RODOLFO RONALDO NOBRE OLIVEIRA

“Ver como”: uma vivência do olhar para aprendizagem de Geometria

BELÉM – PARÁ
2012

RODOLFO RONALDO NOBRE OLIVEIRA

“Ver como”: uma vivência do olhar para aprendizagem de Geometria

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI/UFPa – como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas na área de concentração de Educação Matemática.

BELÉM – PARÁ
2012

RODOLFO RONALDO NOBRE OLIVEIRA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Ver como”: uma vivência do olhar para aprendizagem de Geometria

Autor: Rodolfo Ronaldo Nobre Oliveira
Orientadora: Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Data da defesa: ___ / ___/ ___

Banca Examinadora

____
Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira – UFPa (Orientadora)

____
Profª. Drª Cláudia Regina Flores – Membro Externo

____
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – Membro Interno

BELÉM – PARÁ
2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Oliveira, Rodolfo Ronaldo Nobre, 1984-
Ver como: uma vivência do olhar para aprendizagem de geometria / Rodolfo Ronaldo Nobre Oliveira. - 2012.

Orientadora: Marisa Rosâni Abreu da Silveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

1. Geometria – estudo e ensino. 2. Jogos no ensino de matemática. 3. Interpretação de imagens. I. Título.

CDD 22. ed. 516

Agradecimentos

A Deus, por iluminar meus passos e pensamentos.

A minha orientadora Profª. Drª. *Marisa Rosâni Abreu da Silveira* que foi peça fundamental para a construção desta pesquisa com suas orientações. E por sua sabedoria, seu conhecimento e paciência que esteve a meu dispor para guiar meus passos.

Ao Grupo de Estudos em Linguagem Matemática (GELIM) por seu acolhimento.

Aos colegas e parceiros de estudo do GELIM: Evandro dos Santos Paiva Feio, Luciano Augusto da Silva Melo, Nelson Pinheiro C. de Souza, Ivanete Maria Barroso Moreira, Reginaldo de Lima Pereira, Robson André Barata de Medeiros, Paulo Vilhena da Silva, Rafael Silva Patrício, Valdomiro Pinheiro Teixeira Júnior, Janeisi de Lima Meira, Alan Gonçalves Lacerda, Daniel de Jesus Ferreira, Otávio Augusto do Espírito Santo Barros e Ronaldo Barros Ripardo.

A Profª. Drª Cláudia Regina Flores por ter aceitado participar da comissão avaliadora, por aconselhar-me e principalmente por suas orientações esclarecedoras.

Ao Prof. M. Sc. Lênio Levy Fernandes por suas contribuições a esta pesquisa.

Ao Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes por sua gentileza ao ter aceitado o convite para a banca e por suas ricas contribuições em nossas conversas.

Aos meus pais, Ronaldo Teixeira Oliveira e Aurideia de Jesus Tavernard Nobre, pela educação e pelo incentivo.

A minha avó Ana Maria Pinto Teixeira por sua gentileza e amor.

Ao meu tio, Mário José Bandeira dos Santos, por seu apoio e incentivo.

Ao Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI).

Enfim, a todos que de modo direto e indireto contribuíram para a realização da pesquisa.

Epígrafe

Por que foi que cegamos, Não sei. Talvez um dia se chegue a conhecer a razão. Queres que te diga o que penso, Diz. Penso que não cegamos. Penso que estamos cegos, Cegos que veem, Cegos que, vendo, não veem.

José Saramago,
In: Ensaio sobre a Cegueira.

Resumo

Este trabalho busca compreender qual(ais) a possível(eis) forma(s) assumida(s) pelo “ver” de alunos do ensino médio e como ela(s) pode(m) influenciar em seu aprendizado sobre a Geometria. O referencial teórico que guia esta pesquisa são as ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein que abrange concepções em torno do ver, dos jogos de linguagem, das formas de vida, de regras, contextos, etc. A pesquisa tem caráter qualitativo com uma parte composta de levantamento bibliográfico e outra de campo. A pesquisa revelou formas distintas de ver dos alunos, a saber: o “ver sinóptico” e o “ver como”, como também aponta que essas formas de ver influenciam de um modo ou de outro no aprendizado do objeto visto. E desta forma os modos de ver definem a interpretação em função do contexto em que está ocorrendo à aprendizagem da Geometria.

Palavras – chave: aprendizagem da Geometria; modos de ver; jogos de imagem.

ABSTRACT

This work seeks to understand which one(s) possible(lo) form(s) taken(s) by "seeing" of high school students and how she(s) can influence on their learning about geometry. The theoretical framework guiding this research are the ideas of the philosopher Ludwig Wittgenstein covering concepts around the view, language games, forms of life, rules, settings, etc. The research is qualitative with a party composed of bibliographic and other field. The research revealed different ways of seeing the students, namely the "synoptic view" and "see how" but also points out that these ways of seeing influence in one way or another in learning the object seen. And so do the modes define the interpretation depending on the context in which learning is occurring Geometry.

Key – words: learning Geometry; modes see; game image.

Sumário

Lista de Ilustrações

Introdução

É a partir do pensamento do filósofo Wittgenstein que esta pesquisa foi desenvolvida, buscando a compreensão em torno do “ver” de alunos do ensino médio a respeito de sua aprendizagem de Geometria. O ver que se deseja tratar nesta pesquisa é aquele em que a simples faculdade da visão não aduz, porque suas características para a revelação da imagem matemática necessitam de imbricações outras. Como, por exemplo, quando se diz esse menino não sabe jogar xadrez porque não compreende os limites das relações entre os objetos. É o “ver como” os objetos da Geometria são percebidos por estes alunos em sua aprendizagem. Daí porque a pergunta de pesquisa que motivou esta atividade foi: existe um modo ou modos de “ver”, nos alunos, que possa influenciar em seu aprendizado acerca de Geometria?

Esta pesquisa nasce de uma inquietação pessoal como Professor de Matemática da rede pública de ensino, pois tenho acompanhado o ensino de Geometria ser sistematicamente diminuído. Isto é, o que se ensina é um conteúdo desconexo das outras partes da Matemática e em raros casos quando ocorre uma ligação direta entre Álgebra e Geometria, por exemplo, esta é um “adereço” para aquela. Como quando se usa um problema de cálculo de área para algebrizar uma equação polinomial de grau dois. No entanto, não pode se perder de vista que os gregos antigos pensavam o mundo geometricamente, inclusive, utilizando a Geometria para refletir sobre problemas filosóficos.

Corroborando com minha inquietação as pesquisas de Pavanello (1989), Lorenzato (1995), Pirola (2000), Passos (2000) e Pereira (2001). Demonstram que mesmo com o passar dos anos o modo como a Geometria vem sendo tomada pouco mudou, e, que, a Geometria é escassamente estudada nas escolas.

No capítulo um estão alguns breves aspectos sobre a vida de Wittgenstein, como o início de sua carreira acadêmica até se configurar como um importante filósofo da linguagem. Também, tento mostrar a intensidade com que enquanto ser humano buscou sentir e compreender o mais profundo significado de viver. Além, de fazer considerações e distinções acerca de sua obra filosófica, no caso o *Tractatus Logicus-Philosophicus* e as *Investigações*

Filosóficas, como sua mudança de “paradigma” reflexivo sobre o prisma da linguagem, do entendimento e do mundo.

No segundo capítulo discuto o sentido wittgensteiniano sobre percepção que está intimamente associado a revelação dos aspectos de um objeto. Coloco também como se comporta um indivíduo quando não tem esse “ouvido musical” para as características dos objetos. Ressalto a necessidade das premissas que contribuem para a não “cegueira sobre os aspectos dos objetos”.

No capítulo três tento mostrar uma via de possibilidade e interpretação, parafraseando Wittgenstein em seus jogos de linguagem, para compreensão do que denomino e caracterizo como jogos de imagem. Há autores como Christiane Chauviré que em seu livro, *Wittgenstein*, diz que este filósofo deixou uma margem para uma teoria da figuração. Por mais que não tenha se empenhado diretamente para isto.

No capítulo quatro mostro os caminhos que seguiu a pesquisa, seus instrumentos de coleta de dados, faço a caracterização dos participantes da pesquisa e dos locais em que ocorrera. Há também a exposição de algumas pesquisas que tratam da pouca presença no currículo escolar e dos déficits de ensino e aprendizado sobre geometria.

No capítulo cinco estabeleço a ligação entre o dado bruto da coleta de campo com o lapidador teórico de Wittgenstein. Mostro por meio de “retratos” (amostras) de algumas das respostas dos questionários e das entrevistas dos alunos como estão “vendo” ou não, através de suas objetivações escritas, os aspectos dos objetos geométricos. Ademais, faço algumas considerações com relação as suas vivências ou formas de vida de modo a indicar que isto possa ter os levados a um “ver sinóptico”, ou ao “ver como”.

No capítulo seis termino com as inferências nascidas do bojo do casamento entre a teoria wittgensteiniana e os dados da pesquisa de campo. De lá concluo, por exemplo, que o objetivo geral e os específicos foram confirmados tanto por sua congruência teórica do filósofo como por sua verossimilhança com o que de fato ocorre na sala de aula quando o assunto é aprender Geometria.

1 - Wittgenstein um pouco de História

Segundo Padovani (1974) Wittgenstein nasceu em Viena, a 26 de abril 1889, sua família havia migrado da Saxônia para Áustria e, sua descendência judaica cessou com seu avô paterno que se convertera ao protestantismo. Seu nome é Ludwig Josef Johann Wittgenstein, seu pai foi dono de uma grande siderúrgica e organizou o primeiro cartel de aço da indústria austríaca. Sua mãe era filha de um banqueiro vienense, era dedicada à música.

De acordo com Padovani (1974) Wittgenstein teve uma educação, até os catorze anos, em casa. Era um aluno um tanto quanto indiferente. Contudo, mostrava forte interesse por engenhos, a ponto de ter construído uma máquina de costurar, que provocou grande admiração nas pessoas. Seus pais resolveram então enviá-lo a uma escola em Linz (região montanhosa da Áustria, onde a ênfase era no ensino de Matemática e Física, dando pouca relevância aos estudos clássicos). Após três anos em Linz, Wittgenstein ingressou na Escola Técnica Superior, em Charlottenburg, em Berlim. Ao final da primavera de 1908, deixou essa escola, onde estudava engenharia mecânica. Fez sua matrícula na universidade de Manchester. Por três anos dedicou-se à pesquisa aeronáutica, onde seu maior feito foi desenvolver um motor a jato e um propulsor. Posteriormente suas inclinações mudaram à Matemática Pura e, em seguida a seus fundamentos.

Para Padovani (1974) Wittgenstein encontrou os Princípios da Matemática de Bertrand Russell, causando-lhe grande entusiasmo. Logo, em 1912, abandonou o curso de Engenharia e ingressou no Trinity College para estudar com Russell. Sob sua orientação estudou Lógica e realizou vários progressos.

Passados várias décadas em 1950, Wittgenstein viajou para Viena e reencontrou sua família e, no mesmo ano, morou certo tempo com um amigo de Oxford. No ano seguinte se muda para a casa de seu médico, em Cambridge, pois a ideia de passar seus últimos dias em um hospital não lhe agradava. Em 27 de abril de 1951, sua doença avançou, agravando seu estado de saúde, e seu médico o avisa que seu fim chegara, respondeu a ele Wittgenstein: “Ótimo!”; e, suas últimas palavras antes de morrer foram: “Diga-lhes que eu tive uma vida maravilhosa”, falecendo em 29 de abril de 1951.

1.1 – Algumas influências sobre as ideias de Wittgenstein: Frege e Russell

FREGE

Gottlob Frege (1848-1925) considerado por muitos como o maior lógico contemporâneo, é um dos autores que influíram sobre o pensamento de Wittgenstein; logo, o conhecimento da obra de Frege ajuda na compreensão das ideias do próprio Wittgenstein.

Uma das diretivas de Frege é considerar a frase como contexto de significação das palavras. Isso quer dizer, que segundo Frege, as palavras isoladas não possui significado nenhum, porém dependem do contexto da sentença para que seu significado possa ser expresso. Como derivativa para Frege a menor unidade linguística dotada de significado não é a palavra, mas a sentença. Como unidade elementar, as sentenças podem se somarem indefinidamente, formando discursos completos.

> Mas as palavras, consideradas em si mesmas, não são unidades de sentido da mesma forma que as sentenças: as primeiras correspondem ao material básico que é utilizado na construção das últimas. Palavras isoladas não constituem unidades de sentido, mas combinadas com outras palavras podem contribuir para a construção de uma unidade de sentido.
> (PINTO,1998, p.89)

Frege fala do atomismo lógico. Esta concepção serviu como alicerce para primeira fase do pensamento de Wittgenstein, o Tractatus. Ao se falar de atomismo pode se partir do conceito pré-socrático, concluindo que o mundo lógico é formado por elementos que não são infinitamente divisíveis. Outro aspecto relevante para Frege é a necessidade de uma linguagem precisa, capaz de lidar com a complexidade da lógica formal. A precisão, a abstração da lógica requer, em seu entender, um novo mecanismo, uma nova linguagem que se adapte as exigências precisas, específicas e rígidas do horizonte lógico.

Contudo, com suas ideias Frege influenciou seus sucessores na corrente analítica tem como foco o reconhecimento de uma linguagem de nível superior que paira sobre a linguagem ordinária. Esta linguagem mais hermética e coesa fica invisível aos olhos do observador. A análise possibilitaria trazer a luz à lógica coberta, mostrando as incoerências, contradições tidas pelo uso incorreto da linguagem. Portanto, Frege contribui, nitidamente, com a sensação de desconfiança para com a linguagem comum, que passa a ser exposta como incapaz de suprir as demandas das buscas filosóficas. Mais, tarde Wittgenstein vai afirmar que não há problemas de filosofia, mas sim problemas de linguagem.

RUSSELL

Bertrand Russell (1872-1970) foi bastante influenciado por Frege e, por sua vez, um dos que mais influenciou Wittgenstein, de quem foi pupilo e amigo por anos. Colocou-se como partidário da filosofia da linguagem ideal, e suas palavras abrem o Tractatus Logicus-Philosophicus:

> O Tractatus Logico-Philosophicus do Sr. Wittgenstein, venha ou não a provar-se que é a verdade suprema a acerca dos temas que trata, merece com certeza, em virtude da sua inspiração, profundidade e alcance, ser considerado um acontecimento importante no mundo da Filosofia.
>
> (EDMONDS, 2003, p.26)

Em sua teoria da descrição (1905), propõe uma solução alternativa para o mecanismo referencial das descrições definidas para o sujeito. De acordo com Pinto (1998) Russell submeteu as descrições definidas em posição de sujeito a uma análise, considerando capaz de ver melhor qual a lógica por trás da sentença.

> “Para Russell, há duas espécies de conhecimento de coisas: conhecimento por contato (a palavra inglesa é ‘acquaintance’, cuja tradução literal seria ‘familiaridade’) e conhecimento por descrição”.
>
> (COSTA, 1992, p.45)

Como se opera o processo de formação de conhecimento? A resposta está no que Russell denominou de atomismo lógico (como já visto por Frege). Só é possível afirmar que o atomismo lógico e o conhecimento por descrição são válidos, porque há uma relação entre linguagem lógica e o mundo. Logo, ao compatibilizar uma sentença lógica com as informações do mundo, então sou capaz de descrevê-lo precisamente. Russell acreditava que o significado de um nome vem do fato de ele indicar uma relação com um objeto. Dessa forma faz sentido dizer que um nome ou frase possui sentido por descrever uma estrutura semelhante ao mundo.

Russell demonstra um princípio que uma sentença não demonstra de imediato sua forma lógica, a não ser se submetida a uma análise. Para mostrar como a gramática pode fazer confusão, Russell em um de seus exemplos mostra a seguinte sentença: “O atual rei da França é calvo”. Aparentemente a sentença tem coerência. Pense que o rei pode ser ou não calvo, dependendo da concordância com os fatos.

O problema é que não existe um rei da França, portanto sentença não é verdadeira, porque o rei não é calvo. Menos ainda é falsa, visto que o rei não é dotado de longos cabelos (já que ele não existe). Aqui a lógica é ferida no quesito do terceiro excluído (ou o rei é calvo ou não, a frase deve ser verdadeira ou falsa não há outra opção). A sentença é composta por três sentenças diferentes, cada uma é dotada de seu critério próprio de validade.

A teoria das descrições ignora as formas gramaticais e identifica cada uma das sentenças da seguinte forma:

- S1: Existe um objeto H (homem) tal que H é atualmente rei da França.
- S2: Não existe outro objeto H que seja atualmente rei da França.
- S3: H é calvo.

A teoria das descrições opera decompondo as sentenças em seus elementos mais basilares, até se chegar a sua forma lógica e a partir de então é que pode ser feita uma relação com o mundo. Segundo Marcondes (1998) a análise lógica fornece critérios para se justificar a determinação da relação verdadeira, correta, entre linguagem e realidade. Portanto, o problema da sentença acima está em S1 que não é verdadeira (falsa) invalidando as demais sentenças (S2 e S3) numa reação em cadeia.

O que pode ser concluído do pensamento de Russell é que quando se tiver uma situação com a linguagem em geral a primeira a deixar o cenário é a linguagem ordinária, assim se resolve o problema das ambiguidades e inverossimilhança. Segundo Pinto (1998) há por de trás da forma superficial das sentenças, uma lógica profunda, atingível por uma análise e este é o maior mérito da teoria de Russell.

2 - Percepção: a revelação dos aspectos de um objeto

Segundo Abbagnano (2007) a percepção não se estabelece como um estado em que há sensações elementares ou fundamentais (a não ser como abstração artificial) que acompanha o sujeito, e que compõem o objeto. E, em segundo lugar, o indivíduo é reduzido a um campo sem dimensões, está submetido às forças do campo que agem sobre ele. Neste sentido o indivíduo está em “locomoção”, isto é, está existindo num espaço que é denominado “espaço da vida”. A região onde o indivíduo tem a experiência de sua ação, espaço que não tem propriedades métricas ou direções determinadas, podendo a qualquer instante ganhar uma dimensão ou forma geométrica.

> Eu queria dizer, portanto: Se ele soubesse de repente como continuar, se entendeu o sistema, quiçá ele teve uma vivência especial – que talvez irá descrever se lhe perguntarmos: "Como foi, o que aconteceu, quando você de repente compreendeu o sistema?", do mesmo modo como descrevemos acima – mas aquilo que para nós o justifica dizer, em tal caso, que ele compreende, que ele sabe continuar, são as *circunstâncias* nas quais ele teve uma tal vivência.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 155)

> O substrato desta vivência é o domínio de uma técnica[1].
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p.272 – parte II, seção XI)

Para Wittgenstein é a vivência, entendida também como uma forma de vida, que mediará essa relação de perceber o objeto. Contudo, esta vivência tem o caráter de técnica à medida que dela é precisa para intervir sobre o mundo dos fatos e das coisas. Por exemplo, sou convidado a participar de um treino de pilotos de fórmula 1 (como piloto) com certeza me negarei a participar (mesmo desejando muito fazer parte desse ambiente). O motivo é que a minha percepção com relação a ser um corredor é totalmente diferente daquela de ser espectador e admirador de fórmula 1. Isto é, para participar desta vivência como piloto teria que dominar a técnica de pilotagem.

Segundo Torrezan (2000) o termo formas de vida em Wittgenstein estabelece um marco de mudança no estudo da significação da linguagem, porque a linguagem passa a ser parte integrante da vida das pessoas, como comer, andar, correr. As formas de vida que Wittgenstein se refere, em sua obra, parecem está diretamente ligadas ao modo cultural de viver das pessoas, à sua visão de mundo e à linguagem assumidas por elas. Não num sentido individualista, mas num sentido de um conjunto de atividades que as pessoas exercem e que estão diretamente ligadas aos seus modos de viver. Por conseguinte, uma forma de vida e uma formação cultural ou social e se estabelece na totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem.

Em Wittgenstein a vivência (forma de vida) está associado ao domínio de uma técnica que está associada a regra que viabiliza uma dinâmica da existência. Para Abbagnano (2007) em Wittgenstein a regra pode ser um auxílio ao ensino do jogo, é

---

[1]Técnica: compreende qualquer conjunto de regras aptas a dirigir eficazmente uma atividade qualquer. (ABBAGNANO, 2007, p. 1106)

comunicada ao aprendiz que se exercita na sua aplicação. Ou, é um instrumento do próprio jogo. Enfim, seguir uma regra não consiste em seguir os exemplos passados da regra, nem seguir uma formulação e uma interpretação da regra. Pois, seguir uma regra é uma prática, um uso, um hábito que é impossível de se realizar de modo privado. O que aproxima as regras é apenas uma semelhança de família entre elas.

Na aplicação da regra durante o jogo os jogadores são seus próprios juízes, quando observam as condutas uns dos outros. No caso do professor de matemática é ele o árbitro sobre o que está ou não em concordância com a regra.

> Não é possível um único homem ter seguido uma regra uma única vez. Não é possível uma única comunicação ter sido feita, uma única ordem ter sido dada ou entendida uma única vez etc. – Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são *hábitos* (usos, instituições).
> Compreender uma frase significa compreender uma língua. Compreender uma língua significa dominar uma técnica.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 199)

> Por isso, "seguir a regra" é uma prática. E *acreditar* seguir a regra não é: seguir a regra. E por isso não se pode seguir a regra "*privatim*", porque, do contrário, acreditar seguir a regra seria o mesmo que seguir a regra.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 202)

> Seguir uma regra é análogo a cumprir uma ordem. Treina-se para isto e reage-se à ordem de uma maneira determinada.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 206)

Esses princípios darão o tom maior ou menor para a revelação dos aspectos do objeto, porque o sujeito em Wittgenstein não se isenta da necessidade da vivência para se tornar um jogador. E é neste momento que terá de se defrontar com os aspectos do objeto (com suas características sensíveis ao fisiológico e ao intelecto) para que com seu jeito de vivenciar a experiência possa estabelecer compreensão ao visto.

O aspecto de um objeto pode ser compreendido por aquele, que participe do jogo, na medida em que este objeto tenha suas características sensíveis associadas a este mesmo jogo. Do contrário, a pessoa não terá condições de perceber estas características, ou seja, o objeto não está na sua contingência de vida. Fique claro que de acordo com o contexto em que tanto a pessoa quanto o objeto estiver inserido as perspectivas mudam, pois muda o contexto muda o sentido[2]. Por exemplo, quando olho para uma obra abstracionista posso ver apenas vários rabiscados coloridos de tinta (um sem sentido para mim), mas para um crítico de arte aquela mesma obra é prima, é genial e rica em significados. Quando o indivíduo não consegue atentar aos aspectos do objeto isto implica em uma "cegueira para a revelação dos aspectos do objeto" que, por vez, também, ocasionará uma "cegueira de significados". Como exemplo, há a figura abaixo:

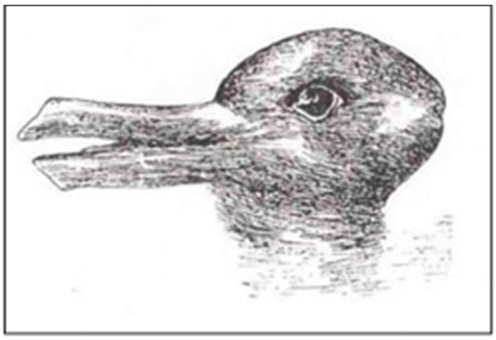


Figura 01- Pato - Lebre

Aquele que observa a imagem pode de acordo com sua percepção ver coisas diferentes, uma hora uma lebre, outra um pato, em outros casos nada verá, ou mesmo, ver o pato e a lebre simultaneamente. O que me interessa são os casos que envolvem a variação sobre estes modos de ver e aqueles em que há "cegueira para os aspectos do objeto".

Um exemplo que trago é o caso do ouvinte comum que ao escutar as melodiosas cordas de um violão tocar, de sua música preferida, não consegue identificar que este mesmo violão está desafinado (porque não possui o ouvido musical). Mas, um ouvinte músico que tenha o ouvido musical (na sua vivência tem a técnica musical, portanto ele participa do jogo, logo conhece as regras em que se devem vibrar as cordas) identificará que o violão não está afinado, aprendeu isto treinando.

Segundo Hebeche (2002), a cegueira para o aspecto assemelha-se à ausência de ouvido musical. A surdez para certos ritmos ou tonalidades é uma carência de domínio dessas técnicas. O cego para o aspecto não possui ainda a capacidade de distinguir o modo sutil entre o "ver" e o "ver como", pois ainda não

[2] Segundo Wittgenstein quando há mudança de contexto há também uma mudança de sentido.

está treinado com determinada habilidade, e assim, portanto, não detêm a técnica necessária para realização das distinções necessárias. O cego não é aquele que nada vê, mas aquele que deixa escapar o modo "imponderável" de certos âmbitos, isto é, deixa passar em branco aquilo que parece escapar às regras.

> Interpretar é pensar (refletir), agir; ver é um estado.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 276 – parte II)

> O conceito de aspecto é parente do conceito de representação. Ou: o conceito 'vejo agora como...' é parente de 'represento-me agora *isto*'.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 277 – parte II)

O treino para Wittgenstein é uma instância relevante para a compreensão (logo, para a certeza) sobre os jogos que são executados pela pessoa nos variados contextos. A natureza desse treino em Wittgenstein é o uso ou a prática vivenciada, dessa forma, este treinar é uma parcela da forma de vida (do domínio da técnica, do significado). O físico Werner Heisenberg, num texto a que se convencionou chamar de Manuscritos de 1942, pondo-se a investigar sobre a aprendizagem da linguagem, nos fornece um bom exemplo sobre o treino e sua adequação aos contextos. Uma criança que aprende a falar a palavra "bola", mas ainda não apreendeu o significado na sua vivência, nem as sutilezas do som para as acepções práticas da palavra, tende a chamar todos os objetos pelos quais se interessa de "bola". Com o tempo e com a vida, o uso da palavra vai se tornando mais e mais adequado aos diferentes usos correntes que a comunidade linguística dá ao termo. É o treino que permite ao jogador jogar o jogo, pois só pratica quem compreende as regras.

> Os jogos são livres criações do espírito e da vontade, autônomos e governados por regras. Saber jogar um jogo é uma capacidade que supõe o domínio de uma técnica, consecutiva a uma aprendizagem. O fosso que separa a regra de sua aplicação é preenchido pelo treinamento ou o adestramento (Abrichtung), a familiaridade, a prática do jogo.
> (CHAUVIRÉ, 1991, p.91)

A cegueira para o aspecto não é um processo interno[3] em que se reconheceriam aspectos de um objeto, porém a ausência de habilidade de lidar com a sutileza dos aspectos do objeto. Ela é também expressa, por Wittgenstein, como

[3] Processo interno é adotado como algo que já é inato ao indivíduo. Seria, portanto uma ativação automática do pensar e/ou do agir o que, por sua vez, não demandaria do aprendizado de regras e de características do jogo para ser compreendida. Isto é, já estaria estabelecido no próprio ser.

“cegueira para a significação”, isto é, a perda da vivência da significação sobre os aspectos do objeto. O substrato dessa vivência é o domínio de uma técnica e a vivência da significação não é um processo introspectivo, mas o domínio de sutilezas sobre a revelação do aspecto.

De acordo com Hebeche (2002), o critério para oscilação de uma figura é a exteriorização, isto é, a “surpresa” não é algo que ocorre dentro da mente. Não há na visão permanente do objeto nenhuma correspondência mental, nem na revelação do aspecto um reconhecimento mental instantâneo de um objeto externo. Ao contrário a revelação do aspecto é a vivência típica da própria manifestação do aspecto. Por exemplo, quando se diz “é uma lebre” ou “agora estou vendo uma lebre!”, não está apenas descrevendo a imagem de um animal, é antes a expressão da vivência visual do aspecto; e, como tal, poderia um homem que nunca viu um pato ou uma lebre dizer que a figura pato-lebre é aquilo que pretende ser? Ou melhor, este homem reconheceria esta figura como tal e tal?

3 - Jogos de imagem: uma possibilidade para a compreensão dos modos de ver na aprendizagem de Geometria

Para Wittgenstein o jogo é a porta de entrada para compreender algo, pois é a partir da vivência do jogo que a pessoa ingressará numa nova forma de vida. Em Wittgenstein (1995) as formas de vida e o jogo de linguagem não é algo que possa ser único.

> Mas quantas espécies de frases existem? Porventura asserção, pergunta e ordem? – Há *inúmeras* de tais espécies: inúmeras espécies diferentes de emprego do que denominamos “signos”, “palavras”, “frases”. E essa variedade não é algo fixo, dado de uma vez por todas; mas, podemos dizer, novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem surgem, outros envelhecem e são esquecidos (As mutações da matemática nos podem dar uma *imagem aproximativa* disso.)
> A expressão “*jogo* de linguagem” deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 23)

Segundo Marcondes (2000) nos diversos jogos, tais quais os jogos de tabuleiros, por exemplo, o que os aproxima são suas semelhanças (que em Wittgenstein receberá o nome de “semelhanças de família”). Pressupõe, por exemplo, o entrecruzamento das várias semelhanças entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento, etc.

> Do mesmo modo formam uma família, p. ex., as espécies de números. Por que chamamos algo de "número"? Ora, talvez, porque tem um-direto-parentesco com alguma coisa que até agora se chamou de número; e pode-se dizer que através disso adquire um parentesco com uma outra coisa que também chamamos assim. E alargamos nosso conceito de número do mesmo modo que, ao tecermos um fio, traçamos fibra por fibra. E a robustez do fio não consiste em que uma fibra qualquer perpasse toda sua extensão, mas em que muitas fibras se sobreponham umas às outras.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 67)

> Observe, por exemplo, o que é conhecido por "jogos". Tem-se os jogos de tabuleiros, os jogos de cartas, o jogo de bola, os jogos de combate etc. O que é comum entre todos estes jogos? – Não diga: "Tem que haver algo que lhes seja comum, do contrário não se chamaria 'jogos'" – mas olhe se há algo que seria comum a todos. – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles. Como foi dito: não pense, olhe! – Olhe, por exemplo, os jogos de tabuleiro com seus variados parentescos. Passe agora para os jogos de cartas: aqui você encontra muitas correspondências com aquela primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem, outros se apresentam. Se passarmos agora pra os jogos de bola, veremos que certas coisas comuns são mantidas, ao passo que muitas se perdem. – Prestam-se todos eles ao "entretenimento"? Compare o xadrez com o ludo. Ou há, por toda parte, ganhar e perder, ou uma concorrência dos jogadores? Pense nas paciências. Nos jogos de bola há ganhar e perder; mas, se uma criança atira a bola contra a parede e a ganhar novamente, neste caso este traço desapareceu. Veja que papel desempenham habilidade e sorte. E quão diferente é a habilidade no jogo de xadrez e habilidade no jogo de tênis. Pense agora nas brincadeiras de roda: aqui se encontra o elemento de entretenimento, mas quantos dos outros traços característicos desapareceram! E assim podemos notar, nos muitos, muitos outros grupos de jogos, as semelhanças aparecerem e desaparecerem.
> (WIITGENSTEIN, 2012, IF § 66)

Os jogos a partir de Wittgenstein são essas execuções da vivência que permite tal qual um "passaporte", adentrar num contexto e integrá-lo. Habilitando a pessoa a se tornar um jogador, pois a técnica está dominada para aquele jogo e contexto, isto é, este jogador compreende a regra e segue "cegamente" seus passos. Porém, são estas as vias para a pessoa aprender e ao aprender significar para a sua forma de vida.

Então, a partir dessas considerações lanço mão delas para trazer luz ao que chamo "jogos de imagem". No Tractatus Logicus-Philosophicus seu autor trata da imagem como uma referência do que é real, isto é, diz existir uma forma lógica entre o mundo e sua representação que garanta a viabilidade da própria representação (com o mesmo caráter referencial da língua). De acordo com Wittgenstein (1995) a forma lógica da imagem é aquilo que uma figuração, qualquer que seja sua forma pictorial, deve ter em comum com aquilo que afigura. A figuração tem que ter, a mesma, multiplicidade lógico-matemática da situação (deve possuir tantos elementos quantos forem os objetos da situação). Isto é, todos os integrantes da imagem devem ser os integrantes explícitos e fidedignos do que representa (de uma realidade).

Um pequeno modelo, por exemplo, de acidente inclui as relações espaciais entre as miniaturas dos veículos envolvidos; porém, não inclui as relações que não desempenhem afiguração, como, por exemplo, os pesos dos veículos e as suas cores. A natureza tridimensional do modelo faz parte de sua forma pictorial; garante as relações espaciais entre as miniaturas do acidente. Isto também é possível para o Wittgenstein do Tractatus Logicus-Philophophicus quando se tratar de elementos de um desenho, porque nesta fase de seu pensamento toda figuração possui uma forma lógica.

> A imagem é um modelo da realidade.
>
> (*TRACTATUS*, 1995, §2.12)
>
> Aos objetos correspondem na imagem os elementos da imagem.
> (*TRACTATUS*, 1995, §2.13)
>
> O que constitui uma imagem, é os seus elementos relacionarem-se entre si de modo e maneira precisos.
> (*TRACTATUS*, 1995, §2.14)
>
> Que os elementos da imagem se relacionem entre si de um modo e uma maneira determinados representa que as coisas se relacionam assim entre si. Chame a essa conexão dos elementos da imagem a sua estrutura, e à sua possibilidade, a forma da sua representação pictorial.
> (TRACTATUS, 1995, §2.15)

No entanto, Wittgenstein notou que a forma lógica tinha suas limitações, bem como o ato ostensivo, isto é, as instâncias de seu pensamento não conseguiam dar conta de todas as variações linguísticas, imagéticas ou da realidade. De acordo com Hinttikka (1994) Wittgenstein tem sua desilusão com o ato de mostrar (ostensivo[4]) e a forma lógica do mundo, pois se o mundo na sua engrenagem funcionasse deste

[4] Uma definição ostensiva é a explicação do significado de uma palavra por meio de enunciados como “Isto é um elefante” ou “Esta cor é o vermelho”. Incluir tipicamente três elementos: uma expressão demonstrativa, “Isto é...”, “O nome disto é [...]; um gesto dêitico ☞ (apontar); e uma amostra, o objeto o qual se aponta”. GLOCK, 1998, p.122

jeito bastaria aprender as figurações, e assim, seria condição suficiente para ter o conhecimento de qualquer coisa do mundo. Um exemplo dado por Hinttika é sobre os gestos, o autor propõe que pensemos em uma pessoa A de um lado de uma rua dando um "até logo" com a mão espalmada para outra pessoa B do outro lado da rua. Porém, atrás dessa há uma segunda pessoa C que olha de relance para o gesto daquela que está dando o "até logo". Pode-se dizer que uma delas vá interpretar como "até logo" o ato, pois é conhecida daquela que está fazendo o gesto – ambas estão se despedindo após terem tomado café juntas. E a outra que não a conhece pode dar outro sentido ao ato como, por exemplo, entender que a pessoa não está dando "até logo", e sim esteja lhe chamando a atenção para algo. Portanto, um gesto mesmo que ostensivo pode gerar ambiguidades e mal entendido.

A forma lógica, segundo Hinttikka (1994), não guarda todas as condições dos objetos em sua dimensão total, portanto é quase impossível ter a partir dessa perspectiva a tradução do real. A teoria pictorial do primeiro Wittgenstein é abandonada dando lugar ao contexto, a forma de vida e ao jogo de linguagem. O que era um conceito absoluto passa a ser um jogo, onde o praticante, a partir de sua forma de vida, desenvolve sua habilidade treinando. Ou seja, ele domina a técnica e passa a operar pelas regras dela que permitem ao jogador competir.

> O pensar é envolto por um halo. – Sua essência, a lógica, apresenta uma ordem, ou seja, a ordem *a priori* do mundo, isto é, a ordem das possibilidades, que tem que ser comum ao mundo e ao pensar. Esta ordem, no entanto, ao que se parece, tem que ser da *máxima simplicidade*. Ela é *anterior* a toda experiência; tem que perfazer toda a insegurança empírica. – Ela tem que ser, antes de mais nada, de puro cristal. Este cristal, no entanto, não parece com a abstração; mas como algo concreto, sim, como o que há de mais concreto, por assim dizer, o que há de *mais duro*. (*Trac. Log. Philo*., nº 5.5563)
> Estamos na ilusão de que o peculiar, o profundo, o essencial de nossa investigação reside no fato de ela almejar compreender a essência incomparável da linguagem. Isto é, a ordem que existe entre os conceitos de proposições, palavra, dedução, verdade, experiência etc. Esta ordem é uma *super*ordem entre – por assim dizer – *super*conceitos. Ao passo que as palavras "linguagem", "experiência", "mundo", "lógica", caso tenham um emprego, este tem que ser tão modesto como as palavras "mesa", "lâmpada", "porta" etc.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 97)

Palavras, números, figuras geométricas, esquemas, pinturas, organogramas, fórmulas matemática etc, são símbolos na medida em que adotam uma postura comunicativa. São figurações de algo com determinados significados contextuais para uma comunidade cultural. Os gregos antigos tinham o costume, como sinal de afeição e reconhecimento, dar a metade de um objeto (de uma moeda, por exemplo) a quem lhes era importante. De um amigo para outro amigo, ou de um pai para seu filho quando tinham de se separar por longo tempo. Desta forma ao se reencontrar teriam condições de sinalizar um símbolo de união ou de laço.

De acordo com Abbagnano (2007) tais meios, que serviam de sinais, davam os gregos o nome genérico de symbolon e esta palavra vem de symbolê (syn equivale a com, e bolê, a roda, círculo). Todo sinal convencionado tomava o nome genérico de símbolo. Segundo Glock (1998) o símbolo pode ser entendido a partir do Wittgenstein, das Investigações Filosóficas, como uma tomada de decisão, isto é, pressupõe um processo inventivo e convencionado aplicado a um reconhecimento, que segue regras.

Por exemplo, no caso da Matemática por ter um caráter pretensamente de universalidade e atemporalidade os seus símbolos ou os que são emprestados de outros sistemas ganham uma natureza muito peculiar. Ou seja, na figuração do objeto como símbolo pressupõe-se que seja o próprio objeto seu símbolo; pois se funde aí o objeto e sua reprodução. Por exemplo, quando escrevo 0, 1, 2, 3, ..., estou usando um símbolo que deve figurar o número um, o dois, o três, e assim por diante. A pergunta é: qual a diferença entre os símbolos 0, 1, 2 e 3 para o objeto? Há uma natureza estranha entre o produto (objeto) e seu subproduto (símbolo)? Estas indagações ficam como indicativos para reflexão sobre as implicações comunicativas que daí pode derivar. O mesmo princípio vale para a Geometria, já que o desenho geométrico (adotado aqui como símbolo imagético, por sua natureza unificadora) pretende ser o reflexo das premissas matemáticas do seu objeto; isto é, o reflexo exato das regras de composição, das relações de dimensões, de suas semelhanças, das disposições das retas, dos ângulos que devem estar na figura para ser o que são.

O quadrado, o triângulo, o cubo ou mesmo a pirâmide possuem em seu caráter imagético a pretensão de tomar em todas as dimensões os objetos aos quais simbolizam. No entanto, mesmo com essa “vontade” de ser uma imagem exatamente refletida do objeto no espelho; ela é enantiomorfa, onde o esquerdo de um lado do espelho não é exatamente o esquerdo do outro lado do espelho. Isto pode levar a dúbias interpretações a quem sobre ela se debruçar.

Conjecturarei que uma pessoa ao ver a figura de um cubo tenha a convicção de que é um cubo. Mas, quando indagado sobre os aspectos matemáticos inerentes aquela figura a mesma pessoa já não sabe mais que é um cubo. Por quê? O que aconteceu? Já que a figura do cubo tem a pretensão de ser o exato reflexo do que ele é matematicamente.

A resposta a isto pode ser pelo fato de existir jogos de imagem[5], isto é, assim como a linguagem possui sua gramática a imagem tem a “gramática do ver”. Como esta pessoa não é uma jogadora nesse contexto, logo não domina a técnica para ver estes matizes. Quando ela acreditou que estava vendo um cubo, estava cega; já que para Wittgenstein acreditar seguir uma regra não é seguir a regra, do contrário a crença se transformaria no próprio seguir regras.

A imagem pode ser compreendida como gênero e a figura como espécie. Quando, por exemplo, uma pessoa olha para os polígonos e abstraí do conceito as regularidades gerais, muito provavelmente ao olhar para um quadrado ou retângulo terá nesta espécie de polígono a possibilidade de transpassar seu olhar para o *ver como*.

Além do mais, a imagem por sua trivialidade não deixa evidente seus traços de formação, ou seja, um cubo não é ostensivo ao ver (principalmente como figura). A demanda para seu reconhecimento está além do simples ver, do ver ordinário, ou como prefere Glock (1998) ao comentar sobre o que diz Wittgenstein, da visão sinóptica (“visão geral”, “visão comum”). O seu reconhecimento está no “*ver como*”, um modo de ver especializado que atende as necessidades das regras de composição explícitas e implícitas da figura.

É o “*ver como*” que possibilita ao jogador dos jogos de imagem perceber a “revelação para os aspectos do objeto”. Do contrário o que resta é a “cegueira para a revelação dos aspectos do objeto”, por conseguinte, a “cegueira de significado”.

> Os aspectos das coisas que consideramos ser os mais importantes estão ocultos por sua simplicidade e trivialidade. (Não se é capaz de notar isto, - porque temos sempre diante dos olhos). Os fundamentos reais de sua investigação não chamam a atenção do homem. A não ser que isto lhe tenha chamado a atenção alguma vez. – E isto que dizer: aquilo que, uma vez visto, se constitui em o mais surpreendente e o mais forte, não nos chama a atenção.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 129)

> [...] A imagem do cubo *insinuou*, todavia, um certo emprego, mas eu podia também empregá-la de outro modo.

[5] Não há neste trabalho a pretensão de conceituar, definir e, por isso, delimitar o certame do que é um jogo de imagem. Como é um princípio gerado da caracterização de jogo de linguagem de Wittgenstein que também não conceitua este termo. Da mesma forma apenas caracterizarei os jogos de imagem.

(WITTGENSTEIN, 2012, IF § 139)

> [...] Entre imagem e emprego, pode haver colisão? Bem, elas podem entrar em conflito desde que a imagem nos faça esperar por um outro emprego. É que os homens, em geral, fazem *este* emprego *desta* imagem.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 142)

> Vejo uma imagem: ela representa um velho homem subindo um íngreme caminho apoiado num bastão. – E como é isto? Não podia também ter o mesmo aspecto, se ele deslizasse estrada abaixo nesta posição? Um habitante de marte talvez descreveria a imagem desta mesma maneira. Não preciso explicar por que *nós* não a descrevemos assim.
> (WITTGENSTEIN, IF § 139 (b))

Como exemplo ao que estou dizendo parto da seguinte situação: estão pesquisadores desenvolvendo uma atividade de pesquisa relacionada à capacidade de reconhecer em algumas imagens (mostradas aos pesquisados) os seus significados. A saber: é mostrada uma imagem de um carro então se pergunta: o que significa isto a você? E, provavelmente, o pesquisado dirá significa um carro. Mas, se forem mostradas estas imagens abaixo.

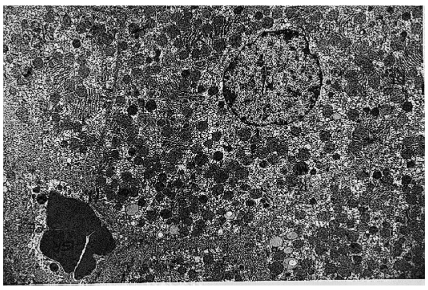


Figura 02

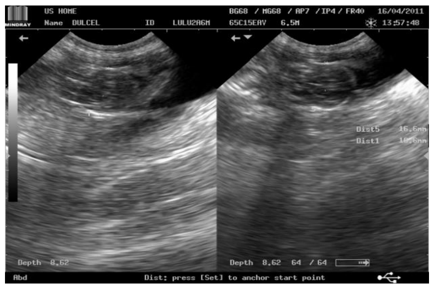


Figura 03

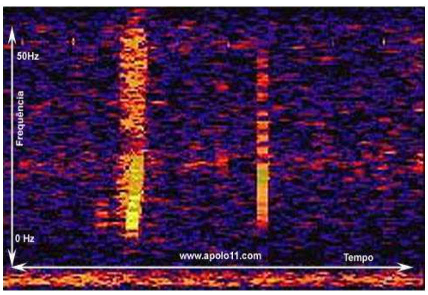


Figura 04

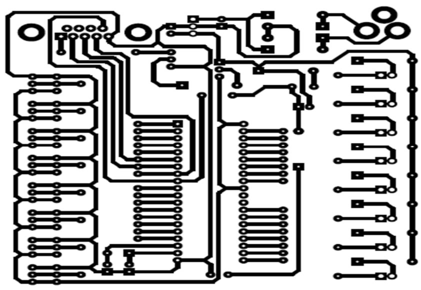


Figura 05

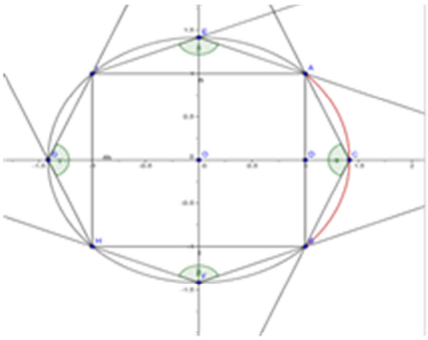


Figura 06

```
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.0 Transitional//EN"
<html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml" dir="ltr" lang="pt-

<head profile="http://gmpg.org/xfn/11">
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=UT

<title>Blog Tecmedia</title>

<link rel="stylesheet" href="http://www.tecmedia.com.br/blog/w
<link rel="stylesheet" href="http://www.tecmedia.com.br/blog/w
<script type="text/javascript" src="http://www.tecmedia.com.br
<link rel="alternate" type="application/rss+xml" title="RSS Fe
<link rel="pingback" href="http://www.tecmedia.com.br/blog/xml

<link rel="EditURI" type="application/rsd+xml" title="RSD" hre
<link rel="wlwmanifest" type="application/wlwmanifest+xml" hre
<meta name="generator" content="WordPress 2.6.2" />
```

Figura 07

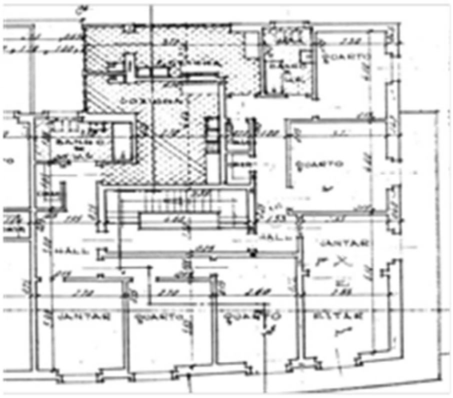


Figura 08

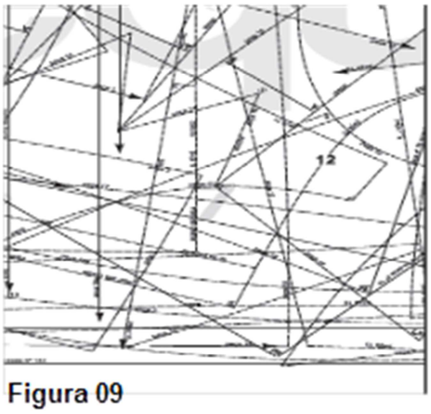
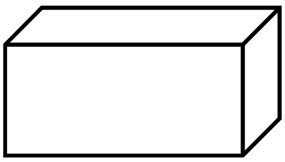


Figura 09

Para a extrema maioria dos pesquisados, provavelmente, as oito imagens não terão seus significados evidenciados como de fato são empregados nas relações sociais. Isto é, elas estão fora dos jogos de imagem dos observadores (não fazem parte de sua vivência, serão elas "cegas aos seus aspectos", estão as imagens fora de seu uso, enfim, não "veem como"; apenas, possuem delas uma visão ordinária e de semelhanças com outros jogos de imagem. Daí porque tentarão encontrar semelhanças de família entre elas e outras imagens).

> Poder-se-ia imaginar que a ilustração
>
> 
>
> Aparece em várias partes de um livro, por exemplo, de um livro escolar. No texto adjunto, fala-se que se trata cada vez de algo diferente: Uma vez de um cubo de vidro, outra vez de uma caixa aberta virada, de uma armação de arame que possui essa forma, de três tábuas que formam um ângulo. A cada vez o texto interpreta a ilustração.

> Mas nós podemos também *ver* a ilustração uma vez como uma coisa, outra vez como outra coisa. Portanto, nós a interpretamos, e a *vemos* como a *interpretamos*.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 254 – parte II, seção XI)

Todavia, quando mostrada as imagens a um biólogo, um médico, um astrônomo, um engenheiro da computação, um matemático, um programador de software, um engenheiro civil e uma costureira. Então, estas imagens (cada uma em seu lugar) terão significados específicos, isto é, a figura 02 para o biólogo será um tecido celular humano visto de um microscópico; a figura 03, para o médico será uma ultrassonografia de uma parte mole humana; a figura 04, para o astrônomo um espectrograma das radiações luminosas de uma estrela; a figura 05, para o engenheiro da computação será a arquitetura de uma placa eletrônica de computador; a figura 06, para o matemático será um polígono regular inscrito em uma circunferência; figura 07, para o programador de software será a linguagem em HTML para produção de websites; a figura 08, para o engenheiro civil será uma planta baixa de uma edificação; a figura 09, para a costureira será um molde esquemático de uma peça de roupa.

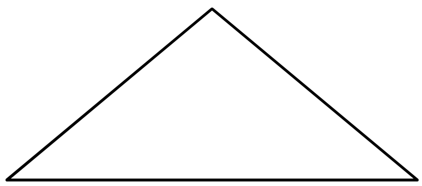
Como já fora dito jogar um jogo requer participar dele a partir do treino com observância as regras desse jogo (inscrito num dado contexto, para uma dada vivência). Logo, o aprendiz aprenderá quando o jogo que estiver participando lhe tiver significado. Para Glock (1998) significar quer dizer ter domínio do uso pelo treino, mas não confunda aqui treino com exercício e adestramento, apenas; já que afirma que os educadores deveriam ter em mente que o treinamento fornece o fundamento para a explicação, bem como a sua observância as regras ou para o procedimento ou para o cálculo. No uso como significado está à explicação daquilo que é explicado, isto é, a explicação da explicação (sem com isto ir ao *ad infinitum*).

É o “*ver como*” na forma de ver especializada que possibilita ao aprendiz identificar os elementos notáveis e ocultos da imagem, além disso, esta forma de ver ocasionará a compreensão ao aprendiz quando este viver a imagem. E vive-se uma imagem quando se está imerso no seu jogo de imagem (na sua forma de vida, na observância de suas regras, no seu contexto de uso).

> “Observar” não gera a coisa observada. (Esta é uma constatação conceitual.)
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 247 – parte II, seção IX)

> Na mudança do aspecto, porém, a coisa se desloca. Isto torna-se a única expressão possível da vivência, o que antes talvez parecia, ou mesmo era, segundo a cópia, uma determinação inútil.
> Olho para um animal; alguém me pergunta: “O que você está vendo?” Respondo: “Um coelho”. – Eu vejo uma paisagem; de repente passa um coelho correndo. Eu exclamo “Um coelho!”
> Ambos, a notificação e a exclamação, são a expressão de uma percepção e de uma vivência visual.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 258 - 259 – parte II, seção XI)

Para Wittgenstein o “ver ordinário” dá lugar ao “ver como” quando os critérios do próprio contexto em que se está vendo, os critérios da própria imagem e os critérios de quem a observa se harmonizam num só. Naquele ao qual pertence o jogo de imagem em questão, é uma inserção numa vivência visual. Para ter uma afinação entre estas partes cabe ao professor indicar, mostrar e treinar o aluno para aquele jogo de imagem. Isto é, mostrar quantas for possível suas variações, as suas regras, caracterizar seu contexto, mostrar a técnica, o significado. De outro modo, o aprendiz não jogará o jogo de imagem ao qual pretende ser inserido (não terá o ouvido musical).

> A título de exemplo, olhe com atenção os aspectos do triângulo. O triângulo
>
> 
>
> pode ser visto: como buraco triangular, como corpo, como desenho geométrico; estando sobre sua linha fundamental, pendurado em sua ponta; como montanha, como cunha, como seta ou mostrador; como um corpo tombado que (p.ex.) deveria estar sobre o cateto mais curto, como um paralelogramo pela metade, e diversas coisas mais.
> [...] Um triângulo pode realmente *estar em pé* numa pintura, estar dependurado numa outra e, numa terceira pintura, representar objeto tombado. – De tal sorte que eu, o observador, não diga “Isto pode representar também um objeto tombado”, mas sim “o copo tombou e está em cacos”. É assim que reagimos a imagem.
> Poderia eu dizer como tem que ser as condições para que uma imagem produza isto? Há, por exemplo, maneiras de pintar que nada me comunicam de um modo imediato, mas comunicam a outras pessoas. Eu creio que hábito e educação tem aqui um papel a desempenhar.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 262 – 263. – parte II, seção XI)

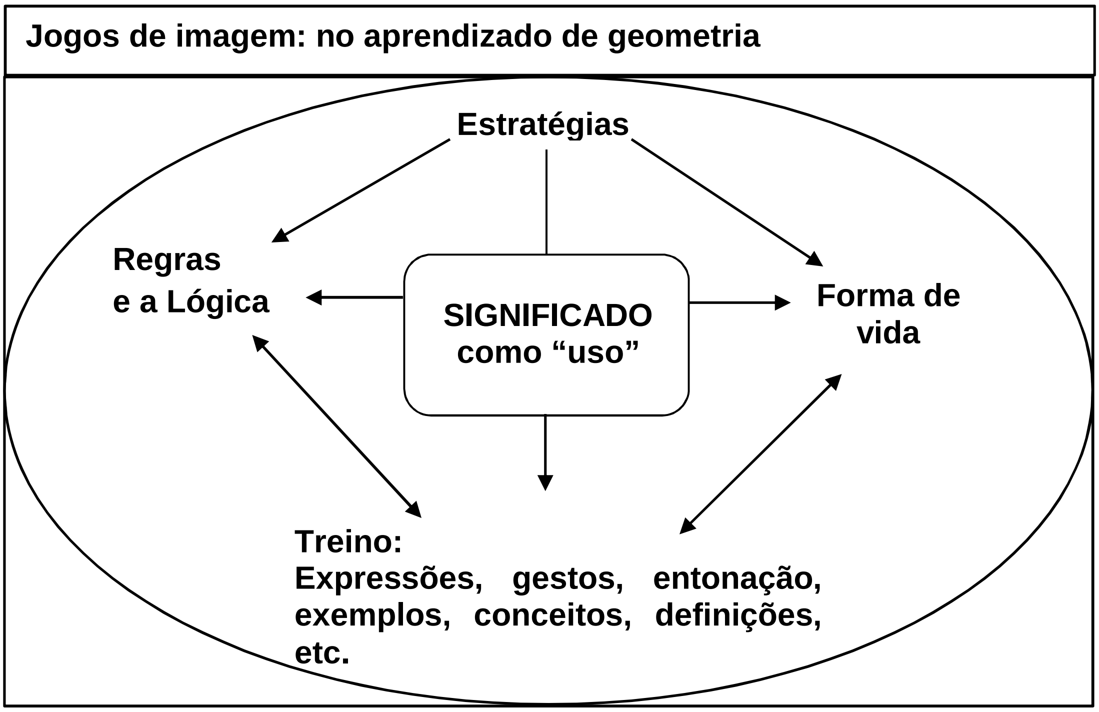


Figura 10 - Esquema sobre fatores que estão nos jogos de imagem

A estratégia é a atividade resolutiva que o aluno busca estabelecer para resolver problemas colocados ou mesmo como uma via de interpretação das imagens, gestos, entonações, conceitos, definições e outros. Contudo, a estratégia para ser efetivamente estruturada possui elementos constitutivos como as regras, a lógica, a forma de vida e o treino das diversas situações. Isto permite ao observador produzir o significado e, portanto, interpretar a situação de acordo com o contexto. Não há uma linha hierárquica entre os elementos que compõe a relação para o estabelecimento de uma estratégia definida.

O olhar estratégico que pode levar ao *ver como* pode ser encontrado nas mais diversas áreas do conhecimento, por exemplo, há vários trabalhos dentro do campo da Matemática e da Educação Matemática que relacionam a Matemática e a Arte, a Matemática e a Natureza como um caminho a se discutir e ensinar os conhecimentos matemáticos (simetria, proporcionalidade, beleza, dinamismo, criatividade etc). A saber um exemplo:

Figura 11 – Retângulo de Ouro

$$\frac{AB}{AC} = \mathbf{1{,}618}$$

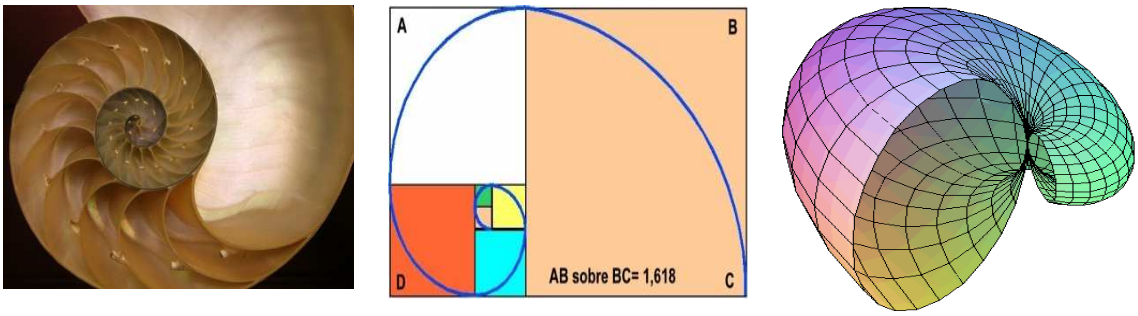


Figura 12 – Forma em espiral na natureza, na matemática e na arte

Figura 13 – Polígonos na natureza e na matemática

Se tiver um retângulo cuja razão do lado maior com o lado menor for igual a 1,618 aproximadamente este é um retângulo de ouro. Dentro desse contexto de harmonia, ordem e beleza há a razão áurea como a razão de ouro que equilibra o olhar e harmoniza-se através do belo. As obras de arte e a arquitetura grega foram fortemente influenciadas pela busca dos segmentos de retas perfeitos, ou seja, áureos em suas combinações. Por exemplo, se dividir o retângulo de ouro num quadrado, depois num retângulo, então, o novo retângulo também é de ouro; e, feito isso continuamente resultará em retângulos áureos ad infinitum, de onde formará o espiral de ouro.

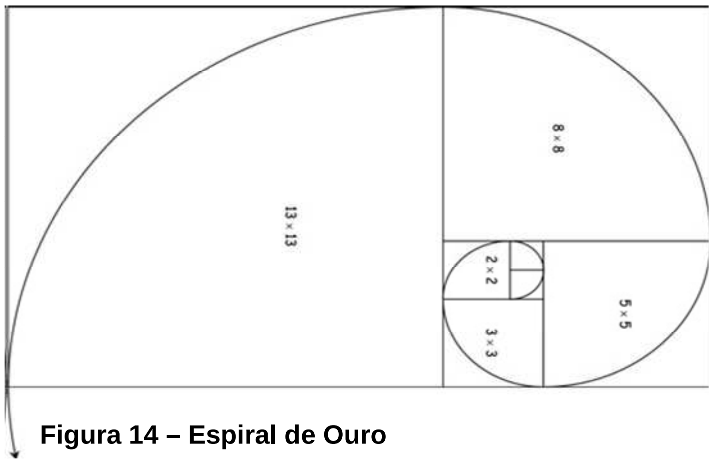
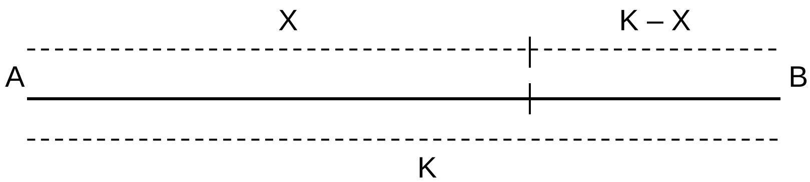


Figura 14 – Espiral de Ouro

Foi primeiramente definida por Euclides (325 – 265 a.C), inclusive na atualidade possui a Geometria do Phi (Φ - nome dado ao valor áureo), nomeado como secção de ouro. Onde mostra a seguinte relação:



$$\frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte menor}}$$

Se X representa o comprimento da parte maior; modele uma razão para X? Para essa resposta faremos as seguintes relações:

$\frac{K}{X} = \frac{X}{K-X}$, portanto, X é uma equação do 2º grau do tipo $X^2 = K^2 - K.X$.

$$x = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4.1.(-K^2)}}{2.1} \longrightarrow x = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 + 4.K^2}}{2} \longrightarrow x = \frac{-K \pm \sqrt{5.K^2}}{2} \longrightarrow$$

$$x = K.\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

Se Φ representa o valor comum das duas frações que nascem com a proporção áurea, qual o valor de Φ ?

$$\Phi = \frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte menor}} = \frac{K}{X}$$, X é igual a Φ.

Portanto, pelo visto anteriormente dizemos: $\Phi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339...$

As relações vistas e estabelecidas, por matemáticos, nestes exemplos mostram um ver especializado (*ver como*) que busca na sua percepção as categorias conhecidas, e, portanto, familiar a seu ver. Isto é, este jogador dentro de seu jogo de imagem vai seguir a "gramática" estabelecida a seu modo de ver.

Se estes mesmos exemplos fossem colocados a um químico ou biólogo, muito provavelmente, suas leituras visuais teriam outra conotação. Estes não veriam ou pouco veria quanto à forma, harmonia, simetria ou proporcionalidade nas imagens. Cada um a partir de sua vivência notaria as categorias que lhes é familiar, ou seja, o químico iria "ver como" se dão as composições substanciais da matéria e o biólogo a anatomia, bioquímica e fisiologia da estrela do mar, por exemplo.

> Se Deus tivesse olhado dentro de nossa alma, não teria podido ver ali de quem falávamos.
> Você vê de modo errado.
> (Para que serve o sinal?)
> (WITTGESNTEIN, 2012, IF p. 282 – 283 – parte II seção XI)

> Qual é o seu objetivo na filosofia? – Mostrar à mosca a saída do apanha – moscas.
> (WITTIGENSTEIN, 2012, IF § 309)

4 - Metodologia da Pesquisa

Em termos metodológicos, o estudo foi desenvolvido de acordo com a abordagem interpretativa de pesquisa qualitativa. Uma vez que se pretende compreender particularidades de uma situação relacionada com a aprendizagem de alunos do ensino médio quanto a seu modo de ver em geometria. Segundo Bogdan & Biklen (1994) na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Por isso, a pesquisa qualitativa é de caráter mais descritivo.

Não interessava, fundamentalmente, saber apenas as alterações que podiam ter ocorrido historicamente sobre a aprendizagem em geometria. Para isto bastaria ter categorias prévias e testá-las num molde de antes e depois delas. O que interessa nesta pesquisa compreender numa análise qualitativa são os possíveis modos de ver nos alunos, pela objetivação (registro escrito) e o oral (entrevista).

De acordo com Bogdan & Biklen (1994) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Nesta pesquisa está o significado associado ao princípio do ver, isto é, quais atribuições que os alunos dão a sua percepção visual sobre as questões de geometria propostas.

> Aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem.
>
> (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.51)

> [a] abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo.
>
> (BOGDAN, BAKLEN,1994, p.49)

Por conseguinte, busca-se interpretar as informações presentes na produção dos alunos, procurando assim, compreender da melhor maneira possível os seus registros e, com isso tem-se a implicação do pesquisador sobre o objeto a ser investigado, ficando por conta disso, contaminado por sua objetividade.

A realização deste trabalho implica em observação, interpretação, inferência, e principalmente, muitas idas e vindas aos registros escritos dos alunos e à fundamentação teórica. Esta é outra característica que justifica a escolha da metodologia qualitativa, pois como diz Godoy,

> [...] considerando que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques.
> (1995, p.58)

Os procedimentos metodológicos envolveram questionários e entrevistas. Logo, esta pesquisa foi efetivada em duas frentes, a primeira, a aplicação dos questionários e a segunda das entrevistas, tudo acompanhado simultaneamente com a observação do pesquisador.

4.1 - Os questionários

O questionário é o instrumento que possibilita a busca centrada no problema de pesquisa. É o questionário que viabiliza o enredamento e o norte reflexivo para análise do problema. Isto é, é como o farol e seu faroleiro apontando para a inteligência do pesquisador qual rota a ser seguida.

Foram elaborados cinco tipos de questionários contendo cada um em média três questões relacionadas a problemas de geometria euclidiana plana e/ou espacial. Todavia, dado o volume de respostas dos questionários que ainda mais associadas às entrevistas tornariam este trabalho demasiadamente extenso, traria uma demanda investigativa que estaria além dos limites estéticos desta dissertação. Contudo, selecionarei não na ordem tanto dos questionários como das entrevistas as respostas para análise.

A metodologia de análise será "avulsa", disjunta ou "solta" quanto à apresentação das questões, isto é, serão pinçadas aquelas que melhor expressarem ao objeto da pesquisa. Da mesma forma apenas as questões e respostas que interessarem para análise que terão seus objetivos descritos.

4.2 - Os alunos e as Escolas

A fim de ilustrar o que se almeja alcançar com ensino de Geometria e aquilo que se espera que o aluno adquira como habilidade é que referendo os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) de 1997, indicativo à matemática. Seus pressupostos partem de dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

Além disso, os PCN's destacam que a matemática deve ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. Onde aparecem os conteúdos matemáticos organizados em blocos, a saber:

- Números e operações (aritmética e álgebra)
- Espaço e formas (geometria);

- Grandezas e medidas (aritmética, álgebra e geometria);
- Tratamento de informações (estatística, combinatória e probabilidade).

Na contra proposta dos PCN’s e para testificar problemas correntes sobre a mitigação nos currículos escolares da Geometria e também como os alunos apresentam determinadas dificuldades em aprender Geometria. Seja por conta desses problemas evidenciados nestas pesquisas, seja por questões contextuais de interpretação que passa pelo *ver como* é que destacarei a pesquisa realizada por Leoni Malinoski Fillos da Universidade Federal do Paraná, cujo título de seu trabalho fora **O ensino de geometria: depoimentos de professores que fizeram História**. Teve como questão norteadora: *Como se caracterizou o ensino da Geometria, nas aulas de Matemática das últimas décadas, no relato dos professores?* E a outra pesquisa é da Prfª. Drª Acylena Coelho Costa da Universidade Estadual do Pará de título **Análise do Ensino de Geometria Espacial**. A pergunta que norteou sua pesquisa fora: *Como se está dando o ensino e a aprendizagem de geometria espacial na rede pública e privada em Belém?*

Na pesquisa de Leoni Malinoski Fillos se constatou que os professores que atuaram a partir da década de 1960, mesmo com as mudanças curriculares, possuem uma prática de ensino que pouco variou com o tempo e com as novas teorias metodológicas de ensino. Além de a geometria ser pouco estudada nas escolas como atesta as pesquisas de Pavanello (1989), Lorenzato (1995), Pirola (2000), Passos (2000) e Pereira (2001).

Pirola (2000) ressalta que os alunos têm acentuadas dificuldades em resolver problemas envolvendo conceitos geométricos. Aponta que há uma forte resistência no ensino da Geometria, inclusive no Ensino Superior. Onde é também pouco abordada e que a dificuldade dos professores no seu ensino deve-se, em grande parte, ao pouco acesso ao estudo de tais conceitos na sua formação ou pelo fato de não gostarem de Geometria. A pesquisa de Leoni Malinoski Fillos traz como conclusão (através dos relatos dos docentes que viveram suas práticas nas décadas de 60, 70, 80 e 90) que a geometria fora ensinada da mesma forma e sob as mesmas condições. Isto é, mesmo com movimentos como o da matemática moderna, do sócio – construtivismo da Psicogênese de Piaget, o movimento da escola nova de John Dewey e o sócio interacionismo de Vygotsky a geometria continuava sendo colocada em um plano abaixo do da álgebra e da aritmética, por exemplo.

Um professor, com 25 anos de atuação, da pesquisa de Leoni Malinoski Fillos relatou que sua aula acerca de geometria em quase nada se alterava com o passar dos anos, tanto que ele diz "..., às vezes, me sinto como um ator. Porque, quando entro para ministrar minha aula em particular à de geometria sigo apenas o roteiro com os conceitos, definições, exemplos e até exercícios já traçados por minha *experiência de sala de aula*". Segundo Pavanello (1989) a geometria na História de seu ensino foi desenvolvida de forma mais do senso comum (com apresentação das formas geométricas e suas conceituações, com cálculos e relações simplistas), sem qualquer preocupação com as construções geométricas e uma sistematização conceitual e prática.

A pesquisa da Prfª. Drª. Acylena Coelho Costa tem como foco a questão da aprendizagem da geometria espacial com pano de fundo o ensino desse mesmo conteúdo, esta pesquisa foi realizada em duas escolas – uma particular e outra pública - da cidade de Belém. O motivo da escolha das duas escolas de redes diferentes foi traçar um comparativo sobre em que aspectos este conteúdo comum as duas estava sendo traçado. O público alvo da pesquisa foram alunos e professores das escolas pública e privada, com o objetivo de analisar as concepções que os professores têm sobre o ensino de geometria espacial e a forma como os alunos tem compreendido o assunto. A efetivação da pesquisa ocorrera com aplicação de questões semi-abertas, totalizando 8 questões que foram feitas a 35 alunos e 2 professores (contendo questões específicas para ambos).

Os resultados obtidos indicam que as dificuldades encontradas, nas duas escolas investigadas, tanto na federal quanto na particular, referem-se a obstáculos na representação geométrica, quanto à manipulação da relação de Euler e na identificação de elementos das figuras espaciais dentre outros. É válido ainda ressaltar as dificuldades conceituais que foram observadas ao longo da resolução do questionário.

Sobre os resultados apresentados acerca das 8 questões da pesquisa supracitada cito alguns exemplos quantificados em percentuais de acertos e erros na forma de gráfico. Os gráficos abaixo são os resultados da primeira questão do questionário.

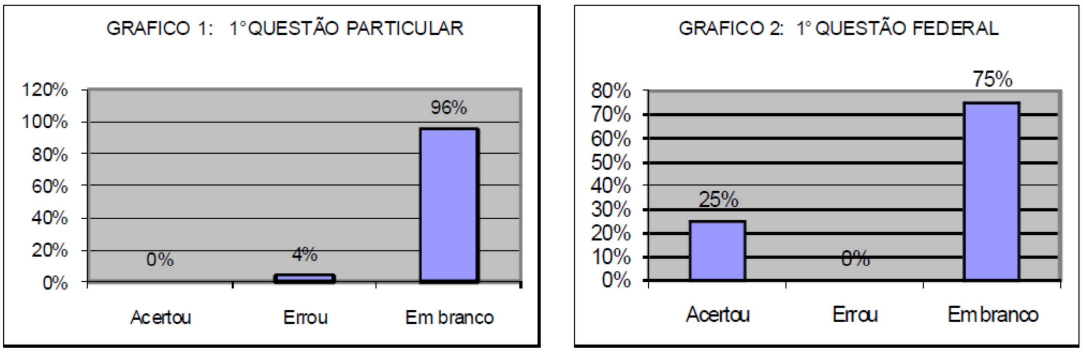


Gráfico 01 - Fonte: Pesquisa da Profª Drª Acylena

> No entanto, ao observamos os gráficos da 1ª Questão, percebemos um baixo desempenho, pois no Gráfico 1 houve uma frustrante tentativa de resolução correspondente a 4%, e no segundo gráfico apenas 25% alunos acertaram a questão, sendo estes da escola pública.
>
> (COSTA, 2009, p.04)

A pesquisa a que me direciono tentará dar um enfoque mais wittgensteiniano sobre as formas do ver. Isto é, o que justifica a pesquisa é a possibilidade de haver um ver que emoldure o ver dos alunos. O que abre precedente dentro do panorama das próprias pesquisas sobre geometria para um modo, no mínimo, diferente de interpretação sobre alguns problemas referentes à aprendizagem de geometria (especificamente no ensino médio). Logo, como as pesquisas que tive a chance de examinar (constatado no estado da arte) seguiam, mais ou menos, o mesmo circuito de discussões acerca do ensino e da aprendizagem de geometria; então, isto foi uma válvula motivadora para que eu escolhesse o tema geometria tentando a partir daí atribuir-lhe reflexões diferenciadas com as lentes do filósofo Wittgenstein.

A escolha das duas escolas de redes de ensino diferentes no caso uma da rede particular, outra da rede pública técnica federal não foi sem intenção. E a preferência por alunos dessas escolas do ensino médio - último ano do ensino médio – partiu da própria natureza de cada uma dessas escolas quanto ao seu projeto de ensino. Como pesquisador, parti de uma hipótese para minha pesquisa que é: os alunos da rede particular de ensino (de um curso “normal” do ensino médio) veem os elementos geométricos diferentemente daqueles de um curso técnico (que tenha a Geometria numa ordem específica para seu aprendizado).

Como algumas das discussões dentro das ideias wittgensteinianas giram em torno dos jogos de linguagem, forma de vida, cegueira para a revelação dos aspectos do objeto e a cegueira de significações, então a partir de dois grupos de alunos que vivem e compartilham ambientes de ensino diferentes. Tanto na política pedagógica como no objetivo a ser alcançado por seus esforços na vida escolar é que optei em seguir minha pesquisa com estes dois grupos distintos.

A escolha por alunos do terceiro ano do ensino médio se justifica por estes alunos nesse estágio de sua vida escolar já – supostamente – terem tido contato com a geometria em séries anteriores o que lhes deveria conferir certa experiência e conhecimento no trato com este tema. E como fora dito de instituições diferentes porque a escola técnica federal no curso de edificações e estradas visa à formação de técnicos que veem na geometria um instrumento de trabalho, por isso, possivelmente, a Geometria vista por estes alunos tem uma determinada perspectiva peculiar.

Os alunos da escola particular não têm na geometria um instrumento ou ferramenta para uso profissional, pelo menos a princípio, pois a proposta da escola é apenas ensinar a geometria como mais um componente curricular que é necessário ao vestibular (como poderá se constatar em relato de aluno na entrevista). Mas, os alunos da escola técnica sim veem na Geometria uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento de suas atividades profissionais futuras.

Não há ainda neste momento a intenção de iniciar a discussão teórica e nem a análise das respostas, porém de antemão pode ser pensado que existe a chance de se ter modos de ver, no caso, “visão sinóptica” ou mesmo de “ver como” as representações dos objetos geométricos. Isto porque cada modo de vida tem a possibilidade de educar o seu olhar.

> Quando pensamos em trabalhar a “educação do olhar”, não podemos deixar de lado o fato de que o olhar é cultural. Logo, quando pensamos que o aluno precisa ver os objetos matemáticos de outra maneira estamos pensando que ele deve ser retirado de uma cultura que lhe ensinou um modo de olhar.
>
> (MENEGUZZI, 2009, p. 21)

> As conexões do conceito com outros conceitos que dependem de esquemas operatórios, os significantes que representam o conceito (como os símbolos matemáticos, por exemplo) e o contexto no qual se encontra o conceito determinam os seus sentidos projetados.
> Existe no contexto da sala de aula uma circularidade de sentidos produzida pelo jogo de linguagem no qual participam a matemática, o professor de matemática e o aluno. O professor tem que conduzir o aluno na construção possível de uma outra linguagem a partir da linguagem da matemática, porém esta construção muitas vezes é insuficiente para que o

> aluno compreenda, assim ele recorre ao colega que traduz a linguagem do professor.
> Na prática de sala de aula, percebe-se que a mudança de enunciado matemático gera ansiedade ao aluno, o que denota um problema com a interpretação da linguagem matemática.
> (SILVEIRA, 2008, p. 09)

4.3 - Pergunta de pesquisa

Existem modos de ver, na perspectiva dos alunos, que possa influenciar em seu aprendizado sobre Geometria?

4.4 - Objetivo Geral da Pesquisa

Esta pesquisa visa compreender se existem modos de ver diferenciados nos alunos a partir de sua vivência num dado contexto, o que só será passível de análise graças as suas objetivações escritas (questionários), orais (entrevista) e a observação de campo do pesquisador. Contudo, sem deixar a perspectiva de que estes alunos também podem não ver. Este ver está aqui relacionado com sua aprendizagem sobre a geometria euclidiana.

4. 5 - Objetivos Específicos

- Compreender a relação do ver – a partir dos alunos - como possível estratégia para a resolução dos problemas, ou sua ausência;
- Interpretar, a partir das concepções wittgensteinianas, como se emoldura o ver do aluno em concordância ou não com sua forma de vida.
- Assinalar a possibilidade de os jogos de linguagem se constituir em jogos de imagens.

5 - Análise de Resultados

Tomo para analisar, mas não no sentido de dissecar e decompor as partes do elemento a ser conhecido, e sim, no sentido de descrever e interpretar a luz das concepções wittgensteinianas as questões respondidas pelos sujeitos da pesquisa. Portanto, não é de se esperar desta pesquisa que faça uma abordagem sistemática, e na ordem em que estão apresentados na metodologia os questionários e suas assertivas, assim como, as entrevistas.

A análise aqui ganha um caráter de “amostra”, tal qual aquela pessoa que diante de uma variedade de opções de pratos, para sua refeição, escolhe as que mais lhes são saborosas. Isto é, irei pinçar e inferir para tentar retratar um contexto. Por conseguinte, me desobrigo da necessidade de fazer uma análise de todas as questões (uma a uma) e de retratar os objetivos prévios de cada uma, dado a demanda de esforços que ultrapassam os limites dessa pesquisa.

A referência adotada aqui será: aluno de escola técnica 01 (AT - 01), ou aluno de escola particular 01 (AP – 01), por exemplo; variando apenas o numeral que os indica.Com referência aos questionários e suas questões ou das entrevistas ficará assim: questionário I / questão 02 (Q I.Q 02) ou entrevista do questionário I / questão 03 (EQ I.Q 03). O que alterará nestes casos será apenas o numeral associado às questões. Pois, há cinco questionários (Q I, Q II, Q III, Q IV e Q V) e cinco fichas de entrevista específicas a cada um dos questionários (EQ I, EQ II, EQ III, EQ IV e EQ V).

Começarei pelo Q I.Q 01 do AT – 01: ressalto a primeira questão deste questionário por possuir vários elementos geométricos para ser caracterizado pelos alunos, e também, uma relação entre a matemática e as obras cubistas.

Resposta do Q I. Q 01 do AT – 01:

* DEPOIS DE FEITO O SEGMENTO DE RETA BASTA COLOCAR O COMPASSO EM UM PONTO QUALQUER DO SEGMENTO, DESSA FORMA SE ESTABELECE UMA ABERTURA PARA O COMPASSO E GIRANDO O MESMO SOBRE O PONTO FIXADO TRAÇA-SE O ARCO QUE CORTA O SEGMENTO. DANDO ORIGEM AO PONTO 1;

* COM A MESMA ABERTURA CENTRADA EM 1 CRUZA-SE O PRIMEIRO ARCO DANDO ORIGEM AO PONTO 2;

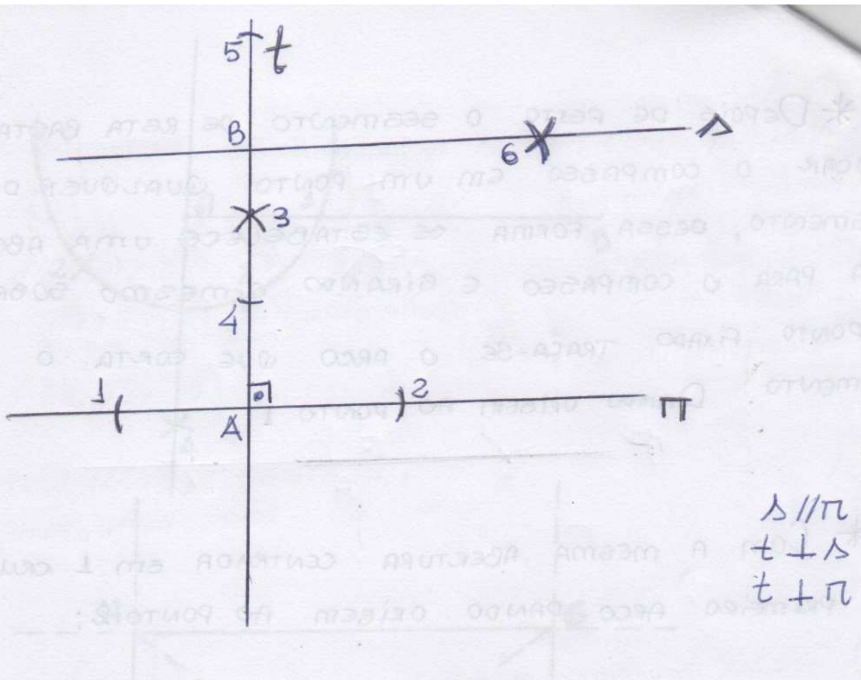
* AINDA COM A MESMA ABERTURA CENTRADO EM 2, CRUZA-SE O PRIMEIRO ARCO E DA ORIGEM AO PONTO 3;

* COM A MESMA ABERTURA CENTRA-SE EM 2 E 3 CRUZANDO ESTES DOIS ARCOS E DANDO ORIGEM AO PONTO 4;

* A RETA PERPENDICULAR AO SEGMENTO DE RETA $\overline{AB}$ É A RETA QUE PASSA PELA EXTREMIDADE ESCOLHIDA E O PONTO 4.

OBS: AS DISTANCIAS ENTRE OS PONTOS 2, 3, 4 e A DEVEM SER AS MESMAS. PORQUE A ABERTURA DO COMPASSO (RAIO), É A MESMA.

P03



Depois de traçado as duas perpendiculares ao segmento de reta $\overline{AB}$, tem-que se traçar uma reta paralela ao segmento. Pelo ponto A levanta-se uma reta T perpendicular a reta R.

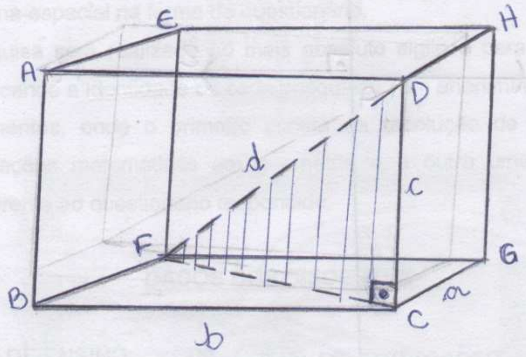
Sobre a perpendicular mede-se uma distância a partir do ponto A obtendo-se um segmento $\overline{AB}$. Pelo ponto B traça-se uma perpendicular a reta T, logo a nova reta S será paralela a reta R.

C) A diferença é que a diagonal $\overline{FC}$ pertence ao plano (BCFG), já a diagonal $\overline{FD}$ (d) pertence ao prisma retangular, ou seja, ao espaço.

P.04

D) O QUE DA PARA OBSERVAR É QUE OS DESENHOS CUBISTAS PARECEM SER TRIDIMENSIONALIDADES COLOCADAS SOBRE O PLANO, ISTO É, A PLANIFICAÇÃO TRIDIMENSIONAL. ALÉM DE EXISTIR EM COMUM ENTRE O PRISMA RETANGULAR E AS OBRAS DE ARTES ELEMENTOS GEOMÉTRICOS COMO: QUADRILÁTEROS, TRIANGULOS, LINHAS RETAS, ÂNGULOS RETOS, ETC.

E)



$$(\overline{FC})^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{(\overline{FC})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overline{FC} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

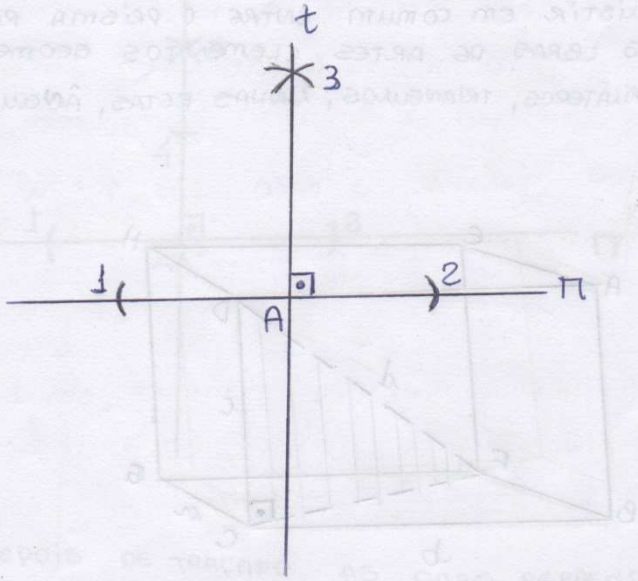
$$\overline{FD} = d \rightarrow (\overline{FC})^2 + c^2 = d^2$$

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{(\overline{FC})^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

F) PERPENDICULAR QUE PASSA POR UM PONTO QUALQUER, PERTENCENTE A UMA RETA.



A PARTIR DO PONTO A FIXA-SE O COMPASSO NELE COM UMA DETERMINADA ABERTURA E GIRANDO ELE DE UM LADO PARA O OUTRO INTERSECTARÁ A RETA R NOS PONTOS 1 E 2. AGORA FIXANDO O COMPASSO NO PONTO 1 (COM A DISTÂNCIA DE 1 PARA 2), ENTÃO GIRA-SE O COMPASSO DANDO ORIGEM A PRIMEIRA LINHA DE INTERSEÇÃO, O MESMO PROCEDIMENTO SERÁ FEITO PARA O PONTO 2. DE TAL FORMA QUE TEREMOS O PONTO 3 POR ONDE PASSARÁ A PERPENDICULAR, BEM COMO PELO PONTO A.

P.06

O AT – 01 em suas respostas além de mostrá-las meticulosamente e acertando todas e foi além, quando fez as descrições dos elementos do paralelepípedo (seus vértices, suas arestas e suas faces), quando ele descreveu as regras de construção para a uma face qualquer do paralelepípedo; bem como a confecção detalhada de uma perpendicular (isto é, seguiu a regra[6] “cegamente”) e com isso acertou a questão (a regra define o resultado, desde os primeiros passos).

Após isto, conseguiu estabelecer a ligação visual entre os elementos do paralelepípedo e as obras cubistas citando exemplos de elementos geométricos (quadriláteros, triângulos e ângulos reto) presentes nas obras cubistas. E assinalou um dos princípios do cubismo que é tornar o espacial em plano sem perder suas características.

> Diante de uma obra de arte, abre-se a possibilidade da multiplicidade de leituras e representações. A obra é vista de acordo com as referências pessoais e culturais do leitor. Quanto mais referências tivermos, maiores e mais diferentes serão as possibilidades e as perspectivas para análises e interpretações.
>
> (FAINGUELERNT e NUNES, 2006, p. 31)

Após isto, conseguiu estabelecer a ligação visual entre os elementos do paralelepípedo e as obras cubistas citando exemplos de elementos geométricos (quadriláteros, triângulos e ângulos reto) presentes nas obras cubistas. E assinalou um dos princípios do cubismo que é tornar o espacial em plano sem perder suas características.

A regra nas repostas, em geral, do AT – 01 é uma constante. Para Wittgenstein (2012) a regra é o substrato da técnica, pois é dela que se tem os critérios da ação, por isto, deve ser aprendida sobre o contexto dos jogos de linguagem (aqui jogos de imagem).

> Para que eu possa ter a impressão de que a regra produziu, antecipadamente, todas as suas consequências, é preciso que elas me sejam *evidentes*. Tão evidentes quanto chamar esta cor de “azul”.
> (Critérios para o fato de isto me ser ‘evidente’.)
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 238)

> “Mas você está de fato vendo...!” Esta é a expressão característica de alguém que está sendo obrigado pela regra.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 231)

> A palavra “concordância” e a palavra “regra” são *parentes*, são primas. Se ensino a alguém o uso de uma, com isso ele aprende também o uso da outra.

[6] É a lei que define e dá forma a ação, a vida e ao pensamento. (Abbagnano, 2007, p.988) Para Wittgenstein a regra tem como função auxiliar no exercício do jogo, e assim, evitar o equívoco ou o desvio do jogador de seu objetivo.

(WITTGENSTEIN, 2012, IF § 224)

Um exemplo sobre o que estou mostrando acerca da resposta do AT – 01 é sua última resposta, no momento em que faz a descrição sobre a construção de uma reta perpendicular, e também, como confeccionar uma das faces do paralelepípedo.

Perpendicular que passa por um ponto qualquer, pertencente a uma reta (regras & lógica):

Seja a reta r e o ponto A, pertencente à mesma.

1) Centro (ponta seca do compasso) em A, abertura qualquer, cruza-se a reta com dois arcos, um para um lado e o outro para o outro lado, gerando os pontos 1 e 2.

2) Centro em 1 e 2 com a mesma abertura, suficiente para obter o cruzamento desses dois arcos, gerando o ponto 3.

3) A perpendicular será a reta que passa pelos pontos A e 3.

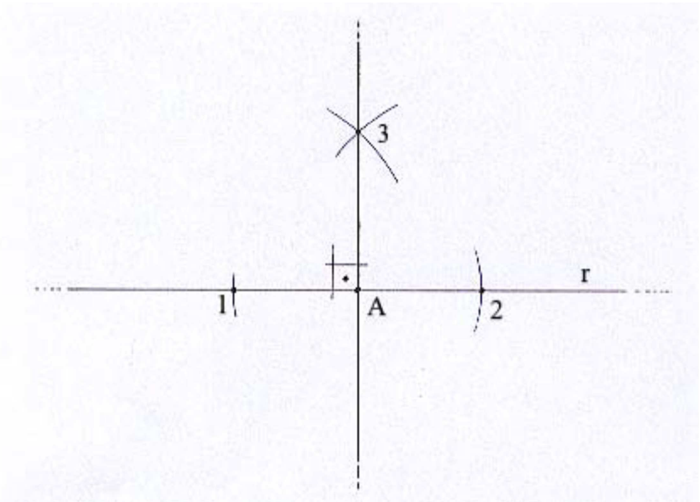


Figura 15 – Perpendicular que passa por um ponto qualquer

Ao centrar no ponto A e aplicar uma abertura no compasso, estabelecendo uma distância entre a ponta seca e a ponta que vai descrever o arco. Tal distância representa o raio desse arco, que é uma parte de uma circunferência. As distâncias (raios) A1 e A2 são, portanto, iguais. Quando centrar em 1 e 2, com a mesma abertura e, ao fazer o cruzamento, é determinado o ponto 3, tem-se as distâncias 13 e 23 são iguais entre si. A combinação dos pares iguais de distâncias (A1=A2 e 13=23) é a “prova dos nove” da construção.

Retângulo que corresponde a uma face qualquer do paralelepípedo (regras & lógica):

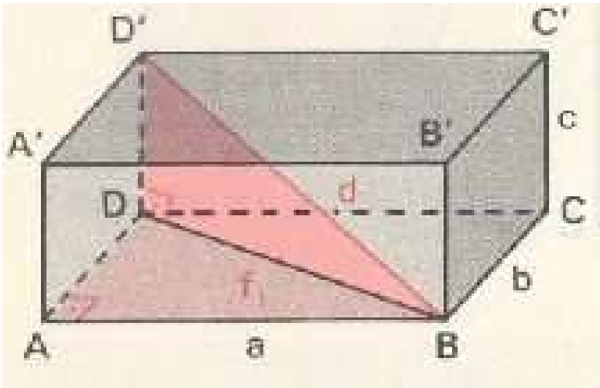


Figura 16 – exemplo de paralelepípedo e suas diagonais

É o paralelogramo que tem os lados opostos iguais dois a dois e os quatro ângulos retos. Suas diagonais são iguais e cortam-se num ângulo qualquer, diferente de 90°. Este ponto divide ambas em duas partes iguais, sendo, desse modo, equidistante dos vértices, tornando o retângulo inscritível na circunferência.

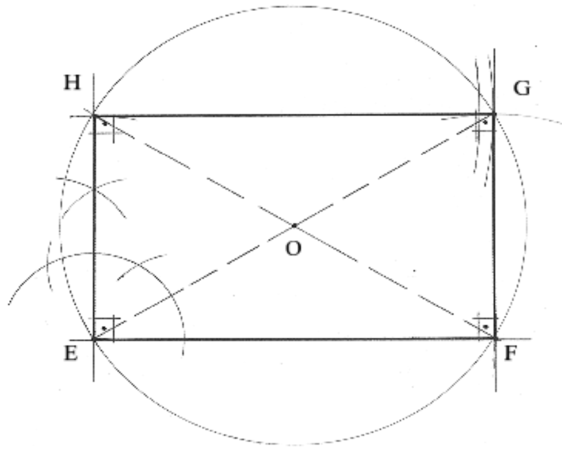


Figura 17 - Retângulo

Para a construção do retângulo, se traça o lado EF. Pela extremidade E, levantando uma perpendicular. Sobre esta, aplica-se a medida do lado (que não pode ser igual à EF), definindo então EH. Tomando então a distância EF no compasso e traçando o arco com centro em H. Este arco vai cruzar com o arco de abertura EH e centro em F, definindo o ponto G, completando a figura. Traçam-se, então as diagonais e, com centro no ponto de cruzamento das mesmas (O), descrevendo a circunferência. Ou se preferir, pode levantar as duas paralelas perpendiculares a um segmento, e, assim, fechar um retângulo.

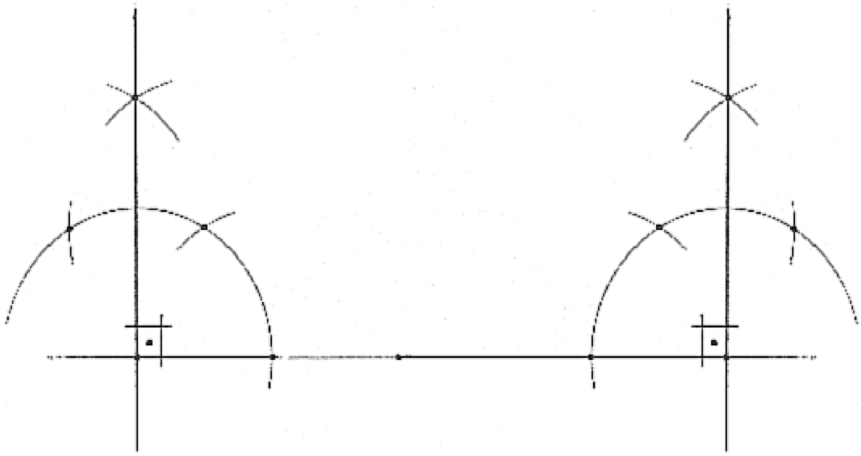


Figura 18 – Bases para um retângulo a partir de duas perpendiculares

O que pode ser notado é que para se estabelecer este jogo de imagem, da compreensão em volta das matizes geométricas, tem de se conhecer as regras, executá-las com lógica e fazer uso das referências figurais. Tarefa que, provavelmente, não é natural e aprendida com muito treino do ver (ver como).

E por último a resposta dada pelo AT – 01 com relação a diagonal mostra sua habilidade em não apenas "ver como" mais em ter a maestria em algebrizar o geométrico e vice-versa.

Se FC$^2 = a^2 + b^2$

$\sqrt{FC^2} = \sqrt{a^2+b^2}$, **então** **FC** $= \sqrt{a^2+b^2}$. **Se FD** = d e $FD^2 = c^2 + (FC)^2$, **então** $d^2 = c^2 + (\sqrt{a^2+b^2})^2$

$d^2 = c^2 + a^2 + b^2$

$\sqrt{d^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$d_{FD} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

> Suponha que alguém diga a série 1, 3, 5, 7, ... enquanto escreve a série do 2x + 1. E se pergunta: “Mas faço sempre a mesma coisa ou faço cada vez algo diferente?”
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF §226)

> A ligação entre a aprendizagem da geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas tem aguçado a busca de variados procedimentos que possam ser colocados em prática na sala de aula, a fim de se aprimorar a desenvoltura do olhar as imagens no ensino de geometria.
>
> (FLORES, 2007, p. 17)

Sobre a forma de vida (vivência) do AT – 01, na intenção de conhecer melhor suas perspectivas sobre a Geometria e as questões propostas, analisarei algumas assertivas da ficha de entrevista do questionário I.

EQ I. Q 01:
Para você o que é Geometria?
AT – 01/ Resposta: “o que o professor ensinou é que pela etimologia da palavra significa que é geo de terra e metria de medida, então é a geometria de medida da Terra. Mas, agora é uma parte da matemática que estuda as formas e suas relações”.

EQ I. Q 02:
Você considera importante estudar Geometria? Por quê?
AT – 01/ Resposta: “Sim. Porque, minha vida e profissão dependem da geometria. Se eu não souber bem não serei um profissional de qualidade”.

EQ I. Q 03:
Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?

AT – 01/ Resposta: “Não tenho dificuldade em aprender geometria, porque estudo bastante e exercito o desenho geométrico pelo menos quatro vezes na semana junto com cálculo”.

EQ I. Q 05:
Quando você olhou para o prisma retangular conseguiu identificar facilmente os elementos que o compõe ou não? Por quê?

AT – 01/ Resposta: “Não tive dificuldade em ver os componentes do paralelepípedo, pois já estou habituado com isso na geometria. Afinal, quase todos os dias, uso de geometria para resolver os problemas de minha área”.

EQ I. Q 06:

Em algum momento você se confundiu entre a diagonal da base $\overline{FC}$ do prisma e a diagonal $\overline{FD}$ ou teve alguma dificuldade em perceber suas diferenças? Por quê?

AT – 01/ Resposta: “Não. Porque a diagonal $\overline{FC}$ está no plano de um paralelogramo e a diagonal $\overline{FD}$ pertence ao paralelepípedo, estão em dimensões diferentes”.

EQ I. Q 07:

No seu entendimento existe alguma relação possível entre matemática e arte? Se há relação de que forma você acha que ela se estabelece?

AT – 01/ Resposta: “Acho que pode existir uma ligação entre matemática e arte, como tá na própria questão. Mas, não sou da área e por isso não sei como isso pode acontecer. No caso da questão primeira do questionário pude identificar vários elementos que trabalho na geometria com aquilo que tava lá na obra de arte. Só não sei como é nas outras”.

EQ I. Q 09:

Para você é preciso aprender a ver os elementos das figuras geométricas e as suas relações? De que forma?

AT – 01/ Resposta: “Sim, é preciso aprender a ver tudo. Porque, no início foi muito difícil aprender geometria, eu não sabia o que era vértice, diagonal, hipotenusa, apótema e etc. E nem tinha habilidade de lhe dar com compasso, régua T, papel quadriculado, etc. Para aprender a ver em minha opinião precisa de um bom curso, com bons professores, empenho pessoal e estudar desenho geométrico”.

EQ I. Q 11:

A sua formação como aluno é voltado para que tipo de objetivo, ou seja, você estuda para alcançar que meta como estudante do 3º ano do ensino médio? De que forma sua formação ajudou ou não você responder as questões propostas?

AT – 01/ Resposta: “Minha formação é voltada para o mercado de trabalho de estradas e edificações, além do ensino médio comum. E ela ajudou a responder as que questões, porque como estou acostumado a ver isto quase todo dia e resolver problemas dessa natureza então ficou fácil para mim”.

Nas respostas acima fica mais evidente (na fala do AT – 01) que sua vivência está voltada para aprendizagem de Geometria. Logo, dentro desse jogo de imagem no caso das construções, das regras, das simbolizações, das relações, conceitos, etc, ele está “familiarizado” com elas já que é parte de sua vida este fazer e esta “arte”.

> O jogo deve ser determinado pelas regras! Se, portanto, uma regra do jogo prescreve que os reis devem ser empregados para o sorteio antes da partida de xadrez, então isto pertence exclusivamente ao jogo. O que poderíamos objetar contra isso?
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 566)

> Será que somos apressados em supor que o sorriso do lactante não é fingimento? – E em que experiência se baseia nossa suposição? (Mentir é um jogo de linguagem que requer ser aprendido como outro jogo qualquer.)
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 249)

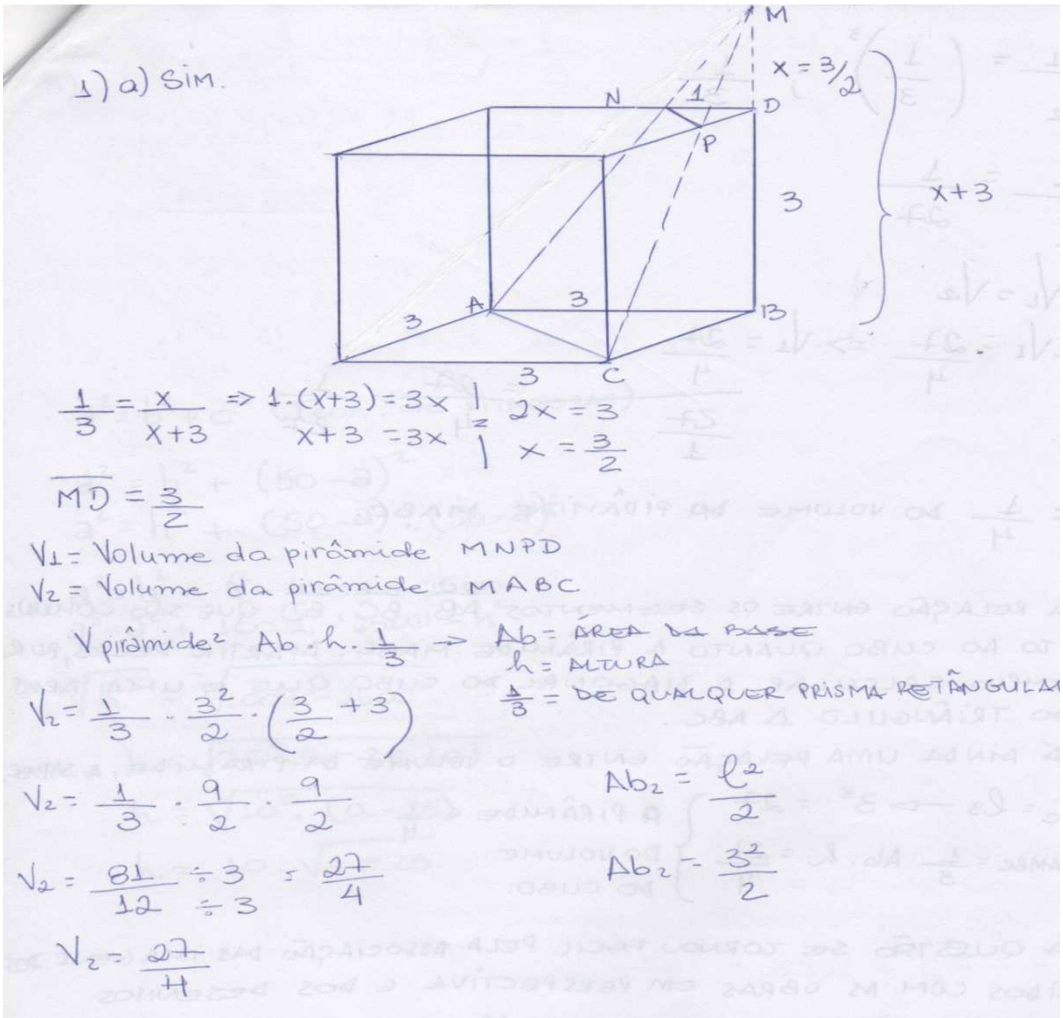
> Imagine que alguém siga uma linha como regra da seguinte maneira: Ele segura um compasso; uma ponta do compasso, ele a conduz ao longo da linha que é a regra, enquanto a outra ponta traça a linha que segue a regra. E enquanto caminha ao longo da regra desta maneira, ele modifica a abertura do compasso, ao que parece, com grande exatidão, sempre de olho na regra como se ela determinasse sua ação.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 237)

O AT – 01 dentro das suas respostas da entrevista coloca que sua vida depende da própria Geometria, portanto passa ser ela a sua “vida”. Daí porque muitas vezes quando uma pessoa que tinha um determinado ofício e o perde por algum motivo (acidente, falência do negócio, doença, etc) diz, geralmente, “o que será da minha vida agora, porque eu só sei fazer isso”. Isto é, esta pessoa aprendeu um jogo que fundamentou todo sua vida através de sua prática (uso, significado) então ela encontrou seu lugar no mundo, todavia acabara de perder esse lugar pelo caso fortuito contra seu ofício.

Não é diferente para este aluno, pois está aprendendo as regras de um novo jogo de imagem da Geometria que tem significado a ele, à medida que domina a técnica e faz uso dela; e, é então, o momento em que se torna um jogador que “vê como” a partir desses conceitos, definições, regras, dessa lógica, etc; deixando seu “ver sinóptico” de lado para este jogo (ao qual nem jogava antes). Enfim, sua vida passa a ser este jogo de imagem (na Geometria).

Trago para descrever e refletir o Q II. Q 01 respondido pelo AT – 02, pois esta questão tem algo em comum com a Q III. Q 01 que é o fato de combinarem sólidos geométricos diferentes em uma imagem apenas. Exigindo desta forma do aluno que atente a este detalhe e que a partir daí estabeleça as relações entre as medidas destes sólidos para poder determinar sua estratégia e alcançar o objetivo da questão. E estas questões ainda trazem em seu bojo a ideia de razão entre medidas, quando se tem que afirmar que um sólido é um terço do outro, por exemplo.

Resposta do Q II. Q 01 do AT – 02:


1) a) Sim.

$\frac{1}{3} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow 1.(x+3) = 3x$

$x+3 = 3x$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$\overline{MD} = \frac{3}{2}$

V_1 = Volume da pirâmide MNPD

V_2 = Volume da pirâmide MABC

V pirâmide = $Ab \cdot h \cdot \frac{1}{3}$ → Ab = ÁREA DA BASE

h = ALTURA

$\frac{1}{3}$ = DE QUALQUER PRISMA RETÂNGULAR

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + 3\right)$

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}$

$V_2 = \frac{81 \div 3}{12 \div 3} = \frac{27}{4}$

$V_2 = \frac{27}{4}$

$Ab_2 = \frac{\ell^2}{2}$

$Ab_2 = \frac{3^2}{2}$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 ; \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}$$

$$27 V_1 = V_2$$

$$27 \cdot V_1 = \frac{27}{4} \Rightarrow V_1 = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{1}} = \frac{\cancel{27}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{27}}$$

$V_1 = \frac{1}{4}$ DO VOLUME DA PIRÂMIDE MABC.

B) A RELAÇÃO ENTRE OS SEGMENTOS $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ QUE SÃO COMU
TANTO AO CUBO QUANTO A PIRÂMIDE MABC. APARTIR DELES, P
EXEMPLO CALCULAR A DIAGONAL DO CUBO QUE É UMA AR
TA DO TRIÂNGULO Δ ABC.

HÁ AINDA UMA RELAÇÃO ENTRE O VOLUME DA PIRÂMIDE, A SAB

$V_C = l_3 \rightarrow 3^3 = 27$

$V_{AMBC} = \frac{1}{3} Ab \cdot h = \frac{27}{4}$

A PIRÂMIDE É $\frac{1}{4}$ DO VOLUME DO CUBO.

O AT - 02 usou a proporcionalidade entre segmentos para assim achar o volume da pirâmide (V_{MABC} = 27/4) e depois a proporção entre volumes (V_{MABC} = 1/4. V_C) e com isso resolver os problemas propostos. Mas, o que tem de ser observado é a capacidade de objetivação, organização e abstração sobre os elementos geométricos deste aluno. Suas respostas indicam sua habilidade em “ver como” as incógnitas e as medidas se entrelaçam num todo único da lógica e proporcionalidade, como o uso da propriedade o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Não está explícita a relação entre a pirâmide e o cubo, bem menos, uma estratégia que viabilize o "aparecimento" do caminho para solução. Então a pergunta é: Como este aluno pode ver essas relações invisíveis e elaborar uma estratégia para resolver o problema?

> Para que eu possa ter a impressão de que a regra produziu, antecipadamente, todas as suas consequências, é preciso que elas me sejam *evidentes*. Tão evidentes quanto chamar esta cor de "azul". (Critérios para o fato de isto me ser 'evidente'.)
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 238)

De acordo com Wittgenstein (2012) é a regra que dá a antecipação sobre as ações do jogo, ou seja, é quem determina o resultado do jogo. Mas, é preciso entender que somente o conhecimento da regra não é condição suficiente para se estabelecer uma boa estratégia para resolução do problema matemático.

A estratégia está em conformidade com a forma de vida do jogador, com as regras e lógica, e, por último, com o treino. Estes são componentes que contribuirão para se "familiarizar" com os elementos geométricos e poder manipulá-los com destreza, pois assim o significado passa a significar.

Sobre a forma de vida (vivência) do AT – 02, na intenção de conhecer melhor suas perspectivas sobre a Geometria, é que mostrarei algumas de suas respostas da entrevista.

EQ II. Q 01:
Para você o que é Geometria?
AT – 02/ Resposta: "Geometria é uma matéria que considero muito importante para mim, porque gosto bastante de desenhar e calcular as dimensões dos desenhos. Como essas figuras se encaixam e formam um desenho técnico lindo que adoro ver suas simetrias e proporções exatas".

EQ II. Q 02:

Você considera importante estudar Geometria? Por quê?
AT – 02/ Resposta: "Sim, é muito fundamental estudar geometria. Quando entrei no curso até não gostava de geometria, mas quando comecei a estudar desenho geométrico passei a adorar, inclusive agora treino outros desenhos como fazer pessoas, animais, plantas e objetos. Ajuda a melhorar a visão sobre a organização das coisas".

EQ II. Q 05:
Pelo que você observou na imagem da questão 1 (envolvendo o cubo e a pirâmide), o fato da pirâmide está quase toda encaixada no cubo ajudou ou dificultou em sua observação?
AT – 02/ Resposta: “Não senti muita diferença, já que no curso de estradas e edificações estou acostumado a desenhar edificações com sólidos um sobre o outro, um no interior do outro, um ao lado do outro e etc. E traço de acordo com suas posições relativas às ligações matemáticas entre eles”.

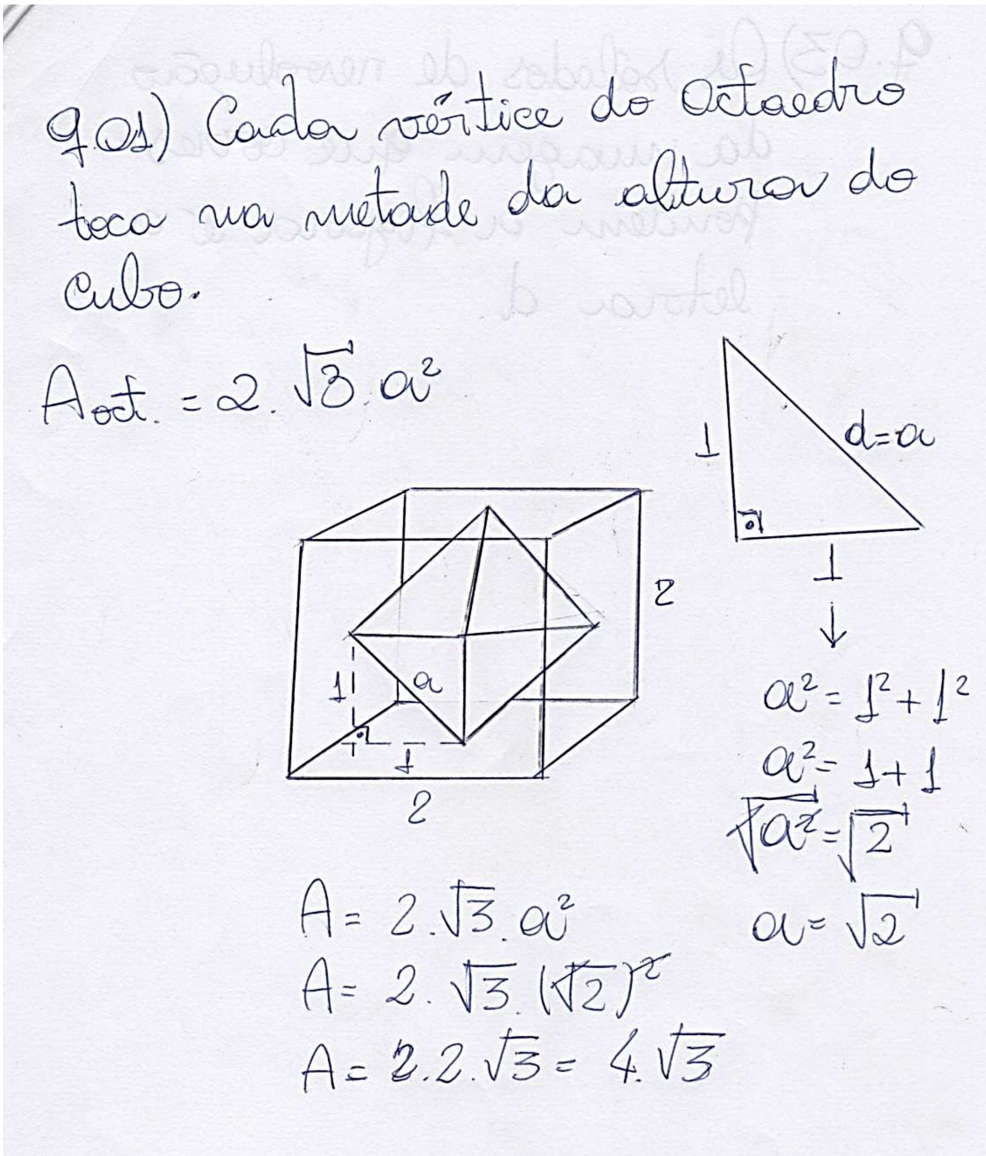
EQ II. Q 07:
Qual característica ou elemento do cubo ou da pirâmide ajudou você a calcular o volume da pirâmide? Por quê?
AT – 02/ Resposta: “O elemento âncora, por assim dizer, que faz avançar no cálculo é a medida das arestas do cubo de 3 cm e a medida ND de 1 cm”. A partir daí basta fazer uso da semelhança de triângulos e se chega a relação $\frac{1}{3} = \frac{x}{x+3}$, o que vai dar pelo produto dos extremos pelos meios em MD = 3/2”.

Na análise dessas respostas a entrevista o AT – 02 é bem similar ao AT – 01, isto é que participam da mesma ambiência de vida e compartilham do mesmo jogo de imagem, da mesma forma de vida (pelo menos o do curso técnico), treinam as mesmas coisas, enfim, são jogadores do mesmo jogo. Isto influencia sobre o sua aprendizagem e, portanto sobre sua forma de ver (transitando do ver em geral – sinóptico – para o ver como). O domínio da técnica matemática em Geometria por AT – 01 e AT – 02 demonstra que não são “cegos para revelação dos aspectos do objeto”, pois fazem a dissecação matemática do problema.

> Pode-se imaginar também que alguém tenha aprendido o jogo sem mais aprender as regras, ou sem formulá-las. Talvez ele tenha aprendido assistindo a um jogo de tabuleiro bem simples, e foi progredindo para os jogos sempre mais complicados. Também a este poderíamos dar a explicação: “Este é o rei” – quando lhe mostramos, por exemplo, figuras do xadrez que para ele tem uma forma incomum. Mesmo esta explicação lhe ensina o uso da figura só porque, como poderíamos dizer, o lugar onde ela fora colocada já estava preparado. Ou também: só vamos dizer que ele lhe ensina o uso se o lugar já estiver preparado. E não está preparado aqui pelo fato de que a pessoa, a quem damos a explicação, já saiba as regras, apenas, mas porque, num outro sentido, ela já domina um jogo.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 31

Visando deixar mais claro, ainda, os argumentos acerca dos jogos de imagem e de que para se jogá-los é preciso “ver como” trago a resposta do AT – 03 sobre o Q III. Q 01, pois assim como Wittgenstein não definiu seus jogos de linguagem e apenas o caracterizou da mesma forma procedo com os jogos de imagem. Os caracterizo aqui nesta pesquisa sobre um único aspecto que é o da Geometria, no entanto existem mais ampliações para outros campos e áreas que podem ser feitos ultrapassando os limites momentâneos deste trabalho.

Resposta do Q III. Q 01 do AT – 03



A reposta mostra que o AT – 03 usou neste jogo de imagem a inter-relação do cubo com o octaedro regular, isto é, para encontrar a área total do octaedro teve que notar que existe uma ligação sútil entre as arestas do cubo e os vértices do octaedro. De tal forma, está estabelecido que a altura de cada aresta do cubo é 2 e que os vértices do octaedro encontram-se na metade da altura de cada face do cubo. Portanto, ao usar o Teorema de Pitágoras para uma espécie de apótema do triângulo formado entre a altura de dois vértices do octaedro e uma aresta do próprio octaedro na seguinte equação: $a^2 = 1^2 + 1^2$ que, por sua vez, é $a = \sqrt{2}$. Como a área total do octógono é definida pela lei $A_T = 2.\sqrt{3}.\ a^2$, então o jogo termina com este resultado $A_T = 2.\ \sqrt{3}.\ (\sqrt{2})^2 = 4.\ \sqrt{3}$. Ver além do próprio ver, além do ver sinóptico é "ver como" que ultrapassa a possibilidade imediata, que requer condições específicas da forma de vida (regras, treinos, lógica, expressões, exemplos, etc). Assim como se aprende o jogo da mentira, do cinismo, da dissimulação, da sedução, da "embriaguez do espírito"; se aprendem os jogos de imagem.

O AT – 03 possui o "ouvido musical" e sabe quando afinar as cordas do "ver como", portanto nota as sutilezas que envolvem o problema. Contudo, não é um passo ou estágio natural tal visão e aprendizado, é, antes, um jogo de imagem da Geometria que carece ser aprendido como ser jogado.

> Eu queria dizer, portanto: Se ele soube de repente como continuar, se entendeu o sistema, quiçá ele teve uma vivência especial – que talvez irá descrever se lhe perguntarmos: "Como foi, o que aconteceu, quando você de repente compreendeu o sistema?", do mesmo modo como descrevemos acima – mas aquilo que para nós o justifica dizer, em tal caso, que ele compreendeu, que ele sabe continuar, são as *circunstâncias* nas quais ele teve tal vivência.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 155)

> Não é elucidativa a analogia da linguagem com o jogo? Podemos muito bem imaginar pessoas que se divertem num campo, jogando com uma bola, de sorte que começassem diversos jogos conhecidos. (...) E agora alguém diz: As pessoas jogam o tempo todo um jogo de bola, e por isso guiam-se, a cada jogada, por regras determinadas.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 83)

Mostrarei algumas respostas da entrevista de AT – 03 que estão em sintonia com as dadas pelo AT – 01 e AT – 02 (as repostas dos alunos sobre a Geometria, sua importância, enfim, como eles veem são bem parecidas); deixando evidente que estão os alunos técnicos participando de uma mesma vivência que os faz ter determinada forma de ver para a Geometria.

EQ III. Q 01:
Para você o que é Geometria?
AT – 03/ Resposta: "É o componente mais importante que há para nós do curso de edificações e estradas, porque tudo o que façamos em nossa profissão está ligado diretamente a geometria. Por isso, temos que saber muito bem como cada parte

dessa disciplina funciona e sua estrutura. Nosso curso além de cálculo é geométrico".

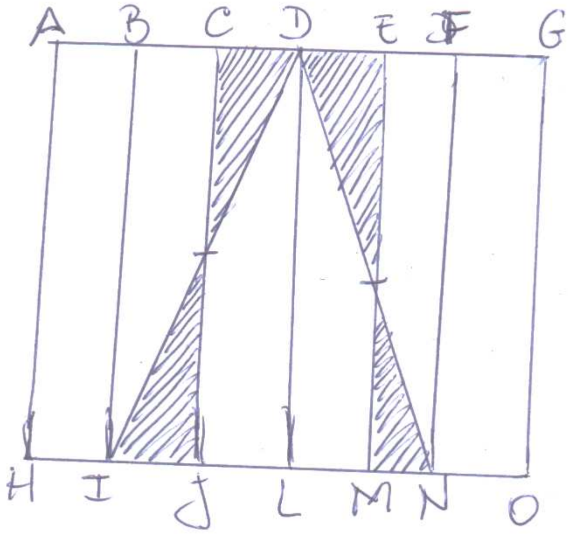
EQ III. Q 02:
Você considera importante estudar Geometria? Por quê?
AT – 02/ Resposta: "Como eu já disse na resposta anterior é a geometria uma disciplina muito relevante para nós do curso de edificações e estradas. Especificamente estudamos a geometria que é a "medida da Terra" a partir do desenho geométrico, geometria analítica e geometria descritiva. "Medida da Terra" porque também estudamos um pouco de História da geometria. Quer dizer que foi usado um sistema de cordas no Egito para medir as terras a margem do rio Nilo".

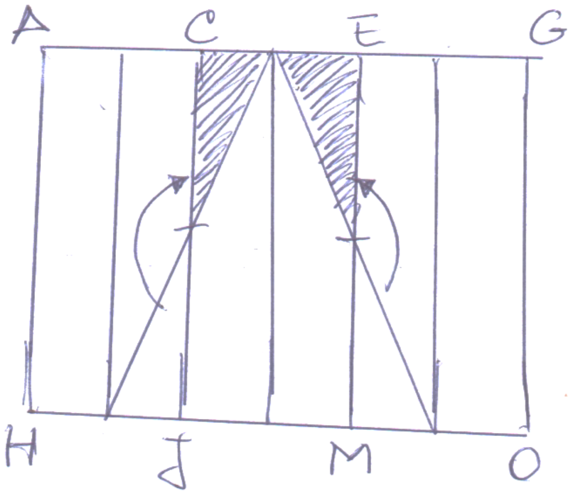
EQ III. Q 05:
Na primeira questão uma relação entre o cubo e o octaedro de Platão, foi de alguma forma dificultosa perceber essa relação? Por quê?
AT – 02/ Resposta: "Não. Porque já estou acostumado com essa prática, porque nosso professor sempre nos mostra a relação entre figuras planas e os sólidos geométricos. Quer dizer que ele sempre comparada uma as outras, quando dá, e as inscreve, quando dá também. E no momento em que desenho as estruturas geométricas sempre há que articular as diversas partes de uma figura ou de um sólido com outras, e manter as relações de cálculo também para não errar".

EQ III. Q 06:
Na primeira questão você conseguiu calcular a área do octaedro? Como?
AT – 02/ Resposta: "Sim. Eu usei uma estratégia que foi ver que a altura de cada vértice do octaedro de Platão está a altura de 1 cm de cada aresta do cubo. Logo, usei o teorema de Pitágoras e depois usei a fórmula que calcula a área do octaedro".

Além das questões acima indicadas para meditar a questão da forma de vida, de técnica, seguir regras e jogos a partir de Wittgenstein. Vou ressaltar três questões, no caso, a Q IV. Q 03, Q V. Q 02 e Q V. Q 03 dadas por alunos técnicos distintos entre si.

Resposta do Q IV. Q 03 do AT – 04:





ACHJ = CEJM = EGMO, logo

AMED = MBCF.

$ACHJ = \frac{2}{6} \cdot AGHO$

Nesta questão o AT – 04 usou como estratégia a propriedade de opostos pelo vértice para deslocar “virtualmente” partes das bases laterais do triângulo e assim compor dois retângulos que representam partes de um retângulo maior, estas duas partes estão contidas como frações do retângulo maior. Como equivale agora o triângulo aos dois menores retângulos AT – 04 chegou a conclusão de que o triângulo equivale a 2/6 do retângulo maior.

Este aluno teve uma perspicácia ao notar isto e fazer uso dessa propriedade geométrica para solucionar o problema. Muitos desavisados inadvertidamente poderiam dizer é um gênio nasceu com o dom para essas coisas exatas. Todavia, este aluno fora habilitado a este ver através do treino, isto é, só viu porque sabe “ver como” para seguir esta regra em conformidade com a Matemática e estipular a estratégia para sua solução.

> É como se alguém explicasse: “Jogar consiste em movimentar coisas sobre uma superfície de acordo com certas regras...”
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 03)

Resposta do Q V. Q 02 e Q V. Q 03 do AT – 05 (Simultaneamente):

② Considerando a área ABCD = 1 u.a

Área BED = ABCD − ABD − BCE

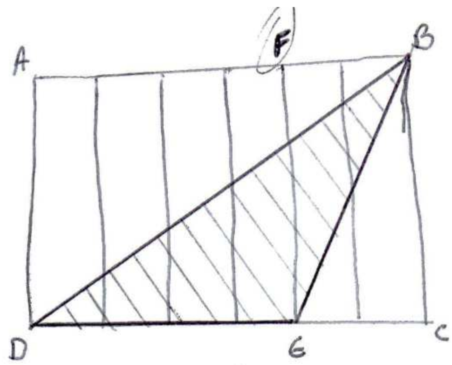
Área ABD: $\frac{1}{2}$ ABCD $\Rightarrow \frac{1}{2}$ u.a.

Área BCE = $\frac{1}{2}$ BCEF

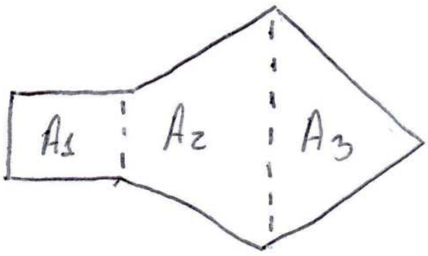
BCEF = $\frac{1}{3}$.ABCD $\Rightarrow \frac{1}{3}$ u.a.

Área BCE = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.

Área BED = $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{6-3-1}{6} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ u.a.



3



$At = A_{1} + A_{2} + A_{3}$

$A_{1} = b \times h$

$A_{1} = 2 \times 2$

$A_{1} = 4m^2$

$A_{2} = \frac{(2+4).3}{2}$

$A_{2} = 9m^2$

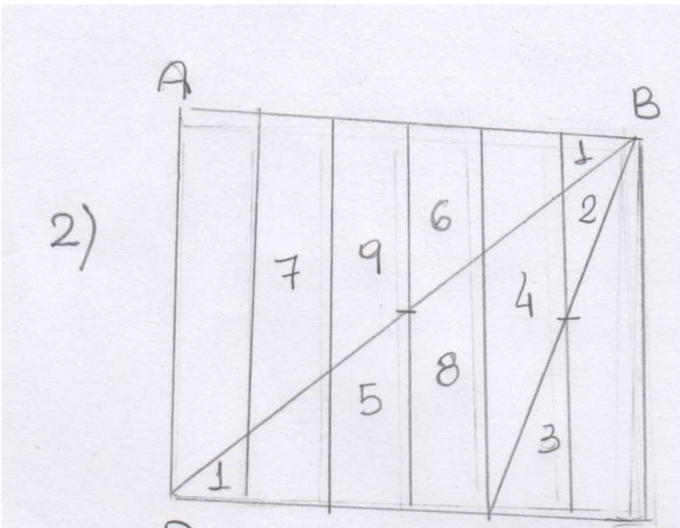
$A_{3} = \frac{b \times h}{2}$

$A_{3} = \frac{4 \times 2,5}{2}$

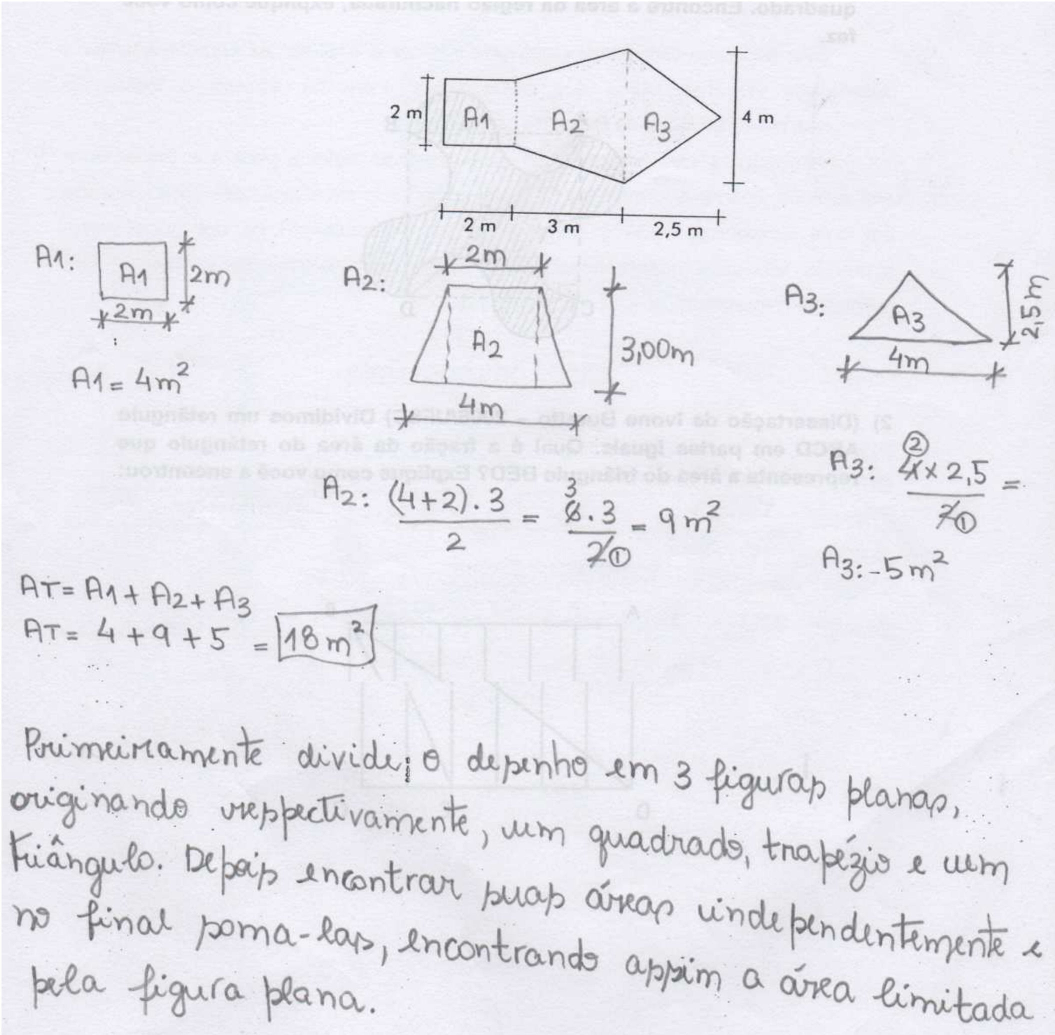
$A_{3} = \frac{10}{2} = 5m^2$

$At = 4 + 9 + 5 = 18m^2$

Resposta do Q V. Q 02 e Q V. Q 03 do AT – 06 (Simultaneamente):



$$\left.\begin{array}{l} 1+2=3 \\ 4+3=7 \\ 5=6 \\ 8=9 \end{array}\right\} \triangle BED = \frac{1}{3} \square ABCD$$



Analisando as respostas do AT – 05 e AT – 06 para as mesmas questões (Q V. Q 02 e QV. Q 03) pode ser notado que estes alunos encontram as repostas corretas, todavia as estratégias são distintas entre uma e outra questão em comparação.

Por exemplo, no Q V. Q 02 para o AT – 05 a sua estratégia foi adotar o tamanho do retângulo ABCD como 1 u.a (unidade de área) como o total de área para daí retirar as relações com suas partes. Isto é, se o que se deseja é a área do triângulo BDE que, por sua vez, tira a equação geométrica BDE = ABCD (o todo, 1 u.a) – ABD (parte do todo, mais precisamente sua metade) – BCE (outra parte desse todo). Agora ele terá que encontrar que frações correspondem BCE e ABD de ABCD para poder efetuar a subtração geométrica e restar BDE.

AT – 05 notou que ABD corresponde a metade de ABCD, pois o “corta” exatamente ao meio já que está definido a partir dos vértices B e D. Logo, ABD =

1/2.ABCD ou 1/2 u.a. Posteriormente a isto concluiu que BCE corresponde a metade de BCEF, mas BCEF é 1/3 de ABCD o que pode ser escrito BCE = 1/2.1/3 = 1/6 u.a. E, por fim, BDE = 1 u.a – 1/2 u.a – 1/6 u.a = 1/3 u.a. Ou seja, BDE é um terço de ABCD.

A estratégia AT – 06 fora enumerar as partes semelhantes do triângulo BED com a do retângulo ABCD até formar uma reconfiguração de um triângulo para dois retângulos menores que estão contidos dentro do retângulo ABCD. Enfim após essa estratégia da reconfiguração geométrica conclui que BED é um terço de ABCD (BED = 1/3. ABCD.

Com a questão 03 do questionário cinco tiveram estratégias bem similares e encontraram os mesmos resultados, que estão de acordo com a regra. Fizeram uma secção em áreas específicas (A_1, A_2 e A_3), sendo a área um o quadrado, a área dois um trapézio e a área três um triângulo. Depois se soma as partes das áreas num todo obtendo 18 m^2.

Aqui não há descompasso com as regras, no entanto mesmo dentro de uma mesma vivência (pressuponho dos alunos 05 e 06 nas suas aulas de geometria) estabelecem estratégias ora distintas, ora parecidas. Contudo, ambos chegam ao resultado coerente com o que estabelece a regra matemática, pois jogaram o jogo de imagem da geometria a partir de seu “ver como”. Ver como encontrar as semelhanças, as propriedades das figuras geométricas e associar isto a álgebra e aritmética.

> Todo signo, *sozinho*, parece morto. O que lhe confere vida? – Ele *está vivo* no uso. Ele tem em si o hálito da vida? – Ou é o *uso* o seu hálito?
> (WITTGENSTEIN, 2012. IF § 432)

> (...) Sim; estas palavras e esta imagem têm, dependendo das circunstâncias, uma aplicação que nos é familiar. – Mas, se supomos um caso no qual esta aplicação caia fora, assim tomamos consciência, por assim dizer, pela primeira vez, da nudez das palavras e da imagem.
> (WITTGENSTEIN. 2012, IF § 349)

Para finalizar as argumentações mostrarei as respostas de alguns alunos da escola particular, aqui identificados como AP – 01 (aluno particular um, por exemplo).

Respostas (A)

1A) Sim. Mais, não sei identificar todos os elementos do paralelepípedo.

Os que sei são: A, B, C, D, E, F, G, H (Vértices)

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ (Arestas)

1.B - Não sei quantas faces possui o paralelepípedo. E não sei como construir uma face pelo desenho geometrico, porque não me ensinaram como se faz. Mas, gostaria de saber.

1.C - Não consigo ver diferença nenhuma entre as diagonais, pois são todas diagonais.

1.D - Não consigo ver elementos geometricos das obras cubistas com elementos geometricos do paralelepípedo. Até acredito que as obras cubistas tenham sido influenciada pela geometria só não sei como.

1.E - Não consigo ver nem estabelecer relação entre as diagonais sitadas no comando da letra E.

1.F - Eu não sei descrever como foram construidos essas retas perpendiculares, porque não me ensinaram, ou seja, não sei fazer a leitura dos desenhos porque não sei como foram feitos.

Para melhor ilustrar as repostas dadas pelo AP – 01 fazerei a transcrição de algumas respostas da entrevista referente a este questionário.

EQ I. Q 01:

Para você o que é Geometria?

AP – 01/ Resposta: “É uma matéria que tenho que estudar para passar no vestibular”

EQ I. Q 02:

Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

AP – 01/ Resposta: “Não muito. Porque é chato esse negócio de triângulos, polígonos e quadrados. Tenho que gravar um monte de fórmulas, seja para calcular área, volume ou para achar um ângulo. Uma chatice só, para mim, não tem motivo nenhum de exigirem isto para o vestibular. Eu não vou usar pra nada mesmo e nem na minha futura profissão como médica”.

EQ I. Q 03:
Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?
AP – 01/ Resposta: “Minha maior dificuldade em aprender geometria é ter que gravar aquelas fórmulas todas, como: $a^2=b^2+c^2$ ou $V_{Tpirâmide}$= 1/3. Ab, por exemplo. É muito complicado mesmo saber em um problema contextualizado como e quando usar essas infinitas fórmulas em cada caso”.

EQ I. Q 09:
Para você é preciso aprender a ver os elementos das figuras geométricas e as suas relações? De que forma?
AP – 01/ Resposta: “Sim. Pelo que o professor ensina, fazendo as relações e mostrando como calcular. Só que isto quase não acontece aqui no colégio porque o professor de matemática mostra as fórmulas e aplica em alguns casos. No meu entendimento isso não é suficiente é preciso saber mais e melhor”.

EQ I. Q 10:
A sua formação como aluno é voltado para que tipo de objetivo, ou seja, você estuda para alcançar que meta como estudante do 3º ano do ensino médio? De que forma sua formação ajudou ou não você responder as questões propostas?
AP – 01/ Resposta: “Minha educação aqui nesse colégio é só pra passar no vestibular, esse é o nosso grande objetivo (meu e de meus colegas). O que estudo, ou melhor, como estudo aqui não ajudou muito na resolução das questões do teu questionário. Porque é diferente daquilo que estou acostumada a ver aqui, e talvez, por isso não soube responder a maioria pra não dizer todas (risos)”.

EQ I. Q 10:
Se lhe fosse dado agora compasso, régua, lápis, borracha e papel você conseguiria desenhar um cubo seguindo as regras do desenho geométrico? Se sim diga como você faria; se não diga por que não conseguiria?
AP – 01/ Resposta: “Não conseguiria fazer. Porque não fui educada para esse tipo de situação. Se o professor me ensinasse isso com certeza eu saberia lhe dizer, mas infelizmente não aprendi isso, portanto não sei fazer e nem por onde começar”.

A partir das respostas da AP – 01 pode ser notado que não tem domínio da técnica e nem das regras sobre as construções e relações dos elementos geométricos. Isto faz com que seja AP – 01 “cega para revelação dos aspectos do objeto”, e, portanto, não signifique para seu saber aqueles desenhos geométricos.

Ela vê uma estrutura ou sistema como um leigo que desconhece como se dá o seu funcionamento, por exemplo, um pedreiro admirando a obra de um marceneiro. O “cego para o aspecto” de acordo Wittgenstein (2012) não é aquele que não quer ver, mas aquele que não pode ver. Não pode porque não conhece o uso; não pode porque não domina a técnica que aqui depende da lógica; não pode porque não está na contingência de sua vivência; não pode porque tem que aprender as regras como jogador do jogo a que pretende jogar. Enfim, não pode porque não “vê como” no jogo de imagem da geometria.

> Não se pode adivinhar como uma palavra funciona. É preciso que se *veja* a sua aplicação e assim se aprenda.
> A dificuldade é, porém, eliminar o preconceito que se opõe a este aprendizado.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 340)

> Tenho que entender uma ordem antes de poder agir conforme ela? – Com certeza! Senão você não saberia o que tem de fazer – Porém, do *saber* para o fazer é de novo um salto!
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 505)

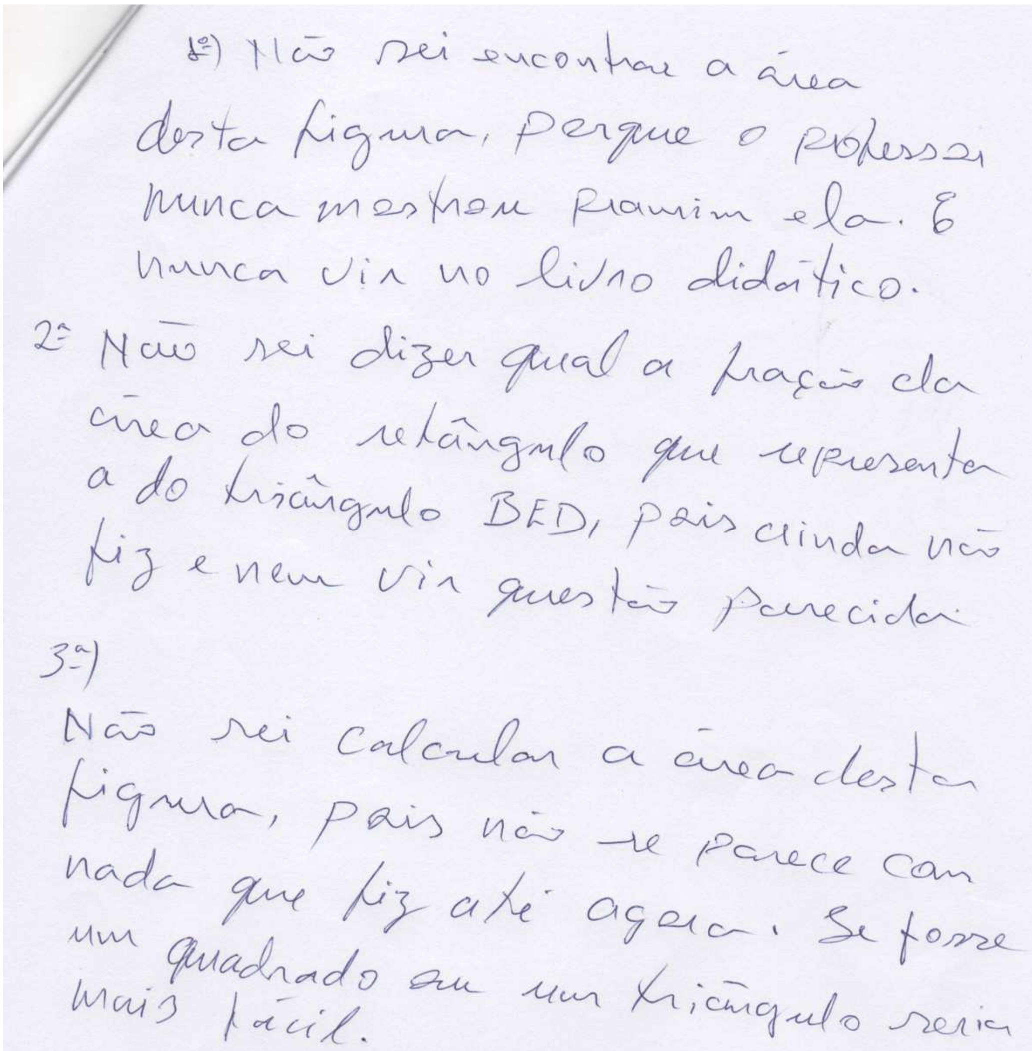
> Você aprendeu o *conceito* de “dor” com a linguagem.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 384)

> O aspecto *profundo* escapa-nos facilmente.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 387)

O que é evidente se torna não evidente, o que parecia simples, fácil e óbvio ao intelecto se transmuta para as mais difíceis das tarefas sobre a compreensão do significado daquilo que se deseja “tocar”. Pois, o profundo escapa por sua trivialidade e o que aprendo tem que está de acordo com os liames do jogo. Somente quando “vejo como” é que tenho as características, as condições e os critérios para lhe dar com os aspectos dos objetos que desejo conhecer, a partir de um processo que não se coloca como inato ou natural. É preciso imbuir-se desta tarefa pelo treino, no embate do jogador com seu adversário que ora é a si próprio, ora é a outrem.

AP – 01 não realiza as tarefas solicitadas de tal forma que não estipula nenhuma estratégia para tentar resolver o problema. Considera importante o papel da Geometria, suas relações com a Arte; mas, não consegue tirar do seu ver que é sinóptico nenhuma conclusão do que está diante de si. AP – 01 mesmo tendo a diagonal do paralelepípedo diante de si não consegue estabelecer as relações matemáticas para definir seu valor numérico, demonstrando a sua inobservância aos aspectos que lhe deveria ser clara.

Resposta do Q V. Q 01, Q V. Q 02 e a Q V. Q 03 do AP – 02 (Simultaneamente):


1º) Não sei encontrar a área
desta figura, porque o professor
nunca mostrou pra mim ela. E
nunca vi no livro didático.
2º Não sei dizer qual a fração da
área do retângulo que representa
a do triângulo BED, pois ainda não
fiz e nem vi questão parecida
3º)
Não sei calcular a área desta
figura, pois não se parece com
nada que fiz até agora. Se fosse
um quadrado ou um triângulo seria
mais fácil.

O AP – 02 na primeira questão do questionário quinto relata não saber realizar o cálculo da área do quadrado, porque o professor não *ensinou*; ou não *mostrou*; ou AP – 02 não *viu* no livro didático algo parecido. Pode ser notado que verbos como ensinar, mostrar, fazer e ver estão presentes não só nestas respostas deste aluno mas é algo recorrente nas repostas dos outros alunos da escola particular. Segundo Wittgenstein (2012) o aprendiz tem no uso sua partida para o aprendizado do jogo. Se não usa, não joga; se não joga, não vê; se não vê, não sabe.

> Para uma *grande* classe de casos – mesmo que não para *todos* – de utilização da palavra “significado”, pode-se explicar esta palavra do seguinte modo: O significado de uma palavra é seu uso na linguagem.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 43)

> Eu poderia dizer: uma imagem não *vive* sempre para mim enquanto a vejo.
> “Sua imagem sorri para mim da parede.” Ela não é obrigada a fazer isto sempre que meu olhar pousar sobre ela.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 268 – parte II, seção XI)

> À evidência imponderável pertencem as sutilezas do olhar, dos gestos, do tom, etc.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 294 – parte II, seção XII)

Para não tornar essa análise de resultados demasiado extensa e maçante as respostas dos alunos técnicos são muito similares entre si. Bem como, as respostas dos alunos da escola particular também se parecem com a de seus pares. Isto talvez porque suas formas de vida estão nas mesmas ambiências ou contingências, proporcionando uma ótica comum as suas contemplações intelectuais. Por exemplo, os alunos da escola particular dizem recorrentemente que a Geometria é relevante na medida em que os serve para lograr êxito no vestibular, já os da escola técnica dão outra conotação a Geometria. Outro aspecto que deva ser notado é o fato dos alunos da escola particular não terem tentado se quer responder por completo um dos cinco questionários. O que por sua vez reforça mais ainda a ideia da “cegueira para os aspectos de um objeto” desses alunos por não saberem “ver como”.

Do mesmo modo os alunos técnicos deixam evidente em suas resoluções que possuem determinada habilidade no trato com essas questões de Geometria, isto porque seu ver não é sinóptico e sim um “ver como”. Estão eles mais familiarizados com essa forma de jogar (jogos de imagem em Geometria) daí suas estratégias serem refinadas e engenhosas.

> O substrato desta vivência é o domínio de uma técnica.
> Somente de uma pessoa que é *capaz* disto e daquilo, que aprendeu e domina isto e aquilo, tem sentido dizer que ela vivenciou *isto*.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 272 – parte II, seção XI)

Considerações finais

Trilhado o vasto caminho da pesquisa qualitativa até a constatação de fatos empíricos e teóricos sinto como se estivesse no lugar do filósofo descrito por Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas*. Aquele que deve ensinar à mosca a saída do mata-moscas, pois é assim que as armadilhas da linguagem não terão eficácia e não enfeitiçarão com suas sutilezas vis a compreensão sobre a vida.

E é isto que esta pesquisa tentou mostrar o “enfeitiçar” sobre nossas visões ao ponto de poder cegar, mas não um cegar fisiológico. Trata-se daquele cegar do espírito quando mesmo vendo não vejo (sem significado e compreensão). Por isso, a pergunta que deu direcionamento as reflexões foi: existem modos de ver, nos alunos, que influencia em seu aprendizado sobre Geometria?

Esta pergunta fora respondida no momento em que identifico, a partir da ótica wittgensteiniana, que há uma distinção aparentemente sutil no modo como veem (os alunos da escola particular e técnica). Este modo de ver é relevante o suficiente para habilitar um como jogador e o outro não, ou seja, condição para que um efetivamente aprenda e o outro não.

Estes modos de ver são: o “ver sinóptico” e o “ver como”. Isto é, o primeiro como a própria palavra indica é um ver resumido, geral e desprovido da especialidade técnica, portanto que não detecta as finuras referentes aos aspectos dos objetos em suas representações como na Geometria, por exemplo. As variáveis que levam ao “ver sinóptico” é a ausência de uma vivência do aluno imbricada com o treino em conformidade com as regras do jogo. Desta forma faltará a compreensão (certeza) porquanto não lhe significa (uso) aqueles aspectos dos objetos, e, então, não terá o domínio da técnica que o habilitaria ao ver e ao fazer. Isto ficou evidente no caso dos alunos particulares, pois estavam “cegos para revelação dos aspectos dos objetos”, ou mesmo como diz Hebeche (2002) a cegueira para o aspecto assemelha-se à ausência de ouvido musical.

> Poder-se-ia dizer que alguém é cego para a *expressão* num rosto. Mas faltaria, por esta razão, alguma coisa ao seu sentido visual?
> Mas é evidente que esta não é simplesmente uma questão da fisiologia. O fisiológico é aqui um símbolo do lógico.
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF p. 273 – parte II, seção XI)

A outra forma de ver é o “ver como” que para Wittgenstein (2012) diz respeito com a capitação daquilo que é aparentemente trivial; com aquilo que não está exposto, com aquilo que demanda ligações implícitas, enfim, com aquilo que requer o domínio da habilidade de ver com uma intenção específica para os aspectos do objeto.

> Ele vê isto *assim*, diríamos isto somente de alguém que está em condições de fazer certas aplicações da figura com agilidade.
> O substrato desta vivência é o domínio de uma técnica.
> Somente de uma pessoa que é *capaz* disto e daquilo, que aprendeu e domina isto e aquilo, tem sentido dizer que ela vivenciou *isto*.
> E se isto parece loucura, você deve considerar que o *conceito* de ver aqui é modificado. (Uma reflexão semelhante é frequentemente necessária para exorcizar as vertigens na matemática.)
> (WITTGENSTEIN, 2012, p. 272 – parte II, seção XI)

Esta forma de ver foi um traço constante e marcante nas soluções dos alunos técnicos que traçaram estratégias matemáticas para resolver os problemas. Com a utilização de propriedades dos elementos geométricos, relações entre as medidas dos sólidos geométricos, algebrizaram quando realizaram generalizações, criaram subterfúgios analíticos quando decompuseram as figuras em polígonos regulares para encontrar suas áreas, sabiam fazer as descrições detalhadas sobre as regras matemáticas para construção de figuras geométricas, e, consequentemente, dos sólidos, etc.

A forma de vida ou vivência se demonstrou como um aspecto relevante na constituição dessa forma de ver especializada ou em sua ausência. Através das variáveis a que estavam submetidos estes alunos foi o que em boa parte contribuiu para desenvolver os atributos de um jogador nestes jogos de imagem da Geometria. Por exemplo, quando os alunos da escola particular foram indagados sobre como fazer para construir uma perpendicular eles respondiam basicamente que bastava fazer um traço na horizonta e outro na vertical.

A resposta dada é totalmente arbitraria, sem critério e lógica matemática, ou seja, estes alunos fazem reproduções sintéticas daquilo que costumam ver. Os alunos da escola técnica quando indagados sobre a mesma circunstância responderam em consonância com os critérios matemáticos, descrevendo detalhadamente os passos para poder compor uma perpendicular. Tal modo de ver estes aspectos se dê, talvez, por sua forma de vida que no curso está impregnada de desenho geométrico, geometria analítica e descritiva. Sem contar com o nível de relevância que dão a Geometria, colocando esta parte da Matemática como um ponto importante para sua sobrevivência e sucesso profissional, o que não ocorre com os alunos da escola particular, pois veem na Geometria apenas mais um componente curricular.

> Pode-se imaginar facilmente uma linguagem que seja constituída somente de comandos e informes de batalha. – Ou uma linguagem constituída apenas de questões e de uma expressão de afirmação ou de negação. E inúmeras outras. – E representar uma linguagem equivale a representar uma forma de vida.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 19)

> A expressão “*jogo* de linguagem” deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida.
>
> (WITTGENSTEIN, 2012, IF § 23)

A linguagem em Wittgenstein não é a gramática única, porque ela se constitui de outros matizes como os seus jogos, as suas regras, o seu contexto, a forma de vida do jogador. Ela é mais antropológica neste sentido, mais cultural e polivalente, pois até a entonação pode influenciar na compreensão de algo, as figurações das palavras e as imagens, também, possuem seu papel nestes jogos de compreensões. Daí porque dizer que como espécie de uma linguagem há jogos de imagens que obedecem a circunstâncias parecidas com a dos jogos de linguagem, isto é, a imagem, especialmente na Geometria, tem figurações mutáveis de acordo com o contexto ou com o jogo em que é mostrada. Por exemplo, digo o quadrado é um polígono de quatro lados iguais e com quatro ângulos retos; depois digo todo quadrado é um retângulo, porém nem todo retângulo é um quadrado; posteriormente digo um losango pode ser um quadrado; depois digo o quadrado é uma das seis faces de um cubo, etc.

Ora, quantas espécies de jogos com imagens não tenho aí? Isso precisa ser aprendido pelo aluno, que só poderá apreender esses jogos de imagens quando suficientemente treinado, quando tornado um jogador deste jogo, quando sua forma de vida não mais conter divisórias entre o que faz e o que vê, pois só assim significará a sua prática educativa de Geometria.

Referências

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

AZEREDO, Vânia Dutra de (Coord). **Introdução à lógica**. 3.ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2004

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos*.* Porto, Portugal: Editora Porto, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARNAP, Rudolf. **The Logical Syntax of Language**. London: Routledge & Kegan Paul, 1985.

CHAUVIRÉ, Christiane. **Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.

COSTA, Cláudio Ferreira. **Filosofia analítica**. Rio de Janeiro: Edições Tempo Brasileiro Ltda, 1992.

COSTA, Acylena Coelho. **Análise do Ensino de Geometria Espacial**. *In*: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, junho de 2009, Ijuí/RS.

DESCARTES, René. **Discurso do método***;* as paixões da alma; meditações. São Paulo: Nova Cultural, 1999. Coleção Os Pensadores.

DUMMETT, Michael. **FREGE**: philosophy of language. 2.ed. Cambridge: Harvard University, 1995.

EDMONDS, David; EIDINOW, John. **O atiçador de Wittgenstein**: a história de uma discussão de dez minutos entre dois grandes filósofos. Rio de Janeiro: DIFEL, 2003.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman e NUNES, Kátia Regina Ashton. **Fazendo Arte com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2006.

FAUSTINO, Sílvia. **Wittgenstein**: o eu e sua gramática. São Paulo: Ática, 1995.

FLORES, Claudia. **Olhar, saber, representar**: sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, 2007.

FILLOS, Leoni Malinoski. **O Ensino da Geometria**: Depoimentos de Professores que fizeram História. *In*: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, junho de 2009, Ijuí/RS.

FOGELIN, Robert J*.* **Wittgenstein**. 2.ed. London: Routeledge, 1995.

FRASCOLLA, Pasquale. **Wittgenstein’s philosophy of mathematics**. London: Routerledge, 1994.

FREGE, Gottlob. **Investigações lógicas**. Org. trad. e notas de Paulo Alcoforado. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

FREGE, Gottlob. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. São Paulo: Cultrix, 1958.

GIANOTTI, J. A. **Apresentação do mundo***:* considerações sobre o pensamento de Ludwig Wittgenstein. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. Coleção Dicionários de Filósofos.

GODOY, Arilda Schimidt. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. Revista RAE. V. 35, n 2, mar./abr., 1995. p. 57-63.

GOMEZ-GRANELL, Carmem. **A aquisição da linguagem matemática**: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana. TOLCHINSKY, Liliana. (Orgs.). ALÉM DA ALFABETIZAÇÃO: a aprendizagem fonológica ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora ática, 2003, p. 257-282.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Wittgenstein**. Paris: Seghers, 1969.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência**: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HINTIKKA, Merril B. HINTIKKA, Jaako. **Uma investigação sobre Wittgenstein**. São Paulo: Papirus, 1994.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. Tradução de Valerio Rohden e Udo Baldur Moosburger. São Paulo: Nova Cultural, 1996. Coleção Os Pensadores.

KENNY, Anthony. **The Wittgenstein reader**. Oxford: Basil Blackwell, 1994.

KENNY, Anthony. **Frege**: An Introduction to the founder of modern analytic philosophy. London: Penguin Books, 1995.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** *In*: Educação Matemática em Revista – SBEM 4, 1995, p. 3-13

LARAIA, Roque de Barros. **Cultura**: um conceito antropológico. 17ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MACHADO, Nilson José. **Lógica e linguagem cotidiana**: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MAGALHÃES, Theresa Calvet de. **Filosofia analítica**: de Wittgenstein à redescoberta da mente. Belo Horizonte: Movimento Editorial da Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

MARCONDES, Danilo. **Iniciação a historia da filosofia**: dos pré-socráticos a Wittgenstein. 4. ed. Rio de Janeiro: J. Zahar, 2000.

MARCONDES, Danilo. **Filosofia analítica**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

MENEGUZZI, T. **Os perspectógrafos de Dürer na educação matemática**: história, geometria e visualização. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2009.

MORENO, Arley R. **Através das imagens**. 2. ed. São Paulo: UNICAMP, 1995.

MORENO, Arley R. **Wittgenstein**: os labirintos da linguagem: ensaio introdutório. São Paulo: Moderna, 2000.

OLIVEIRA, Vera Barros de. **Jogos de regras e resolução de problemas**. Petrópolis: Vozes, 2004.

OLIVEIRA, Manfrefo Araújo de. **Reviravolta linguístico-pragmática na filosofia contemporânea**. São Paulo: Loyola, 1996.

PADOVANI, Umberto e CASTAGNOLA, Luís. **História da Filosofia**.10ª edição. São Paulo: Melhoramentos, 1974.

PAVANELLO, R. M**. O abandono do ensino da Geometria**: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 1989.

PASSOS, C.L. **Representações, Interpretações e Prática Pedagógica**: a Geometria na Sala de Aula**.** Tese (doutorado) – Campinas: Unicamp, 2000.

PEARS, David Francis; MOTA, Octanny Silveira da. **As idéias de Wittgenstein**. São Paulo: Cultrix, 1973.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar**: uma análise dos estudos sobre o seu abandono. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001. Dissertação de Mestrado.

PINTO, Paulo Roberto Margutti. **Iniciação ao silêncio**: uma análise do Tractatus de Wittgenstein como forma de argumentação. São Paulo: Edições Loyola, 1998.

PIOVESAN, Américo R. A lógica em Wittgenstein*.* *In*: AZEREDO, Vânia Dutra de (Coord)*.* **Introdução à lógica**. 3.ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2004, p.165-194.

PIROLA, N. A. **Solução de Problemas Geométricos**: Dificuldades Perspectivas. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 2003. Dissertação de Mestrado.

RUDOLF, Arnheim. **Arte & Percepção Visual**. Tradução de Ivone Terezinha de Faria. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

RUSSELL, Bertrand. **História do pensamento ocidental**: a aventura das ideias dos pré-socráticos a Wittgenstein. 6.ed. Rio de Janeiro: Ediouro, 2002.

SLUGA, Hans D; STERN, David G. **The Cambridge Companion to Wittgenstein** Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

SHIBLES, Warren. **Wittgenstein, linguagem e filosofia**. São Paulo: Cultrix, 1974.

SCHMITZ, François. **Wittgenstein**. Tradução de José Oscar de Almeida Marques. São Paulo: Estação Liberdade, 2004.

SCHILPP, Paul Arthur. **The philosophy of Bertrand Russell**. 3.ed. New York: Tudor Publishing Company, 1951. The Library of Living Philosophers Collection.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Tese (doutorado) - Porto Alegre : UFRGS, 2005.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A linguagem matemática na aprendizagem da média aritmética**. Revista Pesquisa em Foco: Educação e Filosofia. v. 4, n. 4, julho 2011 (p. 58-67)

SILVEIRA, M. R. A. **Interpretação e comunicação em Matemática**. In: 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2008, Recife/PE.

SPANIOL, Werner. **Filosofia e método no segundo Wittgenstein**: uma luta contra o enfeitiçamento do nosso entendimento. São Paulo: Loyola, 1989. (Coleção filosofia; 11).

TORREZAN, Marlene. **Wittgenstein e os "jogos de linguagem"**: novas perspectivas para o conceito de educação. Revista Perspectiva. v.18, n 34, jul./dez. 2000 (p. 159-176).

WITTGENSTEIN, **Investigações Filosóficas**. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Vozes, 2012.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tratado lógico-filosófico**. 2ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1995.

WITTGENSTEIN, Ludwig. Fichas [Zettel]. Lisboa: Edições 70, 1989.

WALLNER, Friederich. **A obra filosófica de Wittgenstein como unidade**. Tradução de Alfredo Bragança Júnior e Idalina Azevedo da Silva. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1997.

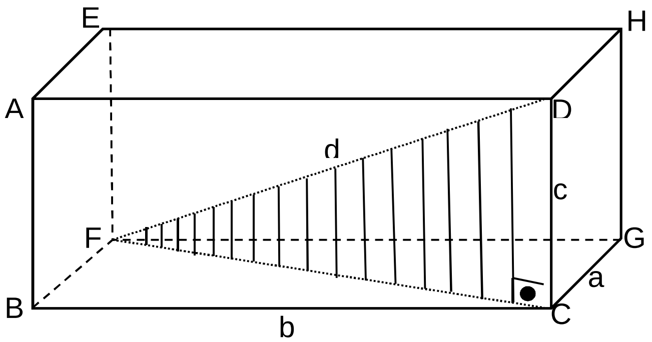
APÊNDICE

Apêndice A

QUESTIONÁRIO I (Q I) E FICHA DE ENTREVISTA I (EQ I)

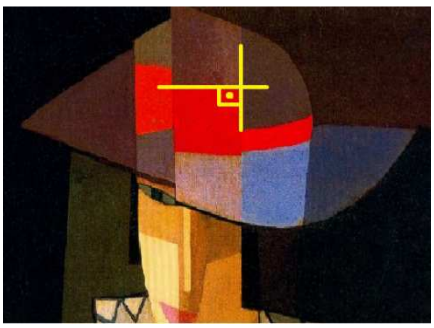
Questionário tipo 01 / Ficha de entrevista tipo 01

1) A perpendicularidade está presente em muitos contextos visuais da matemática, assim como em diversas obras de artes. Como podemos ver na figura geométrica espacial e nas obras de arte abaixo.



Autor: Daniel Bueno
Pauta: A História do Caderno.
Técnica: Colagem manual e digital inspiradas no Cubismo

Autor: Emilio Pettoruti
Pauta: Pensiero (1920).
Técnica: Óleo sobre tela colada sobre cartão, estilo Cubista.



a) **Você pode identificar e nomear os elementos, representados por letras, do paralelepípedo acima?** Responda sim ou não e justifique o porquê de conseguir ou não desenvolver essa tarefa.

b) **O paralelepípedo acima possui quantas faces? Você saberia descrever passo a passo como construir uma dessas faces (plano), de acordo com as normas do desenho geométrico?** Responda sim ou não, justifique sua resposta.

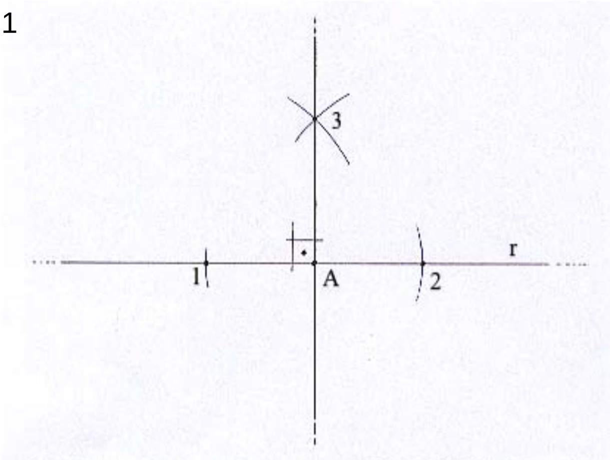
c) **Qual diferença você pode perceber, se houver, entre a diagonal $\overline{FC}$ da base BCFG do paralelepípedo com a diagonal $\overline{FD}$?** Ao responder, por favor, justifique sua resposta segundo seus conhecimentos sobre o assunto.

d) **Você consegue, de alguma forma, enxergar uma relação entre as duas obras Cubistas acima com elementos do sólido geométrico? Você acredita que é possível que a geometria tenha contribuído para as obras cubistas, por quê?** Justifique suas respostas.

e) **A diagonal d ($\overline{FD}$) do paralelepípedo pode ser descrita seguindo uma relação entre os lados e a própria diagonal do sólido geométrico, pois há na base do triângulo** *FCD* **um ângulo reto. O que permite a utilização de certos princípios matemáticos como o Teorema de Pitágoras. Você pode demonstrar essa relação matemática para o cálculo da diagonal d ($\overline{FD}$) em função de seus lados?** Caso saiba desempenhar essa atividade, por favor, desenhar um sólido para mostrar os passos seguidos por você e escrever algebricamente a relação matemática.

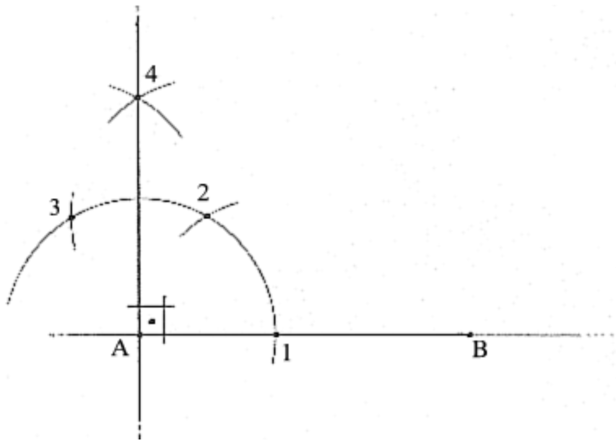
f) **Escolha um dos desenhos abaixo do ângulo de 90º e descreva quais procedimentos foram adotados, pelas regras do desenho geométrico, para fazê-lo. Obs.: Foram feitos com régua, compasso e lápis.**

1



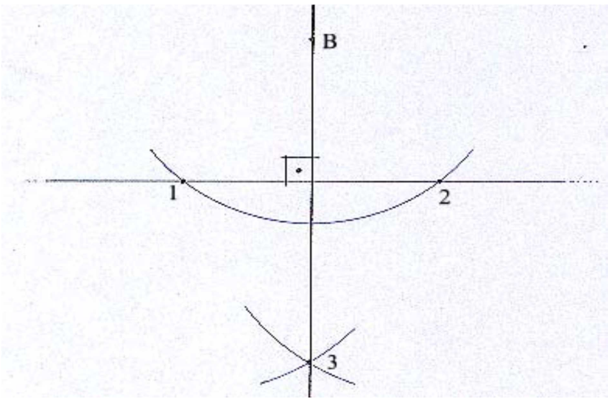
Perpendicular que passa por um ponto qualquer pertencente a uma reta.

2



Perpendicular que passa pela extremidade de um seguimento de reta.

3



Perpendicular que passa por um ponto não pertencente a uma reta.

Entrevista para Questionário I

1) Para você o que é Geometria?

2) Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

3) Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?

4) Qual alternativa do questionário apresentou maior grau de dificuldade para você? Por quê?

5) Quando você olhou para o prisma retangular conseguiu identificar facilmente os elementos que o compõe ou não? Por quê?

6) Em algum momento você se confundiu entre a diagonal da base $\overline{FC}$ do prisma e a diagonal $\overline{FD}$ ou teve alguma dificuldade em perceber suas diferenças? Por quê?

7) No seu entendimento existe alguma relação possível entre matemática e arte? Se há relação de que forma você acha que pode se dá?

8) Você acha que poderia e seria mais interessante aprender matemática com o auxílio da arte? Por quê?

9) Para você é preciso aprender a ver os elementos das figuras geométricas e as suas relações? De que forma?

10) Você conseguiu realizar a tarefa da alternativa b e f do questionário? Por quê?

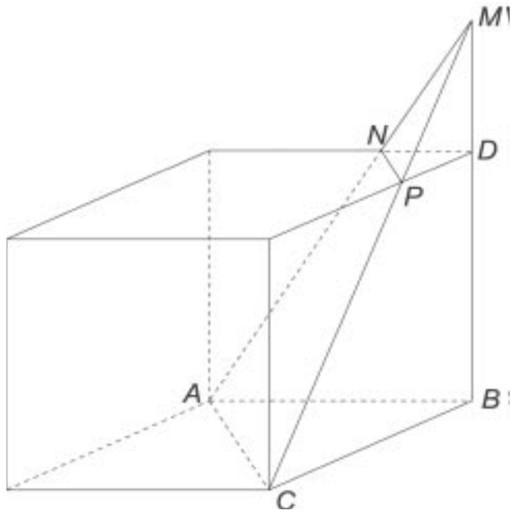
11) A sua formação como aluno é voltado para que tipo de objetivo, ou seja, você estuda para alcançar que meta como estudante do 3º ano do ensino médio? De que forma sua formação ajudou ou não você responder as questões propostas?

12) Se lhe fosse dado agora compasso, régua, lápis, borracha e papel você conseguiria desenhar um cubo seguindo as regras do desenho geométrico? Se sim diga como você faria, se não diga por que não conseguiria?

Apêndice B

QUESTIONÁRIO II (Q II) E FICHA DE ENTREVISTA II (EQ II)

1) **(UFMG-2005) Observe a figura:**



Nessa figura, estão representados um cubo, cujas arestas medem, cada uma, 3 cm, e a pirâmide MABC, que possui três vértices em comum com o cubo. O ponto M situa-se sobre o prolongamento da aresta BD do cubo. Os segmentos MA e MC interceptam arestas desse cubo, respectivamente, nos pontos N e P e o segmento ND mede 1 cm.

a) **Você pode indicar o volume da pirâmide MABC, se sim mostre como.**

b) **Qual relação matemática você percebe entre o cubo e a pirâmide em questão?**

2) A perspectiva surge como técnica para a representação do espaço na renascença, os italianos são os precursores desse modo de representar o mundo, pois agora o mundo das duas dimensões torna-se o da terceira dimensão, ou o da realidade. Na matemática, em especial, na geometria espacial também buscamos a representação em perspectiva para visualizar as características e elementos dos sólidos geométricos.

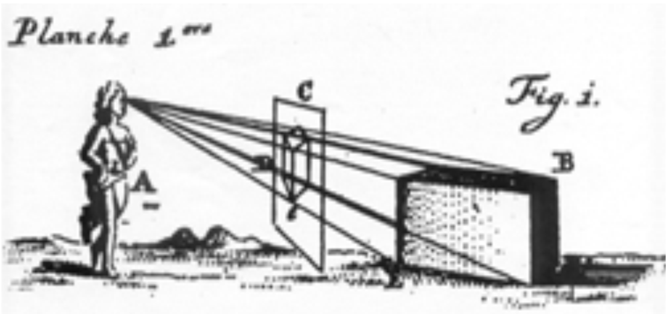
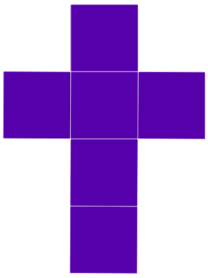
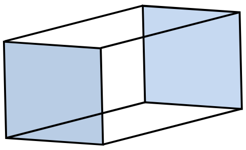
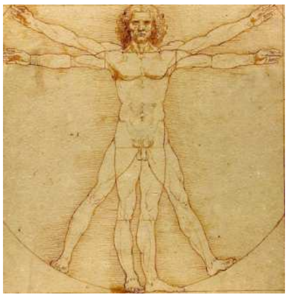
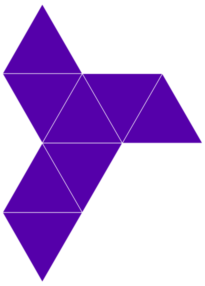


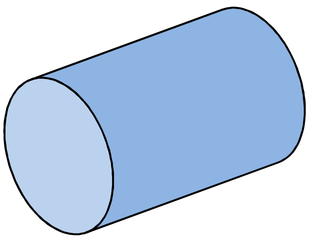
Fig.1 Ilustração da técnica da perspectiva e do olho monocular.
Gravura do tratado *Essai de perspective*, de S'Gravesande, 1711.
Fonte: **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva**.
Cláudia Regina Flores

> A técnica da perspectiva instaurada no Renascimento italiano possibilitou as representações em três dimensões, criando uma forma de visão racionalizada a partir da ideia de uma pirâmide visual simétrica. Essa visão invadiu a pintura da época, em que a vista do pintor era monocular e valorizada pela visão científica do mundo.
>
> (FLORES, 2010, p. 281)[1]

a) Estabeleça a correspondência ligando as representações matemáticas com as artísticas de acordo com sua dimensionalidade, a seguir:

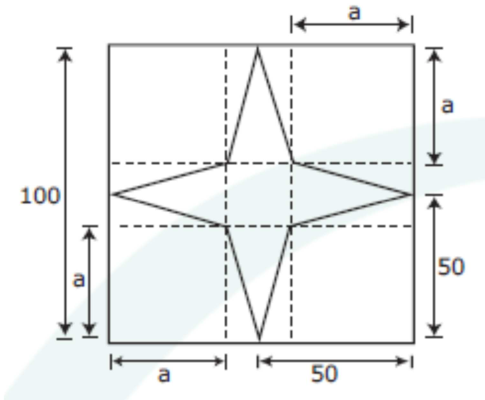





[1] FLORES, Cláudia Regina. Cultura visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares. ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010.

3) (UFMG – 2005) Uma pirâmide de base quadrada é construída recortando-se e dobrando-se uma cartolina quadrada de 100 cm de lado, como mostrado nesta figura:



a) **Qual a área da pirâmide em função de *a*?**

b) **Qual o volume da pirâmide em função de *a*?**

c) **Quais os valores de *a* para os quais se pode construir uma pirâmide da maneira descrita?**

Entrevista para Questionário II

1) Para você o que é Geometria?

2) Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

3) Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?

4) Qual alternativa do questionário apresentou maior grau de dificuldade para você? Por quê?

5) Pelo que você observou na imagem da questão 1 (envolvendo o cubo e a pirâmide), o fato da pirâmide está quase toda encaixada no cubo ajudou ou dificultou em sua observação?

6) Na questão 1 da UFMG, envolvendo o cubo e a pirâmide, foi fácil perceber a relação matemática entre os dois sólidos? Por quê?

7) Qual característica ou elemento do cubo ou da pirâmide ajudou você a calcular o volume da pirâmide? Por quê?

8) Que aspecto da imagem, tanto das figuras geométricas como das obras de arte, permitiu a você fazer a relação entre a coluna das figuras e a das artes?

9) Na questão 2 a figura 1 (ilustração da técnica da perspectiva e do olho monocular – S' Gravesande de 1711), ajudou de alguma forma a sua análise e decisão da questão? Por quê?

10) Qual a diferença entre uma imagem em perspectiva e outra que não esta em perspectiva?

11) Na terceira questão a figura encontra-se planificada, mas o problema pede na letra b o cálculo do volume. O fato da figura geométrica está representado como uma pirâmide no espaço dificultou sua compreensão do problema?

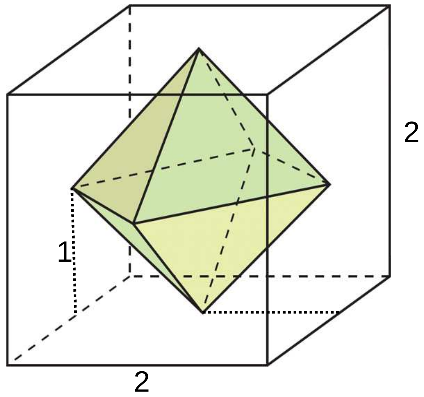
12) Qual estratégia você utilizou para calcular a área e o volume da pirâmide?

Apêndice C

QUESTIONÁRIO III (Q III) E FICHA DE ENTREVISTA III (EQ III)

Material de Coleta de Dados

1) (UFRGS) Um octaedro tem seus vértices localizados nos centros das faces de um cubo de aresta 2. Calcule a área total desse octaedro regular.



2) Maurits Cornelis Escher, nascido na Holanda em 1898, foi um artista que hoje é bastante utilizado em trabalhos de matemática envolvendo arte, pois este pintor mesmo não tendo formação específica em matemática criou verdadeiras obras de artes recheadas de conteúdo matemático. Um deles, além da questão do infinito, é a simetria muito presente em suas pinturas.

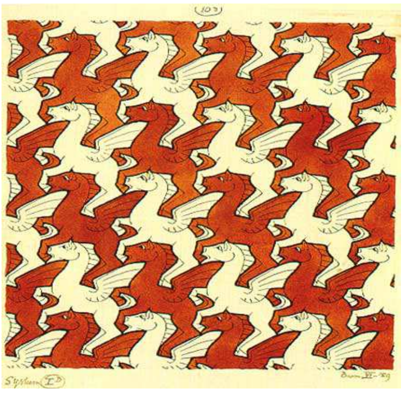
> "Para mim, permanece uma questão em aberto saber se [este trabalho] pertence ao domínio da matemática ou da arte."
>
> M. C. ESCHER

a) Uma figura geométrica plana diz-se simétrica se for possível dividi-la por uma reta, de forma que as duas partes obtidas se possam sobrepor por dobragem (Simetria Bilateral). As retas que levam a esse tipo de divisão chamam-se eixos de simetria da figura. Então, segundo estas informações você pode mostrar qual(is) das obras do pintor Escher possui essa característica.

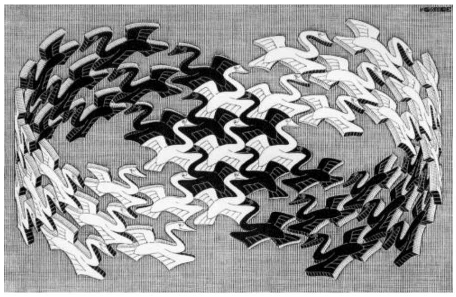
b) Mostre, também, através de uma linha ou traço o eixo de simetria identificado por você.

E1

E2



E3



E4

3) Sólido de revolução é o sólido gerado pela revolução (rotação) de uma figura plana ao redor de um eixo, por exemplo:

   - Cone: rotação de um triângulo;
   - Cilindro: rotação de um retângulo;
   - Esfera: rotação de um círculo.

a) **(ENEM – 1999) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras abaixo em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.**

A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

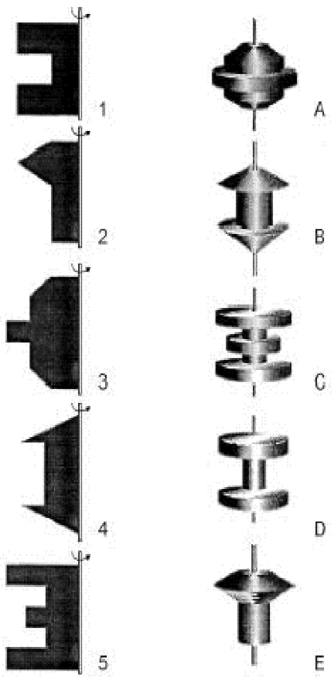
(A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.

(B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.

(C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.

(D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.

(E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.



Entrevista para Questionário III

1) Para você o que é Geometria?

2) Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

3) Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?

4) Qual alternativa do questionário apresentou maior grau de dificuldade para você? Por quê?

5) Na primeira questão uma relação entre o cubo e o octaedro de Platão, foi de alguma forma dificultosa perceber essa relação? Por quê?

6) Na primeira questão você conseguiu calcular a área do octaedro? Como?

7) Você saberia dizer qual regra esta por trás da resolução do problema do cálculo de área do octaedro? Por quê?

8) Você sabe o que é simetria para matemática? Cite um exemplo.

9) Na segunda questão envolvendo a simetria e as obras de Escher você sentiu dificuldade em perceber o eixo de simetria das imagens? Por quê?

10) O que é um sólido de revolução? Cite um exemplo.

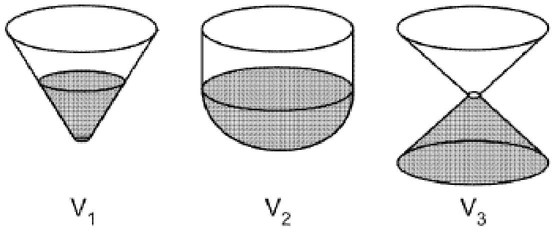
11) Na terceira questão envolvendo sólidos de revolução e a representação plana da rotação desses sólidos, você teve alguma dificuldade em estabelecer a relação entre as duas representações? Por quê?

12) Qual estratégia você utilizou para resolver a terceira questão? Descreva, por favor.

Apêndice D

QUESTIONÁRIO IV (Q IV) E FICHA DE ENTREVISTA IV (EQ IV)

1) **(ENEM – 2005) Os três recipientes da figura tem formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles e colocado liquido ate a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras**.



Representando por V1, V2 e V3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se (justifique ou mostre matematicamente sua escolha):

(A) V1 = V2 = V3

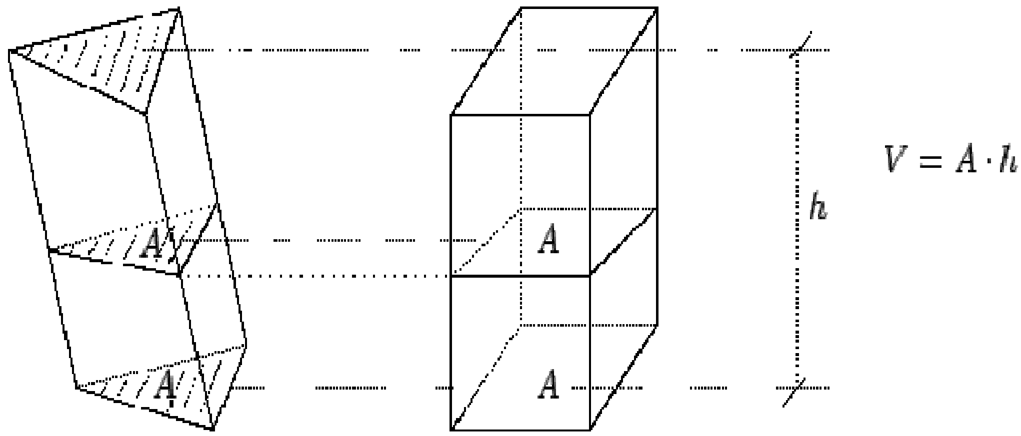
(B) V1 < V3 < V2

(C) V1 = V3 < V2

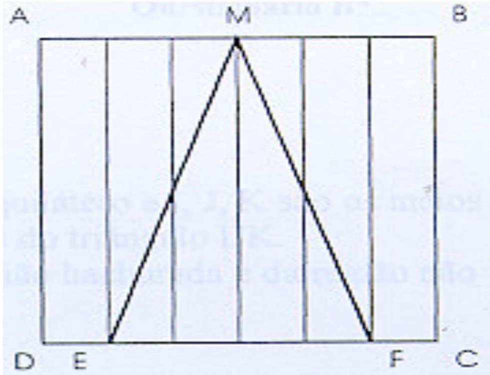
(D) V3 < V1 < V2

(E) V1 < V2 = V3

2) **As figuras abaixo estão assentadas sobre os mesmos planos da base, possuem mesma área da secção de corte transversal e mesma altura. Portanto, pela lógica de Bonaventura Cavalieri matemático italiano e discípulo de Galileu pode-se afirmar que possuem ou não mesmo volume? Justifique sua resposta.**



3) (Dissertação de Ivone Buratto – 2006/ UFSC) ABCD é um quadrado dividido em partes iguais. Mostre que as áreas AMED, MEF e MBCF são iguais. Justifique sua resposta:



Entrevista para Questionário IV

1) Para você o que é Geometria?

2) Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

3) Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?

4) Qual alternativa do questionário apresentou maior grau de dificuldade para você? Por quê?

5) Na primeira questão onde há de se estabelecer a comparação entre os volumes dos recipientes, você usou de que interpretação do olhar e/ou matemática para resolver a questão? Por quê?

6) Você já conhecia, antes de se deparar com essa situação do questionário, o princípio de Cavalieri? Saberia falar do que se trata esse princípio?

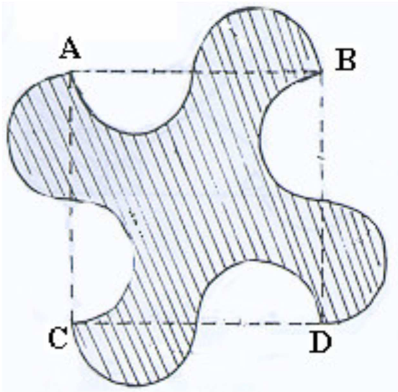
7) Na segunda questão você conseguiu perceber que ambos os prismas possuem volumes iguais por aquilo que você olhou ou pela intepretação do enunciado? De que forma?

8) Na terceira questão pediu que fizesse uma relação entre as áreas de dois trapézios e um triângulo delimitados por um retângulo. Você conseguiu responder essa questão? Se sim diga qual estratégia usou para resolver o problema, se não justifique por quê?

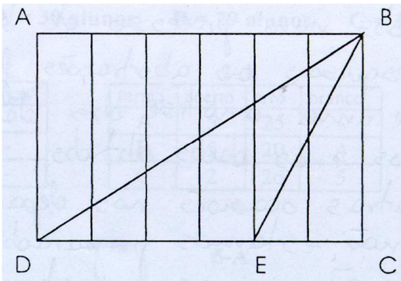
Apêndice E

QUESTIONÁRIO V (Q V) E FICHA DE ENTREVISTA V (EQ V)

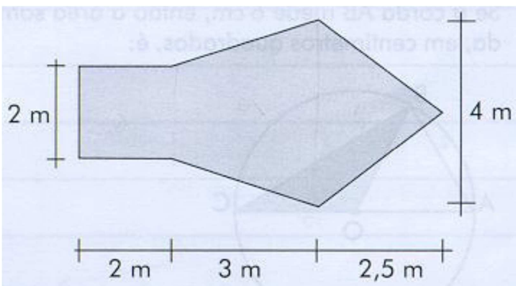
1) **(Dissertação de Ivone Buratto – 2006/ UFSC) A diagonal AD do quadrado ABCD mede raiz de 2 cm. O diâmetro de cada uma das semicircunferências na figura abaixo é igual a metade do lado do quadrado. Encontre a área da região hachurada, explique como você fez.**



2) **(Dissertação de Ivone Buratto – 2006/UFSC) Dividimos um retângulo ABCD em partes iguais. Qual é a fração da área do retângulo que representa a área do triângulo BED? Explique como você a encontrou:**



3) **(Dissertação de Ivone Buratto – 2006/UFSC) Calcule em metros quadrados, a área limitada pela figura plana. Explique como você a encontrou:**



<u>Entrevista para Questionário V</u>

1) Para você o que é Geometria?

2) Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

3) Qual(is) dificuldade(s) que você percebe em aprender Geometria no momento em que o Professor a ensina?

4) Qual alternativa do questionário apresentou maior grau de dificuldade para você? Por quê?

5) Na primeira questão o problema pede que faça o cálculo da área hachurada na figura, pelo que você pode perceber qual a principal dificuldade que encontrou na tentativa de resolver esse problema? Por quê?

6) A imagem em si permite ter ideia de imediato de se tratar de uma figura que pode ser reajustada, de tal modo que permita formar um quadrado todo preenchido pelas áreas hachurada externas ao quadrado? Por quê?

7) A segunda questão envolve um problema que solicita saber qual a parte fracionária do triângulo está inserida no retângulo, ou seja, quantas partes do triângulo correspondem a do retângulo. Qual a estratégia que você usou para tentar resolver esse problema, explique, por favor?

8) Você já estudou ou ouviu falar de decomposição, rotação ou translação de figuras geométricas? Se já o que é na sua concepção?

9) Qual foi o caminho mais fácil que você utilizou para tentar resolver a terceira questão? Descreva, por favor.

10) Num primeiro olhar sobre a figura da terceira questão dá para perceber que é uma figura geométrica composta por outras figuras e que pode ser decomposta para o cálculo de sua área? Por quê?

Apêndice F

QUADRO DE RESUMOS DE PESQUISAS REALIZADAS COM GEOMETRIA OU LINGUAGEM

Resumo de algumas pesquisas em Geometria ou Linguagem

Ano	Natureza	Autor	Título
1989	Dissertação	Regina Maria Pavanello	O Abandono do Ensino de Geometria: uma visão histórica
2000	Dissertação	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	A Interpretação da Matemática na Escola, no dizer dos alunos: ressonâncias do sentido de “dificuldade”
2000	Dissertação	Irma Verri Bastian	O Teorema de Pitágoras: uma nova abordagem para o ensino
2000	Dissertação	Nancy Cury Andraus Haruna	Teorema de Thales: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem
2001	Dissertação	Maria Regina de Oliveira	A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino
2002	Dissertação	Nelson Arbach	O ensino de geometria plana: o saber do aluno e o saber escolar
2002	Dissertação	Silvana Marini Rodrigues Lopes	Complexidade em geometria euclidiana plana
2002	Dissertação	Marcia Maioli	Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros
2003	Dissertação	João Acácio Busquini	O Significado da Demonstração Geométrica em um Curso de Licenciatura em Matemática: um estudo de caso
2003	Dissertação	Marilene Moussa Miranda	A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela educação brasileira
2003	Dissertação	Ana Lúcia Manrique	Processo de Formação de Professores em Geometria: Mudanças em Concepções e Práticas
2003	Dissertação	Sônia Regina Facco	Conceito de Área: uma proposta de ensino-aprendizagem
2004	Dissertação	Rodrigo da Silva Moreira	Um sistema de geometria dinâmica espacial
2004	Dissertação	Anderson Lopes	Avaliação em educação matemática a distância: uma experiência de geometria no ensino médio
2005	Dissertação	Cláudia Bacelar Batista	Percepção e Linguagem: A Teoria da Visão de Berkeley

Ano	Natureza	Autor	Título
2005	Tese	Eliane Portalone Crescenti	Os Professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino
2006	Dissertação	Ivone Catarina Freitas Buratto	Representação Semiótica no Ensino da Geometria: uma alternativa metodológica na formção dos professores
2006	Dissertação	Raquel Sofia Rabelo Nunes	Geometria Fractal e Aplicações
2006	Dissertação	Franciele Perego	O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática
2007	Dissertação	João Batista de Andrade	Composição e Decomposição de Figuras Geométricas Planas por Alunos do Ensino Médio
2007	Dissetação	Ricardo Soares de Menezes	Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino
2008	Dissertação	Roberto Tadeu Berro	Relações entre Arte e Matemática: um estudo da obra de Mauritis Cornelis Escher
2008	Dissertação	Beneilde de Fátima Chagas Teixeira	Geometria Perceptiva, Arte e Informática na Educação de Surdos nas Séries Iniciais
2009	Dissertação	Thatieli Meneguzzi	Os Perspectógrafos de Dürer na Educação Matemática: História, Geometria e Visualização.
2009	Dissertação	Kátia Cristina de Camargo	O ensino da geometria nas coleções didáticas em tempos do movimento da matemática moderna na capital da Bahia
2009	Dissertação	Marcelo Becker	Uma alternativa para o ensino de Geometria: Visualização geométrica e representações de sólidos no plano
2009	Dissertação	Vangiza Bortoleti Berbigier Vidalleti	Ensino e a aprendizagem da geometria espacial a partir das manipulações dos sólidos
2009	Dissertação	Ana Cristina Schirlo	Matemática Escolar – Tendências Metodológicas para o processo de ensino-aprendizagem de geometria plana

Ano	Natureza	Autor	Título
2009	Dissertação	Cinthya Bueno	Alfabetização Matemática: Manifestações de Estudantes do primeiro ciclo sobre geometria
2010	Dissertação	Charles Georges Joseph Louis Varhidy	Desenho Geométrico: uma ponte entre a álgebra e a geometria (resolução de equações pelo processo Euclidiano)
2010	Dissertação	Hellen da Silva Zago	Ensino, Geometria e Arte: um olhar para as obras de Rodrigo de Haro
2010	Dissertação	Thaís de Oliveira	Trigonometria: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos
2010	Dissertação	Antônio Marcos Haliski	Uma experiência da modelagem matemática na construção de maquete
2010	Dissertação	Cláudia Vechier	Integração da geometria dinâmica na sala de aula de matemática: uma experiência de avaliações de fontes por professores
2010	Dissertação	Wilson Roberto Soluna de Souza	Representações Planas de Figuras Tridimensionais: um estudo envolvendo visualizações
2010	Dissertação	Maria Silvia Braga Rios	A proposta de ensino da geometria nos livros do GRUEMA
2010	Tese	Orlando de Andrade Figueiredo	Sentidos de Percepção e Educação Matemática: Geometria Dinâmica e Ensino de Funções com Auxílio de Representações Dinâmicas
2010	Dissertação	Carmem Rosilene VIeira	Reinventando a geometria no ensino médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, software de geometria dinâmica e a Teoria de Van Hiele
2011	Dissertação	Luciano de Oliveira	Geometria da observação dos movimentos aparentes do Sol e aplicações
2011	Dissertação	Georges Cherry Rodrigues	Introdução ao estudo de geometria espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais
2011	Dissertação	Eliana Guimarães Szumski	A bandeira nacional na medida certa: um olhar para o ensino contextualizado de geometria

Ano	Natureza	Autor	Título
2011	Dissertação	Renato Mendes Mineiro	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional
2011	Dissertação	Manoel Francisco Barreiros	O ensino de geometria nos grupos escolares do Estado de São Paulo (1890 a 1930)
-	Artigo	Adenir Ventura	O ensino de geometria com uso de embalagens
-	Artigo	Valdir Alves da Silva	Probabilidade e Geometria: uma investigação com alunos universitários
-	Artigo	Elinaldo Coutinho Morais	A linguagem matemática na aprendizagem da média aritmética
-	Artigo	Acylena Coelho Costa	Análise do ensino de geometria
-	Artigo	Gilberto Vieira	O desenvolvimento do pensamento geométrico via resolução de problemas: uma alternativa para o ensino de geometria
-	Artigo	Regina Maria Pavanello	O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências
-	Artigo	Maria Laura Magalhães Gomes	O ensino da geometria no Brasil nas últimas décadas: da ausência à presença com prevalência das abordagens experimentais
-	Artigo	Renata Moreira da Silva	Refletindo sobre o ensino de geometria no ensino médio
-	Artigo	Maria Betânia Fernandes Vasconcelos	A contextualização como recurso para o ensino e a aprendizagem da matemática
-	Artigo	Gelsa Kjinik	“O problema são as fórmulas”: um estudo sobre os sentidos atribuídos à dificuldade em aprender matemática

Ano	Natureza	Autor	Título
-	Artigo	Cláudia Regina Flores	Olhar em Perspectiva: análise da representação do espaço e suas implicações na visualização de figuras tridimensionais no ensino de geometria
-	Artigo	Simone Semmer	Matemática e Arte
-	Artigo	Roberta Dangela Menduni Bortoloti	Uma experiência com o uso de material concreto no ensino de geometria
-	Artigo	Lenoar Eloi Cararo	Contribuições da geometria plana no aprendizado de matemática
-	Artigo	Mônica Souto da Silva Dias	O movimento na geometria: abstração ou realidade?
-	Artigo	Rose Meri de Souza Rodrigues	Os sólidos de Platão sob a visão da Teoria de Van Hiele aliada ao Origami
-	Artigo	Ivone Watermann	Geometria Projetiva no laboratório de ensino de matemática
-	Artigo	Elaine Moura dos Reis	Origami e Geometria
-	Artigo	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	“Matemática é Difícil”: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos
-	Artigo	Márica Inês Schabarum MIkuska	Uma análise do ensino de geometria no curso de formação de docentes do ensino fundamental
-	Artigo	Isabel Satico Oshima	O laboratório de ensino de matemática e a aprendizagem da geometria
-	Artigo	Maria Célia Leme da Silva	O ensino de geometria durante o movimento da matemática moderna (MMM) no Brasil: análise do arquivo pessoal de Sylvio Nepomuceno

-	Artigo	Liliane Lelis de Oliveira	O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá
Ano	Natureza	Autor	Título
-	Artigo	Paulo Knauss	O desafio de fazer História com imagens: arte e cultura visual
-	Artigo	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	Linguagem Natural e Matemática: uma experiência em um curso de licenciatura plena em matemática
-	Artigo	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	A interpretação da matemática na escola, no dizer dos alunos: ressonâncias do sentido de “dificuldade”
-	Artigo	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	O conceito em matemática e seus contextos
-	Artigo	Marco Antônio Gonçalves Júnior	Arte Contemporânea e Geometrias!? Reflexões sobre a prática
-	Artigo	Cláudia Regina Flores	A História da Perspectiva e a Visualização no ensino da matemática: laços entre a técnica, arte e olhar
-	Artigo	Marina Rabelo	A geometria plana e o software cabri-géomètre: as possibilidades de elaboração dos conceitos relacionados a área das figuras planas
-	Artigo	Kátia Luzia Picolo	Considerações sobre práticas pedagógicas com ênfase no ensino de geometria
-	Artigo	Sergio Lorenzato	Por que não ensinar geometria?
-	Artigo	Sidinei Delai	Geometrias não euclidianas
-	Artigo	Altair Baldissera	A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos

			geométricos
-	Artigo	Regina Maria Pavanello	Geometria e Construção de Conceitos Aritméticos: investigando algumas inter-relações

Ano	Natureza	Autor	Título
-	Artigo	Elielson Ribeiro de Sales	Por entre letras, números e símbolos: linguagem natural e matemática uma experiência em um curso de licenciatura plena em matemática
-	Artigo	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	Movimento Para a Ação de um Novo Conceito Matemático
-	Artigo	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	“Matemática é difícil”: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos
-	Artigo	Cláudia Regina Flores	Cultura Visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares
-	Artigo	Antônio Carlos Marangoni	Lacunas no Ensino de Geometria Euclidiana
-	Artigo	Eduardo Pereira de Santana	A dificuldade de ensinar geometria