Modo	0,99934	124,39	/	2,73	1,7804	/	29,32
3° Modo	0,9654	212,34	/	1,84	1,717	/	34,06
4° Modo	0,99908	285,27	/	3,10	2,5528	/	101,37

A Fig. 6.12 mostra os resultados obtidos para as funções densidade espectral fornecidas pela resposta do sistema à excitação por ruído branco com um harmônico de 20 Hz.

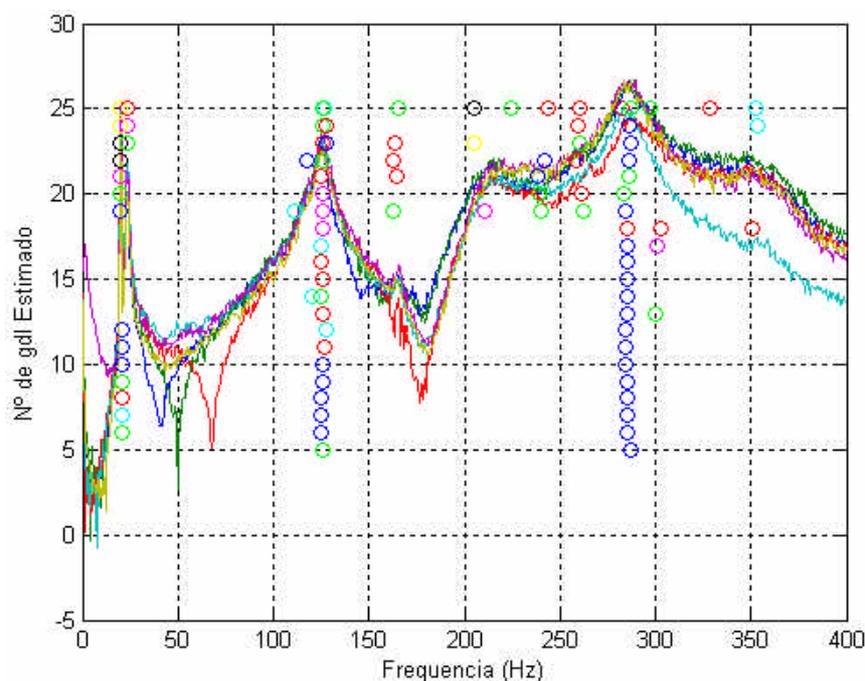


Figura 6.12 - Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 20 Hz.

Novamente foi necessário utilizar a partir de 0,95 para o MCF para poder visualizar todos os modos. A Tab. 6.5 detalha os resultados obtidos para uma estimativa de 25 gdl.

Tabela 6.5: Resultados para a técnica NExT para 25 gdl na presença de um harmônico de 20 Hz.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	0,99973	23,504	/	0,63	1,5147	/	18,21
Harmônico	0,99998	19,921	/	0,40	0,200260	/	-
2° Modo	0,99934	125,68	/	3,79	2,3151	/	8,09
3° Modo	0,98256	224,63	/	3,84	2,4141	/	7,29
4° Modo	0,99032	287,07	/	2,49	2,1003	/	65,68

Neste caso, também os amortecimentos obtidos ficaram com algumas margens de erro acima do tolerado, com elevação deste parâmetro para todos os modos.

### 6.5.2- Resultados Obtidos para o Método de Mohanty & Rixen

A Fig. 6.13 mostra as funções densidade espectral obtidas a partir da resposta ao sistema do ruído branco junto com o harmônico de 30 Hz ao algoritmo Mohanty & Rixen com resultados obtidos utilizando critérios de exclusão de resultados incoerentes adotados na seção 6.4.

Comparado ao caso que se aplica diretamente o algoritmo LSCE na técnica NExT, verifica-se que nesse caso, o harmônico atinge em quase todas estimativas apresentadas, valor de amortecimento menor que 0,1.os amortecimentos encontrados continuaram a ser sobre-estimados, inclusive o do primeiro modo sendo acima de 3 %, por isso, não aparece no gráfico.

A Tab 6.6 mostra os resultados detalhados para uma estimativa com 16 gdl, onde se confirma o erro grande devido da estimativa dos amortecimentos, inclusive para o primeiro e segundo modos.

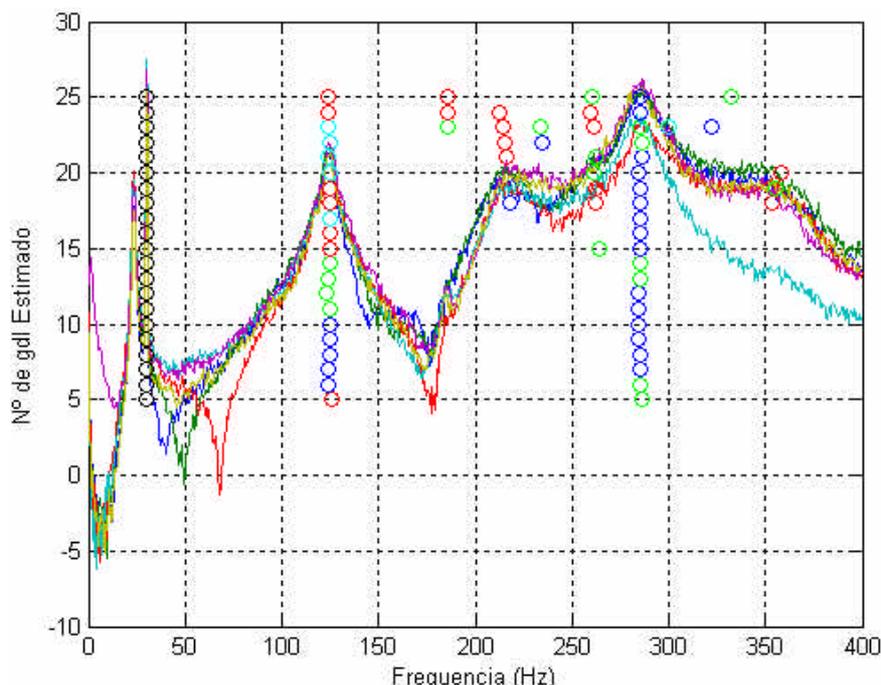


Figura 6.13 - Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 30 Hz utilizando o método de Mohanty & Rixen.

Tabela 6.6: Resultados para o método de Mohanty & Rixen para 16 gdl na presença de um harmônico de 30 Hz.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	0,97647	23,919	/	2,40	3,1325	/	69,15
Harmônico	0,99994	30	/	0,00	0,000000	/	-
2° Modo	0,99744	125,32	/	3,49	1,6162	/	35,84
3° Modo	0,99787	214,36	/	0,91	3,8602	/	48,24
4° Modo	0,99871	285,11	/	3,16	2,5793	/	103,46

Os valores de MAC obtidos também foram abaixo do aceitável.

A Fig. 6.14 mostra os resultados obtidos para o algoritmo de Mohanty & Rixen, tendo como entrada, um conjunto de funções densidade espectral provenientes da resposta ao sistema excitado por ruído branco e harmônico de 20 Hz.

Observa-se, como no caso anterior, que o harmônico tendeu a ficar com valor menor que 0,1% e o amortecimento do primeiro modo não ficou acima de 1 %, com exceção da estimativa para 15 gdl.

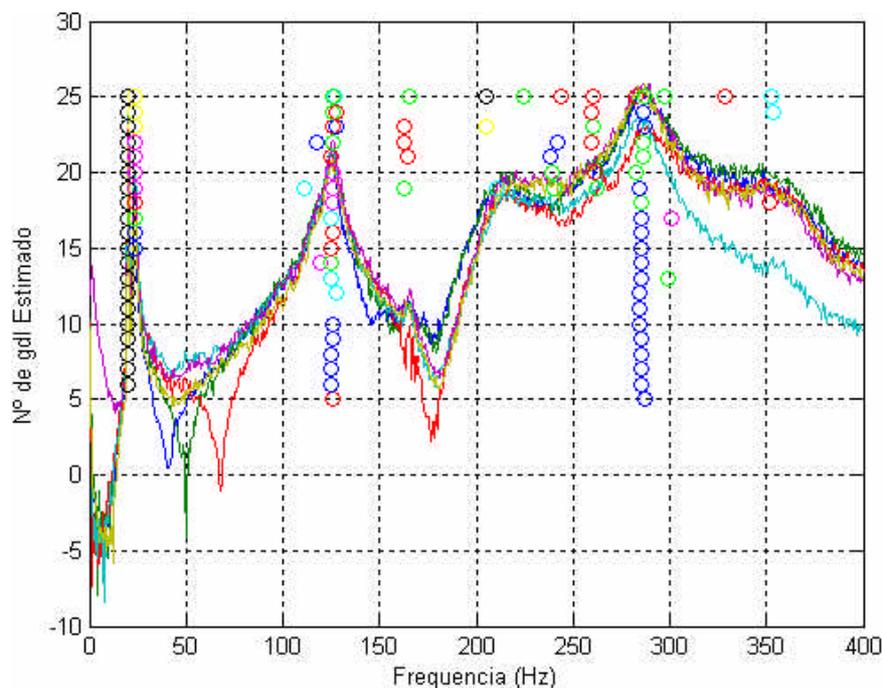


Figura 6.14 - Respostas obtidas para as funções densidade espectrais fornecidas pelo sistema excitado por ruído branco e harmônico de 20 Hz utilizando o método de Mohanty & Rixen.

A Tab. 6.7 detalha os resultados obtidos para 22 gdl, onde pode se perceber um comportamento semelhante ao apresentado no Capítulo V, seção 3.5.3, que com o harmônico mais próximo do modo, o método de Mohanty & Rixen melhorou a estimativa dos parâmetros de um modo geral, com uma tendência apenas de sub-estimar o amortecimento do modo mais próximo do harmônico.

Tabela 6.7: Resultados para o método de Mohanty & Rixen para 22 gdl na presença de um harmônico de 20 Hz.

	MCF	Freq. (Hz)	/	Erro (%)	Amort. (%)	/	Erro (%)
1° Modo	0,9997	23,356	/	0,01	0,39131	/	78,87
Harmônico	0,99997	20	/	0,00	0,000000	/	-
2° Modo	0,99917	125,7	/	3,81	2,3397	/	7,12
3° Modo	0,98237	224,72	/	3,88	2,3864	/	8,36
4° Modo	0,96305	282,08	/	4,19	1,558	/	22,90

Os valores estimados para o MAC entre os vetores dos dois primeiros modos calculados aqui com os vetores dos dois primeiros modos calculados na seção 6.3 ficaram dentro do aceitável (Figura 6.15).

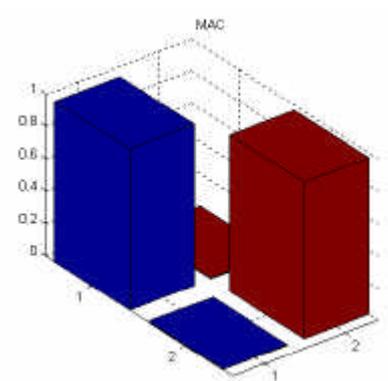


Figura 6.15 - Valores de MAC obtidos entre a os vetores da referência e os vetores do método de Mohanty & Rixen considerando 22 gdl na presença do harmônico de 20 Hz.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

#### 7.1- CONCLUSÕES

O algoritmo LSCE extraiu com eficiência os parâmetros modais tanto de dados oriundos da análise modal experimental (AME) quanto de dados oriundos da análise modal operacional (AMO) utilizando a técnica NExT para o modelo teórico e para o sistema experimental, quando existia apenas ruído branco na entrada. Verificou-se também que passou a ocorrer um erro de estimativa de parâmetros para esse algoritmo quando os dados fornecidos eram provenientes de uma análise modal operacional pela técnica NExT, contendo sinal harmônico na excitação operacional do sistema, aumentando o erro cada vez que este modo operacional (componente harmônico) se aproximava de um modo natural do sistema avaliado.

Comprovou-se no modelo teórico que a técnica de identificação da natureza dos modos apresentado por Brincker et al. (2000a), pode ser útil na análise modal operacional que contém componente harmônico, principalmente quando este não se encontra tão próximo de um modo natural do sistema, bastando extrair o modo operacional através de um filtro no domínio do tempo. Caso o modo operacional se encontre próximo de mais do modo natural, a filtragem deste modo leva a perdas de informações e diminuição da precisão das estimativas de parâmetros modais.

O algoritmo baseado no método apresentado por Mohanty & Rixen (2000a) apresentou bons resultados para o modelo teórico e resultados razoáveis para o modelo experimental quando o harmônico se encontrava mais próximo de um modo natural destes modelos, melhorando as estimativas alcançadas pelo algoritmo LSCE utilizando a técnica NExT nestes casos. Em contrapartida, ao utilizar este algoritmo nos dados oriundos da análise modal operacional contendo um harmônico não tão próximo de um modo natural, não se apresentou melhora significativa (quando apresentou) nas estimativas dos parâmetros comparado aos resultados obtidos pelo algoritmo LSCE pela técnica NExT, o que destaca uma especial

atenção quando empregá-lo. Observou-se também uma tendência de sub-estimar os amortecimentos dos modos mais próximos dos harmônicos considerados no método.

A Tab. 7.1 faz uma síntese das conclusões avaliadas através das simulações desenvolvidas.

Tabela 7.1: Síntese dos resultados obtidos.

Modelo utilizado	Tipo de Ensaio	LSCE	LSCE após filtro	Mohanty & Rixen
Modelo teórico	AME	Excelente	-	-
	AMO sem harmônico	Excelente	-	-
	AMO com harmônico acoplado	Satisfatório	Bom	Satisfatório
	AMO com harmônico muito acoplado	Ruim	Ruim	Bom
Sistema experimental adotado	AME	Excelente	-	-
	AMO sem harmônico	Excelente	-	-
	AMO com harmônico acoplado	Satisfatório	-	Satisfatório
	AMO com harmônico muito acoplado	Satisfatório	-	Bom

## 7.2- SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Com os algoritmos elaborados, é possível desenvolver mais simulações que permitam definir melhor até quando é válido o emprego de cada técnica aqui apresentada, como por exemplo, identificar com mais precisão até que proximidade do modo operacional para o modo natural é viável utilizar a filtragem de modos operacionais sem prejudicar a estimativa dos modos naturais, variando inclusive a largura da banda do filtro rejeita-banda a ser utilizado.

É interessante também um aprofundamento nas avaliações dos resultados obtidos pelo algoritmo de Mohanty & Rixen, visto os resultados obtidos para harmônicos não tão próximos de um modo natural e a sub-estimação do amortecimento do modo natural próximo ao harmônico. Isso pode ser feito através da aplicação deste algoritmo em mais exemplos tanto teóricos como experimentais.

O algoritmo de Mohanty & Rixen implementado pode ser melhorado para suportar mais de um componente harmônico no sinal de excitação do sistema. O aperfeiçoamento deste algoritmo pode ser realizado junto com sua validação teórica e experimental.

Será interessante desenvolver, também os métodos de Ibrahim e ERA modificados propostos por Mohanty & Rixen (2004b e 2003, respectivamente). Com esses algoritmos, será possível verificar o desempenho desses métodos e compará-los ao algoritmo baseado no método LSCE modificado.

Quanto à apresentação dos algoritmos, poderá haver um melhoramento da interface, facilitando a entrada de dados e a visualização das respostas. O próprio software Matlab® disponibiliza ferramentas que permitem este melhoramento.

Com as validações efetuadas neste trabalho, os algoritmos já podem ser utilizados em aplicações práticas que necessitem análises como as estudadas aqui, fornecendo mais ferramentas para a área de análise modal do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pará utilizar em suas pesquisas e extensões.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEMANG, R. J., Brown, D. L., A correlation coefficient for modal vector analysis. *Proceedings of the 1st IMAC*, v.2, pp. 110-116, 1982.
- APPLICATION NOTE 243-3, *The Fundamentals of Modal Testing*, Hewlett Packard, 1986.
- BENDAT, J. S. & PIERSOL, A. G., *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. John Wiley & Sons, 1980.
- BENDAT, J. S. & PIERSOL, A.G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons Inc., 1986.
- BRINCKER, Rune, ANDERSEN, Palle, MOLLER, Nis, An Indicator for Separation of Structural and Harmonic Modes in Output-Only Modal Testing, *International Modal Analysis Conference (IMAC XVIII)* pp. 1649-1654, 2000.
- BRINCKER, Rune, MOLLER, Nis, ANDERSEN, Palle, Output Only Modal Testing of a Car Body Subject to Engine Extration, *International Modal Analysis Conference (IMAC XVIII)*, 2000.
- BRINCKER, Rune, ZHANG, Lingmi, ANDERSEN, Palle, Modal Identification from Ambient Response using Frequency Domain Decomposition, *International Modal Analysis Conference (IMAC XVIII)* pp. 625-630, 2000.
- BROCH, J. T., *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, Bruel & Kjaer Publication, 1980.
- CRUZ, Sérgio L. M, MESQUITA, Alexandre L. A., Influência e Identificação de Componentes Harmônicos nos Sinais de Resposta usados na Análise Modal

Operacional, *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2005*, Guarapari, ES, 2005.

DOVEL, G., *Modal Analysis: A Dynamic Tool for Design and Troubleshooting*. Mechanical Engineering, v 111, Nº 3, pp 82-86, Mar 1989.

EWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*. John Wiley & Sons Inc., 1984.

HALVORSEN, W. G. & BROWN, L. D., Impulse Technique for Structural Frequency Response Testing, *Sound and Vibration*, November, pp 8-21, 1977.

HERMANS, L., VAN DER AUWERAER, H., Modal Testing and Analysis of Structures Under Operational Conditions: Industrial Applications, *Mechanical Systems and Signal Processing* 13(2) 193-206, 1999.

HURTY, W. C. & RUBINSNTEIN, M. F., *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

IBRAHIM, S. R., Correlation of Analysis and Test in Modelling of Structures: Assesment and Review, *Journal of the Society of Environmental Engineers*, March, pp 39-44, 1988.

IBRAHIM, S. R., Modal Confidence Factor in Vibration Testing, *The Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 48, Nº 1, pp. 65-75, 1978.

IGLESIAS, Angel Moises, *Investigating Various Modal Analysis Extraction Techniques to Estimate Damping Ratio*. Blacksburg, Virginia, 2000.

INMAN, Daniel J., *Engineering Vibration*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.

ISHIHARA, H. H., DIAS Jr., M., *Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para Análise Dinâmica Experimental de Máquinas e Estruturas*. FADESP-UNICAMP, 1999.

- JAMES III, George H., CARNE, Thomas G., LAUFFER, James P., The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction from Operating Structures, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, V. 10, N° 4, pp. 260-277, 1995.
- MAIA, N. M. M., SILVA, J. M. M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Reserch Studies Press, Somerset, England, 1997.
- MCCONNEL, K. G. e SANG-BO, H., Effect of Mass on Force-Transducer Sensitivity, *Experimental Techniques*, July, pp 19-22, 1986.
- MCCONNEL, Kenneth G., *Vibration Testing, Theory and Praticce*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1995.
- MEIROVITCH, L., *Analytical Methods in Vibrations*. Collier-Macmillan Limited, 1967.
- MOHANTY, P., RIXEN, D. J., Modifying the ERA Identification for Operational Modal Analysis in the Presence of Harmonic Perturbations, *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, Seattle, USA, Jul 16-18, 2003.
- MOHANTY, P., RIXEN, D. J., Operational Modal Analysis in the Presence of Harmonic Excitation, *Journal of Sound and Vibration* 270 pp. 93-109, 2004.
- MOHANTY, P., RIXEN, D. J., A Modified Ibrahim Time Domain Algorithm for Operational Modal Analysis including Harmonic Excitation, *Journal of Sound and Vibration* 275 pp. 375-390, 2004.
- MOLLER, Nis, BRINCKER, Rune, ANDERSEN, Palle, Modal Extraction on a Diesel Engine Operation, *International Modal Analysis Conference (IMAC XVIII)*, 2000.
- MOLLER, Nis, BRINCKER, Rune, HERLUFSEN, H., ANDERSEN, Palle, Modal Testing of Mechanical Structures Subject to Operational Excitation Forces, *Conference on System Identification and Structural Health Monitoring*, 2000.

- MOTTERSHEAD, J. E. & FRISWELL, M. J, Model Updating in Structural Dynamics: A Survey, *Journal of Sound and Vibration*, v 167, n 2, pp 347-375, 1993.
- NEWLAND, D. E., *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*. Longman Scientific & Technical - John Wiley & Sons, 1984.
- PARLOO, E., VERBOVEN, P., GUILLAUME, P., VAN OVERMEIRE, M., Force Identification by Means of in-Operation Modal Models, *Journal of Sound and Vibration* 262 161-173, 2003.
- PATRICK, G. B., Practicalities of Acquiring Valid Data During Modal Tests, *Sound and Vibration*, October, pp 22-24, 1985.
- RAMSEY, K. A., Effective Measurements for Structural Dynamics Testings - Part I, *Sound and Vibration*, November, pp 24-35, 1975.
- RAMSEY, K. A., Effective Measurements for Structural Dynamics Testings - Part II, *Sound and Vibration*, v 10, n 4, pp 18-31, 1976.
- RAO, J. S. & GUPTA, K, *Introductory Course on Theory and Practice of Mechanical Vibration*. John Wiley & Sons Inc., 1984.
- SCHMITDBERG, R. & PAL, T., Solving Vibration Problems Using Modal Analysis, *Sound and Vibration*, v 20, n 3, pp 32-42, Mar 1986.
- SCHWARZ, B., RICHARDSON, M., Modal Parameter Estimation from Operating Data, *International Modal Analysis Conference (IMAC XXII)* (Vibrant Tech. Paper N° 33), 2001.
- SHEN, F., ZHENG, M., FENG SHI, D., XU, F., Using the Cross-Correlation Technique to Extractmodal Parameters on Response-Only Data, *Journal of Sound and Vibration*, 259(5) pp. 1163-1179, 2003.

STROUD, R. C., Excitation, Measurement and Analysis Methods for Modal Testing,  
*Sound and Vibration*, 21(8), pp 12-27, 1987.

VIBRATION EXCITER 4808 MANUAL, Bruel & Kjaer, 1977.

## ANEXOS

### A - ALGORITMOS ELABORADOS:

#### A.1- Algoritmo para obtenção dos parâmetros modais de forma analítica:

```

clear
clc
close all

% montando as matrizes do sistema
M=eye(5);
C=[ 3.8 -1.5 -1.2  0  0
    -1.5  2.6 -1.1  0  0
    -1.2 -1.1  3.51 -1.21  0
     0  0 -1.21  3.61 -0.8
     0  0  0 -0.8  3.1];

K=[ 48000 -16000 -12000  0  0
    -16000  32000 -16000  0  0
    -12000 -16000  40000 -12000  0
     0  0 -12000  36000 -8000
     0  0  0 -8000  32000];

d=length(M);          % dimensao maior
Z=zeros(d,d);        % matriz de zeros
I=eye(d);            % matriz identidade dimensao d
MiK=M\K;             % matriz de rigidez dinamica
MiC=M\C;             % matriz de amortecimento dinamico
A= [ Z  I             % matriz de estado
     -MiK -MiC];

[X,L]=eig(A);        % resolucao de auto-vetor e auto-valor
Ar=X'*A*X;
MODX=abs(X);         % modulo do auto-vetor
FASEXr=angle(X);     % fase do auto-vetor em radiano
FASEXg=FASEXr*180/pi; % fase do auto-vetor em graus

Wrad=abs(L);         % frequencia natural em rad/s
Whz=abs(L)/(2*pi);  % frequencia natural em Hz
Qsipc=100*real(L)./abs(L); % fator de amortecimento em porcentagem

w_min=0;            % frequencia min
w_max=50;           % frequencia max
winc=0.0625;       % incremento de frequencia
w=w_min:winc:w_max; % vetor de frequencia
L=L/(2*pi);        % transformando auto-valor p/ Hz
np=1+w_max/winc;   % numero de pontos do vetor

% montando a matriz de FRFs

```

```

p=1;
H=zeros(d,np);
for q=1:d;
    for r=1:2*d
        H(q,:)=((X(p,r)*X(q,r))./(Ar(r,r)*(j*w-L(r,r))))+H(q,:);
    end
end

% plotando FRFs
figure(1)
subplot(2,1,1)
hold on
plot(w,log10(abs(H(:,:)))));
legend('FRF1','FRF2','FRF3','FRF4','FRF5');
grid on
subplot(2,1,2)
hold on
plot(w,angle(H(:,:)));
grid on

t_min=0;           % tempo min
t_max=(1/winc);    % tempo max
tinc=1/w_max;      % incremento do tempo
t=t_min:tinc:t_max; % vetor de tempo

% montando matriz de IRFs
p=1;
h=zeros(d,np);
for q=1:d;
    for r=1:2*d
h(q,:)=((X(p,r)*X(q,r)).*exp(L(r,r)*t))+h(q,:);
    end
end

% plotando IRFs
figure(2)
plot(t,h(:,:));
grid on

save md5 H w      % salvando matrizes H, w, h, t em arquivo md5

A.2- Algoritmo para o método LSCE para vários gdl:

% Rotina p/ calculo de parametros modais por CE ou LSCE
% caso entre com dados de apenas uma FRF, sera calculado por CE

close all
clear

```

```

%carregando arquivo de dados: H-frfs, w-freuencia
load amemiN %arquivo com matrizes contendo as funções a serem analisadas
clc

%plotando as frfs completas

df=w(3)-w(2);

[M,N]=size(H);
nl=M;
nc=N;
for k=1:M
    if round(N/2)==N/2
        H(k,N+1) = real(H(k,N));
        H(k,N+2:2*N)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N);
    else
        H(k,N+1:2*N-1)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N-1);
    end
    end
    ht(k,:)=real(2*N*ifft(H(k,:)));
end

figure(1)
plot(w,C(:,1:N));
grid on
xlabel('Frequencia (Hz)');
ylabel('Coerencia');
legend('H16','H26','H36','H46','H56','H66','H76');
figure(2)
plot(w,8+(5*log10(abs(H(:,1:N)))));
grid on
xlabel('Frequencia (Hz)');
ylabel('N° de gdl Estimado');

dt=t(3)-t(2);
h=ht;

nm=5;
ni=[nm:5*nm];
W=zeros(10*nm,length(ni));
Q=zeros(10*nm,length(ni));
cont=0;
for N=nm:5*nm
    cont=cont+1;

    [nl,nc]=size(h);
    dt=t(3)-t(2);
    %Montando a matriz de hankel
    hgg=[];

```

```

hvv=[];
for k=1:nl
    hg=[];
    for m=1:2*N
        hg(m,:)=h(k,m:2*N+m-1);
    end
    hgg=[hgg
        hg];
    hv=-h(k,2*N+1:4*N)';
    hvv=[hvv
        hv];
end

%calculando beta
beta=pinv(hgg)*hvv;
beta(2*N+1)=1;
%achando as raizes do polinomio de prony
Vr=roots(flipud(beta));
%determinando Sr
Sr=log(Vr)./dt;

%obtendo wr e qsi
wr=abs(Sr);
qsi=100*real(Sr)./abs(Sr);

%calculando os residuos
V=[];
for m=1:2*N
    V(m,:)=(Vr(1:2*N)'.^(m-1));
end
A=[];
AA=[];
sh=3;
for k=1:nl
    hhv=h(k,1:2*N)';
    hhvv=h(k,1+sh:2*N+sh)';
    A(:,k)=pinv(V)*hhv;
    AA(:,k)=pinv(V)*hhvv;
    AA(:,k)=AA(:,k)./V(sh,:).';
end

% Fazendo o cálculo do MCF
for i=1:2*N,
    xx=A(i,:).';
    yy=AA(i,:).';
    MCF(i)=(abs(xx'*yy))^2/((xx'*xx)*(yy'*yy));
end
[l,c]=size(MCF);
if l < c
    MCF=MCF';

```

```

end
wr2=wr/(2*pi);
[no,p]=sort(MCF);
Result=[MCF wr2 -qsi p];
result2=Result(p,:);
W(1:2*N,cont)=wr2;
Q(1:2*N,cont)=qsi;
%figure(2)
for k=1:2:2*N
    if Result(k,1) > .985
        if Result(k,2) < w(length(w))
            if Result(k,3) < 6
                if Result(k,3) > 5
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'bo');
                elseif Result(k,3) > 4
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'go');
                elseif Result(k,3) > 3
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'ro');
                elseif Result(k,3) > 2
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'co');
                elseif Result(k,3) > 1
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'mo');
                elseif Result(k,3) > 0.1
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'yo');
                elseif Result(k,3) <= 0.1
                    hold on
                    plot(Result(k,2),ni(cont),'ko');
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end

end

```

### A.3- Algoritmo para o método LSCE para detalhar um gdl:

```

% Rotina p/ calculo de parametros modais por CE ou LSCE
% caso entre com dados de uma IRF, sera calculado por CE

close all
clear
%carregando arquivo de dados: H-frfs, w-freuencia

```

```

load amemiN
clc

df=w(3)-w(2);

[M,N]=size(H);
nl=M;
nc=N;
for k=1:M
    if round(N/2)==N/2
        H(k,N+1) = real(H(k,N));
        H(k,N+2:2*N)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N);
    else
        H(k,N+1:2*N-1)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N-1);
    end
    ht(k,:)=real(2*N*ifft(H(k,:)));
end

dt=t(3)-t(2);
h=ht;

nm=20; %aqui, é definido o número de gdl a ser detalhado
cont=0;
N=nm+cont;

[nl,nc]=size(h);
dt=t(3)-t(2);
%Montando a matriz de hankel
hgg=[];
hvv=[];
for k=1:nl
    hg=[];
    for m=1:2*N
        hg(m,:)=h(k,m:2*N+m-1);
    end
    hgg=[hgg
        hg];
    hv=-h(k,2*N+1:4*N)';
    hvv=[hvv
        hv];
end

%calculando beta
beta=pinv(hgg)*hvv;
beta(2*N+1)=1;
%achando as raizes do polinomio de prony
Vr=roots(flipud(beta));
%determinando Sr

```

```

Sr=log(Vr)./dt;

%obtendo wr e qsi
wr=abs(Sr);
qsi=100*real(Sr)./abs(Sr);

%calculando os residuos
V=[];
for m=1:2*N
    V(m,:)=(Vr(1:2*N)'.^(m-1));
end

sh=3;
for k=1:nl
    hhv=h(k,1:2*N)';
    hhvv=h(k,1+sh:2*N+sh)';
    A(:,k)=pinv(V)*hhv;
    AA(:,k)=pinv(V)*hhvv;
    AA(:,k)=AA(:,k)./V(sh,:).';
end

% Fazendo o cálculo do MCF
for i=1:2*N,
    xx=A(i,:).';
    yy=AA(i,:).';
    MCF(i)=(abs(xx'*yy))^2/((xx'*xx)*(yy'*yy));
end
MCF=MCF';
wr2=wr/(2*pi);
[no,p]=sort(MCF);
Result=[MCF wr2 qsi p];
result2=Result(p,:);

```

#### **A.4- Algoritmo para obtenção dos valores de MAC:**

```

% MAC
%clc
%clear
load vetcomN %carrega os vetores modais de referência

%Fi=poly;
FiEL=poly;
ref=1;

%Monta-se os vetores modais calculado
Af=[A(3,:)
    A(11,:)
    A(23,:)
    A(29,:)];

```

```

for k=1:4
    Fi(k,:)= Af(k,:)/((Af(k,ref))^(.5));
end

for k=1:4
    Fi(k,:)= Fi(k,:)/(Fi(k,ref));
end

for i=1:4,
    for j=1:4,
        F_i=Fi(:,i);
        F_j=FiEL(:,j);
        MAC(i,j)=abs(F_i'*F_j)^2/(abs(F_i'*F_i)*abs(F_j'*F_j));
    end
end

Avo=abs(Fi');
Avt=abs(FiEL);
Dvo=angle(Fi');
Dvt=angle(FiEL);

figure(1)
bar3(MAC)
title('MAC')

```

#### **A.5- Algoritmo para simulação de uma análise modal operacional:**

```

close all
clear
clc
load md5gr5 %carrega arquivo contendo as FRFs

ref=5;

df=w(3)-w(2);

[M,N]=size(H);
for k=1:M
    if round(N/2)==N/2
        H(k,N+1) = real(H(k,N));
        H(k,N+2:2*N)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N);
        dt=t(3)-t(2);
        ff=linspace(0,1/dt,2*N);
    else
        H(k,N+1:2*N-1)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N-1);
        dt=t(3)-t(2);
        ff=linspace(0,1/dt,2*N-1);
    end
end

```

```

    end
    ht(k,:)=real(2*N*ifft(H(k,:)));
end

x=randn(1,2*N-1); %ruído branco (no caso de AMO com harmônico,
                    este é adicionado aqui)

N=length(x);
im=sqrt(-1);
X=fft(x)/N;
fs=1/dt;
T=N*dt;
df=1/T;
f=(0:N/2-1)*df;

for k=1:M
    Y(k,:)=H(k,:).*X; %resposta do sistema
    y(k,:)=real(2*N*ifft(Y(k,:)));
end

Nb=512;
nb=N/Nb;
fd=100;
dt=1/fs;
Tb=Nb*dt;
df=1/Tb;
f=(0:Nb/2-1)*df;
Syy=zeros(M,Nb);
for k=1:M
    for i=1:nb,
        h=sin(0:pi/(Nb-1):pi).^2;
        Yb(ref,:)=fft(y(ref,(i-1)*Nb+1:i*Nb).*h)/Nb;
        Yb(k,:)=fft(y(k,(i-1)*Nb+1:i*Nb).*h)/Nb;
        Syy(k,:)=Syy(k,:)+conj(Yb(k,:)).*Yb(ref,:);
    end
end
Syy=Syy/nb;% função densidade espectral

for k=1:M
    x1(k,:)=real(Nb*ifft(Syy(k,:)));
end

figure(1)
plot(f,log10(abs(Syy(:,1:256))));
figure(2)
plot(x1)
save xn5 x1 t Syy f

```

**A.6 - Algoritmo de aplicação de filtro passa/rejeita banda:**

```

clear all
close all
clc
%funções carregadas
load xnh1
load se1

df=w(3)-w(2);
ts=t;
of=2;
r=1;
fc=[12.7 14.7];

[nl,nc]=size(Y);

% Entrada:
% t -> vetor de tempo [s]
% x -> sinal a ser filtrado [SI]
% n -> ordem do filtro
% r -> razão de ripple:  $0 < r < 1$ 
% fn -> frequência de corte em Hz
% tipo_filtro -> (low,high,bandpass,stop):
% respectivamente, passa-baixo, passa-alto, passa-faixa e rejeita-faixa. No caso dos
% passa-faixa e rejeita-faixa a frequência de corte deve ser um vetor de dois números,
% o início e o final da faixa.
% Saida:
% y -> sinal filtrado em função do vetor de tempo da entrada
% [t,y]=filtro(t,x,n,r,fn,tipo_filtro);
for k=1:5
    [tsf,yf(k,:)] = filtro(ts,y(k,:),of,r,fc,"bandpass");
end

figure(1)
subplot(2,1,1);
plot(ts,y);
grid on
subplot(2,1,2);
plot(tsf,yf(1,:));% axis([0 5 -2e-5 2e-5])
grid on

for k=1:5
    Yf(k,:)=fft(yf(k,:))/nc;
end

% f2=linspace(0,2*f(1000),2001);
figure(2)
subplot(2,1,1);

```

```

plot(w,log10(abs(Y(:,1:10001))));
grid on
subplot(2,1,2);
plot(w,log10(abs(Yf(:,1:10001))));
grid on

```

```
[ff,xi]=ksdensity(yf(5,:));
```

```

figure(3);
plot(xi,ff);
xlabel('x');
ylabel('?(x)');

```

```
save s3ef1 Yf yf
```

### A.7- Algoritmo de Mohanty & Rixen para vários gdl:

```

% Rotina p/ calculo de parametros modais por CE ou LSCE
% caso entre com dados de uma IRF, sera calculado por CE
close all
clear
% carregando arquivo de dados: H-frfs, w-freuencia
load amoC1HCN
clc

```

```
df=w(3)-w(2);
```

```

[M,N]=size(H);
nl=M;
nc=N;
for k=1:M
    if round(N/2)==N/2
        H(k,N+1) = real(H(k,N));
        H(k,N+2:2*N)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N);
    else
        H(k,N+1:2*N-1)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N-1);
    end
    ht(k,:)=real(2*N*ifft(H(k,:)));
end

```

```

figure(1)
plot(w,5*(6+log10(abs(H(:,1:N))));
xlabel('Frequencia (Hz)');
ylabel('N° de gdl Estimado');
grid on

```

```

dt=t(3)-t(2);
h=ht;
%w1=14;
w1=20*2*pi; %aqui, é informado o valor do harmônico
nh=1;
nm=5;
ni=[nm:5*nm];
W=zeros(10*nm,length(ni));
Q=zeros(10*nm,length(ni));
cont=0;
for N=nm:5*nm
cont=cont+1;

[nl,nc]=size(h);
dt=t(3)-t(2);
%Montando a matriz de hankel
hgg=[];
hvv=[];
for k=1:nl
hg=[];
for m=1:2*N
hg(m,:)=h(k,m:2*N+m-1);
end
hgg=[hgg
hg];
hv=-h(k,2*N+1:4*N)';
hvv=[hvv
hv];
end

A=hgg(:,1:2*nh);
C=hgg(:,2*nh+1:2*N);
E=hvv;
for m=1:2:2*nh-1
for n=1:2*nh
B(m,n)=sin(w1*dt*(n-1));
end
end
for m=2:2:2*nh
for n=1:2*nh
B(m,n)=cos(w1*dt*(n-1));
end
end
for m=1:2:2*nh-1
for n=1:2*N-2*nh
D(m,n)=sin(w1*dt*(n+2*nh-1));
end
end
for m=2:2:2*nh

```

```

for n=1:2*N-2*nh
    D(m,n)=cos(w1*dt*(n+2*nh-1));
end
end
F=-[sin(w1*dt*2*N)
    cos(w1*dt*2*N)];
%calculando beta
b2=pinv(C-A*pinv(B)*D)*(E-A*pinv(B)*F);
b1=pinv(B)*(F-D*b2);

beta=[b1
    b2
    1];
%beta(2*N+1)=1;
%achando as raizes do polinomio de prony
Vr=roots(flipud(beta));
%determinando Sr
Sr=log(Vr)./dt;

%obtendo wr e qsi
wr=abs(Sr);
qsi=100*real(Sr)./abs(Sr);

%calculando os residuos
V=[];
for m=1:2*N
    V(m,:)=(Vr(1:2*N)'.^(m-1));
end
A=[];
AA=[];
sh=3;
for k=1:nl
    hhv=h(k,1:2*N)';
    hhvv=h(k,1+sh:2*N+sh)';
    A(:,k)=pinv(V)*hhv;
    AA(:,k)=pinv(V)*hhvv;
    AA(:,k)=AA(:,k)./V(sh,:).';
end

% Fazendo o cálculo do MCF
for i=1:2*N,
    xx=A(i,:).';
    yy=AA(i,:).';
    MCF(i)=(abs(xx'*yy))^2/((xx'*xx)*(yy'*yy));
end
[l,c]=size(MCF);
if l < c
    MCF=MCF';
end
wr2=wr/(2*pi);

```



```

load amoC1HCN
clc

df=w(3)-w(2);

[M,N]=size(H);
nl=M;
nc=N;
for k=1:M
    if round(N/2)==N/2
        H(k,N+1) = real(H(k,N));
        H(k,N+2:2*N)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N);
    else
        H(k,N+1:2*N-1)= conj(H(k,N:-1:2));
        t = linspace(0,1/df,2*N-1);
    end
    ht(k,:)=real(2*N*ifft(H(k,:)));
end

dt=t(3)-t(2);
h=ht;
w1=20*2*pi; %aqui, é informado o valor do harmônico
nh=1;
nm=22; %aqui é informado o número de gdl a ser detalhado
cont=0;
N=nm+cont;

[nl,nc]=size(h);
dt=t(3)-t(2);
%Montando a matriz de hankel
hgg=[];
hvv=[];
for k=1:nl
    hg=[];
    for m=1:2*N
        hg(m,:)=h(k,m:2*N+m-1);
    end
    hgg=[hgg
        hg];
    hv=-h(k,2*N+1:4*N)';
    hvv=[hvv
        hv];
end
A=hgg(:,1:2*nh);
C=hgg(:,2*nh+1:2*N);
E=hvv;
for m=1:2:2*nh-1
    for n=1:2*nh
        B(m,n)=sin(w1*dt*(n-1));
    end
end

```

```

    end
end
for m=2:2:2*nh
    for n=1:2*nh
        B(m,n)=cos(w1*dt*(n-1));
    end
end
for m=1:2:2*nh-1
    for n=1:2*N-2*nh
        D(m,n)=sin(w1*dt*(n+2*nh-1));
    end
end
for m=2:2:2*nh
    for n=1:2*N-2*nh
        D(m,n)=cos(w1*dt*(n+2*nh-1));
    end
end
F=-[sin(w1*dt*2*N)
    cos(w1*dt*2*N)];
%calculando beta
b2=pinv(C-A*pinv(B)*D)*(E-A*pinv(B)*F);
b1=pinv(B)*(F-D*b2);

beta=[b1
    b2
    1];
% beta(2*N+1)=1;
%achando as raizes do polinomio de prony
Vr=roots(flipud(beta));
%determinando Sr
Sr=log(Vr)./dt;

%obtendo wr e qsi
wr=abs(Sr);
qsi=100*real(Sr)./abs(Sr);

%calculando os residuos
V=[];
for m=1:2*N
    V(m,:)=(Vr(1:2*N)).^(m-1));
end

sh=3;
for k=1:nl
    hhv=h(k,1:2*N)';
    hhvv=h(k,1+sh:2*N+sh)';
    AA(:,k)=pinv(V)*hhv;
    AAA(:,k)=pinv(V)*hhvv;
    AAA(:,k)=AAA(:,k)./V(sh,:).';
end
end

```

```
% Fazendo o cálculo do MCF
for i=1:2*N,
    xx=AA(i,:).';
    yy=AAA(i,:).';
    MCF(i)=(abs(xx'*yy))^2/((xx'*xx)*(yy'*yy));
end
MCF=MCF';
wr2=wr/(2*pi);
[no,p]=sort(MCF);
Result=[MCF wr2 qsi p];
result2=Result(p,:);
```

*Cruz, Sérgio Luiz Matos da*

*Estudo de técnicas de análise modal operacional em sistemas sujeitos a excitações aleatórias com a presença de componente harmônico / Sérgio Luiz Matos da Cruz / Belém: UFPA / Centro Tecnológico, 2006.*

*xix, 113p.: il.; 30cm*

*Orientador: Alexandre Luiz Amarante Mesquita*

*Dissertação (Mestrado) – UFPA / Centro Tecnológico / PPEM, 2006.*

*Referências Bibliográficas: p. 92-96*

1. Análise modal operacional. 2. NExT. 3. LSCE. 4. Parâmetros modais. 5. Vibrações e Acústica – Tese. I. Cruz, Sérgio Luiz Matos da. II. Mesquita, Alexandre Luiz Amarante. III. Universidade Federal do Pará, Centro Tecnológico, PPGEM. IV. Título.