



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

Tese de Doutorado

# **Migração 3-D Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB) pré-empilhamento no domínio da profundidade**

Glauco Lira Pereira

Belém  
Junho, 2013

Glauco Lira Pereira

**Migração 3-D Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB)  
pré-empilhamento no domínio da profundidade**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Dr. João Carlos Ribeiro Cruz

Belém

Junho, 2013

Dados Internacionais de Catologação-na-Publicação (CIP)  
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

---

S586m Pereira, Glauco Lira  
Migração 3-D Kirchoff-Gaussian-Beam (KGB) pré-empilhamento no domínio da  
profundidade / Glauco Lira Pereira; Orientador: Dr. João Carlos Ribeiro Cruz – 2013  
113 f.: il.

Tese (doutorado em geofísica) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2013.

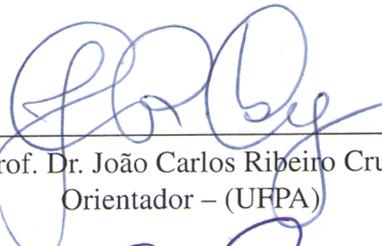
1. Geofísica. 2. Imageamento Sísmico. 3. Feixes Gaussianos 4. Migração. I. Cruz, João Carlos Ribeiro, *orient.* II. Universidade Federal do Pará. III. Título.

Glauco Lira Pereira

## Migração 3-D Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB) pré-empilhamento no domínio da profundidade

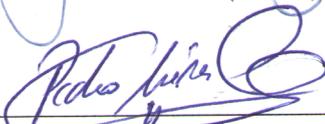
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Data de aprovação: 24/06/2013  
Banca examinadora:



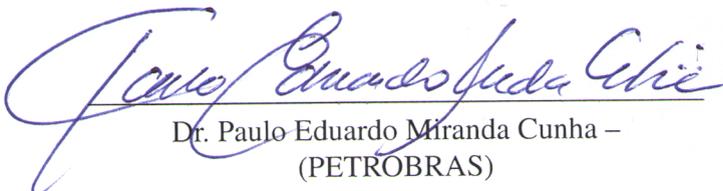
---

Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz  
Orientador – (UFPA)



---

Prof. Dr. Pedro Andrés Chira Oliva – (UFPA)



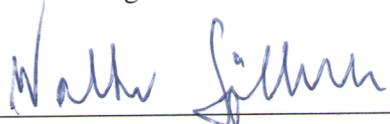
---

Dr. Paulo Eduardo Miranda Cunha –  
(PETROBRAS)



---

Dr. Carlos Augusto Sarmiento Ferreira – (ANP)



---

Dr. Walter Franz Söllner – (PGS)

Belém  
Junho, 2013

Aos meus pais pelos ensinamentos e  
ao Prof. Luiz Rijo (*in memoriam*).

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter proporcionado saúde, confiança e determinação para finalizar esta tese.

Em especial quero agradecer a minha esposa pelo seu apoio, compreensão, amor e carinho.

Ao Prof. Dr. João Carlos que me apresentou o tema desta tese, bem como pelo apoio, orientação, amizade e por todas as oportunidades oferecidas a minha pessoa para concretização do referido trabalho.

Ao Dr. Carlos Sarmiento e Prof. Dr. Manuel Costa pelas valiosas contribuições dispensadas ao longo do desenvolvimento desta tese.

Ao professor Marcos Welby Correa Silva pela oportunidade de ingressar no curso.

A secretária Benildes Lopes (CPGf/UFPa), sempre disposta a ajudar nas questões administrativas e pela valorosa amizade.

Aos membros da Banca Examinadora por aceitarem gentilmente participar deste processo, pelas críticas construtivas e importantes sugestões.

Aos colegas contemporâneos de curso Valdelírio da Silva e Silva, Edelson da Cruz Luz, Walleson Gomes dos Santos, Rodrigo Erasmo e Frayzer Lima, pelo apoio, incentivo e momentos de descontração.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), através dos professores da coordenação de Matemática, por ter apoiado e proporcionado a minha capacitação.

Ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica (CPGF/UFPa), pela infra-estrutura e apoio na realização desta pesquisa.

Ao Cenpes (Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello) da Petrobras, através da rede Geofísica, pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

A todos os amigos que de uma forma direta ou indireta cooperaram para a conclusão desta Tese.

A todos os meus familiares por compreenderem a minha ausência em momentos importantes e torcerem pela conclusão desta etapa acadêmica.

## RESUMO

O Feixe Gaussiano (FG) é uma solução assintótica da equação da elastodinâmica na vizinhança paraxial de um raio central, a qual se aproxima melhor do campo de ondas do que a aproximação de ordem zero da Teoria do Raio. A regularidade do FG na descrição do campo de ondas, assim como a sua elevada precisão em algumas regiões singulares do meio de propagação, proporciona uma forte alternativa na solução de problemas de modelagem e imageamento sísmicos. Nesta Tese, apresenta-se um novo procedimento de migração sísmica pré-empilhamento em profundidade com amplitudes verdadeiras, que combina a flexibilidade da migração tipo Kirchhoff e a robustez da migração baseada na utilização de Feixes Gaussianos para a representação do campo de ondas. O algoritmo de migração proposto é constituído por dois processos de empilhamento: o primeiro é o empilhamento de feixes (“beam stack”) aplicado a subconjuntos de dados sísmicos multiplicados por uma função peso definida de modo que o operador de empilhamento tenha a mesma forma da integral de superposição de Feixes Gaussianos; o segundo empilhamento corresponde à migração Kirchhoff tendo como entrada os dados resultantes do primeiro empilhamento. Pelo exposto justifica-se a denominação migração Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB). As principais características que diferenciam a migração KGB, durante a realização do primeiro empilhamento, de outros métodos de migração que também utilizam a teoria dos Feixes Gaussianos, são o uso da primeira zona de Fresnel projetada para limitar a largura do feixe e a utilização, no empilhamento do feixe, de uma aproximação de segunda ordem do tempo de trânsito de reflexão. Como exemplos são apresentadas aplicações a dados sintéticos para modelos bidimensionais (2-D) e tridimensionais (3-D), correspondentes aos modelos Marmousi e domo de sal da SEG/EAGE, respectivamente.

**Palavras-chaves:** Geofísica. Imageamento Sísmico. Feixes Gaussianos. Migração.

## ABSTRACT

The Gaussian Beam (GB) is an asymptotic solution of the elastodynamic equation in the paraxial vicinity of a central ray, which approaches better the wave field than the standard zero-order ray theory. The GB regularity in the description of the wave field, as well as its high accuracy in some singular regions of the propagation medium, provide a strong alternative to solve seismic modeling and imaging problems. In this thesis, i presenty a new procedure for pre-stack depth migration with true-amplitude, combining the flexibility and robustness of Kirchhoff migration type using superposition of Gaussian beams to represent the wave field. The proposed migration algorithm comprises in two stacking process: the first is the beam stack is applied to subsets of seismic data multiplied by a weight function defined such that stack operator has the same formulation of the integral of the Gaussian beams superposition; the second is a weighted diffraction stack by means of the Kirchhoff type integral having as input the GB stacked data. For these reasons it is called Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB) migration. The main characteristics that distinguish the KGB migration, during the first stage stacking, with other migration methods that also use the theory of Gaussian beams, is the use of the first Fresnel zone projected to limit the width of the subset of seismic traces (beam) using a second-order approximation of the reflection travel time. Examples are shown for applications on two-dimensional (2-D) and three-dimensional (3-D) synthetic seismic data, respectively, to the models Marmousi and SEG/EAGE salt dome data sets.

**Key-words:** Geophysics. Seismic Imaging. Gaussian Beam. Migration.

## LISTA de ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema de coordenadas do raio para uma fonte pontual 3-D. Os ângulos $\gamma_1$ e $\gamma_2$ determinam as coordenadas do raio e $\sigma$ especifica a posição de um ponto no mesmo. . . . .	25
Figura 2 – Sistema de coordenadas centradas no raio. O vetor $\vec{t}$ é o raio unitário tangente em $s$ enquanto que os vetores $\vec{e}_I$ ( $I = 1, 2$ ) formam um sistema cartesiano de coordenadas em um plano perpendicular ao raio. . . . .	28
Figura 3 – Um raio central e um raio paraxial passando por uma superfície anterior $\Sigma_A$ . Definição de coordenada cartesiana local 2-D ( $z_1 e z_2$ ). . . . .	32
Figura 4 – Visualização 2-D da figura (3) . . . . .	32
Figura 5 – Definição dos pontos de $S$ , $R$ , e $R'$ . O ponto $S$ está situado arbitrariamente em $\Omega$ , $R'$ está situado perto de $S$ , possivelmente fora do raio central. Ponto $R$ está situado na intersecção do raio com um plano perpendicular, passando por $R'$ . . . . .	35
Figura 6 – Definição do sistema de coordenadas cartesiano relacionado com uma interface. . . . .	36
Figura 7 – Ilustrações do princípio de Huygens. (a) Uma onda plana no instante $t + \Delta t$ pode ser modelada como a soma coerente das frentes de onda esféricas emitidas por fontes pontuais na frente de onda no tempo $t$ (b) Uma pequena abertura em uma barreira às ondas incidentes irão produzir uma frente de onda difratada se a abertura é pequena comparada ao comprimento de onda. . . . .	37
Figura 8 – Um ponto $P$ rodeada por uma superfície $S$ de forma arbitrária. Fórmula de Kirchhoff é obtida aplicando o teorema de Green para o volume entre $S$ e uma esfera infinitesimal $\Sigma$ em torno $P$ . . . . .	39
Figura 9 – A geometria de raios para um único ponto em uma superfície $dS$ que separa uma fonte e um receptor. . . . .	41
Figura 10 – Ângulos dos raios em relação ao vetor normal a superfície para uma geometria de onda refletida. . . . .	42
Figura 11 – Ilustração de um feixe gaussiano, mostrando as coordenadas centradas no raio, a meia-largura e a amplitude gaussiana. . . . .	44
Figura 12 – Parte real de um feixe gaussiano, com $\tau_o = 0$ , $s_o = 0$ , $v_o = 2$ km/s, $\omega = 20\pi$ . Cuja a posição da fonte é $\mathbf{x}_o = (0, 0, 10)$ e . . . . .	47
Figura 13 – Sistema sísmico em conjunto com o volume de Fresnel. Em cada superfície de interesse do sistema são estabelecidos sistemas de coordenadas cartesianas 2-D locais. . . . .	50
Figura 14 – (a) Ilustração em 2-D da região chamada interface da zona de Fresnel (b) Ilustração em 2-D da zona de Fresnel projetada . . . . .	51
Figura 15 – $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 > 0$ . . . . .	53

Figura 16 – $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ . . . . .	53
Figura 17 – $\epsilon_1 < 0$ e $\epsilon_2 > 0$ . . . . .	54
Figura 18 – $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_2^{(f)}$ . . . . .	54
Figura 19 – Modelo sinclinal de velocidades utilizado para modelagem sísmica. A primeira fonte está em $-25 m$ e o primeiro geofone em $25 m$ . . . . .	57
Figura 20 – Resultados das modelagens sísmica do raio, Kirchhoff e feixes gaussianos para o modelo e geometria de aquisição ilustrado na figura (19). . . . .	58
Figura 21 – Representação esquemática 2-D do processo de empilhamento das amplitudes utilizando os feixes gaussianos. . . . .	63
Figura 22 – Fluxograma do algoritmo de migração KGB implementado. . . . .	68
Figura 23 – Resposta ao impulso do operador Kirchhoff-PSDM . . . . .	69
Figura 24 – Resposta impulsiva do operador, mostrando a elipse de migração. Notar que, apesar da forma elíptica do operador, há um reforço apenas nas proximidades da zona de Fresnel, onde se encontra o ponto difrator. . . . .	70
Figura 25 – Comparação entre as maiores amplitudes de cada traço da resposta impulsiva do operador Kirchhoff e KGB. . . . .	71
Figura 26 – Dados “Marmousi” com afastamento comum de $200 m$ . . . . .	72
Figura 27 – Modelo de velocidades Marmousi. . . . .	73
Figura 28 – Modelo de velocidades Marmousi suavizado e com as frentes de ondas calculadas pelo traçamento de raios. . . . .	74
Figura 29 – Resultado da migração Kirchhoff 2-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	76
Figura 30 – Resultado da migração KGB com verdadeiras amplitudes. . . . .	77
Figura 31 – Geometria de aquisição dos dados sintéticos com 49116 traços (arquivo <i>salt-a1.segy</i> de 128,3 MB do <i>cd-rom</i> de Aminzadeh et al. (1997)). . . . .	78
Figura 32 – Dados “Domo de Sal SEG/EAGE” com afastamento comum mais próximo. . . . .	79
Figura 33 – Modelo do domo de sal SEG/EAGE. O volume delimitado por traços vermelhos é a zona alvo com <i>crossline</i> [7500,7900] e o <i>in-line</i> de [500,11980]. . . . .	80
Figura 34 – Tempos de trânsito do modelo mostrado na figura (33) com a fonte posicionada na coordenada $x = 7700$ , $y = 1020$ e $z = 0$ . . . . .	81
Figura 35 – Modelo suavizado da zona alvo ( <i>crossline</i> =[7500,7900] e <i>in-line</i> =[500,11980]). . . . .	82
Figura 36 – Tempos de trânsito do sub-modelo mostrado na figura (35) com a fonte posicionada na coordenada $x = 7700$ , $y = 1020$ e $z = 0$ . . . . .	83
Figura 37 – Resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	85
Figura 38 – Resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	86
Figura 39 – Seção <i>crossline</i> igual a $7500 m$ do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	87
Figura 40 – Seção <i>crossline</i> igual a $7500 m$ do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	88

Figura 41 – Seção <i>crossline</i> igual a 7600 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	89
Figura 42 – Seção <i>crossline</i> igual a 7600 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	90
Figura 43 – Seção <i>crossline</i> igual a 7700 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	91
Figura 44 – Seção <i>crossline</i> igual a 7700 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	92
Figura 45 – Seção <i>crossline</i> igual a 7800 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	93
Figura 46 – Seção <i>crossline</i> igual a 7800 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	94
Figura 47 – Seção <i>crossline</i> igual a 7900 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	95
Figura 48 – Seção <i>crossline</i> igual a 7900 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes. . . . .	96

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ : Coordenadas cartesianas . . . . .	20
$\omega$ : Frequência angular . . . . .	20
$\rho = \rho(\mathbf{x})$ : Densidade de massa . . . . .	20
$u_i$ : Componentes do campo de deslocamento $\mathbf{u}$ ( $i = 1, 2, 3$ ) . . . . .	20
$c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x})$ : Tensor elástico cartesiano . . . . .	20
$f_i$ : Componentes do Campo de forças $\mathbf{f}$ ( $i = 1, 2, 3$ ) . . . . .	20
$G_{in}$ : Tensor de segunda ordem da Função de Green . . . . .	21
$\mathbf{U}^{(n)}(\mathbf{x})$ : Amplitude vetorial de $n$ -ésima ordem . . . . .	21
$\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}^{(0)}$ : Amplitude vetorial de ordem zero . . . . .	21
$\tau$ : Tempo de trânsito . . . . .	21
$\lambda$ : Comprimento de onda . . . . .	21
$\mathbf{p}$ : Vetor vagarosidade . . . . .	21
$p_i$ : Componentes do vetor vagarosidade $\mathbf{p}$ ( $i = 1, 2, 3$ ) . . . . .	21
$v$ : Velocidade de propagação do campo de ondas . . . . .	21
$a_{ijkl}$ : Normalização do tensor elástico com a densidade . . . . .	22
$\Gamma$ : Matriz de Christoffel . . . . .	22
$A$ : Amplitude escalar . . . . .	22
$\mathbf{g}$ : Vetor unitário de polarização (autovalores de $\Gamma$ ) . . . . .	22
$\delta_{ik}$ : Delta de Kronecker . . . . .	23
$\lambda$ e $\mu$ : Parâmetros de Lamé . . . . .	24
$v_P$ : Velocidade de propagação da onda $P$ . . . . .	24
$v_S$ : Velocidade de propagação da onda $S$ . . . . .	24
$J$ : Jacobiano do raio . . . . .	25
$\sigma$ : Variável natural ao longo do raio . . . . .	25
$s$ : Comprimento do raio . . . . .	25
$\gamma_1, \gamma_2$ e $\gamma_3$ : Sistema de coordenadas do raio . . . . .	26
$\mathcal{H}$ : Hamiltoniano . . . . .	26
$q_1, q_2$ e $q_3$ : Sistema de coordenadas centradas no raio . . . . .	27
$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ : Base do sistema de coordenadas centrada no raio . . . . .	27

$\vec{t}$ : vetor tangente . . . . .	27
$\vec{n}$ e $\vec{b}$ : Vetores, respectivamente, normais e binormais ao raio . . . . .	28
$\Sigma^\perp(R)$ : Plano perpendicular ao raio na posição $R$ do raio . . . . .	28
$\theta$ : Ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\vec{b}$ . . . . .	28
$\mathcal{T}$ : Torção do raio . . . . .	28
$K$ : Raio de curvatura . . . . .	28
$p_I^{(q)}$ : Componentes da vagarosidade em coordenadas centradas no raio ( $I = 1, 2$ ) . . . . .	29
$\mathbf{Q}$ : Matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas centradas no raio . . . . .	29
$\mathbf{P}$ : Matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas das componentes de vagarosidade do raio . . . . .	29
$\mathbf{M}$ : Matriz de derivadas de segunda ordem do tempo de trânsito em relação a coordenadas centradas no raio . . . . .	29
$\mathbf{\Pi}(R, S)$ : Matriz propagadora de um raio conectado a um ponto inicial $S$ e a um ponto final $R$ . . . . .	30
$\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{P}_1$ : Soluções do sistema dinâmico com condições iniciais de fonte plana . . . . .	30
$\mathbf{Q}_2$ e $\mathbf{P}_2$ : Soluções do sistema dinâmico com condições iniciais de fonte pontual . . . . .	30
$\Sigma_A$ : Superfície anterior . . . . .	31
$\Sigma_P$ : Superfície posterior . . . . .	31
$z_1$ e $z_2$ : Sistema de coordenadas cartesianas locais . . . . .	31
$\mathbf{A}$ , $\mathbf{B}$ , $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ : Submatrizes da matriz propagadora de Bortfeld $\mathbf{T}$ . . . . .	33
$\mathbf{T}(R, S)$ : Matriz propagadora de Bortfeld de $S$ em $\Sigma_A$ a $R$ em $\Sigma_P$ . . . . .	33
$p_i^{(x)}$ : Componentes da vagarosidade em coordenadas cartesianas ( $i = 1, 2, 3$ ) . . . . .	34
$\mathbf{Z}$ : Matriz de transformação de coordenadas cartesianas na interface para sistema cartesiano geral . . . . .	35
$\hat{\mathbf{G}}$ : matriz de transformação das coordenadas centradas no raio $q_1, q_2$ e $q_3 = s$ para coordenadas cartesianas na interface $z_1, z_2$ . . . . .	35
$k$ : Módulo do vetor número de onda . . . . .	38
$\Omega$ : Ângulo sólido . . . . .	40
$\mathbf{H}$ : Matriz de transformação de coordenadas centradas para coordenadas cartesianas . . . . .	43
$A^{(x)}(s)$ : Amplitude, em coordenada cartesiana, do raio de comprimento $s$ . . . . .	44
$\mathbf{K}$ : Matriz de curvatura da frente de onda . . . . .	46

$L_o$ : Meia-largura inicial do feixe gaussiano . . . . .	46
$\Re\{M(s)\}$ : Matriz composta pela parte real da Matriz complexa $M(s)$ . . . . .	46
$\lambda_{\Re\{M(s)\}}^{(1)} = \lambda_1(s)$ e $\lambda_{\Re\{M(s)\}}^{(2)} = \lambda_2(s)$ : Autovalores da matriz $\Re\{M(s)\}$ . . . . .	46
$\Im\{M(s)\}$ : Matriz composta pela parte imaginária da Matriz complexa $M(s)$ . . . . .	46
$\lambda_{\Im\{M(s)\}}^{(1)} = \tilde{\lambda}_1(s)$ e $\lambda_{\Im\{M(s)\}}^{(2)} = \tilde{\lambda}_2(s)$ : Autovalores da matriz $\Im\{M(s)\}$ . . . . .	46
$L_1(s)$ e $L_2(s)$ : Eixo maior e eixo menor da meia-largura do feixe gaussiano 3-D . . . . .	48
$T$ : Período da onda monofrequente . . . . .	49
$H_F$ : Matriz da primeira zona de Fresnel . . . . .	49
$H_P$ : Matriz da zona de Fresnel projetada . . . . .	51
$\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ : Vetor-posição sobre a zona de Fresnel projetada . . . . .	51
$\Gamma_S$ e $\Gamma_R$ : Matrizes de configuração da fonte e do receptor, respectivamente . . . . .	51
$r_{zp}$ : Raio da zona de Fresnel projetada . . . . .	51
$\tau_R(\xi)$ : Tempo de reflexão . . . . .	59
$\hat{W}(\omega)$ : Pulso sísmico da fonte no domínio da frequência . . . . .	59
$C_t$ : Perda total das transmissões . . . . .	59
$R_c$ : Coeficiente de reflexão de ondas planas no ponto de reflexão . . . . .	59
$G_s$ : Fator de espalhamento geométrico complexo normalizado pelo raio de reflexão . . . . .	59
$U(\xi, t)$ : Campo de onda sísmica . . . . .	60
$U_{TA}(t)$ : Dados migrados em verdadeira amplitude . . . . .	60
$\tau_S(S(\xi), M)$ e $\tau_G(G(\xi), M)$ : tempos de trânsito a partir da fonte $S$ e receptor $G$ ao ponto arbitrário $M$ na subsuperfície . . . . .	60
$\tau_D(\xi, M)$ : Tempo de trânsito de difração . . . . .	60
$\tau_{gb}$ : Tempo de trânsito paraxiais de segunda ordem complexo . . . . .	62
$\eta$ : Vetor das coordenadas dos parâmetros de configuração na superfície da Terra . . . . .	65
$G_S^B$ : Fator de espalhamento geométrico complexo do feixe gaussiano normalizado . . . . .	66

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	ESTRUTURA DA TESE	17
<b>2</b>	<b>TEORIA DO RAIOS</b>	<b>19</b>
2.1	INTRODUÇÃO	19
2.2	EQUAÇÃO DA ONDA ELÁSTICA	20
2.3	ANÁLISE ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DE ONDA	22
2.4	EQUAÇÃO ICONAL	23
2.5	EQUAÇÃO DO TRANSPORTE	24
2.6	SISTEMA DE TRAÇAMENTO DE RAIOS	26
2.6.1	Sistema de Traçamento Cinemático	26
2.6.2	Sistema de Traçamento Dinâmico	27
2.7	COORDENADAS CENTRADAS NO RAIOS	27
2.8	MATRIZ PROPAGADORA $\Pi$	30
2.9	MATRIZ PROPAGADORA $T$	31
<b>3</b>	<b>APROXIMAÇÕES DO CAMPO DE ONDAS</b>	<b>37</b>
3.1	INTRODUÇÃO	37
3.2	INTEGRAL DE KIRCHHOFF	37
3.3	FEIXES GAUSSIANOS	42
3.3.1	Tempos Paraxiais	43
3.3.2	Aproximação Paraxial do Raio	43
3.3.3	Feixes Gaussianos	45
3.4	INTEGRAL DE SUPERPOSIÇÃO DE FEIXES GAUSSIANOS	48
3.5	SUPERPOSIÇÃO DE FEIXES GAUSSIANOS REFLETIDOS E RESTRITOS AO VOLUME DE FRESNEL	49
3.6	MODELAGEM SÍSMICA POR FEIXES GAUSSIANOS LIMITADOS PELA ZONA DE FRESNEL	52
3.6.1	Sismogramas	55
<b>4</b>	<b>MIGRAÇÃO KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM (KGB)</b>	<b>59</b>
4.1	INTRODUÇÃO	59
4.2	MIGRAÇÃO KIRCHHOFF COM VERDADEIRAS AMPLITUDES	59
4.3	MIGRAÇÃO KGB COM VERDADEIRAS AMPLITUDES	61
<b>5</b>	<b>COMPARAÇÃO ENTRE A MIGRAÇÃO KIRCHHOFF E KGB</b>	<b>68</b>
5.1	FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE MIGRAÇÃO KGB	68
5.2	RESPOSTA AO IMPULSO	69
5.3	MIGRAÇÃO 2-D DOS DADOS SINTÉTICOS MARMOUSI	71

5.4	MIGRAÇÃO 3-D DOS DADOS SINTÉTICOS DO DOMO DE SAL SEG/EAGE	78
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS</b>	<b>97</b>
6.1	CONCLUSÕES	97
6.2	PERSPECTIVAS	98
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>99</b>
	 <b>APÊNDICES</b>	 <b>104</b>
APÊNDICE A	Formalismo da Zona de Fresnel Projetada: Caso 3-D	105
APÊNDICE B	Formalismo da Zona de Fresnel Projetada: Caso 2-D	108
APÊNDICE C	Formalismo da condição inicial dos feixes gaussianos em função da zona de Fresnel projetada: Caso 2-D	109
APÊNDICE D	Análise assintótica da integral de migração KGB	110

# 1 INTRODUÇÃO

O método sísmico consiste na aquisição de dados de e na solução de seu problema inverso. No caso da sísmica de superfície, fontes de energia são posicionadas próximos à superfície da Terra, ao longo de coordenadas específicas, e vários sensores, conhecidos como geofones, são também adequadamente posicionados próximos a essas fontes. Uma vez ordenados geometricamente as fontes e os sensores, é realizado um experimento sísmico. Quando uma fonte de energia é acionada, são obtidos registros no domínio do tempo em cada um dos sensores. No problema inverso, tomando-se as coletas gravadas em diversos sensores, um processamento de dados é realizado, e o objetivo principal é obter uma imagem representativa da subsuperfície, de modo que seja o mais próximo possível da realidade, assim como algumas propriedades físicas ao longo das interfaces que delineiam as estruturas rochosas.

No processamento dos dados sísmicos para obtenção de uma imagem representativa da subsuperfície da Terra, há uma etapa chamada de Migração Sísmica. A migração é o processo que constrói uma imagem a partir de dados sísmicos registrados, de preferência pelo reposicionamento dos dados gravados em sua posição geológica verdadeira no subsolo. Há duas principais abordagens existentes para executar a migração: migração em tempo e migração em profundidade, as quais podem ser feita antes ou depois do empilhamento. As potencialidades e fraquezas de cada tipo de migração são relatadas por Yilmaz (2001).

Dentre diversas técnicas de imageamento, existe a migração tipo Kirchhoff. A migração tipo Kirchhoff se descada devido sua eficácia em compor imagens de refletores com mergulhos íngremes e permitir migrar dados completos ou apenas parte dele, porém a referida migração faz um amplo uso da teoria do raio de ordem zero, como forma de encontrar a função de Green do problema de imageamento, sendo esta teoria aplicada de forma efetiva em meios suaves. Desta forma, alguns fenômenos de propagação da onda, como por exemplo, as difrações observadas em ambientes, onde a geologia do meio é complexa ou em meios que apresentam fortes variações laterais de velocidades, não podem ser simuladas de forma adequada devido a zonas de sombra ou ocorrência de cáusticas.

A geração de uma imagem, utilizando a migração Kirchhoff em profundidade, é a etapa com maior necessidade de ferramentas computacionais e a mais intensa no processamento sísmico. O tempo computacional aumenta quando a migração Kirchhoff opera diretamente sobre o conjunto de dados pré-empilhados e com verdadeiras amplitudes para compor a imagem (BIONDI, 2006). Portanto, ao longo dos anos foi gasto um esforço considerável por pesquisadores tais como Hill (1990), Hill (2001), Albertin et al. (2004), Protasov (2005), Bleistein (2009), Ferreira e Cruz (2009), Gray e Bleistein (2009), Popov et al. (2010) e Costa (2012) na elaboração de estratégias eficazes de imagens mais precisas e computacionalmente viável. Todos utilizaram estratégias que acrescentam o conceito de Feixes Gaussianos (FG) como representação do campo de ondas. As vantagens de considerar FG como solução da equação da onda sísmica vem sendo apresentada há algumas décadas por Babich e Pankratova (1973), Popov (1982), Červený

(1982), Müller (1984), Konopásková (1984), Červený (2001), Popov (2002), Žáček (2006) e Saleh (2011).

A pesquisa que será desenvolvida neste trabalho concentrar-se-á em um tipo de integral de migração, conhecida na literatura como migração Kirchhoff (SCHNEIDER, 1978), pré-empilhamento no domínio da profundidade 3-D. O nome migração Kirchhoff, adotado como operador matemático no processo de imageamento, deve-se basicamente a duas ideias. A primeira é oriunda do princípio de difração escalar, onde o princípio de Huygens de fontes secundárias é utilizado para explicar o caminho seguido por um raio de energia luminosa ao atravessar uma fenda de difração, localizada sobre um anteparo e observada em um ponto qualquer (GOODMAN, 2005). A segunda ideia, relaciona-se com o trabalho pioneiro de Hagedoorn (1954), cujas superfícies de máxima convexidade foram posteriormente relacionadas à equação da onda escalar, tornando-se familiar na literatura geofísica como migração Kirchhoff (HERTWECK et al., 2003). Matematicamente, a integral de Kirchhoff é derivada do teorema de Green, usado para resolver aproximadamente a equação da onda em um meio acústico de um campo de ondas sísmica.

No presente trabalho é apresentado um novo procedimento de migração sísmica em profundidade pré-empilhamento com verdadeiras amplitudes que combina a flexibilidade da migração tipo Kirchhoff (SCHNEIDER, 1978; BLEISTEIN, 1987; SCHLEICHER et al., 1993) e a robustez da migração baseada na utilização de Feixes Gaussianos para a representação do campo de ondas (HILL, 1990; HILL, 2001). O algoritmo de migração proposto é constituído por dois processos de empilhamento: o primeiro é o empilhamento de feixes (“*beam stack*”) aplicado a subconjuntos de dados sísmicos multiplicados por uma função peso definida de modo que o operador de empilhamento tenha a mesma forma da integral de superposição de Feixes Gaussianos; o segundo empilhamento corresponde à migração Kirchhoff tendo como entrada os dados resultantes do primeiro empilhamento. Pelo exposto justifica-se a denominação migração Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB).

Para um melhor entendimento, será feita uma revisão da modelagem sísmica usando a teoria de espalhamento Kirchhoff (GOODMAN, 2005) e dos Feixes Gaussianos para o caso 2-D (MÜLLER, 1984; KONOPÁSKOVÁ, 1984; ČERVENÝ, 2001; POPOV, 2002)). A revisão também se estende para a teoria de migração Kirchhoff com verdadeiras amplitudes (SCHLEICHER et al., 2007), visto que esta é usada como principal referência de comparação para os resultados obtidos com o novo procedimento apresentado nesta Tese. Os estudos anteriores desenvolvidos por Ferreira (2007) e os resultados obtidos para meios 2,5-D por Costa (2012), serviram de motivação para o caso 3-D ora apresentado neste trabalho.

## 1.1 ESTRUTURA DA TESE

Além deste capítulo introdutório, esta Tese é composta pelos seguintes capítulos:

**Capítulo 2** - São apresentadas as ideias básicas e fórmulas estabelecidas pela teoria do raio de ordem zero, inicialmente em meio anisotrópico 3-D e posteriormente em meio isotrópico e não-homogêneo.

**Capítulo 3** - Teoria do raio, em alguns casos, se depara com problemas de singularidades e, com isso, limita o método do raio apenas para modelos estratificados. Neste capítulo, descreveremos a extensão deste método como estratégia para contornar algumas lacunas existente na teoria do raio de ordem zero.

**Capítulo 4** - É apresentada a forma analítica do operador de migração Kirchhoff com feixes gaussianos acoplado em sua forma geral. Ainda neste capítulo, são obtidas expressões matemáticas para os seguintes parâmetros: linhas de empilhamento, fatores de espalhamento geométrico, fatores de correção, abertura de migração e para a função peso de migração.

**Capítulo 5** - É apresentado o algoritmo da migração KGB através de fluxograma para explicitar a teoria descrita no capítulo 4. Além disso, o operador Kirchhoff e KGB serão aplicados em dados 2-D e 3-D, com o objetivo de comparar ambos métodos de migração e, com isso, evidenciar a melhora na imagem gerada pelo método proposto nesta Tese.

**Capítulo 6** - Discutimos as principais conclusões e perspectivas desse trabalho.

## 2 TEORIA DO RAIOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

A teoria sísmica do raio empresta muito dos seus princípios e metodologia da teoria de raios eletromagnéticos, ou óptica geométrica como é geralmente chamado (KLINE e KAY, 1965; BORN e WOLF, 1999). Existem duas abordagens principais para a derivação das equações de raios. A primeira, uma abordagem clássica é inteiramente baseada em princípios heurísticos geométricos e portanto é chamada teoria geométrica do raio. A segunda abordagem deriva das equações de raio a partir da equação de onda por meio da análise assintótica. Esta abordagem é conhecida como teoria assintótica do raio.

A teoria geométrica do raio tem desempenhado um papel de destaque na história da ciência natural, como uma teoria prática para explicar a propagação da luz. A propagação retilínea da luz e da lei de reflexão foram descritas por Euclides cerca de 300 a.C. Os passos mais importantes foram feitos no século XVII com a lei de Snell da refração e pelo princípio do menor tempo de Fermat. A declaração posterior de semelhantes princípios geométricos na mecânica clássica, finalmente, levou a uma extensa teoria matemática associada aos nomes de Euler, Lagrange, Hamilton e Jacobi (LANCZOS, 1986; GOLDSTEIN et al., 2001).

Ao longo do desenvolvimento da teoria do raio geométrico entendeu-se que a teoria era limitada e que não poderia explicar um grande número de fenômenos observados em experimentos com luz. Depois de Maxwell ter estudado uma teoria mais completa para fenômenos da luz, os esforços começaram a reconciliar as teorias de raios e ondas.

Estes esforços levaram ao desenvolvimento da teoria assintótica do raio, na qual as equações do raio são derivadas da equação de onda por uma análise assintótica de alta frequência.

Além de estabelecer a teoria de raios como uma aproximação assintótica de alta frequência, a análise assintótica também estendeu teoria do raio para explicar uma gama maior de fenômenos ondulatórios. Considerando que a teoria do raio geométrico formalmente explica apenas os caminhos dos raios e os tempos de viagem, a teoria assintótica do raio também fornece uma base teórica para o cálculo da amplitude e da polarização. Além disso, a teoria do raio em meios anisotrópicos é muito mais fácil fazendo uso da análise assintótica do que os princípios geométricos, embora seja possível fazê-lo (CĚRVENÝ, 2002).

A derivação da teoria do raio sísmico para equação da onda elástica depende de três técnicas analíticas essenciais:

- Da definição de um *ansatz* adequado para a solução da equação de onda (BABICH, 1994);
- De uma análise assintótica de alta frequência para determinar as equações para os coeficientes do *ansatz* (BLEISTEIN e HANDELSMAN, 1975);
- Da solução destas equações utilizando o método de características (BLEISTEIN, 1984).

## 2.2 EQUAÇÃO DA ONDA ELÁSTICA

O método de modelagem sísmica que utiliza a teoria do raio, corresponde a uma solução aproximada da equação da onda, conhecida como solução assintótica válida para altas frequências. Fornece tanto os tempos de percurso das ondas refletidas, como os coeficientes de reflexão e se desejado, permite incorporar o efeito de espalhamento geométrico no cálculo das amplitudes.

Esse método tem sido amplamente empregado para a modelagem das ondas sísmicas em diversas aplicações, entretanto possui limitação para meios não homogêneos. Sua aplicação só é válida se as variações espaciais forem suaves.

Uma das características de métodos de raios é que os cálculos não precisam ser realizados diretamente em termos das coordenadas espaciais do meio. A equação da onda é uma equação diferencial parcial para o deslocamento em função das coordenadas espaciais. As equações cinemáticas do raio, por outro lado, são equações para a posição de raios como uma função de um único parâmetro como o tempo ou comprimento de arco, conhecido como o parâmetro de fluxo. O raio descrito por estas equações é uma linha de fluxo aproximado de energia das ondas em alta frequência.

Para estudar um campo de onda completo, é necessário considerar um conjunto de raios, ou campo de raios, parametrizados. No caso de uma fonte pontual, por exemplo, a parametrização indica a direção inicial de raios ao local da fonte.

O pressuposto básico subjacente a todas as seguintes características é que as propriedades físicas do meio em questão são adequadamente descritos em termos de Elastodinâmica. Nesse caso, a combinação da equação do movimento de Newton e Lei de Hooke da elasticidade (ambas generalizadas para meios contínuos) resulta na equação de ondas elásticas. Em coordenadas cartesianas é expressa como (KRAAIJPOEL, 2003) :

$$\rho\omega^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = -f_i \quad (2.1)$$

Sendo,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  as coordenadas,  $\omega$  a frequência angular,  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  a densidade de massa,  $u_i = u_i(\mathbf{x}, \omega)$  são as componentes do campo de deslocamento  $\mathbf{u}$ ,  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x})$  o tensor elástico e  $f_i = f_i(\mathbf{x}, \omega)$  são componentes do campo de forças externas  $\mathbf{f}$ .

Soluções para equação da onda (2.1) com uma força arbitrária, para o caso de uma fonte pontual, também podem ser expressas com uma representação integral em termos de uma função de Green (AKI e RICHARDS, 2002):

$$\rho\omega^2 G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial G_{kn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)}{\partial x_l} \right) = -\delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.2)$$

Com  $u_i(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\mathcal{D}} G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) f_n(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{x}'$ . Onde, a função de Green  $G_{in}$  é um tensor de segunda ordem devido a característica vetorial do deslocamento e da força dirigida. A tarefa do método do raio é, normalmente, determinar a função de Green dada uma posição da fonte e o meio.

O primeiro passo na análise é a definição de uma *ansatz* para a solução da equação de onda (2.1). A solução assintótica baseada na teoria do raio (*ART-ansatz*) é uma série polinomial em potências inversa de  $\omega$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \sim \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n} \mathbf{U}^{(n)}(\mathbf{x}) \right) e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \quad (2.3)$$

A série é parametrizada pela amplitude vetorial  $\mathbf{U}^{(n)}(\mathbf{x})$ , de componentes  $U_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Na maioria das situações práticas em que apenas o termo de ordem zero da série é mantido a solução da equação da onda é dada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \sim \mathbf{U}(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \quad (2.4)$$

Onde,  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}^{(0)}$  é a amplitude,  $\omega\tau(\mathbf{x})$  a função fase e  $\tau$  o tempo de trânsito. A transformada de Fourier de (2.4) para o domínio do tempo gera um pulso delta de Dirac  $\mathbf{U}(\mathbf{x})\delta(\tau_0 - \tau(\mathbf{x}))$ .

As formas funcionais de (2.3) e (2.4), ou seja, um termo de amplitude multiplicado por um termo oscilatório, são generalizações das soluções exatas conhecidas em meios homogêneos, como de ondas planas e de ondas esféricas. As formas são generalizadas no sentido de que ambos os termos de amplitude e fase podem ser funções arbitrárias da posição.

Na teoria do raio sísmico da série na equação (2.3), o termo da amplitude tem uma dependência com a frequência. Nota-se que ambas (2.3) e (2.4) descrevem um campo de onda evoluindo com frentes de onda em superfícies definidas por  $\tau(\mathbf{x})$  constante.

A premissa básica é que se o comprimento de onda  $\lambda = 2\pi v/\omega$  é relativamente curto em relação às variações no meio, sendo o mesmo localmente homogêneo, e a propagação do campo de onda deve se assemelhar localmente como em um meio homogêneo. Ou seja:

$$\lambda \ll \frac{u_i}{|\nabla u_i|} \quad , \quad \lambda \ll \frac{p_i}{|\nabla p_i|} \quad e \quad \lambda \ll \frac{v}{|\nabla v|} \quad (2.5)$$

Sendo,  $u_i$  as componentes do campo  $\mathbf{u}$ , o vetor vagarosidade  $\mathbf{p}$  está representado pelas suas componentes  $p_i$  e  $v$  é a velocidade de propagação do campo de ondas.

### 2.3 ANÁLISE ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DE ONDA

Ao escolher um *ansatz* com grau de liberdade reduzido, para facilitar a solução da equação de onda, a perspectiva de obtenção da solução exata é perdida. Em vez disso, a solução desejada está próxima da solução exata, para circunstância específica.

Na teoria assintótica do raio, o objetivo é fazer o ajuste *ansatz* na equação da onda em um sentido assintótico, ou seja, no limite de alta frequência. Para este fim a análise assintótica é aplicado na equação de onda, onde a solução é assumida para atingir a forma do (2.4). Esta análise leva à solução do tempo trânsito  $\tau$  e amplitude  $U$  que, quando satisfeitas, produz o ajuste da equação da onda assintótica.

Inicialmente, são procuradas soluções que satisfazem a equação da onda (2.1) na ausência de força externa. Substituindo (2.4) em (2.1), recombinao termos e dividindo por  $\rho(i\omega)^2$  obtém-se:

$$\left[ \frac{c_{ijkl}}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_l} U_k - U_i \right] + (i\omega)^{-1} \left[ \frac{c_{ijkl}}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial \tau}{\partial x_l} U_k \right) \right] + (i\omega)^{-2} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) \right] = 0 \quad (2.6)$$

Para satisfazer esta equação para  $\omega$  arbitrária cada um dos três termos entre colchetes deve desaparecer. É evidente que, em circunstâncias gerais, isto não pode ser realizado, porque o número total de equações são nove (três componentes em cada termo), enquanto há apenas quatro graus de liberdade no *ansatz* ( $\tau$  e três componentes de  $\mathbf{U}$ ). A ordenação dos termos em potências como inverso da frequência na Equação (2.6) mostra a sua relativa importância na análise assintótica. O primeiro termo entre parênteses é o mais importante, pois se determina  $\tau$  e a direção (polarização) de  $\mathbf{U}$ . O segundo termo, obtêm-se uma relação da magnitude (amplitude escalar) de  $\mathbf{U}$ .

Definindo o vetor vagarosidade  $\mathbf{p}$  como o gradiente do tempo de trânsito,  $a_{ijkl}$  a normalização do tensor elástico com a densidade e  $\Gamma$  como a matriz de Christoffel:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}}, \quad a_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{\rho}, \quad \Gamma_{ik} = a_{ijkl} p_j p_l \quad (2.7)$$

Iremos agora parametrizar a amplitude  $\mathbf{U}$  por uma amplitude escalar  $A$  e um vetor unitário  $\mathbf{g}$  de polarização. E, também, o vetor vagarosidade pela velocidade escalar  $v$  e o versor  $\mathbf{n}$  normal à frente de onda:

$$\mathbf{U} = A\mathbf{g}, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{v}\mathbf{n} \quad (2.8)$$

Assim, a matriz de Christoffel pode ser reescrita como:

$$\widehat{\Gamma}_{ik} = a_{ijkl}n_jn_l \Rightarrow \Gamma_{ik} = v^{-2}\widehat{\Gamma}_{ik} \quad (2.9)$$

## 2.4 EQUAÇÃO ICONAL

A sentença (2.6) é verdadeira apenas quando os três termos são iguais a zero. Assim, considerando o primeiro da equação (2.6) termo nulo:

$$\left[ \frac{c_{ijkl}}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_l} U_k - U_i \right] = 0 \quad (2.10)$$

Usando as definições (2.7) - (2.8):

$$a_{ijkl}p_jp_l U_k - U_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

O sistema 2.11 é formado por três equações lineares para  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ . Reescrevendo 2.11 em termos da matriz de Christoffel, a equação 2.11 pode ser escrita como:

$$\Gamma_{ik}U_k - U_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

Ou:

$$(\Gamma_{ik} - \delta_{ik})g_k = 0, \quad (2.13)$$

Sendo,  $\delta_{ik}$  a delta de Kronecker e  $g_k = U_k A^{-1}$  definido em (2.8). Comparando com uma equação de autovetores-autovalores genérica  $(\Gamma_{ik} - G^{(m)}\delta_{ik})g_k^{(m)} = 0$ , com a condição de normalização  $g_k^{(m)}g_k^{(m)} = 1$  ( $m = 1, 2, 3$ ) entre os autovetores. A equação (2.13) é uma equação de autovalores iguais a 1. Ou seja:

$$(\Gamma_{ik} - G^{(m)}\delta_{ik})g_k = 0, \quad G^{(m)} = 1. \quad (2.14)$$

O sistema (2.13) contém informação sobre os tempos de trânsito e  $g_k$  determina a polarização de cada tipo de onda (*quasi-compressional*  $qP$ , *quasi-shear*  $qS_1$  e  $qS_2$ ). O sistema pode ser substituído por três equações independente do tempos de trânsito, projetando seus termos para o conjunto das polarizações ortogonais. Para um tipo de onda específica, por exemplo  $qP$ , os termos  $\Gamma_{ik} = a_{ijkl}p_jp_l$  e  $g_k$  do lado esquerdo de (2.13) são paralelos as polarizações da

onda, e ortogonal aos outros dois. A projeção, portanto, deixa apenas uma equação que não é trivialmente resolvida, a *equação iconal*:

$$a_{ijkl}p_j p_l g_i g_k - 1 = 0 \quad (2.15)$$

A equação (2.15) tem a mesma forma, para cada tipo de onda. É uma equação apenas do tempo de trânsito, tal como a polarização é implicitamente fixada pela escolha do tipo de onda e do vetor vazarosidade nas condições iniciais. Em um meio perfeitamente elástico, isotrópico e não-homogêneo, considera-se somente a componente compressional principal do campo de ondas sísmico. Assim, o tensor  $c_{ijkl}$  pode ser reescrito por apenas dois parâmetros espaciais e independentes  $\lambda$  e  $\mu$ , denominados constantes de Lamé (AKI e RICHARDS, 2002):

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.16)$$

Em um meio isotrópico, determina-se apenas o autovetor  $\mathbf{g}^{(3)}$  devido a  $G_1 = G_2$ . Logo, substituindo (2.16) em (2.15), tem-se:

$$\left[ \frac{\lambda + \mu}{\rho} p_i p_k + \frac{\mu}{\rho} \delta_{ik} p_l p_l - \delta_{ik} \right] g_k^{(3)} = 0 \quad (2.17)$$

Sabendo que  $v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  é a velocidade da onda  $P$  e  $v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  a velocidade da onda  $S$ . A equação iconal pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\nabla \tau \cdot \nabla \tau = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})} \quad (2.18)$$

Onde,  $v$  pode ser  $v_P$  ou  $v_S$ .

## 2.5 EQUAÇÃO DO TRANSPORTE

Visto que o tempo de trânsito é regido pela equação iconal (2.15) (ou equação (2.18)) e a polarização está implícita na escolha do tipo da onda, apenas mais uma equação é necessária para determinar o coeficiente de (2.4).

A equação para a amplitude escalar  $A(x)$ , definida em (2.8), deve ser obtida a partir do segundo termo entre colchetes em (2.6). Tomando o produto interno dos termos restantes em (2.6) com a direção de polarização e igualando a zero resulta na equação do transporte. Com a ajuda das definições (2.7) e (2.8), a *equação do transporte* pode ser expressa como:

$$a_{ijkl} p_j g_i \frac{\partial(Ag_k)}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho A a_{ijkl} p_l g_k) g_i = 0 \quad (2.19)$$

Com alguns rearranjos de termos (ČERVENÝ, 2001) pode ser reformulada como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho A^2 a_{ijkl} p_l g_j g_k) = 0 \quad (2.20)$$

Cuja forma é semelhante à lei de conservação. Em um meio perfeitamente elástico, isotrópico e não-homogêneo, a equação do transporte pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$2(\nabla\tau \cdot \nabla A)v + v^2 \nabla A^2 \tau + A(\nabla\tau \cdot \nabla v^2) = 0 \quad (2.21)$$

Desprezando o termo que inclui gradiente de velocidade, fazendo uso da igualdade  $\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}$  e do lema de Smirnov (PORTUGAL, 2002), a equação diferencial parcial (2.21) pode ser transformada na equação diferencial ordinária expressa por:

$$\frac{d}{d\sigma} \ln [A^2] = \frac{d}{d\sigma} \ln \left[ \frac{v}{J} \right] \quad (2.22)$$

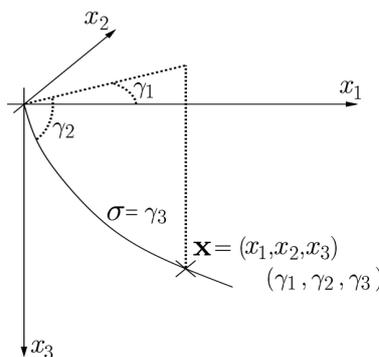
Onde  $J$  é o chamado Jacobiano do raio. Integrando-se ambos os lados da equação (2.22) em relação a  $\sigma$ , tem-se a seguinte solução da equação de transporte:

$$A(\sigma) = A(\sigma_0) \sqrt{\frac{v(\sigma)J(\sigma_0)}{v(\sigma_0)J(\sigma)}} \quad (2.23)$$

$$\sigma = \sigma_o + \int_{\sigma_o}^s v ds = \sigma_o + \int_{\tau_o}^{\tau} v^2 d\tau$$

Sendo,  $\sigma$  chamada por Červený (2001) de variável natural ao longo do raio,  $s$  comprimento do raio e  $\tau$  o tempo de trânsito.

Figura 1 – Sistema de coordenadas do raio para uma fonte pontual 3-D. Os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  determinam as coordenadas do raio e  $\sigma$  especifica a posição de um ponto no mesmo.



Fonte: Do autor

O significado físico do Jacobiano está relacionado à densidade de raios, ou espalhamento geométrico e pode ser representado por:

$$J = \frac{1}{v} \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \sigma)} \right| \quad (2.24)$$

Sendo,  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  chamado de sistema de coordenadas do raio cujas coordenadas  $\gamma_1, \gamma_2$  descrevem os parâmetros de partida de um raio específico e  $\gamma_3$  uma constante monótona ao longo do raio, que no caso apresentado na equação (2.24) e ilustrado na figura (1)  $\gamma_3 = \sigma$ .

## 2.6 SISTEMA DE TRAÇAMENTO DE RAIOS

### 2.6.1 Sistema de Traçamento Cinemático

A etapa essencial da teoria assintótica do raio, é encontrar a função fase  $\tau(x_i)$  da equação iconal (2.18) ou (2.15). A maneira mais fácil de obter a solução da equação iconal é aplicando o método das características (COURANT e HILBERT, 1989), o qual tem a vantagem de substituir a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. As equações obtidas são as equações hamiltoniana do movimento, ou as *equações cinemática do raio*:

$$\frac{dx_i}{d\gamma_3} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{d\gamma_3} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{d\tau}{d\gamma_3} = p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (2.25)$$

Onde,  $\mathcal{H}$  é o Hamiltoniano e  $\gamma_3$  um parâmetro ao longo da trajetória do raio. Para anisotropia, uma possível escolha do Hamiltoniano é a equação (2.15). Ou seja :

$$\mathcal{H}(x_i, p_i) = a_{ijkl} p_j p_l g_i g_k - 1 = 0 \quad (2.26)$$

Usando os autovalores da equação (2.15),  $a_{ijkl} = c_{ijkl}/\rho$  e  $\gamma_3 = \tau$ . Temos o sistema:

$$v_i = \frac{dx_i}{d\tau} = a_{ijkl} p_l g_j g_k \quad , \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{2} a_{n,jkl,i} p_n p_l g_j g_k \quad (2.27)$$

Onde,  $v_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor velocidade no meio anisotrópico. Para um meio isotrópico, com  $v(\mathbf{x}) = v$ , o Hamiltoniano pode ser expresso como:

$$\mathcal{H}(x_i, p_i) = \frac{1}{n} [(v^2 p_i p_i)^{n/2} - 1] = 0 \quad (2.28)$$

Onde  $n$  é um valor real. O fator  $1/n$  na equação (2.28) é usado para obter um parâmetro  $\gamma_3$  adequado ao longo da trajetória do raio. Uma propriedade interessante do Hamiltoniano na equação (2.28) é que  $d\tau/d\gamma_3 = (v^2 p_k p_k)^n = 1$  para qualquer  $n$  arbitrário. Com isso, a variável

$\gamma_3$  é igual a  $\tau$  para qualquer  $n$ . Para o caso de  $n = 2$ , as equações (2.25) podem ser expressas como:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = v^2 p_i \quad , \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{2} p_k p_k \frac{\partial v^2}{\partial x_i} \quad (2.29)$$

### 2.6.2 Sistema de Traçamento Dinâmico

As equações do sistema de traçamento dinâmico do raio são obtidas da diferenciação da Equação (2.27) ou (2.29) com relação aos parâmetros  $\gamma_J$  ( $J = 1, 2$ ) do raio. Para,  $\gamma_3 = \tau$  o procedimento rende a equação:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{iJ}}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial p_i \partial x_k} X_{kJ} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial p_i \partial p_k} Y_{kJ} \right] \quad , \\ \frac{dY_{iJ}}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x_i \partial x_k} X_{kJ} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x_i \partial p_k} Y_{kJ} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sendo  $\mathcal{G} = a_{ijkl} p_j p_l g_i g_k$  e os elementos  $X_{i3} = \frac{\partial x_i}{\partial \tau}$  e  $Y_{i3} = \frac{\partial p_i}{\partial \tau}$  podem ser determinados diretamente do traçamento de raios (2.27). Para meios isotrópicos, o traçamento dinâmico do raio é:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{iJ}}{d\tau} &= 2v \frac{\partial v}{\partial x_k} p_i X_{kJ} + v^2 Y_{kJ} \quad , \\ \frac{dY_{iJ}}{d\tau} &= \frac{1}{v} \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} Y_{kJ} \right] X_{kJ} \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

O sistema (2.29) e (2.31) precisam que a função velocidade  $v$  seja contínua e derivável até segunda ordem.

## 2.7 COORDENADAS CENTRADAS NO RAI0

Em algumas situações, é mais conveniente trabalhar com sistema de coordenadas centrada no raio  $q_1, q_2$  e  $q_3$ , com base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  (figura (2)), em vez de coordenadas cartesianas globais. Por exemplo, quando há necessidade de calcular raios nas proximidades de um raio central, chamado de raios paraxiais.

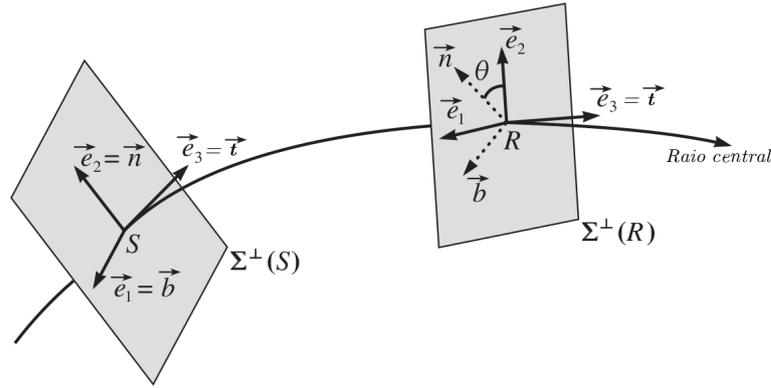
O vetor radial nas coordenadas centrada no raio é dado pela equação:

$$\hat{r}(q_1, q_2, s) = \hat{r}(0, 0, s) + \vec{e}_1(s)q_1 + \vec{e}_2(s)q_2 \quad (2.32)$$

No raio central  $q_1 = q_2 = 0$  e  $s$  é o comprimento do raio. O raio na vizinhança próxima de um raio central depende do modelo em consideração. Os vetores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  e o vetor tangente  $\vec{t}$  formam uma base ortogonal, ou seja,  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{t}$ .

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{n}\cos(\theta) - \vec{b}\sin(\theta) \\ \vec{e}_2 &= \vec{n}\sin(\theta) + \vec{b}\cos(\theta)\end{aligned}\quad (2.33)$$

Figura 2 – Sistema de coordenadas centradas no raio. O vetor  $\vec{t}$  é o raio unitário tangente em  $s$  enquanto que os vetores  $\vec{e}_I$  ( $I = 1, 2$ ) formam um sistema cartesiano de coordenadas em um plano perpendicular ao raio.



Fonte: Adaptado de Červený (2001)

O vetor  $\vec{t}$  é perpendicular à frente de onda e  $\vec{e}_I$  ( $I = 1, 2$ ) estão situados na frente de onda. Os vetores  $\vec{n}$  e  $\vec{b}$  são chamados de normais e binormais, como pode ser visto no plano  $\Sigma^\perp(R)$  da figura (2). Os vetores  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{t}$  obedecem às formulas de Frenet. O ângulo  $\theta$  entre  $\vec{e}_1$  e  $\vec{b}$ , assim como entre  $\vec{e}_2$  e  $\vec{n}$  podem ser obtidos da integração através da torção  $\mathcal{T}$  ao longo do raio:

$$\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s \mathcal{T}(\sigma) d\sigma \quad (2.34)$$

Derivando a equação (2.32) e os vetores bases (2.33) em relação ao comprimento  $s$  do raio de curvatura  $K$ , obtemos a equação:

$$\left| \frac{d\hat{r}}{ds} \right| = 1 - K\cos(\theta)q_1 - K\sin(\theta)q_2 \quad (2.35)$$

E o sistema de equações:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1}{ds} &= -K\cos(\theta)\vec{t} = \left( \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{t} \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} &= -K\sin(\theta)\vec{t} = \left( \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{t} \\ \frac{d\vec{t}}{ds} &= K\cos(\theta)\vec{e}_1 + K\sin(\theta)\vec{e}_2 = \left( \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{e}_I \right) \vec{e}_I\end{aligned}\quad (2.36)$$

Considerando que  $\vec{t} = v\hat{p}$ ,  $ds = dvd\tau$  e as equações de traçamento de raios (2.29), a derivada do vetor tangente em um meio isotrópico é dada pela sentença:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial q_I} \Big|_{q_K=0} \vec{e}_I \quad (2.37)$$

O sistema de traçamento em coordenadas centradas no raio é obtido usando o sistema (2.25). Será somente exibido o sistema de equações para o traçamento de raios em meios isotrópicos conforme Červený (2001):

$$\begin{aligned} \frac{dq_I}{ds} &= vp_I^{(q)} \\ \frac{dp_I^{(q)}}{ds} &= -\frac{1}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial q_I \partial q_J} q_J \end{aligned} \quad (2.38)$$

Onde,  $p_I^{(q)}$  é a I-ésima componente da vagarosidade em coordenadas centradas no raio. O traçamento dinâmico do raio é expresso pelo sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} &= v\mathbf{P} \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} &= -\frac{1}{v^2} \mathbf{V}\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes  $2 \times 2$  cujas componentes são definidas por:

$$Q_{IJ} = \frac{\partial q_I}{\partial \gamma_J} \Big|_{q_1, q_2=0}, \quad P_{IJ} = \frac{\partial p_I^{(q)}}{\partial \gamma_J} \Big|_{q_1, q_2=0}, \quad V_{IK} = \frac{\partial^2 v}{\partial q_I \partial q_K} \Big|_{q_1, q_2=0} \quad (2.40)$$

Matematicamente,  $\mathbf{Q}$  é a matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas centradas no raio e  $\mathbf{P}$  é uma matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas das componentes de vagarosidade do raio. Fisicamente,  $\mathbf{Q}$  é matriz de espalhamento geométrico. Desta maneira, definimos uma matriz  $2 \times 2$   $\mathbf{M}$  de derivadas de segunda ordem do tempo de trânsito em relação a coordenadas centradas no raio como:

$$M_{IJ} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_I \partial q_J} \quad (2.41)$$

Que é equivalente a escrever  $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$ , avaliada ao longo do raio. Aqui, levamos em consideração o fato de que  $p_I^{(q)} = \frac{\partial \tau}{\partial q_I}$ , ao longo do raio.

O conhecimento das matrizes dinâmicas do sistema (2.39) é de fundamental importância para o cálculo das amplitudes ao longo de um raio. Em termos dessa quantidade, podemos reescrever (2.23) da seguinte maneira:

$$A(\sigma) = A(\sigma_0) \sqrt{\frac{\det \mathbf{Q}(\sigma_0)}{\det \mathbf{Q}(\sigma)}} \quad (2.42)$$

## 2.8 MATRIZ PROPAGADORA $\Pi$

Definindo a matriz coluna  $\mathbf{W}$  de dimensão  $4 \times 1$ , tal que  $\mathbf{W} = (q_1, q_2, p_1^{(q)}, p_2^{(q)})$ . O sistema de traçamento de raios (2.38) pode ser escrito como:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{W} = \mathbf{S} \mathbf{W} \quad (2.43)$$

Onde,  $\mathbf{S}$  é uma matriz  $4 \times 4$  dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \mathbf{I} \\ -\frac{1}{v^2} \mathbf{V} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

As matrizes  $\bar{\mathbf{0}}_{2 \times 2}$  e  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  são, respectivamente, nula e identidade.

Uma matriz  $4 \times 4$   $\mathbf{A}$  é chamada de matriz integral, se satisfaz a relação:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (2.45)$$

Sendo que cada coluna de  $\mathbf{A}$  obedecem (2.43). Se  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  para um ponto inicial  $S$  do raio,  $\mathbf{A}$  é também considerada matriz propagadora (em  $S$ ). Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz integral formada por quatro soluções lineares independentes de (2.43), então é chamada de matriz fundamental.

A matriz propagadora  $4 \times 4$   $\Pi(R, S)$  centrada no raio conectado a um ponto inicial  $S$  e a um ponto final  $R$  pode ser expressa por:

$$\Pi(R, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(R, S) & \mathbf{Q}_2(R, S) \\ \mathbf{P}_1(R, S) & \mathbf{P}_2(R, S) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Onde,  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{P}_1$  são matrizes  $2 \times 2$  soluções do sistema dinâmico (2.39) com condições iniciais de fonte plana. A matriz  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{P}_2$  são soluções do sistema dinâmico (2.39) com condições iniciais de fonte pontual.

$$\Pi(S, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Se  $S$  é contínua, a matriz propagadora satisfaz a regra da cadeia (CĚRVENÝ, 2001). Além disso,  $\Pi$  é simplética (HERSTEIN, 1996).

Como  $\Pi$  é solução de (2.43), assim:

$$\mathbf{W}(R) = \Pi(R, S)\mathbf{W}(S) \quad (2.48)$$

Para qualquer condição inicial dada em  $S$  representada por  $\mathbf{W}(S)$ . Considerando  $\mathbf{X}$  uma matriz  $4 \times 2$  composta por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Existe uma solução similar. Assim, o traçamento dinâmico de raios (2.39) pode ser expresso como:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{X} \quad (2.50)$$

E resolvido por:

$$\mathbf{X}(R) = \Pi(R, S)\mathbf{X}(S) \quad (2.51)$$

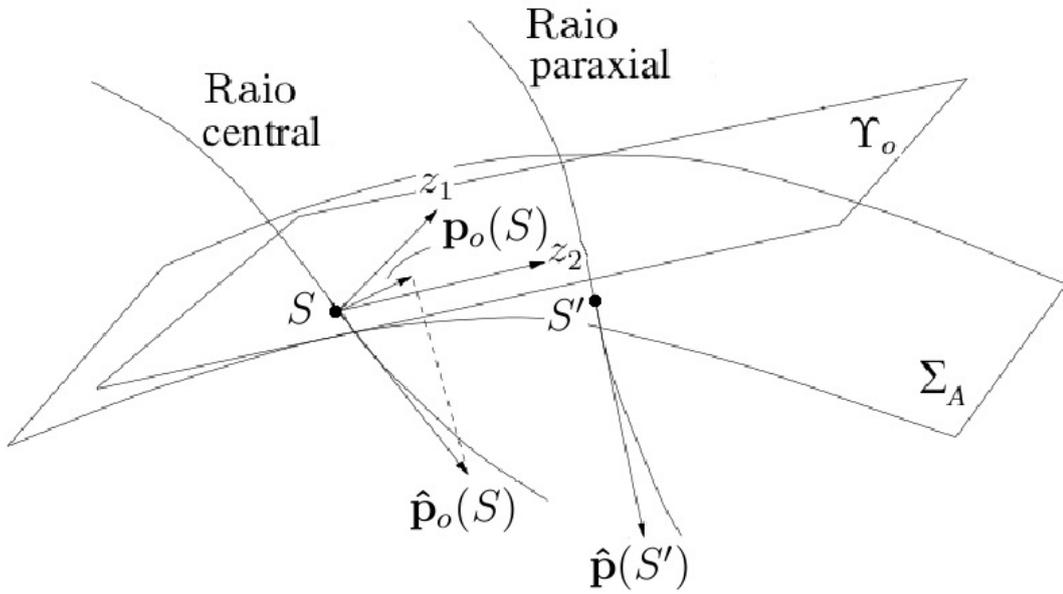
## 2.9 MATRIZ PROPAGADORA T

O propagador  $\mathbf{T}$  desenvolvido no trabalho de Bortfeld (1989) obedece relações similares ao propagador  $\Pi$  descrito na seção (2.8). Porém, o propagador  $\mathbf{T}$  é definido em relação às superfícies e com formalismo diferente do propagador  $\Pi$ , o qual é baseado em uma expansão na frente de onda.

Considerando um raio central que emerge a partir de um ponto  $S$  numa superfície  $\Sigma_A$ , conhecida como superfície anterior, e chega a um ponto em  $R$  em uma superfície posterior  $\Sigma_P$ . Ambas as superfícies têm sistemas de coordenadas cartesianas locais  $z_1$  e  $z_2$  com as origens fixadas em  $S$  e  $R$ , respectivamente. A orientação dos sistemas definidas de modo que a terceira componente coincida com o vetor normal às superfícies em  $S$  e  $R$ . Os vetores de vagarosidades correspondentes são:

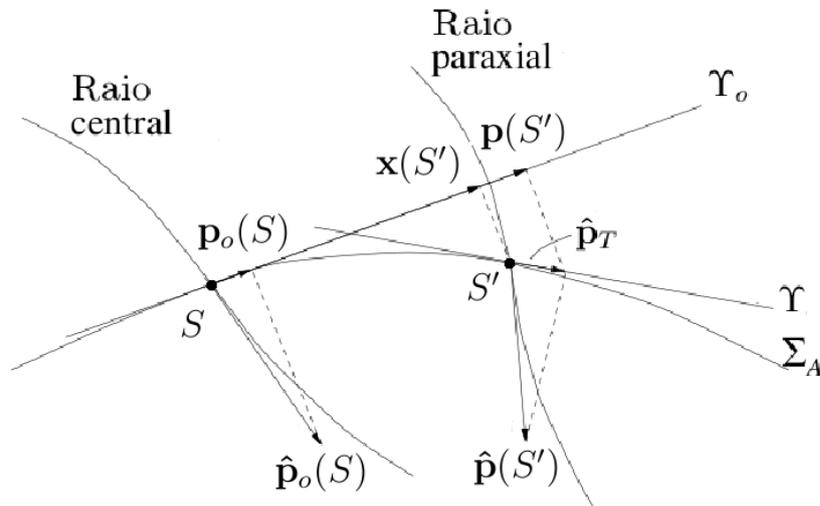
$$\hat{\mathbf{p}}_o(S) = \frac{\vec{\mathbf{t}}(S)}{v(S)} \quad e \quad \hat{\mathbf{p}}_o(R) = \frac{\vec{\mathbf{t}}(R)}{v(R)} \quad (2.52)$$

Figura 3 – Um raio central e um raio paraxial passando por uma superfície anterior  $\Sigma_A$ . Definição de coordenada cartesiana local 2-D ( $z_1 e z_2$ ).



Fonte: Adaptado de Schleicher et al. (2007)

Figura 4 – Visualização 2-D da figura (3)



Fonte: Adaptado de Schleicher et al. (2007)

Um raio paraxial no ponto  $S'$  tem as coordenadas  $\hat{\mathbf{x}}(S') = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))^T$  e vaguesidade  $\hat{\mathbf{p}}(S') = \frac{\vec{t}(S')}{v(S')}$ . Pontos na vizinhança próxima de  $S'$  podem ser descritos como  $\hat{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{x}}$ , sendo:

$$\hat{\mathbf{x}} = (d\mathbf{x}, \vec{\nabla}f \cdot d\mathbf{x})^T \quad (2.53)$$

No plano  $\Upsilon_o$  os vetores tridimensionais  $\hat{\mathbf{x}}(S')$  e  $\hat{\mathbf{p}}(S')$  são representados pelos vetores bidimensionais  $\mathbf{x}(S')$  e  $\mathbf{p}(S')$ . O vetor  $\mathbf{x}(S')$  é a projeção de  $\hat{\mathbf{x}}(S')$  no plano  $\Upsilon_o$  e definido em (2.53). Para obter a vagarosidade  $\mathbf{p}(S')$ , primeiramente  $\hat{\mathbf{p}}(S')$  é projetado no plano  $\Upsilon$  tangente ao plano anterior, restando:

$$\hat{\mathbf{p}}_T = (d\mathbf{p}, \vec{\nabla}f \cdot d\mathbf{p})^\top \quad (2.54)$$

O vetor  $\mathbf{p}$  é a projeção do  $\hat{\mathbf{p}}_T(S')$  no plano  $\Upsilon_o$ . O procedimento análogo é aplicado na superfície posterior  $\Sigma_P$ .

A relação entre os vetores iniciais  $\mathbf{x}(S')$  e  $\mathbf{p}(S')$  com os vetores finais  $\mathbf{x}(R')$  e  $\mathbf{p}(R')$  é expressa pela aproximação de primeira ordem (2.55), que é válida numa vizinhança próxima do raio central.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(R') &= \mathbf{A} \mathbf{x}(S') + \mathbf{B}(\mathbf{p}(S') - \mathbf{p}(S)) \\ \mathbf{p}(R') - \mathbf{p}_o(R) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(S') + \mathbf{D}(\mathbf{p}(S') - \mathbf{p}_o(S)) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são compostas pelas derivadas:

$$\begin{aligned} A_{IJ} &= \left. \frac{\partial x(R')}{\partial x(S')} \right|_{R,S}, & B_{IJ} &= \left. \frac{\partial x(R')}{\partial p(S')} \right|_{R,S} \\ C_{IJ} &= \left. \frac{\partial p(R')}{\partial x(S')} \right|_{R,S}, & D_{IJ} &= \left. \frac{\partial p(R')}{\partial p(S')} \right|_{R,S} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Uma vez que (2.55) tem uma estreita semelhança com (2.46), (2.55) pode ser reescrita usando a Matriz Propagadora de Bortfeld  $\mathbf{T}(R, S)$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(R') \\ \mathbf{p}(R') - \mathbf{p}(R) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(R, S) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(S') \\ \mathbf{p}(S') - \mathbf{p}_o(S) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{T}(R, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(R, S) & \mathbf{B}(R, S) \\ \mathbf{C}(R, S) & \mathbf{D}(R, S) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

A aproximação de primeira ordem de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  corresponde a uma aproximação de segunda ordem do tempo de trânsito. O diferencial total do tempo de trânsito é dada pela equação (2.59).

$$\begin{aligned}
d\tau &= \vec{\nabla}_{R'}\tau \cdot d\hat{\mathbf{x}}(R') + \vec{\nabla}_{S'}\tau \cdot d\hat{\mathbf{x}}(S') \\
&= \hat{\mathbf{p}}(R') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(R') - \hat{\mathbf{p}}(S') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(S') \\
&= \hat{\mathbf{p}}_T(R') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(R') - \hat{\mathbf{p}}_T(S') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(S') \\
&= (\mathbf{p}(R'), \vec{\nabla}_{R'}f \cdot \mathbf{p}(R')) \cdot \begin{pmatrix} d\mathbf{x}(R') \\ \vec{\nabla}_{R'}f \cdot \mathbf{x}(R') \end{pmatrix} - \\
&\quad - (\mathbf{p}(S'), \vec{\nabla}_{S'}f \cdot \mathbf{p}(S')) \cdot \begin{pmatrix} d\mathbf{x}(S') \\ \vec{\nabla}_{S'}f \cdot \mathbf{x}(S') \end{pmatrix} \\
&\approx \mathbf{p}(R') \cdot d\mathbf{x}(R') - \mathbf{p}(S') \cdot d\mathbf{x}(S') \tag{2.59}
\end{aligned}$$

A última aproximação visa uma aproximação de segunda ordem de  $\tau$ , portanto, termos que contenham produtos das derivadas de  $f$  são negligenciados. Os sinais foram escolhidos de uma maneira que o tempo de trânsito aumente com a distância na direção de propagação do raio. Agora,  $\mathbf{p}(R')$  e  $\mathbf{p}(S')$  são expressos em termos das submatrizes de  $\mathbf{T}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(S') &= \mathbf{p}_o(S) - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \mathbf{x}(S') + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}(R') \\
\mathbf{p}(R') &= \mathbf{p}_o(R) + \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}(R') + [\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}] \mathbf{x}(S') \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Assim, o tempo de trânsito  $\tau$  resultante é:

$$\begin{aligned}
\tau &= \tau_o + \mathbf{p}_o(R) \cdot \mathbf{x}(R') - \mathbf{p}_o(S) \cdot \mathbf{x}(S') - \mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(R') \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \mathbf{x}(S') + \frac{1}{2}\mathbf{x}(R') \cdot \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(R') \tag{2.61}
\end{aligned}$$

A matriz propagadora  $\mathbf{T}$  goza das mesmas características que a matriz  $\mathbf{\Pi}$ , ou seja, satisfaz a regra da cadeia e simpleticidade.

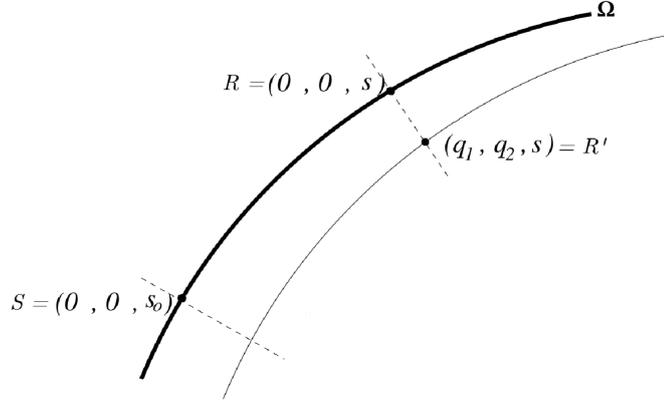
Considerando os tempos paraxiais, em coordenadas cartesianas, válidos apenas em uma vizinhança próxima de um ponto situado no raio (ČĚRVENÝ, 2001), como mostra a figura (5):

$$\tau = \tau_o + p_i^{(x)}(S)x_i(R', S) + \frac{1}{2}H_{ik}M_{kl}(S)H_{jl}x_i(R', S)x_j(R', S) \tag{2.62}$$

Onde,  $\tau = \tau(R')$ ,  $\tau_o = \tau(S)$ ,  $p_i^{(x)}$  componentes da vagarosidade em coordenadas cartesianas,  $x_i(R', S) = x_i(R') - x_i(S)$ ,  $H_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}$  e  $q_3 = s$ .

As matrizes propagadoras  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{\Pi}$  podem ser transformadas uma na outra. A relação entre elas podem ser achada aplicando a equação (2.62) na superfície anterior  $\Sigma_A$  e posterior  $\Sigma_P$ , cujo o resultado é a expressão (2.63).

Figura 5 – Definição dos pontos de  $S$ ,  $R$ , e  $R'$ . O ponto  $S$  está situado arbitrariamente em  $\Omega$ ,  $R'$  está situado perto de  $S$ , possivelmente fora do raio central. Ponto  $R$  está situado na intersecção do raio com um plano perpendicular, passando por  $R'$ .



Fonte: Do autor

$$\begin{aligned} \tau = & \tau_o + \mathbf{p}_o(R) \cdot \mathbf{x}(R') - \mathbf{p}_o(S) \cdot \mathbf{x}(S') - \mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{G}(S) \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{G}^\top(R) \mathbf{x}(R') \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{G}(S) \mathbf{F}(S) \mathbf{G}^\top(S) \mathbf{x}(S') + \frac{1}{2} \mathbf{x}(R') \cdot \mathbf{G}(R) \mathbf{F}(R) \mathbf{G}^\top(R) \mathbf{x}(R') \end{aligned} \quad (2.63)$$

Introduzindo a matriz de transformação de coordenadas cartesianas na interface para sistema cartesiano geral  $Z_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j} = \frac{\partial z_j}{\partial x_i}$ . Além da matriz  $\mathbf{Z}$ , iremos também introduzir a matriz de transformação das coordenadas centradas no raio  $q_1, q_2$  e  $q_3 = s$  para coordenadas cartesianas na interface  $z_1, z_2$  e  $z_3$ , ou seja,  $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{H}$  (ČĚRVENÝ, 2001). Os elementos de  $\hat{\mathbf{G}}$  são  $G_{kl} = \vec{i}_k^{(z)} \cdot \vec{e}_l = \frac{\partial z_k}{\partial q_l} = \frac{\partial q_l}{\partial z_k}$  ( $l = 1, 2, 3$ ). Comparando (2.61) com (2.63), temos:

$$\mathbf{T}(R, S) = \mathbf{X}(R) \mathbf{G}(R) \mathbf{\Pi}(R, S) \mathbf{G}^\top(S) \mathbf{X}^\top(S) \quad (2.64)$$

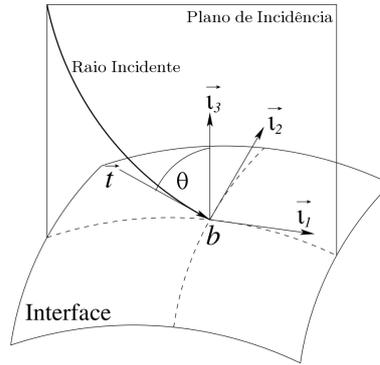
Sendo,

$$\mathbf{G}(R) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}^{-1}(R) & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{G}}^\top(R) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(S) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}^\top(S) & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{G}}^{-1}(S) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\phi) & -\cos(\beta) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Neste caso,  $\beta$  é o ângulo de incidência entre  $\vec{i}_3$ ,  $\vec{t}$ . O ângulo  $\phi$  está disposto entre  $\vec{i}_2$  e  $\vec{e}_2$ . Veja figura (6).

Figura 6 – Definição do sistema de coordenadas cartesiano relacionado com uma interface.



Fonte: Do autor

$$\mathbf{X}(R) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \bar{\mathbf{0}} \\ \frac{\cos\beta(R)}{v(R)}\bar{\mathbf{D}}(R) + \bar{\mathbf{E}}(R) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(S) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \bar{\mathbf{0}} \\ -\frac{\cos\beta(R)}{v(R)}\bar{\mathbf{D}}(S) - \bar{\mathbf{E}}(S) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Cujos os elementos de  $\bar{\mathbf{E}}$ , são:

$$E_{IJ} = G_{I3}G_{JK}M_{3K} + G_{I3}G_{J3}M_{33} + G_{IK}G_{J3}M_{K3} \quad (2.68)$$

E de  $\bar{\mathbf{D}}$ :

$$D_{IJ} = Z_{iI}Z_{kJ} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_i \partial x_k} \left[ Z_{j3} \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial x_j} \right) \right]^{-1}. \quad (2.69)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{G}^\top + \frac{\cos(\beta)}{v}\mathbf{D} + \mathbf{E} \quad (2.70)$$

Lembrando que  $Z_{j3}$  são componentes do vetor normal unitário a interface  $\Sigma$ .

### 3 APROXIMAÇÕES DO CAMPO DE ONDAS

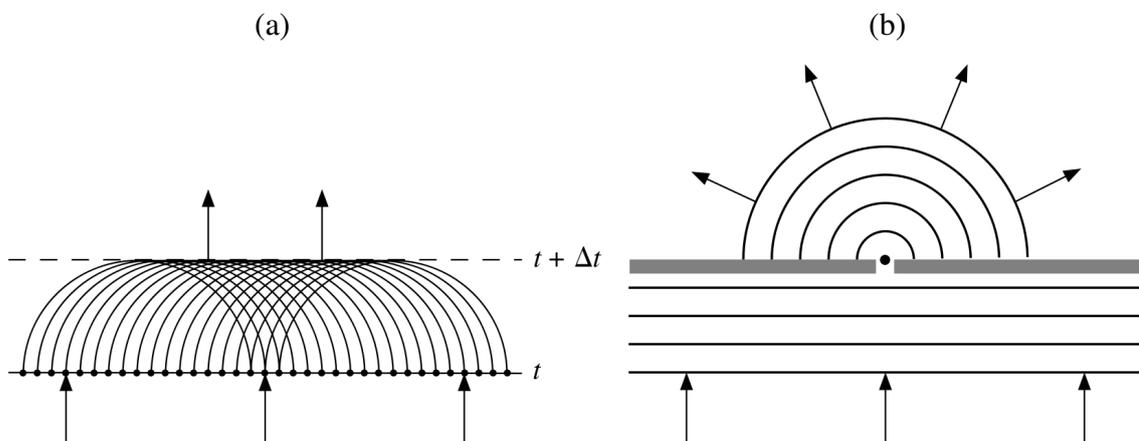
#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão descritas duas soluções aproximadas da equação da onda utilizadas para contornar algumas lacunas existentes na teoria do raio de ordem zero. Uma delas é o método Kirchhoff, que estende o método do raio tradicional utilizando o conceito de difrações gerados por uma superfície. O segundo são os feixes gaussianos que combinam as vantagens da teoria do raio e a técnica de aproximações paraxiais na vizinhança de um raio, de modo a fornecer um método válido em cáusticas e em modelos heterogêneos complexos. Todos estes métodos possuem baixo custo computacional e de simples implementação, quando comparado à modelagem sísmica usando diferença finita cujo tempo de processamento é bastante elevado em meios mais realistas e complexos.

#### 3.2 INTEGRAL DE KIRCHHOFF

O princípio de Huygens, primeiramente descrito por Christiaan Huygens no final do século XVII, é mencionado com maior frequência no contexto das ondas luminosas e na teoria do raio óptico, mas é aplicável a qualquer problema de propagação da onda. Considera uma frente de onda plana que propaga em um meio homogêneo, como a frente de onda que se propaga através da interferência construtiva das ondas secundárias (figura (7)). Esta ideia simples, fornece, pelo menos no sentido qualitativo, uma explicação para o comportamento das ondas quando elas passam por uma abertura estreita.

Figura 7 – Ilustrações do princípio de Huygens. (a) Uma onda plana no instante  $t + \Delta t$  pode ser modelada como a soma coerente das frentes de onda esféricas emitidas por fontes pontuais na frente de onda no tempo  $t$  (b) Uma pequena abertura em uma barreira às ondas incidentes irão produzir uma frente de onda difratada se a abertura é pequena comparada ao comprimento de onda.



Fonte: Do autor

A dobra dos caminhos de raios nas extremidades da abertura é chamado de difração. O grau das ondas de difração na “sombra” do obstáculo depende do comprimento de onda em relação ao tamanho da abertura. Em comprimentos de onda relativamente longos (por exemplo, ondas do mar batendo num buraco em um cais), as ondas transmitidas serão espalhadas quase uniformemente. No entanto, em comprimentos de onda curta a difração produzirá um espalhamento muito menor no campo de onda nas extremidades da abertura. Para as ondas de luz, são necessárias fendas muito estreitas para produzir difração perceptível. Estas propriedades podem ser modeladas usando o princípio de Huygens calculando os efeitos da interferência construtiva e destrutiva em comprimentos de onda diferentes (HECHT, 2001).

O princípio de Huygens pode ser aplicado na sísmica de reflexão, imaginando que cada ponto em um refletor gera uma fonte secundária, em resposta ao campo de onda incidente, chamado de refletor explosivo.

Um tratamento mais rigoroso do princípio de Huygens foi dado por Kirchhoff e constitui a base para uma série de técnicas importantes para a computação de sismogramas sintéticos. A teoria de Kirchhoff foi desenvolvida em óptica e até a obtenção da expressão da integral Kirchhoff segue em grande parte a demonstração de Goodman (2005). Assim, considerando  $u$  o potencial da onda P, a equação da onda escalar:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Onde  $v$  é a velocidade da onda. Agora, supondo uma forma harmônica para  $u$ , ou seja, em uma determinada frequência  $\omega$ , tem-se a função monocromática:

$$u(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})e^{-i\omega t} = U(\mathbf{x})e^{-ikvt} \quad (3.2)$$

Sendo  $\mathbf{x}$  a posição,  $k = \omega/v$  o mdulo do vetor número de onda e  $U(\mathbf{x})$  a amplitude complexa (Fasor). Assim:

$$\nabla^2 u = e^{-ikvt} \nabla^2 U \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -k^2 v^2 U e^{-ikvt} \quad (3.4)$$

Com isso, obtém-se uma equação de onda em função do espaço e independente do tempo.

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \quad (3.5)$$

É também, por vezes designada como a *Equação de Helmholtz*.

Aplicando o teorema de Green do cálculo vetorial. Se  $U_1$  e  $U_2$  são duas funções contínuas e diferenciáveis em uma superfície fechada  $S$ .

$$\int_{\Psi} (U_2 \nabla^2 U_1 - U_1 \nabla^2 U_2) d\Psi = \int_S \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) dS \quad (3.6)$$

Onde, o volume  $\Psi$  da integral é delimitado pela superfície fechada  $S$  e  $\frac{\partial}{\partial n}$  é a derivada em relação ao vetor normal exterior a superfície. Supondo que  $U_1$  e  $U_2$  satisfaçam (3.5), ou seja:

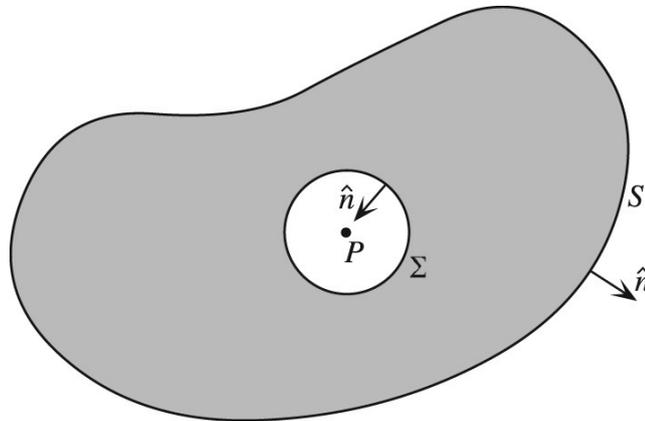
$$\nabla^2 U_1 = -k^2 U_1 \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 U_2 = -k^2 U_2 \quad (3.8)$$

Nesse caso, a parte esquerda de (3.6) desaparece e integral de superfície deve ser zero:

$$\int_S \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (3.9)$$

Figura 8 – Um ponto  $P$  rodeada por uma superfície  $S$  de forma arbitrária. Fórmula de Kirchhoff é obtida aplicando o teorema de Green para o volume entre  $S$  e uma esfera infinitesimal  $\Sigma$  em torno  $P$ .



Fonte: Do autor

Agora, suponha que se esteja interessado em avaliar a perturbação no ponto  $P$ , delimitado pela superfície  $S$  (figura (8)). Fazendo  $U_1 = U$ , a amplitude da perturbação harmônica. A escolha da função  $U_2$  é livre, desde que também satisfaça (3.5). Assim, será definido  $U_2 = G$ :

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.10)$$

Onde  $r$  é a distância do ponto  $P$  a superfície  $\Sigma$ . Quando  $r = 0$ , a função  $G$  tem uma singularidade e assim o ponto  $P$  deve ser excluído do volume da integral para o teorema de

Green ser válido. Colocando uma pequena esfera  $\Sigma$  em torno de  $P$ , com isso, o teorema de Green pode agora ser aplicado ao volume entre  $\Sigma$  e  $S$ . Essas superfícies, juntas, compõem a superfície de integração. Na superfície da pequena esfera  $n$  tem sentido oposto ao de  $r$  e, portanto,  $\frac{\partial}{\partial n}$  pode ser substituído por  $-\frac{\partial}{\partial r}$  e a integral de superfície sobre  $\Sigma$  pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS &= \int_{\Sigma} \left[ -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS \\ &= \int_{\Sigma} \left[ -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + U \left( \frac{-e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mudando a integral (3.11) para uma integral no ângulo sólido  $\Omega$  em  $P$ , em que  $dS$  em  $\Sigma$  torna-se  $d\Omega$  e  $dS = r^2 d\Omega$ , resulta em:

$$\int_{\Sigma} \left[ -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + U \left( \frac{-e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r} \right) \right] dS = \int_{P+\varepsilon} \left( -re^{ikr} \frac{\partial U}{\partial r} - Ue^{ikr} + rikUe^{ikr} \right) d\Omega \quad (3.12)$$

Considerando  $P + \varepsilon$  como em torno de  $P$  para um  $\varepsilon$  muito pequeno, que o limite de  $r$  tende para zero e assumindo  $U$  não nulo, então apenas o segundo termo da expressão do lado direito da igualdade (3.12) permanece. Assim:

$$\int_{\Sigma} \left[ -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + U \left( \frac{-e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r} \right) \right] dS \longrightarrow \int -Ue^{ikr} d\Omega \quad (3.13)$$

Como a superfície  $\Sigma$  colapsa em torno de  $P$ , o valor de  $U$  na superfície pode ser considerada constante e igual a  $U_P$ , ou seja o valor de  $U$  em  $P$ . Portanto:

$$\int -Ue^{ikr} d\Omega = \int -U_P e^{ikr} d\Omega = -U_P \int e^{ik\varepsilon} d\Omega = -U_P \int d\Omega = -4\pi U_P \quad (3.14)$$

O resultado em (3.14) é devido  $\varepsilon \rightarrow 0$  e, conseqüentemente,  $e^{ik\varepsilon} \rightarrow 1$ .

Veja que a implicação da equação (3.13) resultou em (3.14). Logo:

$$\int_{\Sigma} \left[ -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + U \left( \frac{-e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r} \right) \right] dS \longrightarrow -4\pi U_P \quad (3.15)$$

Da equação (3.9), sabe-se que  $\int_{S+\Sigma} = 0$ . Por isso,  $\int_S = +4\pi U_P$ :

$$\begin{aligned} 4\pi U_P &= \int_S \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS \\ &= \int_S \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - Ue^{ikr} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{ikUe^{ikr}}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] dS \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da equação (3.2), obtém-se a seguinte relação  $U = ue^{ikvt}$ . Com isso, a relação (3.16) em um tempo  $r/v$  torna-se:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{e^{-ikv(t-r/v)}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U e^{-ikv(t-r/v)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{ikU e^{-ikv(t-r/v)}}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] dS \quad (3.17)$$

Uma forma padrão para o que é chamado muitas vezes de integral de Kirchhoff, é:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{t-r/v} - u \Big|_{t-r/v} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{rv} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t-r/v} \right] dS \quad (3.18)$$

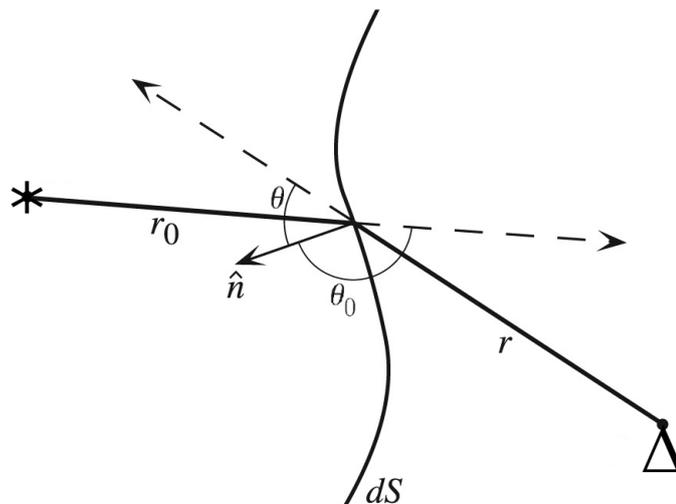
Onde,  $\partial u / \partial t = -ikvUe^{-ikvt}$ . Porém, a equação (3.18) não é uma forma conveniente para usar diretamente na maioria das aplicações sísmicas. Suponha que o valor de  $u$  pode ser obtido em cada ponto da superfície a partir de uma função temporal  $f(t)$  da fonte a uma distância  $r_0$  de  $dS$ . Então, em  $dS$ , tem-se:

$$u = \frac{1}{r_0} f(t - r_0/v) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r_0} f'(t - r_0/v) \quad (3.20)$$

Sendo que  $1/r_0$  vem do espalhamento geométrico da frente de onda.

Figura 9 – A geometria de raios para um único ponto em uma superfície  $dS$  que separa uma fonte e um receptor.



Fonte: Do autor

Se  $\theta_0$  e  $\theta$  são os ângulos das trajetórias de raios de chegada e saída a partir da superfície normal (figura (9)), então:

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos\theta_0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos\theta \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r_0} \cos\theta_0 \quad (3.23)$$

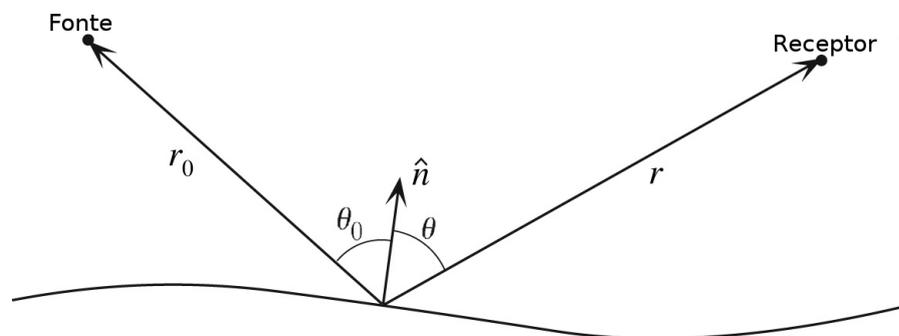
$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cos\theta \quad (3.24)$$

Inserindo as expressões (3.19)-(3.24) na integral (3.18) e considerando apenas os termos em campo distante, por fim a fórmula para calcular sismogramas sintéticos é dada por (SHEARER, 2001):

$$u_P = \frac{1}{4\pi v} f'(t) * \int_S \delta \left( t - \frac{r + r_0}{v} \right) \frac{R(\theta_0)}{rr_0} (\cos\theta + \cos\theta_0) dS \quad (3.25)$$

Onde  $R(\theta_0)$  é o coeficiente de reflexão,  $\theta_0$  é o ângulo entre o raio incidente e o vetor normal a superfície, e  $\theta$  é o ângulo entre o raio espalhado e o vetor normal a superfície (ver figura (10)).

Figura 10 – Ângulos dos raios em relação ao vetor normal a superfície para uma geometria de onda refletida.



Fonte: Do autor

### 3.3 FEIXES GAUSSIANOS

O método do raio é amplamente usado para calcular os campos de ondas de diferentes natureza física para aproximações em altas frequências, devido a sua relativa simplicidade em suas fórmulas. Mas, a teoria do raio falha em regiões onde o campo de raios tem comportamento não-regulares, isto é, quando o ponto de observação se localiza sobre em uma superfície de cáustica, onde a amplitude é infinita, ou quando o ponto de observação se localiza em uma zona de sombra, onde o traçado de raio não pode ser realizado. Para superar essas dificuldades algumas modificações no método do raio foram usadas, tal como a obtenção do operador

WKB/Maslov cuja sua descrição pode ser visto em Chapman (1971), onde o resultado do algoritmo depende da posição do ponto de observação, requerendo um estudo da característica geométrica do raios não-regulares. Babich e Pankratova (1973) propuseram uma ideia de descrever o campo de ondas em altas frequências através de uma integral de superposição de todos os raios como uma solução aproximada em um tubo de raios na vizinhança de um raio central, chamado de superposição de feixes gaussianos. Seguido por outros autores, Popov (1982), Červený (1982), Müller (1984) e Bleistein (2009).

### 3.3.1 Tempos Paraxiais

A integral de feixes gaussianos que será descrita a seguir, equivale a uma superposição de aproximação paraxial de tempos complexos, ponderada por uma função exponencial com a forma de uma gaussiana centrada em um ponto do raio. Os tempos de trânsitos utilizados para o cálculo das amplitudes dos feixes, são estimados a partir das derivadas espaciais de primeira (vagarosidade  $\mathbf{p}$ ) e segunda (matriz  $\mathbf{M}$ ) ordem. Isto é referido como uma aproximação paraxial dos tempos de trânsito na vizinhança de um raio central. Para calcular  $\mathbf{p}$ , o sistema de equações lineares (2.29) deve ser integrado. Para determinar  $\mathbf{M}$ , é necessário resolver o sistema (2.39), com a finalidade de encontrar as matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ . A vagarosidade  $\mathbf{p}$  é simplesmente o gradiente espacial dos tempos de trânsito e o espalhamento geométrico está relacionado com a matriz  $\mathbf{Q}$ . Quando um receptor não está próximo de uma cáustica, as quantidades determinadas no sistema de traçamento dinâmico do raio podem ser usadas para determinar a solução, que consiste no espalhamento geométrico, tempo de trânsito e dos coeficientes de reflexão/transmissão. O tempo paraxialmente estimado a partir das matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  pode ser usada tanto para evitar o *two-point ray tracing* pela extrapolação do tempo de trânsito próximo a um raio ou para resolver de forma iterativa o problema de *two-point ray tracing*. O tempo de trânsito em uma vizinhança de  $s$  pode ser calculada pela equação (2.62), que na forma matricial pode ser escrita como (ČERVENÝ, 2001) :

$$\tau(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}_o) + \Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{M} \mathbf{H} \Delta\mathbf{x} \quad (3.26)$$

Lembrando que  $\mathbf{H}$  a matriz de transformação de coordenadas centradas no raio para coordenadas cartesianas (as colunas de  $\mathbf{H}$  são os vetores base no final do raio),  $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são soluções do sistema (2.39). Além disso,  $\Delta\mathbf{x}$  é definido como  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$ , com  $\mathbf{x}_o$  as coordenadas cartesianas do ponto  $S$  e  $\mathbf{x}$  as coordenadas cartesianas do ponto  $R'$  (figura (5)).

### 3.3.2 Aproximação Paraxial do Raio

Os feixes gaussianos são definidos pela adição de uma pequena parte imaginária da matriz  $\mathbf{M}$  (equação (2.41)), que resulta em um decaimento exponencial de um feixe a partir do raio central. A amplitude de cada feixe é proporcional a parte real de  $\exp(i\omega\tau)$ , onde  $\tau$  é considerado um número complexo em (3.26), através da inclusão de  $\mathbf{M}$  complexo. Na vizinhança



em função do ângulo incidente  $\theta_o$ , ângulo refletido  $\theta$  e do coeficiente  $R$  de reflexão/transmissão (YILMAZ, 2001) para onda P:

$$\mathcal{R}_{kj}^C = R \sqrt{\frac{\rho(s_o)v(s_o)\cos(\theta_o)}{\rho(s)v(s)\cos(\theta)}}$$

### 3.3.3 Feixes Gaussianos

A aproximação paraxial de feixes gaussianos da componente principal do campo de onda sísmica PP (onda P incidente que continua a ser P depois de refletida) na vizinhança de um raio central de direção dada pelo vetor  $\vec{t}$  (figura (2)), a partir de uma fonte pontual tridimensional em um meio, é representada pela equação em coordenadas centradas no raio por (POPOV, 2002),

$$\mathbf{u}_{gb}(q_1, q_2, s) = A(s) \exp \left[ -i\omega \left( \tau_o(s) - \tau(s) - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}^\top \mathbf{M}(s) \Delta \mathbf{q} \right) \right] \vec{t} \quad (3.29)$$

Onde,  $\Delta \mathbf{q}^\top = (\mathbf{q} - \mathbf{q}_o)^\top = (q_1 - q_1^{(o)}, q_2 - q_2^{(o)})$ ,  $\mathbf{M}(s)$  deve ter parte real  $\Re\{\mathbf{M}(s)\}$ , parte imaginária  $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$  e satisfazer três condições ao longo do raio:

1.  $\det(\mathbf{Q}(s)) \neq 0$ ;
2.  $\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}^\top(s)$ ;
3.  $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$  é positiva-definida.

Para calcular  $\mathbf{M}(s)$ , Červený (2001) faz uso da matriz propagadora (2.46):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(s) \\ \mathbf{P}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(s, s_o) & \mathbf{Q}_2(s, s_o) \\ \mathbf{P}_1(s, s_o) & \mathbf{P}_2(s, s_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(s_o) \\ \mathbf{P}(s_o) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(s) &= \mathbf{Q}_1(s, s_o)\mathbf{Q}(s_o) + \mathbf{Q}_2(s, s_o)\mathbf{P}(s_o) \\ &= [\mathbf{Q}_1(s, s_o) + \mathbf{Q}_2(s, s_o)\mathbf{P}(s_o)\mathbf{Q}^{-1}(s_o)] \mathbf{Q}(s_o) \\ &= [\mathbf{Q}_1(s, s_o) + \mathbf{Q}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)] \mathbf{Q}(s_o) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Analogamente,

$$\mathbf{P}(s) = [\mathbf{P}_1(s, s_o) + \mathbf{P}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)] \mathbf{Q}(s_o) \quad (3.32)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(s) &= \mathbf{P}(s)\mathbf{Q}^{-1}(s) \\
&= [\mathbf{P}_1(s, s_o) + \mathbf{P}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)] \mathbf{Q}(s_o)\mathbf{Q}(s_o)^{-1} [\mathbf{Q}_1(s, s_o) + \mathbf{Q}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)]^{-1} \\
&= [\mathbf{P}_1(s, s_o) + \mathbf{P}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)] [\mathbf{Q}_1(s, s_o) + \mathbf{Q}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)]^{-1} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Para encontrar  $A^{(x)}(s)$ , deve-se calcular a razão:

$$\left( \frac{\det \mathbf{Q}(s_o)}{\det \mathbf{Q}(s)} \right)^{1/2} = \sqrt{\det[\mathbf{Q}_1(s, s_o) + \mathbf{Q}_2(s, s_o)\mathbf{M}(s_o)]} \quad (3.34)$$

A matriz  $\mathbf{M}_{2 \times 2}(s_o)$  é composta pelas derivadas de segunda ordem do tempo de trânsito em relação às coordenadas centrada no raio  $q_I$  em  $s_o$ . Ela está relacionada com a matriz de curvatura da frente de onda  $\mathbf{K}_{2 \times 2}(s_o)$  pela relação  $\Re\{\mathbf{M}(s_o)\} = v^{-1}\mathbf{K}(s_o)$ , onde  $v = v(s_o)$ .

Para determinar as equações (3.34) e (3.33), ao longo de todo raio, é preciso saber  $\mathbf{M}(s_o)$  que satisfaça as condições iniciais:

1.  $\det(\mathbf{Q}(s_o)) \neq 0$  e  $\det(\mathbf{Q}(s_o)) \neq \infty$ ;
2.  $\mathbf{M}(s_o) = \mathbf{M}^\top(s_o)$ ;
3.  $\Im\{\mathbf{M}(s_o)\}$  é positiva-definida.

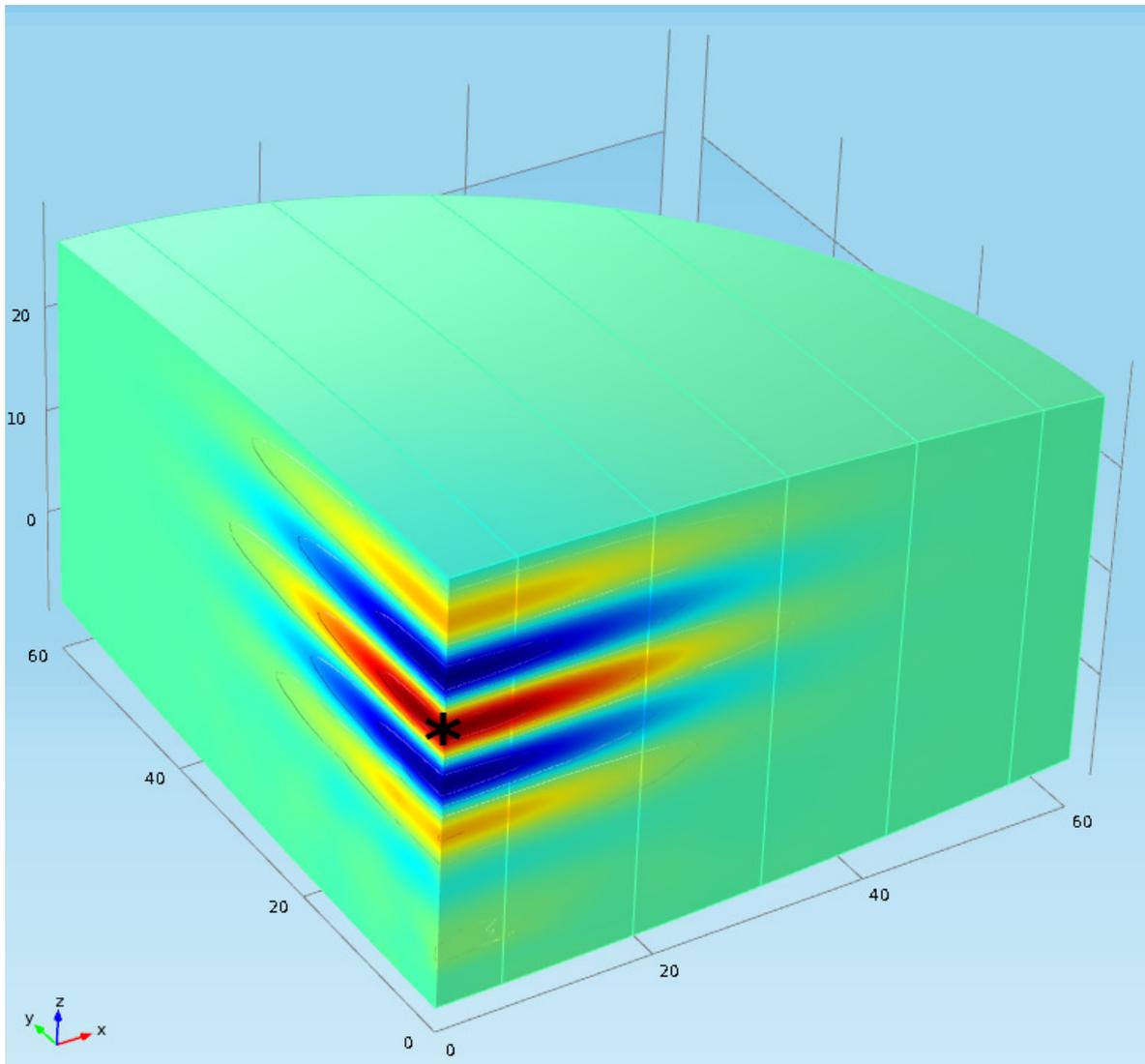
Popov (1982) fez um estudo detalhado, em 2-D, sobre a escolha de  $\mathbf{Q}(s_o)$  e  $\mathbf{P}(s_o)$ . Bleistein (2009) estendeu as condições iniciais de Popov (1982) para o caso 3-D, obtendo:

$$\mathbf{Q}(s_o) = \frac{\omega L_o^2}{v_o} \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{P}(s_o) = \frac{i}{v_o} \mathbf{I} \quad (3.35)$$

Onde,  $\omega$  é a frequência angular dominante,  $L_o$  a meia-largura inicial do feixe gaussiano e  $v_o$  é a velocidade inicial.

A matriz  $\Re\{\mathbf{M}(s)\}$  descreve as propriedades geométricas da frente de onda. Seus autovalores  $\lambda_{\Re\{\mathbf{M}(s)\}}^{(1)} = \lambda_1(s)$  e  $\lambda_{\Re\{\mathbf{M}(s)\}}^{(2)} = \lambda_2(s)$  são sempre reais. As quantidades  $K_1(s) = v\lambda_1(s)$  e  $K_2(s) = v\lambda_2(s)$  representam as curvaturas da frente de onda.  $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$  controla o perfil da amplitude gaussiana nas seções perpendiculares ao raio. Devido a  $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$  ser positiva-definida e simétrica, os autovalores  $\lambda_{\Im\{\mathbf{M}(s)\}}^{(1)} = \tilde{\lambda}_1(s)$  e  $\lambda_{\Im\{\mathbf{M}(s)\}}^{(2)} = \tilde{\lambda}_2(s)$  são sempre reais.

Figura 12 – Parte real de um feixe gaussiano, com  $\tau_o = 0$ ,  $s_o = 0$ ,  $v_o = 2$  km/s,  $\omega = 20\pi$ . Cujas a posição da fonte é  $\mathbf{x}_o = (0, 0, 10)$  e



Fonte: Do autor

Com o aumento do quadrado da distância a partir do raio central  $\Omega$ , as amplitudes do feixe diminuem exponencialmente. A diminuição exponencial depende da frequência. Em um plano perpendicular ao raio, a curva quadrática:

$$\frac{1}{2}\omega\mathbf{q}^T\Im\{M(s)\}\mathbf{q} = 1 \quad (3.36)$$

Representa a região de uma elipse para frequência  $\omega$ . Nos pontos pertencentes a elipse, as amplitudes do feixe gaussiano é igual a  $\exp(-1)A(s)\vec{t}$ . Assim, introduz-se as quantidades

$L_1(s)$  e  $L_2(s)$  dadas por:

$$L_1(s) = \left[ \pi \tilde{\lambda}_1(s) \right]^{-1/2}, \quad L_2(s) = \left[ \pi \tilde{\lambda}_2(s) \right]^{-1/2} \quad (3.37)$$

Onde,  $L_1(s)$  e  $L_2(s)$  representam o eixo maior e eixo menor da elipse para frequência  $f = 1$  Hz ( $\omega = 2\pi$ ). Chamadas de meia-largura dos feixes gaussianos. Para garantir o cumprimento das condições dos feixes gaussianos,  $L_1(s)$  e  $L_2(s)$  sempre devem ter uma medida não nula.

### 3.4 INTEGRAL DE SUPERPOSIÇÃO DE FEIXES GAUSSIANOS

A fim de simular o campo de ondas usando os feixes gaussianos estudados na seção anterior, nesta seção será usada a integral de superposição de feixes gaussianos. Para determinar o campo de ondas  $u(R, \omega)$  estimado em determinado ponto de referência  $R$ , onde o mesmo se encontra na vizinhança paraxial de um ponto  $R_\gamma$  localizado ao longo de um raio, torna-se necessária a utilização de uma integral para acumular todas as contribuições de todos os outros raios do campo de ondas contendo seus respectivos pontos de referência  $R$  pertencente à vizinhança paraxial quadrática de  $R_\gamma$ , ou seja, uma vizinhança compreendida em torno do raio central na qual a expansão de Taylor até o termo de segunda ordem descreve parâmetros envolvidos no processo com uma determinada precisão estimada. Neste sentido, no domínio da frequência  $u(R, \omega)$  é obtido através da seguinte expressão em função das coordenadas do raio  $(\gamma_1, \gamma_2)$  definidas na superfície inicial como segue (ČĚRVENÝ, 2001):

$$u^{(x)}(R, \omega) = \int_{\mathcal{D}} \int \Psi(\gamma_1, \gamma_2) A^{(x)}(R_\gamma) e^{i\omega\tau(R, R_\gamma)} d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (3.38)$$

Onde  $u^{(x)}(R, \omega)$  representa a componente cartesiana do vetor deslocamento no receptor  $R$ ,  $\mathcal{D}$  denota a região dos parâmetros do raio em questão,  $\Psi(\gamma_1, \gamma_2)$  é uma função peso determinada de forma assintótica (BLEISTEIN et al., 2000) ou pelo método da diagonalização simultânea (ČĚRVENÝ, 2001),  $A^{(x)}(R_\gamma) e^{i\omega\tau(R, R_\gamma)}$  representa o campo de ondas (equação (3.27)) com valores de amplitudes complexas oriundo da teoria do raio de ordem zero e  $\tau(R, R_\gamma)$  é o tempo de trânsito paraxial (equação (3.26)) em  $R$  estimado a partir do tempo de trânsito ao longo do raio de referência  $R_\gamma$ .

A representação (3.38) do campo de ondas apresenta algumas vantagens quando comparada à teoria do raio, principalmente a de ordem zero. Em regiões onde predominam zonas de sombra, caústicas e descontinuidades, a superposição de feixes gaussianos descreve um campo regular. No caso das zonas de sombra, o uso de feixes gaussianos prevê um campo regular dentro desta zona a partir de raios que se encontram próximos desta regiões; as caústicas, por sua vez, são suavizadas, enquanto as descontinuidades se tornam contínuas.

### 3.5 SUPERPOSIÇÃO DE FEIXES GAUSSIANOS REFLETIDOS E RESTRITOS AO VOLUME DE FRESNEL

Para determinar o domínio  $\mathcal{D}$  da integral (3.38), deve-se considerar um raio  $\Omega$  e dois pontos,  $S$  e  $R$ , situados no raio. Suponha que o ponto  $S$  representa a fonte pontual e ponto  $R$ , o receptor. No método do raio, o caminho do raio pode ser interpretado como uma trajetória ao longo da qual a parte de alta frequência da energia da onda sísmica em consideração se propaga a partir da fonte  $S$  para o receptor  $R$ . A trajetória do raio, no entanto, é apenas uma representação matemática. O campo de ondas em  $R$  também é afetada pela estrutura e distribuição de velocidade na vizinhança de  $\Omega$ .

A região que atinge efetivamente o campo de ondas em  $R$  tem sido o objeto de interesse e investigação por um longo tempo. Como resultado de inúmeras experiências, nesta Tese é proposto que o campo de ondas em  $R$  é afetada pela estrutura em alguma vizinhança do raio central que é chamado de volume de Fresnel. O volume de Fresnel, é claro, depende da posição de  $S$  e  $R$ .

Segundo Schleicher et al. (2007), as zonas de Fresnel são seções transversais ao volume de Fresnel (tubos de raios), formadas pelo conjunto de pontos de interseções dos raios paraxiais com uma interface durante seu caminho entre a fonte  $S$  e receptor  $R$ , considerando que a soma dos tempos de trânsito de cada ramo do raio paraxial não deve diferir do tempo de trânsito ao longo do raio central por mais de meio período  $T$  da onda monofrequente. Em outras palavras, para uma reflexão com um par fixo fonte-receptor ( $S, R$ ).

$$|\tau_1(\bar{M}, S) + \tau_2(R, \bar{M}) - \tau(S, R)| \leq \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} \quad (3.39)$$

Sendo  $\tau_1(S, \bar{M})$  e  $\tau_2(\bar{M}, R)$  os tempos de trânsito paraxiais de dois ramos do raio e  $\tau(S, R)$  o tempo de trânsito ao longo de um raio central. O ponto  $\bar{M}$  representa um ponto na vizinhança do ponto de reflexão especular  $M$ . Pode-se ainda considerar que os pontos  $\bar{M}$  definem uma superfície  $\Sigma_F$  (figura (13)), que pode ser uma superfície de reflexão e/ou transmissão ou ainda um plano tangente ao ponto de interseção entre o raio e a superfície  $\Sigma_F$ . O volume de Fresnel, em outras palavras, representa o envelope de todas as zonas de Fresnel definidas ao longo de todas as superfícies arbitrárias que interceptam o raio ao longo do seu caminho.

Utilizando a equação (2.61) Schleicher et al. (2007) deduziram uma fórmula conveniente para o cálculo da zona de Fresnel e da zona de Fresnel projetada (Apêndice A).

$$|\bar{\mathbf{x}}_M^\top \mathbf{H}_F \bar{\mathbf{x}}_M| \leq T \quad (3.40)$$

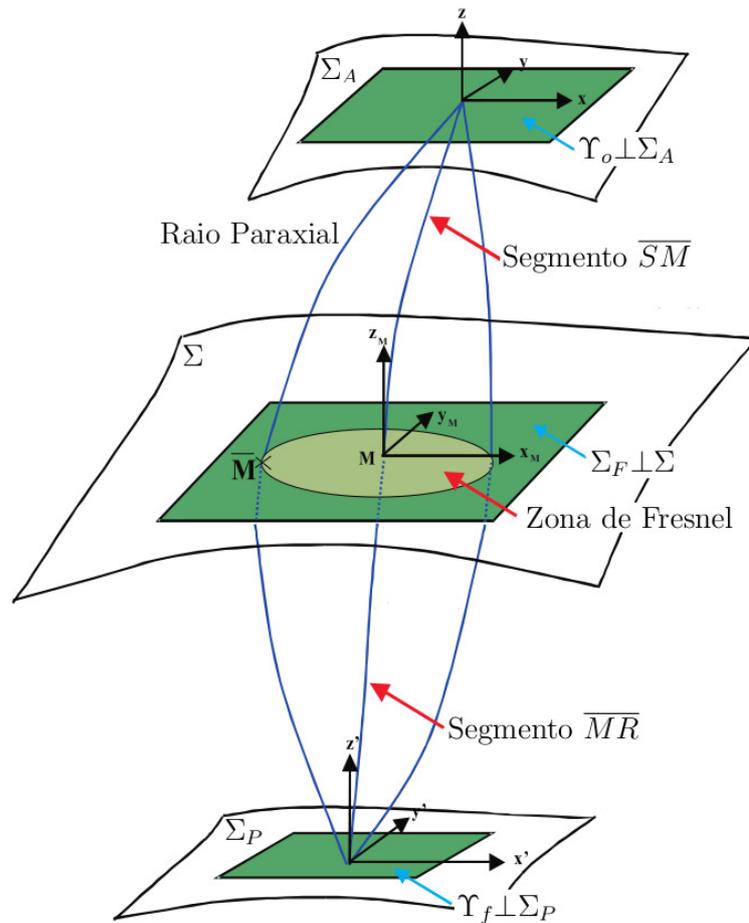
Onde  $\mathbf{H}_F$  é chamada de matriz da primeira zona de Fresnel. Em termos das submatrizes propagadoras  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$ , onde a matriz  $\mathbf{T}_1$  está relacionada ao ramo do raio de  $S$

até  $\bar{M}$  e matriz  $\mathbf{T}_2$  está associada ao ramo do raio de  $\bar{M}$  até  $R$ ,  $\mathbf{H}_F$  pode ser expressa como:

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} + \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \quad (3.41)$$

Sendo  $\mathbf{D}_1$  e  $\mathbf{B}_1$  se referem ao segmento  $\overline{SM}$  da fonte  $S$  ao ponto  $\bar{M}$ ,  $\mathbf{B}_2$  e  $\mathbf{A}_2$  se referem ao segmento  $\overline{MR}$  do ponto  $\bar{M}$  ao receptor  $R$  (figura (13)).

Figura 13 – Sistema sísmico em conjunto com o volume de Fresnel. Em cada superfície de interesse do sistema são estabelecidos sistemas de coordenadas cartesianas 2-D locais.



Fonte: Adaptado de Ferreira (2007)

Geometricamente, para uma reflexão especular, a zona de Fresnel projetada é definida como uma região em um plano  $\Sigma_P$  (figura (14)), localizado sobre a superfície de aquisição de dados. A zona de Fresnel projetada (SCHLEICHER et al., 2007) é utilizada como critério para a determinação do número de raios paraxiais necessários a integral (3.38) de superposição de feixes gaussianos. A zona de Fresnel pode ser projetada de sua posição em profundidade em direção superfície de aquisição de dados através de (Apêndice A):

$$|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_o)^\top \mathbf{H}_P (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_o)| \leq T \quad (3.42)$$

Sendo,  $\mathbf{H}_P$  matriz da zona de Fresnel projetada e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$  um vetor-posição sobre a zona de Fresnel projetada.

$$\mathbf{H}_P = \boldsymbol{\Lambda}^\top \mathbf{H}_F \boldsymbol{\Lambda} \quad (3.43)$$

Sendo  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B}_1^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_S + \mathbf{B}_2^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_R$ . As matrizes  $\boldsymbol{\Gamma}_S$  e  $\boldsymbol{\Gamma}_R$  são chamadas de matrizes de configuração, que no caso das aplicações da tese será usada a configuração tiro-comum  $\boldsymbol{\Gamma}_S = \bar{\mathbf{0}}$  e  $\boldsymbol{\Gamma}_R = \mathbf{I}$

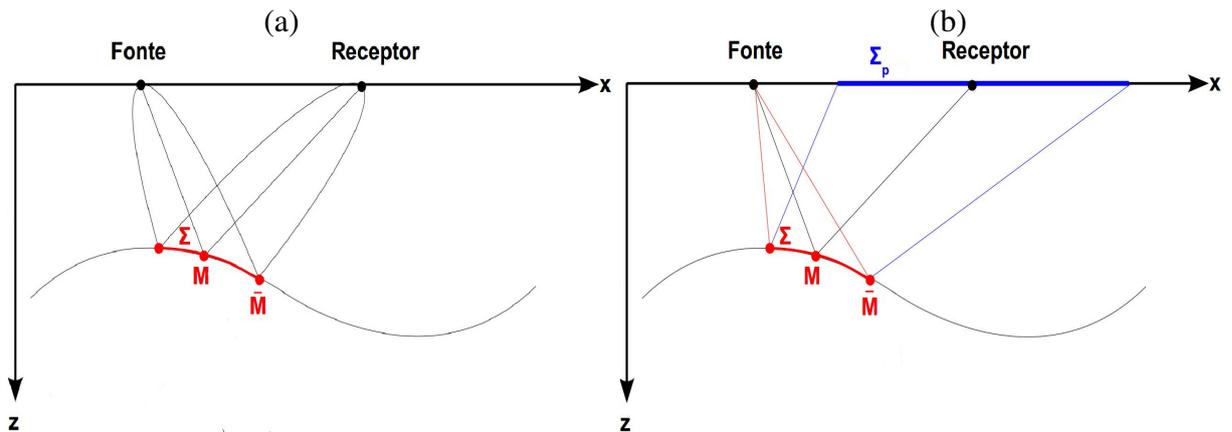
No caso 2-D (figura (14)),  $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_o$  na expressão (3.42) se torna uma distância 1-D, ou seja,  $\xi - \xi_o$ . Logo, tomamdo-se os valores  $\xi$  na fronteira da zona de Fresnel projetada,  $\xi - \xi_o = r_{zp}$  é o raio da zona de Fresnel projetada, com isso, da sentença (3.42) é possível obter (Apêndice B):

$$r_{zp} = \sqrt{\frac{1}{f H_P}} \quad (3.44)$$

Onde,  $f$  é a frequência dominante da onda mono-frequente e  $H_P$  é o elemento superior esquerdo da matriz da zona de fresnel projetada (3.43).

Assim, uma aproximação razoável para o domínio de integração da equação (3.38) é determinado pela área do círculo de diâmetro  $2 r_{zp}$ .

Figura 14 – (a) Ilustração em 2-D da região chamada interface da zona de Fresnel (b) Ilustração em 2-D da zona de Fresnel projetada



Fonte: Do autor

### 3.6 MODELAGEM SÍSMICA POR FEIXES GAUSSIANOS LIMITADOS PELA ZONA DE FRESNEL

Para estudar o comportamento dos feixes gaussianos, usa-se um meio homogêneo. Como visto nas seção 2.7, a solução geral do sistema (2.39) pode ser escrito como a combinação linear de duas soluções fundamentais para condições iniciais de uma fonte pontual e fonte plana. No caso 2-D (MÜLLER, 1984),

$$\begin{cases} p(s) = \epsilon p_1(s) + p_2(s) \\ q(s) = \epsilon q_1(s) + q_2(s) \\ \epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \end{cases} \quad (3.45)$$

Para obter a meia-largura dos feixes gaussianos no final do raio igual à zona de Fresnel projetada, utilizam-se as relações deduzidas por Ferreira (2007) e descritas nos Apêndice (B) e (C) desta Tese, que são:

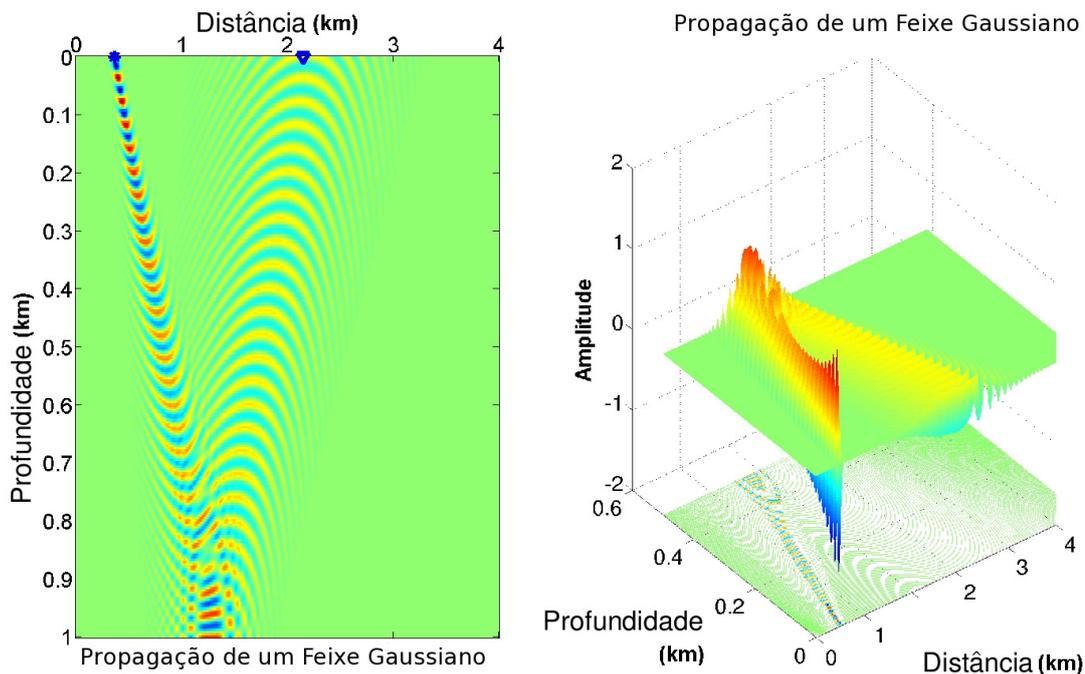
$$r_{zp} = \sqrt{\frac{1}{fH_P}} \quad (3.46)$$

$$\epsilon_2^{(f)} = \frac{\frac{\pi}{H_P} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{H_P}\right)^2 - 4q_1^2 q_2^2}}{2q_1^2}. \quad (3.47)$$

O tamanho da meia-largura e da curvatura da fase são os parâmetros mais importantes para caracterizar a propagação do feixe gaussiano. Considerando que apenas meios homogêneos são capazes de mostrar didaticamente a sensibilidade da propagação do feixe gaussiano em relação às escolhas dos parâmetros de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , como se segue:

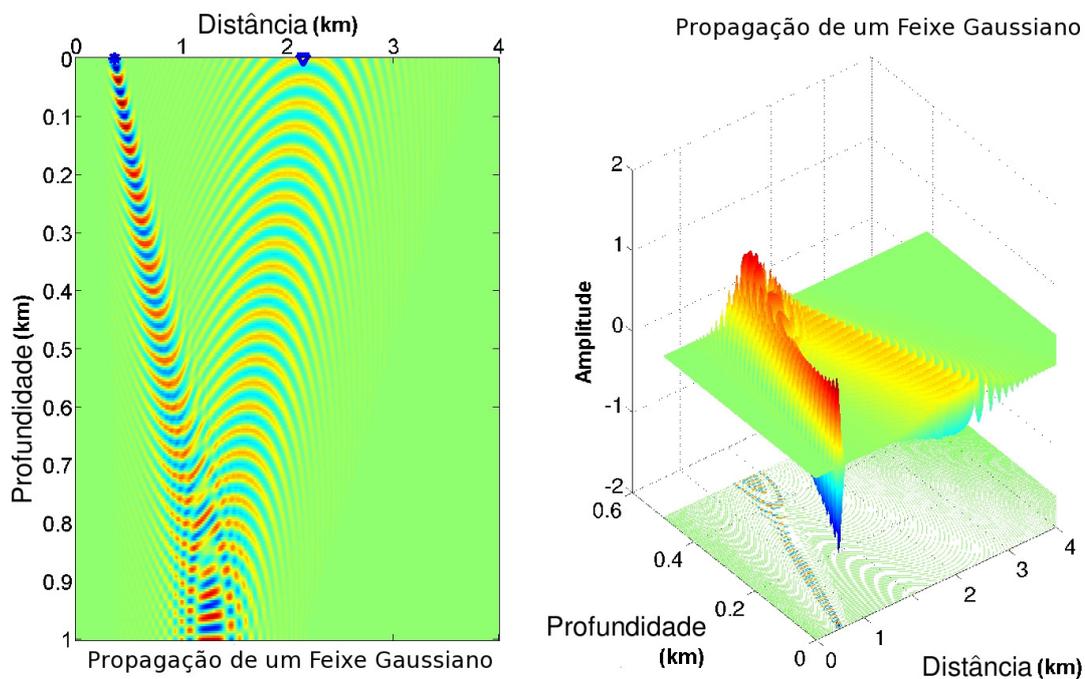
- a)**  $\epsilon_1 = 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ : A frente de onda do feixe na fonte é plana (figura (15));
- b)**  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ : Tanto a meia-largura como a curvatura apresentam valores finitos ao longo do raio (figura (16));
- c)**  $\epsilon_1 < 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ : O campo inicial onda na posição de origem é uma onda com curvatura finita e negativa (figura (17));
- d)**  $\epsilon_1 = 0$  e  $\epsilon_2 = \epsilon_2^{(f)}$ : O campo de onda inicial na posição de origem é uma onda plana, o feixe gaussiano é concentrado na pequena vizinhança do raio central e a meia-largura do feixe é igual ao raio da zona de Fresnel projetado no ponto de extremidade. O resultado pode ser visto em Cruz et al. (2012) e na figura (18).

Figura 15 –  $\epsilon_1 = 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ .



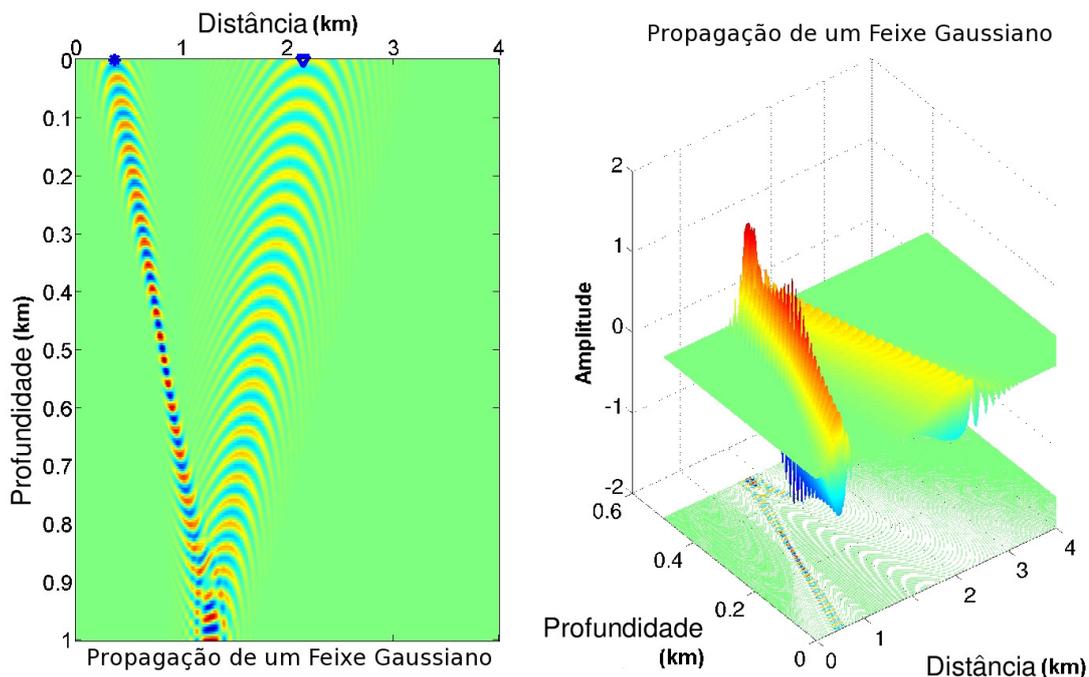
Fonte: Do autor

Figura 16 –  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ .



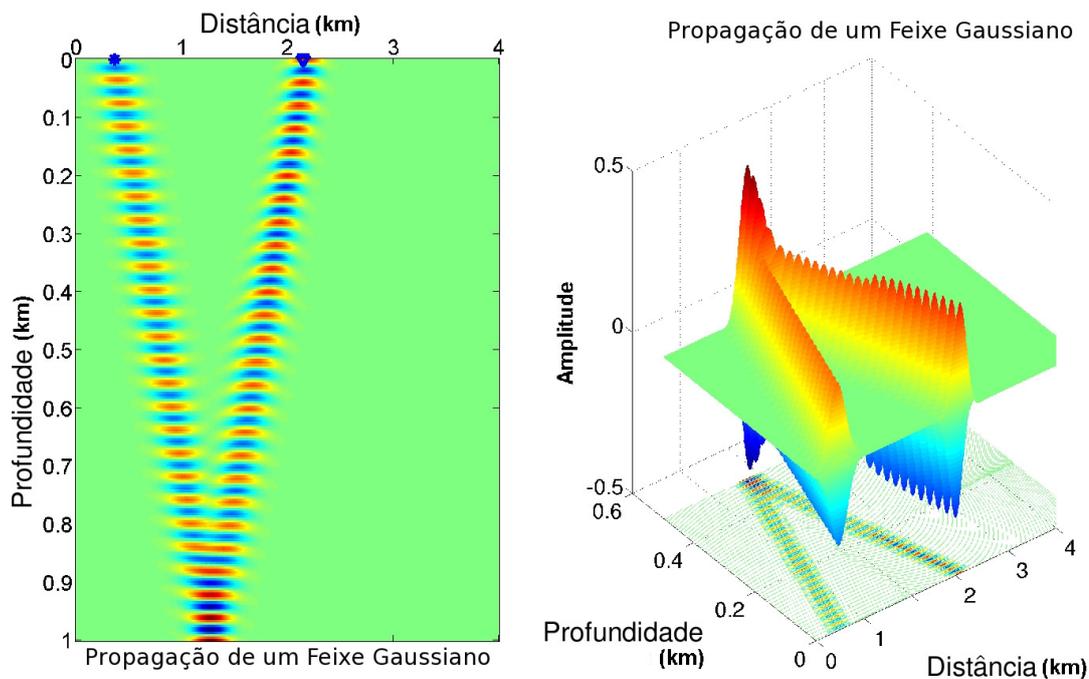
Fonte: Do autor

Figura 17 –  $\epsilon_1 < 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ .



Fonte: Do autor

Figura 18 –  $\epsilon_1 = 0$  e  $\epsilon_2 = \epsilon_2^{(f)}$ .



Fonte: Do autor

### 3.6.1 Sismogramas

Uma grande parte da sismica envolve a concepção e implementação de técnicas de computação de sismogramas sintéticos para modelos realistas da Terra. Em geral, o objetivo é calcular o que seria registrado por um geofone no local especificado do receptor, dada uma especificação exata da fonte sísmica e modelo de velocidade através do qual as ondas sísmicas se propagam. No entanto, os erros nos sismogramas sintéticos ocorrem frequentemente em aplicações práticas. Estas imprecisões podem ser separadas em duas partes:

- Imprecisões resultantes da aproximação da teoria usada para calcular o sismograma sintético. Exemplos disso incluem muitas aplicações da teoria do raio que não leva em conta as “*Head waves*”, ondas difratadas ou o acoplamento entre os tipos de onda diferentes em períodos longos. Outro erro de cálculo é a dispersão da malha, que ocorre na maioria dos esquemas de diferenças finitas.
- Erros causados pelo uso de um modelo simplificado. Neste caso, o sismograma sintético pode ser exato para o modelo simplificado, mas o modelo é uma representação inadequada do problema real. Estas simplificações podem ser necessárias a fim de aplicar uma técnica particular numérica, ou pode resultar de falta de informação de muitos dos detalhes do modelo. Os exemplos incluem o uso de modelos 1-D que não levam em consideração a estrutura 3-D, na hipótese de uma fonte pontual, e negligenciando os efeitos de atenuação ou anisotropia nos cálculos.

De longe, a parte mais difícil na computação sismogramas sintéticos é a solução para os efeitos de propagação lenta, através de estruturas de velocidade realista. Apenas para alguns modelos grosseiramente simplificados (por exemplo, o espaço total ou semi-espacos) são soluções analíticas possíveis.

A parte da solução, que conecta a distribuição de força na fonte com os deslocamentos para o receptor é chamado de função de Green da elastodinâmica. Cálculo da função de Green é a parte fundamental do cálculo do sismograma sintético, pois esta função deve ter em conta todas as propriedades elásticas do material e das condições de contorno apropriadas.

Há um grande número de diferentes métodos para a computação de sismogramas sintéticos. A maioria desses se enquadra nas seguintes categorias:

1. métodos de diferenças finitas e elementos finitos que utilizam o computador para poder resolver a equação de onda sobre um conjunto discreto de pontos de uma malha ou elementos do modelo. Estes têm a grande vantagem de ser capaz de lidar com modelos de complexidade arbitrária. Seu custo computacional cresce com o número de pontos definidos na malha.

2. métodos do Raio em que as geometrias de raios são explicitamente especificadas e os caminhos dos raios são computados. Estes métodos incluem a teoria do raio simples (ou geométrico), WKBJ, e os chamados “teoria generalizada do raio”. Eles são muito úteis nas altas frequências para as quais a aproximação teórica é mais precisa.

Não existe uma única “melhor maneira” para computar sismogramas sintéticos. Cada método tem suas próprias vantagens e desvantagens. O método de escolha vai depender do problema particular a ser resolvido e o poder computacional disponível, portanto é útil estar ciente do repertório completo de técnicas.

Esta seção vai mostrar, resumidamente, apenas como calcular sismogramas sintéticos em um meio 2-D utilizando os diferentes tipos de métodos do raio. Semelhante a Pereira et al. (2011), onde compararam resultados de modelagem sísmica usando abordagens diferentes para campos de onda com base na teoria assintótica do raio. A primeira simulação foi de um sismograma usando a teoria do raio, levando em consideração apenas o aspecto cinemático do raio. A segunda simulação se utiliza o princípio de Huygens através de um tratamento mais rigoroso elaborado por Kirchhoff, sendo a base para várias técnicas importantes para computar sismogramas sintéticos. A última abordagem é baseada na simulação de campo por uma onda sistema de feixes de gaussianos, em que cada feixe é calculado de forma independente e contínuo em um meio homogêneo arbitrário e, portanto, o campo de onda num receptor é então obtido por uma superposição integral de todos os feixes gaussianos que chegam em uma vizinhança (denotada de zona de Fresnel projetada) do receptor.

Seja um modelo hipotético com uma camada de  $3000\text{ m/s}$  e outra de  $4000\text{ m/s}$  dividida por uma interface curva, como mostra a figura (19). O dado foi obtido com um par de fonte e geofone deslocando-se  $50\text{ m}$  em uma região de  $1550\text{ m}$  na superfície do modelo. Cada traço possui 512 amostras de tempo, com  $2\text{ ms}$  de intervalo de amostragem. Os resultados para diferentes tipos de abordagens podem ser vistos na figura (20).

Comparando modelagem sísmica usando teoria do raio, aproximação de Kirchhoff e feixes gaussianos (FG), pode ser observado na figura (20) que o melhor resultado foi obtido usando o campo de onda calculado por FG. Isso se deve ao fato de que a teoria do raio de ordem zero não é capaz de calcular as amplitudes na vizinhança de cáusticas e a aproximação de Kirchhoff apresenta pontos de difração gerado pela equação (3.25). Portanto, foi visto que a regularidade da descrição do campo de ondas é uma das grandes vantagens da extensão analítica da teoria do raio, permitindo que a superposição de feixes seja também uma alternativa para representar o campo de ondas em regiões do modelo de velocidade onde geralmente a teoria do raio costuma falhar na simulação do campo de ondas.

Figura 19 – Modelo sinclinal de velocidades utilizado para modelagem sísmica. A primeira fonte está em  $-25\text{ m}$  e o primeiro geofone em  $25\text{ m}$ .

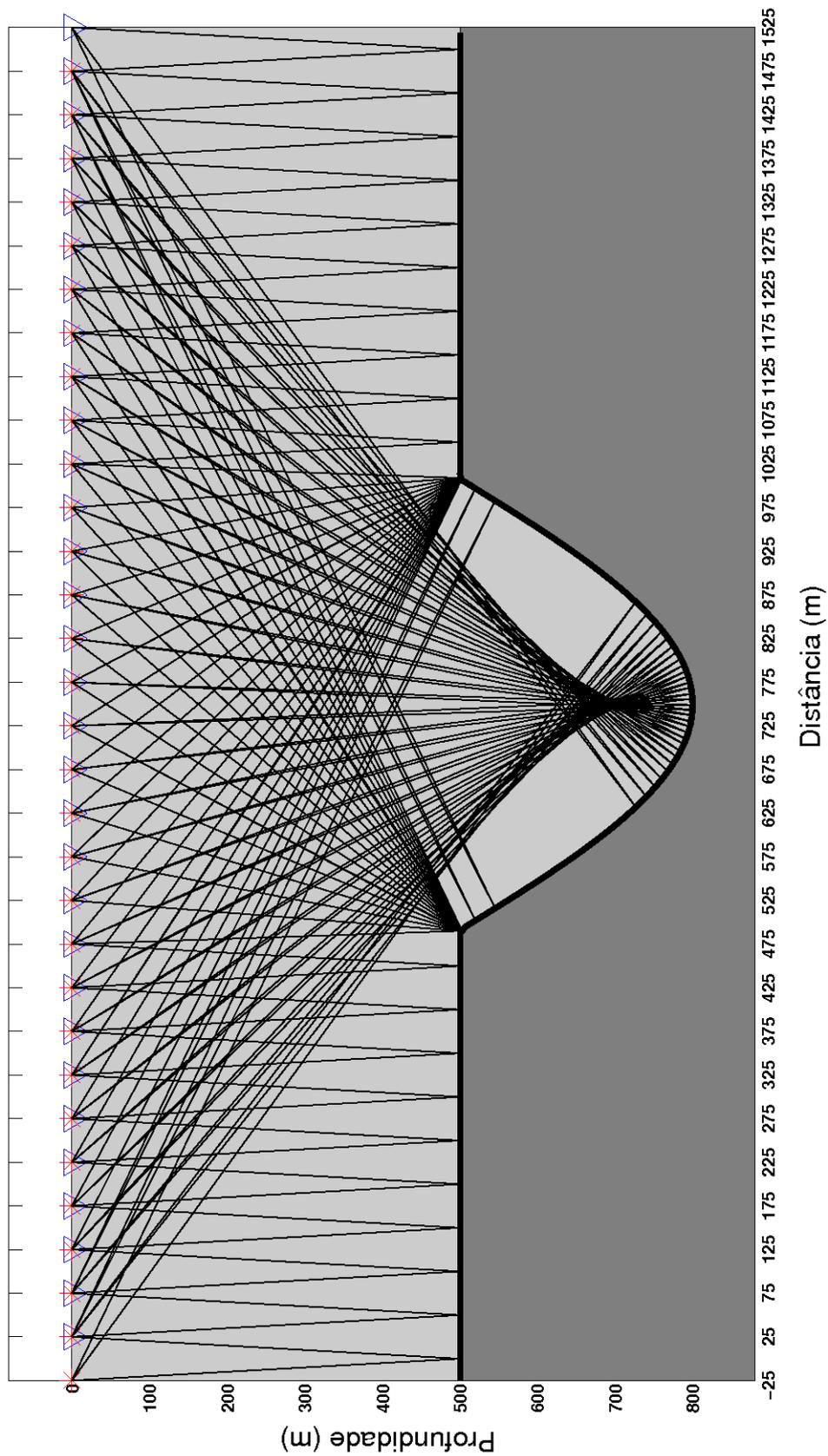
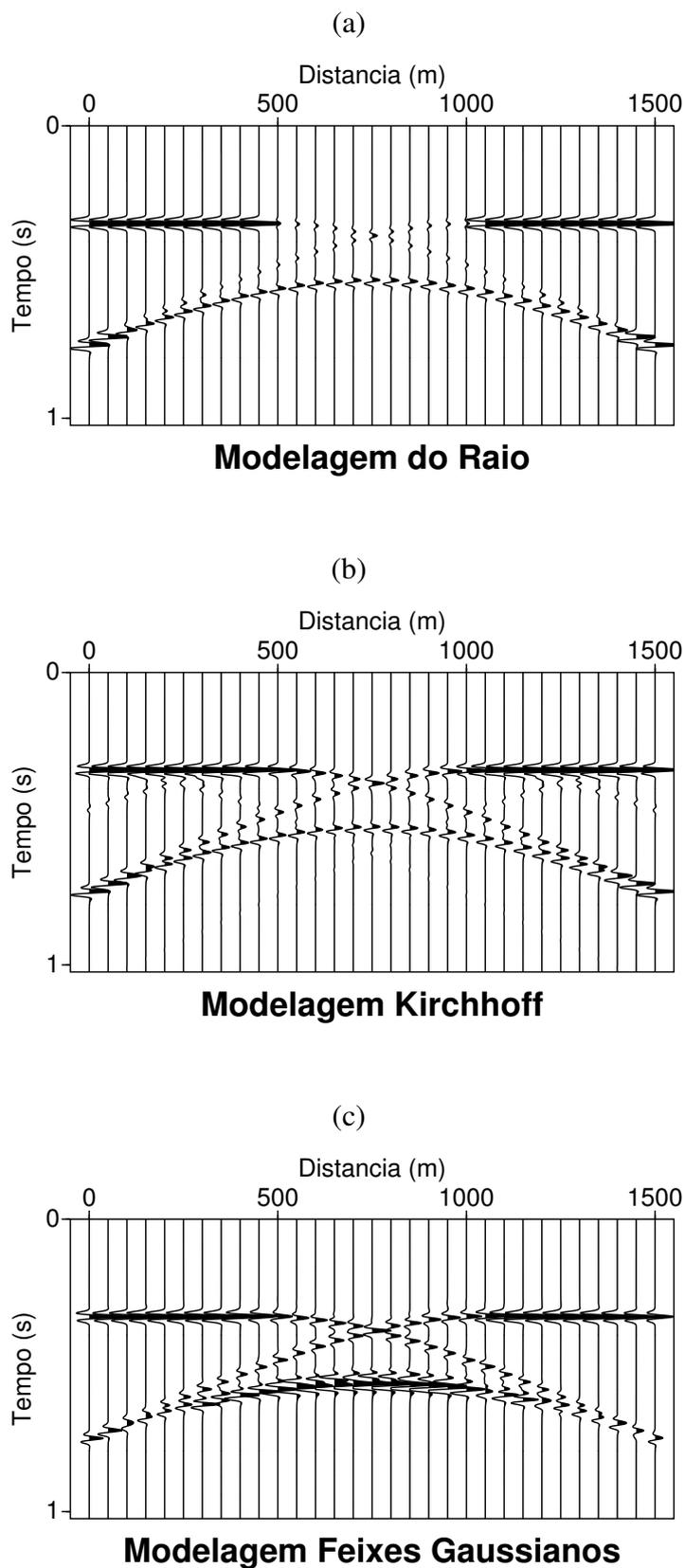


Figura 20 – Resultados das modelagens sísmica do raio, Kirchhoff e feixes gaussianos para o modelo e geometria de aquisição ilustrado na figura (19).



Fonte: Do autor

## 4 MIGRAÇÃO KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM (KGB)

### 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo descreverá a modificação do operador de empilhamento de difrações para a migração Kirchhoff pré-empilhamento com verdadeira amplitude (SCHLEICHER et al., 1993), a fim de utilizar o formalismo de feixes gaussianos neste tipo de procedimento de imageamento. O objetivo principal do presente capítulo é mostrar que, com a introdução dos feixes gaussianos no formalismo de migração, é preciso modificar o operador de empilhamento de difrações (SCHLEICHER et al., 1993), principalmente na sua interpretação física do problema do imageamento.

### 4.2 MIGRAÇÃO KIRCHHOFF COM VERDADEIRAS AMPLITUDES

Seja um meio 3-D de coordenadas cartesianas e considerando o modelo de terra como um sistema heterogêneo isotrópico de camadas, separadas por interfaces suaves e curvas, sendo cada camada constituída por uma distribuição arbitrária 3-D de velocidade. Para simplificar, consideramos uma superfície plana como a interface do limite superior do modelo de terra, onde podemos distribuir o conjunto de fontes sísmicas e receptores, utilizando-se o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$  em coordenadas cartesianas 2-D, expresso pelas relações:

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_S(\xi_1, \xi_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_G = \mathbf{x}_G(\xi_1, \xi_2) \quad (4.1)$$

Por meio da teoria do raio de ordem zero, podemos representar a componente principal da reflexão primária do campo de ondas sísmicas a partir de fontes pontuais  $S(\boldsymbol{\xi})$ , ou seja, o deslocamento de partículas na direção do raio emergente no receptor  $G(\boldsymbol{\xi})$ , após uma reflexão no ponto  $M$ , em profundidade, com o tempo de reflexão,  $\tau_R(\boldsymbol{\xi})$ , pela seguinte expressão no domínio da frequência (SCHLEICHER et al., 1993) :

$$U(\boldsymbol{\xi}, \omega) = \hat{W}(\omega)u(\boldsymbol{\xi}) \exp[i\omega\tau_R(\boldsymbol{\xi})] \quad (4.2)$$

Sendo o pulso sísmico da fonte no domínio da frequência  $\hat{W}(\omega)$ , que no domínio do tempo é o pulso analítico da fonte, ou seja, composto por uma parte real representado pelo pulso da fonte e sua transformada de Hilbert como a parte imaginária, que é reproduzido para todo o experimento sísmico. Além disso, a amplitude sísmica é:

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \frac{C_t R_c}{G_s} \quad (4.3)$$

Onde,  $C_t$ ,  $R_c$  e  $G_s$  são, respectivamente, a perda total das transmissões, o coeficiente de reflexão de ondas planas no ponto de reflexão e o fator de espalhamento geométrico complexo

normalizado pelo raio de reflexão. No domínio do tempo, o campo de onda sísmica  $U(\boldsymbol{\xi}, t)$  e os dados migrados em verdadeira amplitude  $U_{TA}(t)$ , respectivamente, são:

$$U(\boldsymbol{\xi}, t) = u(\boldsymbol{\xi})W(t - \tau_R(\boldsymbol{\xi})) \quad \text{e} \quad U_{TA}(t) = G_s U(\boldsymbol{\xi}, t + \tau_R(\boldsymbol{\xi})) = C_t R_c W(t) \quad (4.4)$$

As fórmulas na equação (4.4) só são válidas na ausência de superfície livre, por outro lado, devemos considerar seu efeito para corrigir a migração dos dados sísmicos (SCHLEICHER et al., 2007). O volume de migração consiste de pontos dentro do modelo de velocidade utilizado para a migração em profundidade, distribuídos através de uma malha retangular 3-D. A abertura de migração resulta de um conjunto de pares fonte-receptor especificados pela configuração de medição dentro de uma malha 2-D de pontos no plano  $\boldsymbol{\xi}$ . A soma dos tempos de trânsito a partir da fonte  $S$  e receptor  $G$  ao ponto arbitrário  $M$  na subsuperfície ( $\tau_S(S(\boldsymbol{\xi}), M)$  e  $\tau_G(G(\boldsymbol{\xi}), M)$ ), respectivamente, serve para expressar o empilhamento na superfície de difração, chamada de superfície Huygens:

$$\tau_D(\boldsymbol{\xi}, M) = \tau_S(S(\boldsymbol{\xi}), M) + \tau_G(G(\boldsymbol{\xi}), M) \quad (4.5)$$

A migração convencional Kirchhoff pré-empilhamento na profundidade em verdadeira amplitude, para um ponto fixo  $M$ , o tempo de trânsito  $\tau_D(\boldsymbol{\xi}, M)$  nos fornece a superfície de Huygens, ao longo do qual o campo de onda sísmica  $\hat{U}(\boldsymbol{\xi}, \omega)$  é somado de forma ponderada, sendo expresso no domínio da frequência pela integral de empilhamento de difrações (SCHLEICHER et al., 1993):

$$\hat{I}(M, \omega) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\xi} w(M, \boldsymbol{\xi}) U(\boldsymbol{\xi}, \omega) \exp[i\omega\tau_D(\boldsymbol{\xi}, M)]. \quad (4.6)$$

Ao usar a teoria do raio de ordem zero na equação (4.2) para representar a componente principal do campo de ondas sísmicas, Schleicher et al. (2007) obtiveram a função de ponderação adequada  $w(M, \boldsymbol{\xi})$ , aplicando o método da fase estacionária (BLEISTEIN, 1984) na integral de empilhamento de difrações. Dentro da abertura de migração  $\mathcal{A}$  todos os vetores de parâmetro,  $\boldsymbol{\xi}$ , especificam as posições fonte-receptor. Para a integral em 4.6, a principal contribuição vem do ponto estacionário  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*$ , onde tem-se que  $\tau_D(\boldsymbol{\xi}^*) = \tau_R(\boldsymbol{\xi}^*)$  e  $\nabla\tau_D(\boldsymbol{\xi}^*) = \nabla\tau_R(\boldsymbol{\xi}^*)$ , fornecendo o coeficiente de reflexão do ponto em subsuperfície. Nos outros casos, as avaliações assintóticas são contribuições provenientes dos limites de migração do operador, será atenuada por alguma função “taper” na vizinhança da abertura de migração.

Ao considerar um intervalo regular espacial  $\Delta\boldsymbol{\xi}$  de fontes e receptores, podemos expressar no domínio do tempo a integral de empilhamento da difração, pela forma discreta homóloga,

como:

$$I(M, t = 0) = \left( \frac{-1}{2\pi} \right) (\Delta\xi)^2 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} w_{jk}(M, \xi_1^j, \xi_2^k) \dot{U}_{jk}[\xi_1^j, \xi_2^k, t + \tau_D(M, \xi_1^j, \xi_2^k)] . \quad (4.7)$$

O símbolo  $\dot{U}$  significa derivada temporal de primeira ordem. A determinação de cada fonte e receptor de coordenadas espaciais na abertura de migração e dada pelas relações:

$$\xi_1^j = \xi_{o1} + (j - 1)\Delta\xi, j = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \xi_2^k = \xi_{o2} + (k - 1)\Delta\xi, k = 1, \dots, n , \quad (4.8)$$

Iniciando do ponto inicial com coordenadas  $\xi_o = (\xi_{o1}, \xi_{o2})$ . Ao assumir, a priori, um modelo de velocidade conhecido, a função de ponderação é calculada pelo traçamento dinâmico de raios que depende do ponto  $M$  na profundidade, para coordenadas pontuais na abertura de migração  $\mathcal{A}$ . Os dados de entrada no processo de empilhamento de difração é a extensão complexa (sinal analítico) da derivada temporal de primeira ordem aplicadas às componentes principais computadas de todo dados sísmico 3-D observado.

### 4.3 MIGRAÇÃO KGB COM VERDADEIRAS AMPLITUDES

Nos anos recentes encontram-se na literatura geofísica muitos estudos acerca da superposição de feixes gaussianos como solução alternativa da equação da onda sísmica (POPOV, 1982; ČĚRVENÝ, 1982; ČĚRVENÝ, 2001; POPOV, 2002; NOWACK, 2003; ŽÁCEK, 2006; PEREIRA et al., 2011; CRUZ et al., 2012). A principal vantagem do método de feixes gaussianos, isto é, a regularidade da determinação do campo de ondas mesmo na presença de cáustica ou zonas de sombra, tem também atraído a atenção de muitos pesquisadores que trabalham com imageamento sísmico (HILL, 1990; HILL, 2001; ALBERTIN et al., 2004; PROTASOV, 2005; FERREIRA e CRUZ, 2009; BLEISTEIN, 2009; GRAY e BLEISTEIN, 2009; POPOV et al., 2010).

O algoritmo apresentado por Hill (2001), sendo atualmente o trabalho mais referenciado, tem por objetivo obter uma imagem sísmica migrada em profundidade usando a integral de superposição de feixes gaussianos como representação da função de Green. As amplitudes dos dados sísmicos são ponderadas por uma função peso gaussiana, com largura previamente determinada, dentro de um subconjunto de dados selecionado, decomposto por ondas planas a partir do centro do feixe e somados no domínio *slant stack*, sendo a migração feita no domínio da profundidade usando o princípio de imageamento (CLAERBOUT, 1985). O método *slant stack* considera que o registro foi obtido a partir de ondas planas, assim o domínio *slant stack* é a decomposição do sinal em diferentes direções de propagação da onda. Os dados em tal domínio, são tratados no espaço (frequência  $\times$  vagarosidade horizontal), sendo o processo semelhante a uma migração baseada em ondas planas, mas com amplitudes e tempos de trânsitos

complexos. Este algoritmo apesar de ser estruturado para um modelo 3-D, aplica-se apenas no domínio afastamento fonte-receptor constante. Devido ao fato do tratamento dos dados ser feito no domínio da vagarosidade horizontal, há a necessidade de otimizar o intervalo de discretização do parâmetro vagarosidade, pois o mesmo depende das frequências mais baixa e mais alta e da largura dos feixes gaussianos, tornando o processo bastante sensível a problemas de *alias*.

Seguindo um procedimento de migração similar ao usado por Sun et al. (2000), Ferreira e Cruz (2009) propuseram uma nova abordagem para a migração em profundidade usando a aproximação do campo de ondas pela superposição de feixes gaussianos. Neste novo algoritmo trata-se da migração 3-D em profundidade para arbitrarias configurações de aquisição de dados, com preservação de amplitudes. O algoritmo é constituído por dois empilhamentos em cascata, sendo o primeiro a tratar de um *beam stack* realizado por uma integral de superposição de feixes gaussianos, diferindo esta etapa com a mostrada pelo Hill (2001) devido os dados serem integrados ao longo de curvas hiperbólicas, em vez de linhas retas. O segundo estágio da migração KGB é o empilhamento de difrações tipo Kirchhoff, com as respectivas amplitudes devidamente ponderadas a fim de preservar a informação de amplitude.

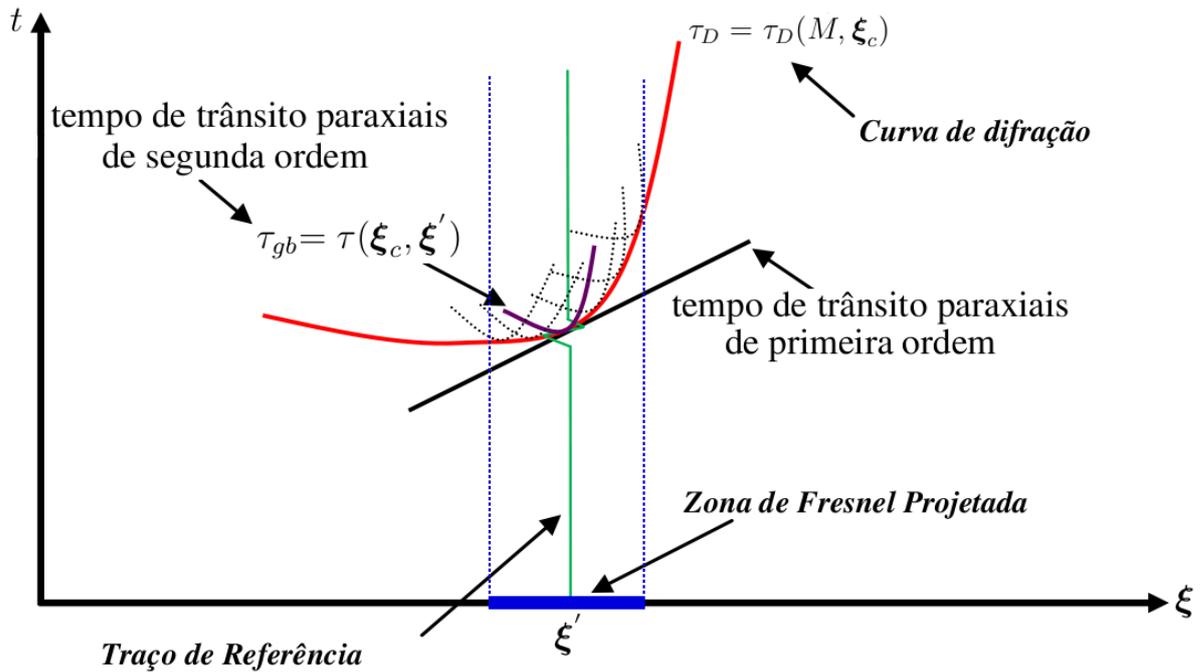
Para a obtenção de ponto na imagem sísmica pela migração tipo KGB, usa-se a mesma estratégia no empilhamento de difração para cada ponto  $M$  no volume de migração, ou seja, a soma ponderada ao longo da superfície Huygens na equação 4.6. Na migração Kirchhoff, é necessário o uso do “*two point ray tracing*” para calcular os tempos de trânsito a partir da fonte e do receptor na superfície de aquisição até o ponto  $M$  no volume de migração. De maneira análoga à migração Kirchhoff usando feixes proposta por Sun et al. (2000), incluímos na estratégia de migração a soma de um subconjunto de dados de registro sísmico (*beam dataset*), ao longo de uma superfície estimada de tempo de trânsito paraxiais de segunda ordem a partir dos tempos de trânsito da superfície de Huygens (figura (21)). O resultado de cada feixe é acumulado na superfície de Huygens, que depois é usada como entrada na integral de empilhamento da difração. A migração KGB tem a forma de dois processos de empilhamento em cascata:

1. Para um ponto selecionado  $M$  no volume de migração  $\mathcal{V}$  em relação às coordenadas da fonte e do receptor, na abertura de migração  $\mathcal{A}$  para uma configuração de aquisição sísmica, calculamos a função de tempo de trânsito  $\tau_D = \tau_D(M, \xi)$  da superfície de Huygens;
2. Para um ponto selecionado  $P$  da superfície Huygens, usando a integral com a mesma forma de sobreposição de feixes Gaussianos com domínio  $\mathcal{D}$ , somamos as amplitudes dos traços sísmicos com a ponderação (chamada de *gaussian beam stack* - GBS) no vetor de parâmetros  $\xi' \in \mathcal{D}$ , ao longo de uma superfície de tempo de trânsito paraxial de segunda ordem complexo  $\tau_{gb} = \tau(\xi_c, \xi')$  (chamado de *beam stack surface*), cuja a parte real é a aproximação de segunda ordem do tempo de trânsito de reflexão e a parte imaginária é o fator gaussiano presente na amplitude observada;
3. Usando a integral tipo Kirchhoff de abertura  $\mathcal{A}$ , somamos ao longo da superfície Huy-

gens  $\tau_D(M, \xi_c)$  (chamada de *diffraction stack*) as amplitudes sísmicas obtidas no processamento de *beam stack surface*;

4. Finalmente, acumulamos o resultado do empilhamento da difração no ponto  $M$  no volume de migração  $\mathcal{V}$ .

Figura 21 – Representação esquemática 2-D do processo de empilhamento das amplitudes utilizando os feixes gaussianos.



Fonte: Adaptado de Costa (2012)

A integral de empilhamento de difração (equação (4.6)), a integral de empilhamento do feixe com mesma formulação matemática que a integral de superposição de feixes gaussianos (equação (3.38)) delimitada pela zona de Fresnel projetada, com a funções peso  $\Psi$  devidamente calculada no traçamento de raios e utilizando as amplitudes fornecidas pelos dados sísmicos, podemos escrever uma maneira conveniente de migração KGB com verdadeiras amplitudes na profundidade (Apêndice D):

$$\hat{I}(M, \omega) = \frac{-i\omega}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} d\xi_{1c} d\xi_{2c} w_b(M, \xi_c, \omega) \exp[i\omega \tau_D(M, \xi_c)] \int \int_{\mathcal{D}} d\xi'_{1c} d\xi'_{2c} (\cos \alpha'_s \cos \alpha'_G)^{-1} [\det \mathbf{H}_P(\xi'_{c1}, \xi'_{c2})]^{1/2} \hat{W}(\omega) u(\xi') \exp[-i\omega \tau_{gb}(\xi_c, \xi')] \quad (4.9)$$

Consideramos que o domínio da integral interna em (4.9) é a vizinhança paraxial do vetor de parâmetro,  $\xi_c$ , na superfície de aquisição, tais que  $\mathcal{D} = \{\xi'; |\xi' - \xi_c| \leq |\delta_F|\}$ , com  $\delta_F = \delta_{max}$ , ou seja, o extremo da desigualdade:

$$|\delta^T \mathbf{H}_P \delta| \leq T, \quad (4.10)$$

Onde  $\mathbf{H}_P$  e  $T$  são as matrizes  $2 \times 2$  da primeira zona Fresnel projetada (SCHLEICHER et al., 2007) e o período dominante dos dados sísmicos, respectivamente. Ao utilizar essas restrições, considera-se na integral de empilhamento dos feixes gaussianos apenas as contribuições das amplitudes de campo de onda que emergem dentro da primeira zona de Fresnel projetada na superfície de aquisição.

A integral de empilhamento de difração na equação (4.9) acumula as contribuições de todos os conjuntos de feixes com vetor de parâmetro  $\xi_c$  calculado a partir da integral de empilhamento do feixe. O intervalo discreto  $\Delta\xi_c$  entre os centros do feixe deve obedecer aos mesmos critérios utilizados na migração Kirchhoff em profundidade pré-empilhamento, porque cada centro do feixe de coordenadas corresponde a um ponto em uma superfície de Huygens.

Na equação (4.9), o domínio  $\mathcal{D}$  é uma grade retangular 2-D dos pontos localizados na superfície de aquisição no intervalo de dados sísmicos registrados. No domínio  $\mathcal{D}$ , assumimos todas as amplitudes do conjunto de traços sísmicos, que contribuem para o traço sísmico dos dados de entrada na migração Kirchhoff. Na migração KGB o comprimento do domínio deve obedecer aos seguintes critérios:

- Deve ser limitada pelo intervalo de validade da aproximação paraxial de reflexão do tempo de trânsito;
- Deve corresponder ao comprimento da primeira zona de Fresnel projetada. Assim, controla-se fisicamente o número de traços sísmicos na integral *gaussian beam stack* no processo de migração KGB.

A integral da equação (4.9) pode ser reescrita de uma maneira mais simples:

$$\hat{I}(M, \omega) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int \int_A d\xi_c w_b(M, \xi, \omega) \hat{U}(\xi, \omega). \quad (4.11)$$

Sendo:

$$\hat{U}(\xi_c, \omega) = \int \int_D d\eta (\cos \alpha'_S \cos \alpha'_G)^{-1} \sqrt{-\det \mathbf{H}_P(\xi')} \hat{W}(\omega) u(\xi') \exp[i\omega \tau_{dif}(\xi_c, \eta; M)] \quad (4.12)$$

Para definir as coordenadas de integração, usa-se na equação (4.12) a relação de transformação do vetor posição da projeção normal do ponto de reflexão sobre o plano tangente ao

refletor na profundidade para as coordenadas da primeira zona de Fresnel projetada (figura (3)). Assim, as coordenadas do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\eta}$  na superfície da Terra, está sujeita à igualdade dada por:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}_P^{-1}(\boldsymbol{\xi}_c)\boldsymbol{\Lambda}^\top \mathbf{x}_r . \quad (4.13)$$

Com a matriz  $\boldsymbol{\Lambda}_{2 \times 2}$  referente à geometria de aquisição descrita na equação 3.43:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B}_1^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_S + \mathbf{B}_2^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_R \quad (4.14)$$

Onde os elementos de valores reais das matrizes  $2 \times 2$  são derivadas parciais de segunda ordem dos tempos de trânsito a partir da fonte e do receptor para o ponto selecionado na profundidade avaliada no ponto de reflexão.

A diferença entre o tempo de trânsito de difração e reflexão é a função do termo exponencial da integral na equação 4.12 é expresso por  $\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}; M) = \tau_D(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}; M) - \tau_{gb}(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\xi}')$ .

Tendo em vista a análise assintótica da integral na equação 4.12, podemos expandir a função da diferença de tempos de trânsito em série de Taylor de segunda ordem para as condições da fase estacionária, a partir dos parâmetros calculados nos pontos críticos  $\boldsymbol{\xi}_c = \boldsymbol{\xi}^*$  and  $\boldsymbol{\eta}^* = 0$ , resultando:

$$\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}; M) = \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, \boldsymbol{\eta}^* = 0; M) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)^T \mathbf{H}_\xi(\boldsymbol{\xi}_c^*)(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{H}_\eta(\boldsymbol{\eta}^* = 0)\boldsymbol{\eta} \quad (4.15)$$

No ponto crítico,  $\boldsymbol{\xi}_c = \boldsymbol{\xi}^*$ , temos a matriz Hessiana  $2 \times 2$  com valores complexos:

$$\mathbf{H}_\xi(\boldsymbol{\xi}_c^*) \equiv \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*) = -[\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_c^*) - \mathbf{H}_D(\boldsymbol{\xi}_c^*)] \quad (4.16)$$

Em  $\boldsymbol{\eta}^* = 0$  a matriz Hessiana  $2 \times 2$  com valores reais:

$$\mathbf{H}_\eta(\boldsymbol{\eta}^* = 0) \equiv \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}_c) . \quad (4.17)$$

A partir da solução assintótica dada pelo método de diagonalização simultânea aplicado na integral interna do operador *Kirchhoff-Gaussian-Beam* na equação 4.9, reescrevemos o operador KGB como:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) \approx & \frac{\omega}{2\pi} \int \int_A d\boldsymbol{\xi}_c \left[ \frac{2\pi}{\omega} \right] w_b(\boldsymbol{\xi}_c, M) (\cos \alpha_S^c \cos \alpha_G^c)^{-1} \hat{W}(\omega) u(\boldsymbol{\xi}_c) \\ & \times \exp[i\omega\phi(\boldsymbol{\xi}_c, M)] \exp \left[ -\frac{i\pi}{2} (1 - \text{Sgn}\mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2) \right] . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sendo a função  $Sgn(\mathbf{H}_P) = sgn(\lambda_1) + sgn(\lambda_2)$ , com  $\lambda_I, I = 1, 2$  os autovalores reais não nulos da matriz  $2 \times 2$  da primeira zona de Fresnel projetada. Calculamos a fase,  $\phi(\boldsymbol{\xi}_c, M) = \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)^T \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)$ , para a partir de parâmetros do raio estacionário no ponto crítico  $\boldsymbol{\xi}_c^*$ , considerando  $\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) = \tau_D(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) - \tau_R(\boldsymbol{\xi}_c^*)$ , onde  $\tau_R(\boldsymbol{\xi}_c^*)$  é o tempo de trânsito de reflexão dentro do feixe.

Assumindo que a matriz Hessiana  $2 \times 2$  com valores complexos  $\mathbf{M}_\Delta = \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)$  é simétrica e não singular, i.e.,  $\det \mathbf{M}_\Delta \neq 0$  no ponto crítico  $\boldsymbol{\xi}_c^*$ , com a parte imaginária positiva-definida, para alta frequência, o resultado do método da diagonalização simultânea (ČĚRVENÝ, 2001) aplicado em equação 4.18 resulta em:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &\approx \frac{2\pi}{\omega} W(\omega) w_b(\boldsymbol{\xi}_c^*, M, \omega) [v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*) v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)]^{-1} \\ &\times \frac{U_o^\Omega C_t R_c}{G_S^B \sqrt{\det \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)}} \exp[i\omega \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) - \frac{i\pi}{2}(1 - Sgn \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Onde os pares  $(v_s, v_g)$  e  $(p_{sz}, p_{gz})$  são as velocidades da onda  $P$  e os elementos verticais de vetores vagarosidade na fonte e no receptor na posição do ponto crítico, respectivamente. O fator  $G_S^B$  é o espalhamento geométrico complexo do feixe gaussiano normalizado. Para obter da equação 4.19 a estimativa do coeficiente de reflexão, podemos considerar a amplitude inicial unitária, coeficiente de transmissão unitário, a velocidade e densidade constante ao longo da superfície da Terra, que nos levam a definir a função de ponderação para o KGB, como:

$$\begin{aligned} w_b(\boldsymbol{\xi}_c^*, M, \omega) &= \frac{i\omega}{2\pi} [v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*) v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)] G_S^B(\boldsymbol{\xi}_c^*) \\ &\times \sqrt{\det \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)} \exp\left[\frac{i\pi}{2}(1 - Sgn \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2)\right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Usando na equação 4.20 as definições do espalhamento geométrico para um feixe gaussiano com condições fonte inicial pontual. Para uma coordenada do feixe central e um ponto arbitrário em profundidade temos a função peso expressa por:

$$\begin{aligned} w_b(\boldsymbol{\xi}_c, M, \omega) &= \frac{i\omega v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*) v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c) p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c) |h(\boldsymbol{\xi}_c, M)|}{2\pi |\nabla \tau_s(\boldsymbol{\xi}_c, M) + \nabla \tau_G(\boldsymbol{\xi}_c, M)| A_S(\boldsymbol{\xi}_c, M) A_G(\boldsymbol{\xi}_c, M)} \\ &\times \exp\left[\frac{i\pi}{2}(1 - Sgn \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2)\right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Onde:

$h(\boldsymbol{\xi}_c, M)$  é conhecido como determinante de Beylkin

$\nabla_{\tau_S}$  e  $\nabla_{\tau_G}$  são os gradientes das funções dos tempos de trânsito reais dos dois ramos do raio que começam na origem e nas posições de receptor, respectivamente, avaliadas em um ponto de profundidade  $M$  no volume de migração.

$A_S$  e  $A_G$  correspondem as amplitudes complexas normalizadas ao longo dos dois ramos de raios a partir de posições da fonte e do receptor para ponto na profundidade. Sendo as mesmas calculadas pela aproximação paraxial dos feixes gaussianos.

A migração KGB matematicamente expressa pela equação 4.9, no domínio do tempo se torna:

$$I(M, t = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_A d\xi_c w_f(\xi_c, M) \frac{\partial^2}{\partial t^2} U[\xi_c, t + \tau_D(\xi_c, M)]. \quad (4.22)$$

Onde  $w_f = \frac{2\pi}{i\omega} \omega_b$  e  $U(\xi_c, t)$  é a transformada inversa de Fourier do dado empilado pelos feixes gaussianos na integral interna da equação 4.12 dada por:

$$U(\xi_c, t) = \int_D \int d\xi'_1 d\xi'_2 (\cos \alpha'_S, \cos \alpha'_G)^{-1} [-\det \mathbf{H}_P(\xi'_1, \xi'_2)]^{1/2} u(\xi') W(t - T(\xi_c, \xi')). \quad (4.23)$$

Usando a aproximação de que as principais contribuições para a integral interna vêm de amplitudes com coordenadas perto da fonte e do receptor com o vetor de parâmetro  $\xi_c$ , ou seja, o centro do feixe de coordenadas, implementamos o algoritmo de KGB no domínio do tempo com base na equação 4.22 na forma discreta:

$$\hat{I}(M, t = 0) = \left( \frac{1}{4\pi^2} \right) (\Delta \xi_c)^2 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} w_f^{jk}(M, \xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k) U_{ij}[\xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k, t + \tau_D(M, \xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k)] \quad (4.24)$$

$$U_{ij}(\xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k, t) = \sqrt{-\det \mathbf{H}_{pjk}(M, \xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k) [\cos \alpha_{Sjk}^c(M, \xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k) \cos \alpha_{Gjk}^c(M, \xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k)]^{-1}} \\ \times \left( \Delta \xi' \right)^2 \sum_{l=-L/2}^{L/2} \sum_{r=-J/2}^{J/2} u(\xi_1^l, \xi_2^r) \ddot{W}_{jkpq}[t - T(\xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k; \xi_1^l, \xi_2^r)] \quad (4.25)$$

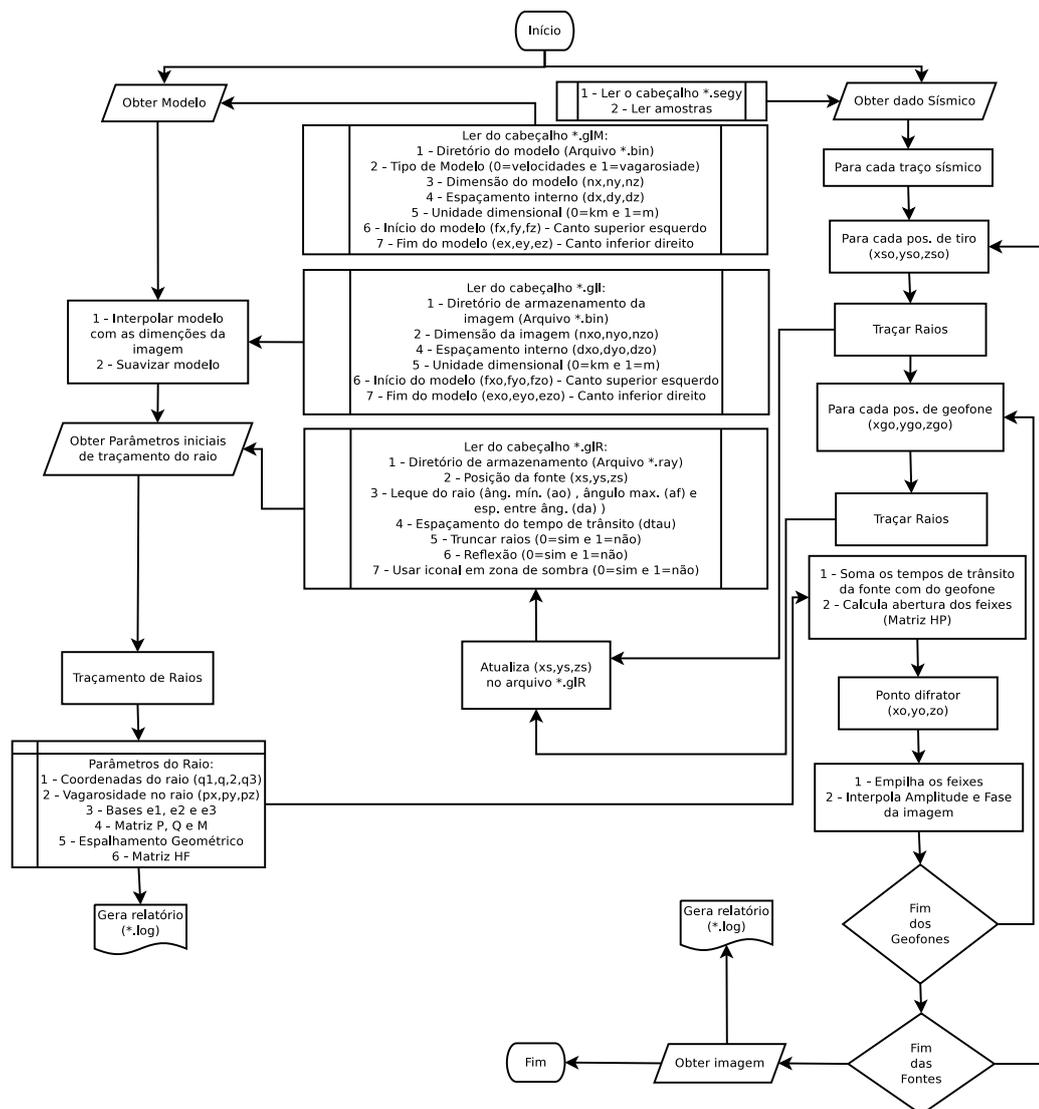
## 5 COMPARAÇÃO ENTRE A MIGRAÇÃO KIRCHHOFF E KGB

### 5.1 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE MIGRAÇÃO KGB

A figura (22) ilustra o diagrama do algoritmo de migração implementado para obtenção dos resultados deste capítulo. Onde o pseudocódigo (ou portugol) usa as seguintes notações:

-  ⇒ Interruptor de terminal (início ou fim da execução do programa);
-  ⇒ Entrada e saída (usado em variáveis);
-  ⇒ Processos pré-definidos (leitura de arquivos de configuração);
-  ⇒ Processo ou etapa auxiliar (Funções ou subrotinas);
-  ⇒ Armazenamento interno (gravação em memória);
-  ⇒ Laço de decisão.

Figura 22 – Fluxograma do algoritmo de migração KGB implementado.

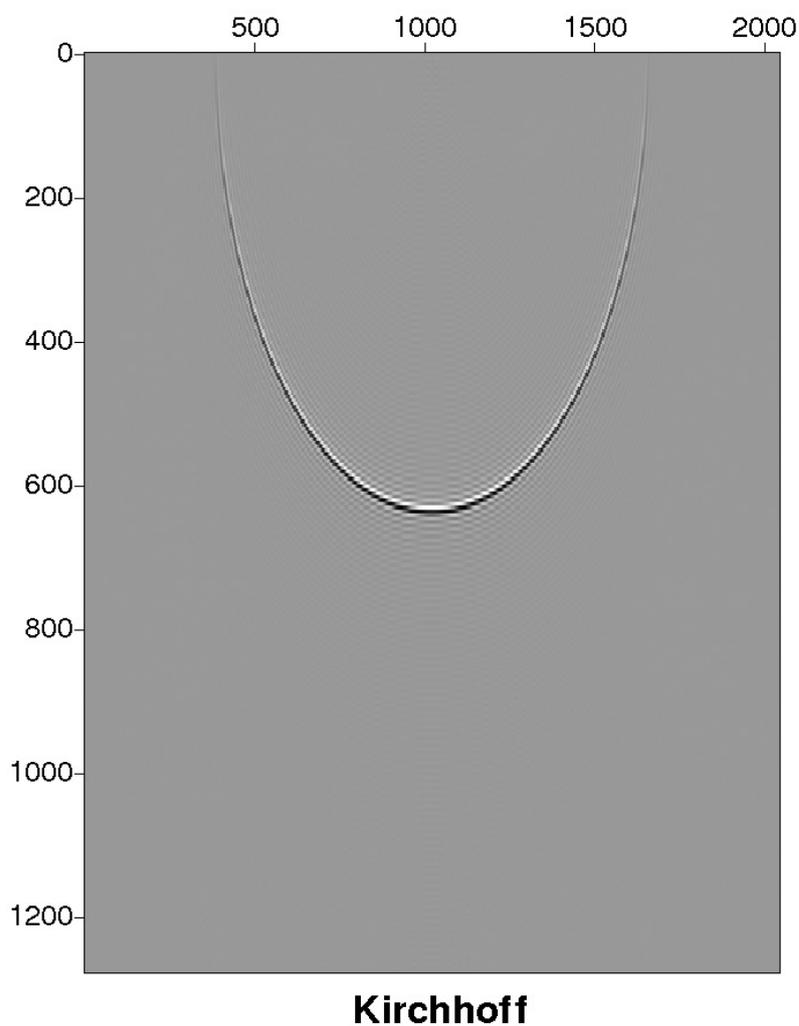


Fonte: Do autor

## 5.2 RESPOSTA AO IMPULSO

Antes de testar um algoritmo de migração em qualquer tipo de dado, sua resposta impulsiva precisa ser testada. A resposta ao impulso do operador de migração Kirchhoff é representada por uma elipse em modelo de velocidade constante, com os focos nas posições de fontes e geofones. Isso significa que os “candidatos” a pontos de reflexão podem possuir até aproximadamente  $90^{\circ}$  de mergulho. Por outro lado, devido ao efeito de “espalhamento” no ponto de reflexão o resultado final são pontos alinhados ao longo de uma curva e/ou superfície (figura (23)).

Figura 23 – Resposta ao impulso do operador Kirchhoff-PSDM

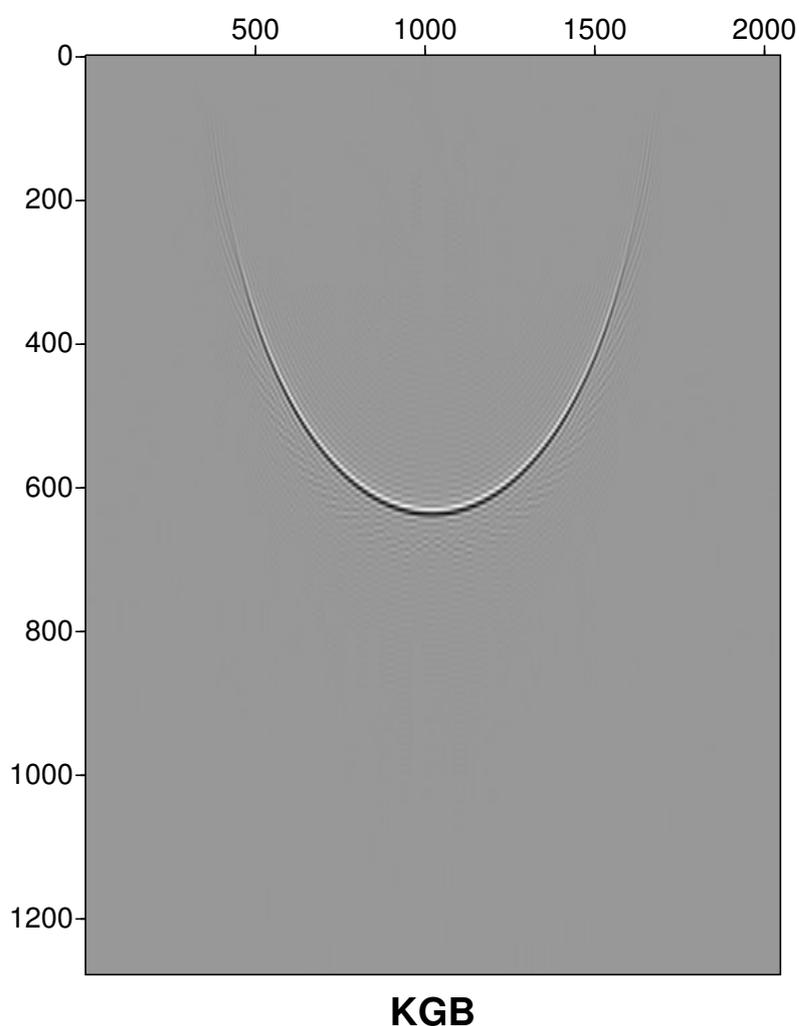


Fonte: Do autor

A aplicação do algoritmo KGB-PSDM sobre um impulso nos leva ao resultado observado na figura (24). Novamente a resposta impulsiva do operador é elíptica, devido ao fato do

algoritmo ser essencialmente Kirchhoff e o dado de entrada ser o impulso de um único traço, porém vemos que o caráter elíptico da curva se restringe mais acentuadamente a uma zona próxima do possível ponto refletor. Esta região se refere à zona de Fresnel do ponto espalhador de energia e é o resultado da contribuição dos traços vizinhos ao traço de referência, indicando que o algoritmo KGB procura imagear em região próxima ao ponto de difração e não somente o ponto difrator.

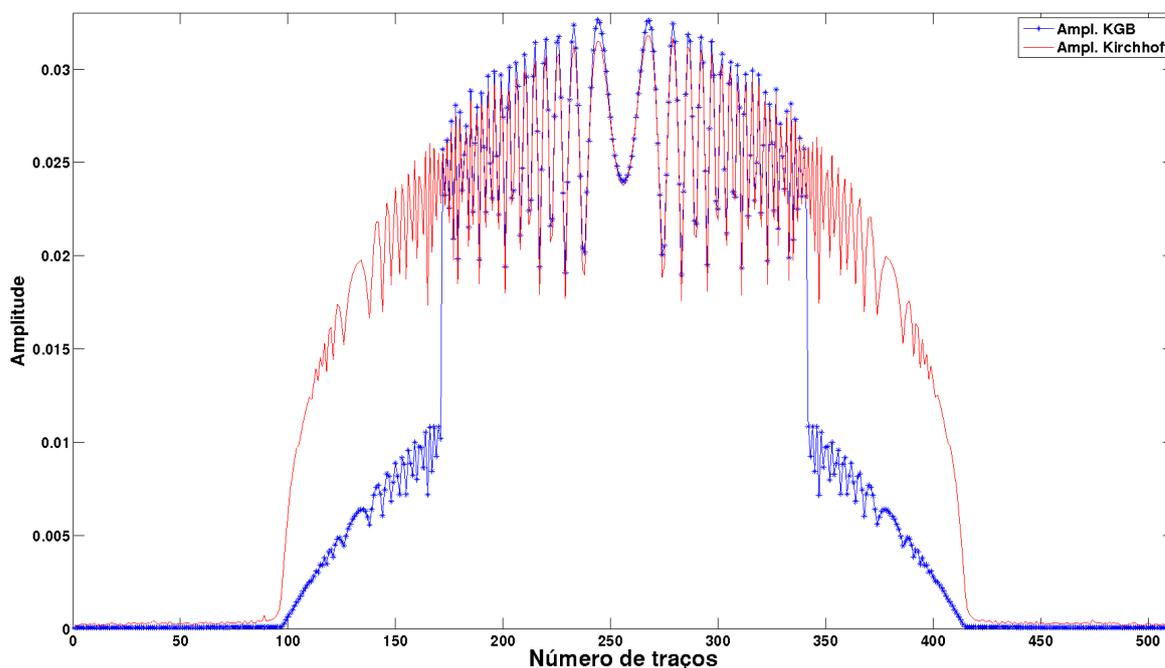
Figura 24 – Resposta impulsiva do operador, mostrando a elipse de migração. Notar que, apesar da forma elíptica do operador, há um reforço apenas nas proximidades da zona de Fresnel, onde se encontra o ponto difrator.



Fonte: Do autor

Para efeito de comparação entre o comportamento do operador Kirchhoff e KGB, fez-se a amostragem das maiores amplitudes de cada traço das repostas ao impulso das figuras (23) e (24). O resultado pode ser visto na figura (25).

Figura 25 – Comparação entre as maiores amplitudes de cada traço da resposta impulsiva do operador Kirchhoff e KGB.



Fonte: Do autor

### 5.3 MIGRAÇÃO 2-D DOS DADOS SINTÉTICOS MARMOUSI

Os dados sintéticos Marmousi se tornaram por muito tempo dados de teste para vários algoritmos de migração. Trata-se de um dado acústico 2-D, de estrutura complexa, baseado na geologia da bacia de Cuanza, em Angola (VERSTEEG, 1994). O estilo estrutural desse modelo dominado por falhas lítricas de crescimento, as quais se levantam desde um truncamento de sal até chegar à complicada estrutura de velocidade na parte superior do modelo (figura (27)).

O dado consiste de 240 famílias de tiro comum, com um intervalo entre cada tiro de  $25m$ . Os tiros foram dados a partir de  $3 km$  até  $9 km$ . Cada família de tiro é formada por 96 traços, com intervalo de grupo de  $25m$ , sendo o afastamento mais próximo de  $200 m$  e afastamento mais distante de  $2750 m$ . Cada traço possui 750 amostras de tempo, com  $4 ms$  de intervalo de amostragem. O tempo total de registro  $3 s$ .

Nas figuras (29) e (30) temos os resultados das migrações em profundidade para o modelo Marmousi usando os algoritmos Kirchhoff e KGB, respectivamente. O procedimento para obtenção das imagens é descrito no fluxograma da figura (22). O modelo de velocidades para o presente exemplo (figura (27)) tem a seguinte discretização:

$n_x$	$n_z$	$d_x$	$d_z$
2301	751	$4 m$	$4 m$

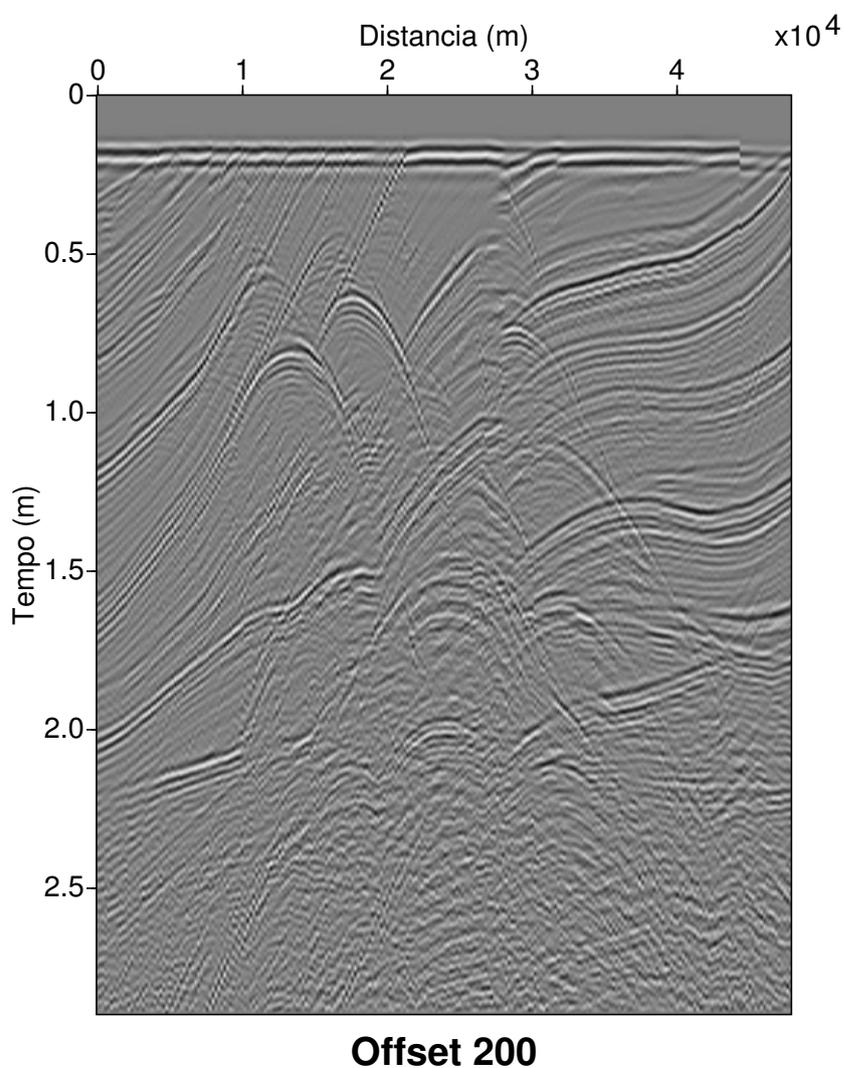
O modelo foi amostrado e suavizado com os seguintes valores (figura (28)):

$n_x$	$n_z$	$d_x$	$d_z$
51	21	164 m	150 m

Os dados Marmousi apresentados na figura (26) foram migrados para um espaço de discretização com (figuras (29) e (30)):

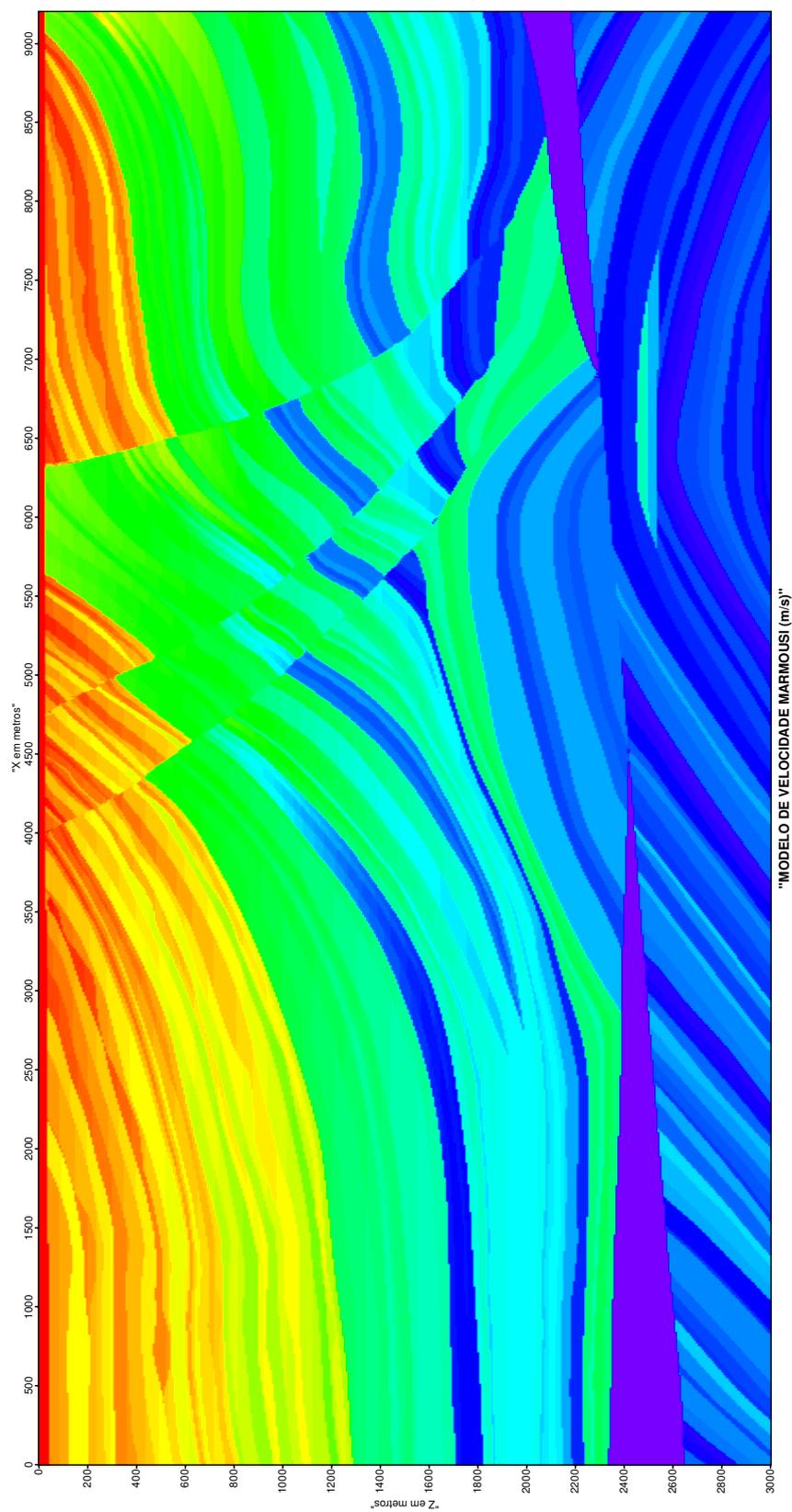
$n_x$	$n_z$	$d_x$	$d_z$
4101	1501	2 m	2 m

Figura 26 – Dados “Marmousi” com afastamento comum de 200 m.



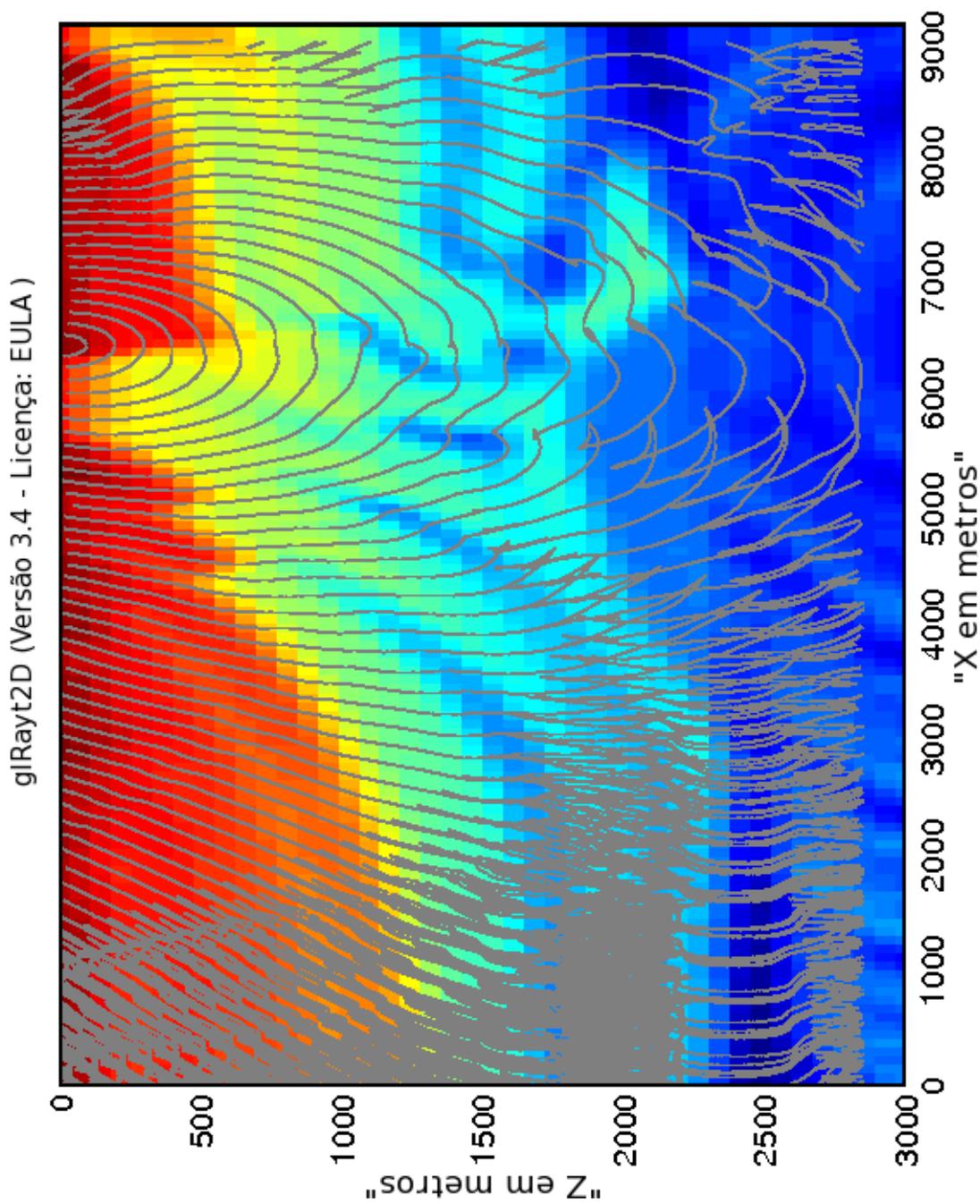
Fonte: Do autor

Figura 27 – Modelo de velocidades Marmousi.



Fonte: Do autor

Figura 28 – Modelo de velocidades Marmousi suavizado e com as frentes de ondas calculadas pelo traçamento de raios.



Fonte: Do autor

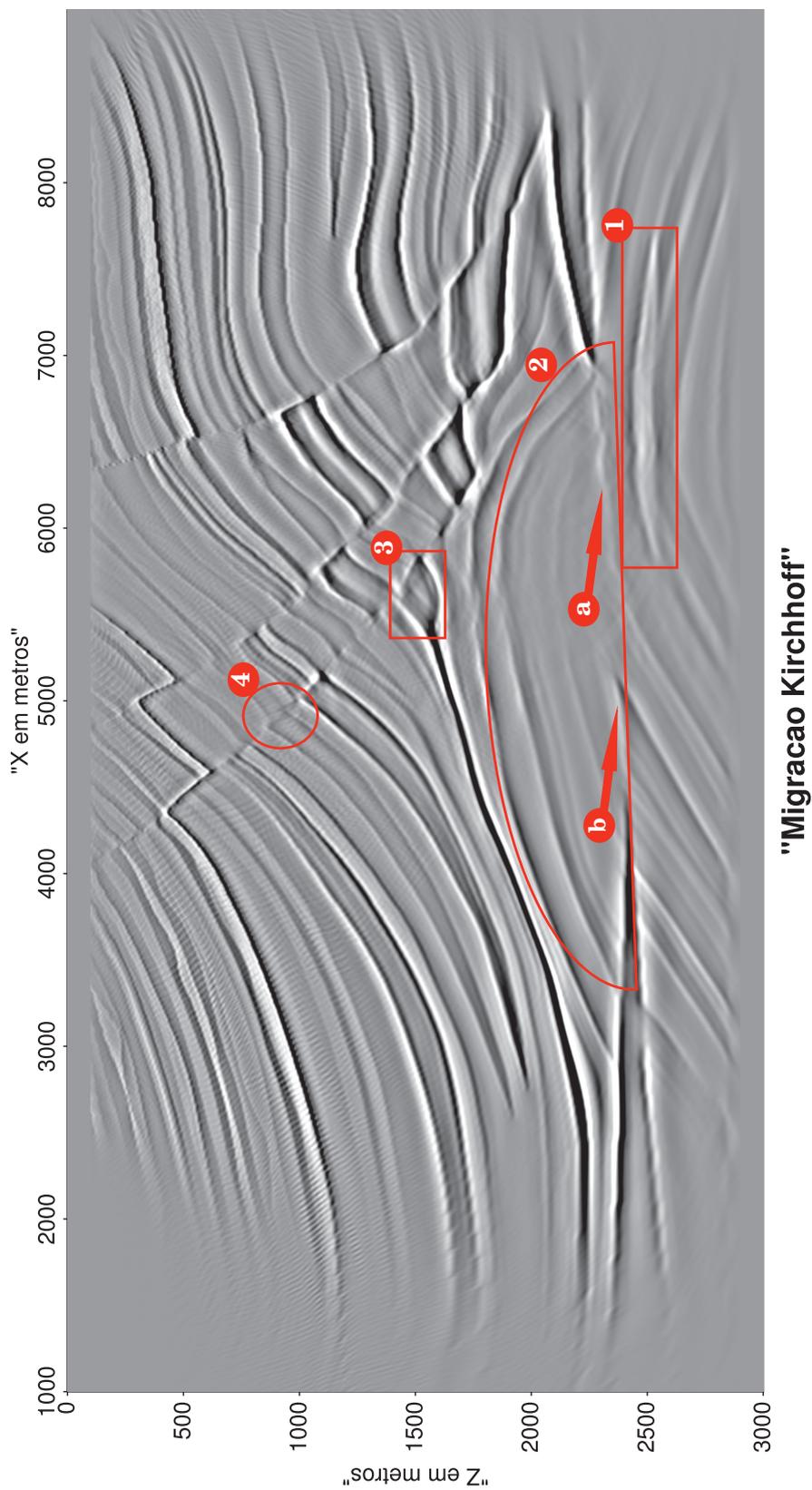
Nas figuras (29) e (30) são mostrados os resultados da aplicação das equações (4.7) e (4.24), respectivamente, para o modelo de velocidades Marmousi suavizado em uma seção de entrada, a qual é visualizada na figura (26). Os resultados mostram que ambas as imagens migradas apresentam uma boa continuidade dos refletores, no entanto, diferindo quanto à nitidez da imagem, pois neste aspecto a imagem migrada da figura (30) apresenta-se mais limpa quando comparada à imagem migrada da figura (29), isto é, os efeitos de borda são atenuados e o refletor é realçado.

Para ressaltar a diferença entre a migração Kirchhoff e KGB, foram destacadas e enumeradas algumas regiões nas figuras (29) e (30), com isso observa-se que na região:

- (1) Usando o algoritmo de Kirchhoff, é possível visualizar um possível reservatório. Porém o topo e a base são melhores delineadas usando o algoritmo KGB;
- (2) Ao aplicar a migração KGB, ocorre um melhora na delimitação das dobras tipo anticlinal quando comparado com a migração Kirchhoff. Além disso a seta:
  - (a) Mostra que a migração Kirchhoff, ao invés da migração KGB, não conseguiu definir com detalhe de clareza a interface abaixo das dobras tipo anticlinal;
  - (b) Assinala uma interseção de interfaces, onde estruturas como essas podem causar grande espalhamento de energia. Por tal motivo, o resultado de imageamento apresentado por Kirchhoff mostra uma leve distorção, enquanto o método KGB gera uma imagem com ausência da distorção.
- (3) A migração KGB melhorou o realce dos refletores e concentrou as amplitudes causando, dessa maneira, uma melhora na determinação na interface;
- (4) Ocorre o mesmo que na região destacada de número (3), porém em refletor com uma acentuada inclinação.

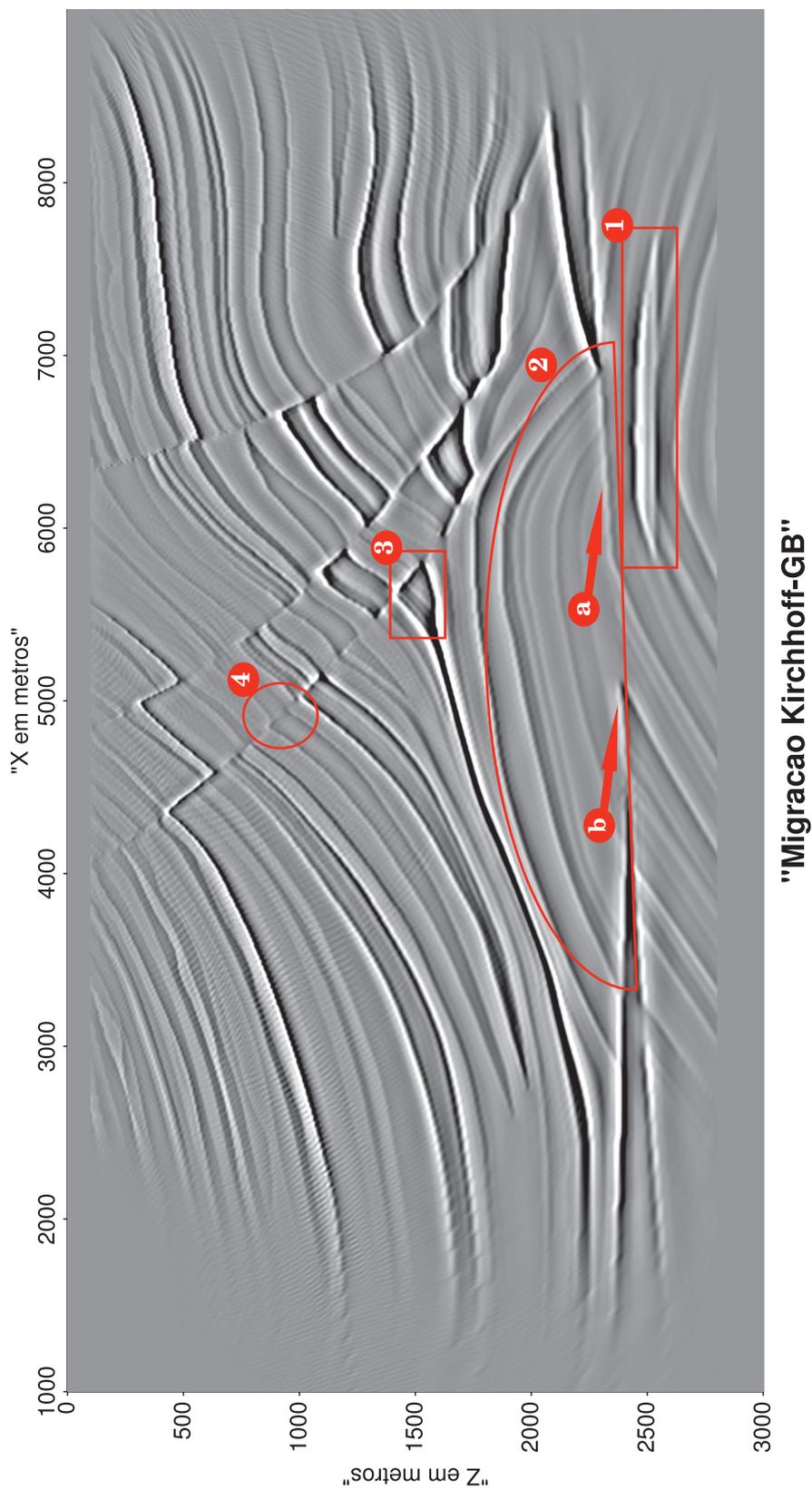
Nota-se que a imagem KGB (figura (30)) é menos ruidosa que a imagem Kirchhoff (figura (29)). Observa-se que todas as falhas são bem determinadas e que os refletores apresentam excelentes continuidades laterais. Também se observa que o processo KGB foi mais eficiente em imagear regiões mais próximas da superfície.

Figura 29 – Resultado da migração Kirchhoff 2-D com verdadeiras amplitudes.



Fonte: Do autor

Figura 30 – Resultado da migração KGB com verdadeiras amplitudes.

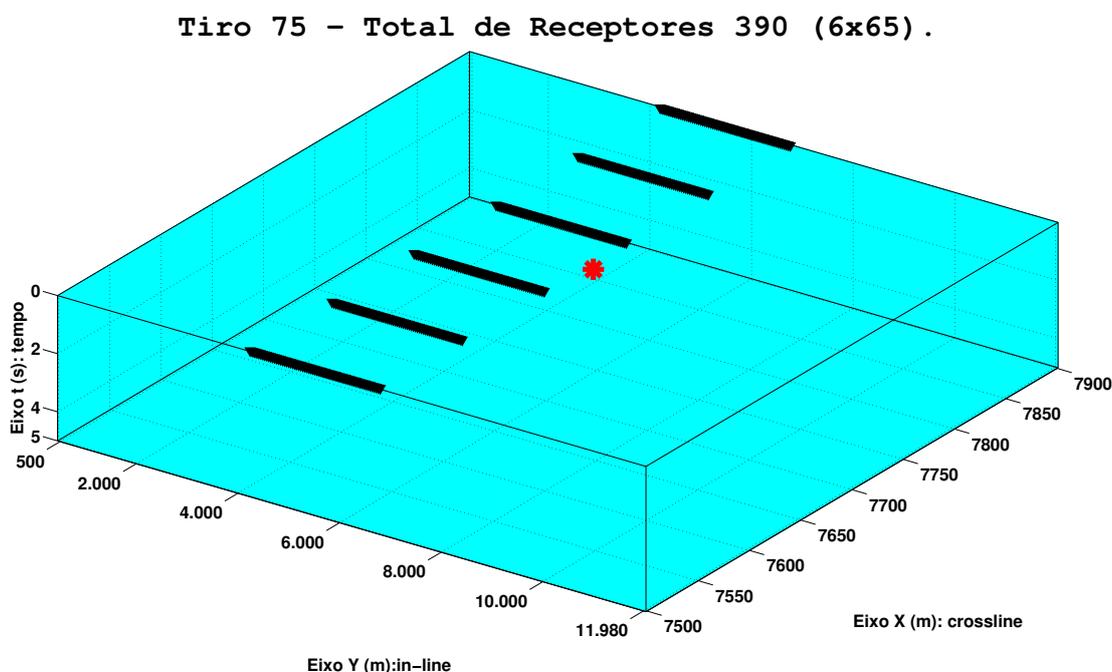


Fonte: Do autor

### 5.4 MIGRAÇÃO 3-D DOS DADOS SINTÉTICOS DO DOMO DE SAL SEG/EAGE

Para aplicar a migração Kirchhoff e KGB 3-D, escolheu-se o dado sintético do domo de sal SEG/EAGE, etapa A1, disponibilizado no *cd-rom* que acompanha o texto Aminzadeh et al. (1997). O dado consiste de 138 tiros simulando uma aquisição marinha com 6 linhas distribuídas a 80 m de distância. Em cada linha, há 65 receptores dispostos a uma distância de 40 m (figura (31)), sendo a primeira linha no *crossline* 7500 m em *x* e a última linha no *crossline* 7900 m em *x*. O domínio *in-line* do levantamento é de 500 m a 11980 m. O menor afastamento na superfície de aquisição é de 160 m e o maior afastamento é de 2760 m. O tempo de amostragem é de 8 ms em 5 s de gravação.

Figura 31 – Geometria de aquisição dos dados sintéticos com 49116 traços (arquivo *salt-al.segy* de 128,3 MB do *cd-rom* de Aminzadeh et al. (1997)).



Para fazer a migração 3-D em profundidade, utilizou-se o modelo disponibilizado no *cd-rom* que acompanha o texto Aminzadeh et al. (1997) com dimensão de 13,5 km × 13,5 km × 4,2 km. A distribuição de velocidades mostrada na figura (33) estão discretizadas da seguinte maneira:

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$d_x$	$d_y$	$d_z$
676	676	210	20 m	20 m	20 m

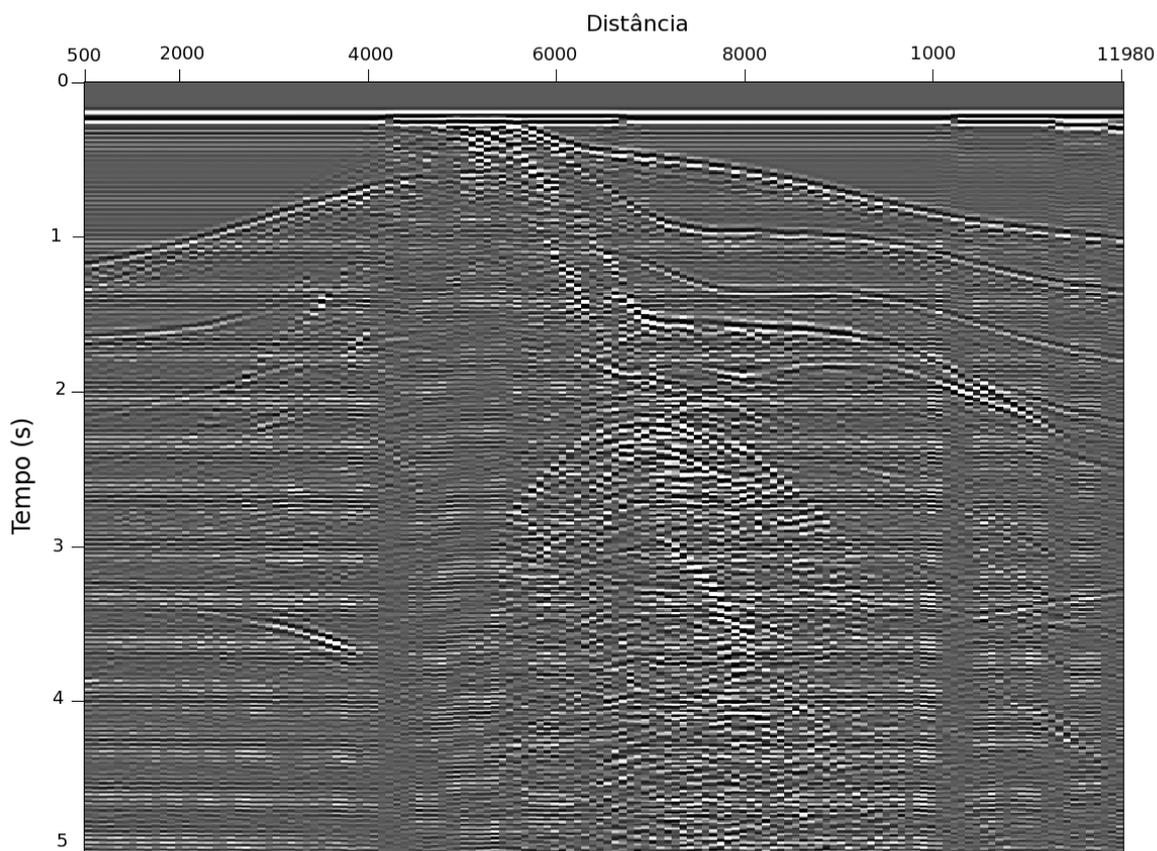
O modelo foi amostrado e suavizado com os seguintes valores (figura (35)):

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$d_x$	$d_y$	$d_z$
21	575	210	20 m	20 m	20 m

Os dados sintéticos, etapa A1, do domo de sal SEG/EAGE apresentados na figura (32) foram migrados para um espaço com (figuras (37) e (38)):

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$d_x$	$d_y$	$d_z$
21	575	210	20 m	20 m	20 m

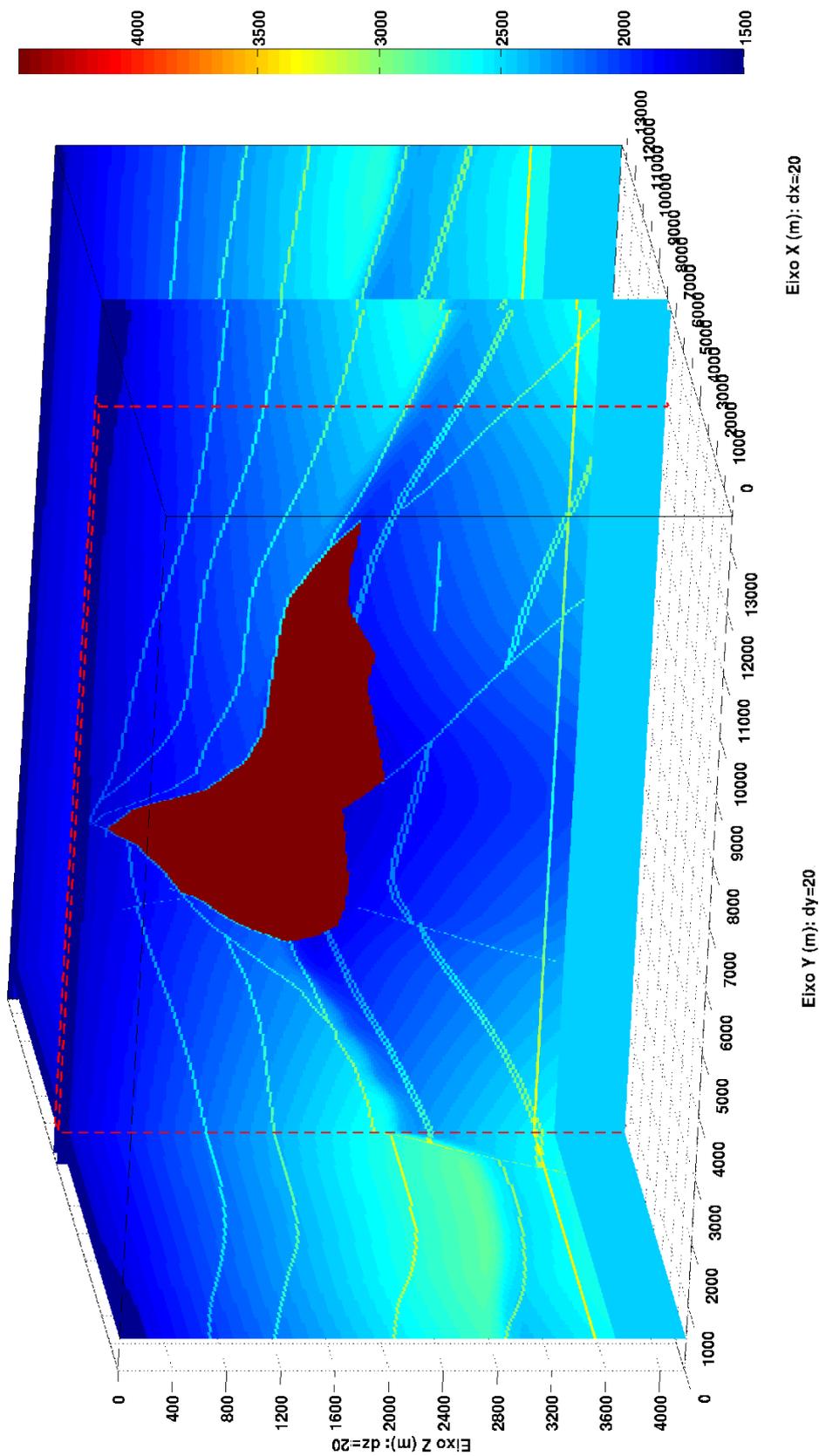
Figura 32 – Dados “Domo de Sal SEG/EAGE” com afastamento comum mais próximo.



Etapa A1 (Afastamento mais próximo)

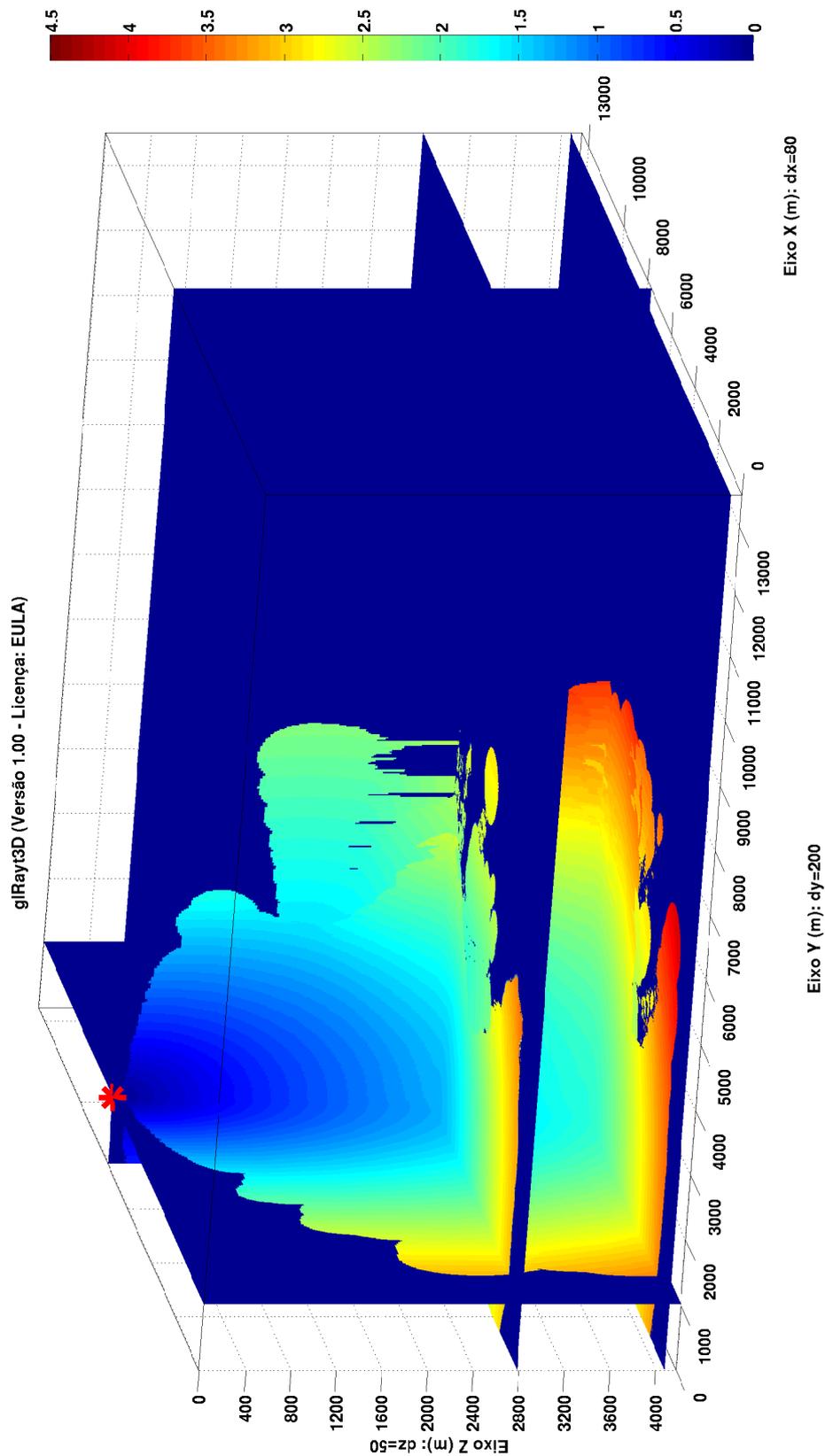
Fonte: Do autor

Figura 33 – Modelo do domo de sal SEG/EAGE. O volume delimitado por traços vermelhos é a zona alvo com *crossline* [7500,7900] e o *in-line* de [500,11980].



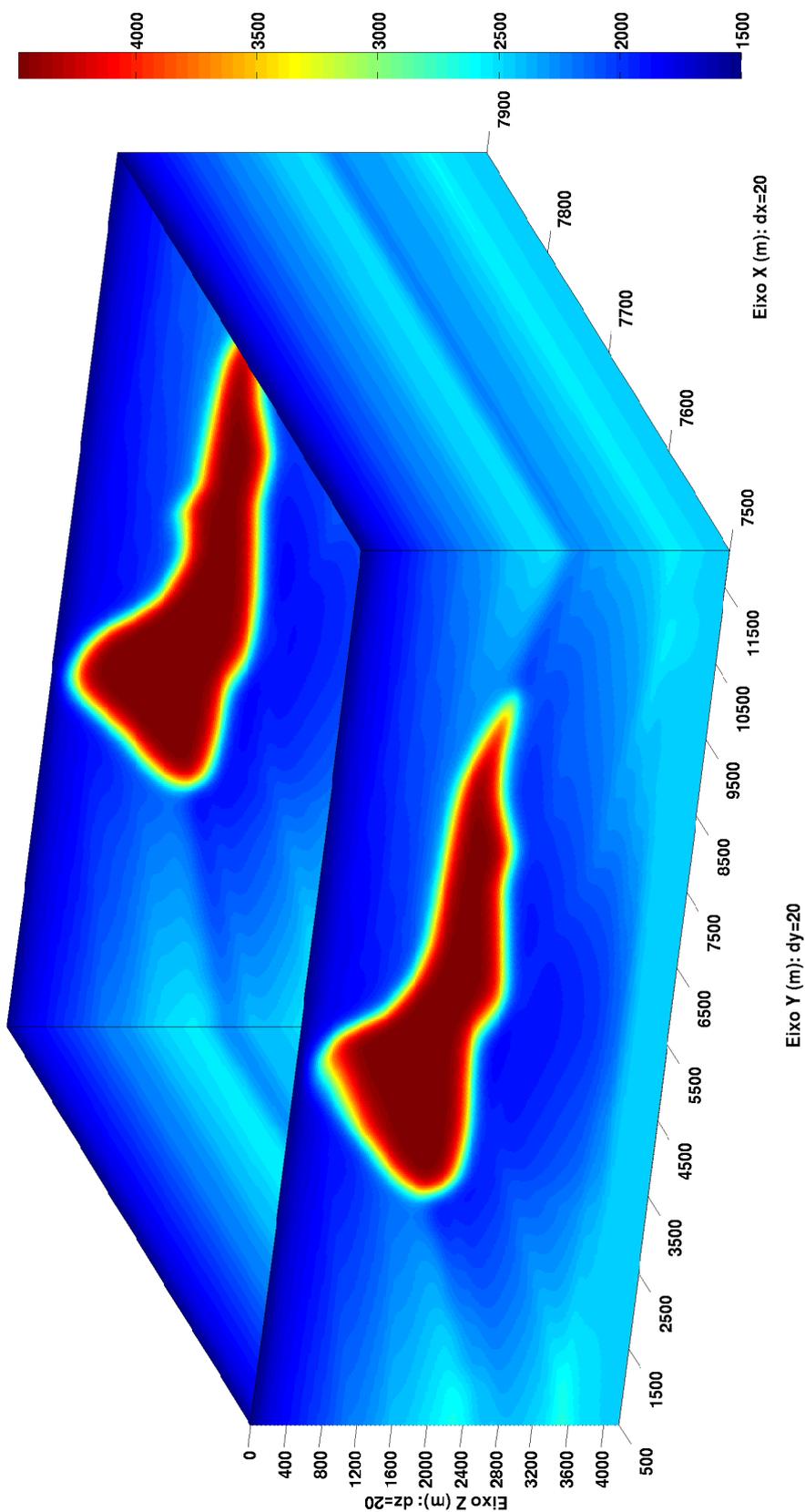
Fonte: Do autor

Figura 34 – Tempos de trânsito do modelo mostrado na figura (33) com a fonte posicionada na coordenada  $x = 7700$ ,  $y = 1020$  e  $z = 0$ .



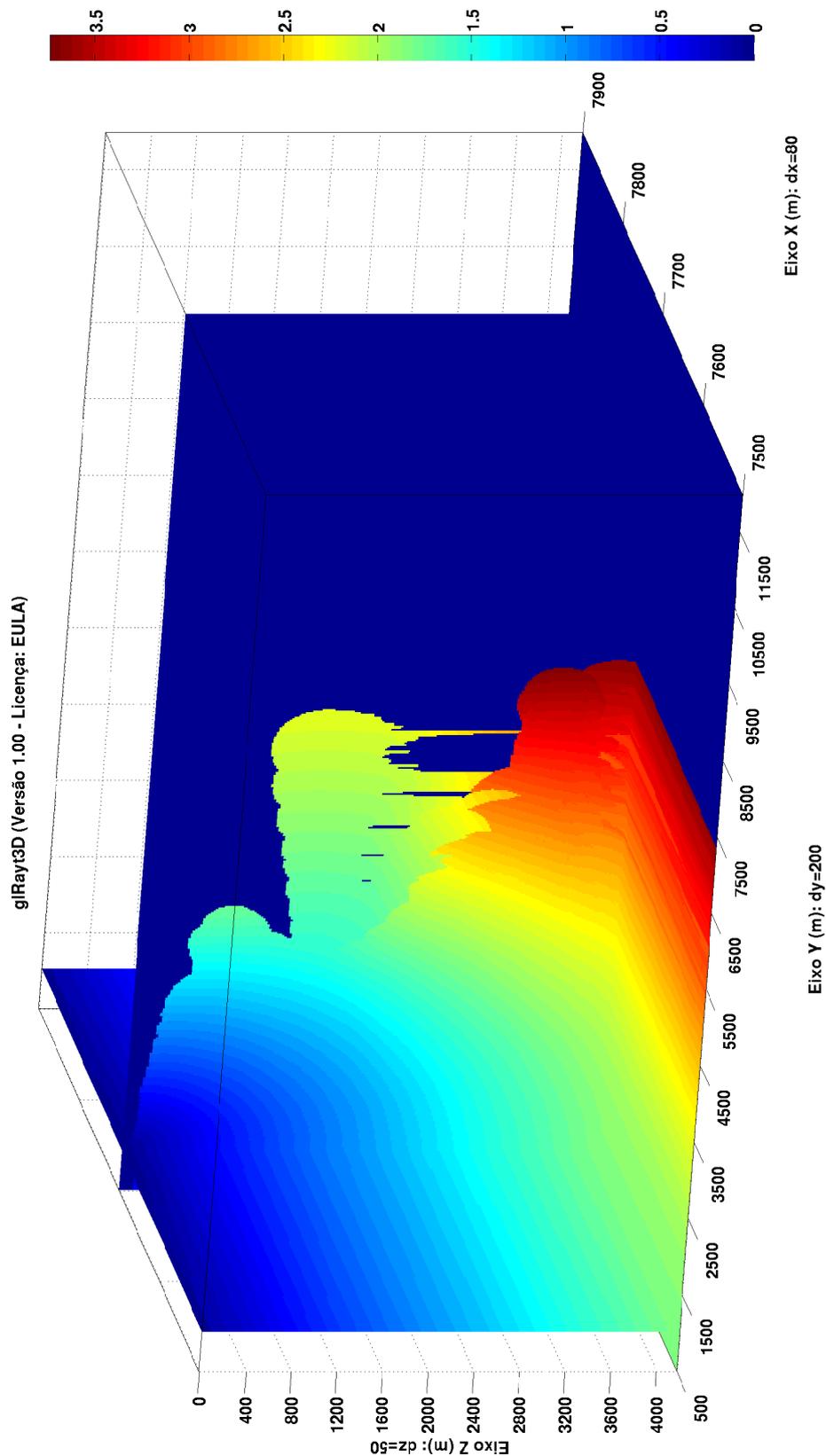
Fonte: Do autor

Figura 35 – Modelo suavizado da zona alvo (*crossline*=[7500,7900] e *in-line*=[500,11980]).



Fonte: Do autor

Figura 36 – Tempos de trânsito do sub-modelo mostrado na figura (35) com a fonte posicionada na coordenada  $x = 7700, y = 10200$  e  $z = 0$ .



Fonte: Do autor

As figuras (37) e (38) são os resultados das migrações Kirchhoff e KGB para o dado mostrado na figura (32). Para este exemplo, foi executado o procedimento semelhante ao 2-D e descrito no fluxograma da figura (22).

Para estudo de comparação entre a migração Kirchhoff e KGB em dados 3-D, selecionou-se seções (figuras 39) – (48)) das imagens 3-D resultantes de ambas migrações. Além disso, algumas regiões de cada seção são escolhidas para ratificar as diferenças entre as migrações em estudo.

As imagens mostradas nas figuras (39) e (40) são fatias em  $x = 7500 \text{ m}$  do “cubo” de dados após a migração Kirchhoff e KGB, respectivamente. Visualmente, nota-se nas regiões (1) e (3) que a imagem obtida pelo processo KGB é mais eficiente na caracterização das falhas. O topo do domo de sal, região (2), na migração Kirchhoff apresenta-se com menor nitidez, enquanto no método KGB o topo é melhor delineado. Nas regiões (4) e (5), a conclusão é análoga a obtida na região (2).

As figuras (41) e (42) são seções das imagens 3-D ilustradas nas figuras (37) e (38) em  $x = 7600 \text{ m}$ , respectivamente. Fazendo um estudo comparativo das figuras (41) e (42), nota-se que os resultados da migração Kirchhoff e KGB diferem apenas nas regiões (1) e (2), as quais são melhores imageadas pelo processo KGB.

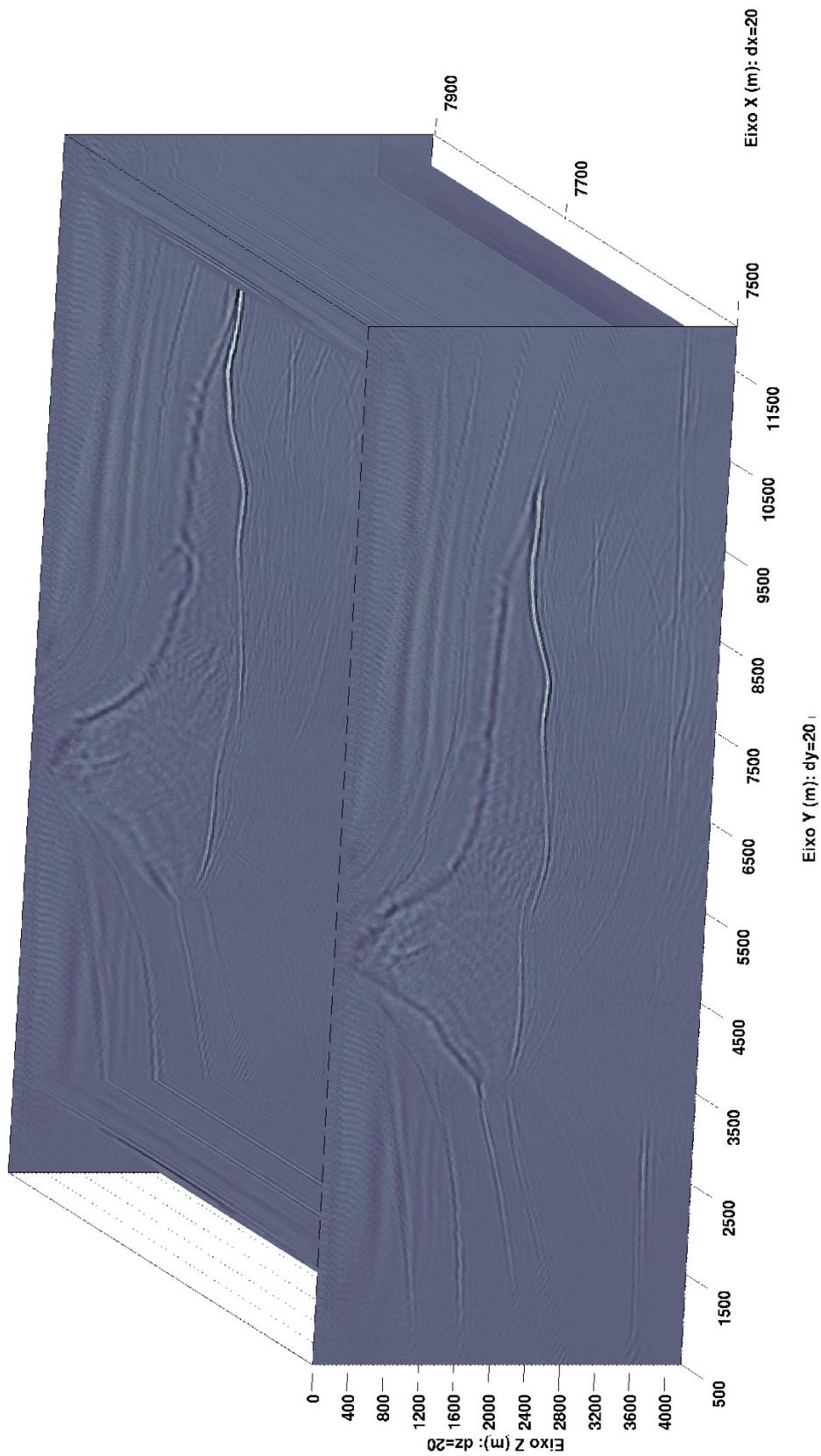
Comparando as figuras (43) e (44), observa-se que a migração advinda do algoritmo KGB (figura (44)) na seção  $x = 7700 \text{ m}$  delimita melhor a parte superior do domo de sal. Isso pode ser visto nas regiões (1) e (2).

Na seção  $x = 7800 \text{ m}$  (figuras (45) e (46)), pode-se fazer um estudo comparativo semelhante a seção  $x = 7700 \text{ m}$ . Isso, deve-se ao fato de haver pequena variação de profundidade entre as interfaces da seção em  $x = 7700 \text{ m}$  e  $x = 7800 \text{ m}$ .

A imagem da figura (47), que é uma seção do resultado da migração KGB, nas regiões (1) e (3) possuem uma resolução melhor das falhas. A delimitação do topo do domo de sal, região (2), é mais acentuada no processo KGB. Nas regiões (4) e (5), as interfaces são melhor focalizadas na figura (47).

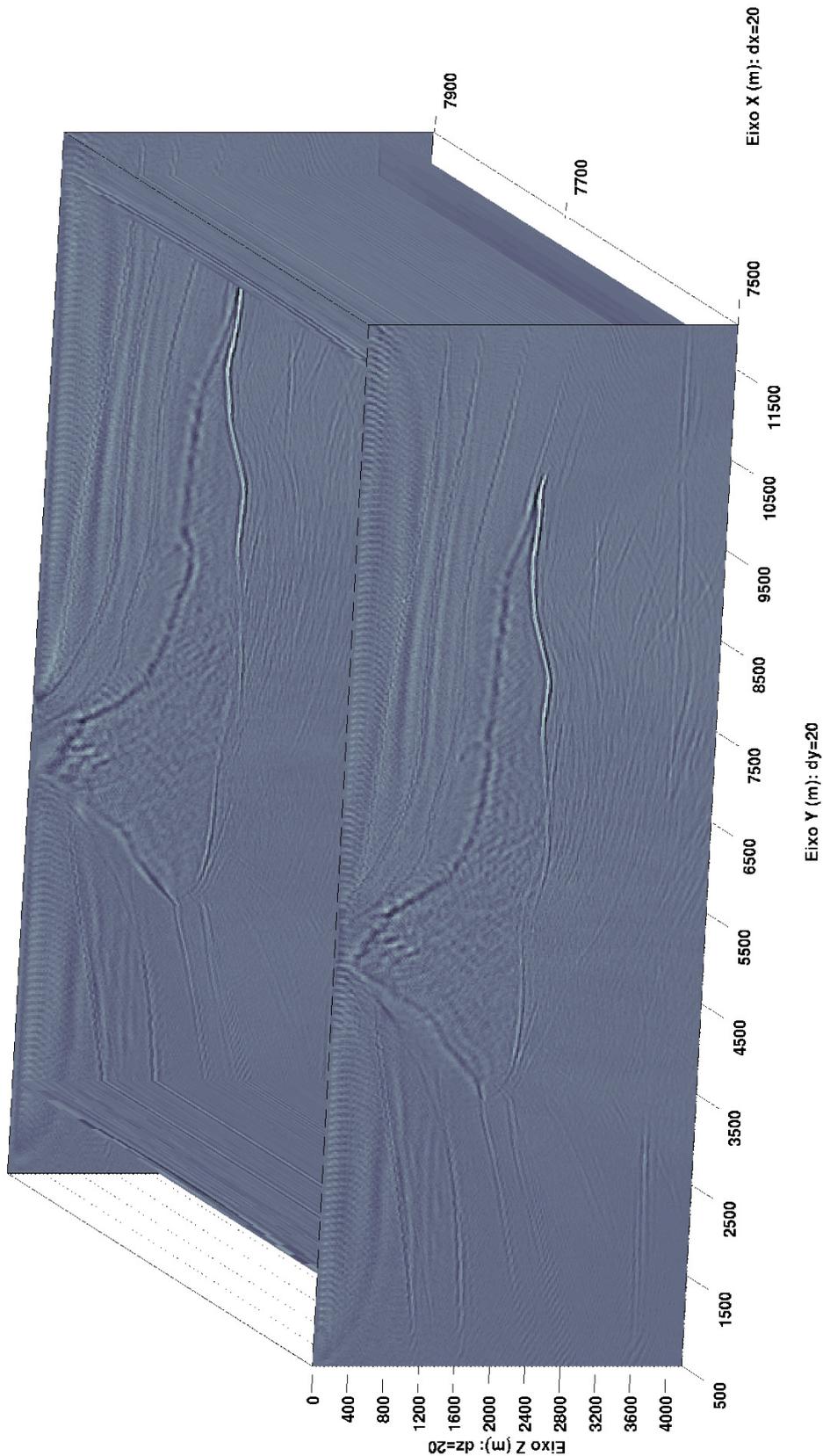
Após analisar as cinco seções (figuras (41) e (42)) dos resultados de migração Kirchhoff e KGB (figuras (37) e (38)) , pode-se concluir que o processo KGB é um complemento na melhora da qualidade das imagens obtidas pelo algoritmo de Kirchhoff. Além disso, o efeitos de borda causados pela migração Kirchhoff são atenuados na KGB, fato este constatado nas seções extremas ( $x = 7700$  e  $x = 7900$ ).

Figura 37 – Resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes.



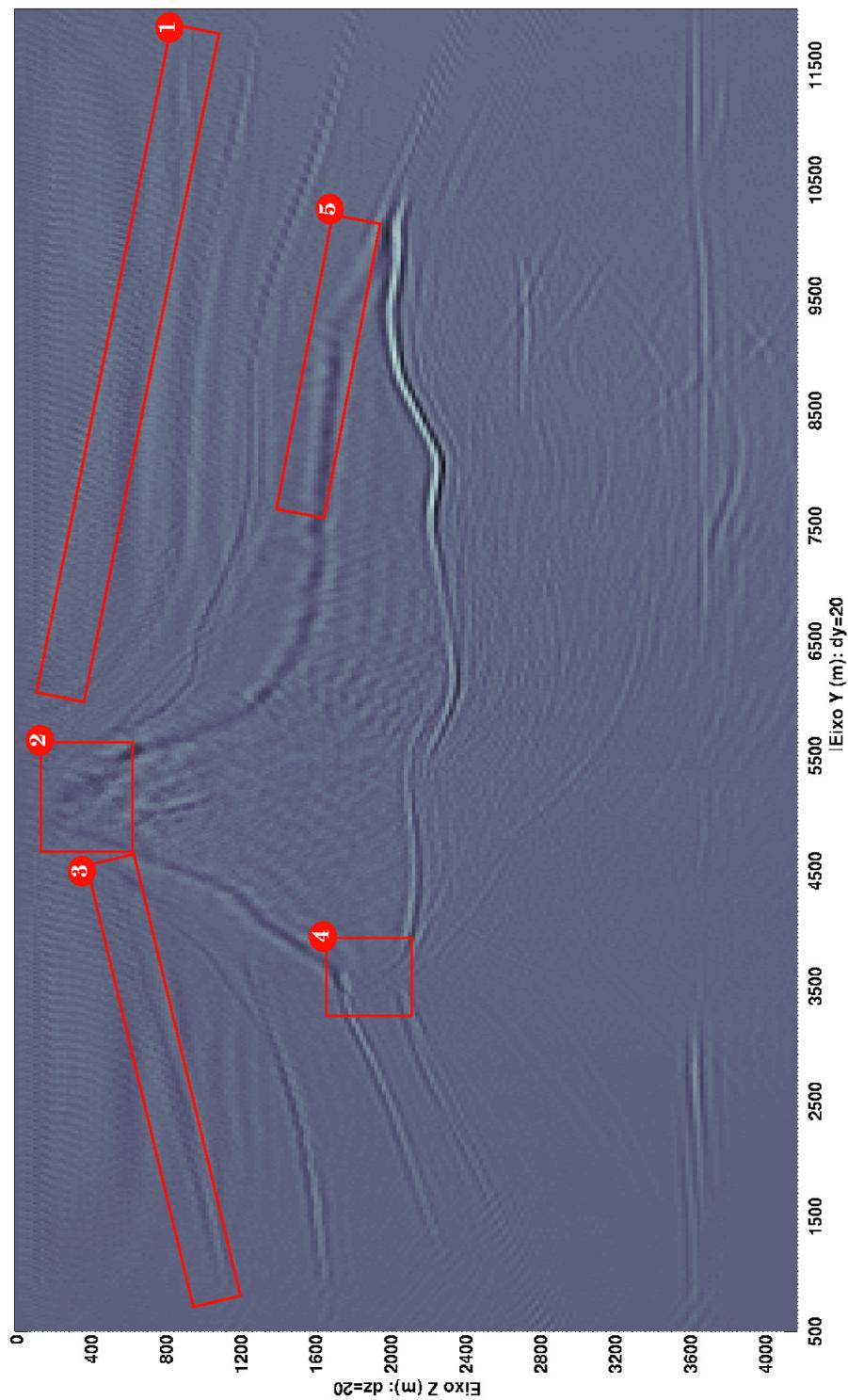
Fonte: Do autor

Figura 38 – Resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes.



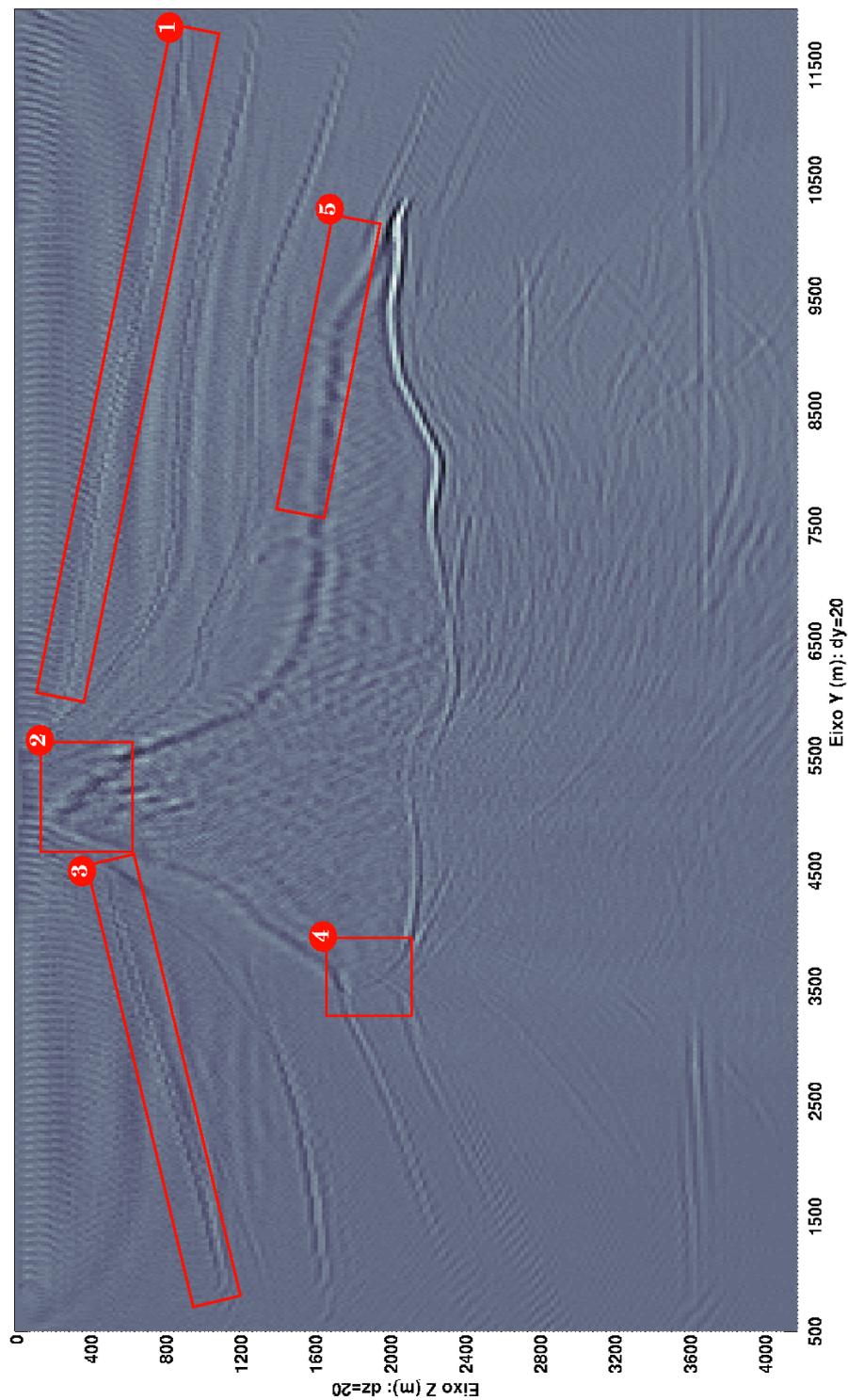
Fonte: Do autor

Figura 39 – Seção *crossline* igual a 7500 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes.



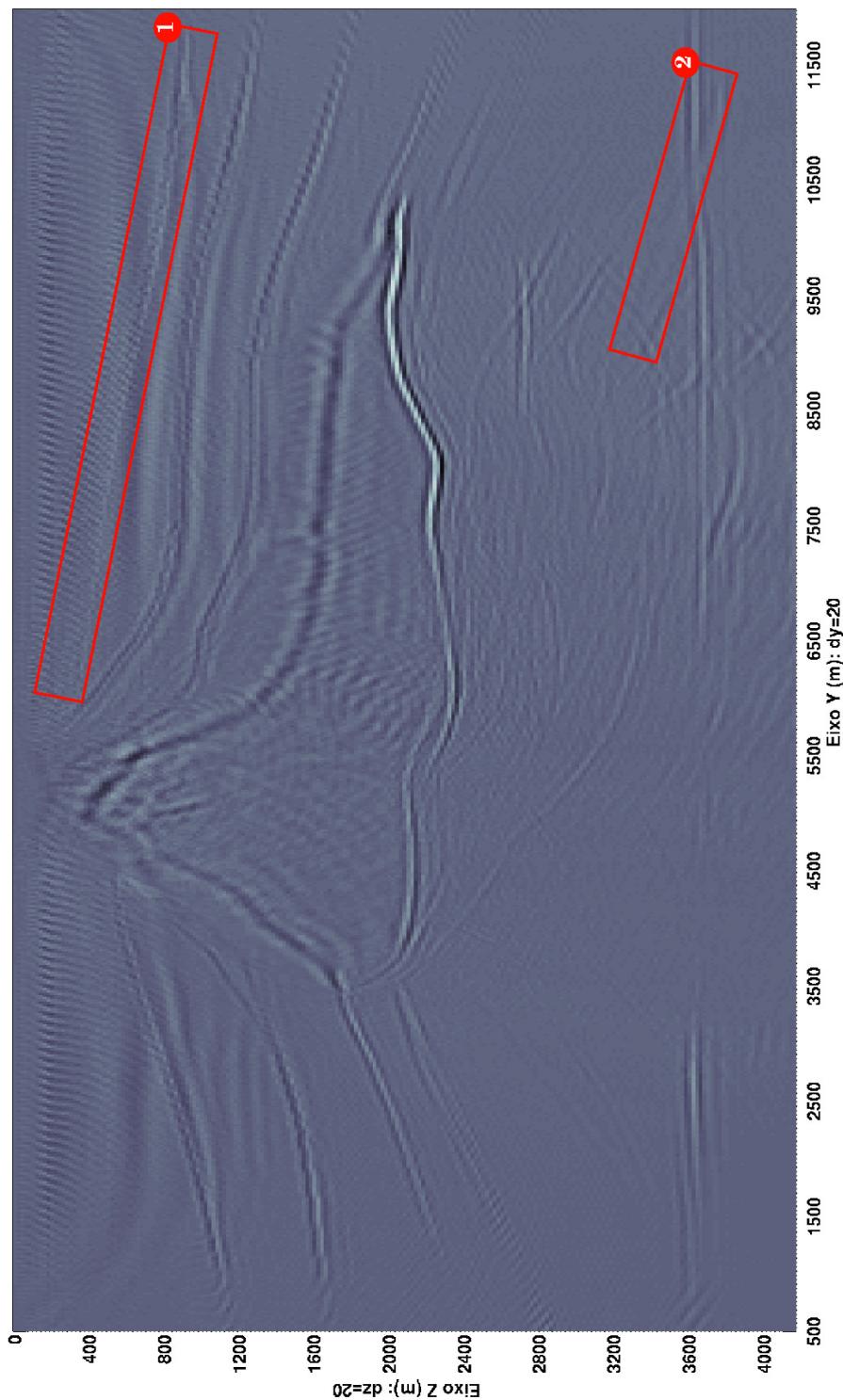
Fonte: Do autor

Figura 40 – Seção *crossline* igual a 7500 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes.



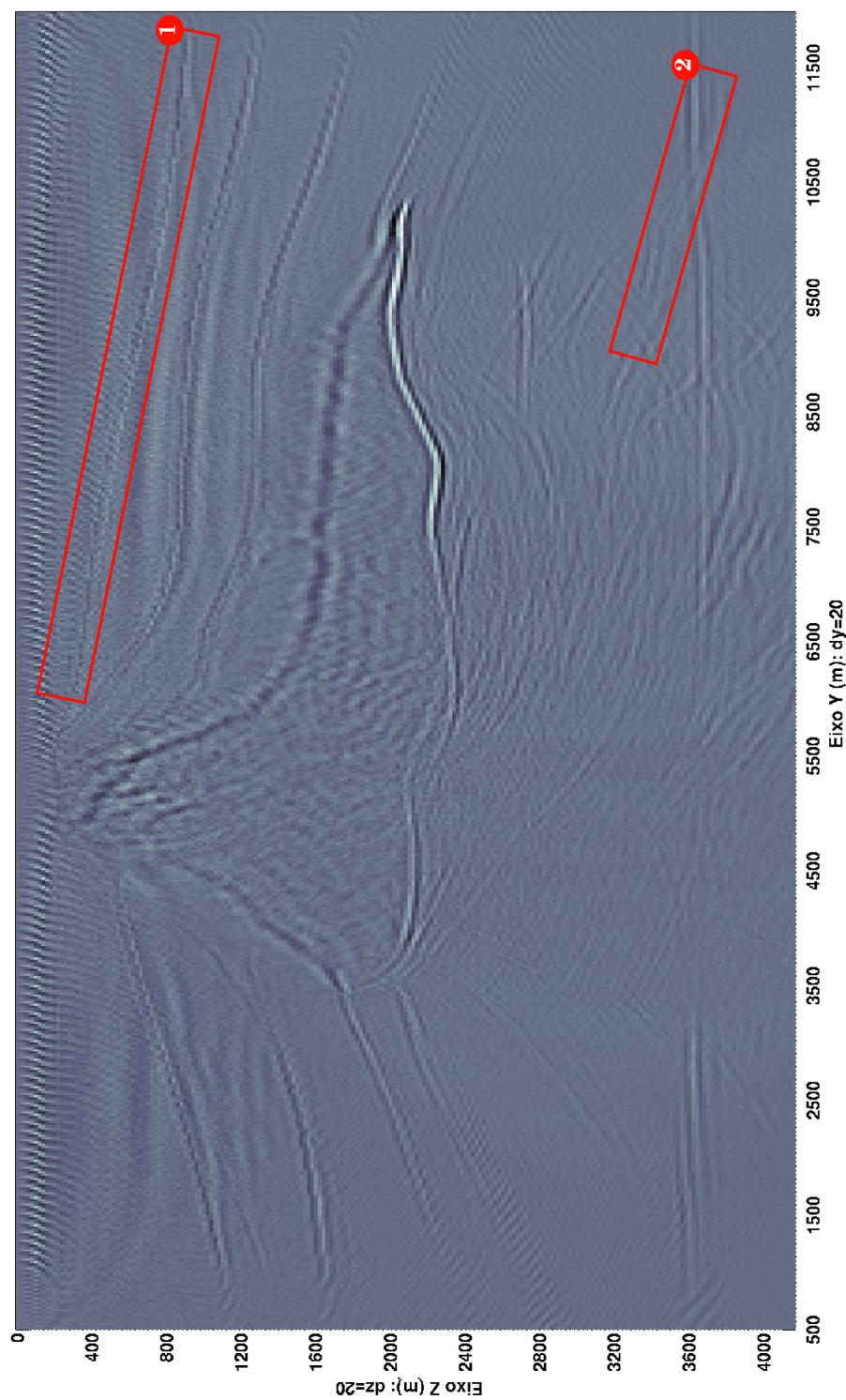
Fonte: Do autor

Figura 41 – Seção *crossline* igual a 7600 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes.



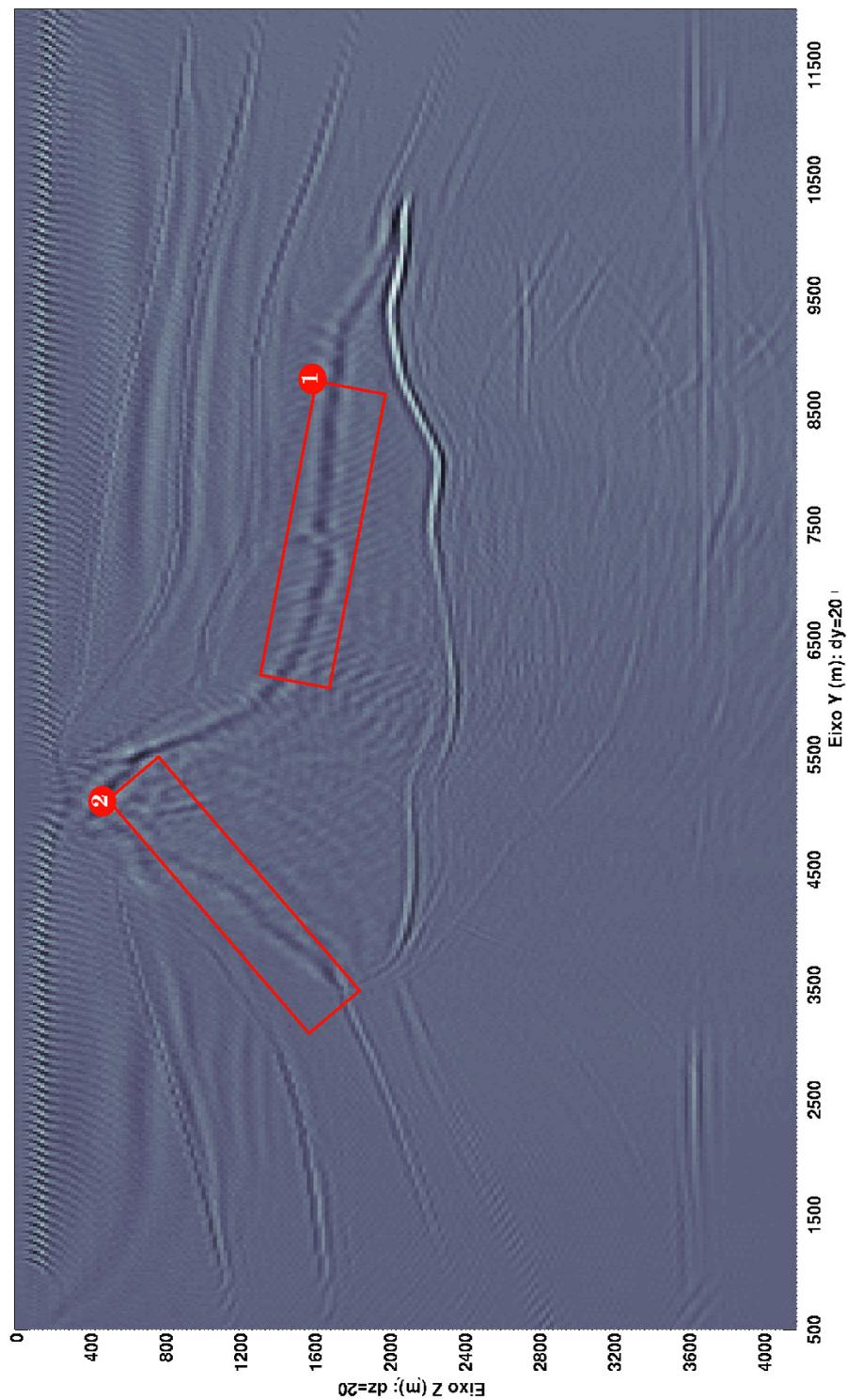
Fonte: Do autor

Figura 42 – Seção *crossline* igual a 7600 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes.



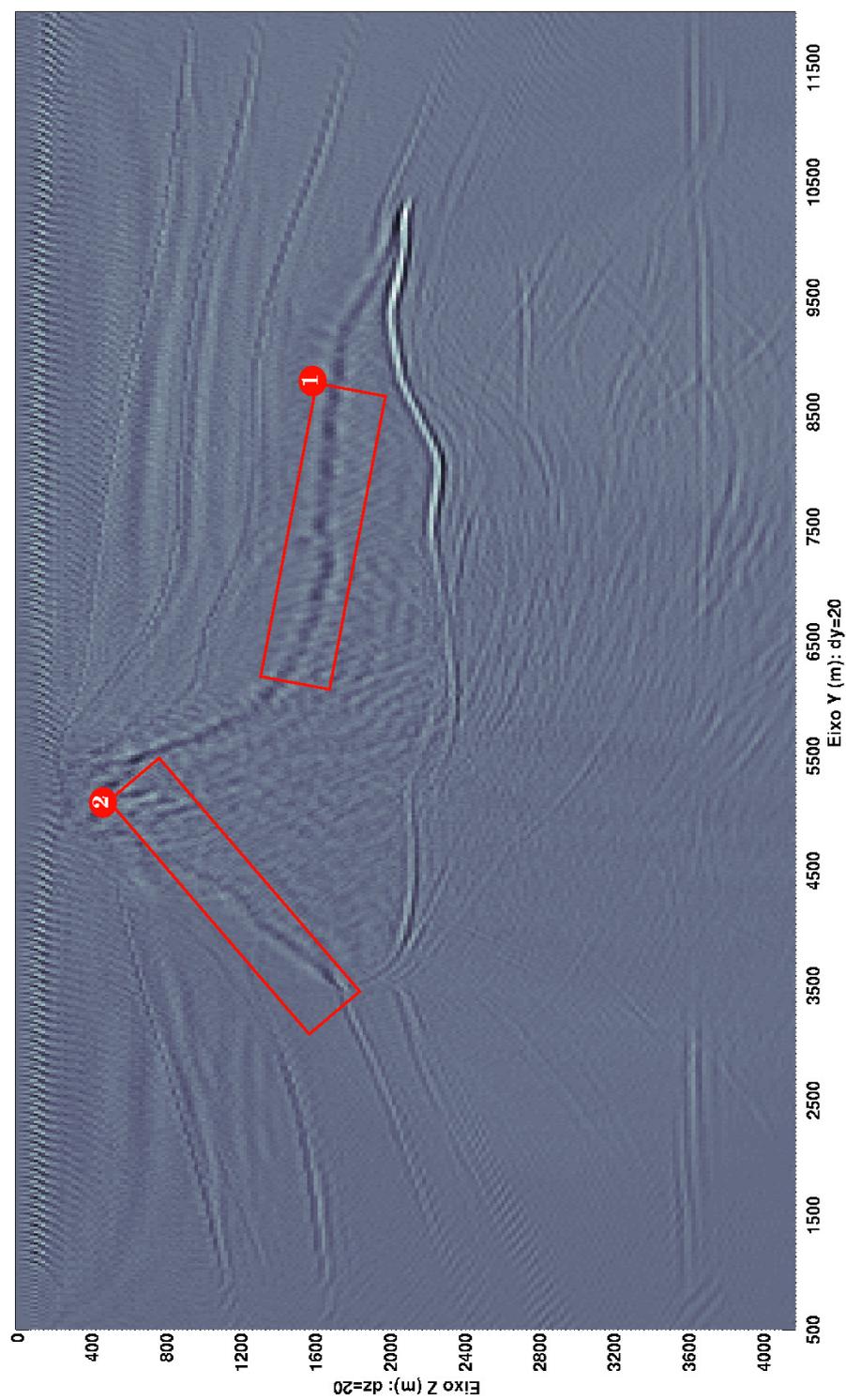
Fonte: Do autor

Figura 43 – Seção *crossline* igual a 7700 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes.



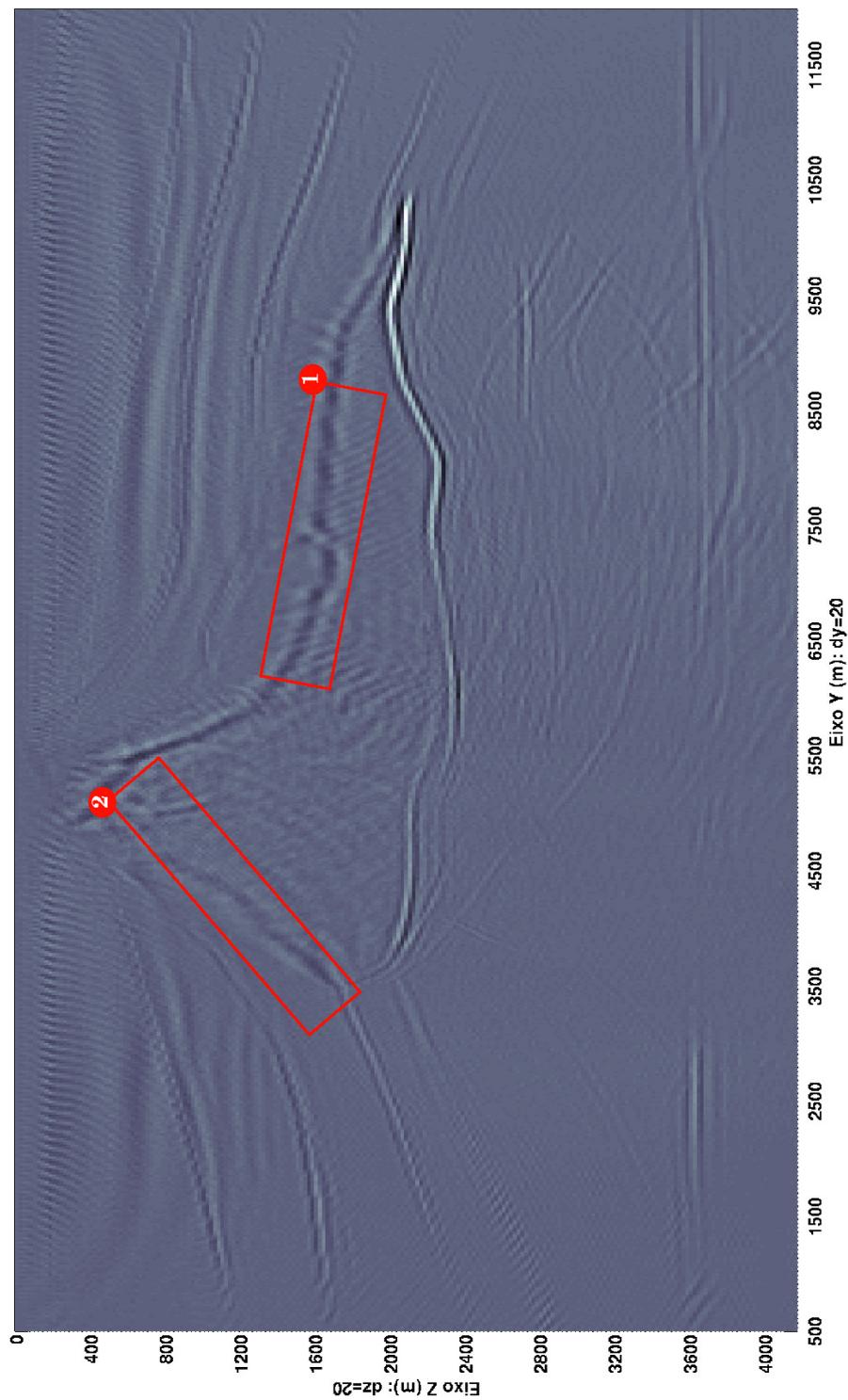
Fonte: Do autor

Figura 44 – Seção *crossline* igual a 7700 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes.



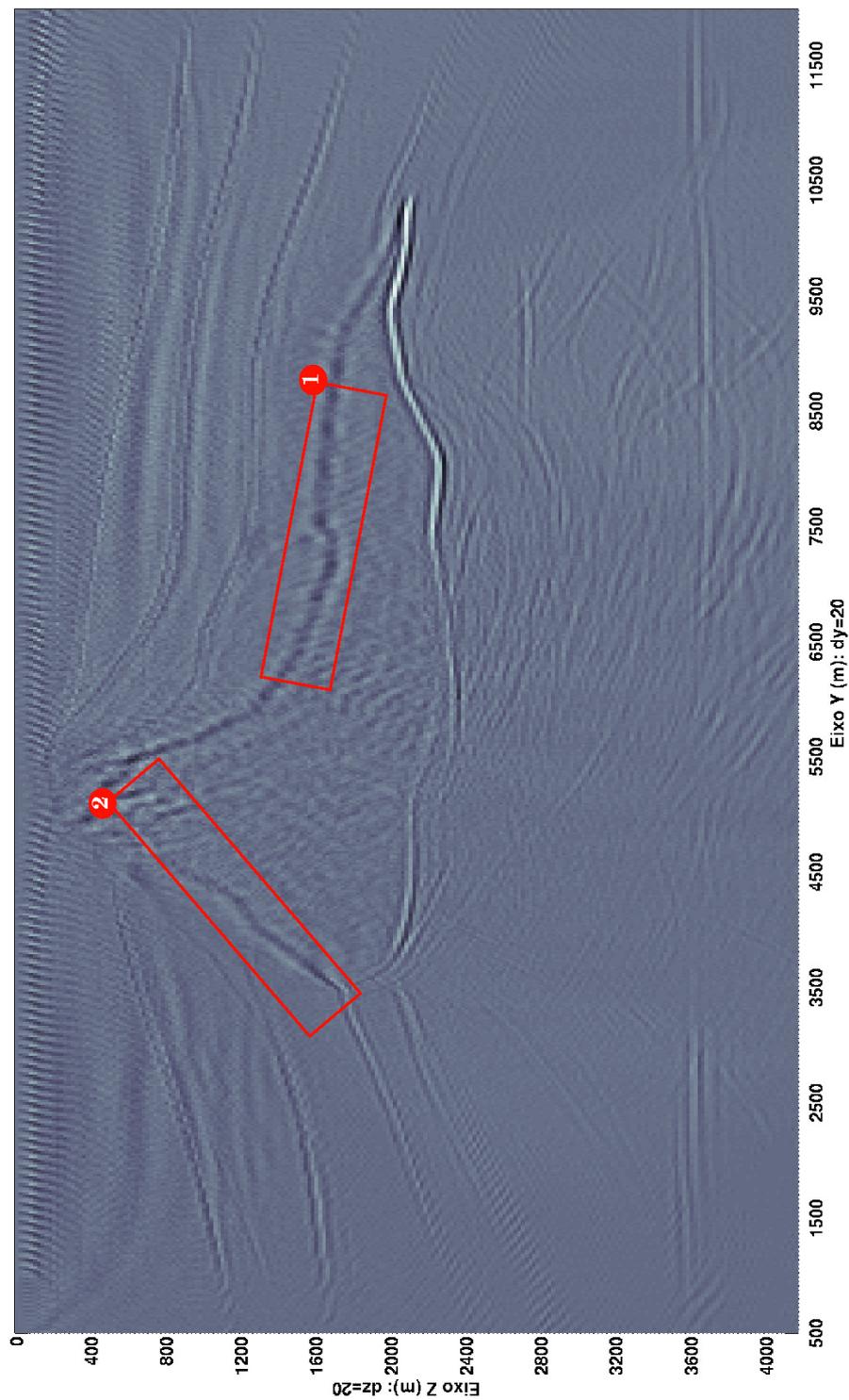
Fonte: Do autor

Figura 45 – Seção *crossline* igual a 7800 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes.



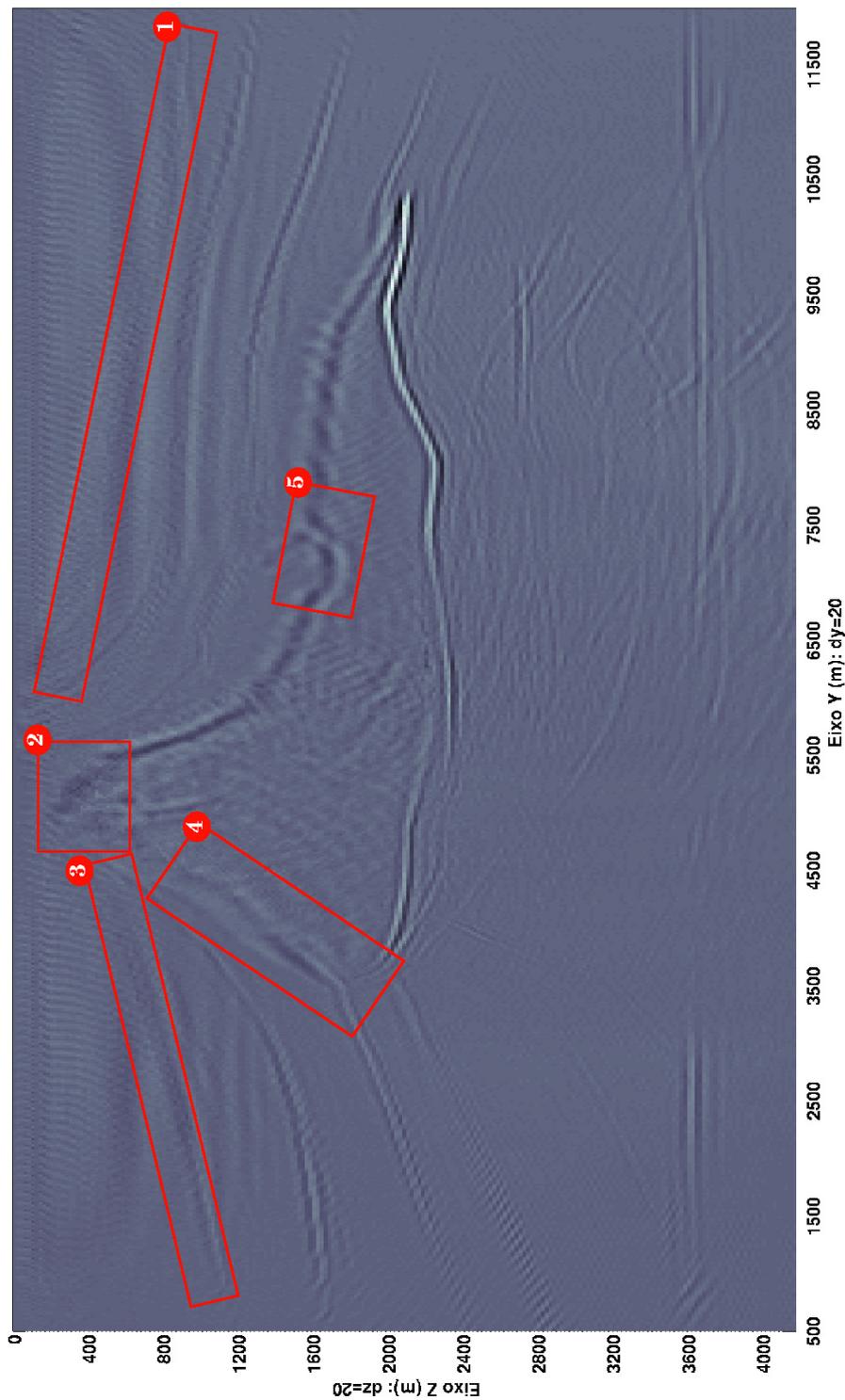
Fonte: Do autor

Figura 46 – Seção *crossline* igual a 7800 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes.



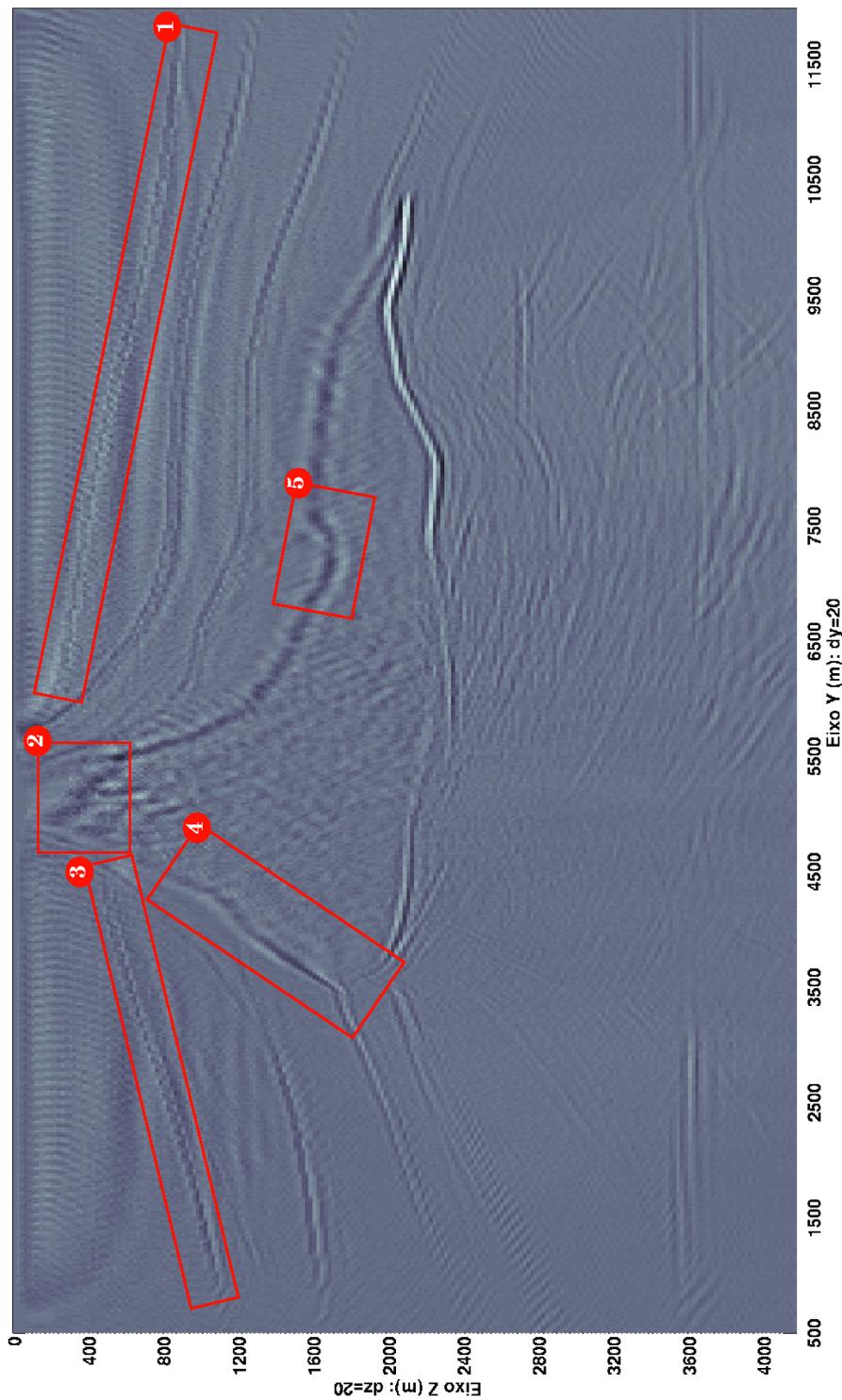
Fonte: Do autor

Figura 47 – Seção *crossline* igual a 7900 m do resultado da migração Kirchhoff 3-D com verdadeiras amplitudes.



Fonte: Do autor

Figura 48 – Seção *crossline* igual a 7900 m do resultado da migração KGB 3-D com verdadeiras amplitudes.



Fonte: Do autor

## 6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

### 6.1 CONCLUSÕES

Na presente Tese foi desenvolvida uma nova alternativa para construções de imagens sísmicas em profundidade, a qual é baseada em três teorias principais: aproximação de Kirchhoff, feixes gaussianos e verdadeira amplitude. O algoritmo de migração, denominado de *Kirchhoff-Gaussian-Beam* (KGB), obtido com tais conceitos teóricos foi a implementação da integral de sobreposição de campos paraxiais (feixes gaussianos) em 3-D, onde a mesma é inserida no núcleo do operador integral de migração Kirchhoff convencional 3-D. Além disso, propôs-se usar a zona de fresnel projetada como domínio de integração do feixes gaussianos. Ou seja, para cada ponto em profundidade, a migração 3-D KGB pré-empilhamento consiste em delimitar subconjuntos do dado sísmico na zona de fresnel projetada para ser empilhado através da integral de sobreposição de feixes gaussianos e, em seguida, serem acumulados na superfície de Huygens.

O procedimento de migração KGB foi testado em dois tipos de dados sísmicos sintéticos. O primeiro é conhecido como Marmousi, nele é simulada a aquisição de dados em um modelo geológico 2-D com elementos de refletores planos, curvos e com inclinações acentuada. O segundo é conhecido como domo de sal SEG/EAGE, que consiste de uma aquisição sintética de dados 3-D em um ambiente geológico com uma zona alvo de alto contraste de velocidade. O exemplo numérico 2-D demonstra a influência sobre a imagem da aplicação do operador KGB quando comparado à migração Kirchhoff, principalmente em regiões onde a migração Kirchhoff produz artefatos. Os resultados 3-D obtidos com Kirchhoff e KGB apresentaram uma boa delimitação do domo de sal, porém as falhas geológicas foram melhor caracterizadas na migração KGB. Assim, tanto nas imagens 2-D quanto 3-D, mostram uma boa continuidade nos refletores sísmicos, diferindo apenas na resolução das imagens em interseção de refletores e em refletores que se encontram em região do modelo com contraste de velocidade nulo.

Como maior contribuição nesta Tese, foi apresentada uma nova estratégia para a migração em amplitudes preservadas de que utiliza como base a zona de fresnel projetada. Alta precisão é conseguida porque as derivadas de segunda ordem complexas estão incluídas, a fim de reconhecer a curvatura da frente de onda. O algoritmo permite a determinação dos parâmetros da zona de fresnel projetada na superfície de aquisição através da matriz propagadora e da matriz de Bortifeld, reduzindo assim a necessidade de calcular a zona de fresnel na profundidade. O método também fornece uma ferramenta de iluminação do meio em regiões de singularidade para teoria do raio tradicional. Testes em dados com diferentes domínios de aquisição confirmam a eficiência e precisão.

Tivemos o cuidado de não elevar o custo computacional da migração KGB ao inserir a zona de fresnel projetada, pois três fatores determinam as principais contribuições para o aumento no esforço computacional no processo tradicional de empilhamento das curvas de

difração: A superfície de tempo de difração deve ser calculada para cada ponto de imagem; o cálculo das funções peso adequadas e a soma realizada ao longo de toda a abertura do experimento sísmico.

## 6.2 PERSPECTIVAS

Como proposta de continuidade e aperfeiçoamento do KGB 3-D, dever ser deduzida uma fórmula mais viável, computacionalmente, para o cálculo do eixo maior e eixo menor da zona de fresnel projetada em função da matriz  $\mathbf{H}_P$ . Para isso, dever ser feito estudo dedutivo e experimental de qual a melhor norma matricial a ser adotada para obter uma expressão que leve em consideração o meio 3-D. Uma sugestão é usar a norma matricial euclidiana induzida ao vetor de comprimento unitário na zona de Fresnel projetada.

Para que se possa caracterizar de uma forma mais precisa a robustez da migração KGB, há necessidade de se compreender melhor o comportamento do processo em meios elásticos e anisotrópicos. Além disso, testes futuros precisam ser efetivados em dados sintéticos de perfil vertical sísmico VSP, em dados sísmicos reais e comparar com a migração reversa no tempo.

## REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. G. *Quantitative seismology*. 2nd ed. ed. New York, USA: University science books, 2002. ISBN 9781891389634. Citado 2 vezes, nas páginas 20 e 24.
- ALBERTIN, U.; YINGST, D.; KITSCHENSIDE, P. True-amplitude beam migration. In: \_\_\_\_\_. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2004*. [s.n.] 74, 2004. p. 949–952. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1845323>>. Citado 2 vezes, nas páginas 16 e 61.
- AMINZADEH, F.; BRAC, J.; KUNZ, T. *SEG/EAGE 3-D modeling séries: 3-D Salt and Overthrust models*. 1st ed. ed. Tulsa, USA: SEG, 1997. ISBN 1560800771. Citado 2 vezes, nas páginas 9 e 78.
- BABICH, V. M. Ray method of calculating the intensity of wavefronts in the case of a heterogeneous, anisotropic, elastic medium. *Geophys. J. Int.*, v. 118. p. 379 – 383, 1994. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/118/2/369.full.pdf>>. Citado na página 19.
- BABICH, V. M.; PANKRATOVA, T. F. On discontinuities of Green's function of the wave equation with variable coefficient. *In Problems of Mathematical Physics*, v. 6. p. 9 – 27, 1973. Citado 2 vezes, nas páginas 16 e 43.
- BIONDI, B. L. *3D Seismic Imaging*. 1st ed. ed. Tulsa, USA: SEG, 2006. (Investigations in Geophysics v. 14). ISBN 9781560801375. Citado na página 16.
- BLEISTEIN, N. *Mathematical methods for wave phenomena*. 1st ed. ed. New York, USA: Academic Press, 1984. (Computer Science and Applied Mathematics). ISBN 9780121056506. Citado 2 vezes, nas páginas 19 e 60.
- BLEISTEIN, N. On the imaging of reflectors in the Earth. *Geophysics*, v. 52, p. 931 – 942, 1987. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1442363>>. Citado na página 17.
- BLEISTEIN, N. Mathematics of modeling, migration and inversion with gaussian beams. Colorado, USA, CWP, 2009. (Monograph). Disponível em: <<http://www.cwp.mines.edu/~norm/ShrtCrse.GBNotes/.pdf>>. Citado 4 vezes, nas páginas 16, 43, 46 e 61.
- BLEISTEIN, N.; HANDELSMAN, R. A. *Asymptotic Expansions of Integrals*. 1st ed. ed. New York, USA: Dover Publications Press, 1975. ISBN 9780486650821. Citado na página 19.
- BLEISTEIN, N.; COHEN J. K.; STOCKWELL; J. W. J. *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion*. 1st ed. ed. New York, USA: Springer-Verlag, 2000. ISBN 9780387950617. Citado na página 48.

- BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7th ed. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 1999. ISBN 9780521642224. Citado na página 19.
- BORTFELD, R. Geometrical ray theory: rays and traveltimes in seismic systems (second-order approximation of the traveltimes). *Geophysics*, v. 54, n. 3, p. 342 – 349, 1989. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1442659>>. Citado 2 vezes, nas páginas 31 e 110.
- ČĚRVENÝ, V. Expansion of a plane wave into Gaussian beams. *Studia Geoph. et Geod.*, v. 26, p. 120 – 131, 1982. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a82vc2.pdf>>. Citado 3 vezes, nas páginas 17, 43 e 61.
- ČĚRVENÝ, V. *Seismic ray theory*. 1st ed. ed. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521366717. Citado 14 vezes, nas páginas 17, 25, 28, 29, 31, 34, 35, 43, 44, 45, 48, 61, 66 e 110.
- ČĚRVENÝ, V. Fermat's variational principle for anisotropic inhomogeneous media. *Studia Geoph. et Geod.*, v. 46, p. 567 – 588, 2002. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a02vc1.gz>>. Citado na página 19.
- CHAPMAN, C.H. On the computation of seismic ray traveltimes and amplitudes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 61, p. 1267 – 1274, 1971. Citado na página 43.
- CLAERBOUT, J. F. *Fundamentals of geophysical data processing*. 2nd ed. ed. Blackwell Science Inc, 1985. ISBN 9780865423053. Citado na página 61.
- COSTA, M. J. S. *Migração pré-empilhamento Kirchhoff feixes gaussianos 2.5D nos domínios afastamento comum e ângulo-comum*. 2012. 114f. Tese (doutorado)- Universidade Federal do Pará, Programa de Pós- Graduação em Geofísica, Belém, Pará, 2012. Citado 3 vezes, nas páginas 16, 17 e 63.
- COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics, Vol. 2*. 2nd ed. ed. New York, USA: Wiley (International science), 1989. ISBN 9780471504399. Citado na página 26.
- CRUZ, J. C. R.; PEREIRA, G. L.; FERREIRA, C. A.S. Seismic modeling by gaussian beams limited by projected fresnel zone. In: \_\_\_\_\_. *EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2012*. [s.n.] 74, 2012, Copenhagen. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=59575>>. Citado 2 vezes, nas páginas 52 e 61.
- FERREIRA, C. A. S. *Migração Kirchhoff pré-empilhamento em profundidade modificada usando o operador de feixes gaussianos*. 2007. 187f. Tese (doutorado)- Universidade Federal do Pará, Programa de Pós- Graduação em Geofísica, Belém, Pará, 2007. Citado 5 vezes, nas páginas 17, 50, 52, 108 e 109.

- FERREIRA, C. A. S.; CRUZ, J. C. R. A comparison of two true-amplitude Gaussian beam migration/inversion operators. In: \_\_\_\_\_. *INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY*. [s.n.] 9, 2009, Salvador. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=45488>>. Citado 3 vezes, nas páginas 16, 61 e 62.
- GOLDSTEIN, H.; CHARLES, P. P. J.; SAFKO, J. L. *Classical Mechanics*. 3rd ed. ed. New York, USA: Addison Wesley, 2001. ISBN 9780201657029. Citado na página 19.
- GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier Optics*. 3rd ed. ed. Stanford, USA: Roberts & Company Publishers, 2005. ISBN 9780974707723. Citado 2 vezes, nas páginas 17 e 38.
- GRAY, S. H.; BLEISTEIN, N. True-amplitude Gaussian-beam migration. *Geophysics*, v. 74, p. S11 – S23, 2009. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.3052116>>. Citado 2 vezes, nas páginas 16 e 61.
- HAGEDOORN, J. G. A process of seismic reflection interpretation. *Geophysical Prospecting*, v. 2, n. 2, p. 85 – 127, 1954. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=35028>>. Citado na página 17.
- HECHT, E. *Optics*. 4th ed. ed. New York, USA: Addison-Wesley, 2001. ISBN 9780805385663. Citado na página 38.
- HERSTEIN, I. N. *Abstract Algebra*. 3rd ed. ed. New York, USA: Wiley-Prentice Hall, 1996. ISBN 9780471368793. Citado na página 31.
- HERTWECK, T.; JÄGER, C.; GOERTZ, A.; SCHLEICHER, J. Aperture effects in 2.5 Kirchhoff migration: a geometrical explanation. *Geophysics*, v. 68, p. 1673 – 1684, 2003. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1620641>>. Citado na página 17.
- HILL, N. R., 1990. Gaussian beam migration. *Geophysics*, v. 55, p. 1416 – 1428, 1990. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1442788>>. Citado 3 vezes, nas páginas 16, 17 e 61.
- HILL, N. R., 2001. Prestack Gaussian beam depth migration. *Geophysics*, v. 66, p. 1240 – 1250, 1990. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1487071>>. Citado 4 vezes, nas páginas 16, 17, 61 e 62.
- KLINE, M.; KAY, I. W. *Electromagnetic theory and geometrical optics*. 1st ed. ed. New York, USA: Wiley-Interscience publishers, 1965. (Pure and applied mathematics). Citado na página 19.
- KONOPÁSKOVÁ, J. Numerical modelling of time-harmonic seismic wave field in simple structures by gaussian beam method. Part I. *Studia Geoph et Geod*, v. 28, p. 19 – 35, 1984. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a84vc4.pdf>>. Citado na página 17.

- KRAAIJPOEL, D. *Seismic ray fields and ray field maps: theory and algorithms*. 2003. 169f. Tese (doutorado)- Universidade de Utrecht, Faculdade de Geociências, Utrecht, Holanda, 2003. Citado na página 20.
- LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. 1st ed. ed. New York, USA: Dover Publications, 1986. ISBN 9780486650678. Citado na página 19.
- MÜLLER, G. Efficient calculation of Gaussian beam seismograms for two dimensional inhomogeneous media. *Geophysics. J. R. Astr. Soc*, v. 79, p. 153 – 166, 1984. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/79/1/167.full.pdf>>. Citado 4 vezes, nas páginas 17, 43, 52 e 109.
- NOWACK, R. L. Calculation of synthetic seismograms with Gaussian beams. *Pure and Applied Geophysics*, v. 160, p. 487 – 507, 2003. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/79/1/167.full.pdf>>. Citado na página 61.
- PEREIRA, G. L.; CRUZ, J. C. R.; FERREIRA, C. A. S. Modelagem Sísmica usando método do raio, Kirchhoff e feixes gaussianos. In: \_\_\_\_\_. *INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY*. [s.n.] 12, 2011, Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=55255>>. Citado 2 vezes, nas páginas 56 e 61.
- POPOV, M. M. A new method of computation of wave fields using Gaussian beams. *Wave Motion*, v. 4, p. 85 – 95, 1982. Citado 4 vezes, nas páginas 16, 43, 46 e 61.
- POPOV, M. M. *Ray theory and Gaussian beam methods for geophysicists*. 1st ed. ed. Salvador, Brazil: EDUFBA, 2002. Disponível em: <<http://www.cpgg.ufba.br/publicacoes/popov.pdf>>. Citado 3 vezes, nas páginas 17, 45 e 61.
- POPOV, M. M.; SEMTCHENOK, N. M.; POPOV, P. M.; VERDEL, A. R. Depth migration by the Gaussian beam summation method. *Geophysics*, v. 75, n. 2, p. S81 – S93, 2010. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/full/10.1190/1.3361651>>. Citado 2 vezes, nas páginas 16 e 61.
- PORTUGAL, R. S. *Construção de imagens em verdadeira amplitude por dados de reflexão: formulação matemática e construção de algoritmos*. 2002. 128f. Tese (doutorado)- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2002. Citado na página 25.
- PROTASOV, M. I. True amplitude gaussian beam imaging. In: \_\_\_\_\_. *Days on diffraction, 2005*. [s.n.] , 2005. p. 225–234. Disponível em: <[http://www.researchgate.net/publication-/4233137\\_True\\_amplitude\\_gaussian\\_beam\\_imaging/file/d912f510f8cf21591f.pdf](http://www.researchgate.net/publication-/4233137_True_amplitude_gaussian_beam_imaging/file/d912f510f8cf21591f.pdf)>. Citado 2 vezes, nas páginas 16 e 61.
- SALEH, B. *Introduction to Subsurface Imaging*. 1st ed. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781107000810. Citado na página 17.

SCHNEIDER, W. A. Integral formulation for migration in two and three dimensions. *Geophysics*, v. 43, n. 1, p. 49 – 76, 1978. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1440828>>. Citado na página 17.

SCHLEICHER, J.; TYGEL, M.; HUBRAL, P. 3D true-amplitude finite-offset migration. *Geophysics*, v. 58, p. 1112 – 1126, 1993. Citado 3 vezes, nas páginas 17, 59 e 60.

SCHLEICHER, J.; TYGEL, M.; HUBRAL, P. *Seismic true-amplitude imaging*. 1st ed. ed. Tulsa, USA: SEG, 2007. (Geophysical developments series v. 12). ISBN 9781560801436. Citado 9 vezes, nas páginas 17, 32, 49, 50, 60, 64, 106, 107 e 110.

SHEARER, P. M. *Introduction to Seismology*. 1st ed. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521708425. Citado na página 42.

SUN Y.; QIN, F.; CHEKLES, S.; LAVEILLE, P. 3-D prestack Kirchhoff beam migration for depth imaging. *Geophysics*, v. 65, n. 5, p. 1592 – 1603, 2000. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1444847>>. Citado na página 62.

VERSTEEG, R. The Marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set. *The Leading Edge*, c. 13, p.927–936, 1994. Citado na página 71.

YILMAZ, O. *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*. 2nd ed. ed. Tulsa, USA: SEG, 2001. (Investigations in Geophysics v. 10). ISBN 9781560800941. Citado 2 vezes, nas páginas 16 e 45.

ŽÁČEK K. Optimization of the shape of Gaussian beams. *Studia geophysica et geodaetica*, v. 50, p. 349 – 365, 2006. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a06kz1.pdf>>. Citado 2 vezes, nas páginas 17 e 61.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A – Formalismo da Zona de Fresnel Projetada: Caso 3-D

Para encontrar uma expressão para a zona de Fresnel em termos de parâmetros dos raios paraxiais, deve ser considerado que o raio  $S\bar{M}$  seja um raio paraxial do primeiro segmento do raio  $SG$  (figura (13)). De forma análoga, considera-se que  $\bar{M}G$  representa o raio paraxial do segundo segmento do raio.

No primeiro segmento do raio, a superfície anterior  $\Sigma_A$  é a superfície onde se encontra a fonte  $S$ , enquanto a superfície de reflexão  $\Sigma$  representa a superfície posterior. No segundo ramo do raio, a superfície anterior passa a ser descrita pela superfície de reflexão  $\Sigma$  e superfície posterior por  $\Sigma_P$  e onde se encontra o receptor  $R$ .

No primeiro caso, toma-se uma superfície auxiliar  $\Upsilon_o$  tangente a  $\Sigma_A$  em  $S$  e nele se estabelece um sistema de coordenadas 2-D, com origem em  $S$ . Assim, para cada ponto  $\bar{S}$  localizado na superfície anterior  $\Sigma_A$ , onde se encontra  $S$ , é definido um vetor  $\bar{\mathbf{x}} = (x, y)^\top$  da projeção normal de  $\bar{S}$  sobre o plano auxiliar  $\Upsilon_o$ . Em  $R$  na superfície posterior  $\Sigma_P$ , é construído um sistema de coordenadas análogo e se estabelece um vetor-posição  $\bar{\mathbf{x}}' = (x', y')^\top$  para a projeção normal de  $\bar{R}$  sobre  $\Upsilon_f$  tangente em  $R$ . Sobre a superfície auxiliar  $\Sigma_F$  em  $M$ , a projeção normal de  $\bar{M}$  é descrita pelo vetor posição  $\bar{\mathbf{x}}_M = (x_M, y_M)^\top$ . As projeções dos vetores vetores vagarosamente do raio  $SG$  sobre os três planos descritos anteriormente são dados por  $\mathbf{p}_o$ ,  $\mathbf{p}'_o$  e  $\mathbf{p}_{Mo}$ , respectivamente. Assim, a equação (2.61) para cada ramo do raio:

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\mathbf{x}}_M, \bar{\mathbf{x}}) &= \tau_{o1} + \mathbf{p}_{Mo} \cdot \bar{\mathbf{x}}_M - \mathbf{p}_o \cdot \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \bar{\mathbf{x}}_M \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \bar{\mathbf{x}}_M \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}_M) &= \tau_{o2} + \mathbf{p}'_o \cdot \bar{\mathbf{x}}' - \mathbf{p}_{Mo} \cdot \bar{\mathbf{x}}_M - \bar{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \bar{\mathbf{x}}' \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2^{-1} \bar{\mathbf{x}}' \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Onde,  $\tau_{o1} = \tau(M, S)$  e  $\tau_{o2} = \tau(R, M)$  são os tempos de trânsito do raio central  $SG$  ao longo de cada um dos ramos;  $\tau(\bar{\mathbf{x}}_M, \bar{\mathbf{x}}) = \tau(\bar{M}, S)$  e  $\tau(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}_M) = \tau(R, \bar{M})$  são aproximações parabólicas e as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  são submatrizes da matriz propagadora de Bortfeld  $\mathbf{T}$ .

Somando as equações A.1 e A.2:

$$\begin{aligned}
 \tau(\vec{\mathbf{x}}_M, \vec{\mathbf{x}}) + \tau(\vec{\mathbf{x}}', \vec{\mathbf{x}}_M) &= \tau_{o1} + \tau_{o2} + (\mathbf{p}_{Mo} \cdot \vec{\mathbf{x}}_M - \mathbf{p}_{Mo} \cdot \vec{\mathbf{x}}_M) + (-\mathbf{p}_o \cdot \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{p}'_o \cdot \vec{\mathbf{x}}') \\
 &\quad - \vec{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \vec{\mathbf{x}}_M - \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \vec{\mathbf{x}}' \\
 &\quad + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \vec{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2^{-1} \vec{\mathbf{x}}' \\
 &\quad + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \vec{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \vec{\mathbf{x}}_M
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Considerando que  $\vec{\mathbf{x}} = 0$  e  $\vec{\mathbf{x}}' = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \tau(\vec{\mathbf{x}}_M, \vec{\mathbf{x}}) + \tau(\vec{\mathbf{x}}', \vec{\mathbf{x}}_M) &= \tau_{o1} + \tau_{o2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \vec{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \vec{\mathbf{x}}_M
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Substituindo a equação A.4 na inequação 3.39:

$$\left| \tau_{o1} + \tau_{o2} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \vec{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \vec{\mathbf{x}}_M - \tau(S, R) \right| \leq \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} \tag{A.5}$$

Como  $\tau_{o1} + \tau_{o2} = \tau(R, S)$ . Conclui-se que:

$$\left| \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \vec{\mathbf{x}}_M + \vec{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \vec{\mathbf{x}}_M \right| \leq T = \frac{1}{f} \tag{A.6}$$

Ou seja:

$$\left| \vec{\mathbf{x}}_M^\top (\mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} + \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2) \vec{\mathbf{x}}_M \right| \leq T = \frac{1}{f} \tag{A.7}$$

Definindo  $\mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1^{-1} + \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_2 = \mathbf{H}_F$ , chega-se na mesma expressão citada na equação 3.40:

$$\left| \vec{\mathbf{x}}_M^\top \mathbf{H}_F \vec{\mathbf{x}}_M \right| \leq T = \frac{1}{f} \tag{A.8}$$

A zona de Fresnel projetada é definida como uma região em um plano  $\Sigma_P$ , localizado sobre a superfície de aquisição de dados, e pertence a um conjunto de raios paraxiais de reflexão  $\bar{S}\bar{M}_R\bar{R}$ . Estabelecendo um vetor-posição  $\vec{\mathbf{x}}_R = (x_R, y_R)^\top$  para todos os pontos das projeções de  $\bar{M}_R$  sobre  $\Sigma_F$ . Assim é possível estabelecer a projeção da zona de Fresnel sobre a superfície de aquisição de dados através de uma transformação linear de  $\vec{\mathbf{x}}_R$  para  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ . Esse mapeamento é deduzido por Schleicher et al. (2007):

$$\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_o = (\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{H}_F \vec{\mathbf{x}}_R) \tag{A.9}$$

Sendo  $\Lambda = \mathbf{B}_1^{-1}\Gamma_S + \mathbf{B}_2^{-1}\Gamma_R$ . As matrizes  $\Gamma_S$  e  $\Gamma_R$  são chamadas por Schleicher et al. (2007) de matrizes de configuração. Logo, a equação A.8 pode ser reescrita como apresentado na equação 3.42:

$$|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_o)^\top \mathbf{H}_P (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_o)| \leq T \quad (\text{A.10})$$

Onde,  $\mathbf{H}_P = \Lambda^\top \mathbf{H}_F \Lambda$  é a matriz da zona de Fresnel projetada.

## APÊNDICE B – Formalismo da Zona de Fresnel Projetada: Caso 2-D

No caso 2-D, a expressão A.10 se reduz a:

$$|(\xi - \xi_o)^2 H_P| \leq T \quad \text{ou} \quad -T \leq (\xi - \xi_o)^2 H_P \leq T \quad (\text{B.1})$$

Onde,  $f$  é a frequência dominante da onda mono-frequente e  $H_P$  é o elemento  $\mathbf{H}_{P,i,j=1}$  da matriz da zona de fresnel projetada (3.43). Considerando apenas períodos não-negativos e apenas a região de fronteira da zona de Fresnel projetada:

$$(\xi - \xi_o)^2 H_P = T \quad (\text{B.2})$$

Note que  $\xi - \xi_o$  é o raio da circunferência que delimita a zona de Fresnel projetada. Assim, denotando  $\xi - \xi_o = r_{zp}$ , Ferreira (2007) concluiu que:

$$r_{zp} = \sqrt{\frac{T}{H_P}} \quad \text{ou} \quad r_{zp} = \sqrt{\frac{1}{f H_P}} \quad (\text{B.3})$$

## APÊNDICE C – Formalismo da condição inicial dos feixes gaussianos em função da zona de Fresnel projetada: Caso 2-D

Segundo Müller (1984) a expressão analítica para a meia largura  $L$  de um feixe gaussiano na situação 2-D é definida pela seguinte expressão matemática:

$$L^2 = \frac{2}{\omega} \frac{(\epsilon_1 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2}{\epsilon_2} \quad (\text{C.1})$$

Como o interesse é obter a propagação do feixe Gaussian estreita e estável, Ferreira (2007) encontrou o parâmetro  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$  do feixe igualando o raio da zona de Fresnel projetada (equação (B.3)) com a meia largura (equação (C.1)). Assim:

$$L^2 = r_{zp}^2 \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{2}{\omega} \frac{(\epsilon_1 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2}{\epsilon_2} = \frac{1}{f H_P} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{2}{2\pi f} (\epsilon_1 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2 = \frac{1}{f H_P} \epsilon_2 \quad (\text{C.4})$$

$$(\epsilon_1 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2 = \frac{\pi}{H_P} \epsilon_2 \quad (\text{C.5})$$

Baseado nas discussões do Müller (1984) (casos (a) – (c) da seção 3.6) para atribuição de valores para  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , considera-se  $\epsilon_1 = 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ . Assim a equação C.5, torna-se:

$$q_2^2 + \epsilon_2^2 q_1^2 = \frac{\pi}{H_P} \epsilon_2 \quad \text{ou} \quad \epsilon_2^2 q_1^2 - \frac{\pi}{H_P} \epsilon_2 + q_2^2 = 0 \quad (\text{C.6})$$

Onde a equação (C.7) é do 2º grau. Assim, para obter  $\epsilon_2$  a partir de quantidades conhecidas do traçamento de raios basta encontrar as raízes da equação (C.7). Denotando  $\epsilon_2 = \epsilon_2^{(f)}$ :

$$\epsilon_2^{(f)} = \frac{\frac{\pi}{H_P} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{H_P}\right)^2 - 4q_1^2 q_2^2}}{2q_1^2} \quad (\text{C.7})$$

## APÊNDICE D – Análise assintótica da integral de migração KGB

Usando as coordenadas 3-D cartesianas gerais com vetor posição  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , considerando o plano  $\Sigma_P$  de forma a coincidir com a superfície da aquisição, ou seja, a superfície da terra, onde são distribuídos os pares de fonte  $S$  e geofone  $G$  com coordenadas cartesianas 2-D locais especificados pelo vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\xi}$ , expresso por:

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_S(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_G = \mathbf{x}_G(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{D.1})$$

Cada coordenada do vetor de parâmetro  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ , com a abertura de migração  $\mathcal{A}$  da integral externa na equação (4.9), é uma coordenada de um feixe central, isto é,  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_c$ , referente a um subconjunto de traços sísmicos selecionados relacionado a um feixe gaussiano .

O tempo de trânsito paraxial complexo de um raio paraxial, com percurso iniciando em  $\mathbf{x}_S(\boldsymbol{\xi}_b)$  e terminando em  $\mathbf{x}_G(\boldsymbol{\xi}_b)$ , calculados a partir de parâmetros de um raio central de um feixe específico com  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_c$  pode ser expresso por (BORTFELD, 1989; SCHLEICHER et al., 2007; ČĚRVENÝ, 2001):

$$\tau(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\xi}_b) = \tau_R(\boldsymbol{\xi}_c) - \mathbf{p}_S^\top \boldsymbol{\Gamma}_S(\boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{\xi}_c) + \mathbf{p}_G^\top \boldsymbol{\Gamma}_G(\boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{\xi}_c) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{\xi}_c)^\top \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_c)(\boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{\xi}_c) \quad (\text{D.2})$$

O parâmetro  $\boldsymbol{\xi}_b = (\xi_{b1}, \xi_{b2})$  especifica a posição do traço sísmico com relação subconjunto de traços sísmicos relacionado a um feixe gaussiano com centro em  $\boldsymbol{\xi}_c$  (figura (21)). Se ele é avaliado a partir dos parâmetros do raio central no ponto estacionário em um ponto crítico  $\boldsymbol{\xi}_c = \boldsymbol{\xi}_c^*$ , o tempo de trânsito paraxial da equação (D.2) é  $\tau(\boldsymbol{\xi}_c^*, \boldsymbol{\xi}_b)$ .

Alternativamente, pode-se expressar o tempo de trânsito  $\tau(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\xi}_b)$  pela soma de dois tempos de trânsitos  $\tau_S(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S)$  (tempo da fonte em  $\mathbf{x}_S$  até um ponto do refletor em  $\mathbf{x}_R$ ) e  $\tau_G(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_G)$  (tempo de um ponto do refletor em  $\mathbf{x}_R$  até o geofone em  $\mathbf{x}_G$ ). Se o tempo de trânsito total  $\tau_D(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_G, \mathbf{x}_R) = \tau_S(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_R) + \tau_G(\mathbf{x}_G, \mathbf{x}_R)$  corresponder a um raio paraxial refletido que obedece a lei de snell, que depende das coordenadas da fonte, do geofone e do ponto de reflexão, então o tempo de trânsito paraxial expresso pelo raio estacionário central a um feixe é dado por:

$$\begin{aligned} \tau_D(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}; M = R) &= \tau(\boldsymbol{\xi}_c^*, R^*) - \mathbf{p}_S^\top(\boldsymbol{\xi}_c^*) \boldsymbol{\Gamma}_S(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*) + \mathbf{p}_G^\top(\boldsymbol{\xi}_c^*) \boldsymbol{\Gamma}_G(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*) \\ &\quad - (\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)^\top \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\eta}^*) \boldsymbol{\eta} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)^\top \mathbf{H}_D(\boldsymbol{\xi}_c^*)(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\eta}^*) \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Onde  $\tau(\boldsymbol{\xi}_c^*, R^*) = \tau(\boldsymbol{\xi}_c^*)$  é o tempo de trânsito refletido no raio estacionário do centro de um feixe. O vetor de parâmetros na superfície da Terra  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{\xi}_c)$  obedece a relação expressa

na equação (4.13). Se o raio não é de reflexão, o tempo de trânsito da equação (D.3) corresponde a um raio arbitrário e as coordenadas da fonte, do geofone e do ponto em profundidade não são dependentes entre si.

Se o vetor de parâmetros  $\xi_c = \xi_c^*$  e  $M = R$  na equação (D.3), então  $\eta = (\xi_b - \xi_c^*)$  e o tempo de difração paraxial é:

$$\tau_D(\xi_c, \eta; M = R) = \tau(\xi_c^*, R^*) + \frac{1}{2} \eta^\top \mathbf{H}_P(\eta^*) \eta \quad (\text{D.4})$$

A superfície da empilhamento de difração, chamada de superfície de Huygens, no processo de migração Kirchhoff calculada para um ponto arbitrário  $M$  em profundidade é, então, a seguinte função tempo de trânsito:

$$\begin{aligned} \tau_D(\xi_c, \eta = 0; M) &= \tau(\xi_c^*, M) - \mathbf{p}_S^\top(\xi_c^*) \Gamma_S(\xi_c - \xi_c^*) + \mathbf{p}_G^\top(\xi_c^*) \Gamma_G(\xi_c - \xi_c^*) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\xi_c - \xi_c^*)^\top \mathbf{H}_D(\xi_c^*) (\xi_c - \xi_c^*) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Ao inserir na equação (4.9) tempos de trânsito de complexos,  $\tau(\xi_c, \xi_b) = \Re\{\tau(\xi_c, \xi_b)\} + i \Im\{\tau(\xi_c, \xi_b)\}$  da equação (D.2), a superfície de Huygens da equação (D.5) e considerando que a maior contribuição da integral venha da região do feixe próxima de um raio central com parâmetro  $\xi_c$ , pode-se expressar as verdadeiras amplitudes da migração KGB em profundidade como:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &= \frac{-i\omega}{2\pi} \hat{W}(\omega) \int \int_A d\xi_{1c} d\xi_{2c} w_b(M, \xi_c, \omega) \exp[i\omega \tau_D(\xi_c, \eta = 0; M)] \\ &(\cos \alpha'_s \cos \alpha'_G)^{-1} [-\det \mathbf{H}_P(\xi'_{c1}, \xi'_{c2})]^{1/2} u_o^B(\xi_c) \int \int_D d\xi'_{1c} d\xi'_{2c} \exp[-i\omega \tau_{gb}(\xi_c, \xi_b)] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Assim, a integral interna torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{U}_b(\xi_c, \omega) &= (\cos \alpha'_s \cos \alpha'_G)^{-1} [-\det \mathbf{H}_P(\xi'_{c1}, \xi'_{c2})]^{1/2} u_o^B(\xi_c) \\ &\int \int_D d\eta \exp[-i\omega \tau_{dif}(\xi_c, \eta, M)] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Com a ajuda dos tempos de trânsito expressos nas equações (D.2) e (D.3):

$$\tau_{dif}(\xi_c, \eta, M) = \tau_D(\xi_c, \eta; M = R) - \tau(\xi_c, \xi_b) \quad (\text{D.8})$$

Usando as condições da fase estacionária, encontra-se dois resultados importantes:

1. Para  $\partial\tau_{dif}/\partial\xi_c = 0$  no ponto crítico  $\xi_c = \xi_c^*$ , encontra-se a identidade  $\nabla_{\xi}\tau_R(\xi_c^*, \xi_b = \xi_c^*) \equiv \nabla_{\xi}\tau_D(\xi_c = \xi_c^*, \eta = 0; M = R^*)$ , ou seja, o gradiente da parte imaginária da função tempo de trânsito de reflexão é negligenciando, que para  $\eta = 0$  significa a condição de tangência entre as superfícies de Huygens e de reflexão no ponto crítico.
2. Para  $\partial\tau_{dif}/\partial\eta = 0$  no ponto crítico  $\eta^*$ , o gradiente da parte imaginária da função tempo de trânsito de reflexão é negligenciando, encontrando  $\nabla_{\eta}\tau_R(\xi_c^*, \xi_b) \equiv \nabla_{\eta}\tau_D(\xi_c, \eta^*; M = R^*)$ . Assim,  $\mathbf{p} + \eta^{*\top}\mathbf{H}_P(\eta^*) = 0$ , com  $\mathbf{p}^\top = -(\xi_c - \xi_c^*)^\top\mathbf{H}_P(\eta^*)$  da equação (D.3) resulta em  $\eta^* = (-\mathbf{p}^\top\mathbf{H}_P^{-1}(\eta^*))^\top$ , que significa as coordenadas da fase estacionária  $\eta^* = (\xi_c - \xi_c^*)$ .

Considerando as condições da fase estacionária obtidas acima, o tempo de trânsito  $\tau_{dif}$  da equação (D.8) pode ser expandida em série de Taylor:

$$\tau_{dif}(\xi_c, \eta, M) = \tau_{dif}(\xi_c^*, \eta = 0, M) + \frac{1}{2}(\xi_c - \xi_c^*)^\top\mathbf{H}_\xi(\xi_c^*)(\xi_c - \xi_c^*) + \frac{1}{2}\eta^\top\mathbf{H}_\eta(\eta = 0)\eta \quad (\text{D.9})$$

No ponto crítico  $\xi_c = \xi_c^*$ , tem-se a matrix  $2 \times 2$  Hessiana complexa:

$$\mathbf{H}_\xi(\xi_c^*) = \mathbf{M}_\Delta(\xi_c^*) = \mathbf{H}(\xi_c^*) - \mathbf{H}_D(\xi_c^*) = \mathbf{H}_P(\xi_c^*) + i\mathbf{H}_I(\xi_c^*) \quad (\text{D.10})$$

Em  $\eta = 0$ , a parte real da matrix  $2 \times 2$  Hessiana complexa é:

$$\mathbf{H}_\eta(\eta = 0) \equiv \mathbf{H}_P(\xi_b = \xi_c^*) \quad (\text{D.11})$$

Usando a equação (D.7), com a ajuda das equações (D.9), (D.10) e (D.11), a equação (D.6) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &= \frac{-i\omega}{2\pi}\hat{W}(\omega) \int \int_{\mathcal{A}} d\xi_c w_b(M, \xi_c, \omega) [-\det \mathbf{H}_P(\xi'_{c1}, \xi'_{c2})]^{1/2} (\cos \alpha'_s \cos \alpha'_G)^{-1} \\ &u_o^B(\xi_c) \exp[i\omega \phi(\xi_c, M)] \int \int_{\mathcal{D}} d\eta \exp \left[ i\omega \frac{1}{2}\eta^\top\mathbf{H}_\eta(\eta = 0)\eta \right] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Onde a função fase da integral externa na equação (D.12) é:

$$\phi(\xi_c, M) = \tau_{dif}(\xi_c, M) + \frac{1}{2}(\xi_c - \xi_c^*)^\top\mathbf{M}_\Delta(\xi_c^*)(\xi_c - \xi_c^*) \quad (\text{D.13})$$

Com a identidade da equação (D.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) \approx & \frac{\omega}{2\pi} \hat{W}(\omega) \int \int_A d\boldsymbol{\xi}_c \left[ \frac{2\pi}{\omega} \right] w_b(\boldsymbol{\xi}_c, M) (\cos \alpha_S^c \cos \alpha_G^c)^{-1} \\ & \times u_o^B(\boldsymbol{\xi}_c) \exp[i\omega\phi(\boldsymbol{\xi}_c, M)] \exp \left[ -\frac{i\pi}{2} (1 - \text{Sgn}\mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2) \right]. \quad (\text{D.14}) \end{aligned}$$

No ponto estacionário  $\boldsymbol{\xi}_c^*$ , a integral na equação (D.14) possui uma solução aproximada assintótica dada por:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) \approx & \frac{2\pi}{\omega} W(\omega) w_b(\boldsymbol{\xi}_c^*, M, \omega) [v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*) v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)]^{-1} \\ & \times \frac{U_o^\Omega C_t R_c}{G_S^B \sqrt{\det \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)}} \exp \left[ \omega \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) - \frac{i\pi}{2} (1 - \text{Sgn}\mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2) \right] \quad (\text{D.15}) \end{aligned}$$