UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

CURSO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

DENIVALDO PANTOJA DA SILVA

REGRA DE TRÊS: prática escolar de modelagem matemática

BELÉM

2011

DENIVALDO PANTOJA DA SILVA

REGRA DE TRÊS: prática escolar de modelagem matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

BELÉM

2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –

Biblioteca do IEMCI, UFPA

Silva, Denivaldo Pantoja da.

Regra de três: prática escolar de modelagem matemática / Denivaldo Pantoja da Silva, orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra – 2011.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2011.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Aritmética. 3. Modelos matemáticos. 4. Educação – matemática. I. Borges, Renato Guerra, orient. II. Título.

DENIVALDO PANTOJA DA SILVA

REGRA DE TRÊS: prática escolar de modelagem matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Defesa: Belém-PA, 08 de abril de 2011.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato Borges Guerra (Orientador) – IEMCI/UFPA

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes- UFRN

Profa. Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena– IEMCI/UFPA

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva- IEMCI/UFPA

BELÉM

2011

A Deus e ao Espírito Santo pela benção concedida. Aos meus pais Navaldo e Dirce pelo apoio incondicional. À minha família Nívea, Victor e Gabriel pelas orações que fortalecem nossa caminhada e aos demais familiares pelo incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, sobretudo a Deus pela saúde concedida para que pudesse concluir este trabalho.

Ao estimado Professor orientador Renato Borges Guerra pela dedicação, paciência, competência e por sua valiosa contribuição e orientação decisivas na idealização e conclusão desta etapa do trabalho a que nos propusemos.

Aos professores Iran Abreu Mendes, Isabel Cristina Rodrigues de Lucena e Francisco Hermes Santos da Silva pelas contribuições e apontamentos imprescindíveis para a realização da defesa e conclusão deste trabalho.

A todos os professores do Programa que de forma direta ou indireta em muito contribuíram para nossa formação.

Aos professores Tadeu Oliver Gonçalves e Adilson Oliveira do Espírito Santo pela ajuda no processo de formação acadêmica e cientifica.

Aos colegas mestrandos e doutorandos do curso, em especial ao Flávio Mesquita, Arthur Machado Jr, Roberto Andrade e Reginaldo da Silva pelo companheirismo e decisivas contribuições em minha formação e a todos do Grupo de Estudo de Didática da Matemática pelo incentivo.

Para finalizar agradeço aos colaboradores do IEMCI, especialmente à Deyse, Edna e Kleber e, ainda ao Sr. Eugênio responsável pelo laboratório de informática pela colaboração logística.

Resumo

O objetivo desta pesquisa é apontar caminhos que possam levar, mesmo que parcialmente, à compreensão do ensino da regra de três como iniciação de uma consciência critica que revele os modelos matemáticos como algo mais que matemática, como construtos dos sujeitos culturais, formados nos seios de grupos com quem compartilham atividades, e, portanto, que tais modelos matemáticos não estão livres de interesses e intenções outras não matemáticas. E ainda, Discutiu-se sobre ambigüidade com relação à aplicação da proporcionalidade no enfrentamento de problemas de regra de três. A pesquisa foi desenvolvida com um grupo de professores que participaram de um curso de formação continuada para professores das séries finais do ensino fundamental. Aqui, à luz da Educação Matemática Critica e aliada aos tipos de problemas tratados ao largo de sua história pode permitir um fazer docente da regra de três algebrizada relacionada a outros temas escolares, matemáticos e não matemáticos. Verificou-se que o caráter prático da regra de três ao longo do tempo, torna possível construir uma compreensão que revele esse fazer como um fazer algebrizado que pode promover o ensino da modelagem matemática na escola.

PALAVRAS-CHAVE: Regra de três, modelagem matemática, prática social, proporcionalidade, educação matemática critica.

Sumário

1-INTRODUÇÃO: O PROBLEMA DE PESQUISA

As atividades que as pessoas desempenham em nossa sociedade, das mais comuns às mais complexas, como vestir, comprar, fazer estimativas, medir, comparar, predizer, previsões ambientais, política, economia estão de alguma maneira relacionadas com a matemática. Nessas e em outras atividades humanas do cotidiano requerem competências matemáticas que levem à solução de problemas para serem executadas de forma rápida, segura e satisfatória para um grupo de pessoas ou para uma sociedade. Nessa linha, os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN's (BRASIL, 1997) apontam que

> A compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc.(BRASIL, 1997 p.27)

Isso mostra que o exercício da cidadania está vinculado de certo modo às competências matemática como as apontadas e, portanto, auxiliariam na tomada de decisão. Sabemos que outras ações no contexto atual também exigem competências matemática que se tornam cada vez mais complexas a medida que as tecnologias permeiam as interações sociais se diversificando e se intensificando como, por exemplo, no controle do trânsito de veículos automotores nas grandes metrópoles ou mesmo no financiamento de um bem de consumo quando exige o uso de calculadoras financeiras criadas especificamente para essa atividade. Essa preocupação também é manifestada pelo Guia do Livro Didático do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD-2008) quando diz:

> Em sociedades como a nossa, permeadas por tecnologias de base científica e por um crescente acúmulo e troca de informações de vários tipos, é consenso reconhecer que as competências matemáticas tornaram-se um imperativo (BRASIL, 2007 pp.12-13)

Esse pensar imputa para a competência matemática o papel de ferramenta imprescindível para a relação do sujeito com a ciência e tecnologia, e principalmente para seus derivados como as corporificadas pelos computadores, satélites de comunicação e em outras relações de produção e trocas de bens e serviços existentes na sociedade. Nesse caminhar, os Parâmetros Curriculares nacionais apontam que:

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. (BRASIL, 1997 p.25)

Que amplia o papel da competência matemática como um jeito próprio de fazer e pensar que apoiará a construção de novos conhecimentos em outras áreas de conhecimentos, além de dar conta do desenvolvimento de atividades cotidianas e do mundo do trabalho e, mais, preconiza que os alunos sejam capazes de questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL, 1998 p.7).

Nesse sentido, para Guerra e Silva (2009, pp.96-97), parece se justificar a alfabetização matemática para a formação do sujeito partícipe da sociedade, consciente da importância do papel desempenhado pela matemática no mundo, como orientadora de decisões e reflexões criticas, como deseja a Organização para a Cooperação Econômica e Desenvolvimento - Programa para Avaliação Internacional de Estudantes (OECD-PISA) [1], que assim se manifesta:

> Capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na matemática de maneira que atendam as necessidades da vida do indivíduo como um cidadão construtivo, preocupado e reflexivo[2]. (OECD, 2003, p. 15). [Tradução nossa]

---

[1] Organization for Economic Co-operation and Development Programme for International Student Assessment (OECD -PISA)

[2] An individual's capacity to identify and understand the rule that mathematics plays in the world, to make well-founded judgments and to use and engage in mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned, and reflective citizen. (OECD, 2003, p. 15)

Esse pensar de aparente consonância com o posto pelos PCN's parece exigir não somente um jeito próprio de fazer e pensar matemático que atenderia as necessidades do sujeito frente a situações sociais, mas também a consciência de que esse jeito de pensar e fazer matemático, como toda atividade humana, tem implicações sociais.

Nesse sentido, segundo Guerra e Silva (2009, p.96), autores como D'Ambrosio (1987) e Skovsmose (1994, 1995, 1998, 2001, 2004), Skovsmose e Yasukawa, (2004), evidenciam a matemática como parte integrante da realidade, presente em diferentes contextos e situações, não somente como uma linguagem viva a expressar e justificar os fazeres dos sistemas econômicos, tecnológicos e sociais, mas também como produtora de tecnologias e de legitimação de ações sociais. De outro modo, apontam intencionalidades no fazer matemático que atendem interesses e intenções na produção de sistemas que além de poder nos submeter a riscos, às vezes catastróficos e não controláveis por quaisquer outras tecnologias que possam ser criadas, controlam decisões e ações sociais.

Mais precisamente, Guerra e Silva (2009, p.96) apoiados em Skovsmose e Yasukawa (2004) e Skovsmose (2004), alertam que esses imbricados de relações políticas, tecnológicas e econômicas, determinam ações sociais e evidenciam a ideia de que a (atividade com) matemática pode gerar ou influenciar e limitar ações sociais, configurando um misto de conhecimento e poder tendo como núcleo a matemática em ação.

Esse pensar encaminha reflexões sobre a alfabetização matemática às vezes referida como mathemancy, numeracia ou ainda literacia matemática. Para Guerra e Silva (2009) não há unanimidade de opiniões sobre o entendimento de alfabetização matemática e recorrem a Julie (2006) para afirmar que as opiniões podem ser vistas como um *continuum* em que num extremo a alfabetização matemática é considerada como a entrada à matemática e no outro extremo como meio de interagir com os aparatos matemáticos na sociedade. Em seu trabalho, Julie (2006, p.63, apud GUERRA e SILVA, 2009) considera a alfabetização matemática com fundamento no paradigma da educação matemática critica de Skovsmose (1994), que inspirado na noção de educação crítica em que a alfabetização é entendida como uma competência que permite aos alunos ver e reinterpretar parte da realidade e reagir a esta realidade, questiona se é ou não possível desenvolver uma competência, *mathemacy*, que tenha um potencial semelhante ao da alfabetização e que possa ajudar os estudantes a reinterpretar em sua realidade e de propor uma realidade diferente? (SKOVSMOSE, NIELSEN e COLIN POWELL, 1995). De outro modo, deseja-se o desenvolvimento de uma competência que promova a tomada de consciência de que ações e decisões tecnológicas, econômicas, políticas e sociais no mundo atual estão subordinadas a modelos matemáticos e, mais, de que os modelos matemáticos do mundo contêm pontos cegos que acabam por deixar de fora outras facetas da realidade ou do fenômeno vivido, se contrapondo a crença da certeza matemática, dos modelos matemáticos do mundo como tradutores fiéis de uma totalidade, sem emendas ou rasuras da realidade.

Ainda sobre a diversidade desses entendimentos, Ponte (2002) reflete se o que está em causa é, sobretudo, a capacidade de utilização do conhecimento matemático em situações concretas como defendido por Steen (1999; 2001) ou fundamentalmente a capacidade crítica relativamente a eles, como posto pelos já citados autores D'Ambrosio (1987) e Skovsmose (2001), ou ainda, se é a apropriação dos conhecimentos elementares e procedimentos básicos, como predominantemente é adotado na Inglaterra, sem cuidado especial, na prática, para a capacidade de usar estes conhecimentos e procedimentos básicos em situações do contexto real.

Por outro lado, Ponte (2002) conjectura que a *numeracia* não estaria relacionados à compreensão de conceitos matemáticos abstratos e sofisticados, comungando com a opinião de Steen (1999, 2001) de que estudar matemática abstrata (nomeadamente álgebra e geometria) não levaria necessariamente ao desenvolvimento da *numeracia*, para em seguida interpretá-la como uma competência que diz respeito ao uso de noções matemáticas relativamente pouco sofisticadas em contextos reais complexos e, muitas vezes, dinâmicos e, mais, como uma competência interdisciplinar que deve ser trabalhada em todas as disciplinas escolares que usam informação de natureza numérica e outros conceitos matemáticos.

Em que pese às complexidades da questão, os entendimentos parecem nos encaminhar a um ensino que privilegie a analise de situações em contextos reais, e, nesse sentido, nos leva a pensar o ensino da matemática que privilegie à modelagem matemática. Entretanto, a modelagem matemática de situações reais pode se limitar ao uso ferramental da matemática e, portanto num fazer matemático desprovido da consciência de que esse fazer é um fazer humano permeado de interesses e intenções. O mesmo pode ocorrer num fazer interdisciplinar, complementar ao domínio matemático, como recomendado por Ponte (2002) e por isso, talvez, Yasukawa (2002) se manifeste sobre a *numeracia* como mais do que matemática, como a capacidade de situar, interpretar, criticar e até mesmo de criar matemática em um contexto, tendo em conta, nisso tudo, a matemática e as complexidades sociais e humanas envolvidas nesse processo (YASUKAWA, et al, 1995; p. 816).

Esse pensar, que de certo modo, vai ao encontro com um dos princípios norteadores para área de matemática do ensino fundamental dos PCN's de que a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade (BRASIL, 1998, p.56), pode também conduzir para uma compreensão de situações de ensino que evidenciam o afirmado por Steen (1999, 2001) sobre o repertório teórico matemático não garantir necessariamente o sucesso em modelagem matemática, como evidenciam os questionamentos de Lesh e Sriraman (2005a, p. 7): Por que razão alunos bem sucedidos em testes padronizados tradicionais freqüentemente não apresentam desempenho satisfatório em situações complexas da "vida real" onde é necessário pensamento matemático?[3] Ou os de Iversen e Larson (2006, p.281), Quais são as conexões entre as habilidades dos alunos em testes padronizados e suas capacidades de trabalhar no

[3] "Why do students who score well on traditional standardized tests often perform poorly in more complex "real life" situations where mathematical thinking is needed?"

confuso mundo das “situações da vida real” envolvendo matemática[4]? (isto é, situações em que a modelagem matemática é enfatizada[5]) que, de certo modo, confirmam a posição de Ponte (2002) referida acima.

Assim, o domínio exclusivo de saberes matemáticos pelo sujeito pode não ser suficiente para permitir a ele vislumbrar, necessariamente, a complexidade de tessituras entre os interesses, intenções e outros saberes que envolvem um modelo matemático do qual ele não tenha participado de sua construção, pois a construção de um modelo matemático de uma situação real, como todo construto humano é social, é um produto de múltiplas experiências do sujeito e como tal envolve intenções, interesse, saberes, crenças e emoções que não necessariamente se mostrarão visíveis em um modelo matemático de uma situação real como revela Barbosa (2006), apoiado em Busse (2005), ao afirmar que existem evidências de que problemas em contexto de situações da realidade podem ser reconstruídos de diferentes modos pelos estudantes, tendo diferentes efeitos sobre eles, visto que cada um tem suas próprias experiências e crenças.

Em resumo, o domínio de saberes matemáticos pelo sujeito pode não ser suficiente para que vislumbre, necessariamente, a complexidade da rede de relações entre os interesses, intenções e outros saberes não matemáticos presentes que envolvem um modelo matemático do qual ele não tenha participado da construção. De outro modo, modelar uma situação da realidade ou construir um modelo matemático para governar uma situação, no sentido de construir uma realidade controlável pelo homem, pode se mostrar uma tarefa complexa de ser cumprida no estrito âmbito matemático, mesmo que o sujeito seja habilidoso ao lidar com a matemática, pois aspectos outros da situação não seriam necessariamente reveladas em situações reais incomuns ou que não possuam outros significados não-matemáticos para o sujeito.

Esse pensar também é corroborado por Grandsard (2005), a partir da hipótese de que sendo a modelagem matemática usada em uma grande

[4] “What are the connections between students’abilities in standardized tests and their abilities working with messy “real life situations” involving mathematics?

[5] (i.e. situations where mathematical modeling is emphasized)

variedade de disciplinas seria desejável que os estudantes fossem capazes de modelar matematicamente em áreas e contextos novos para eles, mas observou, no entanto, que embora sejam excelentes em memorizar fatos, fórmulas e provas, estes não se comportavam bem quando tinham que aplicar a matemática, ou mesmo reconhecê-la, em contextos incomuns. Isto a levou a levantar questões sobre a eficiência do ensino da matemática para alertar que tais dificuldades dos estudantes eram também dos professores, pois assim se referiu

> Quando os meus futuros professores foram convidados a resolver alguns dos problemas de modelagem deste documento, nem todos foram bem sucedidos. Alguns não apresentaram comportamento muito diferente dos alunos do primeiro ano, eles não foram capazes de traduzir e sentiram-se desconfortáveis quando solicitados a fazer algo desconhecido. Isto pode parecer incrível para estranhos, mas é a dura verdade. Alguns dos nossos futuros professores mestres em matemática não puderam traduzir ao nível do liceu. Como será possível que ensinem modelagem para seus alunos? (GRANDSARD, 2005, p.7).

Sobre esse aspecto, Julie (2006, p.63), analisando a alfabetização matemática na África do Sul, também aponta dificuldades de docentes, hábeis e experientes, de ensinar a alfabetização matemática e imputa, entre outros fatores possíveis, as deficiências em analises didáticas e, entre elas, cita a dependência epistêmica de especialistas, ou seja, esperam que especialistas transformem o fazer da alfabetização matemática num fazer elementar para a escola.

Isso talvez permita compreender de algum modo as dificuldades de professores quando são convocados a analisar situações em contextos reais, tanto no sentido do ensino da matemática critica, quanto do ensino envolvendo modelagem matemática, mas apontam, sobretudo, o comprometimento desfavorável do desejado por Skovsmose (2007), isto é, da necessidade de as pessoas envolvidas na modelagem matemática, admitindo o formalismo da ciência, de refletirem sobre a diversidade de abordagens que podem ser realizadas no estudo de um determinado fenômeno sem perderem de vista a preocupação de destacar o embaçar da realidade pelo modelo matemático.

Para o enfrentamento dessa problemática Guerra e Silva (2009) não desconsideram a modelagem matemática na perspectiva sócio-crítica proposta por Barbosa (2006) que trata da modelagem de situações reais do entorno social do estudante por meio de uma articulação discursiva entre o domínio da matemática pura, da técnica de modelagem e da reflexão sobre a situação. De certo modo, parece atender o desejado pela educação matemática critica, mas observam que embora essa abordagem possa evitar, de certo modo, as dificuldades dos tipos acima apontadas, correm riscos de se restringirem a reflexão da situação particular analisada, em detrimento do fazer matemático como parte integrante das complexidades sociais e humanas envolvidas nesse processo, como o fazer da generalização e de universalidade presentes no fazer matemático que podem ser indesejáveis, entre outros aspectos, nas construções de modelos matemáticos para a sociedade.

Nesse sentido, torna-se imperioso refletir sobre as complexidades pertinentes ao processo de modelagem matemática na escola que evidencie, mesmo que parcialmente, o que deseja a educação matemática critica, levando-se em consideração as dificuldades apontadas, e a modelagem critica de (BARBOSA, 2006), com a preocupação adicional de evidenciar o algo *mais que matemática*, ou seja, de ter em conta nisso tudo a matemática e as complexidades sociais e humanas envolvidas nesse processo.

Para isso, assumimos que estudantes e professores, manifestam dificuldade com faces comuns no enfrentamento de situações reais por meio da matemática e uma dessas faces pode ser a concepção de que modelar matematicamente uma situação é uma competência que se desenvolve exclusivamente no seio do fazer matemático e daí não se darem conta do *algo mais que matemática* presente no processo de modelagem matemática; a modelagem matemática como um produto da atividade humana em sua prática de modificar e construir sua realidade, de criação e recriação de processos que moldam/transformam as ações humanas ao mesmo tempo em que esse fazer é moldado/transformado pelo movimento dos saberes matemáticos e extra-matemáticos realizados pelo sujeito no processo de modelação.

Nesse sentido, o ensino da matemática escolar pode ser visto como incipiente para revelar as complexidades envolvidas no processo de modelagem matemática, mas, por outro lado, nos estimula ao desafio de ***como podemos pensar a modelagem matemática no âmbito do ensino da matemática escolar para evidenciar, ainda que parcialmente, o necessário algo mais, em geral, não evidente no fazer matemático escolar?*** .

A amplitude da questão nos encaminha para uma hercúlea, senão impossível, construção de uma resposta e nos contentamos então a considerar nosso questionamento restrito ao estudo da regra de três que há séculos, literalmente, é objeto de ensino nas escolas, que traz consigo uma história de séculos de uso em diferentes atividades humanas, inclusive no ensino de outras disciplinas escolares, mas que nas últimas décadas seu ensino passa a ser questionado, como assim faz Ávila (1986) ao sugerir que o nome “regra de três” seja abolido também entre nós.

Tomando essa questão como norteadora deste trabalho sob a hipótese de ser um professor de matemática do ensino básico que assume o fazer matemático como uma atividade humana buscou construir caminhos que possam nos levar, mesmo que parcialmente, a compreender o ensino da regra de três e suas possibilidades como iniciação de uma consciência critica que revele os modelos matemáticos como *algo mais que matemática*, como construtos dos sujeitos culturais, formados nos seios de grupos com quem compartilham atividades, e, portanto, que tais modelos matemáticos não estão livres de interesses e intenções outras não matemáticas.

Diante disso os capítulos seguintes foram construídos de acordo com os questionamentos que se revelaram pertinentes na busca de uma compreensão do fazer da regra de três como uma prática social e cultural, e também responder mesmo que parcialmente, a questão norteadora. Dessa forma, o capitulo 02 destaca o lócus da pesquisa, os sujeitos pesquisados, os aspectos metodológicos e,ainda, faz uma análise sobre apresentação das resoluções dos problemas de regra de três, propostos na lista de questões extraídos do texto do módulo de estudo, na qual contém os problemas de regra de três, de geometria e operações com frações. A discussão nesse capitulo aponta para a necessidade de olhar na história a difusão/ensino da regra de três e suas sistematizações. Nesse sentido, o capitulo 03 descreve os ritos que foram utilizados ao longo do tempo a respeito do uso e do ensino da regra de três, apresentando e comentando sobre alguns métodos de resolução de problemas de regra de três propostos ao longo da história da aritmética, mais especificamente, nas obras de Lacroix (1839), Vallejo (1841;1846) e Brooks (1880).Esse capitulo sugere um detalhamento sobre a ambiguidade da proporcionalidade aplicada aos problemas de regra de três. O capitulo 04 busca, a partir da discussão realizada no capitulo 03, construir um entendimento do fazer da regra de três nas práticas sociais e na escola evidenciando a regra de três como uma prática social de modelagem com preocupação adicional de apontar *o algo mais que matemática* presente no processo de modelação e, consequentemente , no fazer da regra de três. O capitulo 5 discute o fazer das distintas práticas no contexto da modelagem matemática, inclusive na escola. E para finalizar, faz-se as considerações e apontamentos finais relativos á pesquisa. Assim, os encaminhamentos apontados e as discussões realizadas até então nos conduzem para o capitulo seguinte.

2-CONSTRUINDO A PESQUISA

Lócus, sujeito e aspectos metodológicos

Participando do curso de Formação Continuada dos Professores do Ensino Fundamental/Profissional de Educação do Sistema Básico de Ensino, nas áreas de Ciências e Matemática (Projeto de Descentralização – Rede Nacional de Formação Continuada/Plano de Ações Articuladas – PAR/ 2008), executada pelo IEMCI/UFPA em Rondon do Pará para um grupo de trinta professores cursistas oriundos dos municípios de Rondon-PA, Bom Jesus do Tocantins-PA e Abel Figueiredo-PA, sendo o primeiro o Pólo de realização da formação, no papel de formador de professores com a função de mediar a formação continuada, por meio de encontros presenciais e acompanhamento a distância, participei de um encontro de dois dias, que antecedeu aos encontros presenciais com os professores cursistas, destinados para a formação dos formadores sobre as atividades de estudo dos temas que compõem os módulos de estudo visando construir um plano de ação que atendesse aos objetivos do projeto de formação para ser executado no referido pólo.

Nesse encontro um dos módulos estudados pelo grupo de formadores de professores foi o intitulado Fundamentos de Matemática para o Ensino Fundamental. Esse módulo tem como objetivo apontar estratégias didáticas aos professores cursistas sobre três temas: as operações com frações, as expressões algébricas e matemática financeira.

Dentre esses temas, o segundo me chamou a atenção visto que

> Trata das expressões algébricas, geralmente introduzidas de modo formal na sétima série do ensino fundamental, as quais demandam significados, visto estas constituírem um emaranhado de letras sem sentido. Para atender essa demanda, mostramos através do conceito de grandezas proporcionais e consequentemente de problemas de regra de três simples e composta, a construção de expressões algébricas que resolvem esses problemas (GUERRA et. al, 2008 p.07)

A proposta dos autores em dar sentido ao emaranhado de letras das expressões algébricas me chamou atenção, por apontar uma resposta à pergunta rotineira que os estudantes da sétima série/oitavo ano, em geral, fazem nas aulas ao enfrentarem as expressões com letras: Para que serve essas expressões algébricas? E também por indicar uma forma de atribuir significados às expressões algébricas por meio de outro objeto de ensino da matemática, no caso a regra de três, estudado na série anterior. A articulação proposta entre esses objetos de ensino é inusitada e não encontramos nos livros didáticos ou técnicos dentre os dezesseis livros indicados pelo guia do PNLD-2008 que consultamos. Mais precisamente, o módulo traz, em relação a minha prática de ensino, uma proposta inovadora por apresentar de forma diferenciada temas da matemática escolar do ensino fundamental com significados em situações da realidade e em conexões com outros temas do ensino fundamental e médio como é o caso do financiamento de bens, que é geralmente tratado no ensino médio, por meio de polinômios ainda no ensino fundamental. Essa maneira de organizar os temas propostos pelos autores do texto do módulo posta em ação contemplaria, ainda que parcialmente, orientações dos PCN’s como, por exemplo, estabelecer possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento, suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais (BRASIL, 1998 p.16).

Por esse ponto de vista a organização matemática construída no texto do módulo me proporcionou uma reflexão sobre o fazer na sala de aula, pois até aquele momento não tinha percebido a possibilidade de explorar a regra de três com o propósito de atribuir significado às expressões algébricas, ou ainda, estabelecer conexão entre o tema da sexta série/sétimo ano (regra de três) com a da sétima série/oitavo ano (expressões algébricas). O meu fazer docente era pautado em uma visão reducionista da regra de três, como um tema isolado, tratado como uma maneira de justificar o estudo de razão e proporção por serem assuntos que antecedem a regra de três, aplicando tais noções na resolução dos problemas ditos de regra de três, ou seja, não percebia até então a potencialidade da regra de três como modelo articulador de temas da matemática escolar, como técnica eficiente usada em atividades diversas desenvolvidas pelas pessoas cotidianamente, e muito menos como um fazer de modelagem matemática.

Considerava a regra de três como uma técnica para resolução de tipos de problemas que se anunciavam como regra de três envolvendo grandezas proporcionais, mas sem reflexões mais precisas sobre a proporcionalidade, ou ainda, olhar problemas de porcentagem como problemas de regra de três, já que esse tema, geralmente, é estudado logo a seguir nas sequências escolares. Não havia o propósito de encontrar um modelo para descrever uma situação. A partir dessa compreensão passei a refletir sobre minha prática e sobre o ensino da regra de três.

Nesse cenário surgiram meus primeiros questionamentos do tipo ***Como os professores cursistas enfrentam/ensinam os problemas de regra de três? Seria para eles um tema de estudo isolado, específico para problemas característicos como eu pensara até então?*** Com essas perguntas em mente, planejei iniciar a formação pela resolução e socialização de uma lista de problemas sobre os temas tratados no modulo, sem anunciar se haviam problemas de regra de três, com intenção de buscar possíveis elementos que me levassem a uma compreensão que permitisse encontrar, mesmo que parcialmente possíveis respostas às minhas indagações. A seguir discorrerei sobre como ocorreu o desenvolvimento dessa atividade com os professores cursistas.

No primeiro dia do encontro presencial com os professores cursistas foi realizada uma dinâmica de acolhida, apresentação dos objetivos da formação, resolução de lista de questões selecionadas do texto base, em grupos, e a socialização das resoluções. Essas duas ações foram inseridas no planejamento de forma intencional, pois me permitiram observar os gestos, os registros escritos, o jeito de enfrentar as questões propostas pelo módulo de estudo e, em especial, os problemas de regra três.

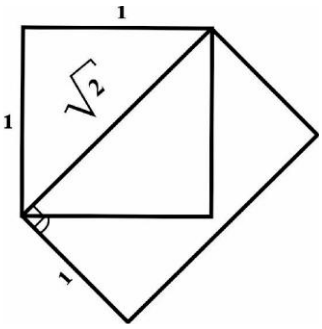
Nesse sentido, propus inicialmente aos cursistas que formassem grupos com quatro ou cinco componentes. Em seguida cada grupo recebeu uma lista que continha as seguintes questões selecionadas.

Questões propostas para discussão

1-Resolva as operações indicadas abaixo, justificando matematicamente o algoritmo utilizado.

a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$ b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=$ c) $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}=$ d) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=$

2-Calcule a área do retângulo da figura abaixo. O valor encontrado é comensurável ou incomensurável com a unidade?



3-Três costureiras preparam 6 fardamentos em um dia. Quantos fardamentos, iguais aos primeiros, serão confeccionados por 9 costureiras em um dia de trabalho?

4-Um motorista faz o percurso entre as cidades de Castanhal e Bragança em 3 horas, impondo ao seu carro uma velocidade média de 60km/h. Quanto tempo levará esse motorista para fazer o mesmo percurso se dirigir seu carro a uma velocidade média de 120km/h?

5-Sabendo que 9 costureiras confeccionam 54 uniformes em 3 dias, dispondo de 12 costureiras, em quantos dias serão confeccionados 60 uniformes iguais aos primeiros?

6-Lucas tem 10 anos e “pesa” 62 kg. quantos quilos pesam sua irmã que tem 12 anos?

7-Um muro de 20 metros é construído em 3 dias com 5 pedreiros. Em quantos dias seriam construídos 30 metros de muro com 6 operários?

8-Ana aplicou metade de certa quantia a 1,5% ao mês e outra metade a 1,8% ao mês. Após um mês, ela recebeu 29 reais e 70 centavos de juros. Quanto ela aplicou no total?

9-Considere o problema de aquisição de um fogão, cujo preço a vista foi de R$ 360,00, financiado em 6 prestações mensais fixas e iguais, com o primeiro pagamento ocorrendo um mês após a compra. Desejamos conhecer o valor das prestações, sabendo que a taxa de juros é de 5% ao mês.

Discussões e análise das apresentações

Após a entrega da lista, os participantes foram incentivados a resolver todas as questões. Minha função nessa etapa foi de organizador dos grupos e não interferir na resolução das questões. Para realizarem essa tarefa não foram utilizados materiais tais como livros e/ou pesquisa em internet para subsidiar a resolução das questões propostas. É importante destacar que as tarefas poderiam ser resolvidas com quaisquer técnicas de domínio do professor cursista. Foi estabelecido um período de duas horas para a resolução e organização da forma que iriam apresentar para o grupo maior.

Para a apresentação da resolução das questões os professores foram reorganizados em três grupos, o primeiro responsável para apresentar as questões 1 e 2 da lista, o segundo pelas questões 3, 4, 5, 6 e 7 e o terceiro pelas questões 8 e 9, isto é, foram apresentadas primeiramente as questões referentes às operações com frações, depois as expressões algébricas e por último matemática financeira.

Na apresentação das respostas das questões propostas observei que o comportamento dos professores cursistas frente às questões assumidas como de regra de três eram realizados de um mesmo jeito, como um rito. Parecia que ao lerem a questão eles, sem reflexões, indicavam a aplicação da técnica regra de três simples para a questão por esta se anunciar como tal, isto é, constar explicitamente de três termos e o quarto a determinar. Isso parece indicar que os professores pesquisados continuam aplicando a regra de três no mesmo sentido do encontrado nos manuais de aritmética, como, por exemplo, Perez de Moya (1569, p.225):

> Diz-se regra de três porque nela ocorrem três números contínuos ou descontínuos proporcionais. E toda sua prática não é para outra coisa, se não para achar um quarto número desconhecido, que se acha em tal proporção com o terceiro, como o segundo com o primeiro. (PEREZ de MOYA, 1569 p.225)

O aspecto ritual mecanicista parece se evidenciar mais na resolução apresentada da questão 04: Um motorista faz o percurso entre as cidades de Castanhal e Bragança em 3 horas, impondo ao seu carro uma velocidade média de 60 km/h. quanto tempo levará esse motorista para fazer o mesmo percurso se dirigir seu carro a uma velocidade média de 120 km/h? As palavras "velocidade média" (Vm) e "tempo" (h), são a chave que orientam a organização das grandezas envolvidas e a esquematização, como podemos ver a solução apresentada na foto 02:

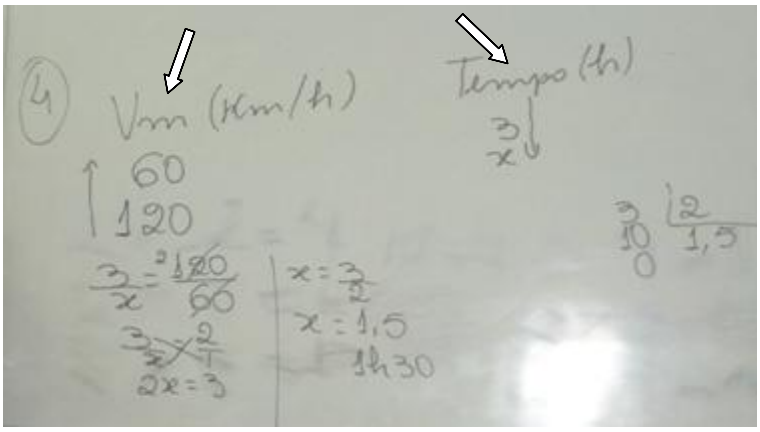


Foto 02: resolução da questão 04.

Do mesmo modo o ritual se repete na apresentação da questão 07 resolvida por outra equipe. Um muro de 20 metros é construído em 3 dias com 5 pedreiros. Em quantos dias seriam construídos 30 metros de muro com 6 operários? Usa a simbologia "Mt" para indicar o comprimento de muro construído, as iniciais dos nomes das grandezas "D" para representar o tempo gasto na construção na unidade dia e "P" para indicar o número de operários ou pedreiros e isso parece uma forma padrão para ordenar os dados do problema. O jeito de fazer é o mesmo. Veja foto 03:

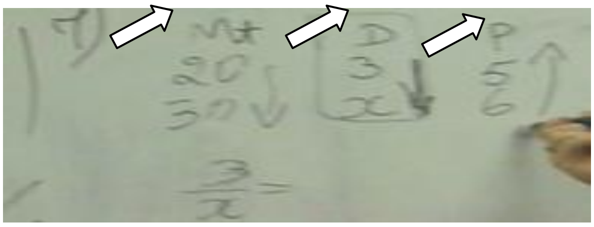


Foto 03: resolução da questão 07

Estas resoluções nos permitem inferir que o modo de resolver tais questões obedece a um modelo único. Percebe-se que há uma única forma, visto que cada uma dessas questões foi resolvida por diferentes professores, em equipes diferentes, mas parecem seguir o mesmo modo de fazer com relação à disposição dos dados, a representação das grandezas envolvidas escritas sobre os dados numéricos, o uso de setas para indicar a relação direta ou inversa entre a grandeza. Nas resoluções na coluna que se encontra o termo desconhecido, a seta sempre aponta para baixo servindo como ponto de referência. Para indicar o sentido da outra seta que ficará ao lado da outra grandeza se para cima ou para baixo, é verificado que tipo de relação é estabelecido entre as grandezas, se direta ou inversa. Nos casos citados (fotos 02 e 03), as setas postas no mesmo sentido indicam que as grandeza são diretamente proporcionais (Mt e D), em sentidos opostos são inversamente proporcionais (Mt e P e D e P).

Outro aspecto crucial diz respeito à proporcionalidade. Observei que os gestos, a expressão oral manifestada durante a exposição não a revelaram explicitamente como uma teoria que fundamentasse a resolução da situação. De outro modo, a equação que leva à solução é obtida mecanicamente sem referência explicita da fundamentação da proporcionalidade. Esse modo de fazer, que se restringe ao caráter técnico, parece revelar a regra de três como um método para a resolução de problemas característicos, ou ainda, uma técnica sem razão (SMITH, 1958 p.488), aplicada mecanicamente sem nenhuma justificação (EVES, 2004 p.263,), como simples regra, formulada verbalmente e aplicada de maneira mecânica sem qualquer explicação racional (ÁVILA, 1986, p.8).

Dessa forma, parece de certo modo contrariar a ideia que as competências matemáticas, pelo uso social, representam ponto crucial da matemática escolar. O fazer matemático dos professores no enfrentamento de situações específicas pode se revelar desprovido de fundamentação explicita da proporcionalidade envolvida nos problemas de regra três. No ensino esse fazer não permite discussão/reflexão mais específica relativa ao objeto matemático proporcionalidade, e conseqüentemente, questões do tipo: é ou não necessária para resolução de problemas de regra de três? Envolve noção não matemática? Como se revela em situações reais? Não se discute/reflete. Nesse sentido, não há tomada de consciência da regra de três como modelo matemático de uma prática social e cultural.

Esse fazer pôde ser observado quando perguntei como enfrentaram a questão seis? Lucas tem 10 anos e “pesa” 62 kg. quantos quilos pesam sua irmã que tem 12 anos? As grandezas envolvidas nessa questão são assumidas como não proporcionais pelo módulo, mas os gestos e a manifestação de um professor cursista para mim dizendo “Professor. eu percebi algo estranho nessa questão, mas não falei nada. Achei que era pegadinha...”. Isso revela certa dúvida quanto ao uso da regra de três para a questão, mas ele resolveu como tal. Outros grupos não refletiram sobre a existência ou não de relação de proporcionalidade entre as grandezas e assumiram como um problema de regra de três. Parece que o enunciado do problema o identifica como um problema típico de regra de três e em conseqüência a aplicação da técnica é imediata, como indicam as resoluções de grupos diferentes, reveladas pelas fotos 04 e 05 abaixo.

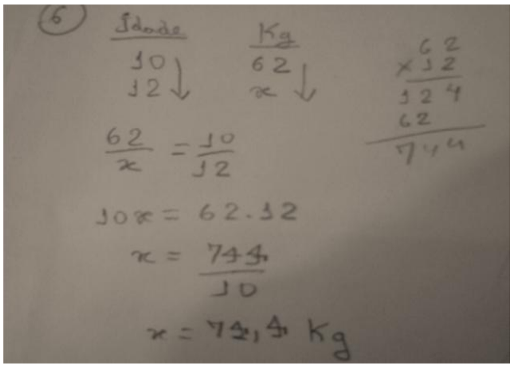


Foto 04: resolução (i) da questão 06

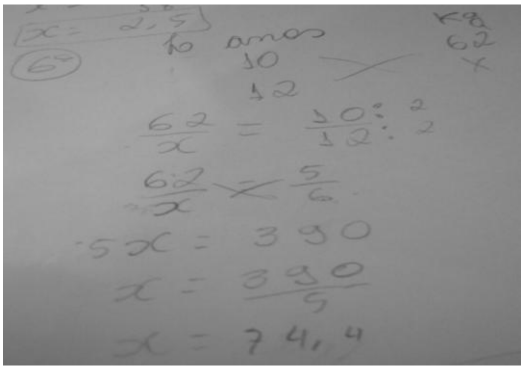


Foto 04:resolução (ii) da questão 06

Observa-se o mesmo ritual com o uso do conceito de proporcionalidade manifestado pelos professores. Parece uma técnica sem razão que se aplica a problemas de enunciados típicos com rotineira eficácia.

Algumas respostas possíveis para o questionamento inicial, ***Como os professores cursistas enfrentam/ensinam os problemas de regra de três? Seria para eles um tema de estudo isolado, específico para problemas característicos como eu pensara até então?*** Parecem começar a surgir nas apresentações das resoluções das questões realizadas pelos professores. Suas ações as revelam como o rito de uma prática isolada de resolução de tipos de problemas cujo enunciado evoca a técnica da regra de três.

Penso que possíveis respostas poderão emergir se considerarmos esse rito de *regra sem razão* como se refere Smith (1958, p.288).

> A regra de Mercado. Seu uso comercial também dá à regra de três o nome de chave de mercado ou regra de mercador, e nenhuma outra regra aritmética recebeu prestígio tão elaborado como esta que agora é praticamente descartada enquanto ajuda ao comercio.
> Uma regra sem sentido. A regra foi padronizada no uso diário sem explicação; Assim Digges (1572) simplesmente reconheceu, “trabalhando pela regra... Multiplique o último número pelo segundo, e divida o produto pelo primeiro numero” e afirmações similares eram feitas por muitos outros aritméticos, ocasionalmente em versos [6]. (SMITH, 1958, p.288) [Tradução nossa]

Sob esse aspecto, poderemos considerar que a regra de três não é um objeto específico da matemática, mas que foi construído nas práticas sociais consolidadas pela sociedade como um procedimento de caráter prático para uso em suas atividades profissionais. Esse pensar é também corroborado por Radford (2007) quando claramente se refere às necessidades das práticas comerciais como produtora de uma nova matemática que não encontrava guarida no fazer justificado matemático por meio do modelo dedutivo da geometria euclidiana, o que respaldava o fazer matemático até então.

---

[6] Rule without Reason. The rule was usually stated with no explanation; thus Digges (1572) merely remarked, “Worke by the Rule ensueing … Multiplie the last number by the second, and divide (the Product by the first number,” and similar statements were made by most other early arithmeticians, occasionally in verse. The arrangement of the terms was the same as in the early Hindu works, the first and third being alike. Smith (1958, p.288)

> Os novos problemas e as novas modalidades comerciais de cidades europeias como as mencionadas propiciaram a criação de novos conteúdos (o das novas matemáticas, a saber, as matemáticas comerciais). São essas mesmas necessidades as que propiciam igualmente o surgimento de novas formas de ensino (em virtude de que não é possível adaptar o modelo dedutivo da geometria euclidiana ao novo conteúdo. (RADFORD, 2007, p.195). [Tradução nossa]

Mais precisamente, sugere que consideremos a seguir o ensino da regra de três ao longo do tempo, ou melhor, a história do uso e da difusão/ensino da regra de três com suas distintas sistematizações. Nesse sentido optamos inicialmente por descrever os ritos que foram utilizados ao longo da história do uso e do ensino da regra de três que vem sendo perpetuados ate os nossos dias de modo a encontrar subsídios para construirmos nos capítulos que seguem uma compreensão do seu isolamento escolar, da ambigüidade da proporcionalidade na regra de três e de possíveis encaminhamentos para a ruptura desse fazer.

3-OS RITOS DO ENSINO DA REGRA DE TRÊS

O observado por Smith (1958, p.488) a respeito do fazer da regra de três “Os arranjos dos termos eram os mesmo como os dos primeiros trabalhos Hindus.”, como um ritual, parece se confirmar nas resoluções dos professores pesquisados e torna-se objeto de nosso interesse. Passamos a descrevê-los recorrendo a Gómez (2006), Ávila (1986), Smith (1958), Brooks (1880), Vallejo (1841; 1846), Lacroix (1839), de modo a encaminhar uma possível compreensão do porquê do isolamento da regra de três, como técnica, evidenciado nas práticas dos professores cursistas e também amiúde nos livros didáticos recomendados pelo PNLD-2008 como um fazer pontual desprovido de relações com outros temas matemáticos e extra-matemáticos e de outras ciências do currículo oficial.

Segundo Ávila (1986, p.8) o matemático indiano Brahmagupta no século VII desta era, assim formulava a regra de três:

> Na regra de três os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisição. O primeiro termo e o último devem ser de semelhantes. Obtém-se o valor procurado multiplicando a Requisição pelo Fruto e dividindo o resultado pelo Argumento. (AVILA, 1986, p.8)

Além disso, o que tem sido chamado, por um século ou dois, pelo nome de proporção composta, foi originalmente composto por nomes como a Regra de cinco quando cinco grandezas estavam envolvidas, a regra de sete se sete quantidades eram usadas, e assim por diante. B'haskara, segundo Smith (1958), por exemplo, dá regras de cinco, sete, nove e onze. Peletier (1549) fala de Ptolomeu como o inventor da regra das seis, referindo, no entanto, a proporção de geometria transversal, relativa a um dos três lados de um triângulo. Os nomes além de cinco eram raramente utilizados, na verdade, entre todos, são mais comumente chamado pelo nome genérico de Dupla Regra de três, Regra de Três Composta (SMITH, 1958, p.491)

Tal estrutura de certo modo permite engendrar problemas de natureza artificial como os presentes nos livros didáticos de hoje e em particular a natureza artificial dos problemas com respeito à regra de tres composta tem sido evidente desde o início, segundo afirma Smith (1958) citando Mahavira (c.850) que exemplifica o caso: "Aquele que obtém 20 jóias em troca de 100 peças de ouro de 16 varnas. O que [ele vai obter] em troca de 288 peças de ouro de 10 varnas? E depois citando Bhaskara (c.1150) com este tipo: "Se oito dos melhores lenços de seda variegadas mede de três côvados de largura e oito de comprimento, custa uma centena [nishcas]; diga rapidamente, o comerciante, se tu entendes o comércio, quanto é que um lenço com três e meio côvados de comprimento e meio côvado de largura vai custar? "

Quando a regra surgiu no Ocidente, que trazia o nome comum Oriental, embora os nomes Hindus para as condições especiais tenham sido descartados. Tão valorizada era entre comerciantes, no entanto, que muitas vezes era chamada de Regra de Ouro, um nome aparentemente em favor especial com os melhores escritores matemáticos. Hodder, o calculista popular Inglês do século 17, justifica isto dizendo: "A Regra de Três é comumente chamada, A Regra de Ouro, e de fato pode ser assim denominada, pois, como ouro transcende todos os outros metais, assim o faz esta regra todas as outras da Aritmética ". O termo continua em uso na Inglaterra até o final do século 18, pelo menos, talvez, ser abandonado por causa de seu uso na Igreja. (SMITH, 1958, p.486).

De acordo com Gómez (2006), o ensino dos problemas típicos de regra de três, em função da vasta tradição, acabou por determinar uma estrutura que os localizava em um bloco de conteúdos no final dos estudos da aritmética, composto pela teoria das razões e proporções.

Esses conteúdos, Segundo Gómez (2006), eram considerados os mais importantes por se destacarem pelas inúmeras aplicações ensinadas por meio de exemplos práticos agrupados com nomes que até hoje ainda utilizamos: regra de três simples, problema que consiste em determinar um quarto número, conhecidos os outros três; regras de três composta que se caracteriza por apresentar mais de uma regra de três simples; regra de companhia, situações de divisão de bens; regra da falsa posição, que usa números arbitrários e supostos para encontrar o verdadeiro e outros como regra conjunta, câmbios (trocas de moedas), escalas, e regra de desconto comercial. Esse autor relata ainda que a metodologia de ensino associada à regra de três se sustentava na ideia de que sua aprendizagem era uma espécie de treinamento em torno de certos rituais relacionados com o uso de palavras- chave, a ordem dos termos, a disposição prática dos dados numéricos, o método de resolução e a sequência de apresentação das ideias as quais passarei a apresentar a seguir.

As palavras- chave.

Tinham como função, de acordo com Gómez (2006), descrever os termos da proporção como no exemplo abaixo:

> Se *p* (*argumento, ou pramana*) produz (*fruto, ou phala*), o que produzirá *i (o pedido ou iccha)?* Sugere-se que as três quantidades se escrevam assim:
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | *P* | *f* | *i* |
>
> Onde p e i são da mesma denominação e f de denominação diferente. Para obter o resultado que se procura tem que multiplicar a quantidade do meio pela última quantidade e dividir pela primeira. (CHEVERGHESE,1996, p.352, apud GÓMEZ, 2006)

Isso ilustra o uso das palavras argumento, fruto e iccha, usadas para nomear os termos da proporção da mesma forma, que segundo Gómez (2006) as aritméticas italianas do Renascimento utilizavam as palavras agentes e pacientes. Nesse caso, o primeiro termo da proporção é o agente presente e seu paciente correspondente é o segundo; o terceiro termo é o agente futuro e seu paciente é a quantidade demandada (BROOKS, 1880 p.329). Outras palavras chave Gómez (2006) destaca que se encontram nos textos espanhóis dos séculos XVI a XVIII: valor ou preço e ganho ou perda, introduzidas pela aritmética comercial. Também é similar a de causas e efeitos que se introduziu posteriormente considerando os problemas de proporção como comparação de duas causas e dois efeitos levando em consideração que os efeitos são proporcionais as causas. Essa é a forma usada por Vallejo (1841, p.348) junto com os termos: circunstâncias, quantidades principais e relativas, o suposto e a pergunta como relata: *em toda regra de três simples entram três quantidades conhecidas: duas do suposto e uma da pergunta.* Essa forma de enunciado, como descreve Vallejo (1841), caracteriza, até os dias atuais, os enunciados dos problemas ditos de regra de três.

A ordem dos termos

Desde o princípio, procurou-se uma forma padrão para ordenar os termos da proporção. Essa ordenação leva em conta duas condições: o primeiro e o terceiro termo são da mesma espécie ou denominação e que o resultado, que corresponde ao quarto termo, obtido pelo produto do segundo pelo terceiro, seja da espécie do segundo (GÓMEZ, 2006), como faz Lacroix (1839, p.289) quando escreve a proporção $13^{(V)}: 18^{(V)}: 130^{(r)}: x^{(r)}$ correspondente à resolução do seguinte problema

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo conhecimento com inteira certeza que 13 varas de certo lienzo custam 130 reais se nos perguntarem, quantos reais custarão no mesmo preço, 18 varas do mesmo lienzo? (LACROIX, 1839 p.280)

A disposição das grandezas não é arbitrária, ou melhor, segue da fundamentação na proporcionalidade, pois a proporção, a razão, só é admitida entre grandezas de mesma espécie. Assim, a primeira razão deve ser entre o primeiro e terceiro termo que são de mesma espécie e a segunda razão, de modo similar, entre o segundo e quarto termos que devem ser de mesma espécie. Essa disposição segue até os dias atuais nos livros didáticos, embora em outro registro em que se omitem os super-índices que indicam as espécies das grandezas, como segue abaixo.

$$\frac{13}{18} = \frac{130}{x}$$

Esse registro, embora ratifique o processo da regra de três sem explicita fundamentação, traz consigo conseqüências que segundo nosso entendimento podem ter limitado de seu uso, principalmente na escola, no sentido da proporção, já que não permitiria escrever a expressão abaixo.

$$\frac{13}{130} = \frac{18}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{130} = \frac{18}{13}$$

Que, embora seja algebricamente equivalente à expressão anterior, não encontra respaldo pela noção de proporção como posta por Euclides, que exige que a razão só seja admitida entre grandezas de mesma espécie, ou ainda não obedeceria à convenção de disposição dos dados.

A disposição prática dos dados numéricos

Para dispor os dados numéricos dos problemas de regra de três recorreu-se a vários arranjos ou notações. Nas aritméticas italianas do Renascimento do século XIV e na Espanha no mesmo período os dados eram separados por linhas horizontais (*a* — *b* — *c*). De acordo com Gómez (2006), com o passar do tempo outras formas surgiram em outros locais como a usada por Tartaglia (1500) *a* || *b* || *c* e o inglês Record (1543) que usava a disposição em forma de quadro.

Gómez (2006), afirma que a necessidade de mostrar a presença da proporção nos problemas de regra de três utilizou-se a notação *a. b: c*. x e finalmente, Vallejo (1841) usava as formas utilizadas universalmente a: b:: c: *x* que expressa a proporção em forma de equação $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Além disso, Smith (1958) chama a atenção de que na velha regra de três o resultado era naturalmente escrito ao lado direito e por essa razão a quantidade desconhecida toma lugar ao lado direito nos problemas comerciais de proporção. Essa característica não é observada nos livros e no fazer de nossos professores.

Os métodos de resolução

Ao longo do tempo, em termos práticos, pouco mudou o processo de resolução dos problemas de regra de três, mas variantes foram construídos buscando resolver, de forma mais prática, o maior número de problemas. Gómez (2006) apresenta alguns métodos anteriores ao final do século XX, os quais descreveremos a seguir.

Certamente que a apresentação destes processos no entendimento que insere a regra de três como uma prática social na história, poderão nos ajudar a buscar construir uma nova compreensão que nos possibilite compreender os motivos que levam a regra de três ser pouco valorizada enquanto objeto de ensino, mantendo-se como um tema da matemática escolar desconexo tecnicamente de outros temas matemáticos e extra-matemáticos.

a) Método regrado

Segundo Gómez (2006) é a forma mais tradicional de resolução dos problemas do tipo regra de três, que corresponde à execução de uma seqüência de passos, que sem a necessidade de saber a razão nem a explicação dos mesmos, levam a obter a resposta de uma maneira mecânica, breve e de fácil memorização. Em nossa opinião, todos os métodos usados na atualidade podem ser classificados como regrados, pois mesmo tendo ou não fundamentação subjacente, o que importa são os passos que levam à solução do problema. O exemplo abaixo retirado de Santa Cruz (1794) ilustra uma situação.

> Se três melões me custam dois reais, doze melões quanto me custarão?
>
> Estando formada a regra de três do modo aqui proposto, está bem ordenada para alcançar o que desejamos, convêm saber, aqueles reais que custaram os doze melões. Manda a regra de três multiplicar o numero do meio, que é 2, pelo terceiro, que é 12 ou o contrario, e o precedido que é 24 seja dividido para três companheiros, convém saber pelo 3, que é o primeiro número, e virá o quociente 8, e tantos reais custaram os 12 melões, e ficará a conta acabada, como denotam esses quatro números proporcionais 3, 2, 12, 8[7]. (SANTA CRUZ,1794 p.335) [Tradução nossa]

Como se observa, a resolução do problema é aplicação direta da proporcionalidade, bastando identificar que são os termos em sua ordem, primeiro, segundo, terceiro e quarto, para em seguida aplicar a “regra”: o produto do segundo pelo terceiro dividido pelo primeiro. Não há análise da

---

[7] Si tres melones me cuestan dos reales, doce melones qué me costarán?
Estando formada la regla de tres del modo que aquí he propuesto, está bien ordenada para alcanzar lo que deseamos, conviene saber, aquellos reales que valdrán los doce melones. Manda la regla de tres multiplicar el número de en medio, que es 2, por el tercero, que es 12. ó a la contra, y lo procedido que es 24 sea partido a tres compañeros, conviene a saber, por el 3, que es el numero primero, y vendrán al cociente 8, y tantos reales costarán los 12 melones, y quedará la cuenta acabada, como denotan estos quetro números proporcionales 3,2,12,8.

situação, mas a ordenação como um problema de regra de três e a conseqüente aplicação da regra.

Uma versão, com “toques algébricos”, para esse problema que ainda se exercita nos dias atuais é a que segue.

$$x = \frac{12 \times 2}{3}$$

Esse fazer foi cristalizado com esse “toque algébrico” com respeito a algumas aplicações da vida real, como para os problemas de regras de três que envolvem juros simples, que passam a ser traduzidos pela fórmula que dá conta de todas as situações daquele tipo.

$$j = \frac{C \times i}{100}$$

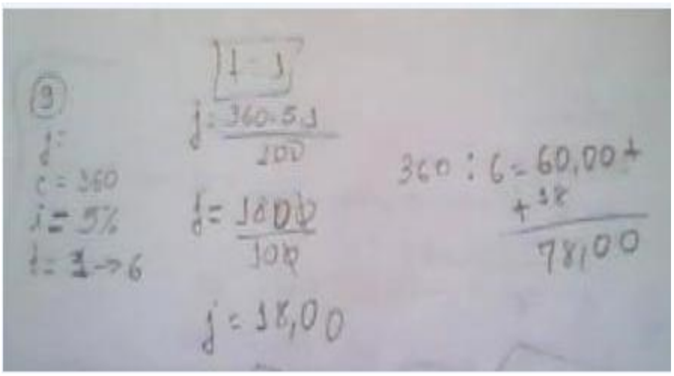


Foto 06: uso da fórmula de juros simples

b) Método da proporção:

Segundo Gómez (2006) a partir da preocupação dos Árabes em fundamentar o processo aritmético da regra de três na doutrina das razões e proporções levou a enunciar como uma regra objetiva para encontrar o quarto termo de uma proporção. É claro que o quarto termo da proporção como incógnita foi uma convenção assumida pela tradição da resolução dos problemas de regra de três, como apontamos acima sobre a disposição dos dados.

Dessa maneira o método consiste em apresentar a proporção correspondente ao problema a ser resolvido e aplicar-lhe as propriedades das razões e proporções como faz Lacroix no exemplo a seguir.

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo feito um jornaleiro 217,5 varas de obra em 9 dias, pergunta-se quantos dias necessitará o mesmo jornaleiro para fazer 423,9 varas da mesma obra nas mesmas circunstâncias? No exemplo anterior teremos imediatamente, observando a regra, a seguinte proporção:
>
> $$217{,}5^{V} : 423{,}9^{V} : : 9^{d} : x^{d}$$
>
> Em atenção para que o termo desconhecido deve ser maior que nove, por serem necessárias tantos mais dias quanto mais varas de obra tenha que executar. (LACROIX, 1839, p. 289)

Pode-se observar na resolução do problema a preocupação com a ordem dos termos sujeitas à exigências da fundamentação da proporcionalidade que exige a razão entre grandezas de mesma espécie. Essa preocupação é explicitada pelo super-índice nos dados do problema quando postos em proporção. No entanto, tal fazer não era unanimidade como pode ser observado a seguir.

c) Método da redução à unidade

Segundo Gómez (2006), a resistência à algebrização da regra de três, talvez se deva, entre outros aspectos, ao medo da inovação e a realidade escolar em que os estudos terminavam com aritmética e considerava os problemas de proporcionalidade como culminância em que se colocavam em jogo os números fracionários, as operações elementares, as proporções e a regra de três em suas diferentes aplicações a situações da vida real. Gómez (2006) ressalta que

> Nessa tessitura começou impor-se um método em um estilo de pensamento que não depende das proporções e nem das equações, são da análise para encontrar a solução sem ter que depender de recordar de regras mais ou menos artificiais. Uma das formas desse método analítico será conhecida pelo nome de método de redução à unidade (como aparece em CIRADE, 1865, p.218; SANCHES E VIDAL, 1866, p.321; SÓLIS, 1892, p.42; BOURDON, 1848, p.235). Tradução nossa]

Esse método depende da análise da questão e a dedução das conseqüências que resultam desta análise, consistindo em buscar o valor da grandeza de mesma espécie da incógnita que corresponda a um valor da outra grandeza igual a 1.

> Suponhamos em primeiro lugar que sabendo com inteira certeza que 13 varas de um certo lienzo custaram 130 reais, pergunta-se: quantos reais custarão ao mesmo preço 18 varas do mesmo lienzo?
> É certo que nos será muito fácil determinar o verdadeiro preço de cada vara de lienzo, achando o quociente 10 reais que resulta da divisão do valor total 130 reais pelas 13 varas compradas anteriormente, e já que sabemos este preço, multiplincando-o por 18, que é o número de varas da segunda compra, resultará o produto 180 reais, verdadeiro valor total que fora perguntado.[8] *(*LACROIX, 1839 p. 280*)* [Tradução nossa]

Smith (1958) refere que na Inglaterra, essa prática veio a significar parte da aritmética comercial, nos quais eram utilizados processos curtos e cita que Baker (1568) a menciona nas seguintes palavras:

> Alguns chamam essa regra de prática, regras breves: por que, muitas perguntas podem ser feitas com uma rápida reação, pela regra de três. Há outros que a chamam multiplicação de pequeno porte, porque o produto é sempre menor em quantidade, do que o número que será multiplicado. (SMITH,1958 p.493)

Seguindo, Smith (1958) afirma que esta declaração bastante indefinida deu lugar a definições mais claras com o passar do tempo e, Greenwood (1729) fala da prática da seguinte forma:

> Esta regra é uma contração, ou melhor, uma melhoria da Regra de três, e executa todos os casos, onde a unidade é o primeiro termo, com a expedição de tal, e da facilidade, que é, de uma maneira extraordinária, montada para a prática do comércio e de mercadorias , e a partir daí recebe o seu nome.(SMITH, 1958 p.494)

Como podemos observar a resolução do problema proposto por Lacroix (1839, p.280) citado anteriormente, em registro numérico é

---

[8] Supongamos en primer lugar que habiéndose sabido con entera certeza que 13 varas de un cierto lienzo han costado todas 130 reales, se nos pregunte, *cuántos reales costar han al mismo precio 18 varas del mismo lienzo?*

Por descontado nos será muy fácil determinar el verdadero precio de cada vara de lienzo, hallando el cociente 10 reales que resulta de La división del valor total 130 reales por las 13 varas que se suponen compradas primeramente, y ya que sabemos este precio, si lo multiplicamos ahora por 18, que es el número de varas de la segunda compra, nos resultará por producto 180 reales, verdadero valor total que se nos preguntaba. Lacroix (1839, p.280)

$$\frac{130}{13}\times 18 = 180$$

que envolve explicitamente a razão entre grandezas de espécies diferentes, contraria o fundamento da proporcionalidade. Foi como citado um processo que se impôs pelo uso em atividades específicas, como uma prática.

d) Método algébrico

No inicio do século XIX, segundo Gómez (2006), já se afirmava de forma generalizada que o método algébrico era o melhor para resolver determinados problemas de larga tradição aritmética. Para ele, esse método teria, segundo Lacroix (1846), duas partes que consistem em:

1) Traduzir para linguagem algébrica as condições do problema ou relações que estabelecem o que chamamos de traduzir os problemas em equações;

2) Deduzir da equação a fórmula que nos indique a série de operações que devemos executar com as quantidades conhecidas para determinar o valor da incógnita, ou seja, resolver a equação ou clarear a incógnita.

O Método algébrico, segundo Gómez (2006) se aplicava aos problemas de razão e proporção quando se apresentava sua resolução considerando as razões como frações e a proporção como equação como no exemplo seguinte:

> Um senhor promete ao seu criado 10 moedas e uma capa ao ano. Depois de sete meses o despede. Correspondendo-lhe 2 moedas e uma capa. Quanto vale esta?
> Suponhamos que a capa vale x moedas.
> O pacto inicial é 10+x moedas ao ano, e o que lhe dará por 7 meses será 2+x;

E_1= salário	E_2 = tempo em n meses
10+x	12
2+x	7

> Como estabelecemos a relação entre as duas coisas? Pelo saldo mensal que nos dois casos será o mesmo, ou seja:

$$\frac{(10+x)}{12}=\frac{(2+x)}{7}$$

Resposta: x=9,2 moedas. (Clavius. s. XVII, Matemático alemán. Cit. Mc Graw Hill. Bachillerato 1º. Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 1996, p. 18) apud Gómez (2006)[9].

Segundo Gómez a incorporação da linguagem algébrica modificou o aspecto do método da proporção de duas maneiras: Os registros de pontos deram lugar à igualdade de razões e em vez da aplicação da propriedade das proporções, isola-se a incógnita.

A conseqüência para o ensino, em nossos dias, do processo de algebrização nesse sentido, é a ambigüidade que se revela no fazer desprovido de proporcionalidade, mas que pode ser justificado pela proporcionalidade. De outro modo, a algebrização no sentido acima posto acaba por legitimar o processo mecanizado com fundamento da tradição, do jeito de fazer, e ao mesmo tempo pode ser visto como conseqüência da fundamentação na proporcionalidade.

As observações das atitudes e dos registros dos professores pesquisados observaram essa ambigüidade. Todos assumem como problemas de proporcionalidade, mas no curso de resolução a proporcionalidade é esquecida e o problema é reduzido à resolução de uma equação. Isso

---

[9] Un señor promete a su criado 10 monedas y una capa al año. Después de siete meses lo despide, correspondiéndole 2 monedas y una capa. ¿Cuánto vale ésta?
Supongamos que la capa vale x monedas.

El pacto inicial es 10 + x monedas al año, y lo que le da por 7 meses es 2+x.

E1 = salario	E2 = tiempo en meses
10 + x	12
2 + x	7

¿Cómo establecemos la relación entre las dos cosas? Por el sueldo mensual que en los dos casos será el mismo, es decir :

(10 + x) / 12 = (2 + x) / 7.

Sol. 9,2 monedas.

(Clavius. s. XVII, Matemático alemán. Cit. Mc Graw Hill. Bachillerato 1º. Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 1996, p. 18) apud por Gómez (2006).

definitivamente reduz significativamente, ou até o fim, do método da redução à unidade na escola.

e) Método aritmético-algébrico de Vallejo

Segundo Gómez (2006), Vallejo (1846, p.350-351) faz seu o método da redução à unidade para fazer a análise da questão. E com o objetivo posto na dedução da regra:

> “toda dificuldade na resolução da regra de três consiste em apresentá-la; porque depois de apresentada tudo está em achar o quarto termo de uma proporção geométrica. Assim devemos indagar se pode achar a priori alguma regra que na prática nos possa conduzir a esse esboço sem equivocar a questão, que é o que normalmente acontece principalmente quando a regra de três é inversa.
>
> Suponhamos antes de tudo que a regra de três é direta, e que se pede o efeito que produzirá uma quantidade c sujeita as mesmas circunstâncias em que a quantidade a tem produzido o efeito b; como não conhecemos esse efeito que buscamos, chamaremos de x e teremos que, sendo b o efeito que tem produzido a quantidade a, $\frac{b}{a}$ será o efeito que haverá produzido cada unidade das que contenha a; e como c deve ser da mesma espécie que a, e está sujeita às mesmas leis, em cada unidade que contenha produzirá $\frac{b}{a}$; logo, toda quantidade c produzirá tantas vezes o efeito $\frac{b}{a}$ como unidades haja em c; logo o efeito de c estará representado por $\frac{b}{a}c$, e pelo mesmo será $x = \frac{b}{a}c = \frac{cb}{a}$ que simplificando o divisor, resulta em $\mathrm{ax} = \mathrm{bc}$ ou colocando em proporção será $\mathrm{a : b :: c : x}$ ou $\mathrm{ac :: bx}$..
>
> Logo, em geral para apresentar uma regra de três direta deverá por como primeiro termo a quantidade principal do suposto, depois qualquer das outras duas, a saber, a relativa do suposto ou a principal da pergunta, depois a outra e o quarto termo da proporção será o que se busca; que para encontrar-lhe não tem que multiplicar o segundo pelo terceiro, e dividi-lo pelo primeiro. ”[10] (VALLEJO,1846 pp.350-351)

[10] “Toda la dificultad en la resolución de la regla de tres consiste em plantearla; porque después de planteada todo está en hallar el cuarto término de una proporción geométrica. Así, debemos indagar si se puede hallar a priori alguna regla que en la práctica nos pueda conducir a dicho

Em resumo, uma vez estabelecida a regra, Vallejo (1846, pp.351-352) passa a exemplificar a prática por meio de exemplos resolvidos sem fazer a análise de cada problema, um a um, pois como já tem uma regra deduzida se limita a mostrar como se aplica, como se observa no exemplo a seguir.

> Entendido isto, passaremos a resolver alguns exemplos.
>
> 1º Sabe-se que 300 soldados tem aberto em um tempo qualquer 1200 varas de trincheira; para abrir 6000 varas no mesmo tempo, quantos soldados são necessários?
>
> Aquí a quantidade principal e sua relativa são 1200 varas e 300 soldados, logo, apresentaremos a questão do seguinte modo:
> $1200vs : 6000vs :: 300s : x$
> $x = \frac{300.6000}{1200} = \frac{300.5.12}{12} = 300.5 = 1500$ e concluo que é necessário por 1500 homens para trabalhar.
> 2° Um sujeito deseja saber o que lhe produzirão 86235 reais que vai ser depositado em um fundo a 5 por 100.
> Aquí a quantidade principal do suposto é 100, porque a questão quer dizer que 100 reais tem produzido crédito ao ano de 5 reais; e assim a operação se executará como se vê:
> $100rs : 5rs :: 86235rs : 4311,75rs = 4311rs$ e $25,5mrs$.
>
> 3° Um sujeito quer averiguar um capital que lhe produz 42321 reais a 3 por 100.

---

planteo sin equivocar la cuestión, que es lo que suele suceder mayormente cuando la regla de tres es inversa.
Supongamos ante todas cosas que la regla de tres es directa, y que se pide el efecto que producirá una cantidad c sujeta a las mismas circunstancias en que la cantidad a ha producido el efecto b; como nosotros no conocemos este efecto que buscamos, le llamaremos x, y tendremos que siendo b el efecto que ha producido la cantidad a, $\frac{b}{a}$ será el efecto que habrá producido cada unidad de las que contenga a; y como c debe ser de la misma especie que a, y está sujeta a lãs mismas leyes, por cada unidad que contenga producirá $\frac{b}{a}$; luego toda la cantidad c producirá tantas veces el efecto $\frac{b}{a}$ como unidades haya en c; luego el efecto de c estará representado por $\frac{b}{a}.c$, y por lo mismo será x = $\frac{b}{a}.c = \frac{cb}{a}$, que quitando el divisor da $ax = bc$ o poniendo em proporción será $a : b :: c : x$ *ó* $ac :: bx$.

Luego, en general, para plantear una regla de tres directa se deberá poner por primer término la cantidad principal del supuesto, después cualquiera de las otras dos, a saber, la relativa del supuesto o la principal de la pregunta, después la otra y el cuarto término de La proporción será lo que se busca; que para encontrarle no hay masque multiplicar el segundo por el tercero, y partir esto por el primero”. (VALLEJO, 1846 pp.350-351)

> Aquí a quantidade do suposto é 3; e assim, executando a operação, concluirei que o capital que tem no fundo é 1410700 reais.
> 4° Sei que 1728 varas de Aragon equivalem a 1597 espanholas; se quero averiguar as varas espanholas que compoem 5000 aragonesas, executarei a operação como aquí se vê: 1728 varas aragonesas : 1597 varas espanholas : : 5000 aragonesas : 4620,949 espanholas[11]. (VALLEJO, 1846 pp.351-352)

Aqui é onde se distancia do método que propõe Lacroix (1839), para quem a análise da questão é em si mesma o método de solução.

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo conhecimento com inteira certeza que 13 varas de certo lienzo custam 130 reais se nos pergunte, quantos reais custarão no mesmo preço 18 varas do mesmo lienzo?
>
> É claro que será muito fácil determinar o verdadeiro preço de cada vara de lienzo, achando o quociente 10 reais que resulta da divisão do valor total 130 reais pelas 13 varas que se supõem compradas inicialmente, e já que sabemos este preço, se o multiplicarmos agora por 18, que é o numero de varas da segunda compra, nos resultará por produto 180 reais, verdadeiro valor que nos perguntavam[12]·. (LACROIX,1839 p.280). [Tradução nossa]

---

[11] Entendido esto pasaremos a resolver algunos ejemplos.
1º Se sabe que 300 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 1200 varas de trinchera; para abrir 6000 varas en el mismo tiempo, cuantos soldados se necesitarán? Aquí la cantidad principal y su relativa son 1200 varas y 300 soldados, luego plantearemos la cuestión del modo siguiente
1200 vs : 6000 vs :: 300s : x : x = 300x6000/1200 = 300x5x12/12= 300x5 =1500, y saco que se necesitan poner a trabajar 1500 hombres

2º Un sujeto desea saber lo que le producirán 86235 rs. que va a imponer en un fondo al 5 por 100. Aquí la cantidad principal del supuesto es 100, porque la cuestión quiere decir que 100 reales le han dado de rédito al año 5 reales; y así la operación se ejecutará como aquí se ve:
100 rs. : 5rs. :: 86235 rs. : 4311,75 rs. = 4311 rs. Y 25,5 mrs.
3º Un sujeto quiere averiguar el capital que le produce 42321 rs.. al tres por 100. Aquí la cantidad principal del supuesto es 3; y así, ejecutando la operación, sacaré que el capital que tiene en el fondo es 1410700 rs.
4º Sé que 1728 varas de Aragon equivalen a 1597 españolas; si quiero averiguar las varas españolas que componen 5000 aragonesas, ejecutaré la operación como aquí se ve: 1728 vs – ar. : 1597 esp. :: 5000 ar. : 4620,949 esp. (VALLEJO,1846 pp.351-352)

[12] Supongamos en primer lugar que habiéndose sabido con entera certeza que 13 varas de un cierto lienzo han costado todas 130 reales, se nos pregunte ¿cuántos reales costarán al mismo precio 18 varas del mismo lienzo?
Por descontado nos será muy fácil determinar el verdadero precio de cada vara de lienzo, hallando el cuociente 10 reales que resulta de La división del valor total 130 reales por las 13 varas que se suponen compradas primeramente, y ya que sabemos este precio, si lo

Os métodos seguintes surgiram segundo Gómez (2006), no final do século XX apontando novos enfoques de resolução para os problemas de regra de três:

f) Método da constante de proporcionalidade

De certo modo, este método parece ser uma versão funcional do método de redução à unidade, mas ainda que seu fundamento seja o mesmo, a análise da questão não o é, já que não se faz menção que o valor 5, do exemplo, é o valor unitário.

> Quanto tem que pagar por 100 copias, se por 3 se paga 15 PTA?
> Seja x o preço de 100 copias. A relação de proporcionalidade é:
>
> $$\frac{x}{100} = \frac{15}{3} = 5$$
>
> Utilizando a constante de proporcionalidade tem-se;
> *x=100·5 = 500 PTA.*[13] (SM.1998, 2º Secundaria apud Goméz, (2006)

g) O método do produto cruzado

Este método parece uma combinação do método algébrico com o da proporção. Por um lado se usa a linguagem algébrica para apresentar a equação que vem determinada pela igualdade de razões, mas em vez de clarear a incógnita, aplica-se uma das propriedades da proporcionalidade: a igualdade do produto em cruz.

---

multiplicamos ahora por 18, que es el número de varas de la segunda compra, nos resultará por producto 180 reales, verdadero valor total que se nos preguntaba. Lacroix (1839, p.280)

[13] *¿Cuánto hay que pagar por 100 copias si por 3 se pagan 15 PTA?*

Sea x el precio de 100 copias. La relación de proporcionalidad es:

$$\frac{x}{100} = \frac{15}{3} = 5$$

Utilizando la constante de proporcionalidad se tiene: x=100·5 = 500 PTA. (SM.1998, 2º Secundaria)

Para fazer compota de maçã, para cada 4 quilos de maçãs são necessários 3 quilos de açucar. Tem-se 9 kilos de açúcar, quantos quilos de maçãs teremos que utilizar?

Solução:

quilos de maçãs	4	x
quilos de açúcar	3	9

A relação de proporcionalidade é 4/3 = x/9. Utilizando o método do produto cruzado: 4.9=3x.

(SM .1998,2° Secundaria) apud Gómez,(2006) [14]

Este último parece ser o preferido atualmente pelos autores dos livros textos escolar e que se revelou no fazer dos professores cursistas.

Como se observa, parece ter havido, ao longo do tempo, uma busca de uma sistematização mais adequada para aplicação do método de regra de três. Embora esteja presente em vários momentos a fundamentação na proporcionalidade, como a demonstrada por Lacroix (1839), muito se buscou ao longo do tempo a sistematização que tornasse o processo rápido, simples e seguro para o enfrentamento de situações típicas de práticas sociais, pois segundo Brooks (1880, p.337)

Tanto Di Borgo quanto Tartaglia procuraram incluir todos os casos possíveis da prática mercantil sobre a Regra de Três, dando inúmeros exemplos e classificando-os de várias formas. Os italianos também foram inventores da regra Prática, que eles tinham como aplicação da Regra de Três. Tartaglia deu alguns exemplos práticos e interessantes, com vários métodos engenhosos de solução. A grande conveniência desta regra para apresentar os cálculos que eram continuamente executados nos negócios e comércios, fazendo-os um estudo favorito com práticas aritméticas, e eles assumiram de tempo

[14] Para hacer compota de manzana, por cada 4 kilos de manzanas se necesitan 3 kilos de azúcar. Si tenemos 9 kilos de azúcar, ¿cuános kilos de manzanas habrá que utilizar?

kilos de manzanas	4	x
kilos de azúucar	3	9

La relación de proporcionalidad es 4/3= x/9. Utilizando el método del productos cruzadas: 4.9=3.x.(SM.1998, 2° Secundaria,p. 105)

> em tempo um constante crescimento claro e distinto da forma[15]. (BROOKS, 1880 p.337). [Tradução nossa]

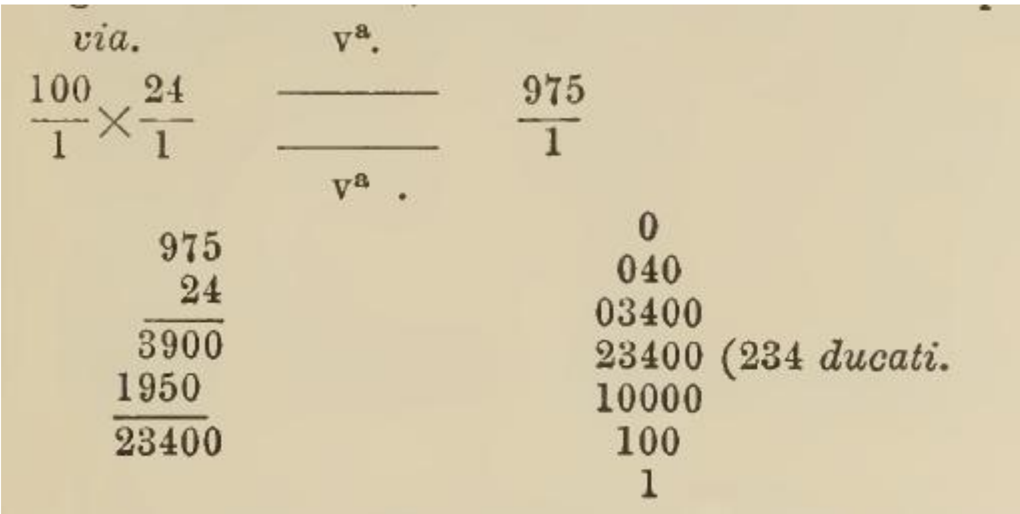
Além disso, Brooks (1880 p.326) referindo à regra de três em Lilawati (sec. XII) escreve: Não é dada nenhuma prova desta regra, e não é feita referência à doutrina da proporção em que é fundada[16] e sobre as diferentes formas de resolução destaca o método de Di Borgo (1445-1514) utilizado para resolver o seguinte problema:

[15] Both Di Borgo and Tartaglia sought to include every possible case of mercantile practice under the Rule of Three, giving numerous examples and classifying them in various ways. The Italians were also the inventors of the rule of Practice, which they regarded as an application of the Rule of Three. Tartaglia gives some interesting and practical examples, with various ingenious methods of solution. The great convenience of these rules for performing the calculations which were continually occurring in trade and commerce, made them a favorite study with practical arithmeticians, and they assumed from time to time a constantly increasing neatness and distinctness of form.

[16] ."No proof of the rule is given, and no reference is made to the doctrine of proportion upon which it is founded"

> Se 100 libras de açúcar refinado custam 24 ducats, quanto custará 975 libras?

Cuja solução é mostrada abaixo,


via. vª. vª.

$\frac{100}{1} \times \frac{24}{1}$ —— —— $\frac{975}{1}$

975
24
3900
1950
23400

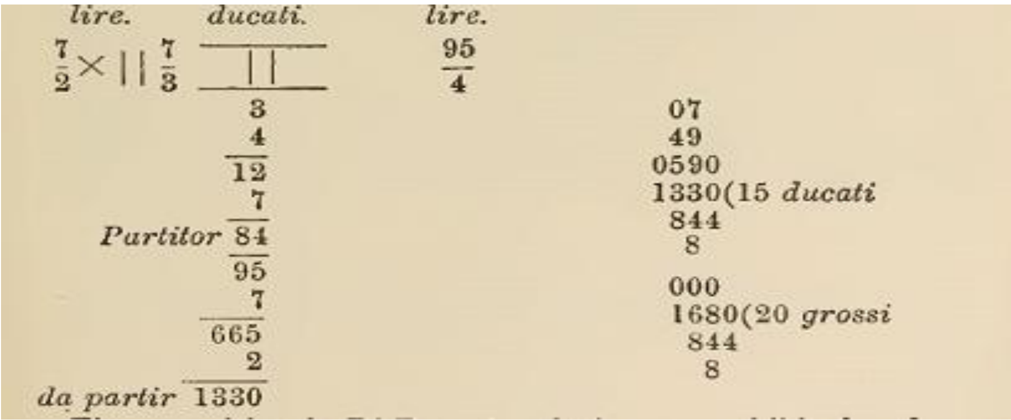
0
040
03400
23400 (234 *ducati.*
10000
100
1

(BROOKS,1880 p.329)

E outro, onde utilizava também para dados fracionários mostrado no problema apresentado por Tartaglia (1500-1557):

> Se 3 ½ de libras de ruibarbo custam 2 1/3 de ducats, quanto será o custo de 23 ¾ de libras?

E a resolução como segue:


lire. *ducati.* *lire.*

$\frac{7}{2} \times || \frac{7}{3}$ —— $\frac{95}{4}$

3
4
12
7
Partitor 84
95
7
665
2
da partir 1330

07
49
0590
1330(15 *ducati*
844
8

000
1680(20 *grossi*
844
8

(BROOKS, 1880 p.329)

Pelos registros apresentados observa-se que se trata de problemas aritméticos cujas resoluções evidenciam a intencionalidade de Di Borgo que "é tornar o processo mais geral, sendo igualmente aplicável a frações e a números inteiros” Brooks (1880, pp 329-330), o que já revela a preocupação em tornar a técnica de caráter prático aplicável a um número cada vez maior de problemas dessa natureza.

Brooks (1880, p.336) citando Di Borgo, apresenta o seguinte problema:

> Uma pessoa compra joias por certo número de *fiorini*, eu não sei quanto, e vende-a novamente por 50. Após fazer seus cálculos, ele acha que ganha 3 1/ 3 de soldi em cada fiorino, que contem 100 soldi. E pergunta qual é o primeiro custo?

Veja que a solução explicada por ele mostra outro método:

> Suponha que custe uma soma de sua escolha; tome 30 *fiorini*, o ganho sobre o que amontoará 100 soldi, ou 1 fiorino: 1 adicionado a 30 faz 31; e você diz que isto dá em 50 entre o capital e o ganho; a posição é em todo caso falsa, e a verdade será obtida ao dizer, se 31 em capital e ganho surge de um mero capital de 30, de qual soma aparecerá 50. Multiplique 30 por 50, o produto é 1500; dividindo-se isso por 31, o resultado é 48 12/31 e assim eu acho o primeiro custo da joia. (BROOKS, 1880 p.336) [Tradução nossa]

Nesses casos, observa-se que os problemas de Di Borgo e Tartaglia se configuravam como problemas em que a solução seguia um algoritmo e procuravam incluir todos os casos possíveis da prática mercantil sobre a regra de três, dando numerosos exemplos e classificando-os de várias formas (BROOKS, 1880, p.337) [Tradução nossa]

Isso parece revelar que os problemas/situações enfrentados eram corriqueiros em diferentes atividades humanas e, como tal, não estavam e não estão em discussão. O interesse estava no aperfeiçoamento da técnica que quando alcançado teve seu ensino perpetuado por meio de sua difusão/ensino como um fazer mecânico para uma classe de tipos de problemas de interesses de grupos sociais.

A relação de proporcionalidade pela mecanização também se tornou inquestionável. Independente de as grandezas apresentarem uma explicita proporcionalidade, o enunciado do problema torna as grandezas proporcionais e resta ao sujeito que enfrenta a situação decidir se é direta ou inversa.

Assim, os questionamentos anteriores sobre o ritual de ação dos professores cursistas frente aos problemas propostos parece se tornar mais compreensível à medida que o comportamento ritual no enfrentamento de situações do tipo regra de três foi buscado e aperfeiçoado pela comunidade de especialistas e não especialista, pela tradição de uso, com o propósito de aplicação e da difusão/ensino desse método. Parece-nos que a ambigüidade entre tradição das práticas e a fundamentação de especialista permeia em muito nosso fazer da regra de três.

Ao considerar a ambigüidade da proporcionalidade na aplicação da regra de três e isso nos faz questionar *Será que há a necessidade de se assegurar a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas num problema que se anuncia como de regra de três para assumi-lo como tal?* Isso exige melhor compreender esse fazer de regra de três nas práticas sociais e na escola para construir possíveis respostas para nossa indagação. É o que buscamos a seguir.

4- A REGRA DE TRÊS COMO PRÁTICA SOCIAL DE MODELAGEM

Como notamos, a regra de três é tratada como método de resolução de tipos de problemas que se caracterizam, grosso modo, por encontrar um valor de uma grandeza quando conhecidos dois ou mais valores de outras grandezas. Desse ponto de vista a consideram como um método prático para resolver problemas que envolvem grandezas, assumidas em geral sem reflexões, como direta ou inversamente proporcionais. Tal fazer dos professores cursistas parece se justificar à medida que essa prática se mostra necessária em outras etapas do ensino, inclusive em diferentes atividades do fazer extra-matemático escolar, para o enfrentamento de situações que se anunciam como problemas do *tipo regra de três* como estudados inicialmente e que se fazem presente a longo tempo nos textos escolares como revelam os exemplos, o primeiro extraído da obra de Lacroix (1839 p.280), a seguir.

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo conhecimento com inteira certeza que 13 varas de certo lienzo custam 130 reais se nos perguntarem, quantos reais custarão no mesmo preço, 18 varas do mesmo lienzo? (LACROIX, 1839 p.280) [17],

Ou ainda o seguinte problema extraído do livro didático de Name (2005, p.174):

> Em 50 minutos de exercícios físicos perco 1600 calorias. Quantas calorias perderei em duas horas, mantendo o mesmo ritmo?

Como podemos perceber, as tarefas escolares sobre a regra de três parecem perpetuadas ao longo do tempo e, nesse sentido, em meu ponto de vista, há uma baixa valorização da regra de três que se corporifica no fazer didático pontual de seu ensino que, de certa forma, fica limitado a técnicas para resolver tipos de problemas característicos. Em geral, o tema tem merecido capítulo a parte nos livros textos que evidenciam o tema isoladamente e parece

---

[17] Supongamos en primer lugar que habiéndose sabido con entera certeza que 13 varas de un cierto lienzo han costado todas 130 reales, se nos pregunte ¿cuántos reales costarán al mismo precio 18 varas del mismo lienzo?

seguir o mesmo ritual dos antigos manuais escolares, com ênfase nas técnicas e problemas específicos em que o enunciado acaba por determinar a situação enfrentada como do “tipo regra de três”.

O fazer dos professores cursistas se manifestou como um fazer estanque, pontual, do modo estudado na sexta série/sétimo ano do ensino fundamental e de pouca importância para o uso escolar e social, considerando a ausência de significados das situações práticas. Nesse sentido, o fazer docente pouco pode contribuir para o ensino que priorize as conexões com outros temas matemáticos, como é evidenciado na obra de Bianchini (2006, p.197-208.), por exemplo, quando trata do tema porcentagem, logo após o estudo de regra de três, sem evocar a técnica de regra de três para solução dos problemas que envolvem porcentagem.

Sob um olhar histórico podemos perceber que os problemas característicos tipo regra de três são oriundos de práticas de grupos específicos que elegeram a regra de três como ferramenta imprescindível para o exercício de suas atividades. Sob esse entendimento e tendo em conta que “as práticas sociais são produtoras de conhecimento nas ações de modelar e facilitar cálculo” (FARFÁN E FERRARI, 2008 p.325) e que isso tem implicações no ensino, nos parece que esse olhar pode nos revelar algo mais sobre o ensino da regra de três, mais precisamente, a compreender a regra de três como um fazer de modelagem que emerge de práticas sociais. Assim, buscamos construir, com auxilio da história, nexos entre o fazer escolar da regra de três e o fazer das atividades ligadas aos ofícios das atividades profissionais constituídos pela sociedade que permitam compreender e explicar o caráter prático, especulativo e investigatório da regra de três como um fazer cultural aplicado no enfretamento de situações específicas e que isso pode ter influenciado a difusão na escola.

Sierra (2005), Cantoral *et al* (2006); Rios (2006); Farfan e Ferrari (2008) e outros pesquisadores, partem da ideia que um dos principais objetivos da Matemática Educativa é explicar como se constrói o conhecimento matemático considerando o papel da dimensão social nessa construção. Dentre as circunstâncias que determinam a construção do conhecimento concentramos nossa atenção nas epistemológicas e sociais da construção do conhecimento, pois

> A análise do conhecimento é de corte epistemológico, porque na maioria dos casos, faz-se necessário a busca na história das práticas sociais, afim de reconhecer nelas base de significados, ou resignificações, cuja estrutura leve a establecer a "construção do conhecimento matemático", com o qual é possível construir desenhos instrucionais[18]. (RIOS, 2006 pp.145-146)

Esse olhar aliado ao de Sierra (2005) que considera "pratica social" uma atividade do ser humano sobre o meio em que se desenvolve e que por meio das praticas sociais o homem dá sentido aos problemas fundamentais da ciência, submetendo-os às complexas relações entre eles e seu entorno, podemos dizer que os estudos que sinalizem alguns registros históricos do uso da regra de três nas atividades exercidas pelas pessoas, favorecem a compreensão da regra de três como produtoras do conhecimento que emerge nas atividades humanas.

Assim, sobre o papel da regra de três nas atividades humanas podemos começar citando Boyer (1996, p.133) por destacar que a mais importante produção matemática chinesa foi o livro Chui-Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática (250 a.C), onde são apresentados 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedade, engenharia, impostos entre outros, onde parte deles foi resolvido por regra de três. O cunho desse livro foi eminentemente prático, ou seja, da aplicação da técnica da regra de três na resolução de problemas de interesses de grupos sociais, já pode ser observado.

---

[18] el análisis del conocimiento es de corte epistemológico, por lo que, en mayoría de los casos, se hace necesaria la búsqueda en la historia de las prácticas sociales, a fin de reconocer en ellas bases de significados, o resignificaciones, cuya estructura lleve a establecer la "construcción del conocimiento matemático", con lo cual es posible construir diseños instruccionales (RIOS,2006, pp.145-146)

Em Smith (1958 p. 483) a regra é referida como Regra de Três Mercantil, do mesmo modo, Ávila (1986, p. 8) confirma que a regra de três foi muito usada no comércio por vários séculos.

Garding (1981, p.290) ao fazer referências sobre a aritmética, destaca que os conhecimentos matemáticos, inclusive a regra de três eram voltados para as atividades do comércio, segundo ele:

> Pouco depois da invenção da imprensa apareceram muitos compêndios de aritmética elementar, alguns deles tratando também de frações e de matemática comercial, em particular da equivalência de moedas, de problemas de partilhas e de taxas de juros. O fato que x=ac/b resolve a equação a/b=x/c (regra de três) mostrou ser extremamente útil. Um escritor chama-lhe a regra de ouro alegando que “é tão valiosa que ultrapassa as outras regras, assim como o ouro ultrapassa os outros metais. (GARDING, 1981, p.290)

Da mesma forma Brooks (1880, p.330), apoiado em Humfrey Backer (1562), faz considerações sobre a regra de três como a mais importante regra da aritmética ao dizer:

> [19]A regra de três é a principal e a mais excelente regra de toda a aritmética. Para todas as outras regras há necessidade dela, e ela perpassa por todas as outras, para cujos casos, é chamada pelos filósofos de regra de ouro; mas nestes últimos dias, está sendo chamada por nós como regra de três, porque é requerido três números na operação. (BROOKS, 1880 p.330). [Tradução nossa]

Mas, ao longo do tempo, dentre as diferentes atividades humanas que revelam a regra de três como um construto humano para atender interesses e intenções do homem no enfrentamento de situações sociais, nos chama atenção as práticas comercias, pois efetivamente, toda a produção aritmética ocidental dos séculos XIII, XIV e XV aparece intimamente ligada à revolução comercial e como ferramenta de apoio imprescindível de umas atividades contábeis e fiscais (DEL POTRO, 2007, p.1). Essa produção não aconteceu por especulação teórica, mas como produto do interesse das diferentes práticas e em particular a comercial, pois

---

[19] "The rule of three is the chiefest, and the most protitable, and most excellent rule of all Arithmetike. For all other rules have neede of it, and it passeth all others; for the which cause, it is sayde the philosophers did name it the Grolden Rule; but now in these later days, it is called by us the Rule of Three, because it requireth three numbers in the operation." (BROOKS, 1880 p.330).

> Ainda que exista um abismo entre o comércio internacional em grande escala e o comércio em detalhe de alguns mercadores, para todos os que praticavam cada uma de suas modalidades, da mesma forma que para outros muitos setores urbanos, interessou-lhes o desenvolvimento de uma aritmética pratica. Alguns, sentindo essa imperiosa necessidade de formação, manifestaram certo culto às cifras, ao manejo correto das mesmas, às proporções, à exatidão[20]·… (DEL POTRO, 2007, p.2). [Tradução nossa]

De outro modo, emerge a necessidade da instrução dos indivíduos acreditando-se que o domínio da aritmética proporcionaria uma melhor preparação para as atividades específicas de seu grupo. Assim, segundo Del Potro (2007 p.3) os manuais de Aritmética Mercantil tinham um caráter mais geral, pois se conceberam como textos escolares orientados eminentemente para prática, que por meio de problemas refletiam, sem dúvidas, situações concretas em que os mercadores poderiam ver-se envolvidos.

Dada a facilidade e simplicidade de utilização da regra de três, esta foi considerada como uma ferramenta de extraordinário valor para os mercadores como evidencia sua presença em quase todos os manuais medievais, e em particular na obra estudada por Del Potro (2007 p.6)) intitulada *Sumario breve de La práctica de La Aritmética* de Juan Andrés **(**1515).

Nas palavras do autor dessa obra, tratado da definição da regra de três e de onde procede tal regra e tem tal força que multiplicando o segundo pelo terceiro e dividindo pelo primeiro se absolve e se sabe o que queremos saber[21]...(DEL POTRO,2007,p.9) que nos descreve de modo conciso a regra de três, em linhas gerais, como ainda estudadas em nossas escolas.

Nessa linha podemos pensar que a regra de três surgiu das atividades humanas em suas necessidades sociais como Del Potro (2007), Boyer (1996),

---

[20] aunque existía un abismo entre el comercio internacional a gran escala y el comercio al detalle de algunos mercaderes, a todos los que practicaban cada una de sus modalidades, al igual que a otros muchos sectores urbanos, les interesó el desarrollo de una aritmética práctica .Unos y otros, sintiendo esa imperiosa necesidad de formación, manifestaron un cierto culto a las cifras, al manejo correcto de las mismas, a las proporciones, a la exactitud…,(DEL POTRO, 2007, p.2)

[21] tratado de la definición de la regla de 3 y de dónde procede tal regla y tiene tal fuerça que multiplicando el segundo por el terçero y partiendo por el primero se absolve y se sabe lo que queremos saber… ANDRÉS (1515) apud DEL POTRO (2007 p.7)

Garding (1981), Smith (1958) evidenciaram em seus escritos. Sob esse aspecto, poderemos considerar que a regra de três não é um objeto específico da matemática, mas que foi construído nas atividades humanas com suas práticas sociais e consolidadas pela sociedade em função de seu caráter de uso em suas atividades profissionais e por isso se torna um saber que tinha que ser difundido/ensinado. Isso pode justificar sua integração nos manuais escolares, como prática que todos que freqüentavam a escola tinham de aprender independentemente de sua futura atividade profissional.

Essa idéia pode ser consonante a Miguel e Mendes (2010) ao evocar as práticas sociais no tratamento de mobilização de histórias e sua inclusão na matemática escolar, pois segundo esses autores,

> ...O termo *prática social* significa um grupo de ações intencionais e coordenadas, que simultaneamente mobiliza objetos culturais, memória, afetos, valores e poderes, gerando na pessoa que realiza tais ações o sentimento de pertencimento a uma determinada comunidade. Estas ações não são caóticas ou casuais precisamente porque nós reconhecemos nelas objetos culturais que têm uma história. Esta história só é lembrada por causa dos objetos culturais que esta prática mobiliza e ainda são usados em pelo menos uma comunidade que mantém esta memória viva por alguma razão. (MIGUEL e MENDES, 2010 p.382) [Tradução nossa]

Esse pensar da prática social da regra de três se faz presente quando mobilizamos a história dos diferentes modos de fazer a regra de três no capítulo anterior e sob esses entendimentos buscamos melhor compreender a ambigüidade da regra de três na escola, pois sob esse aspecto a regra de três, ou ainda, as matemáticas devem ser entendidas como práticas de investigação do aspecto normativo de diferentes práticas (MIGUEL e MENDES, p.391).

Assim, buscamos Del Potro (2007), que afirma que os manuais de aritmética antes eram puramente práticos, voltados para os ofícios do comércio, como dos mercadores em suas práticas nas relações internacionais de trocas de moedas. Era a matemática mais fina da época e por isso se tornava assunto de interesse dos empreendedores que mantinham treinamento de pessoas com material de estudo sobre regra de três produzidos para eles, fechados ao conhecimento público, em que estabeleciam relações de suas atividades com prática da regra e três.

Por outro lado, a preocupação característica dos matemáticos Islâmicos em fundamentar as regras usadas nas matemáticas aplicadas sobre as teorias gregas (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud GÓMEZ, 2006), que leva a um fazer fundamentado da regra de três relacionando-a com os conceitos da teoria das razões e proporções de Euclides, em nossa compreensão, vem atender o desejo de grupo cultural diverso que busca dar sentido a uma prática também inclusa em suas atividades, e ai ocorre

> Uma desconexão de sua condição normativa original e começa a ser moldada de acordo com a condição normativa da nova atividade na qual elas já estão formadas, de forma idiossincrática... Neste caso, poderes, valores, e os afetos mobilizados por aquelas práticas em certo campo de atividade também podem ser consideravelmente modificadas. (MIGUEL e MENDES, 2010, p.388) [Tradução nossa]

Pois, esse fazer normativo da matemática agrega o fazer de proporcionalidade que exige o cuidado de tomar as razões entre grandezas de mesma natureza ou espécie, como esclarece Nuñez (1567, p.66) ao escrever.

> Proporção é uma relação ou uma comparação que há entre duas quantidades de uma mesma natureza, quando são comparadas na quantidade. E aquelas quantidades chamamos nesta matéria de uma mesma natureza, que são tais, que a menor delas multiplicada pode exceder a maior. (NUÑEZ, 1567, p.66)

Segue explorando essa noção por meio de exemplos, segundo ele:

> Porque a linha por mais que se multiplique não pode exceder a superfície, nem a superfície multiplicada pode exceder o corpo, diremos, portanto, que a linha, a superfície e o corpo, têm diferentes naturezas e por essa causa nem a linha com a superfície, nem a superfície com o corpo têm proporção. Mas entre duas linhas quaisquer, e entre duas superfícies quaisquer, haverá proporção, ou entre as linhas sejam retas, ou entre ambas as curvas, ou uma reta e a outra curva, e/ou as duas superfícies sejam entre ambas planas, ou entre ambas as curvas e convexas, ou uma delas seja plana, e a outra curva. E o mesmo será entre quaisquer corpos de quaisquer figuras que sejam, portanto sendo o menor deles multiplicado pode exceder o maior. E nos números isto é muito claro, porque qualquer número por menor que seja tanto se pode multiplicar que exceda o maior que nos fora proposto (NUÑEZ,1567, p.66)

Mas, o uso da linguagem algébrica ao descrever essa noção em ação, por igualdade entre razões de grandezas de mesma espécie, leva a modelos equivalentes, senão os mesmos, que os gerados por especialistas matemáticos e parece, em principio, coroar com êxito seus desejos de legitimar seus jeitos de fazer e pensar essa prática no ensino rejeitando por conta da complexidade que apresenta como diz Vallejo, segundo Gómez (2006), quando escreve que

> Para fazer dito exame se necessita possuir um espírito de que nem todos estão dotados; e por isso nossa regra, que não exige mais que o conhecimento das quantidades de uma mesma espécie para introduzir imediatamente a proporção, está mais ao alcance dos principiantes. (VALLEJO, 1841, p.351)

Ou ainda, mais recentemente, o defendido por Lima et al (2001, p. 09) em que afirma que "Deve-se ressaltar enfaticamente que a regra de três, proveniente da proporção $y_1/x_1= y/ x_2$, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade".

Esse pensar ao longo tempo ganhou força que se revela pelo fazer pontual de baixa valorização matemática e com sugestivo abandono do ensino, como fez Ávila (1986), e parte dos livros didáticos (quadro abaixo) aconselhados pelo PNLD-2008.

Matemática na vida e na escola
Novo praticando matemática
Matemática hoje é feita assim
Projeto araribá- matemática
Matemática: idéias & relações
Matemática para todos
Matemática e realidade

Para Ávila (1986), os livros de matemática usados nos Estados Unidos já não mais incorrem no mesmo arcaísmo de abordagem presentes nos livros brasileiros, pois numa compreensão sobre a regra de três com base nas obras estadunidenses consultadas, ele ressalta que em contraste, os livros norte americanos modernos não usam nem mesmo a expressão "regra de três" (em inglês "rule of three") sugerindo que o nome "regra de três" seja abolido também entre nós (ÁVILA 1986, p.9).

Assim, quando os livros textos fundamentam a regra de três em grandezas proporcionais, ou a abandonam, parecem esquecer que essa prática foi formada historicamente por força das situações historicamente vivenciadas pelo homem que exigiram a prática da regra de três sem explicita relação de proporcionalidade e como tal é consideravelmente diferente.

Nuñez (1567) nos dá outra compreensão, que esse pensar de necessidade de proporcionalidade é necessário aos especialistas matemáticos corroborando com nosso pensar, pois

> Porque a composição das proporções é imaginária, feita por obra do entendimento, interpondo uma quantidade na fantasia com outras, e não é real, assim como quando dizemos, que a linha de tres braças é composta de uma linha de uma braça, e de outra de duas braças, na qual a parte não pode chegar ao todo. E é porém, esta doutrina necessária aos matemáticos nas suas demonstrações da qual nenhum falso se segue, antes por ela inquerimos a verdade, e dela usa Euclides no livro sexto e no sétimo, e em outras partes, Arquimedes nos livros de Esfera e Cilindro, Menelao no terceiro livro de Geometria das esferas[22]… (NUÑEZ, 1567, p.80)[23] [Tradução nossa]

Esse pensar se reafirma no fazer da regra de três sem explicita relação com a proporcionalidade nas escolas, principalmente em aplicações em outras disciplinas, como mostra o exemplo do uso no ensino de Química (FELTRE, 2004 p.30) a seguir.

---

[22] Porque La composicion de las proporciones es imaginaria, hecha por obra del entendimiento, interponiendo una quantidad en la fantasia entre otras, y no es real, así como quando dezimos, que la línea de 3 braças es compuesta de una linea de una braça, y de otra de dos braças, en la qual la parte no puede llegar al todo. Y es pero esta doctrina necessaria a los mathematicos en la sus demonstraciones, de la qual ningun falso se segue, antes por ella inquirimos la verdad, y della usa Euclides en el libro sexto, y em septimo, y en otras partes, y Archimedes en los libros de Sphera y Cylindro, y Menelao em el tercero libro de la Geometri de lãs Spheras...

[23] O exemplar que examinei é de 1567, assim como as outras obras de aritméticas antigas consultadas encontra-se com a grafia das palavras bastante diferente da atual. Para tornar mais simples a leitura, optamos por atualizar a grafia nas citações, quando isto não interferir em nossa análise.

> Quando temos 3 mols de sal comum em 1kg de água, dizemos que a molalidade da solução é igual a 3 mol/kg, ou ainda que a solução é "3 molal".De forma geral, quando temos n_1 mols de soluto em m_2 gramas de solvente, podemos equacionar:
>
> m_2 g de solvente ———— n_1 mol de soluto
>
> 1kg=1000g de solvente ———— w mol de soluto
>
> $$w = \frac{1000n_1}{m_2}$$
>
> Sabemos que n_1 pode ser calculado pela relação $\frac{m_1}{M_1}$; logo, temos
>
> $$w = \frac{1000m_1}{m_2M_1}$$

O exemplo mostra o fazer eminentemente prático da regra de três sem justificativa direta com os argumentos de proporcionalidade que se explicitam pelo fazer concomitante do fazer algébrico da proporcionalidade evocado no extrato "n_1 pode ser calculado pela relação $\frac{m_1}{M_1}$". Assim, o uso da regra de três ao longo dos séculos, como prática de grupos específicos, tem influenciado ou pode até mesmo ter determinado o seu modo de difusão nas escolas atuais e por isso pode impor resistências a um fazer "consciente" da regra de três com fundamento na proporcionalidade.

Esse pensar se justifica quando observamos que Lacroix (1839, p.288) descreve a regra de três por sua funcionalidade afirmando que a

> Regra que prescreve um meio certo e seguro para determinar um dos quatro termos de uma proporção sempre que suponhamos conhecidos os outros três, é geralmente conhecida pelos nomes de *regra de três ou de proporção*[24]. (LACROIX,1839 p.288) [Tradução nossa]

Justifica tal procedimento pela propriedade das proporções que sintetiza um conjunto de procedimentos e facilita cálculo para aplicá-la na solução de problemas dessa natureza: o produto dos termos dos meios é igual ao produto

[24] Regla que nos prescribe um médio cierto y seguro de determinar uno de los cuatro términos de una proporción siempre que supongamos conocidos los otros três , es geralmete conocida bajo los nombres de regla de três o de proporción. (LACROIX, 1839 p.288)

dos termos extremos. O procedimento é então, estendido para a regra de três composta que emerge da necessidade de formar três, quatro ou mais proporções em determinadas situações exemplificadas em seu texto. Tudo é então conduzido para a construção da regra geral que será aplicada em qualquer situação de natureza similar como, por exemplo, ocorre no texto escolar de Andrini e Zampirolo, (2002, p.37) ao resolver o problema

> Flavio tinha 12 periquitos. Um pacote grande de ração era suficiente para alimentá-los por 30 dias. Ontem ele ganhou mais 3 periquitos e agora tem 15 periquitos. O mesmo pacote de ração vai alimentá-los por quantos dias?
> Solução:
> O numero de periquitos e o tempo em dias que dura o pacote de ração são grandeza inversamente proporcionais, pois:
> -dobrando o numero de periquitos, o pacote de ração deve durar a metade do tempo;
> -triplicando o numero de periquitos, o pacote de ração deve durar a terça parte do tempo, e assim por diante.
> t

eNumero de periquitos	Tempo em dias
r 12	30
ç 15	X

> As razões são inversas. Portanto, para escrever a proporção, devemos inverter uma delas;

$$\frac{12}{15} = \frac{x}{30} \Rightarrow 15.x = 12.30 \Rightarrow 15.x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{15} \Rightarrow x = 24$$

> Agora com 15 periquitos, o pacote grande de ração só será suficiente para 24 dias. (ANDRINI e ZAMPIROLO, 2002, p.37)

Como se observa o quadro é construído dispondo os dados em colunas, uma para cada grandeza, de modo que as razões obtidas dele sejam entre grandezas de mesma espécie, conforme preceituava o conceito de proporcionalidade e que encerrará o seu emprego finalmente decidindo por breve analise se a relação entre as grandezas é direta ou inversa. O procedimento da proporcionalidade algébrico mostrado por Andrini e Zampirolo, (2002) é tal como o proposto por Lacroix (1839). Acaba em um procedimento que não torna claro as intenções matemáticas da proporcionalidade em si, levando a um fazer enfaticamente algorítmico do procedimento não justificado.

Além disso, o fazer algorítmico não permite a tomada de consciência de que as relações de proporcionalidades entre as grandezas são assumidas pelo sujeito, pois como pode ser notado não há informações suficientes na situação/enunciado que permitam vislumbrar com segurança tais relações. De outro modo, as relações de proporcionalidade não estão lá à espera de serem descobertas, mas são estabelecidas pelo sujeito que vive a situação em jogo.

Em geral a prática da regra de três é realizada como um fazer social, cultural e histórico do homem frente a tipos de situações na qual ele está inserido. Trata-se de um problema “tipo de regra de três” e isso tem seu jeito próprio de pensar e fazer. Assim, inicialmente, a resposta ao questionamento *Será que há a necessidade de se assegurar a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas num problema que se anuncia como de regra de três para assumi-lo como tal?* Parece ser por como negativa, mas por outro lado pode parecer necessário.

Quando a regra de três, tratada algebricamente com fundamento na proporcionalidade entre as grandezas, como fazem os autores de textos matemáticos aplicados a situações não matemáticas, a exemplo de Waltham (2000) quando trata da matemática aplicada à geologia expondo a relação de proporcionalidade explicitamente como decisão do sujeito em situação, como o faz na seguinte situação típica da geologia.

> ... Um lago que possui sedimentos, suspenso na água, decantando e constituindo lentamente o fundo do lago. Obviamente, os depósitos iniciais serão cobertos por aqueles. Os resultados em uma relação entre a camada mais profunda e o tempo desde a deposição é: quanto mais profundo se observar, lá estarão os mais antigos sedimentos. Agora, ***se a proporção de sedimentos depositado no fundo for aproximadamente constante***, os sedimentos depositados a 2 metros de profundidade são duas vezes mais antigos, a três metros são três vezes mais antigos, e assim sucessivamente. (WALTHAM, 2000 p. 03)

Observamos que a expressão *se a proporção de sedimentos depositado no fundo for aproximadamente constante* revela que a proporcionalidade entre as grandezas *Idade* e *Profundidade* é imaginária e, portanto assumida por quem vive a situação. Isso permite por meio da linguagem algébrica do método de redução a unidade a construção de um modelo matemático que pode corroborar com a análise da situação como assim o faz quando escreve.

> Logo, caso se duplique a profundidade, duplica-se a idade, caso se triplique a profundidade, triplica-se a idade, e assim por diante. Isso significa que a idade dos sedimentos é proporcional à profundidade em que se encontram. Isso pode ser expresso matematicamente pela equação. Idade= k. Profundidade (1.1). (WALTHAM, 2000 p. 03)

Tal modelo é posto a partir da análise da situação por alguém que necessita possuir um espírito de que nem todos estão dotados, no velho estilo do método da redução à unidade, como se observa quando escreve que

> Todas estas formas diferenciadas para a equação (1.1) indicam simplesmente que a idade do sedimento é encontrada multiplicando-se a sua profundidade pela constante. Esta constante informa o quão rapidamente o sedimento se acumula. Um grande valor para k indica que a idade aumenta muito mais rapidamente do que aumenta a profundidade (i.e os sedimentos se acumulam muito mais rapidamente). Em um dado lago deve levar 1500 anos para se acumular um metro de sedimento. Neste caso k=1500 anos/metros. Um lago com uma sedimentação menor que, digamos, 3000 anos/metro, terá um acréscimo mais rápido em idade com a profundidade da sedimentação. (WALTHAM, 2000 p. 04)

Mas alerta que a análise da situação não está subordinada a matemática, ou seja, é necessário ter sempre em conta que a relação de proporcionalidade imposta pelo sujeito que modela não descreve de fato o fenômeno geológico, pois

> Em todo o caso, ***se a proporção de sedimentação não variar muito*** e dada compactação do sedimento não for muito extrema a_Equação 1.1 deveria ser aproximadamente correta. Porque isto é tudo o que é necessário para que uma formulação matemática seja utilizada. É valido considerar que expressões ***matemáticas são comumente aproximações, no plano de sua mente***. As pessoas geralmente tomam a suposição que, devido à expressão ***matemática poder ser usada, a resposta deve ser verdadeira. Isto simplesmente não é verdadeiro, nem mesmo na Física***. (equações na física também são aproximações da realidade apesar de a aproximação ser, geralmente, tão boa que pode ser seguramente desprezada. (WALTHAM, 2000 p. 04). Grifos nosso.

Esse mesmo tipo de fazer pode ser observado no texto de Trindade e Pugliesi (1989, p. 121), quando apresentam a lei para o estudo dos gases e anunciam a proporcionalidade como justificativa que permite escrever em linguagem algébrica o modelo matemático.

> Lei de Boyle – Quando uma dada porção fixa de ar, a temperatura constante, é submetida a diferentes pressões, o volume (V) de ar varia de modo inversamente proporcional á pressão (P). Isto é: $V = \frac{k}{P}$, (sendo a temperatura e a massa gasosa constantes e k uma constante de proporcionalidade). (TRINDADE e PUGLIESI, 1989, p. 121)

E de modo análogo a Waltham (2000), Trindade e Pugliesi (1989 chamam atenção que tal relação não é válida para a maioria dos gases e mesmo para os gases que "obedecem", a relação está restrita a um espectro de temperatura e pressão. O sujeito assume explicitamente a proporcionalidade como fundamento, mas é necessário compreender que nessas situações recorre-se a uma concepção de proporcionalidade não assumida pelos especialistas para a regra de três inicialmente, que as razões envolvidas têm que ser entre grandezas de mesma espécie. A relação entre grandezas de espécies diferentes (temperatura e pressão, no último caso e idade e profundidade no caso inicial) presentes nos exemplos acima contraria esse princípio.

É importante notar, então, que essa nova relação de proporcionalidade, de razão entre grandezas de espécies diferentes, é em última análise o método da redução à unidade, visto inicialmente com desconfiança pelos especialistas matemáticos com influências no ensino. Com o passar dos tempos, no entanto, ganha, segundo Gómez (2006), espaço no ensino.

> O método que é designado sob o nome de redução à unidade, é aplicável a todos os problemas que dependem da teoria da proporcionalidade;.... Mas, se este método tem a vantagem de ser mais analítico que os nossos, tem, segundo outros, o inconveniente de ser mais prolixo em seus detalhes. De todos os modos, estamos distantes de depreciá-lo; ao contrário, recomendamo-lo aos professores, como um excelente exercício. (BOURDON, 1848, p.235)

Assim, a proporcionalidade parece ter sido impressa definitivamente no ensino da regra de três por especialistas da matemática quando reconheceram que o método da redução à unidade, de uso em atividades extra-matemáticas, era aplicável a todos os problemas de proporcionalidade. Há uma expansão, nesse sentido, do conceito de proporcionalidade, envolvendo agora, razões de grandezas de espécies diferentes, que em linguagem algébrica são legítimos por serem relações entre números, que encaminha, assim, para uma concepção funcional entre grandezas de espécies diferentes. Assim, os fazeres da regra de três não fundamentados na noção expandida da proporcionalidade deixam de ser identificados com o fazer histórico e cultural da regra de três e passam a serem estratégias intuitivas para tipo de problemas de proporcionalidade.

Isso é apontado por Pontes (2009) ao afirmar que Vergnaud destacou três tipos de estratégias usadas na solução de problemas que envolvem relações proporcionais. A estratégia escalar, em que o sujeito encontra a solução estabelecendo relações numéricas na própria variável com a vantagem de ser usado com compreensão, o que nem sempre ocorre com a regra de três; estratégia funcional, nesse caso, a solução é obtida através do estabelecimento de relações entre as duas variáveis, utilizando-as na solução do problema; e a estratégia da *regra de três.*

> Tão desencantada no ensino da Matemática escolar, baseia-se na equivalência de razões. Sobre ela, Carraher *et al.*(1986, p. 587) afirmam: “a simplicidade das operações envolvidas na solução da regra de três - multiplicação e divisão – dá ao professor a impressão de que o tópico pode ser ensinado rapidamente”, parecendo não se aperceber que, na introdução das estruturas multiplicativas, há implícita mudança conceitual que deve ser considerada. Os estudos de Carraher Carraher e Schliemann (1986a e 1986b, p. 586) sobre proporcionalidade na educação científica e matemática apontam que os estudantes usam com mais freqüência estratégias intuitivas do que a regra de três- estratégia comumente *ensinada como algoritmo para a resolução de problemas de proporção.* (PONTES, 2009 p.68)

Com o propósito de esclarecer essas estratégias, (Pontes, 2009 p.69) apresenta o exemplo de Schliemann e Carraher (1993, p.18) que mostra como os sujeitos pesquisados por esses autores enfrentaram a situação proposta.

> Se 3 laranjas custam 15 cruzeiros, qual o preço de 9 laranjas?
>
> Figura 3: Exemplo de Estratégia Escalar
>
> | QUANTIDADE | PREÇO |
> |---|---|
> | 3 | 15 |
> | ↘ | ↘ |
> | X 3 | X 3 |
> | ↙ | ↙ |
> | 9 | ? |
>
> Fonte: Schliemann e Carraher (1993, p.18)
>
> No esquema de estratégia escalar, o sujeito procura identificar a relação entre os elementos da primeira variável, no caso, a quantidade, e aplicá-la à segunda, encontrando o valor pretendido... No esquema da estratégia funcional, tabela 4, vemos que, a partir do preço dado de várias unidades, passou-se ao preço unitário e deste ao preço de uma quantidade qualquer.
>
> Tabela 4: Estratégia Funcional
>
> | QUANTIDADE | PREÇO |
> |---|---|
> | 3 | 15 |
> | 1 | 5 |
> | 9 | X |
>
> Fonte: Schliemann e Carraher (1993)
>
> Essa estratégia utiliza a divisão e a multiplicação como operações inversas entre si, sem recorrência à formulação mais global em que todos os dados são considerados simultaneamente, como é o caso da regra de três, a seguir.
>
> Figura 4: Exemplo de Regra de Três
>
> $$\frac{3}{9} = \frac{15}{x} \therefore x = 9.\frac{15}{3}$$
>
> Fonte: Carraher *et al.* (1985a, p.107)
>
> (PONTES, 2009 p.69)

Embora as preocupações dos autores sejam de ordem cognitiva, o que nos chama atenção é que as estratégias de resolução acima apontadas por eles constam dos ritos da regra de três apresentados no capítulo três e, como tal, as estratégias apontadas são todas de regra de três, mas aponta apenas o modelo algébrico da estratégia escalar como a estratégia de regra de três.

O termo estratégia parece ter sido tomado no sentido de apontar para um fazer algorítmico, não reflexivo sobre as relações de proporcionalidade e principalmente, que a regra de três, apresentada acima, parece ter sido cristalizada dessa forma na escola e nos livros didáticos como podem ser observados por meio dos exemplos constantes ao longo desse trabalho. Além disso, o método de redução à unidade é visto como uma estratégia inicialmente apresentada nas séries iniciais para resolução de “problemas de multiplicar e dividir” que segue o percurso escolar sem reelaboração no ensino de proporções e tampouco como uma melhoria da regra da regra de três (SMITH 1958, p.494).

A relação de proporcionalidade, de razão entre grandezas de espécies diferentes, não é tratada objetivamente no currículo de matemática, pois o tema função não trata objetivamente da relação de proporcionalidade entre grandezas diferentes e tampouco o modo da regra de três, inspirado na proporcionalidade e recomendado pelos matemáticos, trata-o. Essa lacuna nos leva a pensar que este aspecto, impede uma compreensão do método de redução à unidade como um fazer de regra de três que proporciona esse conceito alargado de proporcionalidade de relação entre grandezas de espécies diferentes.

Esse pensar é explorado com os professores pesquisados no capítulo seguinte, mas antes cabe fazermos, ainda, considerações sobre a relação de proporcionalidade. Compreendemos em nossas analises que a regra de três deve ser entendida como prática de investigação do aspecto normativo de diferentes práticas (MIGUEL e MENDES, 2010) e nesse sentido nos leva a compreender as ambigüidades sobre o uso da regra de três, pois

> No ponto de vista de que a prática, na passagem de um campo de atividade a outro, inevitavelmente desconecta-se das condições normativas originais, e ganha feições de acordo com as condições do novo campo de atividade em que ela foi mobilizada, em um caminho, idiossincrático igualitário. Assim, nós não poderíamos dizer por muito mais tempo, estrito senso, que estaríamos vivendo a mesma prática (MIGUEL e MENDES, 2010 p.384) [Tradução nossa]

Assim, se a regra de três se constitui em diferentes práticas sociais podemos inferir que mesmo que as camadas de especialistas matemáticos influenciem, ou controlem o ensino, as camadas constituintes de outras atividades parecem ainda dominantes e estão em volta a exigir seu lugar e, nesse sentido, a relação de proporcionalidade não pode se por, a menos que seja convencionado pelo sujeito que vive uma situação não matemática, com a consciência de que a matemática embora proveja métodos simples, rápidos e seguros para o enfrentamento de uma situação real não faz a situação a ela se reduzir.

Nesse sentido, das ambigüidades, e considerando o que diz Cortella (2008, p.92), citando Paulo Freire, quando pensou sobre a questão do método: "fazemos, logo pensamos; assim, existimos" nas seguintes palavras:

> O saber pressupõe uma intencionalidade, ou seja, não há busca de saber sem finalidade. Dessa forma, o método é, sempre, a ferramenta para a execução dessa intencionalidade; como ferramenta, o método é uma escolha e, como escolha, não é nunca neutro. (CORTELLA 2008, p.92)

E que tal pensar aliado ao que alerta Juan Andrés (1515) (apud DEL POTRO e LLAVE, 2004, p.50) em sua obra *Sumario breve de La práctica de La Aritmética*, de que o desconhecimento das simples regras de aritmética facilita o engano e, portanto, a fraude, nos leva a pensar em um fazer critico da regra de três e conjeturar que a regra de três algebrizada, com fundamento, ou não, na proporcionalidade pode atender um fazer de modelagem matemática no sentido desejado por Skovsmose (2008) de que é necessário que as pessoas envolvidas na modelagem matemática, mesmo admitindo o formalismo da ciência, reflitam sobre a diversidade de abordagens que podem ser realizadas no estudo de um determinado fenômeno com a preocupação adicional de destacar o embaçar da realidade pelo modelo matemático.

Tal preocupação se faz presente no texto de Waltham (2000) quando escreve que

> Uma falha freqüente dos estudantes ao usar a matemática, é escrever um monte de equações sem explicações do que são ou significam. O resultado é uma parte obscura do trabalho, que ninguém, nem o próprio estudante seis meses depois pode entender. Isto também é um procedimento para uma matemática relaxada e ilógica. Um bom procedimento é que deveria haver mais palavras na matemática do que equações. O objetivo é ligar a matemática ao "mundo real" que está descrevendo. Estamos lidando com aplicações mais do que com matemática pura e é vital que a relevância geológica da matemática que foi feita seja totalmente clara. Assim, o importante é descrever o contexto geológico do que detalhes matemáticos em si. (WALTHAM, 2000 p. 04)

Nesse sentido, a regra de três pode ser revelada como uma prática social para atender necessidades e interesses de um pensamento particular que permite ao ser humano transformar sua realidade, e, mais, evidencia a matemática como um construto humano que se desenvolve de modo a atender conveniências de grupos sociais, inclusive da própria matemática.

Minha compreensão caminha para a necessidade da tomada de consciência do fundamento matemático da regra de três, o do principio da proporcionalidade, não no sentido dos especialistas matemáticos que exigem que tal relação seja inerente à situação enfrentada, mas no sentido de que atende um fazer social e por isso é determinada pelo sujeito que vive a situação. Nesse sentido, parece que a resposta à questão norteadora *como podemos pensar a modelagem matemática no âmbito do ensino da matemática escolar para evidenciar, ainda que parcialmente, o necessário algo mais, em geral, não evidente no fazer matemático escolar* começa a ser construída à medida que podemos vislumbrar por meio da regra de três um fazer matemático escolar que comporte *algo mais do que matemática*, como a capacidade de situar, interpretar, criticar e, talvez até mesmo criar, a matemática em um contexto, tendo em conta nisso tudo a matemática e as complexidades sociais e humanas envolvidas nesse processo como afirma Yasukawa, et al (1995).

Assim, os entendimentos construídos sobre a tomada de consciência dos nexos que podem ser objetivados na ação docente e as discussões em torno do ensino da regra de três postas, encaminham nos ao capítulo seguinte para a construção de uma compreensão que priorize o fazer das práticas no contexto da modelagem matemática frente a situações de regra de três considerando o aspecto alargado da proporcionalidade como razão de grandezas de espécies diferentes em que julgamos despertar o papel do sujeito como parte da situação, como *mais que matemática* no sentido da nossa questão norteadora.

5- AS PRÁTICAS DA REGRA DE TRÊS COMO MODELAGEM MATEMÁTICA

Garcia (2002) afirma que o conceito de proporcionalidade por ser uma ideia construída por meio de comparações/relações entre grandezas de naturezas iguais/diferentes se tornou fundamental na compreensão e na ligação/articulação e estruturação de conceitos/conteúdos dentro da própria Matemática e permitiu a extrapolação para outras áreas do conhecimento científico. Os físicos há muito tempo trabalham recorrendo a comparações entre grandezas de naturezas diferentes assumindo o método da redução à unidade, como, por exemplo, sobre o deslocamento de um corpo em movimento e o tempo gasto no percurso que decorre o conceito inicial de velocidade.

Na matemática escolar o tema proporcionalidade geralmente é tratado como objeto de estudo na sexta série do ensino fundamental (sétimo ano) e segundo Pontes (2009, p.65), em geral, é ensinado por meio da técnica denominada *regra de três* simples, através da qual são dados valores de séries de grandezas, sendo necessário determinar o valor da incógnita ou elemento desconhecido, mantendo-se a proporcionalidade. Para essa autora, na escola, ao trabalhar proporção, é uma prática representá-la de duas maneiras $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ou $a:b::c:d$ e, em ambos os casos, a leitura é feita da seguinte forma: a está para b, assim como c está para d. Para ela, apoiada em Carraher; Carraher; Schliemann (1986a, p.96), nesse procedimento, não é explicada a natureza das relações envolvidas ou o modelo matemático em jogo na solução de problemas que envolvem proporções.

Em nossa compreensão, a técnica da regra de três para ensinar proporcionalidade, como citada acima, que não leva à consciência que os problemas são de proporcionalidade e que não explica a natureza das relações ou o modelo matemático, decorre principalmente por constituírem práticas que já tem o seu jeito de fazer e pensar próprio, como verificamos por meio das analises das resoluções dos professores pesquisados e nos livros didáticos, em geral. De outro modo, os problemas de proporcionalidade já são anunciados como de proporcionalidade no sentido da regra de três em que não cabe ao sujeito “descobrir" tal relação para por em equação. Basta por em equação após breve análise se é direta ou inversa. A proporcionalidade de fato não esta em jogo.

Esse pensar nos levou a refletir sobre a ambigüidade da regra de três com relação a proporcionalidade e então passamos a compreendê-la como prática que foi fundada em diferentes atividades humanas que em seu percurso de uso e difusão foi ganhando novas afeições, pois

> a maneira pela qual nós interpretamos e realizamos em diferentes contextos, varia de pessoa para pessoa, não somente em seus propósitos, valores, razões, desejos e recursos interpretativos, mas também no condicionamento destes contextos impostos sobre a realização dessas práticas. Isto é o porquê de nós dizermos que uma prática mobiliza afeições (MIGUEL E MENDES, 2010, p.383).

Assim, como prática em contextos distintos e em suas feições, por conveniências e/ou por jeito de fazer, por exemplo, interpretamos que pode ou não exigir a proporcionalidade. Sob esse olhar e pensando em romper com o fazer didático cristalizado e pontual da regra de três passamos a tomá-la como práticas escolares sob a compreensão de não impor privilégios à compreensão isolada da matemática para essa prática, mas planeá-las com outras práticas também presentes na escola, ou melhor, parafraseando Miguel e Mendes (2010), diríamos que “isso significa que, para a comunidade educacional escolar, as práticas culturais da matemática científica não devem desfrutar de antemão de nenhum privilégio epistemológico absoluto em relação às praticas realizadas por outras comunidades”, trabalhamos com um grupo de professores os diferentes modos de fazer a regra de três e suas relações de proporcionalidade.

Essa compreensão foi construída ao longo de nosso texto, e destacamos inicialmente a Lacroix (1839) e depois a Ávila (1986). Lacroix objetivando o rigor matemático da álgebra faz apresentação de duas resoluções, uma aritmética e outra algebrizada, do seguinte problema de multiplicar e dividir usando a regra de três.

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo conhecimento com inteira certeza que 13 varas de certo lienzo custam 130 reais se nos perguntarem, *quantos reais custarão no mesmo preço, 18 varas do mesmo lienzo?* (LACROIX, 1839 p.280),

A resolução para esse problema é inicialmente apresentada por aritmética como segue.

> Claro que será muito fácil determinar o verdadeiro preço de cada vara de lienzo, achando o quociente 10 reais que resulta da divisão do valor total 130 reais pelas 13 varas que se supõem compradas inicialmente, e já que sabemos este preço, se o multiplicarmos agora por 18, que é o numero de varas da segunda compra, nos resultará por produto 180 reais, verdadeiro valor que nos perguntavam. (LACROIX,1839 p.280)

Em registro numérico da resolução aritmética de Lacoix é a seguinte

$$130 \div 13 = 10 \quad 10 \times 18 = 180$$

Na resolução constante da página 288, Lacroix aborda o mesmo problema com o rigor matemático que exige a teoria matemática que fundamente o fazer, no caso a teoria das razões e proporções. O olhar é a aplicação da teoria e isso exige razão entre grandezas de mesma espécie, que são destacadas por super-índices, para posterior aplicação da propriedade fundamental "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos" que determina o modo de fazer, e como tal, é diferente como podemos observar pela descrição de Lacroix (1839).

> Com efeito, tendo visto que na primeira que os valores das duas peças de lienzos estarão em proporção com os números de varas que cada peça tenha, podemos formar a que segue:
>
> $$13^{v} : 18^{v} : : 130^{r} : x^{r},$$
>
> Representando com a letra x ou outra qualquer das ultimas do alfabeto, o valor que buscamos das 18 varas, e como este valor seja uso dos extremos da proporção, vê-se facilmente que multiplicando entre si os dois meios 18 e 130, teremos o produto 2340; o qual, dividido pelo extremo conhecido 13, nos dará por quociente 180 que justamente é o outro extremo que desejávamos conhecer[25]. (LACROIX, 1839, p.288)

[25] Con efecto, habiendo echado de ver en la primera vez los valores de las dos piezas de lienzo han de estar en proporcion con los números de varas que cada pieza tenga podemos forma la que segue $13^{v} : 18^{v} : : 130^{r} : x^{r}$. Representado con la letra x ú otra calquiera de lãs útimas del abecedário, el o valor que buscamos de las 18 varas; y como este valor sea uso de los extremos de la proporcion, se ve fácilmente que multiplicando entre si los dos medios 18 y 130, tendremos el producto 2340;el cual,dividido el extremo conocido 13, nos dará por cociente 180 que justamente es el outro extremo que desebámos conocer. (LACROIX, 1839, p.288)

Esse fazer em resumo pode ser expresso por $x = (8 \times 130) \div 13 = 180$ que como pode ser observado difere do fazer do anterior na ordem em que se executam as operações, como mostramos a seguir.

$$x = (8 \times 130) \div 13 = 180 = 18 \times (30 \div 13) = (30 \div 13) \times 18 = 10 \times 18$$

Convém observar que o fazer de Lacroix é predominante nas escolas e livros didático e observado nos fazeres dos professores pesquisados, mas com os registros atuais como segue.

$$\frac{13}{18} = \frac{130}{x} \Rightarrow x = \frac{18 \times 130}{13} = 180$$

A primeira resolução com as ideias intuitivas aritméticas é o método da redução à unidade e como um fazer de regra de três justificado envolveria a necessidade da noção ampliada de considerar também a razão de grandeza de espécies diferentes. Isso, embora seja evitado, geralmente, nos livros didáticos, foi legitimado há muito pela academia matemática.

Para Ávila (1986) a relação de proporcionalidade direta ou inversa entre as variáveis é verificada a partir da equação que estabelece a dependência entre elas. Para esse autor, a proporcionalidade pode ser trabalhada a luz da teoria dos números reais, na qual é possível medir todas as grandezas e, em conseqüência, será sempre possível definir a razão de duas delas como quociente de suas medidas. Isso modificaria a maneira de apresenta fatos, como os problemas de regra de três. E ainda, afirma que

> Estes podem ser ensinados no contexto algébrico de resolução de equações, com a dupla vantagem de simplificação e da unificação da matemática. Seria até mais próprio que falássemos em variáveis proporcionais ao invés de grandezas proporcionais. Para ilustrar tudo isso, começamos definindo proporcionalidade direta e inversa.
>
> **Definição 1**: diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas: y = kx ou $\frac{y}{x} = k$ onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade.
> **Definição 2:** diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = k\frac{1}{x}$ ou xy = k, onde k é uma constante positiva.

Sob esse olhar de Ávila, o problema acima considerado por Lacroix (1839), pode ser analisado do seguinte modo.

Quando assumimos por breve análise que as grandezas são diretamente proporcionais, estamos assumindo o pensamento matemático de que a razão entre as grandezas é uma constante numérica positiva que pode ser expressa simbolicamente por $\frac{p}{n}=k$. Essa linguagem permite a transformação $\frac{p}{n}=k \Rightarrow p=kn$ Assim, para os valores de $p=130 \quad e \quad n=13$, encontramos $k=\frac{130}{13}=10$ que é a constante para a situação posta por Lacroix. Isso permite escrever o modelo para a situação específica tratada $p=10n.$ Essa fórmula/modelo viabiliza o calculo do preço para qualquer valor de n e em particular o pedido para $n=18$, ou seja, p =180.

A fórmula $p=10n$ representa assim a síntese, a abstração de todos os procedimentos utilizados na resolução e permite aplicá-lo em outra situação do mesmo tipo, podendo encontrar o valor de qualquer uma das grandezas envolvidas de maneira mais simples, rápida e segura, além de permitir a analise das situações por meio de conjecturas em níveis de progressiva complexidade matemática e/ou social.

Esse argumento parece ser decisivo para se adotar esse jeito de fazer e pensar, mas buscamos mostrar que as resoluções anteriores mostradas podem igualmente gerar modelos matemáticos com o mesmo potencial já que as resoluções em linguagem algébrica podem ser assim descritas:

a) Método de Redução à unidade: Uma vez obtido o valor de uma unidade, calcula-se o valor de qualquer unidade.

$10=\frac{130}{10}=\frac{p_1}{n_1}$ em seguida calcule o preco p multiplicando por 18(numero de varas n)

$$p=10\times 18=180=\frac{p_1}{n_1}n \quad \Rightarrow p=\frac{p_1}{n_1}n$$

b) Método Algébrico: É a prática canônica; dispõem-se os dados em colunas, uma para cada grandeza, e por breve análise decide-se se é direta ou inversa.

$$\begin{array}{ccc} n & ------ & p \\ \downarrow & & \downarrow \\ n_1 & ------ & p_1 \end{array}$$

$$\frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1} \Rightarrow p = \frac{p_1}{n_1} n$$

É importante destacar que o método da redução à unidade pode ser obtido diretamente do quadro anterior de disposição dos dados, mas obtendo-se as razões a partir das colunas, como mostramos a seguir.

$$\begin{array}{l} n \leftarrow p \\ n_1 \leftarrow p_1 \end{array}$$

$$\frac{p}{n} = \frac{p_1}{n_1} \Rightarrow p = \frac{p_1}{n_1} n$$

Este procedimento, que transgride a noção de proporcionalidade como razão entre grandezas de mesma espécie, mas que se legitimou como prática de grupos específicos de atividades, como o do comercio em geral (SMITH, 1958, p.494) e legitimado para o ensino por ser aplicável a todos os problemas de proporcionalidade, como assim nos remete Bourdon (1848).

> O método que é designado sob o nome de redução à unidade, é aplicável a todos os problemas que dependem da teoria da proporcionalidade;.... Mas, se este método tem a vantagem de ser mais analítico que os nossos, tem, segundo outros, o inconveniente de ser mais prolixo em seus detalhes. De todos os modos, estamos distantes de depreciá-lo; ao contrário,recomendamo-lo aos professores, como um excelente exercício. (BOURDON, 1848, p.235)

Esse fazer é tratado por Ávila sob o olhar funcional entre duas variáveis e sob esse ponto de vista não encontra abrigo nas escolas de ensino fundamental. Isso foi observado nas resoluções dos professores e nos livros didáticos consultados do PNLD-2008.

Poderíamos pensar, então, que esse fazer, apresentado como de proporcionalidade, foi adotado pelo ensino médio na disciplina matemática, mas isso não ocorre. Ao contrário, o que observamos é que a proporcionalidade deixa de ser objeto de estudo objetivo na disciplina matemática nesse nível de ensino, mesmo no tema funções. Quando surgem situações que sugerem ser do tipo regra de três, usa-se a prática canônica escolar, como no cálculo de percentuais, por exemplo, sem clareza da proporcionalidade.

No entanto, no ensino de outras disciplinas como da física e da química se faz presente um misto entre a prática canônica da regra de três, mesmo para obtenção de fórmulas, e o da relação funcional, como posto por Ávila, sem maiores discussões sobre proporcionalidade, em aplicações diretas. Os extratos dos livros de Química a seguir ilustram nossa compreensão.

O primeiro sobre o uso da prática canônica por Feltre (2004 p.30) na seguinte situação.

> Quando temos 3 mol de sal comum em 1kg de água, dizemos que a molalidade da solução é igual a 3 mol/kg, ou ainda que a solução é “3 molal”. De forma geral, quando temos n_1 mols de soluto em m_2 gramas de solvente, podemos equacionar:
>
> m_2 g de solvente — n_1 mol de soluto
>
> 1kg=1000g de solvente — w mol de soluto
>
> $$w = \frac{1000 n_1}{m_2}$$

Nessa situação, a regra de três é pratica da atividade de Estequiometria que se legitima pela pertinência de seus resultados. O segundo extrato é sobre o uso da prática de relação funcional de varáveis por Trindade e Pugliese (1989).

> Lei de Boyle – Quando uma dada porção fixa de ar, a temperatura constante, é submetida a diferentes pressões, o volume (V) de ar varia de modo inversamente proporcional á pressão (P). Isto é: $V = \frac{k}{P}$, (sendo a temperatura e a massa gasosa constantes e k uma constante de proporcionalidade). TRINDADE E PUGLIESE (1989, p.121).

Nesse caso, da relação funcional, é explicitado o termo proporcionalidade, mas não é discutido. É comum os alunos e até professores lerem as fórmulas por meio das operações envolvidas e não pela relação entre as variáveis (grandezas), assim, por exemplo, os autores manifestam “que o produto da pressão pelo volume numa dada temperatura definida deve ser igual a uma constante” (p.130). Exemplos similares nós encontramos no ensino de física quando os sujeitos afirmam que a “força é igual à massa vezes aceleração” em lugar de “força é diretamente proporcional à massa e à aceleração”.

As práticas da relação funcional ganham destaque nos livros científicos, mesmo no ensino médio, com os termos explícitos de proporcionalidade, e as expressões matemáticas decorrentes ganham o status de modelo matemático, fórmulas matemáticas, e, dependendo do contexto, de “Lei”. (de Boyle, no exemplo anterior).

Esse status de modelo ou de Lei pode remeter à ilusão que as operações indicadas pelo modelo ou Lei são descobertas por verificações empíricas independente do sujeito, não permitindo se dar conta que, antes, o modelo é produto da ação de um sujeito em situação. Desse modo, a relação de proporcionalidade é assumida por conveniência, no sentido de ser uma das mais simples relações elaborada pelo homem que justificam o fazer da regra de três, ou por ser assim que se faz em tal ou tal situação. A presença da forma canônica e da relação funcional simultaneamente em um livro texto como de Feltre (2004) indicado pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLDEM 2009, 2010 e 2011), em nossa compreensão, revela o que afirmamos.

No ensino fundamental o método da redução à unidade como regra de três não é explorado em geral, apenas em situações específicas, como cálculo de juros, e não é percebido como tal. Mesmo que este resolva todos os problemas de grandezas em proporção.

Em nossa compreensão isso produz uma lacuna que impede a compreensão de modelos matemáticos ou de leis científicas em linguagens matemática como construções do sujeito em situação com matemática, pois compreendemos que a prática do método da redução à unidade, consagrado pela prática da regra de três em diferentes atividades, inclusive as científicas, foi no percurso do desenvolvimento cientifico adquirindo essa nova feição de relação funcional entre variáveis e como tal exigindo objetivamente a noção de proporcionalidade.

Para nós o termo sujeito em situação com matemática significa o sujeito que interpreta uma situação vivenciada, ou potencialmente a ser vivenciada por ele por meio de mobilizações de objetos e relações convencionais da matemática. Nesse sentido, o sujeito mobiliza noções e objetos convencionais da matemática subordinadas às imposições de jeito de fazer e ou de conveniências para o contexto em que está inserido.

Assim, podemos olhar a prática da regra de três como práticas de modelagem e isso pode exigir a compreensão da proporcionalidade, não no sentido de ser verificável empiricamente, mas como algo que se pode realizar, no mesmo sentido, da semelhança na geometria, que embora não seja verificável em geral, muito contribui para construções de semelhantes geométricos. Nesse sentido, pode ser evidenciada, ainda no ensino básico, a preocupação de Skovsmose sobre os modelos matemáticos serem criações humanas para governar realidades sociais, no sentido de criar e controlar situações sociais.

Essa governabilidade é assegurada a partir da visão dos modelos matemáticos como interpretações fiéis de situações do mundo real, que é fomentada por seus usos em analises que se mostram exatas para determinados tipos de situações sociais, como é o caso do financiamento de veículo, cálculo do consumo de energia elétrica, criações de tecnologias e, sobretudo, da legitimidade pelo uso em outras ciências. No entanto, os modelos matemáticos são produtos de um fazer matemático institucionalizado para construir e controlar essas situações, no sentido da matemática em ação (SKOVSMOSE, 2004).

As situações do mercado financeiro são governadas pela matemática financeira onde se percebe claramente que os modelos são construídos com intenções de assegurar lucros ou vantagens financeiras a quem possui o dinheiro ou o bem desejado pelo outro. Para isso, em diferentes situações desse contexto as práticas da regra de três são mobilizadas; a canônica, da redução a unidade, e de relação funcional. Não somente elas que determinam as mobilizações, mas o sujeito. Este mobiliza essas práticas da matemática em conexões com outras praticas da Economia de modo a atender intenções e interesses da comunidade financeira.

No ensino de Física escolar, os modelos matemáticos revelam o quanto as grandezas e as relações entre elas são determinadas pelos sujeitos de modo a atender seus interesses e intenções. Por exemplo, a relação de proporcionalidade entre a força F e o alongamento da mola x, mais precisamente $F= k.x$, identificado como a Lei de Hooke, que pode ser anunciada e analisada por um problema de regra de três simples, não é evidenciado experimentalmente nas bancadas dos laboratórios escolares, mas é imposto sem maiores discussões de que a situação “obedece” a relação posta.

Nesse caso, o sujeito interpreta uma situação na qual não tem controle e nessa interpretação elege variáveis de interesse no contexto em que está inserida e infere uma relação matemática convencional entre elas. É fato que quanto maior a força, maior será o alongamento, mas o crescimento de ambas não é de proporcionalidade no sentido ideal dos matemáticos. Parece ser mais no sentido da justiça ou do ser justo; Se ambos crescem, que cada um cresça segundo sua grandeza, sem disparates. A pertinência das analises frente a situações reais servem para legitimar o modelo e assim a realidade passa a ser governada pela matemática, ou seja, as previsões do modelo passam governar decisões.

Como podemos notar, as práticas da regra de três, com ou sem proporcionalidade, são mobilizadas em conexões com outras práticas em contextos de modo a interpretar realidades que levam a construções de modelos matemáticos. A relação de proporcionalidade se mostra como uma das relações matemáticas que permitem de modo simples, e isso é importante destacar, construir modelos e análises que podem demonstrar a factibilidade ou não para situações ideais desejadas pelos sujeitos. Mas, tal relação de proporcionalidade entre grandezas (variáveis), só existe enquanto construção de sujeitos em contextos que determinam tal relação. O problema escolar a seguir extraído de Dante (2006) que usamos para exemplificar ilustra nosso entendimento

> Vinte homens pavimentaram 6 km de estrada em 15 dias. Quantos homens serão necessários para pavimentar 8 km de estrada em 19 dias? (DANTE, 2006 p.190)

Resolução:

Homem (h)	Pavimento (p)	Tempo (t)
x	8	10
20	6	15

Representando as grandezas por d, t e m resultam o esquema:

h_1	p_1	t_1
h_2	p_2	t_2

A partir de breve análise das relações entre as grandezas, como realizado nas práticas escolares, escreve-se a relação

$$h_1 = \frac{h_2 . p_1 . t_2}{p_2 . t_1} .$$

Observamos que a proporcionalidade nesse caso não é posta em discussão. A situação se impõe como de regra de três e algebrizada no sentido da generalização da aritmética, produz um modelo. Em nossa compreensão, o sujeito constrói o modelo segundo a instituição em que está inserido e se aluno do ensino fundamental isso é permitido, ou seja, a prática da regra de três sem preocupação com a proporcionalidade. Claro que tal fazer pode acabar por levar o sujeito a tomada de consciência da proporcionalidade como relação funcional e como aperfeiçoamento de seu fazer canônico, mas, sobretudo revela seu papel nas analises de confronto entre o modelo e a situação real hipotética.

Nesse sentido, é permitido ao sujeito fazer conjecturas acerca da situação, a partir de novos estados da situação em relação ao estado inicial, inclusive alterando este, como sugere a tabela1, construída, com os dados iniciais do problema proposto.

TABELA1: Valores das grandezas a determinar

h	p	t
20	6	15
?	8	10
20	10	?
30	?	12

É conveniente destacar que permite também fazer conjeturas sobre aspectos matemáticos do modelo e das complexidades nele presente que podem limitar ou favorecer suas aplicações, mesmo que seja decorrente da regra de três utilizando ou não de forma articulada os conceitos de proporcionalidade.

6-CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na matemática escolar o tema proporcionalidade geralmente é tratado como objeto de estudo na sexta série do ensino fundamental (sétimo ano) e segundo Pontes (2009, p.65), em geral, é ensinado por meio da técnica denominada regra de três simples, através da qual são dados valores de séries de grandezas, sendo necessário determinar o valor da incógnita ou elemento desconhecido, mantendo-se a proporcionalidade.

Em nossa compreensão, a técnica da regra de três para ensinar proporcionalidade não leva a consciência que os problemas são de proporcionalidade e que não explica a natureza das relações ou o modelo matemático. Decorre principalmente por constituírem práticas que já tem o seu jeito de fazer e pensar próprio, como verificamos por meio das análises das resoluções dos professores pesquisados e nos livros didáticos, em geral.

Mas o fazer da regra de três ao largo do tempo é marcado inicialmente por um fazer independente do conceito de proporcionalidade que caminhou para um fazer justificado matemático ancorado no conceito de proporcionalidade. Tal fazer justificado parece se constituir a grande preocupação ao longo dos últimos dois séculos no ensino. No entanto, parece claro que as situações-problema ainda enfrentadas nas escolas por regra de três assumem a relação de proporcionalidade sem discussão. O que determina sua aplicação é a situação que se identifica como de regra de três, determinado pelo fazer cultural e histórico do homem frente a esses tipos de situações. Trata-se de um problema tipo de regra de três e então se aplica o algoritmo (SILVA e GUERRA, 2011).

No ensino fundamental, por exemplo, o método da redução à unidade como regra de três não é explorado em geral, apenas em situações específicas, como cálculo de juros, e não é percebido como tal. Mesmo que este resolva todos os problemas de grandezas em proporção.

Esses olhares nos levaram a refletir sobre a ambigüidade da regra de três com relação à proporcionalidade apontada no texto e então passamos a compreendê-la como prática que foi fundada em diferentes atividades humanas que em seu percurso de uso e difusão foi ganhando novas afeições.

Acreditamos que a tomada de consciência do processo da regra de três, aliada aos tipos de problemas tratados ao largo de sua historia, podem permitir um fazer docente da regra de três algebrizada com relações com outros temas escolares, matemáticos e não matemáticos, que em muito poderá prover de compreensões que permitam aperfeiçoar a prática social escolar da matemática, tornando-a mais atuante e reflexiva socialmente (SILVA,MACHADO Jr e GUERRA, 2010).

E ainda, pensamos que o fazer da regra de três na escola deve inicialmente comportar essa abordagem de modo a revelar o fazer socialmente instituído ao longo do tempo no enfretamento de diferentes situações, mas, sobretudo, caminhar para a tomada de consciência da proporcionalidade como instrumento de construção de relações entre as grandezas envolvidas que paulatinamente evolui para relações algébricas entre variáveis. Essas relações não só fazem parte do fazer de outras ciências (como engenharia, geologia etc.) como interpretações de fenômenos, mas também do próprio fazer matemático. Isso poderia permitir não somente a quebra do isolamento curricular da regra de três, mas contribuir para revelar que as relações de proporcionalidade estão na mente do sujeito que enfrenta a situação e não necessariamente na situação. Esse pensar aliado às orientações propostas pelos documentos oficiais como os PCN‘s podem ajudar na compreensão da regra de três como uma prática social e cultural legitimada pela sociedade e que, portanto deve ser ensinada em nossas escolas. .(SILVA e GUERRA, 2011)

Para finalizar destacamos que a resposta para nossa questão norteadora parece ter sido parcialmente respondida uma vez que podemos olhar a prática da regra de três como práticas de modelagem e isso pode exigir a compreensão da proporcionalidade, não no sentido de ser verificável empiricamente, mas como algo que se pode realizar, no mesmo sentido, da semelhança na geometria, que embora não seja verificável em geral, muito contribui para construções de semelhantes geométricos. Nesse sentido, pode ser evidenciada, ainda no ensino básico, a preocupação de Skovsmose sobre os modelos matemáticos que conformam o *algo mais que matemática* e serem criações humanas para governar realidades sociais, no sentido de criar e controlar situações sociais.

E mais, que essa resposta parcial se manifesta nos trechos das falas dos professores pesquisados após um curso de formação continuada em que as práticas de regra de três são mobilizadas em conexões uma com as outras:

M---Nós fazemos com as setinhas (...) agora eu ensino aos alunos (...) Peço para ele analisar, ver o problema(...) Eu elaboro problemas para ele entender se as grandezas são ou não proporcionais.

N--... Porque a regra de três surgiu de uma necessidade, da prática, e ai, algumas etapas são “queimadas” como a questão da proporcionalidade, que a gente não prestava “muita” atenção (...) essa técnica que aprendemos, no meu modo de ver é a mais correta usando a constante de proporcionalidade e isso mudou meu entendimento sobre a regra de três e minha prática mudou.

S- Meu aluno aprendeu muito mais (...) eu fiz uma retrospectiva do que ensinei no ano passado e passei agora o que vai ser na sétima, foi ai que percebi fazendo um comparativo do ano passado e este ano, que eles tiveram maior entendimento que antes, bastante.

R- Só depois do módulo, naquele momento ali a gente percebe o fato de a pessoa participar diretamente desse momento ali, ela mesma participar da situação que está fazendo (...)

Essas falas nos estimulam a continuar a presente pesquisa de modo que possa fomentar uma compreensão das práticas da regra de três como prática escolar não restrita a disciplina matemática, mas também de física, química, biologia, geografia, e outras disciplinas, e como tal não pode ser riscada do programa como assim desejam especialistas matemáticos.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A e ZAMPIROLO M.J.C.de V. **Novo praticando matemática**. São Paulo:Editora do Brasil,2002

ÁVILA, G. Ainda sobre a regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 9, p 1-10, 1986.

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n. 8, p 1-8, 1986.

ÁVILA, G. Razões, proporções e regras de três. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 8, p. 1-8,1986.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive.

BIACHINI,E.Matemática.6 ed. São Paulo,:Moderna,2006.

BOURDON, M. **Aritmética.** (Traducida por Agustín Gómez Santa Maria. Tratado completo de matemáticas. Tomo I. Según la 21 edición francesa. 1ª edición: 1797). Madrid: Imprenta de D. J. M. Alonso,1848.

BOYER, C. B.. **História da matemática**. São Paulo:Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. (1998). MEC. SEF. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC/SEF, Matemática: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, 1997

BRASIL. (1998). MEC. SEM. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC/SEM, Matemática: Ensino médio, 1998.

BRASIL. MEC. SEF. Guia de livros didáticos — 5ª a 8ª séries. Brasília, MEC/SEF, 2008

BROOKS, E. **The philosophy of arithmetic as developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison containing also a history of arithmetic**. Lancaster, PA: Normal publishing company,1880.

BUSSE, A. Individual ways of dealing with the context of realistic tasks: first steps towards a psychology. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,**. 37 (5), p. 354-360, 2005.

CANTORAL, R. et. al. Socioepistemologia y representación: algunos ejemplos. **Relime**, p 83-102, 2006 Número Especial.

CORTELLA, M. S. **A escola e o conhecimento:** fundamentos epistemológicos e políticos. 12. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cortez, 2008.

D'AMBROSIO, U. . **Etnomatemática: Raízes socio-culturais da arte ou técnica de explicar e conhecer**. 1987

DANTE,L.R.**Tudo é matemática**. São Paulo:ática,2006

DEL POTRO, B. C. **Um manual de aritmética mercantil de mosén Juan de Andrés.** Canedo, 2007. Disponível em: <www.aeca.es/vi_encuentro_trabajo_história_contabilidade>. Acesso em: 20 mar. 2011.

DEL POTRO, B. C.; DE LA LLAVE, R. C. Oficios urbanos y desarrollo de la ciência y de la técnica en la baja edad media: la corona de castilla. **Revista de Historia,** Norba, v. 17, 41-48, 2004.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995

FARFÁN, R. M.; FERRARI, M. Um estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de uma red de modelos. **Revista Latinoamericana de investigación em Matemática Educativa**, 11 (3), p.309-354, jun. 2008.

FELTRE,R.**Quimica**.ed.6. v. 3 fisico-quimica, Ensino médio. São Paulo: Moderna,2004.

GARCÍA, F. J. La **modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a lãs relaciones funcionales.** Doctoral dissertation. Universidad de Jaén. 2005.

GARCÍA, F.J. e RUIZ H, L. Reconstrucción y evolución de organizaciones matemáticas en el ámbito de los sistemas de variación de magnitudes. **Boletín Del Seminario interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas,** n. 12. 2002.

GARCÍA. F. et al**. Modelagem matemática como ferramenta de conexão da matemática escolar.** ía, University of Jaén Josep Gascón, Autonomic University of Barcelona Luisa Ruiz Higueras, University of Jaén Marianna Bosch, Ramon Llull University, 2006

GARDING, L. **Encontro com a matemática**.Trad. de Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga.Brasília: Editora Universidade de Brasília,1981.

GHEVERGHESE, G. **La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas**. Madrid: Pirámide,1996.

GÓMEZ, B. **Los ritos en la enseñanza de la regla de tres**. En Alexander Maz, Manuel Torralbo y Luís Rico (Eds*.). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática*, pp. 47-69. Córdoba. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, 2006.

GRNDSARD, F. **Mathematical modeling and the efficiency of our mathematics**. 2005. Disponivel em <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/sym4/Earcome3_Francine%20Grandsard_sym4.doc > acesso em :02.06.2009

GUERRA, R. B.; MENDES, M.J.F.; GONÇALVES, T.O (Org.). **Fundamentos de matemática**. (Obras Completas Educimat). Belém: Edufpa, v. 19, 2006.

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. da. Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. **Perspectivas da educação matemática**, v..2, n. 03, p 95-119, jan/jun, 2009.

IVERSEN,S.M e LARSON,C.J. Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math: a study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized test to their modeling abilities,ZDM, v.38, n.3, 281-292, jun, 2006.

JULIE, C. M**athematical literacy: Myths, further inclusions and exclusions.** Pythagoras, v.64, p.62-69, 2006.

LACROIX**,** S. F**.Tratado elemental de aritmética, copuesto em frances para uso de la escuela central de lãs cuatro naciones.** Madrid e na imprenta nacional, 1839.(http://books.google.com.br/).

LESH, R. & SRIRAMAN, B. (2005a). **John Dewey Revisited- Pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning**. In A. Beckmann, C. Michelsen & B. Sriraman [Eds.], Proceedings of the 1st International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences. May 18-21, 2005, University of Schwaebisch Gmuend: Germany. Franzbecker Verlag, pp. 32-51

LIMA, E L. Novamente a proporcionalidade. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n.12, p 8-12, 1988.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA. E.L**.Temas e Problemas,** 3ª Edição,, ISBN 858581816-6, Publicação SBM 2001.

MIGUEL, A. e MENDES, I. A. Mobilizing in mathematics teacher education: memories,social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education**,v.42,381-392, april 2010.

NAME,M.A.**Vencendo com a matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2005.

NUÑEZ. P. **Libro de algebra en arithmetica y geometría.**Universidad de coymbra,1567 .(http://books.google.com.br/)

PÉREZ DE MOYA, J. (1998). **Arithmetica práctica y speculativa**. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro,1998 (Trabajo original publicado en 1562).

perspective. **The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

PONTE, J. P. **Literacia matemática**.In Congresso Literacia e Cidadania, Convergências e Interface, 2002, Évora, Actas eletrônicas... Évira: Centro de investigação em educação Paulo Freire, 2002.cd-rom.

PONTES,M.G.O**. Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**.João Pessoa:Ideia,2009.

RADFORD, L. **La arithmetica practica del padre padilla y los inicios de la matemática en centro américa en el período colonial**. Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 7 no 14 (outubro/2007 - março/2008) - pág. 193-211 Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2007. ISSN 1519-955X.

RIOS,A.C..Socioepistemología y prácticas sociales. **Educación Matemática,** abril, año/vol.18, numero 001Santillana Distrito Federal, México, 2006 pp. 133-160.

SANTA CRUZ, M. G. (1794). **Dorado contador. Arithmética. especulativa y práctica.** Madrid,1794 (1ª Ed. 1594).

SIERRA, G. M. Los procesos e convención matemática como generadores de conocimiento. **Revista Latinoamericabna de investigación em Matemática Educativa**, v. 8, p.195-218, jul. 2005.

SILVA, D.P. e GUERRA, R.B. Para que ensinar regra de Três? In XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

SILVA, D.P.MACHADO Jr, A.G. e GUERRA, R.B. Regra de três e modelagem matemática crítica: um olhar pela socioepistemologia. In X ENEM-Encontro

Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador – BA, 2010.

SKOVSMOSE, O. and YASUKAWA, K. **Formatting Power of ‘Mathematics in a Package’: A Challenge for Social Theorising?** in Philosophy of Mathematics Education Journal, 2004.(http://www.ex.ac.uk/~PErest/pome18/contets.htm)

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica:** incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. **Towards a philosophy of critical mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

SKOVSMOSE, O. e NIELSEN,L. POWEL,A. Critical Mathematics Education. Research Report R-95-2023, Aaborg University:Departament of Mathematics and Computer Science,1995.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. v.II, Dover publications, New York, 1958

STEEN, L. A. **Data, Shapes, Symbols:** achieving balance in school mathematics 1991. Disponível em: <http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/schmath.html>. Acesso em: 12 dez. 2004.

STEEN, L. A. **Mathematics and Numeracy:** two literacies, one language. 2001. Disponível em: <http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/schmath.html>. Acesso em: 12 dez. 2004.

STEEN, S. L. **Numeracy**. 1990. Disponível em: <http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/schmath.html.>. Acesso em: 12 dez. 2004

TRINDADE,D.F. e PUGLIESI,M. **Quimica básica teórica**. São Paulo: Icone Editora ltda,1989.

VALLEJO, J. M. **Tratado Elemental de Matemáticas.** escrito de orden de S.M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madridy demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida yconsiderablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imp Garrayasaza, 1841.

WALTHAM, D. **Mathematics:** a simple tool for geologists. .2. ed. London: . blackwell science, 2000.

YASUKAWA, K. JOHNSTON,B.YATE,W. Numeracy as a critical construtivist awareness of maths: Case studies from engineering and adult basic education, Regional ,Collaboration in **Mathematic Education: An ICMI regional conference**, Monash University, Melbourne, Bowater Reding, 1995.815-825