



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**QUEBRA DINÂMICA DA SIMETRIA QUIRAL
NA PSEUDO ELETRODINÂMICA QUÂNTICA
EM (2+1) DIMENSÕES**

Walace de Sousa Elias
Orientador: Prof. Dr. Van Sérgio Alves

Belém-Pará
2011

Quebra Dinâmica da Simetria Quiral
Na Pseudo Eletrodinâmica Quântica
Em $(2 + 1)$ Dimensões

Walace de Sousa Elias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Prof. Dr. Van Sérgio Alves

Banca Examinadora

Prof. Dr. Van Sérgio Alves (Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (Membro Externo)

Prof. Dr. João Felipe Neto (Membro Interno)

Prof. Dr. Luis Carlos Bassalo Crispino (Suplente)

Belém-Pará

2011

Resumo

No presente trabalho, estudamos a quebra da simetria quiral na pseudo eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões usando o formalismo das equações de Schwinger-Dyson e investigamos as semelhanças deste modelo com a criticalidade encontrada na EDQ₃ e EDQ₄. Usando a aproximação “*quenched-rainbow*”, mostramos que existe um acoplamento crítico $\alpha_c = \frac{\pi}{16}$, acima do qual existe a geração de massa para os férmions e portanto, ocorrendo a quebra da simetria quiral. Também estudamos o caso com N campos fermiônicos usando a expansão $1/N$ na aproximação “*unquenched-rainbow*”, onde obtemos um número crítico N_c abaixo do qual a simetria quiral é quebrada e, para valores acima, a simetria é restaurada. No limite de acoplamento forte ($g \rightarrow \infty$), mostramos que este número crítico é o mesmo encontrado na EDQ₃ na expansão $1/N$.

Abstract

In the present work, we study the chiral symmetry breaking in pseudo quantum electrodynamics in (2+1) dimensions using the Schwinger-Dyson equation formalism and investigate the similarities of this model with the criticality in both QED₃ and QED₄. Using the rainbow-quenched approximation we show that there is a critical coupling $\alpha_c = \frac{\pi}{16}$ above which there is a mass generation for fermions and hence the chiral symmetry breaking occurs. We also study the N massless fermions flavors version using the $1/N$ expansion in rainbow-unquenched approximation and we obtain a critical value for the number of active fermions below which there is chiral symmetry breaking. We show that at strong gauge coupling constant ($g \rightarrow \infty$) this critical number is the same as in QED₃ in large N expansion.

*“À Etelvina, Evanice,
Thayná e Nayra.”*

*“Sua tarefa é descobrir o seu trabalho
e então, com todo o seu coração, dedicar-se a ele.”*

Buddha

Agradecimentos

- À minha família e em especial à minha mãe Evanice que sempre me apoiou incondicionalmente nesta jornada.
- Ao meu pai Marcos e sua esposa Leila que me acolheram durante o período que estive em São Paulo.
- À Nayra, minha namorada e fiel companheira.
- Ao professor Van Sérgio, pela orientação e amizade construída desde os tempos de graduação.
- Ao Instituto de Física da USP (IFUSP) e todos os alunos e funcionários do Departamento de Física Matemática (DFMA).
- Aos professores Marcelo Gomes e Adilson Silva pela colaboração neste trabalho
- Aos professores do Programa de Pós-graduação em Física da UFPA.
- Aos amigos do PPGF.
- À Universidade Federal do Pará.
- À CAPES pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta dissertação

Sumário

Introdução	9
1 Introdução à Integração Funcional na Teoria Quântica de Campos	12
1.1 Teorias de Gauge	12
1.1.1 Teorias de Gauge Abelianas	12
1.2 Integração Funcional	15
1.2.1 Bósons	15
1.2.2 Férmions	16
1.2.3 Campos de Gauge	17
1.3 As Funções de Green Conexas e a Função de Vértice	20
1.4 As Equações de Schwinger-Dyson	22
1.4.1 Equação de Schwinger-Dyson para o Fóton	23
1.4.2 Equação de Schwinger-Dyson para o Férmion	24
2 Quebra Dinâmica da Simetria Quiral na Eletrodinâmica Quântica	27
2.1 A Eletrodinâmica Quântica em (2+1) d (EDQ ₃)	27
2.1.1 As Equações de Schwinger-Dyson na EDQ ₃	29
2.1.2 EDQ ₃ na Expansão 1/N	30
2.1.3 Aproximação “ <i>quenched-rainbow</i> ”	31
2.1.4 Aproximação “ <i>unquenched-rainbow</i> ”	33
2.2 A Eletrodinâmica em (3+1) d (EDQ ₄)	36
2.2.1 Quebra da Simetria Quiral na EDQ ₄	36

3	A Pseudo Eletrodinâmica Quântica em (2+1) d (PEDQ₃)	39
3.1	O Modelo	39
3.2	As Equações de Schwinger-Dyson para PEDQ ₃	41
3.3	Solução Analítica para a Função de Massa do Férmião	44
3.4	Caso com N Férmiões não Massivos	48
3.5	Estudo Numérico para a Função de Massa $\Sigma(p)$	52
	Conclusão	55
A	Formulário	57
A.1	Matrizes de Dirac	57
A.2	Integrais Importantes	58
A.2.1	Integrais de Feynman	58
A.2.2	Integrais Regularizadas Dimensionalmente no Espaço Euclidiano . .	58
A.2.3	Integração Angular	58
B	Cálculo do Propagador do Campo de Gauge	60
C	Cálculo do Tensor de Polarização	62
	Referências Bibliográficas	64

Introdução

Nas últimas duas décadas o estudo de algumas propriedades de partículas se movendo no plano tem sido estudadas extensivamente. Parte deste interesse se deve a descoberta do efeito Hall quântico [1] e a supercondutividade em altas temperaturas [2]. Em particular, teorias de gauge com simetrias $U(1)$ ou $U(N)$ - como a eletrodinâmica quântica em três dimensões (EDQ₃) - possuem similaridades com a cromodinâmica quântica, tais como quebra de simetria quiral e confinamento [3 - 15]. O estudo do comportamento crítico da eletrodinâmica quântica em três e quatro dimensões tem sido investigado para verificar a quebra da simetria quiral (ou paridade), quando os férmions sem massa adquirem massa gerada dinamicamente. Este é um efeito não perturbativo e as equações de Schwinger-Dyson (SD) [16, 17] para a auto-energia do férmion são mais apropriadas para analisar a transição de fase [18].

Na eletrodinâmica quântica em quatro dimensões (EDQ₄), para férmions sem massa, Johnson, Baker e Wiley [19], estudaram a teoria na aproximação “*quenched*” (sem correções do “*loop*” fermiônico), e obtiveram soluções para as equações de SD da auto-energia dos férmions. No entanto, estas soluções não representavam quebra da simetria quiral ou de simetria de escala [20]. Maskawa e Nakajima [21] estudaram a teoria usando um “*cut-off*” finito, Λ . Eles mostraram que no regime de acoplamento fraco, $\alpha < \alpha_c = \pi/3$, não existe quebra de simetria quiral (ou escala) e todas as soluções não triviais para a auto-energia dos férmions neste regime, exigia férmions massivos de partida, que se anula no limite contínuo $\Lambda \rightarrow \infty$. Fukuda e Kugo [22] analisaram em detalhes as soluções das equações de SD, tanto no regime fraco quanto no regime de acoplamento forte, e mostraram que na situação sem massa, a quebra da simetria quiral ocorre apenas se $\alpha > \alpha_c = \pi/3$, levando à geração de massa para os férmions. Cohen e Georgi [23], basea-

dos no fato de que existe um acoplamento crítico associado com a quebra de simetria quiral em teorias de gauge, tiveram uma interpretação interessante para as soluções da equação diferencial não linear vinda das equações de SD.

No contexto da EDQ₃ sem massa, com N campos fermiônicos, quando tratada na ordem dominante da expansão $1/N$, conjecturou-se a existência de um valor crítico para o número de férmions ($N_c = 32/\pi^2 \approx 3.2$) abaixo do qual, ocorre a quebra de simetria quiral [5, 9]. Simulações numéricas na rede mostrou que $3 < N_c < 4$ [24]. Correções de ordem superior na expansão $1/N$ mostram que o número crítico não altera qualitativamente os resultados obtidos [11]. Resultados similares usando diferentes tipos de vértices de interação, incluindo aqueles que satisfazem as identidades de Ward-Takahashi [12, 14, 25, 26], mostraram que existe um número crítico N_c na EDQ₃ no qual, para valores de N abaixo de N_c , os férmions adquirem massa e a quebra de simetria quiral ocorre. No entanto, a existência deste número crítico não é aceito por alguns autores que sugerem a quebra de simetria quiral para todos os valores de N na EDQ₃ sem massa [4, 27]¹. Aparentemente, esta é uma questão em aberto.

Deve-se notar que na EDQ₃, todos os resultados foram obtidos utilizando o fato de que o campo eletromagnético está vinculado ao plano. No entanto, apesar dos movimentos dos elétrons estarem confinados no plano, o campo eletromagnético através do qual eles interagem não está sujeito a este vínculo. Este fato, nos permite investigar uma ampla variedade de situações, incluindo a exigência de que o potencial eletrostático entre dois elétrons em um plano deva ser coulombiano ($\propto 1/r$) e não logarítmico, como acontece na EDQ₃. Formalmente, pode-se obter tal teoria, no espaço euclidiano, modificando o termo de Maxwell $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ por $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2/(-\square)^{1/2}$, que reproduz a interação de duas partículas carregadas movendo-se sobre um plano. Marino [28] obteve a partir de primeiros princípios, uma descrição de tal sistema eletrônico que se move no plano, porém a interação era descrita como de partículas em um espaço-tempo quadridimensional. A quantização desta teoria (pseudo eletrodinâmica quântica) foi estudada nas referências [29, 30] e os resultados mostraram que apesar da não localidade no de termo de Maxwell, a causalidade é respeitada e as funções de Green são bem definidas. Neste cenário, o novo termo

¹Veja a referência [14]

de Maxwell faz com que a dimensão canônica do campo de gauge seja igual a um, em unidades de massa. Portanto, se acoplarmos minimamente o campo de gauge com um campo de matéria fermiônico, a constante de acoplamento se torna adimensional. Assim, na contagem de potência usual [16, 31], a pseudo eletrodinâmica quântica (PEDQ₃), assemelha-se mais com EDQ₄ do que EDQ₃. Por outro lado, como estamos trabalhando em $(2 + 1)$ d, esperamos que a teoria construída a partir da modificação do termo de Maxwell tenha propriedades remanescentes da EDQ₃.

A proposta desta dissertação será estudar a quebra da simetria quiral na PEDQ₃, através da geração dinâmica de massa para os férmions e investigar as similaridades deste modelo com a criticalidade, tanto na EDQ₃ quanto na EDQ₄. Tal investigação será realizada, utilizando o formalismo das equações de SD para os propagadores dos férmions e do campo de gauge. Este trabalho está organizado da seguinte forma: (i) No capítulo 1, uma revisão sobre as técnicas da integração funcional aplicada à teoria quântica de campos será realizada, de modo que conseguiremos construir as equações de SD para a EDQ e para PEDQ; (ii) no capítulo 2, discutiremos e apresentaremos os principais resultados encontrados na literatura sobre a quebra de simetria quiral na EDQ₃ e EDQ₄; (iii) no capítulo 3, apresentaremos a PEDQ₃ e verificaremos a possibilidade de ocorrer a quebra de simetria quiral para os férmions através da solução encontrada para as equações de SD da auto-energia dos férmions.

Os três apêndices estão dispostos nesta dissertação, para uma melhor explicação e apresentação de alguns pontos contidos, sendo eles: (i) no apêndice A encontram-se algumas propriedades das matrizes de Dirac no espaço euclidiano, bem como uma lista de algumas integrais importantes que serão usadas neste trabalho; (ii) no apêndice B será calculado o propagador do campo de gauge, no espaço euclidiano, na PEDQ₃ através do formalismo da integração funcional; (iii) no apêndice C será apresentado o cálculo do tensor de polarização, também no espaço euclidiano.

Por último, nas conclusões, apresentaremos um resumo dos principais resultados obtidos nesta dissertação, assim como as referências utilizadas na realização do mesmo.

Capítulo 1

Introdução à Integração Funcional na Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo discutiremos a integração funcional aplicada à teoria quântica de campos. Este formalismo dará possibilidades de discutirmos as equações de Schwinger-Dyson para os férmions e o fóton na eletrodinâmica quântica e na pseudo eletrodinâmica quântica.

1.1 Teorias de Gauge

Teorias de gauge, também chamadas de teorias de calibre, representam uma classe de teorias baseadas na idéia de que as transformações de simetria possam ser locais ou globais. Muitas teorias são descritas por lagrangianas que são invariantes sob determinados grupos que representam uma simetria. Quando tais lagrangianas são invariantes sob uma transformação na qual o parâmetro da transformação independe das coordenadas do espaço-tempo, dizemos que a simetria é global, caso contrário, dizemos que a simetria é local.

1.1.1 Teorias de Gauge Abelianas

A teoria mais simples de gauge não-trivial que podemos construir é uma obedecendo a uma transformação abeliana. Consideremos então, a teoria de Dirac livre de interações descrita pela densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi, \quad (1.1)$$

onde sabemos que a (1.1) é invariante pela transformação global ($\alpha = \text{cte.}$),

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Assumindo que o parâmetro α seja substituído agora por um parâmetro que dependa da posição, isto é, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$, a simetria antes global passará a ser uma simetria local. Ou seja,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

e dessa forma, o termo cinético em (1.1) se transformará da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\{\partial_\mu\alpha(x)\}\psi(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Assim, a lagrangiana (1.1) será escrita após a transformação (1.3) como

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - i\bar{\psi}(x)\{\partial_\mu\alpha(x)\}\psi(x), \quad (1.5)$$

sendo esta não mais invariante. Para restaurarmos a invariância da simetria (1.3), devemos introduzir a noção de derivada covariante, D_μ , onde substituiremos a derivada ordinária ∂_μ por

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (1.6)$$

onde e representa a carga do campo de matéria $\psi(x)$, e portanto, a combinação $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ será agora um invariante sobre a transformação (1.3). Em outras palavras, a ação da

derivada covariante no campo fermiônico não mudará a propriedade de transformação. Isto pode ser realizado, se adicionarmos lagrangiana (1.1) um novo campo vetorial $A_\mu(x)$, chamado de campo de gauge.

Com a introdução deste novo campo na teoria, a lei de transformação para a derivada covariante (1.6), será satisfeita se o campo de gauge tiver a seguinte transformação,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (1.7)$$

Reescrevendo (1.1), teremos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - eA_\mu)\psi - M\bar{\psi}\psi. \quad (1.8)$$

Para tornar o campo de gauge A_μ um campo físico da teoria, devemos adicionar à equação (1.8) o termo cinético que representa a dinâmica do campo A_μ . O termo mais simples e invariante de gauge pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

onde o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ é antisimétrico na troca $\mu \leftrightarrow \nu$ e podendo ser escrito como¹

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}. \quad (1.10)$$

Facilmente, percebemos que se substituirmos (1.7) em $F_{\mu\nu}$, veremos que o mesmo é um invariante de gauge. Se combinarmos (1.8) com (1.9), teremos a lagrangiana de uma teoria de gauge abeliana não-trivial, a eletrodinâmica quântica (EDQ)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - eA_\mu)\psi - M\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

A seguir, discutiremos a respeito da integração funcional aplicada à teoria quântica de campos.

¹Na forma matricial o tensor $F^{\mu\nu}$ pode ser representado por uma matriz $d \times d$, onde d é a dimensão do espaço-tempo, cujos elementos são as componentes dos campos elétrico e magnético [32].

1.2 Integração Funcional

Uma dada teoria de campos é completamente caracterizada por suas funções de Green [32]. No formalismo da integração funcional², pode-se calculá-las através do funcional gerador das funções de Green, $Z[J]$. Para uma dada teoria de campo, o funcional gerador é definido por

$$Z[J] = \rho \int D\phi e^{iS+i \int d^d x J\phi}, \quad (1.12)$$

onde ρ é uma constante determinada pela condição de normalização $Z[J=0] = 1$, ϕ o campo clássico arbitrário, J a fonte clássica do campo ϕ e S a ação clássica dada por,

$$S = \int d^d x \mathcal{L}. \quad (1.13)$$

As funções de Green de n -pontos, no espaço das coordenadas, são determinadas quando tomamos n derivadas funcionais de (1.12) [32], ou seja,

$$\langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-i)^n}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}. \quad (1.14)$$

Veremos a seguir como podemos obter os propagadores (função de Green de 2 pontos) de algumas teorias conhecidas usando este formalismo.

1.2.1 Bósons

Considerando a teoria do campo escalar real como exemplo, descrita pela densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (1.15)$$

podemos, a princípio, calcular quaisquer funções de Green da mesma. Usando (1.15) em (1.12), encontramos

$$Z[J] = \rho \int D\phi e^{\frac{i}{2} \int d^d x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) + i \int d^d x J(x) \phi}, \quad (1.16)$$

²Neste capítulo discutiremos a integração funcional em um espaço-tempo em d dimensões.

e realizando a integração [32] no campo ϕ , temos,

$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2} \int J \hat{K}^{-1} J}, \quad (1.17)$$

onde $\hat{K} = (\partial^2 + m^2)$. Para determinarmos a função de Green de dois pontos, usamos a definição (1.14) tomando $n = 2$ e assim,

$$\langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-i)^2}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = -i \hat{K}^{-1}. \quad (1.18)$$

Para visualizarmos melhor o significado desta expressão, iremos levá-la ao espaço dos momentos, considerando que

$$\partial_\mu \longrightarrow -ip_\mu, \quad (1.19)$$

e com isso, a equação (1.18) poderá ser reescrita da seguinte maneira,

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad (1.20)$$

representando o propagador livre do campo escalar real.

1.2.2 Férmions

No caso de campos fermiônicos, definimos o funcional gerador das funções de Green como,

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \rho \int D\bar{\psi} D\psi e^{iS[\bar{\psi}, \psi] + i \int d^d x (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta)}, \quad (1.21)$$

onde agora tanto os campos fermiônicos $\bar{\psi}$ e ψ , quanto as fontes $\bar{\eta}$ e η , são denominadas variáveis de Grassmann³. Se considerarmos a teoria de Dirac descrita por,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi, \quad (1.22)$$

o funcional gerador será dado por

³Para mais detalhes ver [32].

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \rho \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ iS[\bar{\psi}, \psi] + i \int d^d x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right\}. \quad (1.23)$$

Usando que,

$$\int D\bar{\psi} D\psi e^{[\bar{\psi}a\psi - \bar{b}\psi - \bar{\psi}b]} = e^{-\bar{b}a^{-1}b} \det a,$$

pode-se mostrar que o funcional gerador será escrito como

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = e^{-i \int d^d x d^d y \bar{\eta}(x) S_F^{-1}(x-y) \eta}, \quad (1.24)$$

sendo $S_F^{-1}(x-y) = (i\cancel{\partial} - M)^{-1}$. Portanto, a função de Green de dois pontos para o campo fermiônico será dada por,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-i)^2}{Z[0, 0]} \frac{\delta^2 Z[\bar{\eta}, \eta]}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \eta(x_2)} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = iS_F^{-1}(x_1 - x_2), \quad (1.25)$$

e no espaço dos momentos, esta expressão poderá ser escrita como,

$$S_F(p) = \frac{i}{\cancel{p} - M}, \quad (1.26)$$

onde utilizamos a relação

$$p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu.$$

A equação (1.26) representa a função de Green de 2 pontos para os férmions.

1.2.3 Campos de Gauge

Para uma teoria contendo apenas campos de gauge, o funcional gerador será dado por,

$$Z[J] = \rho \int DA_\mu e^{iS[A_\mu] + \int d^d x J_\mu(x) A^\mu(x)}, \quad (1.27)$$

com

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^d x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^d x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x), \quad (1.28)$$

onde na última passagem eliminamos o termo de superfície. Análogamente ao que foi feito para o campo escalar e o campo fermiônico, podemos realizar uma integração gaussiana na equação (1.27). No entanto, isto não é possível uma vez que o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu$ que aparece na equação (1.28), não possui inverso [32]. Para demonstrarmos essa afirmação, vamos supor que $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ possua um operador inverso $\mathcal{O}_{\nu\beta}^{-1}$, tal que

$$(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)(\mathcal{O}_{\nu\beta})^{-1}(x-y) = \delta_\beta^\mu\delta^d(x-y). \quad (1.29)$$

Usando a transformada de Fourier,

$$\mathcal{O}_{\nu\beta}^{-1}(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik(x-y)} \tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}(k),$$

temos

$$(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}(k) = \delta_\beta^\mu. \quad (1.30)$$

Se usarmos a seguinte decomposição para o operador inverso $\tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}(k)$,

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}(k) = a(k^2)g_{\nu\beta} + b(k^2)k_\nu k_\beta,$$

vemos claramente a partir de (1.30), que o termo $a(k^2)(k^2 g_\beta^\mu - k^\mu k_\beta)$ não pode ser igual à δ_β^μ , o que nos leva concluir que $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ não possui inverso. Esse problema foi resolvido através da introdução do determinante de Faddeev-Popov [32 - 36]. Historicamente, este surgiu pela primeira vez em conexão com a quantização correta de teorias de calibre não-abelianas [34]. O efeito deste procedimento em uma teoria de gauge, é simplesmente introduzir um termo de fixação de gauge, ou seja, reescrever a lagrangiana como

$$S[A_\mu] \rightarrow S[A_\mu]_\xi = \int d^d x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right), \quad (1.31)$$

onde ξ é o parâmetro de fixação de gauge. Usando (1.31), é possível determinar com facilidade a função de dois pontos para o campo de gauge A_μ . O funcional gerador é então escrito como sendo,

$$Z[J^\mu] = \rho \int DA_\mu e^{i \int d^d x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) + i \int d^d x J^\mu A_\mu}, \quad (1.32)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é dado pela equação (1.10). A seguir, podemos reescrever a equação (1.32), após eliminarmos o termo de superfície, como

$$Z[J^\mu] = \rho \int DA_\mu e^{i \int d^d x \frac{1}{2} A_\mu (g^{\mu\nu} \partial^2 - (1-\xi) \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu + i \int d^d x J^\mu A_\mu}. \quad (1.33)$$

Realizando uma integração gaussiana em (1.33) e chamando $\mathcal{O}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \partial^2 - (1-\xi) \partial^\mu \partial^\nu$, temos que

$$Z[J^\mu] = e^{-\frac{i}{2} \int d^d x J^\mu \mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1} J^\nu}, \quad (1.34)$$

com $\mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1}$ podendo ser determinado, usando que,

$$(g^{\mu\nu} \partial^2 - (1-\xi) \partial^\mu \partial^\nu) \mathcal{O}_{\nu\beta}^{-1}(x-y) = \delta_\beta^\mu \delta^d(x-y). \quad (1.35)$$

Usando a transformada de Fourier,

$$\mathcal{O}_{\nu\beta}^{-1}(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik(x-y)} \tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}(k),$$

e a seguinte decomposição para $\tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}$,

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\nu\beta}^{-1}(k) = a(k^2) g_{\nu\beta} + b(k^2) k_\nu k_\beta,$$

encontramos que os coeficientes $a(k^2)$ e $b(k^2)$ são dados por,

$$a(k^2) = -\frac{1}{k^2}, \quad (1.36)$$

e

$$b(k^2) = \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \frac{1}{k^4}. \quad (1.37)$$

Uma vez determinado $\mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1}$, a função de Green de dois pontos será dada por,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-i)^2}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^\mu(x_1) \delta J^\nu(x_2)} \Big|_{J=0} = i \mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1}. \quad (1.38)$$

Assim, indo para o espaço dos momentos, a função de dois pontos para o campo de gauge será dada por,

$$G^{(2)}(k) \equiv \Delta^{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right), \quad (1.39)$$

sendo este o propagador de Feynman para o campo A_μ .

1.3 As Funções de Green Conexas e a Função de Vértice

Uma quantidade interessante no estudo da integração funcional e com importância relevante nos cálculos em teoria quântica de campos, são as funções de Green conexas. Esta classe de funções geram o que chamamos de diagramas de Feynman conexas, sendo estes os diagramas utilizados nos cálculos da matriz-S [32]. Um diagrama é dito conexo se ele não for a união de dois ou mais diagramas disjuntos, em outras palavras, se ele não puder ser dividido em sub-diagramas iguais. O funcional gerador das funções de Green conexas, $W[J]$, está relacionado com o funcional gerador das funções de Green $Z[J]$, através da relação [32],

$$W[J] = \ln Z[J], \quad (1.40)$$

de onde vemos que

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (1.41)$$

De maneira semelhante, para a função de dois pontos, temos que

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} + \left(\frac{\delta W}{\delta J(x_1)} \frac{\delta W}{\delta J(x_2)} \right). \quad (1.42)$$

Generalizando, podemos escrever [32]

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = \sum \frac{\delta^{n_1} W}{\delta J(x_{i_1}) \dots \delta J(x_{i_{n_1}})} \dots \frac{\delta^{n_p} W}{\delta J(x_{i_p}) \dots \delta J(x_{i_{n_p}})}. \quad (1.43)$$

Uma vez conhecido $w[J]$, podemos obter o funcional gerador das funções de vértice, $\Gamma(\varphi_{cl})$, fazendo uma transformação de Legendre. Se definirmos um campo clássico, φ_{cl} , de modo que

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = i\varphi_{cl}, \quad (1.44)$$

e quando fizermos $J = 0$, φ_{cl} será igual ao valor esperado no vácuo do campo quântico. Teremos portanto,

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = W[J] - i \int J(x)\varphi(x) d^d x. \quad (1.45)$$

Dessa definição vemos,

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_{cl}]}{\delta \varphi_{cl}(y)} = -iJ(y). \quad (1.46)$$

Para mostrar que $\Gamma(\varphi_{cl})$ é o funcional gerador das funções de vértice, iremos inicialmente considerar os *núcleos* das funções de dois pontos especificados por

$$\bar{\Gamma}^{(2)}(y_2, y_1) \equiv \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_{cl}(y_2) \delta \varphi_{cl}(y_1)} = -i \frac{\delta J(y_1)}{\delta \varphi_{cl}(y_2)} \quad (1.47)$$

e

$$G^{(2)}(x_2, x_1) \equiv \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = -i \frac{\delta \varphi_{cl}(y_2)}{\delta J(y_1)}. \quad (1.48)$$

Para $J = 0$, $G^{(2)}(x_2, x_1)$ coincide com a função de Green conexa de dois pontos. Das equações (1.47) e (1.48) vem que $\bar{\Gamma}^{(2)} = -[G^{(2)}]^{-1}$ no sentido de convolução, isto é,

$$\int d^d y \bar{\Gamma}^{(2)}(y_2, y) G^{(2)}(y, x_2) = -\delta^d(x_2 - y_2). \quad (1.49)$$

Fazendo na equação acima $J = 0$, vemos que $\bar{\Gamma}^{(2)}(y_2, y)$ coincide com a função de vértice de dois pontos.

No caso de uma teoria contendo diferentes campos⁴, como por exemplo a EDQ, a função de vértice $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$ será definida como,

⁴Iremos omitir o índice *cl* nos campos por questão de simplificação de agora em diante.

$$\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J^\mu] - i \int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu(x)A_\mu(x)) d^d x, \quad (1.50)$$

e a partir de (1.50), definimos as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(y)} &= -iJ^\mu(y), & \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)} &= -i\eta(y), & \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(y)} &= i\bar{\eta}(y), \\ \frac{\delta W}{\delta J^\mu(y)} &= iA_\mu(y), & \frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}(y)} &= i\psi(y), & \frac{\delta W}{\delta\eta(y)} &= -i\bar{\psi}(y). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Mais adiante retornaremos a utilizar estas expressões.

1.4 As Equações de Schwinger-Dyson

As equações de Schwinger-Dyson são baseadas no fato de que a integral funcional de uma derivada total é nula, ou seja

$$\int D[\varphi] \frac{\delta Z[\varphi]}{\delta\varphi} \equiv 0. \quad (1.52)$$

Embora esta afirmação pareça trivial do ponto de vista da análise funcional, ela produz relações não triviais entre os funcionais geradores em teoria quântica de campos [32].

Se usarmos isso no contexto de uma teoria escalar, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= \int D[\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi} \exp \left\{ iS[\varphi] + i \int d^d x J(x)\varphi(x) \right\} \\ &= \int D[\varphi] i \left[\frac{\delta S}{\delta\varphi} + J \right] \exp \left\{ iS[\varphi] + i \int d^d x J(x)\varphi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Em termos do funcional gerador, esta equação pode ser escrita como

$$\left(\frac{\delta}{\delta\varphi} S \left[-i \frac{\delta}{\delta J} \right] + J \right) Z[J] = 0, \quad (1.54)$$

Esta é a relação de Schwinger-Dyson. A partir desta, podemos tomar um número qualquer de derivadas funcionais com relação ao campo, e obter inúmeras equações integrais envolvendo diferentes funções de Green.

1.4.1 Equação de Schwinger-Dyson para o Fóton

Para determinarmos a equação de Schwinger-Dyson para o fóton, partimos do fato que,

$$\left[\frac{\delta S}{\delta A^\mu(x)} \left(\frac{\delta}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{\delta \eta} \right) + J_\mu(x) \right] Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0, \quad (1.55)$$

onde

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \rho \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^d x \left\{ \bar{\psi}(i\partial - eA_\mu)\psi - M\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + A_\mu J^\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right\}}, \quad (1.56)$$

e portanto,

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu(x)} = [\square g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (1.57)$$

Nossa estratégia, será reescrever a equação (1.55) em termos da função de Green conexa $W[J_\mu, \bar{\eta}, \eta]$ (equação 1.40) e então, escrever uma expressão para $\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$. Dessa maneira, encontramos⁵ que

$$J_\mu(x) + [\square g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\partial_\mu\partial_\nu] \frac{\delta W}{\delta J_\nu} - e \frac{\delta W}{\delta \eta_\alpha} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\beta} - e \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha} \left((\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\beta} \right) = 0. \quad (1.58)$$

Assim, usando as relações (1.51) para escrever em termos de $\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$, e tomando os campos fermiônicos iguais a zero, encontramos

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=0} = [\square g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu - ie Tr \left[\gamma_\mu \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \right)^{-1} (x, x) \right], \quad (1.59)$$

onde o último termo na equação (1.59) é proporcional ao propagador do elétron. Como estamos interessados na função de dois pontos do campo de gauge, tomaremos mais uma derivada com relação ao campo A_μ em um ponto diferente, isto é,

⁵Observe que na equação (1.57), devemos escrever os campos em termos das derivadas funcionais com relação às fontes, descritas pela relação (1.51).

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta A^\nu(y)} \Big|_{\psi=\bar{\psi}=A_\mu=0} &= [\square g_{\mu\nu} - (1-\xi) \partial_\mu \partial_\nu] \delta^d(x-y) \\ &+ ie^2 \int d^3u d^3v Tr [\gamma_\mu S_F(x,u) \Lambda_\nu(y,u,v) S_F(v,x)], \end{aligned} \quad (1.60)$$

onde usamos a seguinte definição para a função de vértice

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta \bar{\psi}(y) \delta \psi(z)} \Big|_{A_\mu=\psi=\bar{\psi}=0} = e \Lambda_\mu(x,y,z), \quad (1.61)$$

e usamos ainda, a fórmula para calcular a derivada de uma matriz inversa,

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu} \mathcal{I}^{-1} = -\mathcal{I}^{-1} \frac{\delta}{\delta A_\mu} \mathcal{I}^{-1}.$$

O segundo termo na equação (1.60), representa o tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}$, e a operação de traço será sobre todas as matrizes de Dirac e os índices de simetria. Assim, a equação de SD para o campo de gauge será, no espaço das coordenadas,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{-1}(x-y) &= [\square g_{\mu\nu} - (1-\xi) \partial_\mu \partial_\nu] \delta^d(x-y) \\ &+ ie^2 \int d^3u d^3v Tr [\gamma_\mu S_F(x,u) \Gamma_\nu(y,u,v) S_F(v,x)]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

e reescrevendo no espaço dos momentos, temos que

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = \Delta_{\mu\nu}^0{}^{-1}(p) + ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr [\gamma_\mu S_F(k) \Gamma_\nu(k,k-p) S_F(k-p)], \quad (1.63)$$

sendo $\Delta_{\mu\nu}^0{}^{-1}(p)$ o propagador livre para o campo de gauge. A equação (1.63) é a equação de SD para a função de Green de dois pontos para o campo de gauge na EDQ. Para a PEDQ, a equação de SD para o campo de gauge será idêntica à equação (1.63), porém com o propagador $\Delta_{\mu\nu}$ modificado, como veremos adiante.

1.4.2 Equação de Schwinger-Dyson para o Férmion

Para construirmos a equação de SD para a função de dois pontos dos férmions na EDQ, devemos tomar a derivada com relação a $\bar{\psi}(x)$, isto é,

$$\left[\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x)} \left(i \frac{\delta}{\delta \eta}, -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, -i \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right) + \eta(x) \right] Z[\bar{\eta}, \eta, J^\mu] = 0.$$

com $Z[\bar{\eta}, \eta, J^\mu]$ dado por (1.56). Portanto, encontramos que

$$\left[\eta(x) + \left(i \not{\partial} - M - e \gamma^\mu (-i) \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) (-i) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right] Z[\bar{\eta}, \eta, J^\mu] = 0. \quad (1.64)$$

Como estamos interessados na função de dois pontos, derivamos com relação a η e fazemos $\eta = \bar{\eta} = 0$, ou seja⁶,

$$\delta^d(x-y) Z[J^\mu] - \left[i \not{\partial} - M - e \gamma^\mu (-i) \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right] Z[J^\mu] S(x-y; J^\mu) = 0, \quad (1.65)$$

onde $S(x-y; J^\mu)$, descreve uma propagação na presença de uma fonte J^μ . Usando as relações (1.51), podemos escrever a equação (1.65) como

$$\delta^d(x-y) - \left[i \not{\partial} - M - e \not{A}(x; J^\mu) - e \gamma^\mu (-i) \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right] S(x-y; J^\mu) = 0. \quad (1.66)$$

Na equação (1.66) a diferenciação com relação à fonte J^μ pode ser realizada [32], e encontramos (colocando todas as fontes iguais a zero)

$$(-i) \frac{\delta}{\delta J^\mu} S(x-y; J^\mu) = -ie \int d^d z d^d u d^d w \Delta_{\mu\nu}(x, z) S_F(x-w) \Lambda_\nu(u, w, z) S_F(w, y). \quad (1.67)$$

Retornando à equação (1.66), considerando todos os campos externos iguais a zero, multiplicando ambos os lados por $S_F^{-1}(y, y')$ e realizando a integração com relação à variável y' , encontramos que

$$S_F^{-1}(x-y) = - (i \not{\partial} - M) \delta^d(x-y) - ie^2 \int d^d z d^d u \Delta_{\mu\nu}(x-z) \gamma^\mu S_F(x-u) \Gamma^\nu(u, y; z). \quad (1.68)$$

Esta é a equação de SD para o propagador do férmion da EDQ no espaço das coordenadas. Realizando uma transformação de Fourier usual, encontramos a equação no espaço dos momentos, isto é,

$$S_F^{-1}(p) = \not{p} - M - \frac{ie^2}{(2\pi)^d} \int d^d k \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu(k, p; k-p) \Delta_{\mu\nu}(k-p). \quad (1.69)$$

⁶Por questão de simplificação, iremos adotar a seguinte notação $Z[J^\mu, 0, 0] = Z[J^\mu]$.

É interessante comentar, que determinamos a equação de SD no espaço de Minkowski, porém pode-se facilmente determiná-la no espaço euclidiano, realizando uma rotação de Wick⁷. Para a pseudo eletrodinâmica quântica, a equação de SD é idêntica à equação (1.69) com o propagador do campo de gauge sendo diferente.

⁷A rotação de Wick consiste em efetuar uma continuação analítica na componente temporal, tal que $p_0 \rightarrow -ip_4$ e portanto $p^2 \rightarrow -p_E^2$ [32].

Capítulo 2

Quebra Dinâmica da Simetria Quiral na Eletrodinâmica Quântica

2.1 A Eletrodinâmica Quântica em (2+1) d (EDQ₃)

Eletrodinâmica quântica em três dimensões (EDQ₃) é um modelo teórico ideal para testar idéias que possam ser relevantes ou úteis na cromodinâmica quântica (QCD), tais como geração dinâmica de massa e confinamento [6, 35]. Além disso, é uma teoria super-renormalizável e por isso não sofre com divergências ultravioletas [6], como acontece na eletrodinâmica quântica em quatro dimensões (EDQ₄). A sua constante de acoplamento, e , possui dimensão canônica dada por $[e] = \frac{1}{2}$ em unidades de massa, fornecendo assim, uma escala de massa intrínseca mesmo se considerarmos a teoria não massiva.

Uma das propriedades interessantes da EDQ₃ na ausência da contribuição do “loop” fermiônico para o tensor de polarização do fóton, isto é, na aproximação “quenched”, é que ela exhibe confinamento [36]. Podemos ver este resultado, de modo heurístico, se definirmos um potencial clássico $V(x)$ entre dois elétrons, como sendo

$$V(x) = e^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}\cdot x} \frac{1}{|\vec{q}|^2 [1 + \Pi(|\vec{q}|^2)]}, \quad (2.1)$$

onde $\Pi(|\vec{q}|^2)$ é a contribuição vinda da parcela transversal do tensor de polarização de vácuo.

Na aproximação “quenched”, obtemos

$$V(x) = -\frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(|\vec{q}||x|)}{|\vec{q}|} dq. \quad (2.2)$$

Resolvendo a integral acima¹ [37], encontramos que o potencial clássico $V(x)$ possui um comportamento logarítmico [3], ou seja,

$$V(x) = \frac{e^2}{2\pi} \ln(e^2|x|). \quad (2.3)$$

Este potencial aumenta com a distância, revelando assim o comportamento confinante para a teoria. No limite em que $|x| \rightarrow \infty$, vemos que $V(x) \rightarrow \infty$ e portanto, não existirá férmions livres no infinito [3].

Ao considerarmos o efeito de polarização de vácuo para férmions sem massa, o potencial eletrostático perde a sua propriedade de confinamento [4]. Num processo semelhante ao que fizemos para o potencial clássico na equação (2.1), encontramos

$$V(x) = -\frac{e^2}{4}[H_0(\tilde{\alpha}x) - N_0(\tilde{\alpha}x)], \quad \tilde{\alpha} = \frac{Ne^2}{8} \quad (2.4)$$

onde $H_0(x)$ é a função de Struve² e $N_0(x)$ é a função de Neumann. A partir da equação (2.4), vemos que

$$V(x) \sim \begin{cases} \log[\tilde{\alpha}x] & \text{com } x \ll 1 \\ \frac{e^2}{2\pi} \frac{1}{\tilde{\alpha}x} & \text{com } x \gg 1, \end{cases} \quad (2.5)$$

sendo agora a teoria não mais confinante. Na figura 2.1, está representado graficamente os potenciais das equações (2.3) e (2.4).

A EDQ₃ é descrita pela densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + ieA_\mu)\psi - M\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.6)$$

onde ψ e $\bar{\psi}$ são os campos de férmions, A_μ é o campo eletromagnético, e a constante de acoplamento. O tensor $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell usual dado por (1.10). Ao estudarmos

¹Podemos realizar a integração em (2.2) calculando a derivada com relação a x , isto é, $dV(x)/dx = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty J_1(|\vec{q}||x|) dq = \frac{e^2}{2\pi} \frac{1}{x}$.

²A função de Struve [37], denotada por $H_\nu(x)$, é definida como $H_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+\nu+3/2)}$.

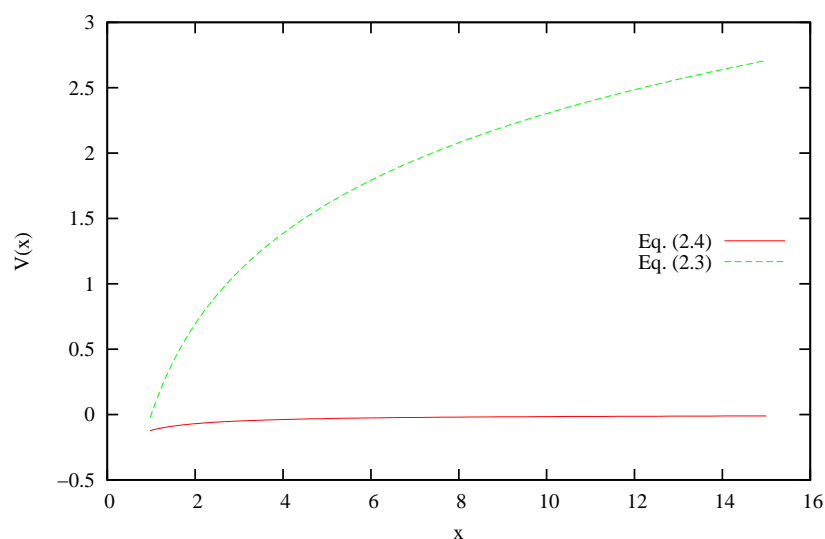


Figura 2.1: Gráfico representando o potencial eletrostático $V(x)$ nas equações (2.3) e (2.4).

a EDQ₃, podemos trabalhar com duas representações para os campos fermiônicos: (i) se usarmos uma representação de duas componentes para os férmions, as matrizes de Dirac serão descritos por matrizes 2×2 . A teoria não possuirá quebra de simetria quiral e o termo de massa quebrará explicitamente a simetria de paridade [38, 39]; (ii) ou podemos considerar os férmions com uma representação de quatro componentes, e dessa forma, o termo de massa quebrará a simetria quiral, como na eletrodinâmica quântica em 4 dimensões [8, 39]. Com o intuito de estudarmos a quebra da simetria quiral, usaremos férmions com quatro componentes.

2.1.1 As Equações de Schwinger-Dyson na EDQ₃

As equações de SD formam um conjunto infinito de equações acopladas relacionando várias funções de Green umas com as outras. A função de Green de dois pontos para o férmion (propagador) está relacionada com todas as demais funções de Green [18, 32]. No entanto, deve-se impor um esquema de “truncamento” de modo que, este conjunto de equações acopladas possa ser tratado adequadamente. O esquema de “truncamento” mais utilizado como ponto de partida, é o que chamamos de aproximação “*quenched*”, onde os efeitos de polarização de vácuo não são considerados. Uma outra aproximação também

utilizada, é a aproximação “rainbow”, onde as correções para o vértice de interação são desconsiderados [18]. Além destas aproximações, existe aquelas onde levamos em consideração o efeito de polarização de vácuo, conhecida como aproximação “unquenched”, e diferentes tipos de vértice inspirados por algumas das principais características de teorias de gauge, tais como as identidades de Ward-Takahashi [18].

As equações de SD para a EDQ₃ foram obtidas anteriormente no capítulo 1 (ver seção 1.4.), e assim iremos aqui apenas relembra-las. Para o propagador do férmion, a equação de SD no espaço de Minkowski, será dada por

$$S_F^{-1}(p) = A(p)\not{p} + \Sigma(p) = \not{p} - M - \frac{ie^2}{(2\pi)^d} \int d^d k \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu(k, p; k-p) \Delta_{\mu\nu}(k-p), \quad (2.7)$$

sendo $A(p)$ a constante de renormalização de função de onda, $\Sigma(p)$ a função de massa gerada dinamicamente, $\Gamma^\nu(k, p; k-p)$ sendo o vértice completo e $\Delta_{\mu\nu}(k-p)$ é o propagador do fóton completo, dado por

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = \Delta_{\mu\nu}^0{}^{-1}(p) + ie^2 \int d^3 k Tr [\gamma_\mu S_F(k) \Gamma_\nu(k, k-p) S_F(k-p)], \quad (2.8)$$

onde $\Delta_{\mu\nu}^0{}^{-1}(p)$ representa o inverso do propagador livre do fóton. Iremos em seguida estudar estas equações na aproximação “unquenched-rainbow”, onde o efeito de polarização de vácuo será levado em consideração e o vértice de interação não possuirá correções.

2.1.2 EDQ₃ na Expansão 1/N

Em um esquema não perturbativo, conhecido como a expansão 1/N, pode-se mostrar que a EDQ₃ se torna finita no infravermelho, mesmo sem a presença de férmions massivos [38]. No entanto, esta teoria finita exhibe quebra de simetria quiral, como veremos adiante. Para implementarmos a expansão 1/N, reescrevemos a constante de acoplamento e , de modo que

$$e^2 = \frac{\alpha}{N}, \quad (2.9)$$

onde α é mantido fixo. Dessa maneira, a lagrangiana (2.6) poderá ser escrita como,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i (i\cancel{\partial} + i\sqrt{\frac{\alpha}{N}} \cancel{A}_\mu) \psi_i - M \bar{\psi}_i \psi_i - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (2.10)$$

Na expansão $1/N$, devemos levar em consideração o efeito da polarização do vácuo. Como a constante de acoplamento é da ordem $1/\sqrt{N}$ e, como existem N campos fermiônicos no “loop”, o tensor de polarização de vácuo pode ser escrito como

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma^\mu S(k+p) \Gamma^\nu(k+p, k) S(k)], \quad (2.11)$$

onde o sinal $(-)$ na expressão acima, refere-se ao “loop” de férmions. Escrevendo o tensor de polarização como sendo $\Pi^{\mu\nu}(p) = (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Pi(p)$, usando a aproximação de vértice livre, e considerando o propagador fermiônico livre não massivo, encontramos que (ver apêndice C),

$$\Pi(p^2) = \frac{\alpha}{8} \frac{1}{\sqrt{p^2}}. \quad (2.12)$$

A seguir estudaremos a quebra dinâmica da simetria quiral na EDQ₃, com algumas das principais aproximações encontradas na literatura.

2.1.3 Aproximação “quenched-rainbow”

Na EDQ₃ não massiva, ao considerarmos a aproximação “quenched” desconsideramos os efeitos da polarização de vácuo, ou seja

$$\Pi(p^2) \equiv 0, \quad (2.13)$$

e o propagador completo do fóton passa a ser descrito pelo propagador livre. Nesta aproximação encontramos divergências infravermelhas associadas à teoria de perturbação ordinária baseado na expansão em potências de e^2 [18]. Estas divergências se tornam evidentes na ordem mais baixa para correções do vértice de interação ,

$$\Gamma^\rho \sim e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \gamma_\mu \frac{1}{(\not{p} - \not{q})} \gamma_\rho \frac{1}{(\not{k} - \not{q})} \gamma_\nu. \quad (2.14)$$

No limite em que p e $q \rightarrow 0$, a equação acima se comporta como $\Gamma^\rho \sim \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^4}$, apresentando uma divergência infravermelha [18].

Quando combinamos a aproximação “rainbow” com a aproximação “quenched” [40, 41], as equações (2.7) e (2.8) se desacoplam, podendo ser estudadas separadamente. Este é o mérito desta aproximação. No entanto, existem problemas significantes com a aproximação “rainbow”, tais como a violação das identidades de Ward-Takahashi [12, 14].

Uma outra simplificação utilizada para equação (2.7) é escolher $A(p) = 1$. Deste modo, se considerarmos o gauge de Landau ($\xi \rightarrow \infty$), conseguimos obter uma equação integral não linear³ para a função de massa gerada dinamicamente⁴ [40, 41], isto é,

$$\Sigma(p^2) = \frac{2\alpha}{\pi p} \int_0^\infty dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \frac{q\Sigma(q^2)}{q^2 + \Sigma(q^2)}. \quad (2.15)$$

Para simplificar a expressão acima, podemos aproximar $\log |(p+q)/(p-q)|$ da seguinte maneira [40],

$$\log \left| \frac{p+q}{p-q} \right| = \frac{2p}{q} \theta(p-q) + \frac{2q}{p} \theta(q-p),$$

onde a expansão acima é uma boa aproximação para $p^2 \ll q^2$ ou $p^2 \gg q^2$ [18]. Substituindo na equação (2.15), podemos reescrevê-la na forma de uma equação diferencial,

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right] = -\frac{8\alpha}{\pi} \frac{p^2 \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)}, \quad (2.16)$$

satisfazendo as seguintes condições de contorno

$$\left(p^3 \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right) \Big|_{p=0} = 0, \quad (2.17)$$

e

$$\Sigma(p) \Big|_{p=\infty} = 0. \quad (2.18)$$

³Este resultado pode ser obtido seguindo o procedimento adotado para a PEDQ₃ discutido na seção 3.3.

⁴Neste ponto, é interessante realizarmos uma rotação de Wick, indo para o espaço euclidiano.

Se considerarmos a região para momentos pequenos quando comparados a massa gerada dinamicamente, isto é, $p \ll \Sigma(p)$, a equação diferencial (2.16) pode ser linearizada e terá como solução,

$$\Sigma(p) = -\frac{A_1}{2p^2} + B_1, \quad (2.19)$$

sendo A_1 e B_1 duas constantes de integração com dimensões canônicas dadas por (massa)³ e massa, respectivamente. Aplicando as condições de contorno (2.17) e (2.18), concluímos que a única solução para este regime será $\Sigma(p) = 0$. Portanto, para a região $p \ll \Sigma(p)$, não ocorrerá a quebra da simetria quiral. Por outro lado, se considerarmos a região em que $p \gg \Sigma(p)$, a equação (2.16) terá a seguinte forma,

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right] = -\frac{8\alpha}{\pi} \Sigma(p), \quad (2.20)$$

e admitirá como solução [40, 41]

$$\Sigma(p) = \frac{1}{p} \left[C_1 J_2 \left(4\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi p}} \right) + D_1 Y_2 \left(4\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi p}} \right) \right], \quad (2.21)$$

sendo $J_\alpha(x)$ a função de Bessel de primeira espécie e $Y_\alpha(x)$ a função de Neumann. Da condição de contorno (2.18) devemos impor que $D_1 = 0$. Assim, a massa gerada dinamicamente para os férmions na aproximação “*quenched*” na EDQ₃ será dada por,

$$\Sigma(p) \sim \frac{1}{p} J_2 \left(4\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi p}} \right). \quad (2.22)$$

A equação (2.22) representa a massa gerada dinamicamente para os férmions na aproximação “*quenched-rainbow*”. Gusynin discute a validade desta aproximação feita na equação (2.15) através de um estudo numérico e compara com a solução (2.22), mostrando que a aproximação não é ruim, e realmente pode ser melhorada, adotando uma condição de normalização a partir de $\Sigma(p^2 = m^2) = m$ (para maiores detalhes veja [41]).

2.1.4 Aproximação “*unquenched-rainbow*”

Quando consideramos a aproximação “*unquenched-rainbow*” somos capazes de resolver analiticamente as equações (2.7) e (2.8). Dessa maneira, as equações se desacoplam e,

podemos escrever no espaço de Minkowski que

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = -\frac{i}{q^2[1 + \Pi(q^2)]} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (2.23)$$

para a equação de SD do campo de gauge, com $\Pi(q)$ dado pela equação (2.12). Já para o propagador completo do férmion temos

$$S_F^{-1}(p) = \not{p} - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu(k, p; k-p) \Delta_{\mu\nu}(k-p), \quad (2.24)$$

onde explicitamente assumimos que os férmions não possuem massa. Nosso estudo sobre quebra da simetria quiral na EDQ₃ na aproximação “*unquenched-rainbow*” será feito através do estudo da função de massa, gerada dinamicamente. Definimo o inverso do propagador fermiônico no espaço euclidiano como sendo

$$S_F^{-1}(p) = -A(p) \not{p} + \Sigma(p), \quad (2.25)$$

mostrou-se que, assumindo o gauge de Landau ($\xi \rightarrow \infty$), na ordem mais baixa na expansão $1/N$, $A(p^2) = 1$, ou seja, as correções para $A(p^2)$ somente surgem quando levamos em consideração termos de ordem superior na expansão $1/N$ [11]. Por outro lado, podemos escrever uma equação integral para $\Sigma(p)$, e após a integração angular encontramos que

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi^2 N p} \int \frac{k \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} dk \log \left(\frac{k+p+\alpha/8}{|k-p|+\alpha/8} \right). \quad (2.26)$$

Para estudarmos a equação (2.26) analiticamente, é conveniente quebrarmos a integração no momento em duas regiões e expandirmos o logaritmo apropriadamente para cada região [38], ou seja,

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{\alpha}{\pi^2 N p} \int_0^p dk \frac{k \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \left[\frac{k}{p+\alpha/8} + \mathcal{O} \left(\frac{k}{p+\alpha/8} \right)^3 + \dots \right] \\ &+ \frac{\alpha}{\pi^2 N p} \int_p^\infty dk \frac{k \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \left[\frac{p}{k+\alpha/8} + \mathcal{O} \left(\frac{p}{k+\alpha/8} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Appelquist [9] comentou que a equação integral (2.27) é rapidamente amortecida para a região $p > \alpha/8$. Por outro lado, na região $p < \alpha/8$ a equação integral (2.27) pode ser transformada em uma equação diferencial de segunda ordem não linear, dada por,

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{d\Sigma(p)}{dp} \frac{p^2(p + \alpha/8)^2}{2p + \alpha/8} \right) = -\frac{\alpha}{\pi^2 N} \frac{p^2 \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)}. \quad (2.28)$$

No limite $p \ll \alpha/8$ a equação (2.28) simplifica, podendo ser escrita como

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{d\Sigma(p)}{dp} \right) = -\frac{8}{\pi^2 N} \frac{p^2 \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)}, \quad (2.29)$$

com as seguintes condições de contorno,

$$0 \leq \Sigma(0) \leq \infty, \quad (2.30)$$

e

$$\left[p \frac{d\Sigma(p)}{dp} + \Sigma(p) \right] \Big|_{p=\alpha/8} = 0. \quad (2.31)$$

Na região onde $\Sigma(p) \ll p \ll \alpha/8$ a equação (2.29) lineariza, e uma solução analítica poderá ser encontrada de maneira direta [9]. Isto é,

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{d\Sigma(p)}{dp} \right) = -\frac{8}{\pi^2 N} \Sigma(p), \quad (2.32)$$

cuja solução será [9],

$$\Sigma(p) \sim p^a, \quad (2.33)$$

sendo $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{N\pi^2}}$.

Para $N > N_c = 32/\pi^2$, temos que $-1 < a < 0$ e esta solução não irá satisfazer a condição de contorno (2.31) no ultravioleta. No entanto, quando consideramos que $N < N_c$ a solução (2.33) será dada por [9]

$$\Sigma(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{32}{N\pi^2} - 1 \right]} \ln \left(\frac{p}{\Sigma(0)} + \delta \right), \quad (2.34)$$

sendo δ uma fase qualquer que dependerá de N . Impondo a condição de contorno (2.31), encontramos que $\bar{\Sigma}(0)$, no limite em que $N \rightarrow N_c$, é determinado por [9],

$$\bar{\Sigma}(0) = \left(\frac{\alpha}{8} \right) e^{2+\delta} \exp \left(\frac{-2n\pi}{\sqrt{\frac{32}{N\pi^2} - 1}} \right). \quad (2.35)$$

Assim, conclui-se que na EDQ₃, quando considerado a aproximação “*unquenched-rainbow*”, existe um número crítico N_c tal que abaixo deste número existe a quebra dinâmica da simetria quiral para os férmions e, para valores acima de N_c a simetria é então restaurada. Estudos numéricos da equação integral (2.26) [9, 12, 14] mostram que as soluções encontradas são válidas nas aproximações realizadas.

2.2 A Eletrodinâmica em (3+1) d (EDQ₄)

2.2.1 Quebra da Simetria Quiral na EDQ₄

Nesta seção, faremos de maneira direta o estudo da quebra da simetria quiral para a EDQ₄ uma vez que, o método utilizado é idêntico ao que foi realizado anteriormente. Por questão de simplificação, iremos considerar a EDQ₄ na aproximação “*quenched-rainbow*”. Dessa maneira, como feito anteriormente, podemos encontrar duas equações acopladas, relacionando a massa gerada dinamicamente para o férmion, $\Sigma(p)$ e a constante de renormalização da função de onda, $A(p)$.

Assim, a equação de SD para $\Sigma(p^2)$ e $A(p^2)$ na EDQ₄, serão dadas no espaço euclidiano por [21, 22],

$$A(p) = 1 + \frac{\alpha}{4\pi\xi p^2} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{A(p)k^2}{A(p)k^2 + \Sigma^2(p)} \frac{k^2}{p^2} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{A(p)k^2}{A(p)k^2 + \Sigma^2(p)} \frac{p^2}{k^2} \right], \quad (2.36)$$

e

$$\Sigma(p) = m_0 + \frac{\alpha}{4\pi} \left(3 + \frac{1}{\xi} \right) \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{\Sigma(p)}{A(p)k^2 + \Sigma^2(p)} \frac{k^2}{p^2} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\Sigma(p)}{A(p)k^2 + \Sigma^2(p)} \right], \quad (2.37)$$

onde a integração nos ângulos já foi realizada e a introdução de um “*cutoff*” ultravioleta Λ se faz necessário se $m_0 \neq 0$ [18]. No gauge de Landau ($\xi \rightarrow \infty$), as equações (2.36) e (2.37) simplificam, pois

$$A(p^2) = 1, \quad (2.38)$$

e

$$\Sigma(p^2) = m_0 + \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{\Sigma(p^2)}{k^2 + \Sigma^2(p^2)} \frac{k^2}{p^2} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\Sigma(p^2)}{k^2 + \Sigma^2(p^2)} \right]. \quad (2.39)$$

Analogamente ao que fizemos na EDQ₃ (ver seção 2.1.3 e 2.1.4), podemos transformar a equação integral (2.39) em uma equação diferencial de segunda ordem, sujeita a duas condições de contorno. Dessa maneira, temos que $\Sigma(p^2)$ irá satisfazer uma equação diferencial do tipo [21, 22],

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Sigma(x)}{dx} \right) = -\frac{3\alpha}{4\pi} \frac{\Sigma(x)}{x + \Sigma^2(x)}, \quad (2.40)$$

onde $x = p^2$ e as condições de contorno serão dadas por

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dx} [x^2 \Sigma(x)] \right) = 0, \quad (2.41)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \Lambda^2} \left(\frac{d}{dx} [x \Sigma(x)] \right) = m_0. \quad (2.42)$$

sendo m_0 a massa livre dos férmions. O problema de se estudar a quebra da simetria quiral na EDQ₄ na aproximação “*quenched-rainbow*” se reduz ao estudo da equação diferencial (2.40). A equação (2.40) foi estudada por Fukuda e Kugo [22] e os resultados possuem uma analogia direta com o que mostramos na seção 2.1.3. Se escolhermos $m_0 = 0$, então (2.40) será invariante de escala. Neste caso, a escala é definida escolhendo $\Sigma(0) = 1$ [21], e portanto $\Sigma(p)$ admitirá uma solução em série de potência [21, 22],

$$\Sigma(x) = 1 - \frac{3\alpha}{8\pi} x - \frac{\alpha}{64\pi} \left(\frac{3\alpha}{\pi} - 8 \right) x^2 + \dots \quad (2.43)$$

O comportamento assintótico de $\Sigma(x)$ para x grande pode ser escrito como [21, 22]

$$\Sigma(x) \sim \begin{cases} x^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-3\alpha/\pi}}, & \alpha \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \left[\frac{1}{2}\sqrt{3\alpha/\pi - 1} \log(x) \right], & \alpha \geq \frac{\pi}{3}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Considerando um “*cutoff*” finito, se usarmos a condição de contorno no ultravioleta (2.42) se tornará claro que a solução não nula para a massa gerada dinamicamente será satisfeita apenas se

$$\alpha > \alpha_c = \frac{\pi}{3}, \quad (2.45)$$

onde $\alpha_c = \pi/3$ representa o ponto crítico da solução. Por outro lado, se considerarmos que $\alpha < \alpha_c$, $\Sigma(x)$ não satisfará a condição de contorno (2.42) e assim não ocorrerá a quebra da simetria quiral. A função de massa $\Sigma(x)$ exibe uma ordem infinita de transição de fase quando $\alpha \rightarrow \alpha_c$ e então obedece uma lei de escala de Miransky [42]

$$\Sigma(0) = \Lambda \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{\alpha/\alpha_c - 1}} + \delta \right), \quad (2.46)$$

onde δ é uma fase qualquer. Assim, conclui-se que a simetria quiral deverá ser quebrada dinamicamente na EDQ₄ quando o acoplamento exceder α_c , para um “*cutoff*” finito.

Muito se discutiu a respeito do estudo da quebra da simetria quiral na EDQ₄ no limite em que $m_0 = 0$ [18] e mostrou-se que a equação integral admite uma solução mesmo quando o “*cutoff*” é removido, ou seja, quando colocamos $\Lambda \rightarrow \infty$. Neste caso, a condição de contorno no ultravioleta pode ser satisfeita para quaisquer valores de acoplamento e então na EDQ₄ na aproximação “*quenched-rainbow*” haverá quebra de simetria da quiral para todos os valores de α [43].

Capítulo 3

A Pseudo Eletrodinâmica Quântica em (2+1) d (PEDQ₃)

3.1 O Modelo

Nos últimos anos algumas propriedades de partículas se movendo no plano tem sido estudadas de maneira intensa. Parte deste interesse surgiu após a descoberta do efeito Hall quântico [1] e da supercondutividade à altas temperaturas [2]. Em ambos os casos, o princípio físico fundamental destes sistemas está no fato de serem efeitos puramente planares.

No entanto, apesar do movimento dos elétrons estar confinado ao plano, o campo eletromagnético através do qual eles interagem não está sujeito a este vínculo. Este fato, nos permite investigar inúmeras situações, incluindo a exigência de que o potencial eletrostático entre dois elétrons seja do tipo coulombiano ($\propto 1/r$) e não logarítmico, como acontece na EDQ₃ [36]. De fato, este resultado pode ser obtido se considerarmos o potencial clássico

$$V(\vec{r}) = e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{|k|}, \quad (3.1)$$

onde $|k| = \sqrt{k^2} = \sqrt{k^2 + k_3^2}$. Após realizarmos a integração no ângulo [37], encontramos

$$V(r) = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty J_0(|\vec{k}||\vec{r}|) d|\vec{k}| = \frac{e^2}{2\pi} \frac{1}{|\vec{r}|}. \quad (3.2)$$

Marino [28] obteve a partir de primeiros princípios, uma descrição de tal sistema eletrônico que se move no plano, porém a interação era descrita como de partículas em um espaço-tempo quadridimensional. A quantização de tal teoria (pseudo eletrodinâmica quântica) foi estudada nas referências [29, 30] e os resultados mostraram que apesar da não localidade no de termo de Maxwell, a causalidade é respeitada e as funções de Green bem definidas.

Formalmente, pode-se obter tal teoria, no espaço euclidiano, modificando o termo de Maxwell $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ para $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2/(-\square)^{1/2}$, reproduz a interação de duas partículas carregadas movendo-se sobre um plano (veja a equação (3.2)). A lagrangiana que descreve esta teoria no espaço euclidiano, será dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{(-\square)^{1/2}} + \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ + m + e \gamma^\mu A_\mu) \psi - \frac{\xi}{2} A_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{(-\square)^{1/2}} A_\nu, \quad (3.3)$$

onde $\square \equiv \partial^2$, m é a massa “livre” do férmion que quebra explicitamente a simetria quiral e a escala de simetria e e a constante de acoplamento não renormalizada. O último termo é o termo de fixação de gauge. Como estamos interessados na quebra da simetria quiral, adotaremos uma representação 4×4 para as matrizes de Dirac, e conseqüentemente os férmions possuem 4 componentes. Como a constante de acoplamento e na equação (3.3) é adimensional, classificamos o modelo como sendo renormalizável, na contagem de potência usual [16, 31], enquanto que na EDQ₃ é dita uma teoria super-renormalizável e finita no ultravioleta [44] em três dimensões, e assim a constante de acoplamento será um parâmetro de escala natural da teoria.

As regras de Feynman deste modelo são obtidas de maneira usual. O vértice de interação é dado por $e\gamma^\mu$ e o propagador “livre” do férmion é dado por,

$$S_{0F}(p) = \frac{1}{-\gamma^\mu p_\mu + m}, \quad (3.4)$$

enquanto que o propagador do campo de gauge pode ser obtido utilizando o formalismo da integração funcional (ver apêndice B), calculando a parte quadrática da ação clássica do campo A_μ .

Portanto,

$$\Delta_{0\mu\nu} = \frac{1}{(p^2)^{1/2}} \left[\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{p^2} p_\mu p_\nu \right]. \quad (3.5)$$

sendo esta a expressão do propagador do campo de gauge.

3.2 As Equações de Schwinger-Dyson para PEDQ₃

Como visto no capítulo 1, as equações de SD para PEDQ₃ são facilmente determinadas quando variamos o funcional gerador com relação a um determinado campo. Sendo assim, as equações de SD para o propagador do férmion e do campo de gauge, serão dadas pelas equações (1.69) e (1.63) com os propagadores livres dados pelas equações (3.4) e (3.5), como mostrado nas figuras 3.1 e 3.2. Assim, a expressão analítica das equações de SD, no espaço euclidiano, para a PEDQ₃ são

$$S_F^{-1}(p) = \{S_F^0(p)\}^{-1} - \Xi(p)$$

$$S_F^{-1}(p) = -\gamma^\mu p_\mu + M - e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(p - k), \quad (3.6)$$

e

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = \{\Delta_{0\mu\nu}(p)\}^{-1} - \Pi_{\mu\nu}(p)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = \{\Delta_{0\mu\nu}(p)\}^{-1} - (-)e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(k + p) \Gamma^\nu(k, p) S_F(k)], \quad (3.7)$$

onde $\Xi(p)$ e $\Pi_{\mu\nu}(p)$ são, a auto-energia dos férmions e a auto-energia do campo de gauge, respectivamente. O fator (-1) da equação (3.7) vêm do fato de termos um “loop” fermiônico. Nas equações (3.6) e (3.7), S_F e $\Delta_{\mu\nu}$ representam os propagadores fermiônico e do campo de gauge corrigidos, respectivamente, equanto que Γ^ν representa o vértice de interação corrigido. A operação de traço é tomada sobre as matrizes de Dirac¹.

¹Na seção 3.4 iremos investigar a situação, onde os campos fermiônicos possuem uma simetria U(N), e neste caso, deve-se tomar a operação de traço sobre estes índices de simetria.

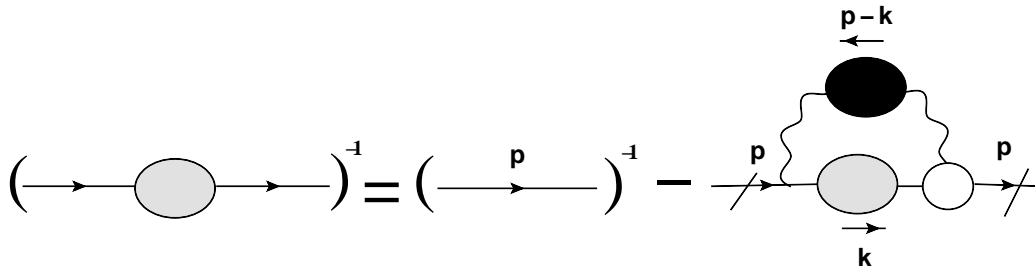


Figura 3.1: Representação da equação de SD para o propagador do férmion.

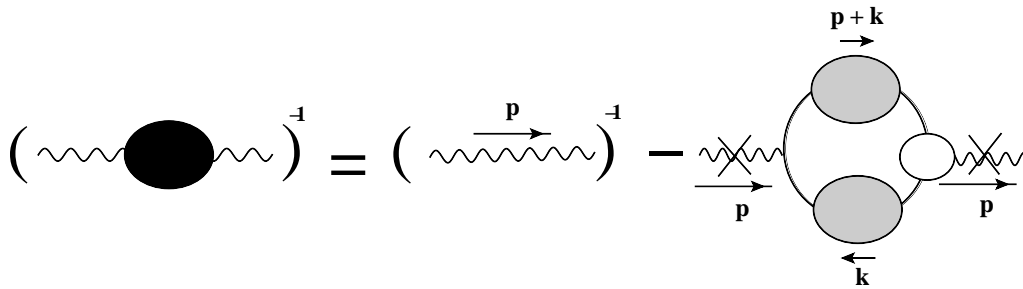


Figura 3.2: Representação da equação de SD para o propagador do campo de gauge.

As equações (3.6) e (3.7) formam um conjunto complexo de equações integrais não lineares o que naturalmente nos leva a introduzir um determinado esquema de aproximações, de modo a tornar as equações factíveis. Um esquema muito utilizado na literatura, é a aproximação de vértice livre, chamado de aproximação “rainbow”, que nada mais é considerar o vértice de interação como sendo,

$$\Gamma^\nu(k, p) = \gamma^\nu. \tag{3.8}$$

Quando esta aproximação é combinada com a aproximação “quenched”, isto é, quando negligenciamos a contribuição do “loop” fermiônico, o propagador do campo de gauge completo será dado por,

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \Delta_{0\mu\nu}(p), \tag{3.9}$$

e então as equações (3.6) e (3.7) desacoplam e podemos estudá-las separadamente. Nesta situação, podemos reescrever a equação (3.6),

$$S_F^{-1}(p) = S_{0F}^{-1}(p) - 4\pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{0\mu\nu}(p-k), \quad (3.10)$$

onde definimos $\alpha = e^2/4\pi$ de maneira semelhante ao que é feito na EDQ₄. Uma equação similar foi investigada exaustivamente na literatura no contexto da eletrodinâmica quântica em quatro dimensões [22, 45].

No espaço euclidiano, o inverso do propagador do férmion é escrito como,

$$S_F^{-1}(p) = -p_\mu \gamma^\mu A(p) + \Sigma(p), \quad (3.11)$$

onde $A(p)$ é a constante de renormalização da função de onda e $\Sigma(p)$ é a função de massa gerada dinamicamente para o férmion. Substituindo (3.11) em (3.10), temos

$$-p_\alpha \gamma^\alpha A(p) + \Sigma(p) = -p_\alpha \gamma^\alpha + m - 4\pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \left[\frac{1}{-k_\beta \gamma^\beta A(k) + \Sigma(k)} \right] \gamma^\nu \Delta_{0\mu\nu}(p-k). \quad (3.12)$$

Na equação (3.12), podemos obter uma expressão tanto para $A(p)$, como também para $\Sigma(p)$, usando simples operações de traço². Multiplicando ambos os lados da equação (3.12) por $\gamma_\alpha p^\alpha$ e tomando o traço, encontramos facilmente uma expressão para $A(p)$,

$$A(p) = 1 - \frac{4\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} p_\alpha \text{Tr} \left(\gamma^\alpha \gamma^\mu \left[\frac{1}{-k_\beta \gamma^\beta A(k) + \Sigma(k)} \right] \gamma^\nu \right) \Delta_{0\mu\nu}(p-k), \quad (3.13)$$

de onde podemos concluir que perturbativamente $A(p) = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$. Para determinarmos a equação para $\Sigma(p)$, basta tomarmos o traço em ambos os lados da equação (3.12) e assim,

$$\Sigma(p) = m + 4\pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k) \delta_{\mu\nu} \Delta_{0\mu\nu}(p-k)}{A^2(k) k^2 + \Sigma^2(k)}. \quad (3.14)$$

Como nosso interesse de estudo é verificar a quebra da simetria quiral, daremos maior atenção à equação (3.14). Usando o gauge de Landau ($\xi \rightarrow \infty$) e considerando que o espaço-tempo possui simetria esférica, podemos realizar a integração nos ângulos³ de modo que encontramos,

²Para maiores detalhes sobre operações de traço envolvendo matrizes de Dirac, ver Apêndice A.

³Para maiores detalhes ver apêndice A.2

$$\Sigma(p) = m + \frac{2\alpha}{\pi p} \int_0^\infty dk \frac{k \Sigma(k) (|p+k| - |p-k|)}{A^2(k)k^2 + \Sigma^2(k)}, \quad (3.15)$$

onde k é o módulo do vetor \vec{k} .

Embora a inclusão de termos de ordem superiores em $A(p)$ seja essencial para recuperar a invariância de gauge [25], quando levamos em consideração que $A(p) \approx 1$, os resultados qualitativos para a função de massa dos férmions, em função da constante de acoplamento não são alterados [8]. Considerando o limite em que $m \rightarrow 0$, a teoria não terá uma escala de massa intrínseca, e assim, é mais conveniente usar um “*cutoff*” ultravioleta finito euclidiano, Λ , para definir a nossa escala e estudar a quebra da simetria [42, 46]. Lembremos que, podemos considerar $\Lambda = \infty$ a qualquer momento em nosso cálculo. Então, se dividirmos a integração no momento em duas regiões, e levando em consideração que $|p+k| - |p-k| = 2k$ se $p > k$ e $|p+k| - |p-k| = 2p$ se $k > p$, a equação (3.15) ficará,

$$\Sigma(p) = \frac{4\alpha}{\pi p} \left\{ \int_0^p \frac{k^2 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} dk + p \int_p^\Lambda \frac{k \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} dk \right\}. \quad (3.16)$$

Como pode ser observado, a equação (3.16) é uma equação integral complicada e auto-interagente. A seguir, discutiremos como transformar a equação integral (3.16) em uma equação diferencial e analisaremos as soluções para a função de massa para o férmion gerada dinamicamente.

3.3 Solução Analítica para a Função de Massa do Férmião

A equação integral (3.16) pode ser convenientemente transformada em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com duas condições de contorno apropriadas. De fato, se diferenciarmos (3.16) com relação a p encontramos

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp} = -\frac{4\alpha}{\pi p^2} \int_0^p \frac{k^2 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} dk. \quad (3.17)$$

Multiplicando por p^2 e diferenciando novamente, obtemos

$$p^2 \Sigma''(p) + 2p \Sigma'(p) + \frac{4\alpha}{\pi} \frac{p^2 \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)} = 0. \quad (3.18)$$

Para a teoria não massiva, as duas condições de contorno serão dadas por

$$\lim_{p \rightarrow \Lambda} \left(p \frac{d\Sigma(p)}{dp} + \Sigma(p) \right) = 0, \quad (3.19)$$

e

$$\lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{d\Sigma(p)}{dp} = 0, \quad (3.20)$$

representando as condições de contorno no ultravioleta (UV) e infravermelho (IR), respectivamente. A equação diferencial (3.18) tem solução trivial para todo momento, e a existência de uma solução diferente da trivial para a função de massa gerada dinamicamente deve indicar a quebra da simetria quiral.

Podemos explorar o comportamento assintótico de (3.18) em duas regiões. A primeira região para $p \ll \Sigma(p)$ (infravermelho), onde a equação diferencial será dada pela equação

$$p^2 \Sigma''(p) + 2p \Sigma'(p) = 0, \quad (3.21)$$

que tem como solução

$$\Sigma(p) = -\frac{A_1}{p} + A_2. \quad (3.22)$$

As constantes A_1 e A_2 possuem dimensões canônicas de massa ao quadrado e massa, respectivamente. A condição de contorno no IR implica que $A_1 = 0$, e dessa maneira $\Sigma(p) = A_2$. No entanto, esta solução não satisfaz a condição de contorno do UV (3.19), independentemente do “*cutoff*”, exceto para $A_2 = 0$. Sendo assim, a única solução para este regime, será a solução trivial, isto é, $\Sigma(p) = 0$ e portanto não existirá a quebra da simetria quiral para $p \ll \Sigma(p)$.

Assim como na EDQ₃, a não linearidade na equação (3.18) torna-se menos importante na região de grandes momentos. Nós esperamos que o mesmo aconteça para a PEDQ₃.

Para investigarmos esta situação, exploraremos o comportamento assintótico da equação (3.18) no regime ultravioleta ($p \gg \Sigma(p)$). Portanto, a equação (3.18) será escrita como

$$\frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right) + \frac{4\alpha}{\pi} \Sigma(p) = 0, \quad (3.23)$$

e admitirá como solução

$$\Sigma(p) = B_1 p^{-\frac{\lambda}{2}} + B_2 p^{-1+\frac{\lambda}{2}}, \quad (3.24)$$

sendo $\lambda = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_c}}$ e $\alpha_c = \frac{\pi}{16}$ representando o ponto crítico do comportamento da solução. As constantes B_1 e B_2 , a priori finitas, possuem dimensões, respectivamente, iguais a $1 + \frac{\lambda}{2}$ e $2 - \frac{\lambda}{2}$, em unidades de massa.

A partir da solução (3.24), podemos analisar alguns limites interessantes. Quando consideramos acoplamento fraco, ou seja, no limite em que $\alpha \ll \alpha_c$ as duas soluções serão

$$\Sigma_1(p) \propto p^{-\frac{4\alpha}{\pi}} \quad (3.25)$$

e

$$\Sigma_2(p) \propto p^{-1+\frac{4\alpha}{\pi}}. \quad (3.26)$$

As soluções (3.25) e (3.26) satisfazem, ambas, as condições de contorno do IR, porém a condição de contorno no UV é satisfeita apenas quando o “*cutoff*” é removido. Portanto, no regime $\alpha \ll \alpha_c$, (3.25) e (3.26) são soluções da equação (3.23) apenas no limite do contínuo, ou seja, quando consideramos $\Lambda \rightarrow \infty$. Como podemos ver na figura 3.3, as soluções decaem a medida que p aumenta. Entretanto, $\Sigma_1(p)$ não decai rapidamente tanto quanto $\Sigma_2(p)$ para momentos grandes.

Resultados similares e suas interpretações foram obtidas por Appelquist *et.al* no contexto da EDQ₃ na expansão $1/N$ [8]. Estes autores interpretam $\Sigma_1(p)$ como sendo a massa “dura” no sentido de que, é aproximadamente constante para p muito grande. Esta interpretação também pode ser aplicada para a PEDQ₃. Estas soluções correspondem a quebra da simetria quiral para $\Lambda \rightarrow \infty$ no limite de acoplamento muito fraco na região do ultravioleta.

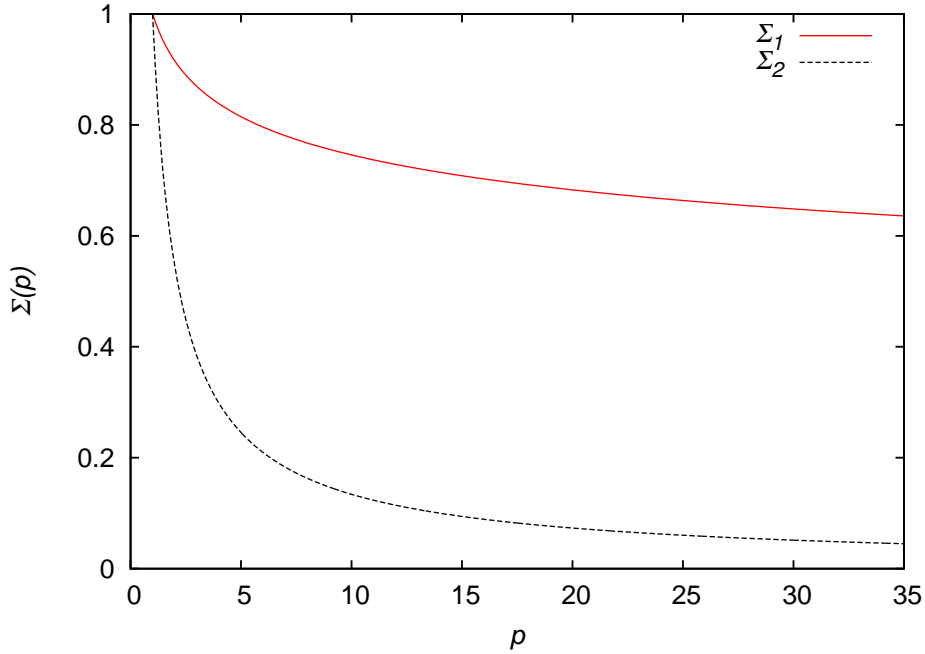


Figura 3.3: Gráfico representando as soluções (3.25) e (3.26) para $\alpha = 0.05$ no regime assintótico do UV, na condição de $\alpha \ll \alpha_c$.

Se relaxarmos a condição $\alpha \ll \alpha_c$, podemos analisar outras situações interessantes como $\alpha < \alpha_c$ e $\alpha > \alpha_c$. Devemos notar que no limite do contínuo para a teoria não massiva, as soluções da equação (3.24) satisfazem a condição de contorno IR e UV para qualquer regime de α e, portanto, a PEDQ₃ na aproximação “*quenched-rainbow*” admite quebra de simetria quiral para todos os valores de α quando $\Lambda \rightarrow \infty$ ⁴. Este resultado, é muito similar ao resultado obtido por Atkinson e Johnson [43] na EDQ₄. O mesmo problema também foi estudado, usando diferentes aproximações para a função de vértice por Curtis e Pennington [47] e o resultado é semelhante, isto é, ocorre geração de massa para todos os valores da constante de acoplamento.

Para a situação de Λ finito, é mais conveniente resolver a equação (3.23) satisfazendo a condição de contorno no infravermelho primeiro, e finalmente usar a condição de contorno no UV para determinar se existe ou não solução. Para o caso em que $\alpha < \alpha_c$, temos que $0 < \lambda < 1$ e assim a equação (3.24) fornece uma solução real. No entanto, as duas

⁴Resultados similares foram obtidos na referência [41] na EDQ₃ na aproximação “*quenched*” para $\Lambda \rightarrow \infty$.

soluções não satisfazem a condição do UV e não serão soluções da equação integral (3.16). Portanto, a única solução para este caso será a solução trivial, isto é, $\Sigma(p) = 0$, de modo que não ocorrerá quebra de simetria.

Para $\alpha > \alpha_c$, λ é imaginário e a equação (3.23) admite a seguinte solução oscilatória

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} [C_1 \cos(\beta \log p) + iC_2 \sin(\beta \log p)] \\ &= \frac{D}{\sqrt{p}} \sin \left[\beta \left(\log \frac{p}{\tilde{\Sigma}(0)} + \delta \right) \right],\end{aligned}\quad (3.27)$$

onde $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1} > 0$, $D = \sqrt{C_1^2 - C_2^2}$ com $C_1 = B_1 + B_2$ e $C_2 = B_2 - B_1$, $\delta = \arctan(-i\frac{C_1}{C_2})$ é uma fase. Introduzimos em (3.27) um fator de escala logarítmico $\tilde{\Sigma}(0)$ para garantir a dimensão correta no logaritmo. Este fator de escala pode ser determinado impondo a condição de contorno do UV, fornecendo o seguinte resultado para $\alpha \rightarrow \alpha_c$

$$\tilde{\Sigma}(0) = \Lambda e^{2+\delta} e^{-\frac{2n\pi}{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1}}}, \quad (3.28)$$

com n sendo um inteiro. Dessa forma, concluímos que a simetria quiral deverá ser quebrada dinamicamente na aproximação “*quenched-rainbow*” para a PEDQ₃ se o acoplamento exceder α_c . A função de massa exibe uma transição de fase para $\alpha \rightarrow \alpha_c$ e obedece a lei de escala de Miransky [42]. Este é um resultado bem conhecido na EDQ₄ [18, 20, 42], e o ponto crítico α_c tem sido interpretado por Miranski *et.al.* com um ponto fixo ultravioleta definindo o limite do contínuo da EDQ₄. Simulações numéricas na rede para a EDQ₄ não compacta [24] confirmam os resultados teóricos.

3.4 Caso com N Férmions não Massivos

Veremos agora qual a influência do tensor de polarização sobre a quebra da simetria quiral nos férmions. Sendo assim, usaremos a expansão $1/N$ onde consideraremos a lagrangiana (3.3) com N férmions de massa nula, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{(-\square)^{1/2}} + \sum_{a=1}^N \bar{\psi}^a (i\cancel{\partial} + e\gamma^\mu A_\mu) \psi^a + \frac{\xi}{2} A_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{(-\square)^{1/2}} A_\nu, \quad (3.29)$$

sendo que, em (3.29) existem dois parâmetros adimensionais independentes, a constante de acoplamento e e o número de férmions N . Isto nos permitirá fazer uma comparação com a criticalidade da EDQ₃.

A maneira padrão de implementar a expansão $1/N$ no modelo dado por (3.29), é manter o produto Ne^2 finito e definir uma nova constante de acoplamento g , de modo que $g = Ne^2$ [6, 7]. Das equações (3.6) e (3.7) percebe-se que, na ordem dominante da aproximação $1/N$, $\Pi_{\mu\nu}(p) \approx \mathcal{O}(1)$ enquanto que $\Xi(p) \approx \mathcal{O}(1/N)$, quando a aproximação “rainbow” é considerada. Dessa maneira, se houver geração de massa, esta deverá ocorrer para valores pequenos de N .

O propagador completo do campo de gauge, levando em consideração o efeito de polarização de vácuo, será dado agora por,

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \Pi(p^2)}} \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (3.30)$$

onde $\Pi(p^2)$ é a contribuição da parte transversa do tensor de polarização de vácuo. No limite de massa nula, o tensor de polarização⁵ é dado por $\Pi^{\mu\nu}(p) = \Pi(p^2) \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$, com $\Pi(p^2) = \frac{g}{8} \sqrt{p^2}$ [6, 7]. Portanto, o propagador completo será

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2(1 + \frac{g}{8})}} \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (3.31)$$

onde o tensor de polarização introduziu apenas um termo constante aditivo no denominador do propagador do campo de gauge.

Substituindo $4\pi\alpha \rightarrow \frac{g}{N}$ e $\Delta_{0\mu\nu} \rightarrow \Delta_{\mu\nu}$ na equação (3.14), considerando vértice livre e $A(p) \approx 1$, obtemos uma equação diferencial similar a (3.18), ou seja,

$$p^2 \Sigma''(p) + 2p \Sigma'(p) + \frac{g}{N\pi^2(1 + g/8)} \frac{p^2 \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)} = 0. \quad (3.32)$$

Esta equação diferencial satisfaz as mesmas condições de contorno (3.19) e (3.20), e as conclusões obtidas anteriormente podem ser facilmente extendidas para este caso. Na região do infravermelho ($p \ll \Sigma(p)$) não existe solução diferente da trivial para $\Sigma(p)$

⁵Para mais detalhes, veja Apêndice C.

independentemente de usar ou não um “*cutoff*” finito. Assim, não existe a quebra de simetria quiral para este regime. No regime do ultravioleta ($p \gg \Sigma(p)$), a solução da equação diferencial linearizada (3.32) é determinada pela equação (3.24) com

$$\lambda = 1 - \sqrt{1 - \frac{4g}{N\pi^2(1 + \frac{g}{8})}}. \quad (3.33)$$

Como existem dois parâmetros independentes N e g , existe uma liberdade com relação a escolha de qual parâmetro usar para estudar a criticalidade. Neste caso, é natural escolhermos o número de férmions N , definindo um número crítico $N_c = \frac{4g}{\pi^2(1 + \frac{g}{8})}$. É interessante observar que N_c aumenta lentamente com o aumento de g , sendo seu valor máximo dado por $N_c^{max} = \frac{32}{\pi^2}$ quando tomamos o limite de $g \rightarrow \infty$, sendo este o mesmo valor de N_c na EDQ₃ [5, 9]. Este comportamento é mostrado na figura 3.4.

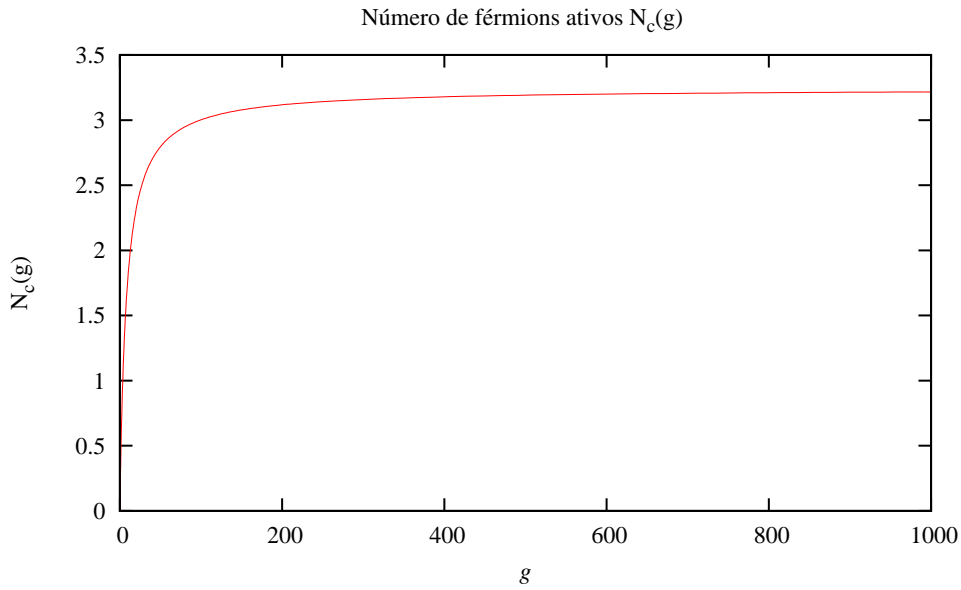


Figura 3.4: Comportamento do número crítico N_c com relação a constante de acoplamento g . No limite de $g \rightarrow \infty$, observamos que $N_c \rightarrow \frac{32}{\pi^2} \approx 3.2$.

Continuaremos nossa análise considerando inicialmente o caso onde $N \gg N_c$, mas de mesma ordem que o valor máximo de N_c . Assim, as duas soluções $\Sigma_1(p)$ e $\Sigma_2(p)$ satisfazendo a condição do IR serão

$$\Sigma_1(p) \propto p^{-\frac{4\alpha}{\pi}} \rightarrow p^{-\frac{g}{N\pi^2(1+\frac{g}{8})}}, \quad (3.34)$$

e

$$\Sigma_2(p) \propto p^{-1+\frac{4\alpha}{\pi}} \rightarrow p^{-1+\frac{g}{N\pi^2(1+\frac{g}{8})}}, \quad (3.35)$$

que satisfaz a condição de contorno do UV apenas no limite do contínuo, $\Lambda \rightarrow \infty$.

Para algum valor de g e $0 < N \leq N_c^{max}$, o comportamento de $\Sigma_1(p)$ diminui com o aumento de p e, decai com N para algum valor de p fixado. Para $N \rightarrow N_c^{max}$, Σ_1 decai rapidamente para um valor constante. Por outro lado, Σ_2 decai muito mais rápido que Σ_1 quando p aumenta, e sempre decai quando $N \rightarrow N_c^{max}$. É interessante notar que no limite do contínuo para a teoria sem massa, a PEDQ₃ na aproximação “*unquenched-rainbow*” admite quebra de simetria quiral para todos os valores do número de férmions ativo.

Para $N > N_c$, temos uma solução real para $\Sigma(p)$ e esta não satisfaz as condições de contorno no UV para Λ finito. Assim, como antes, a única solução será $\Sigma(p) = 0$ e portanto, não haverá quebra de simetria quiral. Para $N < N_c$ a solução que satisfaz a condição de contorno no UV é dada por

$$\Sigma(p) = \frac{\tilde{D}}{\sqrt{p}} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{N_c}{N} - 1} \left(\log \frac{p}{\tilde{\Sigma}(0)} + \tilde{\delta} \right) \right], \quad (3.36)$$

onde \tilde{D} , $\tilde{\delta}$ são constantes e para $N \rightarrow N_c$ a escala de massa será dada por

$$\tilde{\Sigma}(0) = \Lambda e^{2+\tilde{\delta}} e^{-\frac{2n\pi}{\sqrt{\frac{N_c}{N}-1}}}, \quad (3.37)$$

que também exibe uma semelhança com a lei de escala de Miransky na aproximação “*quenched-rainbow*”.

3.5 Estudo Numérico para a Função de Massa $\Sigma(p)$

A solução numérica foi obtida transformando a equação integral na equação (3.15), pela regra da quadratura trapezoidal repetida [49], em um sistema de equações algébricas não lineares, sendo

$$F_m(\{Z_i\}) = \sum_{i=0}^M \delta_{mi} Z_i - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{2} h [f(y_i, x, Z_i) + f(y_{i+1}, x, Z_{i+1})] = 0, \quad (3.38)$$

onde

$$f(y_i, x, Z_i) = \frac{y_i Z_i}{x(y_i^2 + Z_i^2)^2} (|x + y_i| - |x - y_i|), \quad (3.39)$$

com $m=0,1,\dots,M$. $\Sigma(p)$ será determinado por Z_i , M é o número de intervalos, h é o tamanho de cada intervalo. $y_i = 0, \dots, M$ são denominados de “*mesh points*”. Este sistema de equações foi resolvido com o auxílio de pacotes computacionais no *software* Mathematica [50].

Na PEDQ₃ estudada na aproximação “*quenched-rainbow*”, as soluções numéricas mostram que (veja a figura 3.5) existe um valor crítico para a constante de acoplamento, $\alpha_c = \frac{\pi}{16}$, de modo que, se considerarmos valores para α abaixo de α_c , isto é, $\alpha < \alpha_c$, não existirá solução diferente da solução trivial para $\Sigma(p)$, isto é, $\Sigma(p) = 0$. No entanto, se considerarmos a região onde $\alpha > \alpha_c$ encontraremos soluções não triviais para $\Sigma(p)$ e assim, ocorrerá quebra da simetria quiral.

Agora, quando estudamos a PEDQ₃ na aproximação “*unquenched-rainbow*”, temos um novo parâmetro N (número de campos fermiônicos) e dessa forma, existirá um número crítico, $N_c = \frac{4g}{\pi^2(1+\frac{g}{8})}$ no qual, se escolhermos valores para $N < N_c$, então existirá uma solução diferente da trivial e como consequência ocorrerá a quebra da simetria quiral. Quando consideramos $N > N_c$ a única solução será $\Sigma(p) = 0$. Vale ressaltar que todo o estudo numérico foi realizado considerando um “*cutoff*” finito.

As figuras 3.5 e 3.6 nos mostram que a não linearidade da equação integral (3.15) não influencia diretamente na quebra da simetria quiral. Assim, o estudo numérico reproduz de maneira satisfatória o que havia sido previsto analiticamente. Também é interessante comentar que no limite do contínuo para a teoria não massiva, a aproximação

“*unquenched-rainbow*” na PEDQ₃ admite quebra da simetria quiral para todos os valores de N .

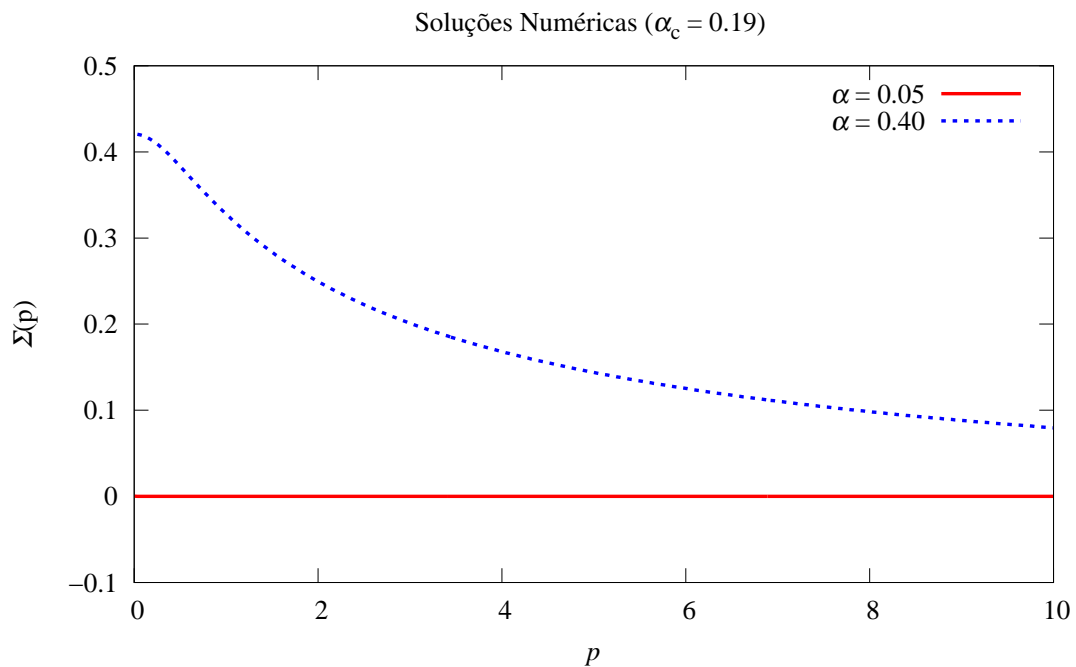


Figura 3.5: Solução numérica mostrando a dependência do momento para a massa gerada dinamicamente para o férmion, utilizando $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.4$ e $M = 300$.

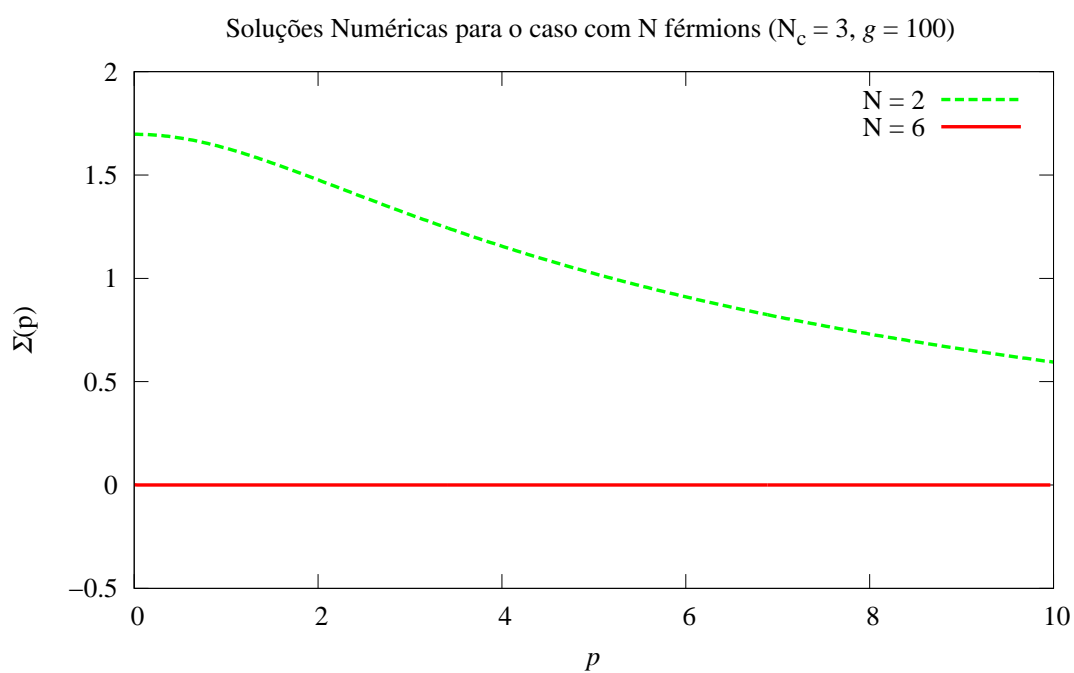


Figura 3.6: Solução numérica da massa gerada dinamicamente para o férmion em função do momento, com $N = 2$ e $N = 6$. Assumimos $M = 300$ e $g = 100$.

Conclusão

Neste trabalho investigamos a quebra da simetria quiral na pseudo eletrodinâmica quântica (PEDQ) em $(2+1)$ d, utilizando o formalismo das equações de Schwinger-Dyson (SD).

No primeiro capítulo fizemos uma revisão da integração funcional aplicada à teoria quântica de campos.

No capítulo 2 discutimos brevemente a criticalidade da EDQ₃ e EDQ₄, destacando os principais resultados obtidos na literatura. Esta revisão nos pareceu importante comentar, uma vez que o modelo considerado em nosso trabalho apresenta similaridades com relação à criticalidade tanto na EDQ₃ como na EDQ₄.

No capítulo 3, encontram-se os resultados originais deste trabalho. Obtemos soluções analíticas das equações de Schwinger-Dyson na PEDQ₃ para a auto-energia do férmion usando um esquema apropriado de “truncamento”. Analisamos duas versões do modelo: consideramos o caso com um único campo fermiônico na aproximação “*quenched-rainbow*” e no segundo caso, consideramos N campos fermiônicos na expansão $1/N$ na aproximação “*unquenched-rainbow*”. Em ambos os casos, usamos a equação linearizada de SD para a auto-energia dos férmions.

No primeiro caso, no limite do contínuo ($\Lambda \rightarrow \infty$), para a teoria sem massa (e para $p \gg \Sigma(p)$), obtemos uma solução não trivial para a massa gerada dinamicamente dos férmions para todos os valores do acoplamento, indicando a existência da quebra da simetria quiral. Para o caso de um “*cutoff*” finito, obtemos uma solução não trivial para a função de massa apenas para o regime de acoplamento $\alpha > \alpha_c = \frac{\pi}{16}$ e portanto, ocorrendo a quebra da simetria quiral. Esta função de massa exhibe uma transição de fase quando $\alpha \rightarrow \alpha_c$ e obedece a lei de escala de Miransky.

Na segunda situação, mostramos que existe quebra de simetria quiral para todos os valores de N no limite do contínuo. Quando considerado um “*cutoff*” finito, existe um número crítico $N_c = \frac{4g}{\pi^2(1+\frac{g}{8})}$, abaixo do qual ocorre quebra de simetria quiral e acima deste valor a simetria quiral é restaurada. No regime de acoplamento forte, ou seja, no limite em que $g \rightarrow \infty$ o número crítico é o mesmo encontrado na EDQ₃. Semelhante ao que acontece no primeiro caso, a função de massa obedece a lei de escala de Miransky.

Os resultados mostram que PEDQ₃ exibe um comportamento crítico interessante na transição de fase quiral, podendo ser resumido da seguinte maneira [48]: (i) quando estudada na aproximação “*quenched-rainbow*”, a PEDQ₃ assemelha-se à EDQ₄, uma vez que a quebra da simetria quiral ocorre para todos os valores de α no limite do contínuo e, quando considerado um Λ finito a quebra da simetria quiral ocorre apenas para valores de $\alpha > \alpha_c$; (ii) quando a PEDQ₃ é estudada na aproximação “*unquenched-rainbow*”, verificou-se que o modelo é similar à EDQ₃ na expansão $1/N$, posto que no limite do contínuo a simetria quiral é quebrada para todos os valores de N e quando considerado um “*cutoff*” finito, ocorre quebra da simetria quiral apenas para $N < N_c$.

Este trabalho poderia ser estendido implementando diferentes tipos de função de vértice nas equações de SD assim como, a introdução de termos subdominantes da renormalização da função de onda. Uma consequência natural desta pesquisa, seria realizar o estudo da PEDQ₃ em banho térmico e agora, tentar responder qual a temperatura crítica na qual a simetria quiral será quebrada.

Apêndice A

Formulário

A.1 Matrizes de Dirac

Em $(2 + 1)$ dimensões as matrizes de Dirac podem assumir duas representações distintas: duas e quatro componentes. Para estudar a quebra da simetria quiral, devemos utilizar uma representação de quatro componentes para as matrizes de Dirac γ^μ , onde nesta representação satisfaz as seguintes relações no espaço euclidiano

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -4\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) = 0 \quad (\text{A.3})$$

e

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(\delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} - \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} + \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha}). \quad (\text{A.4})$$

A.2 Integrais Importantes

A.2.1 Integrais de Feynman

No cálculo das amplitudes de Feynman é conveniente utilizarmos as seguintes identidades,

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta \dots E^\rho} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \dots + \rho)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\rho)} \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \dots x_n^{\rho-1}}{(Ax_1 + Bx_2 + \dots + Ex_n)^{\alpha+\beta+\dots+\rho}}. \quad (\text{A.5})$$

Para o caso com dois denominadores, a fórmula acima se reduz à

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + (1-x)b]^{\alpha+\beta}}, \quad (\text{A.6})$$

sendo útil a seguinte parametrização

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{x}{[ax + (1-x)b]^2}. \quad (\text{A.7})$$

A.2.2 Integrais Regularizadas Dimensionalmente no Espaço Euclidiano

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + a^2]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (a^2)^{d/2-2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{[q^2 + a^2]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (a^2)^{d/2-1} \frac{\Gamma(1+d/2)\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(2)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^\beta}{[q^2 + a^2]^\lambda} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (a^2)^{d/2+\beta-\lambda} \frac{\Gamma(\beta+d/2)\Gamma(\lambda-\beta-d/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(\lambda)}. \quad (\text{A.10})$$

A.2.3 Integração Angular

A integração nos ângulos pode ser facilmente realizada considerando que

$$\int_0^\pi d\phi \sin \phi f(q) = \int_{-1}^1 dz f(q) = \frac{1}{pk} \int_{|p-k|}^{p+k} q dq f(q), \quad (\text{A.11})$$

sendo $q^2 = (p - k)^2 = p^2 + k^2 - 2pkz$ e $z = \cos \phi$. Assim, obtemos as seguintes fórmulas

$$\int_{-1}^1 dz \frac{1}{q} = \frac{2 \min(p, k)}{pk} \quad (\text{A.12})$$

$$\int_{-1}^1 dz \frac{1}{q^2} = \frac{1}{pk} \ln \frac{p+k}{|p-k|} \quad (\text{A.13})$$

$$\int_{-1}^1 dz \frac{1}{q^3} = \frac{1}{pk} \left(\frac{1}{|p-k|} - \frac{1}{p+k} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\int_{-1}^1 dz \frac{1}{q(q+\alpha)} = \frac{1}{pk} \ln \frac{p+k+\alpha}{|p-k|+\alpha} \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Cálculo do Propagador do Campo de Gauge

No espaço Euclidiano, as funções de Green de N pontos, podem ser calculadas através do funcional gerador $Z[J]$ dado por [?]

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = (-1)^N \left(\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} \right)_{J=0}, \quad (\text{B.1})$$

sendo $Z[J]$ escrito como,

$$Z[J] = \rho \int DA_\mu e^{-\int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \left(\frac{1}{(-\square)^{1/2}} \right) F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} A_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{(-\square)^{1/2}} A_\nu \right] - \int d^3x J^\mu A_\mu} = e^{\frac{1}{2} J^\mu \mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1} J^\nu}, \quad (\text{B.2})$$

e o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu}$, no espaço das coordenadas, é escrito como

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \left(-\delta^{\mu\nu} \frac{\square}{(-\square)^{1/2}} + (1 - \lambda) \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{(-\square)^{1/2}} \right) \quad (\text{B.3})$$

Reescrevendo a equação (B.3) no espaço dos momentos, e utilizando a seguinte relação,

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1} \mathcal{O}^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha = (a \delta_{\mu\nu} + b p_\mu p_\nu) \left(\delta^{\mu\alpha} \frac{p^2}{(p^2)^{1/2}} - (1 - \lambda) \frac{p^\mu p^\alpha}{(p^2)^{1/2}} \right), \quad (\text{B.4})$$

determinamos que

$$a = \frac{1}{(p^2)^{1/2}}, \quad (\text{B.5})$$

e

$$b = - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{(p^2)^{3/2}}. \quad (\text{B.6})$$

Dessa maneira, o propagador do campo de gauge será

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = (-1)^2 \left(\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^\mu(x_1) \delta J^\nu(x_2)} \right)_{J=0} = \mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1}, \quad (\text{B.7})$$

e no espaço dos momentos possui a seguinte representação

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{(p^2)^{1/2}} \left[\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2} p_\mu p_\nu \right]. \quad (\text{B.8})$$

Apêndice C

Cálculo do Tensor de Polarização

Veremos a seguir o cálculo do tensor de polarização em $(2 + 1)$ d, no espaço Euclideo. O tensor de polarização, $\Pi^{\mu\nu}$, será dado pela seguinte expressão, onde levamos em consideração apenas os propagadores livres dos férmions,

$$\Pi^{\mu\nu} = -Tr \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (e\gamma^\mu) S_F^0(p+q) (e\gamma^\nu) S_F^0(q). \quad (C.1)$$

Explicitando os propagadores, teremos

$$\Pi^{\mu\nu} = -\alpha Tr \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{1}{(p+q)_\alpha \gamma^\alpha + M} \gamma^\nu \frac{1}{(q)_\beta \gamma^\beta + M}, \quad (C.2)$$

sendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e tomando o traço sobre as matrizes de Dirac com o auxílio das equações (A.2), (A.3) e (A.4), e ainda utilizando a parametrização de Feynman (A.7), encontramos

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & -\alpha \mu^{3-d} f(d) \int_0^1 dx \left\{ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[\frac{2q^\mu q^\nu - \delta^{\mu\nu} q^2}{[q^2 + a^2]^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \frac{(M^2 + p^2 x(1-x))}{[q^2 + a^2]} - \frac{a^2}{[q^2 + a^2]} \right] \right\}, \quad (C.3) \end{aligned}$$

sendo $a^2 = M^2 - p^2 x(1-x)$. Os termos ímpares no momento já foram eliminados.

Utilizamos a relação

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^\mu q^\nu f(q^2) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^2 f(q^2), \quad (C.4)$$

e integrando dimensionalmente, equações (A.8-A.9), temos

$$\Pi^{\mu\nu} = -2\alpha f(d)\mu^{3-d}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}\left(\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\int_0^1 \frac{p^2 x(1-x)}{(p^2 x(1-x) - M^2)^{2-d/2}} dx. \quad (\text{C.5})$$

Para a representação de quatro componentes $f(d) = -4$. Considerando $d = 3$, $M = 0$ e realizando a integração na variável x , encontramos,

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{8}\sqrt{p^2}\left(\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right). \quad (\text{C.6})$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. M. Girvin e A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **58**, 1252 (1987); R. Prange e S. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [2] P. B. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **60**, 821 (1988); I. Dzyaloshinskii, A. M. Polyakov, e P. W. Wiegmann, Phys. Lett. A **127**, 112 (1988); J. G. Bednorz e K. A. Muller, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).
- [3] C. J. Burden, J. Praschifka e C. D. Roberts, Phys. Rev. D **46**, 2695 (1992).
- [4] C. J. Burden e C. D. Roberts, Phys. Rev. D **44**, 540 (1991).
- [5] T. Appelquist e R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **23**, 2305 (1981).
- [6] Robert D. Pisarski, Phys. Rev. D **29**, 2423 (1984).
- [7] Thomas W. Appelquist, Prog. Theor. Phys, **85**, 244 (1985).
- [8] T. W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali, e L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. D **33**, 3704 (1986).
- [9] T. W. Appelquist, D. Nash, e L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. **60**, 2575 (1988).
- [10] G. W. Semenoff e L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. **63**, 2633 (1989).
- [11] D. Nash, Phys. Rev. Lett. **62**, 3024 (1989).
- [12] P. Maris, Phys. Rev. D **52**, 6087 (1995).
- [13] G. Grignani, G. Semenoff, e P. Sodano, Phys. Rev. D **53**, 7157 (1996).

- [14] P. Maris, Phys. Rev. D **54**, 4049 (1996).
- [15] A. Bashir, A. Raya, I. C. Cloët, e C. D. Roberts, Phys. Rev. C **78**, 055201 (2008).
- [16] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75** 1736 (1949).
- [17] Julian S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452 (1951); Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 455 (1951).
- [18] C. D. Roberts, A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994).
- [19] K. Johnson, M. Baker, e R. Wiley, Phys. Rev. **136**, B1111 (1964); Phys. Rev. **163**, 1699 (1967).
- [20] W. A. Bardeen, C. N. Leung, e S. T. Love, Phys. Rev. Lett. **56**, 1230 (1986).
- [21] T. Maskawa e H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **52**, 1326, (1974); Prog. Theor. Phys. **54**, 860 (1975).
- [22] R. Fukuda e T. Kugo, Nucl. Phys. B **117**, 250 (1976).
- [23] Andree Cohen e Howard Georgi, Nucl. Phys. B **314**, 7 (1989).
- [24] E. Dagotto, J. B. Kogut, e A. Kocic, Phys. Rev. Lett. **62**, 1083 (1989).
- [25] A. Bashir e M. R. Pennington, Phys. Rev. D **50**, 7679 (1994).
- [26] D. C. Curtis e M. R. Pennington, Phys. Rev. D **42**, 4165 (1990); A. Kizilersü, M. Reenders e M. R. Pennington, Phys. Rev. D **52**, 1242 (1995); C. J. Burden e P. C. Tjiang, Phys. Rev. D **58**, 085019-1-8 (1998); A. Bashir, A. Kizilersü, e M. R. Pennington, Phys. Rev. D **62**, 085002-1-8 (2000); A. Bashir e A. Raya, Phys. Rev. D **64**, 105001-1-10 (2001); A. Bashir, A. Huet e A. Raya, Phys. Rev. D **66**, 025029-1-8 (2002); C. S. Fischer, R. Alkofer, T. Dahm, e P. Maris, Phys. Rev. D **70**, 073007-1-19 (2004); A. Kizilersü e M. R. Pennington, Phys. Rev. D **79**, 125020-1-25 (2009).

- [27] M. R. Pennington e S. P. Webb, *Brookhaven Nat. Lab. Preprint BNL-40886* (1988); D. Atkinson, P. Johnson e M. R. Pennington, *Brookhaven Nat. Lab. Preprint BNL-41615* (1988); D. Atkinson, P. W. Johnson, e P. Maris, *Phys. Rev. D* **42**, 602 (1990); T. Matsuki, *Z. Phys. C* **51**, 429 (1991); M. R. Pennington e D. Walsh, *Phys. Lett. B* **253**, 246 (1991); D. C. Curtis, M. R. Pennington, e D. Walsh, *Phys. Lett. B* **295**, 313 (1992).
- [28] E. C. Marino, *Phys. Rev. D* **38**, 3194 (1988); *Ann. Phys.* **224**, 225 (1993); *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 4311 (1995); *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 1985 (1996); *Phys. Rev. D* **55**, 5234 (1997).
- [29] E. C. Marino, *Nucl. Phys. B* **408**, 551 (1993).
- [30] R. L. P. G. do Amaral e E. C. Marino, *J. Phys. A* **25**, 5183 (1992).
- [31] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).
- [32] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover (1980); M. O. C. Gomes, *Introdução à Teoria Quântica de Campos*, EDUSP (2002); M. Kaku, *Quantum Field Theory - A Modern Introduction*, Oxford University Press (1993); L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996);
- [33] V.N. Popov *Functional Integrals in Quantum Field Theory e Statistical Mechanics*. Reidel, Dordrecht, (1983).
- [34] L.D. Faddeev e V.N. Popov, *Phys. Lett. B* **25**, 29, (1967).
- [35] B. Holdom, *Phys. Lett. B* **150**, 301, (1985); T. W. Appelquist, M. D. Karabali, e L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 957 (1986); T. W. Appelquist, e L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. D* **36**, 568 (1987); T. W. Appelquist, D. Carrier, e L. C. R. Wijewardhana, e W. Zheng *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1114 (1988); A. Coehen e H. Georgi, *Nucl. Phys. B* **314**, 7 (1989).
- [36] M. Göpfert e G. Mack, *Commun. Math. Phys.* **82**, 545 (1982).

- [37] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, e Products*, Academic Press, (1963).
- [38] T. W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali, e L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. D* **33**, 3774 (1986).
- [39] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro, e A. J. da Silva, *Phys. Rev. D* **43**, 3516 (1991).
- [40] A. Bashir e A. Raya, *Nucl. Phys. B* **709**, 307 (2009);
- [41] V. P. Gusynin, A. W. Schreiber, T. Sizer, A. G. Williams, *Phys. Rev. D* **60**, 065007 (1999);
- [42] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, e Yu. A. Sitenko, *Nuovo Cimento* **6**, 1 (1983); V. A. Miransky, *Phys. Lett. B* **165**, 401 (1985); V. A. Miransky, *Nuovo Cimento A* **90**, 149 (1985).
- [43] D. Atkinson e P. W. Johnson, *Phys. Rev. D* **35**, 1943 (1987).
- [44] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume I Foundations, Cambridge University Press, 1999.
- [45] M. -P. Lombardo, A. Kocic, e J. B. Kogut, hep-lat/9411051; J. B. Kogut e J. -F. Lagae, *Nucl. phys. Proc. Suppl.* **42**, 681 (1995).
- [46] P. Maris, *Phys. Rev. D* **50**, 4189 (1994).
- [47] D. C. Curtis e M. R. Pennington, *Phys. Rev. D* **46**, 2663 (1992); *erratum*, *Phys. Rev. D* **47**, 1729 (1993).
- [48] Van Sérgio Alves, Wallace de S. Elias e Francisco Peña, *Chiral symmetry breaking in three-dimensional pseudo quantum electrodynamics*, (2011), em fase de submissão à *Physical Review D*.
- [49] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 90: The Art of Parallel Scientific Computing*, Volume 2 of Fortran Numerical Recipes, Second Edition (New York: Cambridge University Press, 1996).

- [50] Mathematica Version 8.0, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL (2010).