



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Inversão de dados eletromagnéticos com o regularizador Variação
Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada**

Edelson da Cruz Luz

Orientador: Prof. Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis

Belém
Dezembro 2012

Edelson da Cruz Luz

**Inversão de dados eletromagnéticos com o regularizador Variação
Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará-UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Doutor em Ciências na área de Geofísica.

Área de concentração: Métodos eletromagnéticos

Orientador: Prof. Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis

Belém
Dezembro 2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

L979i Luz, Edelson da Cruz

Inversão de dados eletromagnéticos com o regularizador variação total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada / Edelson da Cruz Luz; Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis – 2013

56 f.: il.

Tese (doutorado em geofísica) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2012.

1. Inversão (Geofísica). 2. Magnetotelúrico. 3. CSEM. 4. Estado adjunto. 5. Método de variação total. I. Régis, Cícero Roberto Teixeira, *orient.* II. Universidade Federal do Pará. III. Título.

CDD 22^a ed.: 550

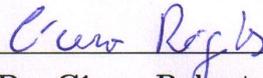
**Inversão de dados eletromagnéticos com o regularizador
Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade
aproximada.**

Edelson da Cruz Luz

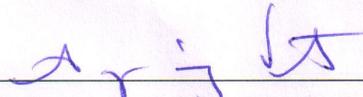
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará-UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Doutor em Ciências na área de Geofísica.

Data de Aprovação: 20/12/2012.

Banca Examinadora:



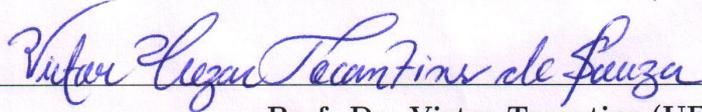
Prof. Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis (UFPA)
Orientador



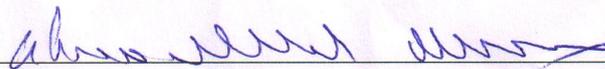
Prof. Dr. Sérgio Luiz Fontes (ON)



Prof. Dr. Paulo Roberto de Carvalho (UFPA)



Prof. Dr. Victor Tocantins (UFPA)



Prof. Dr. Cristiano Mendel Martins (UFPA)

Belém

Dezembro 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente a minha mãe e a minha esposa pelo incentivo e dedicação.

Ao professor Cícero Roberto Teixeira Régis por todo o incentivo, compreensão, esclarecimentos e companherismo.

Aos amigos Valdelírio da Silva e Silva e Walleson Gomes dos Santos pelos momentos de descontração, esclarecimentos e companherismo e pelos códigos de modelagem do CSEM marinho.

Aos colegas do grupo EMMI pelos momentos agradáveis no laboratório.

A PETROBRAS, pelo suporte através do projeto *n*º 0050.0046724.08.9.

Ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Geofísica do Petróleo (INCT-GP), pelo suporte.

Ao PRH/ANP – 06 e a CAPES, pela concessão de bolsa de estudo.

SUMÁRIO

Apresentação	7
Inversão de dados do CSEM marinho 1D de meio estratificado anisotrópico com o regularizador Variação Total	1
Resumo	1
Introdução	1
Modelagem	3
Inversão	3
Resultados	7
Conclusão	16
Referências	17
Inversão de dados Magnetotelúricos com o regularizador Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada	19
Resumo	19
Introdução	20
Construção da Matriz de Sensibilidade	21
Inversão	26
Resultados	29
Primeiro modelo	29
Segundo modelo	30
Terceiro modelo	34
Conclusão	36
Referências	37
Inversão de dados do CSEM marinho 2.5D com o regularizador Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada	39
Resumo	39
Introdução	39
Modelagem	40
Modelagem Adjunta	43

Modelagem em Paralelo com Topologia	47
Inversão	47
Resultados	51
Conclusão	52
Referências	54
APÊNDICES	56
APÊNDICE A Cálculo da Sensibilidade com Método dos estados Ad- juntos	56
APÊNDICE B Sensibilidade com Método dos estados Adjuntos para o CSEM marinho 2.5D	58
APÊNDICE C Sensibilidade para amplitude e fase	60

Apresentação

Neste trabalho apresentamos um estudo da aplicação do regularizador “Variação Total ” (VT) na inversão de dados geofísicos eletromagnéticos.

O regularizador VT reforça a proximidade entre os parâmetros adjacentes, mas, quando a influência de uma descontinuidade é sentida nos dados, este permite mudanças abruptas sobre os parâmetros. Isso faz com que o método seja uma alternativa válida, quando os dados observados usados na inversão provém de um ambiente geológico com uma distribuição suave de condutividade, mas que pode apresentar descontinuidades em lugares como as interfaces entre as camadas geoeletricas, como na margem de uma zona de óleo ou de um corpo de sal, que podem ser zonas muito resistivas no interior de sedimentos condutivos. Quando, devido a baixa resolução nos dados, o método não tem informações o suficiente para identificar a interface, o regularizador variação total reforça a proximidade entre os parâmetros adjacentes fazendo um transição suave entre as condutividades camadas, da mesma forma que é apresentado pela suavidade global.

O método de Variação Total permite que modelos menos suaves sejam alcançados porque na norma L_1 a medida de desajuste entre os pares de parâmetros adjacentes, dará o mesmo valor se a variação dos parâmetros é suave ou se a variação é abrupta, o que não é o caso se o mesmo desajuste é medido na norma L_2 , pois em uma distribuição suave a medida do desajuste é menor, sendo assim favorecida pela minimização desta norma. O uso deste regularizador permite uma melhor estimativa do tamanho de um corpo, seja ele resistivo ou condutivo.

O trabalho está apresentado na forma de três artigos, cada um descrevendo uma etapa no desenvolvimento do problema da inversão, seguindo uma sequência de complexidade crescente no problema direto.

O primeiro artigo neste trabalho é intitulado “Inversão de dados do CSEM marinho 1D de meio estratificado anisotrópico com o regularizador Variação Total”. Este descreve o passo inicial no desenvolvimento do problema: a inversão de dados do CSEM marinho de modelos estratificados 1D com anisotropia na condutividade das camadas. Este problema se presta bem para este desenvolvimento, porque tem solução computacional muito mais rápida do que o 2D, e nele já estão presentes as características principais dos dados do método CSEM marinho, como a largura muito grande da faixa de amplitudes medidas em um levantamento, e a baixa resolução, inerente às baixas frequências empregadas.

A anisotropia acrescenta uma dificuldade a mais no problema, por aumentar o nível de ambiguidade nos dados e demandar ainda mais informação do que no caso puramente isotrópico. Os resultados mostram que a aplicação dos vínculos de igualdade do método VT permite a melhor identificação de uma camada alvo resistiva do que a simples aplicação dos vínculos tradicionais de suavidade. Até onde podemos aferir, esta solução se mostra superior a qualquer outra já publicada para este problema. Além de ter sido muito importante para o desenvolvimento de códigos em paralelo.

O segundo artigo apresentado aqui, “Inversão de dados Magnetotelúricos com o regularizador Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada”, trata da inversão de dados do método Magnetotelúrico em ambientes 2D. Este problema demanda um esforço computacional muito maior do que o primeiro. Nele, estudamos a aplicação do método dos estados adjuntos para gerar uma boa aproximação para as derivadas necessárias para a construção da matriz de sensibilidade usada na inversão. A construção da matriz de sensibilidade é a etapa que demanda mais tempo no processo de inversão, e o uso do método de estados adjuntos foi capaz de reduzir muito este tempo, gerando derivadas com um bom nível de aproximação. Esta etapa da pesquisa foi fundamental pelo problema direto ser matematicamente e computacionalmente muito mais simples do que o do CSEM marinho 2D. Novamente em comparação com a aplicação do regularizador de suavidade global, o regularizador de Variação Total permitiu, neste problema, uma melhor delimitação das bordas de heterogeneidades bidimensionais.

A terceira parte deste trabalho, apresentada no artigo “Inversão de dados do CSEM marinho 2.5D com o regularizador Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada”, apresenta a aplicação do método de Variação Total ao problema da inversão de dados CSEM marinho 2.5D. Usamos o método dos estados adjuntos para gerar uma boa aproximação para as derivadas necessárias para a construção da matriz de sensibilidade usada na inversão, acelerando assim o processo de inversão. Para deixar o processo de inversão ainda mais rápido, lançamos mão da programação em paralelo com o uso de topologia. A comparação entre a aplicação do regularizador de suavidade global, e o regularizador de Variação Total permitiu, assim como nos casos anteriores, uma melhor delimitação das bordas de heterogeneidades bidimensionais.

Inversão de dados do CSEM marinho de meio estratificado anisotrópico com o regularizador Variação Total

Resumo

Neste artigo descrevemos o uso do funcional estabilizador “Variação Total” na inversão de dados do método CSEM marinho em um meio com camadas anisotrópicas. O método usa uma suavização na norma L_1 , que aceita variações abruptas entre os parâmetros adjacentes do que a tradicional suavização na norma L_2 . Nossos resultados mostram que o uso do estabilizador Variação Total melhora a resolução, tornando possível uma melhor identificação da posição do alvo resistivo, exatamente por permitir variações não suaves entre os parâmetros. Aplicamos o método juntamente com vínculos de igualdade entre as componentes da condutividade anisotrópica na mesma camada, e conseguimos como resultado uma melhor identificação do alvo e do embasamento do que com a aplicação de vínculos de suavidade tradicionais.

Introdução

A inversão de dados geofísicos é um problema mal posto devido a falta de unicidade e à instabilidade na solução. A baixa resolução normalmente observada nos dados eletromagnéticos é ainda mais severa no caso do método CSEM marinho, devido às baixíssimas frequências utilizadas, que vão de 0.1 Hz a 2 Hz. Isso implica em um alto nível de ambiguidade nos dados e geralmente baixa sensibilidade. A situação se torna pior quando existe anisotropia na condutividade, a ambiguidade aumenta e ainda tentamos extrair mais informação dos dados do que quando assumimos que o meio seja isotrópico.

O método mais popular para estabilizar a solução no processo de inversão é a suavização global (algoritmo Occam), apresentado por Constable *et al.* (1987). Este método impõem um vínculo de igualdade entre os parâmetros, forçando a solução a apresentar uma variação suave. Farquharson & Oldenburg (1998) apresentam uma extensa análise

sobre o uso das normas L_1 e L_2 na inversão de dados eletromagnéticos, mostrando os benefícios no uso da norma L_2 , em ambientes que apresentam um contraste suave de condutividade, e os benefícios no uso da norma L_1 , em ambientes onde a condutividade pode variar de forma abrupta. Ramananjaona *et al.* (2011) mostraram exemplos da inversão de dados do CSEM marinho, baseados na regularização de Occam, com os resultados suavizados, os quais são característicos do método. Entretanto, em muitos ambientes geológicos, existem fortes descontinuidades nas propriedades físicas do meio. Nestes casos, o resultado obtido usando exclusivamente o funcional estabilizador de suavização global, principalmente com o estimador de mínimos quadrados, pode induzir a uma interpretação errônea.

Neste trabalho nós mostramos os resultados da aplicação do estabilizador “Variação Total”, na inversão de dados do CSEM marinho em um meio anisotrópico estratificado. Este método foi apresentado por Martins *et al.* (2011) e Lima *et al.* (2011) na inversão de dados gravimétricos para estimar o relevo de uma bacia sedimentar que apresentava descontinuidade. O método impõe vínculos de igualdade entre parâmetros adjacentes na construção dos modelos a serem invertidos, medindo o ajuste entre eles na norma L_1 , que não penaliza variações abruptas nas propriedades físicas.

A condutividade elétrica em meios estratificados pode apresentar fortes descontinuidades, por exemplo, em uma rocha reservatório que contém hidrocarbonetos, que são altamente resistivos, sobrepostos à camada saturada com água, que forma um ambiente condutivo. Neste caso o método de Variação Total pode contribuir para gerar resultados na inversão que permitam tais variações abruptas nas camadas.

Os dados proveniente de levantamento do CSEM marinho são inevitavelmente anisotrópicos, e desprezar a anisotropia na inversão pode levar a um resultado que não condiz com o modelo real, como mostrado por Ramananjaona *et al.* (2011). Apesar de encontrarmos na literatura muitos trabalhos sobre a inversão de dados do CSEM marinho (Key (2009), Weiss & Constable (2006), Christensen & Dodds (2007)) poucos estão relacionado com a inversão de dados com anisotropia.

Em nosso problema, aplicamos o funcional estabilizador Variação Total nas componentes da condutividade entre as camadas horizontais anisotrópicas.

O esquema de inversão apresentado aqui implementa a minimização com o método de Gauss-Newton usando a estratégia de Marquardt para um problema não-linear, com as seguintes especificações, que serão detalhadas nas sessões subsequentes:

1. A função de ajuste dos dados é construída com a diferença relativa entre os dados observados e os dados estimados.
2. Vínculos de igualdade são impostos entre as condutividades horizontal e vertical, dentro de cada camada anisotrópica (Régis *et al.* , 2010).

3. O estabilizador de “Variação Total” é usado para aplicar vínculos de igualdade nas condutividades entre as camadas adjacentes.

Para efeito de comparação, aplicamos o estabilizador de Suavidade Global para inverter os mesmos conjuntos de dados trabalhados com o método de Variação Total.

A aplicação dessa técnica resultou em uma solução estável para o problema de inversão de dados anisotrópicos do CSEM marinho 1D. Na comparação entre a aplicação dos funcionais estabilizadores de Suavização Global e Variação Total, este último resultou em uma melhora da solução na estimativa do alvo resistivo.

Modelagem

Na modelagem do CSEM marinho para meios estratificados transversalmente isotrópicos com um eixo de simetria vertical (TIV), os campos magnético \mathbf{H} (A/m) e elétrico \mathbf{E} (V/m) no domínio da frequência são obtidos através do potencial vetor \mathbf{A} (Kaufman & Dashevsky, 2003),

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{A} - \nabla U . \quad (2)$$

Considerando um dipolo elétrico orientado na direção x e escolhendo a condição de calibre $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\sigma_h \cdot U$, encontramos as equações que definem o potencial \mathbf{A} ,

$$\nabla^2 A_x + k_h^2 A_x = -I(\omega) ds_x \delta(x) \delta(y) \delta(z) , \quad (3)$$

$$\nabla^2 A_z + k_v^2 A_z = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A} , \quad (4)$$

onde temos o número de onda associado a condutividade horizontal $k_h^2 = -i\omega\mu\sigma_h$ e aquele associado à condutividade vertical $k_v^2 = -i\omega\mu\sigma_v$. Sendo $\lambda^2 = \sigma_h/\sigma_v$ denominado coeficiente de anisotropia.

Essas equações são solucionadas no domínio (k_x, k_y, z) de Fourier, utilizando as condições de continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético. A solução do potencial \mathbf{A} no domínio espacial é obtida através da transformada inversa de Fourier e com o auxílio das equações (1) e (2) encontramos a solução do campo eletromagnético.

Inversão

O modelo usado para gerar nossos dados sintéticos é mostrado na figura 3. O modelo interpretativo para a inversão é formado por 39 camadas horizontais homogêneas com condutividades transversalmente isotrópicas (σ_h, σ_v) , com espessuras fixas de 50 m cada,

e com um embasamento isotrópico infinito. Os parâmetros a serem estimados são as condutividades, duas para cada camada.

Os parâmetros formam o vetor \mathbf{m} . A função objetivo de \mathbf{m} a ser minimizada é

$$\Phi(\mathbf{m}) = \phi^d(\mathbf{m}) + \phi^m(\mathbf{m}) \quad (5)$$

Em que ϕ^d expressa o desajuste entre os dados observados e os calculados, e $\phi^m(\mathbf{m})$, é o funcional usado para introduzir informações que ajudam a estabilizar o processo de inversão.

Ao tentar ajustar dados sintéticos às observações, precisamos de uma função ajustante na qual cada elemento do conjunto de dados possa ter o mesmo peso em sua contribuição para o ajuste, a menos de alguma condição particular que imponha um peso diferente para determinado sub-conjunto dos dados. Como as medidas de campo elétrico que compõem os dados do método CSEM marinho varrem uma larga faixa de ordens de magnitude, só conseguimos um ajuste uniforme em todo o conjunto de dados se construirmos uma função ajustante que leve em conta esta característica dos dados. Neste trabalho, seguimos o método citado em Almeida & Rijo (2011), onde a função dos dados é normalizada pelas observações (Amplitude e fase). Ou seja, em cada iteração, os dados calculados são divididos pelas observações, e a inversão tentará ajustar essa razão para o valor constante de 1. O funcional é representado como

$$\phi^d(\mathbf{m}) = \|(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m}))\|_2 \quad (6)$$

Onde $\bar{\mathbf{y}}$ é um vetor em que todas as componentes são iguais a 1 e $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$ é um vetor em que as componentes são dadas pela razão entre os dados calculados em cada iteração e as observações do método.

A função regularizadora ϕ^m através da qual introduzimos informação *a priori* é composta de duas partes:

$$\phi^m(\mathbf{m}) = \alpha\phi^{RE} + \gamma\phi^{VT}. \quad (7)$$

A função ϕ^{RE} é usada para impor vínculo de igualdade relativa entre os dois valores condutividades em cada camada do modelo interpretativo. A aplicação dessa informação *a priori* para os valores de condutividade em cada camada evita que estes valores se distanciem demasiadamente um do outro, o que poderia gerar modelos geológicos sem sentido, e também ajuda a obter uma melhor convergência. Este mesmo tipo de vínculo foi aplicado com sucesso na inversão de dados magnetotelúrico provenientes de um meio anisotrópico (Régis *et al.*, 2010). Sendo ϕ^{RE} dado por:

$$\phi^{RE} = \|\mathbf{D}\mathbf{m}\|_2. \quad (8)$$

\mathbf{D} é a matriz cuja as linhas são formadas com zeros, exceto na posição dos dois parâ-

metros que queremos impor o vínculo. Por exemplo, se queremos impor que os parâmetros i^{th} e j^{th} devem ter os seu valores o mais próximo possível um do outro, a matriz deve ter uma linha na forma $[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ \dots \ 0 \ 0]$ onde os números 1 e -1 estão nas posições i^{th} e j^{th} , repectivamente.

A função ϕ^{VT} impõe a igualdade entre as condutividades anisotrópicas para duas camadas consecutivas, essa igualdade é estabelecida tanto para a componente horizontal $\sigma_h^{(i)}$, quanto para a componente vertical $\sigma_v^{(i)}$. Para as camadas (i) e $(i+1)$, as relações são $\sigma_h^{(i)} - \sigma_h^{(i+1)} = 0$ e $\sigma_v^{(i)} - \sigma_v^{(i+1)} = 0$. Estas relações entram como uma função estabilizadora na forma da matriz \mathbf{S} , similar à \mathbf{D} , mas agora a relação de igualdade é medida na norma L_1 ($\|\cdot\|_1$), ao invés da L_2 :

$$\phi^{VT} = \|\mathbf{S} \mathbf{m}\|_1. \quad (9)$$

Os parâmetros de regularização α e γ são usados para dar pesos diferentes a essas informações *a priori*. Eles devem ter valores altos o suficiente para gerar soluções estáveis, mas não podem ser tão altos a ponto de não permitirem aos dados influenciarem o processo de inversão. Na prática, usamos os menores valores capazes de estabilizar a solução.

Pela definição da norma, a função ϕ^{VT} , para N camadas e $2N$ parâmetros, deve ser escrita como:

$$\phi^{VT} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\left| \sigma_h^{(i)} - \sigma_h^{(i+1)} \right| + \left| \sigma_v^{(i)} - \sigma_v^{(i+1)} \right| \right). \quad (10)$$

Entretanto, essa função não é diferenciável quando a diferença entre os parâmetros é igual a zero. Para evitar esse comportamento, a função foi modificada por Acar & Vogel (1994), aproximando as diferenças por

$$\left| \sigma^{(i)} - \sigma^{(i+1)} \right| \approx \left[\left(\sigma^{(i)} - \sigma^{(i+1)} \right)^2 + \beta \right]^{1/2}, \quad (11)$$

em que β é um número positivo pequeno.

A segunda função regularizadora ϕ^m através da qual introduzimos informação *a priori* é composta por:

$$\phi^m(\mathbf{m}) = \alpha \phi^{RE} + \gamma \phi^{SG}. \quad (12)$$

Onde ϕ^{SG} é o regularizador de suavidade global na norma L_2

$$\phi^{SG} = \|\mathbf{S} \mathbf{m}\|_2. \quad (13)$$

Sendo \mathbf{S} , a mesma matriz usada no regularizador de variação total.

Agora, para implementar o método Gauss-Newton, precisamos construir o vetor gradiente \mathbf{g} e a matriz Hessiana \mathbf{H} associada com essa função modificada. Martins *et al.* (2011) apresentam uma análise detalhada para estas construções. A solução desse problema não linear é encontrada de forma interativa pelo método Gauss-Newton usando a estratégia de Marquardt (1963). Primeiro expande-se $\Phi^m(\mathbf{m})$ em série de Taylor em

torno da aproximação $\hat{\mathbf{m}}_k$, obtida na k -ésima iteração, conservando apenas os termos até segunda ordem; em seguida deriva-se a função expandida e truncada, $\Phi^m(\hat{\mathbf{m}}_k + \Delta\mathbf{m}_k)$ em relação a $\Delta\mathbf{m}_k$ e iguala-se ao vetor nulo. Desta forma, obtemos a equação normal para a estimativa de $\Delta\mathbf{m}_k$:

$$\mathbf{H}_k \Delta\mathbf{m}_k = -\mathbf{g}_k \quad (14)$$

Neste caso as Hessianas do funcional $\Phi(\mathbf{m})$ com os regularizadores de variação total e suavidade global são respectivamente:

$$\mathbf{H}_k^{VT} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mathbf{S}^T (\gamma \mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{S} \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_k^{SG} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \gamma \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (16)$$

e os vetores gradiente são

$$\mathbf{g}_k^{VT} = -\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m}_k + \mathbf{S}^T \mathbf{d} \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_k^{SG} = -\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m}_k + \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_k \quad (18)$$

O vetor $\hat{\mathbf{m}}$ que minimiza a função $\Phi(\mathbf{m})$ é encontrado através da estratégia de Marquardt com o regularizador de variação total, pela seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{m}}^{(VT)} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mathbf{S}^T (\gamma \mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) - \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m}_k - \mathbf{S}^T \mathbf{d}] \quad (19)$$

ou com o regularizador de suavidade global, da seguinte forma,

$$\hat{\mathbf{m}}^{(SG)} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \gamma \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) - \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m}_k - \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_k] \quad (20)$$

Em que \mathbf{J} é a matriz de sensibilidade (Jacobiana) normalizada pelos dados observados. \mathbf{d} é o vetor com a dimensão (L) igual a quantidade de pares de parâmetros que queremos vincular, avaliado em $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k$, cujo l -ésimo elemento é dado por

$$\mathbf{d} \equiv d_l = \frac{m_i - m_j}{[(m_i - m_j)^2 + \beta]^{\frac{1}{2}}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_k} \quad (21)$$

e \mathbf{R} é a matriz diagonal, avaliada em $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k$, cujo l -ésimo elemento da diagonal é dado por

$$\mathbf{R} \equiv R_{ll} = \frac{\beta}{[(m_i - m_j)^2 + \beta]^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_k} \quad (22)$$

O método não irá penalizar variações bruscas porque, na norma L_1 , a medida de desajuste entre os pares de parâmetros adjacentes, dará o mesmo valor se a variação dos parâmetros for suave ou se a variação for brusca, o que não é o caso se o mesmo desajuste é medido na norma L_2 , pois em uma distribuição suave a medida do desajuste é menor, sendo assim favorecida pela minimização desta norma. Este ponto é demonstrado detalhadamente em Lima *et al.* (2011). Por outro lado, a função objetivo deve ajustar as observações, o que impedirá a distribuição do parâmetro de ser descontínua em locais onde a descontinuidade não pode ser explicadas pelas observações.

O regularizador VT reforça a proximidade entre os parâmetros adjacentes, mas, quando a influência de uma descontinuidade é sentida nos dados, este permite mudanças abruptas sobre os parâmetros. Isso faz com que o método seja uma alternativa válida, quando os dados observados usados na inversão do CSEM marinho provém de um ambiente geológico com uma distribuição suave de condutividade, mas que pode apresentar descontinuidades em lugares como as interfaces entre as camadas geológicas, como na margem de uma zona de óleo ou de um corpo de sal, que podem ser zonas muito resistivas no interior de sedimentos condutivos.

Resultados

A fonte é um dipolo elétrico orientado na direção x . As observações são as componentes horizontais dos campos elétrico (E_x, E_y) e magnético (H_x, H_y) no fundo do mar, em pontos sobre o eixo x . A partir de uma distância de 500 m da fonte, os campos foram calculados em 20 pontos de observação com 500 m de intervalos, até 10 km. Os campos foram gerados em 5 frequências: 0.10 Hz, 0.50 Hz, 0.75 Hz, 1.00 Hz e 2.00 Hz. Para testar a estabilidade das soluções, os dados foram invertidos duas vezes, cada vez com a adição de uma sequência diferente de ruído aleatório.

Para validar o nosso algoritmo de inversão, primeiro fizemos uma comparação com o modelo publicado por Ramananjaona *et al.* (2011), como mostra a Figura 1. A Figura 2 mostra os resultados obtidos com os dados da componente *in-line* do dipolo elétrico horizontal, usando o regularizador de suavidade global. Para efeito de comparação colocamos as componentes horizontal e vertical da resistividade na mesma figura, como feito por Ramananjaona *et al.* (2011). A diferença nas primeiras camadas se deve a utilização de espessuras maiores na discretização do modelo usado na inversão, do que a que foi usada por Ramananjaona *et al.* (2011), aumentando assim a sensibilidade dessas camadas.

Após a validação do algoritmo os dados sintéticos foram gerados a partir do modelo geológico mostrado na Figura 3. A camada resistiva 1000 m abaixo do fundo do mar,

representa uma zona alvo de hidrocarboneto. O modelo interpretativo é formado por 80 parâmetros: dois valores de condutividade para cada uma das 39 camadas, com 50 m de espessura, mais dois valores de condutividade para o embasamento.

Para todos os casos, o modelo inicial foi um semi-espaço homogêneo, tal como indicado pelas linhas vermelhas tracejadas nas figuras. Todos os resultados foram expressos em unidades de resistividade ($\Omega \cdot m$) por profundidade (m).

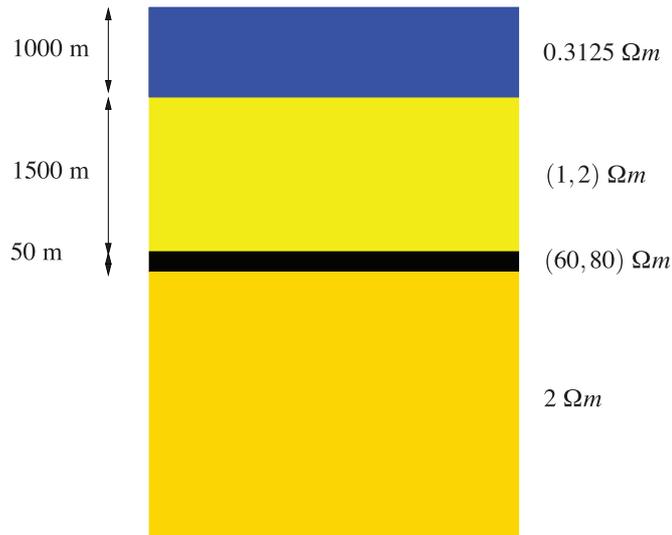


Figura 1: Modelo 1D usado por Ramananjaona *et al.* (2011). Fonte: Ramananjaona *et al.* (2011)

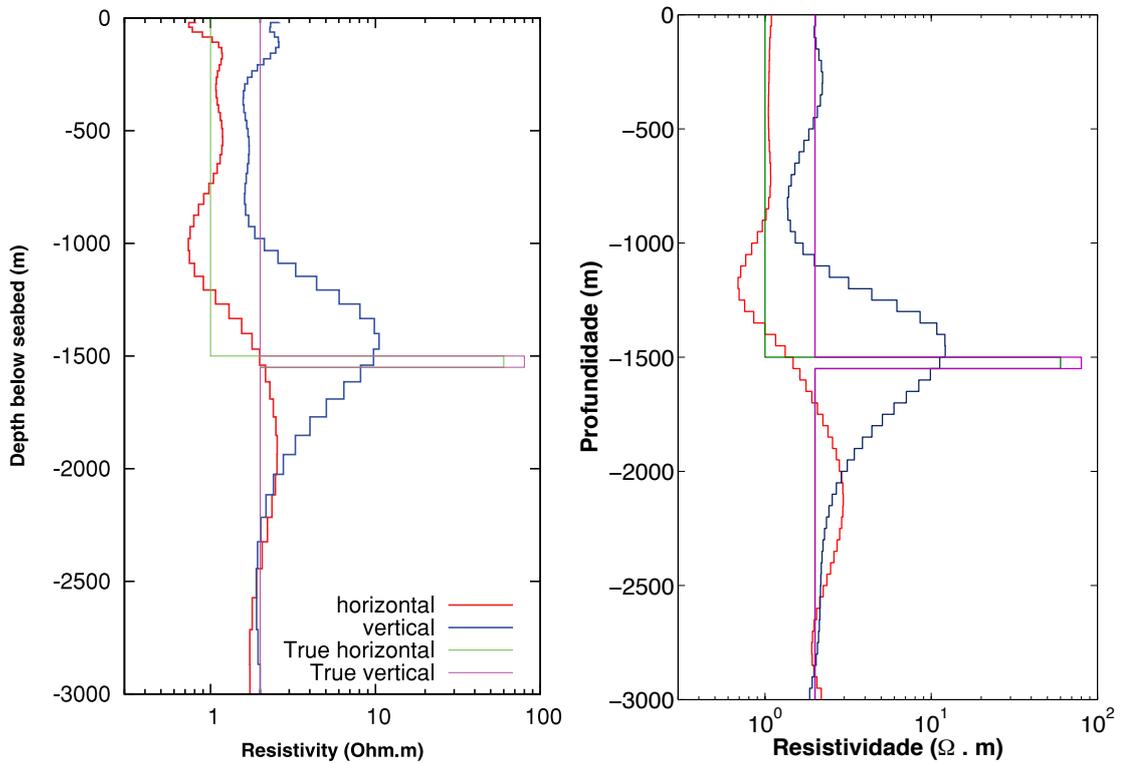


Figura 2: Resultado apresentado por Ramananjaona *et al.* (2011) com o vínculo de suavidade global do lado esquerdo da figura e o resultado que conseguimos com o vínculo de suavidade global do lado direito

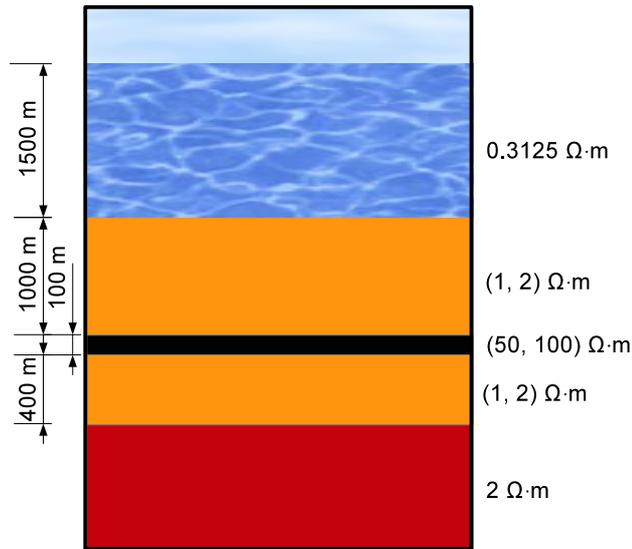


Figura 3: Modelo 1D usado para gerar os dados a serem invertidos

Uma característica notável destes dados é que eles são apenas ligeiramente afetados pela componente horizontal da condutividade anisotrópica, como mostrado por Ramananjaona *et al.* (2011) e Wiik *et al.* (2011). Isso acontece, devido a distribuição do campo eletromagnético gerado por um dipolo elétrico, onde as linhas de campo incidem, em sua maioria, de forma perpendicular às camadas. Por conseguinte, os modelos estimados não recuperam a componente horizontal da condutividade anisotrópica com precisão, mesmo quando os limites do alvo resistivo são bem definidos.

A Figura 4 mostra os resultados obtidos somente com a aplicação do regularizador de suavidade global na condutividade horizontal e na condutividade vertical, entre as camadas. Neste caso, embora a solução seja estável, o modelo resultante não representa a verdadeira descontinuidade presente no modelo original. Este é um resultado muito semelhante ao apresentado por Ramananjaona *et al.* (2011).

A Figura 5 mostra que, por adição de vínculos de igualdade entre as duas condutividades da mesma camada do modelo interpretativo, a resolução do embasamento isotrópico é melhorada, o que, por sua vez, ajuda a melhorar a resolução do alvo resistivo e as primeiras camadas anisotrópicas de sedimentos.

O uso somente do regularizado VT resulta em uma melhor identificação do topo da camada resistiva, como mostrado na Figura 6. Neste caso, apesar de melhorar a identificação da camada resistiva, na resistividade vertical, os dados não têm informação suficiente para reconstruir o modelo original para a resistividade horizontal.

O uso do VT mais o vínculo de igualdade entre as duas condutividades de cada camada resulta em uma melhor identificação da camada resistiva tanto para a componente vertical quanto na horizontal, como mostra a Figura 7. Neste caso, por não penalizar a variação brusca da condutividade, o modelo resultante pode determinar os limites da camada resistiva com precisão.

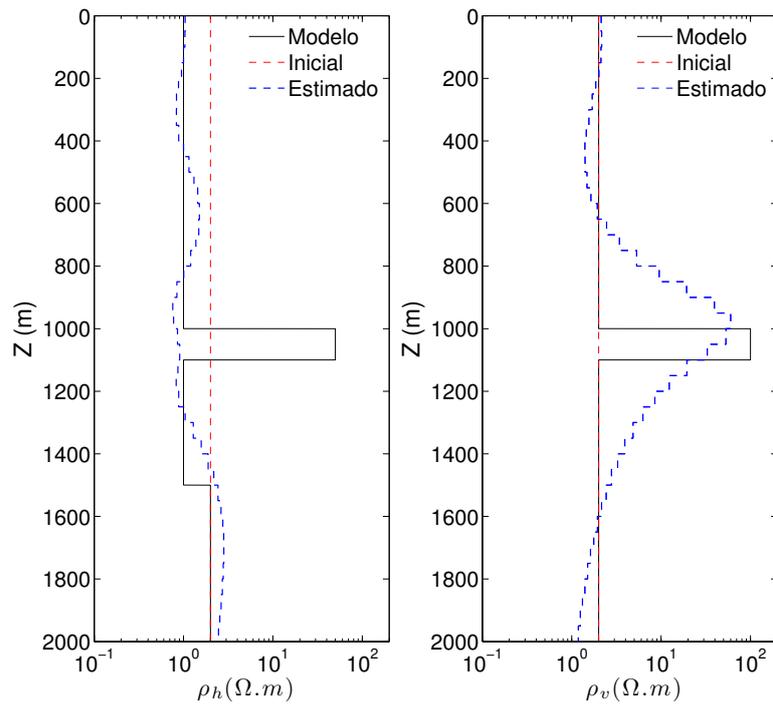


Figura 4: Resultado obtido com a aplicação somente do regularizador de suavidade global

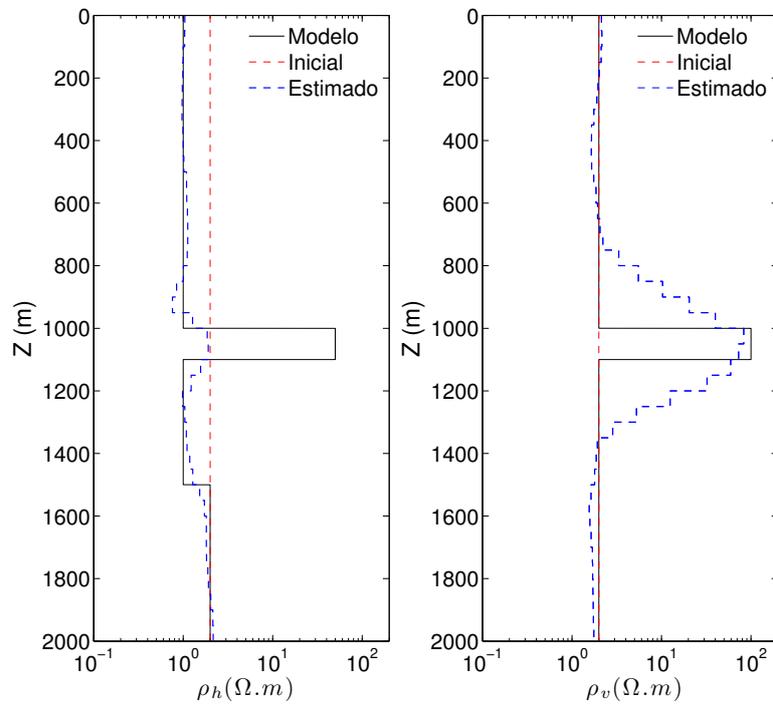


Figura 5: Resultado obtido com o vínculo de igualdade entre as duas condutividades de cada camada e a suavidade global

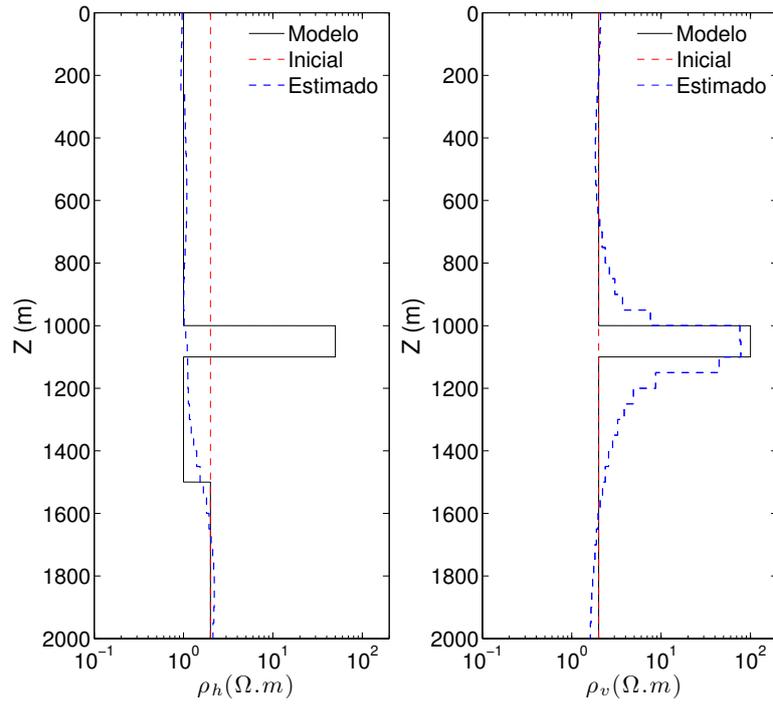


Figura 6: Resultado somente com o regularizador de variação total

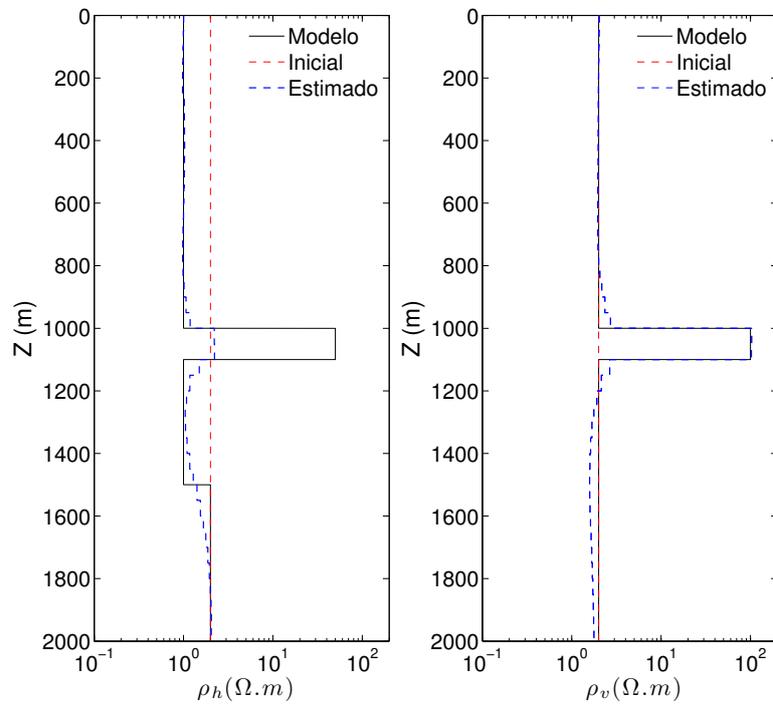


Figura 7: Resultado obtido com o vínculo de igualdade entre as duas condutividades de cada camada e de variação total

Os resultados na componente horizontal da resistividade mostram que entre a terceira camada e o embasamento, a mudança nos valores de resistividade é suave mesmo para o VT. Isso acontece porque a mudança nos valores de resistividade é de apenas $1.0\Omega \cdot m$, assim, devido a baixa resolução nos dados, o método não tem informações o suficiente para identificar a interface.

Para exemplificar vamos usar o modelo geológico mostrado na Figura 8. Agora o que era o embasamento se tornou uma camada com $450m$ de espessura e o embasamento ficou com uma resistividade de $10.0\Omega \cdot m$. A Figura 9 mostra que a componente horizontal da resistividade consegue agora identificar a interface entre a quarta camada e o embasamento, entretanto a componente vertical mostra uma maior dificuldade, ficando em uma média entre as condutividades das três últimas camadas. Este resultado mostra que embasamentos resistivos tendem a mascarar a camada alvo quando localizados próximos a ela. Efeito que é observado apenas na componente vertical da resistividade, já que a componente horizontal não consegue identificar a presença da camada alvo.

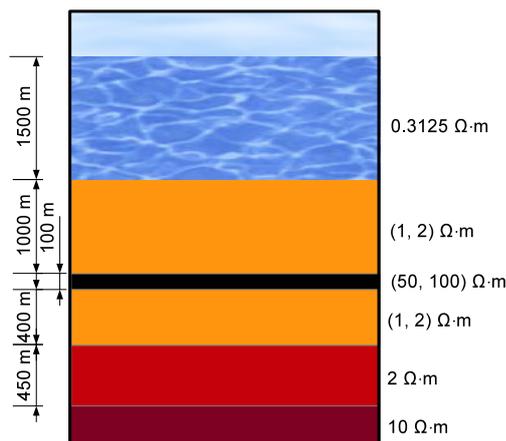


Figura 8: Modelo 1D usado para gerar os dados a serem invertidos com um embasamento mais resistivo.

Adicionando o vínculo de igualdade entre as duas condutividades de cada camada resulta em uma melhor identificação na componente vertical da resistividade abaixo da camada alvo, com mostra a Figura 10.

Resultados similares são apresentados na Figura 12, onde a inversão foi realizada com dados provenientes de meio isotrópico (Figura 11). Neste caso, embora a solução seja estável, o modelo resultante da inversão com a suavidade global não representa a verdadeira descontinuidade presente no modelo original. Enquanto que o uso regularizado VT resulta em uma melhor identificação da camada resistiva.

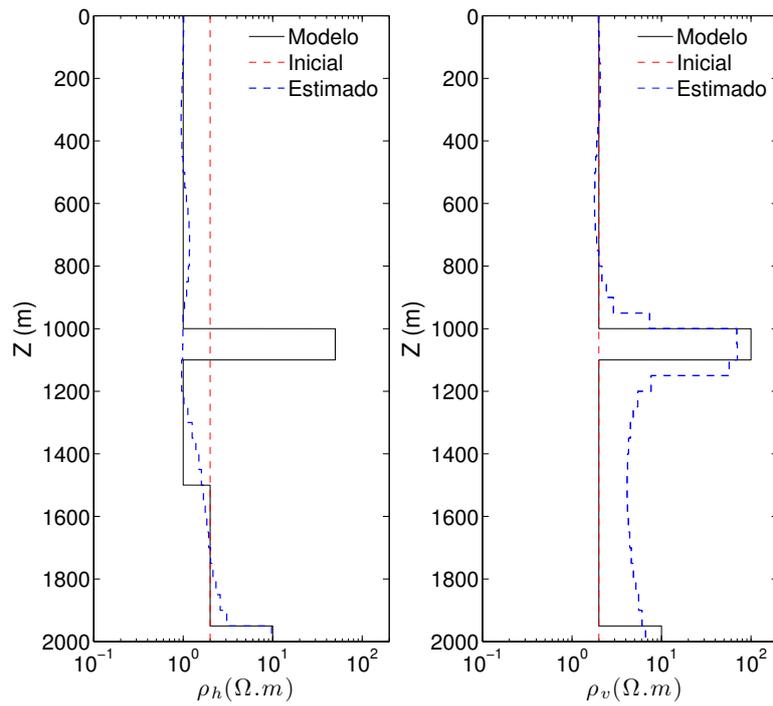


Figura 9: Resultado somente com o regularizador de variação total com embasamento mais resistivo

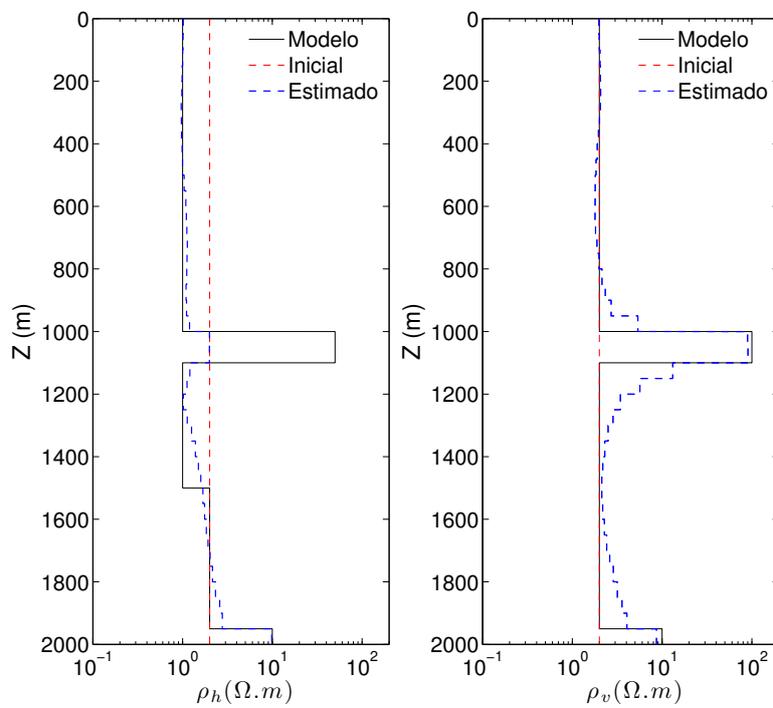


Figura 10: Resultado obtido com o vínculo de igualdade entre as duas condutividades de cada camada e de variação total com embasamento mais resistivo

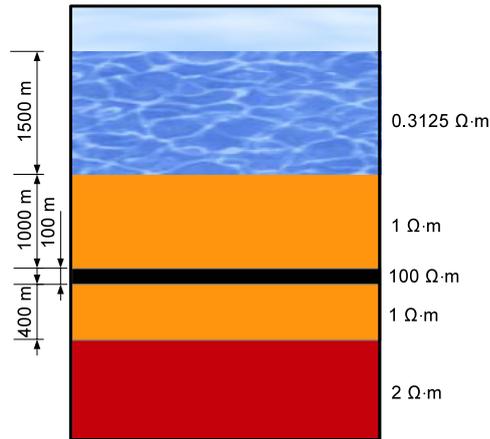


Figura 11: Modelo isotrópico 1D usado para gerar os dados a serem invertidos

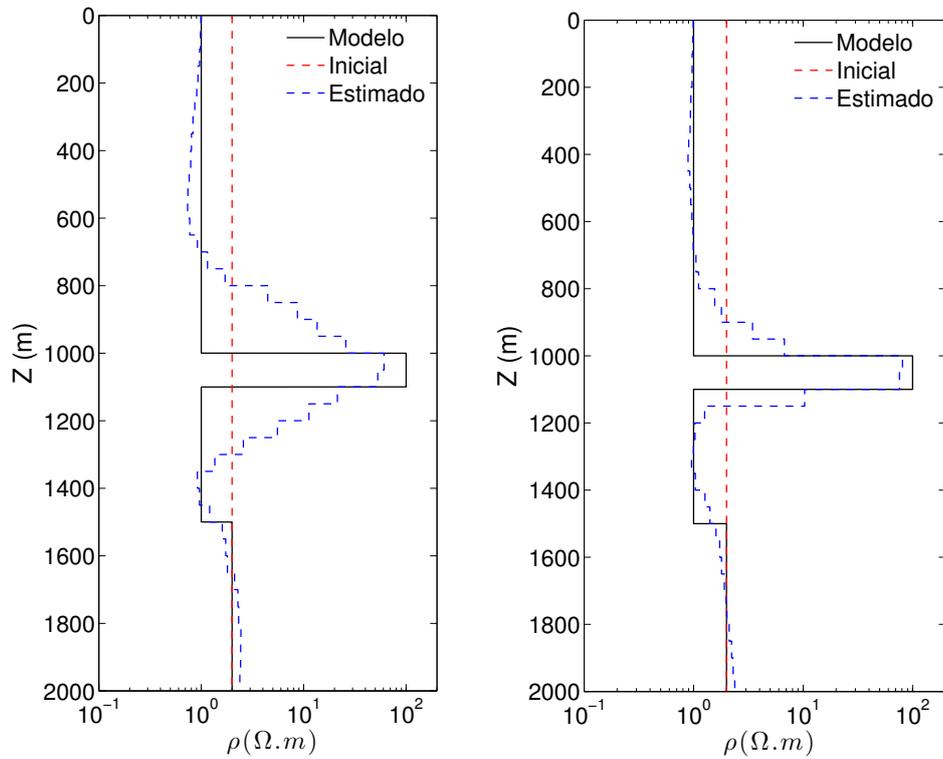


Figura 12: Resultado com o modelo isotrópico da Figura 11 com o vínculo de suavidade global do lado esquerdo da figura e com o vínculo de variação total do lado direito

Conclusão

A aplicação do método “Variação Total” resultou em uma melhor identificação do alvo resistivo neste problema 1D, em comparação com a simples aplicação de vínculos de suavidade da forma tradicional. Embora o método de TV por si só não seja suficiente para alcançar a solução exata do modelo, ele melhora os resultados, permitindo variações bruscas nos parâmetros, enquanto continua a aplicar a igualdade entre os parâmetros adjacentes, onde quer que seja exigido pelo ajuste das observações.

A adição do vínculo de igualdade entre as componentes da condutividade anisotrópica da mesma camada não só melhora a identificação do alvo resistivo, como também das camadas de sedimentos e principalmente a resistividade vertical do embasamento.

Estes resultados são muito promissores, considerando que nenhum vínculo de igualdade absoluta foi usado. Eles representam o primeiro passo em uma pesquisa que vai estudar a aplicação deste tipo de vínculo para problemas 2D e 3D.

Referências Bibliográficas

- Acar, R., & Vogel, C. R. 1994. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, **10**, 1217–1229.
- Almeida, Frayzer Lima de, & Rijo, Luiz. 2011. Modelagens direta e inversa de dados mCSEM 3D. *Revista Brasileira de Geofísica*, **29**(06), 289 – 308.
- Christensen, Niels B., & Dodds, Kevin. 2007. 1D inversion and resolution analysis of marine CSEM data. *Geophysics*, **72**(2), WA27–WA38.
- Constable, S. C., Parker, R. L., & Constable, C. G. 1987. Occam’s inversion: a practical algorithm for generating smooth models from EM sounding data. *Geophysics*, **52**(3), 289–300.
- Farquharson, C. G., & Oldenburg, D. W. 1998. Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure. *Geophys. J. Int.*, **134**, 213–227.
- Kaufman, A.A., & Dashevsky, Yu. A. (eds). 2003. *Chapter 11 The influence of anisotropy on the field of the magnetic dipole in a conducting medium*. Methods in Geochemistry and Geophysics, vol. 38. Elsevier.
- Key, Kerry. 2009. 1D inversion of multicomponent, multifrequency marine CSEM data: Methodology and synthetic studies for resolving thin resistive layers. *Geophysics*, **74**(2), F9–F20.
- Lima, Williams A., Martins, Cristiano M., Silva, Joao B. C., & Barbosa, Valeria C. F. 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 2 — Physicogeologic meaning and comparisons with previous inversion methods. *Geophysics*, **76**(1), I13–I20.
- Marquardt, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**(2), 431–441.
- Martins, Cristiano M., Lima, Williams A., Barbosa, Valeria C. F., & Silva, Joao B. C. 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 — Mathematical details and applications. *Geophysics*, **76**(1), I1–I12.

- Ramananjaona, Christophe, MacGregor, Lucy, & Andréis, David. 2011. Sensitivity and inversion of marine electromagnetic data in a vertically anisotropic stratified earth. *Geophysical Prospecting*, **59**(2), 341–360.
- Régis, Cícero, da Cruz Luz, Edelson, & Costa, Marcus Danilo. 2010. Inversion of anisotropic MT data using approximate equality constrains. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, **29**(1), 900–904.
- Weiss, Chester J., & Constable, Steven. 2006. Mapping thin resistors and hydrocarbons with marine EM methods: Insights from 1D modeling. *Geophysics*, **71**, 43–51.
- Wiik, T., Løseth, L., Ursin, B., & Hokstad, K. 2011. TIV contrast source inversion of mCSEM data. *GEOPHYSICS*, **76**(1), F65–F76.

Inversão de dados Magnetotelúricos com o regularizador Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada

Resumo

Este trabalho mostra a utilização de um funcional regularizador, na inversão de dados magnetotelúricos, com base no conceito da variação total de uma função. A função objetivo a ser minimizada neste método é a soma de uma função que mede o desajuste entre os dados estimados e as observações mais uma função, que é a versão discreta do operador variação total, aplicada aos parâmetros de inversão a serem estimados. O regularizador de variação total permite modelos menos suaves a serem alcançados, porque na norma L_1 , a medida de desajuste entre os pares de parâmetros adjacentes, dará o mesmo valor se a variação dos parâmetros é suave ou se a variação é abrupta, o que não é o caso se o mesmo desajuste é medido na norma L_2 , pois em uma distribuição suave a medida do desajuste é menor, sendo assim favorecida pela minimização desta norma. O uso deste regularizador permite uma melhor estimativa do tamanho de um corpo resistivo em sedimentos condutivos ou um corpo condutivo em sedimentos resistivos. A construção da matriz de sensibilidade (Jacobiana) é um dos principais gargalos no processo de inversão de dados de MT. O seu cálculo é feito geralmente por diferenças finitas, e toma a maior parte do tempo na inversão. Aqui vamos construir uma aproximação da matriz 2D MT sensibilidade com o método dos campos adjuntos. Os resultados assim obtidos são muito semelhantes aos da matriz de sensibilidade calculada por diferenças finitas, mas demandam um tempo de computacional muito menor.

Introdução

A inversão de dados magnetotélúricos (MT) é uma tarefa difícil, devido à baixa resolução inerente à utilização de campos electromagnéticos de baixa frequência. Tradicionalmente, vínculos de norma L_2 são aplicados para estabilizar a solução. Tais vínculos aplicam a mínima norma euclidiana no espaço dos parâmetros, portanto, eles geram soluções “suaves”, no sentido de que os valores de parâmetros vizinhos possam variar o mínimo possível. No entanto, a aplicação da suavidade global pode conduzir a soluções geológica que estão fora da realidade, já que algumas estruturas geológicas frequentemente mostram descontinuidades.

Tradicionalmente, a medida do desajuste dos dados, bem como a da estrutura do modelo, é na norma L_2 . Farquharson & Oldenburg (1998) apresentaram uma extensa análise dos efeitos do uso das normas L_1 e L_2 na inversão de dados EM, e mostram que a L_2 geralmente leva a suavizar as soluções. Nós apresentamos uma solução estável para a inversão dos dados MT que permite variações bruscas na condutividade do modelo estimado do subsolo. Esta solução encontra-se com a aplicação do regularizador Variação Total (VT), tal como apresentado em Martins *et al.* (2011) e Lima *et al.* (2011) no contexto de inversão de dados da gravimetria. O método impõe vínculos de igualdade entre os pares de parâmetros adjacentes no modelo interpretativo, e minimiza a norma L_1 da diferença entre esses parâmetros em uma inversão usando o método de Gauss-Newton com a estratégia de Marquardt.

Aplicamos o esquema de inversão a dados MT 2D sintéticos. Mostramos aqui dois exemplos: 1 - dados gerados por um modelo constituído por um corpo condutivo em um meio resistivo, e 2 - dados gerados por um modelo com geometria semelhante ao primeiro, mas com o contraste de resistividade invertido, um corpo resistivo em um meio encaixante condutivo.

O modelo interpretativo da terra é construído com um *grid* retangular. O método inverte a resistividade de cada célula do grid. Para o modelo interpretativo ser uma representação útil da Terra, o número de parâmetros a ser estimado é geralmente muito alto. Por isso, a inversão leva muito tempo, principalmente na tarefa de calcular numericamente as derivadas para construir a matriz de sensibilidade utilizada no método de Gauss-Newton. Para superar esta dificuldade, nós aplicamos o método de Estados Adjuntos (Farquharson & Oldenburg, 1996) para estimar as derivadas com a ajuda de fontes auxiliares em cada ponto de observação. As sensibilidades assim obtidas são uma boa aproximação e são calculadas em um tempo muito inferior quando comparado com o cálculo tradicional, que aproxima as derivadas com diferenças.

A comparação entre os resultados obtidos com o regularizador VT e os obtidos com a suavidade global mostram que o VT produz uma imagem mais nítida da distribuição de resistividade em nossos modelos.

Construção da Matriz de Sensibilidade

Na inversão de dados magnetotelúricos, em que o domínio de parâmetros é discretizado em uma malha retangular, os nossos parâmetros são as resistividades das células. Estes parâmetros irão construir os modelos para gerar dados, que devem coincidir com as observações, que neste caso são os valores de resistividade aparente e fase.

A maneira mais direta para construir a matriz de sensibilidade em qualquer processo de inversão é através do cálculo aproximado de derivadas através de diferenças finitas. Vamos nos referir a esse processo como cálculo de sensibilidades pela “força bruta”.

Representamos as observações por y_i e os parâmetros, que são as condutividades de cada célula de inversão, por σ_k . O cálculo da derivada de determinada observação em relação a um parâmetro por força bruta é efetuado a partir de uma variação pequena no valor do parâmetro no modelo gerado por cada iteração. Por exemplo, para uma variação de um por cento:

$$\Delta\sigma_k = 0.01\sigma_k \quad (1)$$

$$\frac{\partial y_i(\sigma, \omega)}{\partial \sigma_k} = \frac{y_i(\sigma_{(\sigma_k + \Delta\sigma_k)}, \omega) - y_i(\sigma_{(\sigma_k - \Delta\sigma_k)}, \omega)}{2\Delta\sigma_k}. \quad (2)$$

Calcular as derivadas desta forma pode ser uma tarefa extremamente demorada, porque temos de construir e resolver todo um problema 2D muitas vezes, ou seja, o número de frequências vezes o dobro do número de parâmetros. Para um problema em 3D, o tempo total cresce exponencialmente.

A fim de evitar um enorme tempo computacional no cálculo da matriz de sensibilidade, pode-se fazer uso de fontes auxiliares, tanto elétricas como magnéticas, como mostrado no trabalho de McGillivray *et al.* (1994), que descreve o método de Estados Adjuntos aplicado a problemas eletromagnéticos no domínio da frequência, usado por Han *et al.* (2008) e Farquharson & Oldenburg (1996) no cálculo uma matriz de sensibilidade aproximada para a inversão de dados do magnetotelúrico 3D e 2D, respectivamente.

Para uma breve revisão vamos adotar que em todo o nosso domínio Ω a condutividade σ varia em função da posição, mas a permissividade elétrica ϵ e a permeabilidade magnética μ permanecem constantes. No levantamento geofísico temos as fontes de corrente elétrica ou magnética \mathbf{J}_s e \mathbf{M}_s usadas para gerar os campos elétricos \mathbf{E} e magnéticos \mathbf{H} , que satisfazem as equações de Maxwell, e as condições de fronteira.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{M}_s \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (4)$$

Na inversão, vamos representar a condutividade como uma combinação linear de fun-

ções bases ψ_k :

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sigma_k \psi_k(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Em situações típicas, nas quais o modelo é composto por blocos com condutividade uniforme, a função ψ_k é constante e igual a 1, dentro da célula k e zero em todo o restante do domínio Ω . Substituindo (5) em (3) e (4), e derivando com relação a σ_k temos:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma_k} = -i\omega\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \sigma_k}, \quad (6)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \sigma_k} = (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma_k} + \psi_k \mathbf{E} \quad (7)$$

As derivadas parciais $\partial \mathbf{E} / \partial \sigma_k$ e $\partial \mathbf{H} / \partial \sigma_k$, são as sensibilidades dos campos elétrico e magnético em relação a σ_k . O modelo direto é normalmente calculado estendendo o domínio discretizado até pontos suficientemente distantes das heterogeneidades bidimensionais para que se possam aplicar condições de fronteira homogêneas, logo as sensibilidades calculadas acima também satisfazem a forma homogênea da condição de fronteira.

Considere agora um problema auxiliar em que os campos elétrico $\tilde{\mathbf{E}}$ e magnético $\tilde{\mathbf{H}}$, são gerados no domínio Ω por novas fontes elétrica $\tilde{\mathbf{J}}_s$ e magnética $\tilde{\mathbf{M}}_s$.

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{M}}_s \quad (8)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = (\sigma + i\omega\epsilon) \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}_s \quad (9)$$

Estes campos satisfazem as condições de fronteira homogênea, se Ω é finito as condições de fronteira são as mesmas que a da sensibilidade, mas não são necessariamente as mesmas se Ω se estende ao infinito. Por exemplo, se o nosso problema original é o magnetotelúrico, por mais que eu tenha uma malha que se estenda ao infinito, o campo eletromagnético nunca será zero, enquanto que o campo no infinito proveniente das fontes auxiliares, que geralmente são dipolos elétricos e magnéticos, é igual a zero.

Usamos a seguinte identidade vetorial para os campos definidos por (6), (7), (8) e (9).

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

e integramos sobre o domínio Ω usando o teorema do divergente.

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{\mathbf{M}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \sigma_k} + \tilde{\mathbf{J}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma_k} \right) dv = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} \psi_k dv \quad (11)$$

Onde, $\tilde{\mathbf{M}}_s$ e $\tilde{\mathbf{J}}_s$ são as fontes magnética e elétrica, respectivamente, e ψ_k são as funções base usadas para definir os sub-domínios onde as integrais são realizadas.

Ao definir as fontes adjuntas apropriadas, somos capazes de calcular a sensibilidade

dos campos magnético \mathbf{H} e elétrico \mathbf{E} . Por exemplo, para obter a sensibilidade de H_y em relação a condutividade σ_k , procedemos da seguinte forma: como o nosso dado é a componente H_y do campo magnético, vamos usar como fonte adjunta uma fonte dipolar magnética, com momento de dipolo orientado na direção y e localizada no ponto onde foi efetuada a medida do dado: $\tilde{\mathbf{M}}_s = \delta(x - x_0)\hat{y}$, e $\tilde{\mathbf{J}}_s = 0$. Então a equação 11 torna-se

$$\frac{\partial H_y(x_0)}{\partial \sigma_k} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} \psi_k dv \quad (12)$$

Em que $\tilde{\mathbf{E}}$ é definido como o campo elétrico no domínio Ω devido a um dipolo magnético orientado na direção y com um momento unitário, localizado na posição de medida, e \mathbf{E} é o campo elétrico no domínio Ω devido a onda plana proveniente do campo magnetotelúrico no modo TM (transversal magnético). Dessa forma conseguimos a sensibilidade da medida de H_y em relação à condutividade do bloco k .

Para o problema magnetotelúrico bi-dimensional, a integral na equação 12 muda de volume para área, onde era um bloco, passa a ser uma célula retangular no nosso modelo de inversão, transformando a função $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z)$ em uma função de duas variáveis $\tilde{\mathbf{E}}'(x, z)$ (Farquharson & Oldenburg, 1996):

$$\frac{\partial H_y(x_0)}{\partial \sigma_k} = \int_A \tilde{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{E} ds \quad (13)$$

No caso em que o dado é a componente E_x do campo elétrico, usamos uma fonte elétrica como a nossa fonte adjunta, fazendo $\tilde{\mathbf{J}}_s = \delta(x - x_0)\hat{x}$ e $\tilde{\mathbf{M}}_s = 0$. Como agora estamos usando a componente do campo elétrico que está na direção x , a fonte adjunta deve estar na mesma direção. Assim, a sensibilidade para a componente E_x em relação a σ_k no local da observação x_0 torna-se:

$$\frac{\partial E_x(x_0)}{\partial \sigma_k} = \int_A \tilde{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{E} ds \quad (14)$$

Agora $\tilde{\mathbf{E}}'$ é o campo elétrico na célula k devido a um dipolo elétrico localizado na posição de medida e orientado na direção x , enquanto que \mathbf{E} na célula k continua sendo o campo elétrico devido a onda plana proveniente do magnetotelúrico com o modo TM (transversal magnético).

No modo transversal magnético (TM) em relação a direção x , a resistividade aparente e a fase são dadas por

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2 \quad \phi = \arctan \left(\frac{\Im m(E_x/H_y)}{\Re e(E_x/H_y)} \right)$$

Para determinarmos a sensibilidade precisamos derivar a resistividade aparente e a fase, em relação a condutividade.

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \sigma_k} = \frac{2}{\omega \mu} \left| \frac{E_x}{H_y} \right| \left\{ \frac{1}{|H_y|} \frac{\partial |E_x|}{\partial \sigma_k} - \frac{|E_x|}{|H|^2} \frac{\partial |H_y|}{\partial \sigma_k} \right\} \quad (15)$$

Considere a seguinte razão,

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \frac{|\mathbf{E}| e^{i\Phi_E}}{|\mathbf{H}| e^{i\Phi_H}} = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| e^{i(\Phi_E - \Phi_H)} \quad (16)$$

por definição

$$\phi = \Phi_{\mathbf{E}} - \Phi_{\mathbf{H}} \quad (17)$$

logo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial \Phi_{\mathbf{E}}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial \Phi_{\mathbf{H}}}{\partial \sigma_k} \quad (18)$$

Onde de acordo com Farquharson & Oldenburg (1996) as sensibilidades para o módulo e a fase de um campo C (elétrico ou magnético) é dado da seguinte forma:

$$\frac{\partial |C|}{\partial \sigma_k} = \Re e \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \sigma_k} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Phi_C}{\partial \sigma_k} = \Im m \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \sigma_k} \right) \quad (20)$$

Substituindo as equações acima em (15) e (18), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_a}{\partial \sigma_k} &= 2\rho_a \left\{ \Re e \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \sigma_k} \right) - \Re e \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k} \right) \right\} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_k} &= \Im m \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \sigma_k} \right) - \Im m \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k} \right) \end{aligned}$$

Resultados para a sensibilidade

Para uma análise da sensibilidade dos dados em relação a condutividade, vamos considerar o modelo 2D mostrado na Figura 1, o qual foi baseado no modelo de Farquharson & Oldenburg (1996). Discretizamos o modelo com células retangulares de condutividade uniforme. Neste exemplo, vamos ter apenas uma observação: o valor da resistividade aparente, tomada na posição em superfície, no local onde se encontra o triângulo amarelo, exatamente sobre o ponto central do corpo, em $x = 0$, a uma frequência de 0.2 Hz. Para ilustrar a utilização do método nós calculamos a sensibilidade da resistividade aparente em relação à condutividade de cada uma das 840 células utilizadas na discretização do modelo.

A sensibilidade aproximada calculada com os campos adjuntos para um semi-espaço homogêneo (Figura 3) mostra ser uma excelente aproximação, mantendo a maior parte das características, quando comparada com a sensibilidade calculada na "força bruta" (Figura

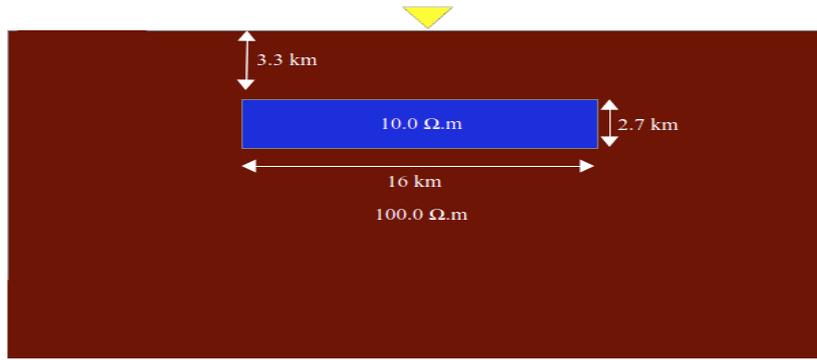


Figura 1: Primeiro modelo geológico.

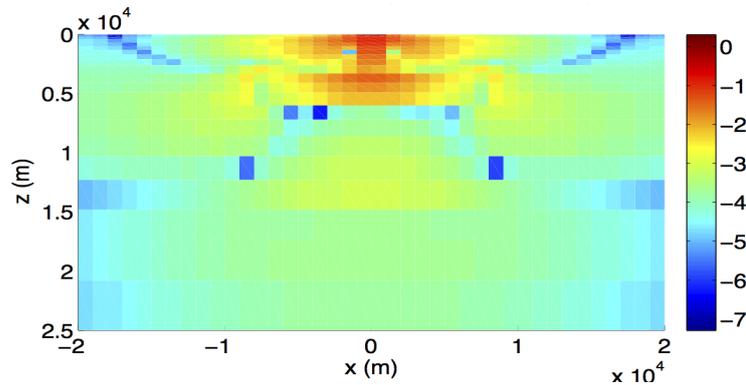


Figura 2: Sensibilidade da resistividade aparente na posição x_0 , no modo TM, para o modelo geológico mostrado na figura 1. A figura mostra a $\log_{10}|\partial \ln \rho_a / \partial \ln \sigma|$ calculada na força bruta.

2). O tempo para computar a matriz de sensibilidade com os campos adjuntos é muito inferior, quando comparado a força bruta, sendo que, a sensibilidade calculada para 840 parâmetros leva aproximadamente 12.5 minutos na força bruta em um laptop, enquanto que o tempo com os campos adjuntos levou menos de 0.5 segundos.

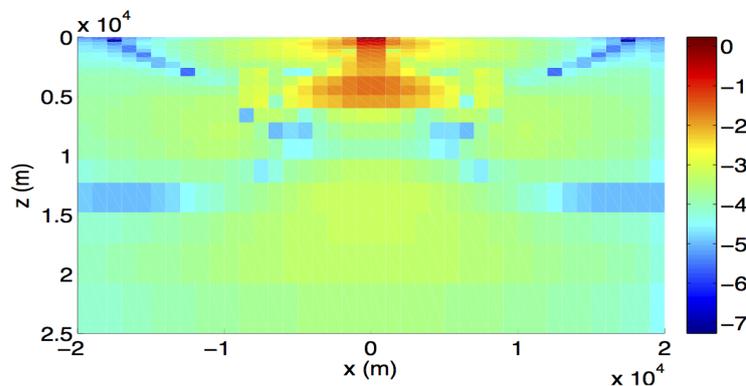


Figura 3: Sensibilidade aproximada do MT para o modelo geológico mostrado na figura 1. A figura mostra a $\log_{10}|\partial \ln \rho_a / \partial \ln \sigma|$ calculada com o método dos estados adjuntos.

Inversão

O conjunto de parâmetros m_j a ser estimado forma o vetor \mathbf{m} , que representam as resistividades das células que formam o modelo interpretativo. A função objetivo de \mathbf{m} a ser minimizada é

$$\Phi(\mathbf{m}) = \phi^d(\mathbf{m}) + \gamma\phi^m(\mathbf{m}) \quad (21)$$

em que ϕ^d expressa o desajuste entre os dados observados e os dados calculados, e $\phi^m(\mathbf{m})$ é o funcional usado para introduzir o vínculo estabilizador.

Os dados a serem invertidos são a resistividade aparente e a fase. O funcional ϕ^d usado é normalizado pelas observações.

$$\phi^d(\mathbf{m}) = \|(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m}))\|_2 \quad (22)$$

Onde $\bar{\mathbf{y}}$ é um vetor em que todas as componente são iguais a 1 e $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$ é um vetor em que as componentes são dadas pela razão entre os dados calculados e os observados (Almeida & Rijo (2011)).

O primeiro funcional regularizador que usamos é a versão discreta da função variação total, que é definida em Martins *et al.* (2011); Lima *et al.* (2011) e Acar & Vogel (1994). Nós aplicamos essa definição para a função que descreve a distribuição de condutividade através das células do modelo. A inversão minimiza essa função junto com a medida de desajuste dos dados.

O regularizador Variação Total força a igualdade entre os valores de condutividade entre as células adjacente na direção horizontal ou vertical. Para as células i e j , a relação expressa pelo vínculo é $\sigma^{(i)} - \sigma^{(j)} = 0$. Essa relação entra como uma função estabilizadora na forma da matriz \mathbf{S} , cuja as linhas são formadas por zeros, exceto nas posições dos dois parâmetros que queremos vincular. Por exemplo, se os parâmetros i e j devem ter os seu valores o mais próximo possível um do outro, a matriz deve ter uma linha na forma $[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ \dots \ 0 \ 0]$ onde os números 1 e -1 estão nas posições i e j , repectivamente.

Enquanto o desajuste dos dados são medidos na norma L_2 , o afastamento da igualdade expressa em \mathbf{S} é medido na norma L_1 ($\|\cdot\|_1$):

$$\phi^{VT} = \|\mathbf{S} \mathbf{m}\|_1. \quad (23)$$

O parâmetro de regularização γ são usados para dar um peso a essa informação *a priori*. Esses parâmetros devem ser o menor possível, mas que ainda possam conduzir a uma solução estável.

Por definição de norma, a função ϕ^{VT} , para M linhas e N colunas, com um total de $M \times N$ parâmetros, deve ser escrita como:

$$\phi^{VT} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N-1} |\sigma^{(i,j)} - \sigma^{(i,j+1)}|. \quad (24)$$

Entretanto, essa função não é diferenciável quando a diferença entre os parâmetros é igual a zero. Para evitar esse comportamento, a função foi modificada por (Acar & Vogel, 1994) aproximando as diferenças por

$$|\sigma^{(i,j)} - \sigma^{(i,j+1)}| \approx \left[(\sigma^{(i,j)} - \sigma^{(i,j+1)})^2 + \beta \right]^{1/2}, \quad (25)$$

em que β é um número positivo pequeno.

O segundo funcional regularizador ϕ^m através do qual introduzimos informação *a priori* é o regularizador de suavidade global ϕ^{SG} , na norma L_2

$$\phi^{SG} = \|\mathbf{S} \mathbf{m}\|_2. \quad (26)$$

Sendo \mathbf{S} , a mesma matriz usada no regularizador de variação total.

Agora, para implementar o método Gauss-Newton, precisamos construir o vetor gradiente \mathbf{g} e a matriz Hessiana \mathbf{H} associada com essa função modificada. Martins *et al.* (2011) apresentam uma análise detalhada para estas construções. A solução desse problema não linear é encontrada de forma iterativa pelo método Gauss-Newton usando a estratégia de Marquardt (1963). Primeiro expande-se $\Phi^m(\mathbf{m})$ em série de Taylor em torno da aproximação $\hat{\mathbf{m}}_k$, obtida na k -ésima iteração, conservando apenas os termos até segunda ordem; em seguida deriva-se a função expandida e truncada, $\Phi^m(\hat{\mathbf{m}}_k + \Delta \mathbf{m}_k)$ em relação a $\Delta \mathbf{m}_k$ e iguala-se ao vetor nulo. Desta forma, obtemos a equação normal para a estimativa de $\Delta \mathbf{m}_k$:

$$\mathbf{H}_k \Delta \mathbf{m}_k = -\mathbf{g}_k \quad (27)$$

Neste caso temos a Hessiana do funcional $\Phi(\mathbf{m})$ com os regularizadores Variação Total e Suavidade Global da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_k^{VT} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{S}^T (\gamma \mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{S} \quad (28)$$

$$\mathbf{H}_k^{SG} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (29)$$

e os vetores gradiente

$$\mathbf{g}_k^{VT} = -\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) + \gamma \mathbf{S}^T \mathbf{d} \quad (30)$$

$$\mathbf{g}_k^{SG} = -\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) + \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_k \quad (31)$$

Onde o vetor $\hat{\mathbf{m}}$ que minimiza a função $\Phi(\mathbf{m})$ é encontrado através do método de Marquardt, com o regularizador Variação Total, pela seguinte expressão.

$$\hat{\mathbf{m}}^{VT} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{S}^T (\gamma \mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) - \mathbf{S}^T \mathbf{d}] \quad (32)$$

ou, com o regularizador Suavidade Global

$$\hat{\mathbf{m}}^{SG} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) - \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_k] \quad (33)$$

A matriz \mathbf{J} é a matriz de sensibilidade (Jacobiana) normalizada pelos dados observados. \mathbf{d} é o vetor com a dimensão (L) igual a quantidade de pares de parâmetros que queremos vincular, avaliado em $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k$, cujo l -ésimo elemento é dado por

$$\mathbf{d} \equiv d_l = \frac{m_i - m_j}{[(m_i - m_j)^2 + \beta]^{\frac{1}{2}}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_k} \quad (34)$$

e \mathbf{R} é a matriz diagonal, avaliada em $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k$, cujo l -ésimo elemento da diagonal é dado por

$$\mathbf{R} \equiv R_{ll} = \frac{\beta}{[(m_i - m_j)^2 + \beta]^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_k} \quad (35)$$

O método não irá penalizar variações bruscas porque, na norma L_1 , a medida de desajuste entre os pares de parâmetros adjacentes, dará o mesmo valor se a variação dos parâmetros é suave ou se a variação é abrupta, o que não é o caso se o mesmo desajuste é medido na norma L_2 , pois em uma distribuição suave a medida do desajuste é menor, sendo assim favorecida pela minimização desta norma (Lima *et al.* (2011)). Por outro lado, a função objetivo deve ajustar as observações, o que impedirá a distribuição dos parâmetros de serem descontínuos em locais onde a descontinuidade não pode ser explicada pelos dados.

O método VT reforça a proximidade entre os parâmetros adjacentes, mas, quando a influência de uma descontinuidade é sentida nos dados, este permite mudanças abruptas sobre os parâmetros. Isso faz com que o método seja uma alternativa válida, quando os dados observados usados na inversão MT provém de um ambiente geológico com uma distribuição suave de condutividade, mas que pode apresentar descontinuidades em lugares como as interfaces entre as camadas geoeletricas.

Resultados

Primeiro modelo

O nosso primeiro teste de inversão foi realizado com um corpo condutivo de 2.7 km de espessura, 16 km de largura e com uma resistividade de 10 Ohm.m, localizado a uma profundidade de 3.3 km, dentro de um semi-espesso infinito com uma resistividade de 100 Ohm.m, como mostra a figura 1, que podem ser zonas condutivas no interior de um meio resistivo como no caso de corpos mineralizados de sulfetos. Os dados observados (resistividade aparente e fase) foram obtidos com 11 frequências entre 0.001 e 1000 Hz. Foi adicionado 2% de ruído aos dados observados. Apesar de conseguirmos uma boa convergência, com o modelo inicial sendo a resistividade do próprio semi-espaco, observamos que o resultado final do processo de inversão não define com exatidão as bordas do corpo, como mostra a Figura 4.

Foi usado o regularizador de variação total, sendo que o vínculo de igualdade foi aplicado somente na horizontal, mantendo o vínculo da última célula de cada linha a primeira célula da linha posterior.

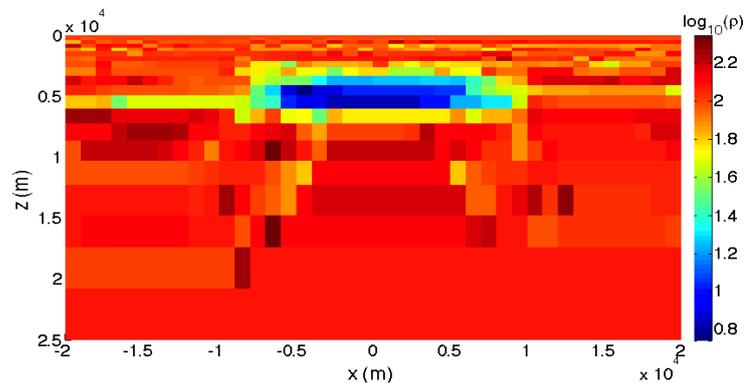


Figura 4: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 1, usando o vínculo de variação total

De acordo com Zhdanov (2002) podemos melhorar o resultado final adicionando uma matriz diagonal de peso aos parâmetros na forma

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left(\sqrt{\sum_i (\mathbf{J}_{ik})^2} \right), \quad (36)$$

onde \mathbf{J} é a matriz de sensibilidade. Essa matriz de peso tem grande influência, principalmente nas últimas iterações, onde o modelo já está previamente determinado e a matriz de sensibilidade já consegue identificar os parâmetros que formam o corpo, realçando assim essa informação. Após inserirmos a matriz de pesos aos parâmetros, a borda do corpo fica bem mais definida (Figura 5), como mostrado também por Zhdanov *et al.* (2006).

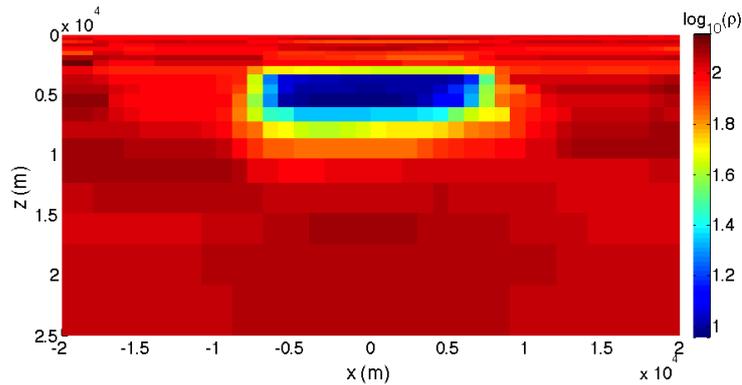


Figura 5: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 1, usando o vínculo de variação total na horizontal e adicionando a matriz de peso aos parâmetros

Segundo modelo

Após essa análise adicionamos uma camada condutiva de $10.0 \Omega \cdot m$ como embasamento, a partir de 14.8 km (figura 6), e testamos os regularizadores de suavidade global e variação total. Esse modelo é o mesmo que foi apresentado por Farquharson & Oldenburg (1996), com o resultado mostrado na Figura 7 usando o vínculo de suavidade na horizontal e na vertical.

Em nossa análise inicial aplicamos o vínculo de igualdade tanto na horizontal quanto na vertical. Se considerarmos a primeira célula da malha de inversão, por exemplo, ela está vinculada com a segunda célula na horizontal e com a segunda vertical, de tal forma que o valor da primeira célula deve ficar o mais próximo possível das outras duas. O modelo inicial foi o 1D de duas camadas. O vínculo de igualdade adicionado na vertical cria um suavização indesejada, aparecendo uma mancha entre o corpo e o embasamento. Quando usamos o regularizador de suavidade global, a suavização na vertical tende a mascarar a informação de onde se encontra a interface do embasamento com a primeira camada, como mostra a figura 8, mesmo que essa informação tenha sido dada no modelo inicial.

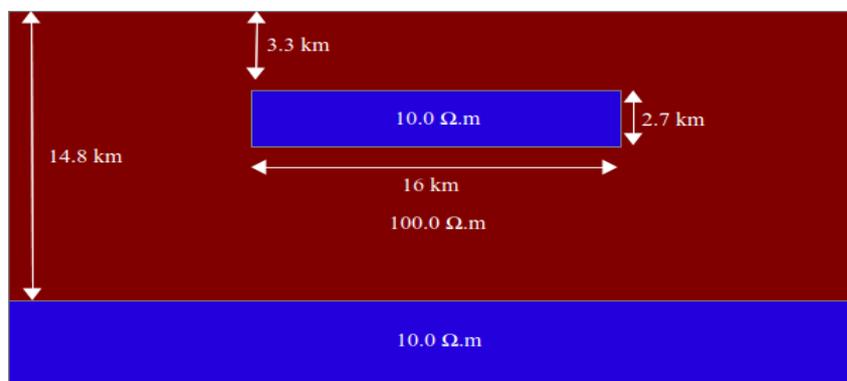


Figura 6: Segundo modelo geológico.

Os vínculos de igualdade aplicados na horizontal, tanto para suavidade global para

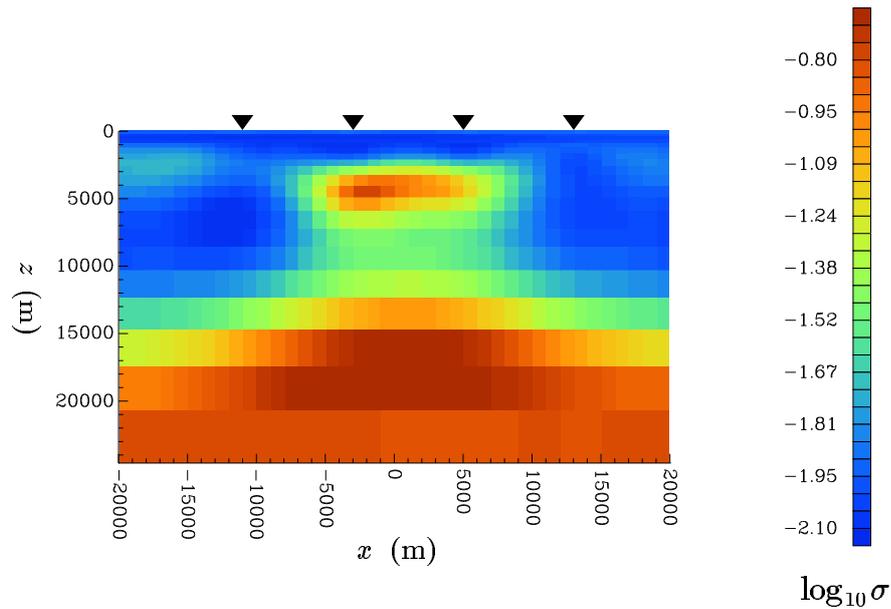


Figura 7: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 6, apresentado por Farquharson & Oldenburg (1996). Fonte: Farquharson & Oldenburg (1996)

variação total, mantiveram a vinculação da última célula de cada linha com a primeira célula da linha posterior.

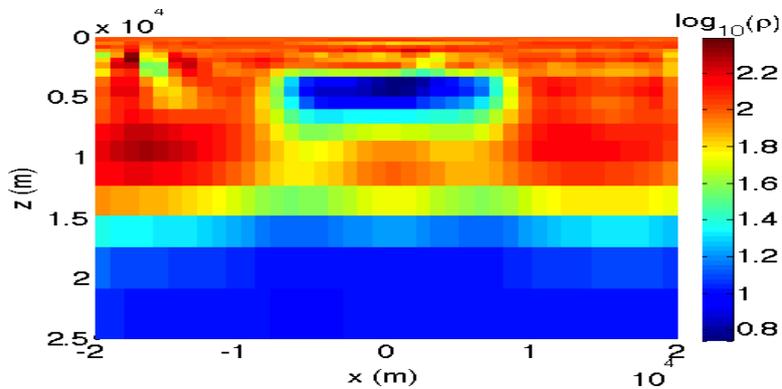


Figura 8: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 6, usando o vínculo de suavização global na horizontal e vertical, e adicionando a matriz de peso aos parâmetros.

Podemos visualizar na Figura 9, que a interface entre a primeira camada e o embasamento permanece bem definida com o uso do regularizador de variação total, exatamente por permitir variações mais abruptas entre os parâmetros adjacentes.

Retirando o vínculo que ligavam os parâmetros na vertical e quebrando o vínculo entre a última célula da primeira camada e a primeira célula da segunda camada conseguimos um melhor resultado no processo de inversão, tanto com a suavidade global (Figura 10) como com a variação total (Figura 11). Entretanto as bordas do lado direito e do lado esquerdo do corpo estão melhor definidas com o vínculo de variação total. Tanto a quebra do vínculo em um determinado ponto como a escolha de vincular as células na horizontal

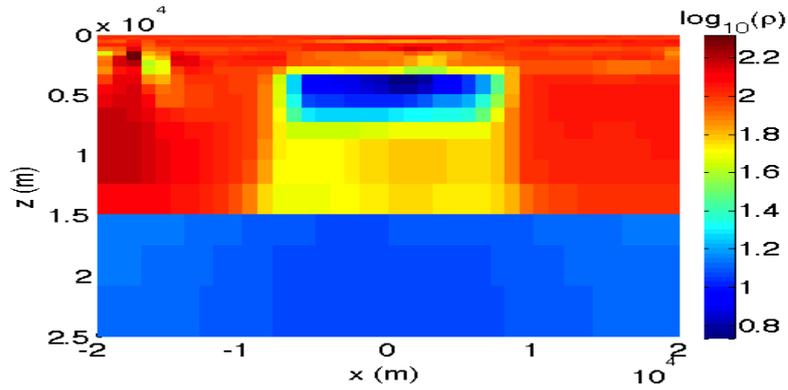


Figura 9: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 6, usando o vínculo de variação total na horizontal e na vertical, e adicionando a matriz de peso aos parâmetros

ou na vertical é melhor realizada com informações provenientes da geologia, da sísmica, perfil de poço, etc.

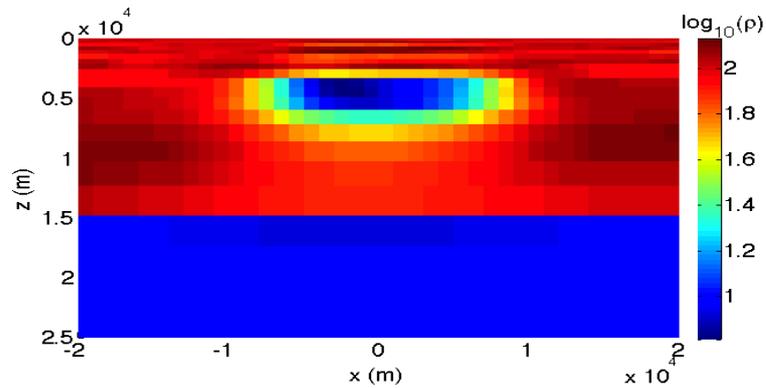


Figura 10: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 6, usando o vínculo de suavização global na horizontal e adicionando a matriz de peso aos parâmetros.

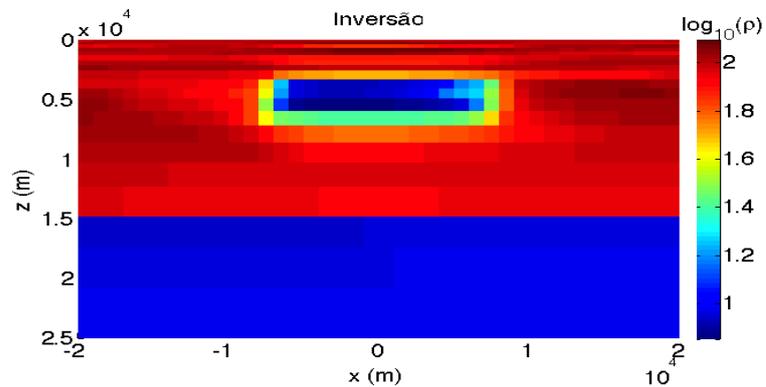


Figura 11: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 6, usando o vínculo de variação total na horizontal, e adicionando a matriz de peso aos parâmetros.

Terceiro modelo

Quando invertemos os valores das resistividades do modelo, buscando agora reconstruir um modelo no qual temos um corpo resistivo em um meio condutivo (Figura 12), como no caso de zonas com hidrocarbonetos ou de um corpo de sal no interior de sedimentos condutivos, as dificuldades para reconstruir o modelo original se tornam ainda maiores, pois como a primeira camada é condutiva, e a onda eletromagnética é mais atenuada com o aumento da condutividade ou da frequência (menor o *skin depth*), a resolução das informações contidas nos dados é ainda menor. Para este exemplo, diminuimos a frequência, pois precisamos de frequências mais baixas para obtermos informações sobre as camadas mais profundas. Neste caso, a frequência varia de 0.0001 a 100 Hz.

Os vínculos de igualdade foram aplicados somente na horizontal, mantendo o vínculo da última célula de cada linha a primeira célula da linha posterior. Entretanto este vínculo é quebrado na última célula da primeira camada e a primeira célula da segunda camada.

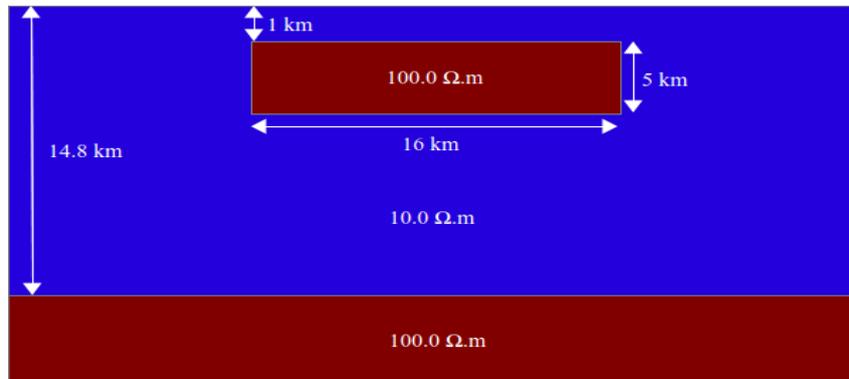


Figura 12: Terceiro modelo geológico com duas camadas e um corpo resistivo.

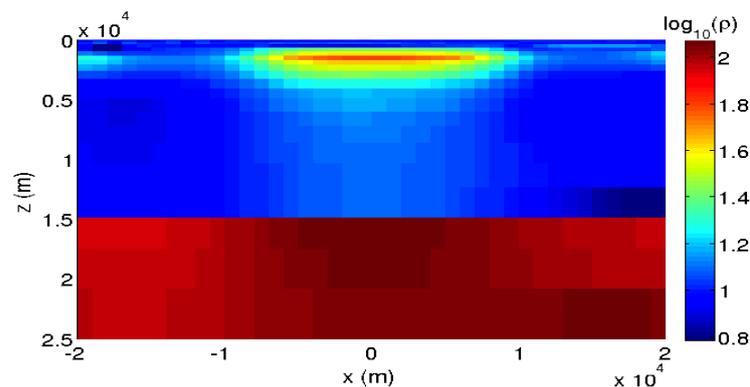


Figura 13: Resultado da inversão, para o modelo mostrado na figura 12, usando o vínculo de suavização global na horizontal e adicionando a matriz de peso aos parâmetros.

O resultado para a inversão usando o regularizador de suavidade global, consegue identificar o topo do corpo resistivo, mas devido a suavização horizontal não conseguimos identificar as bordas laterais. E devido a baixa resolução nos dados, fica ainda mais difícil localizar a base do corpo (Figura 13).

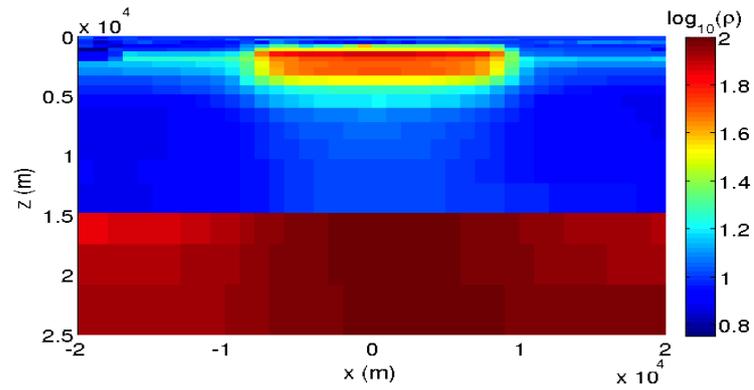


Figura 14: Resultado da inversão para o modelo mostrado na Figura 12, usando o vínculo de variação total na horizontal, e adicionando a matriz de peso aos parâmetros.

Com o regularizador de variação total, conseguimos identificar o topo do corpo resistivo e melhor identificar as bordas laterais. Mas devido a baixa resolução nos dados, a base do corpo, assim como no resultado com o regularizador de suavidade global, não é visualizada com nitidez.

Conclusão

O cálculo da matriz de sensibilidade aproximada para o MT com aplicação do método dos Estados Adjuntos proporcionou uma enorme redução no tempo computacional e se mostrou uma excelente aproximação. A aplicação dos métodos de Variação Total e de Suavidade Global mostra melhores resultados quando o vínculo de igualdade é aplicado apenas sobre a resistividade de células adjacentes na direção horizontal, devido o corpo que gerou os dados ser alongado no eixo x . O uso do regularizador Variação Total resultou em uma melhor identificação do alvo, em comparação com aplicação de vínculos de suavidade da forma tradicional. A utilização da matriz de peso dos parâmetros, utilizando a própria matriz de sensibilidade, deixa mais nítida a identificação do corpo alvo. Tanto em alvos condutivos quanto em resistivos, os métodos de Variação Total e Suavidade Global são, por si só, suficientes para alcançar a solução do modelo. Entretanto o método VT melhora os resultados nas bordas do corpo, por permitir variações abruptas nos parâmetros, enquanto continua a aplicar a igualdade entre os parâmetros adjacentes, onde quer que seja exigido pelo ajuste das observações.

Nos exemplos mostrados aqui nenhum vínculo de igualdade absoluta foi usado. Mesmo assim, o processo conseguiu resultados excelentes com relação à delimitação das fronteiras dos corpos alvo.

Referências Bibliográficas

- Acar, R., & Vogel, C. R. 1994. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, **10**, 1217–1229.
- Almeida, Frayzer Lima de, & Rijo, Luiz. 2011. Modelagens direta e inversa de dados mCSEM 3D. *Revista Brasileira de Geofísica*, **29**(06), 289 – 308.
- Farquharson, C. G., & Oldenburg, D. W. 1996. Approximate sensitivities for the electromagnetic inverse problem. *Geophysical Journal International*, **126**(1), 235–252.
- Farquharson, C. G., & Oldenburg, D. W. 1998. Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure. *Geophys. J. Int.*, **134**, 213–227.
- Han, Nuree, Nam, Myung Jin, Kim, Hee Joon, Lee, Tae Jong, Song, Yoonho, & Suh, Jung Hee. 2008. Efficient three-dimensional inversion of magnetotelluric data using approximate sensitivities. *Geophysical Journal International*, **175**(2), 477–485.
- Lima, Williams A., Martins, Cristiano M., Silva, Joao B. C., & Barbosa, Valeria C. F. 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 2 — Physicogeologic meaning and comparisons with previous inversion methods. *Geophysics*, **76**(1), I13–I20.
- Marquardt, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**(2), 431–441.
- Martins, Cristiano M., Lima, Williams A., Barbosa, Valeria C. F., & Silva, Joao B. C. 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 — Mathematical details and applications. *Geophysics*, **76**(1), I1–I12.
- McGillivray, P. R., Oldenburg, D. W., Ellis, R. G., & Habashy, T. M. 1994. Calculation of sensitivities for the frequency-domain electromagnetic problem. *Geophysical Journal International*, **116**, 1–4.
- Zhdanov, M. S., Vignoli, G., & Ueda, T. 2006. Sharp boundary inversion in crosswell travel-time tomography. *Journal of Geophysical and engineering*, **3**, 122–134.

Zhdanov, Mikhail Semenovich. 2002. *Geophysical inverse theory and regularization problems*. Vol. 36. Amsterdam: Elsevier Science.

Inversão de dados do CSEM marinho 2.5D com o regularizador Variação Total e o uso da matriz de sensibilidade aproximada

Resumo

Apresentamos neste trabalho um algoritmo para inversão 2.5D de dados provenientes de uma fonte eletromagnética controlada no domínio da frequência, sendo rebocada próximo ao assoalho oceânico. Na modelagem direta foi utilizado o método de elementos finitos. Na inversão, para reduzir o tempo computacional no cálculo da matriz de sensibilidade foi usado o método dos estados adjuntos aproximados, enquanto que para estabilizar a solução, optamos, devido ao alto contraste de resistividade entre a rocha encaixante e o alvo (hidrocarbonetos), pelo regularizador “variação total” de norma L_1 . Os resultados com dados sintéticos mostram que o algoritmo só converge para uma solução estável, se for acrescentado mais informação *a priori*. A utilização do regularizador “Variação Total” mostra uma melhora na identificação das bordas do alvo quando comparada com a utilização da “Suavidade global” de norma L_2 .

Introdução

Devido a necessidade de se reduzir o risco exploratório na identificação de alvos geológicos pré-estabelecidos pela sísmica, com a provável localização de hidrocarbonetos, o método eletromagnético com a fonte controlada no mar (CSEM marinho), também conhecido como “Seabed Logging” (SBL) tem se popularizado nos últimos anos. O método consiste na identificação de alvos resistivos que provocam anomalias nos dados, sendo que o comportamento dessas anomalias depende da distribuição espacial da condutividade em subsuperfície (Gunning *et al.* (2010)). A construção de um modelo de condutividade em subsuperfície que explique o comportamento dos dados é fundamental, tornando a

inversão dos dados do CSEM marinho um processo importante no auxílio à identificação de estruturas resistivas sob o oceano.

Vários trabalhos sobre inversão 1D nos últimos anos foram publicados, mostrando um crescente interesse por esse método (Weiss & Constable (2006), Christensen & Dodds (2007), Key (2009), Gunning *et al.* (2010), Ramananjaona *et al.* (2011)). Apesar de se constituírem em um ótimo exercício para estudos no processo de inversão, os modelos 1D são apenas um primeiro passo para a compreensão dos processos envolvidos na inversão e interpretação de dados do CSEM marinho. O ideal seria trabalharmos com a inversão 3D, mas devido a quantidade de parâmetros envolvidos precisaríamos de uma grande quantidade de dados contendo a informação do modelo 3D, e apesar da crescente disponibilidade de ambientes computacionais massivamente paralelos, a inversão do CSEM marinho 3D inevitavelmente demanda um longo tempo de computação. Então, um passo intermediário, que permite o estudo da inversão em tempos relativamente curtos, mas ainda com a possibilidade de explorar estruturas mais próximas da realidade, é o trabalho com modelos bi-dimensionais.

Na inversão, o maior custo computacional está no cálculo da matriz de sensibilidade (Jacobiana), isso independente da dimensão em que se está trabalhando, já que na inversão não linear do método eletromagnético a Jacobiana não tem uma solução analítica. Neste trabalho a Jacobiana é calculada com o método Adjunto aproximado proposto por Farquharson & Oldenburg (1996) e usado na inversão de dados do magnetotélúrico, baseado no método de estados adjuntos de McGillivray *et al.* (1994).

É comum na literatura, o uso de regularizadores de suavização global com a norma L_2 , para estabilizar o processo de inversão, como apresentado por Constable *et al.* (1987) e de Groot-Hedlin & Constable (1990), entretanto, devido a suavização, estes métodos tendem a gerar estruturas suavizadas, que em muitos casos não correspondem às estruturas reais, que podem apresentar descontinuidades fortes nas propriedades físicas, por exemplo, em uma rocha reservatório que contém hidrocarbonetos, que são altamente resistivos, sobrepostos a camada saturada com água, que forma um ambiente condutivo. Para permitir a inversão atingir estruturas com variações abruptas na resistividade, usamos o regularizado variação total com a norma L_1 , em que ao mesmo tempo que coloca a suavização entre parâmetros adjacentes, permite que estes possam variar, desde que ajustem os dados. Este tipo de regularizador foi proposto por Rudin *et al.* (1992) e Acar & Vogel (1994), e usado na inversão de dados da gravimetria por Lima *et al.* (2011) e Martins *et al.* (2011).

Modelagem

A modelagem do mCSEM 2.5D foi realizada utilizando o método de elementos finitos, onde admitimos que a heterogeneidade é infinita na direção y (Figura 1), com isso temos

o meio 2D. A nossa fonte é um dipolo elétrico horizontal (DEH), que gera um campo 3D.

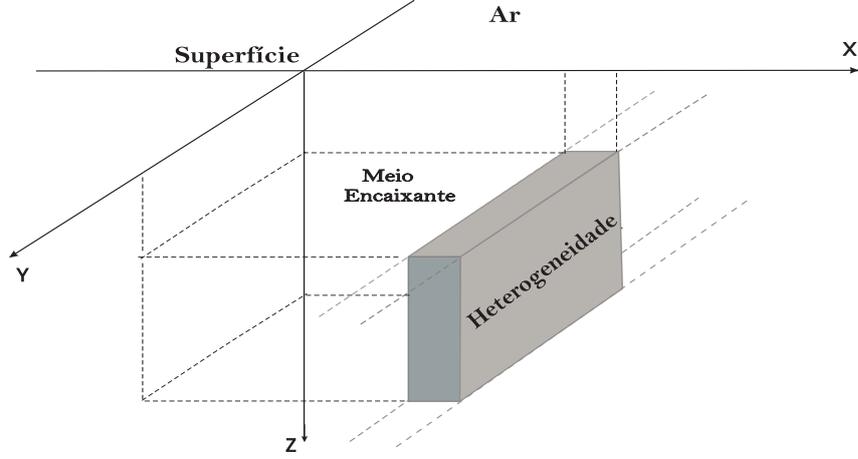


Figura 1: Orientação adotada dos eixos coordenados.

Os métodos eletromagnéticos geofísicos tem como ponto de partida as equações de Maxwell, que no domínio da frequência (com dependência temporal $e^{i\omega t}$), apresentam-se como:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \eta \mathbf{E} = \mathbf{J}_f, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mathfrak{z} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

em que \mathbf{J}_f é a densidade de corrente na fonte, $\eta = \sigma + i\omega\epsilon$ é a admitividade e $\mathfrak{z} = i\omega\mu$ a impeditividade. Seguindo Zhdanov (2002), separamos esses campos em primários e secundários. Denominado de campo primário aquele que seria observado no meio na ausência das heterogeneidades, ou seja, apenas com o modelo 1D, sujeito ao mesmo transmissor. O campo secundário é dado pela diferença entre o campo total no meio 2D/3D e o campo primário:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s. \quad (6)$$

Em nossos modelos faremos todas as regiões com a mesma propriedade magnética, com permeabilidade igual à do vácuo. Os modelos serão compostos de camadas homogêneas horizontais às quais estarão sobrepostos os corpos bidimensionais. As condutividades do meio estratificados são chamadas de modelo 1D, ou primário. Os campos primários

satisfazem às equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H}^p - \eta_p \mathbf{E}^p = \mathbf{J}_f, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^p + \mathfrak{z}_p \mathbf{H}^p = \mathbf{0}, \quad (8)$$

Aplicando a separação dos campos e a transformada de Fourier em relação a coordenada y (gerando a coordenada k_y) nas equações (2) e (4) e expressando o sistema nas suas componentes, nós obtemos duas equações diferenciais acopladas para as componentes H_y^s e E_y^s dos campos magnético e elétrico:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) - \eta \widehat{E}_y^s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) = \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p \right) + \Delta \eta \widehat{E}_y^p - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) + \mathfrak{z} \widehat{H}_y^s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Nas quais $\Delta \eta = \eta - \eta_p$, $u^2 = k_y^2 - k^2$, sendo $k^2 = -\mathfrak{z}\eta$ o número de onda ao quadrado, \widehat{H}_y e \widehat{E}_y são as transformadas de Fourier para as componentes H_y e E_y . Após a modelagem das equações acima temos os as componentes \widehat{H}_y^s e \widehat{E}_y^s no domínio (x, k_y, z) . As demais componentes do campo elétrico que serão necessárias para os dados e para a matriz de sensibilidade utilizados no processo de inversão podem ser determinadas a partir destas:

$$\widehat{E}_x^s = - \frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p \quad (11)$$

$$\widehat{E}_z^s = \frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p \quad (12)$$

De posse de todas as componentes do campo elétrico no domínio (x, k_y, z) devemos fazer a transformada inversa de Fourier em k_y para chegarmos ao domínio espacial.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x, k_y, z) e^{ik_y y} dk_y \quad (13)$$

O cálculo da transformada foi realizado numericamente utilizando a técnica de filtros digitais lineares seno ou cosseno, dependendo da paridade de cada componente. Os filtros utilizados aqui foram os de 81 pontos de Key (2011)

Modelagem Adjunta

Um ponto crucial do processo de inversão empregado neste trabalho é o cálculo das derivadas parciais que formam a matriz de sensibilidade. A avaliação numérica dessas derivadas (aqui chamada de “força bruta”) é comumente realizada executando as rotinas de modelagem direta duas vezes para cada parâmetro, variando o valor do parâmetro em 1% para mais e 1% para menos do valor corrente em cada iteração.

$$\Delta p_j = 0.01 p_j \quad (14)$$

$$\frac{\partial d(p)}{\partial p_j} = \frac{d(p_{p_i+\Delta p_j}) - d(p_{p_i-\Delta p_j})}{2\Delta p_j} \quad (15)$$

O cálculo dos elementos da matriz de sensibilidade é o procedimento que gasta o maior tempo computacional em todo o processo de inversão, e o tempo se torna um problema ainda mais pertinente de acordo com que vamos aumentando o número de parâmetros. Uma forma de reduzir o tempo computacional no cálculo da matriz de sensibilidade é usar o método dos Estados Adjuntos (McGillivray *et al.* (1994)). Com os dados observados $\mathbf{d}_o(\mathbf{p})$ sendo a componente E_x do campo elétrico e os meus parâmetros \mathbf{p} a condutividade σ , a matriz de sensibilidade pode ser escrita como (Apêndice A):

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \int_D \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{E} \, dv \quad (16)$$

Onde \mathbf{E}^+ é o campo elétrico no domínio D , devido um dipolo elétrico colocado na posição de medida e orientado na direção x , enquanto \mathbf{E} é o campo elétrico devido a fonte que está sendo usada para fazer as medidas geofísicas. Enquanto que na matriz de sensibilidade calculada na força bruta, precisamos chamar o modelo direto $2 \times np$ (np é o número de parâmetros), na matriz de sensibilidade calculada com o estado adjunto chamamos o modelo direto $1 + no$ (no é o número de pontos de observações), tornando o método adjunto mais apropriado para problemas subdeterminados. Entretanto, mesmo em problemas sobredeterminados onde no não ultrapasse $2 \times np$, ainda assim é viável o cálculo da matriz de sensibilidade com o estado adjunto, sendo que cada vez que o modelo direto é chamado, a fonte adjunta é colocada na posição em que foi tomada a medida geofísica. Para modelos modelos 2.5D Farquharson & Oldenburg (1996) escreve a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{E} \, ds \, dy \quad (17)$$

Em que a sensibilidade é obtida realizando primeiro a integral da área de cada célula no domínio k_y , ou seja, para cada número de pontos do filtro, para depois realizarmos a

transformada inversa de Fourier com o uso de filtros seno e/ou cosseno (Apêndice B).

É de costume colocarmos a fonte da modelagem direta com ordenada na origem, logo $T_y = 0$, mas como geralmente utilizamos filtros seno e/ou cosseno para realizar a transformada inversa de Fourier, nossas observações não podem ser com ordenada nula, ou seja, $T'_y = 0$. Isso nos possibilita escrever:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}(x, k_y, z) e^{iT'_y} ds dk_y \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}(x, k_y, z) \left[\cos(T'_y k_y) + i \sin(T'_y k_y) \right] ds dk_y \quad (19)$$

O uso devido dos filtros seno ou cosseno depende da paridade de cada parcela do produto escalar $\hat{\mathbf{E}}^+ \cdot \hat{\mathbf{E}}$. No entanto, é sabido que em cada componente a paridade é a mesma para esses campos, logo, o produto será sempre par, e conseqüentemente usaremos somente o filtro cosseno. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}_x^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}_x(x, k_y, z) \cos(T'_y k_y) ds dk_y \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}_y^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}_y(x, k_y, z) \cos(T'_y k_y) ds dk_y \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}_z^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}_z(x, k_y, z) \cos(T'_y k_y) ds dk_y \end{aligned} \quad (20)$$

Na Figura 3 mostramos que a matriz de sensibilidade calculada na força bruta para o modelo geolétrico da Figura 2 é praticamente a mesma calculada com o estado adjunto. Sendo que nessa matriz temos a fonte localizada a 30 m acima do assoalho oceânico, em $z = 970$ m e $x = -7500$ m e apenas um ponto de medida em $x = 1000$ m onde são coletados o log natural da amplitude ($\ln |E_x|$) e a fase (Φ) a uma frequência de 0.125 Hz, Para melhor visualização, dispomos os parâmetros em suas respectivas posições em profundidade e o triângulo azul indica a posição da fonte enquanto que o triângulo vermelho indica a posição de medida e conseqüentemente a posição da fonte adjunta. A matriz de sensibilidade calculada com esses dados é dada pelas equações que se encontram no Apêndice C:

$$\frac{\partial \ln |\mathbf{E}|}{\partial \ln \sigma} = Re \left(\frac{\sigma}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Phi_E}{\partial \ln \sigma} = Im \left(\frac{\sigma}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma} \right) \quad (22)$$

Uma forma de reduzirmos ainda mais o tempo para o cálculo da matriz de sensibilidade

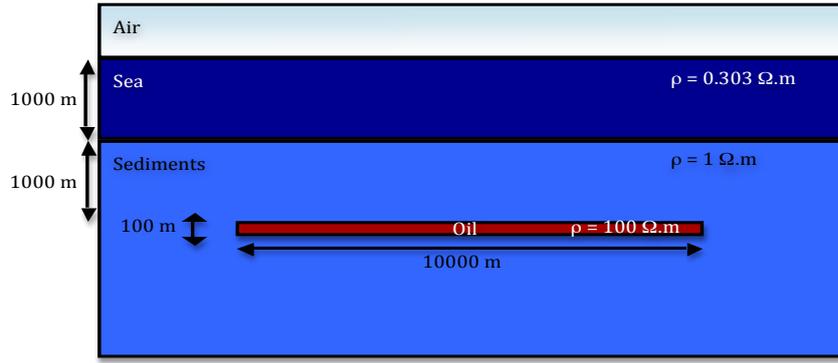


Figura 2: Modelo geológico.

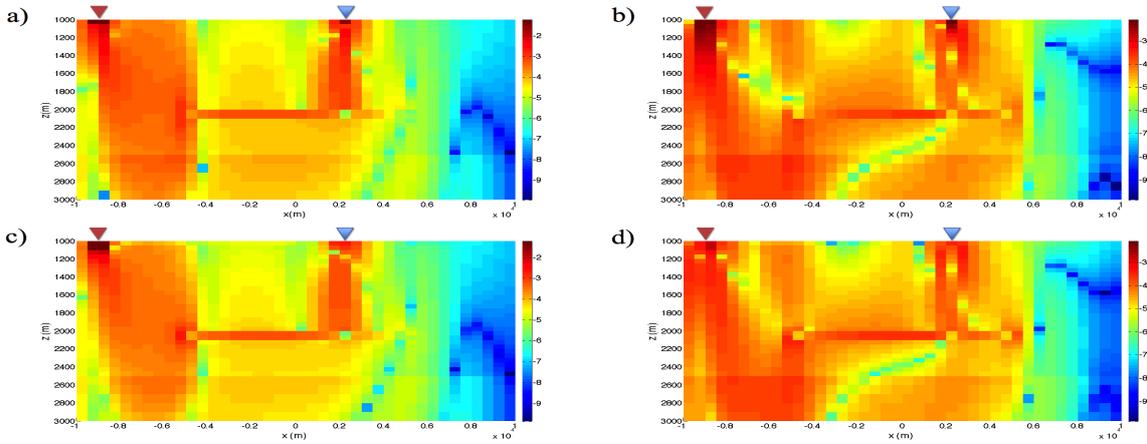


Figura 3: Sensibilidade do CSEM marinho para o modelo geológico mostrado na figura 2. O triângulo azul indica a posição da fonte, enquanto que o triângulo vermelho indica a posição de medida e consequentemente a posição da fonte adjunta. a) e c) mostram a $\log_{10}|\partial \ln |E_x|/\partial \ln \sigma|$ calculada na força bruta e com o método do estado adjunto respectivamente. b) e d) mostram a $\log_{10}|\partial \Phi_E/\partial \ln \sigma|$ calculada na força bruta e com o método do estado adjunto respectivamente.

foi proposta por Farquharson & Oldenburg (1996), onde o campo adjunto $\hat{\mathbf{E}}^+$ é calculado utilizando um modelo 1D, gerando ainda assim uma boa aproximação para a matriz de sensibilidade. Na Figura 4 temos a matriz gerada com o método do Estado Adjunto e a gerada com o método do estado adjunto aproximada para os mesmos dados apresentados acima. O modelo 1D aqui utilizado para gerar a matriz de sensibilidade com o método adjunto aproximado foi o modelo que serve de fonte para a modelagem de elementos finitos.

O aumento no valor de sensibilidade mostrado nas figuras a partir de $z = 2500$ m é devido termos dobrado a espessura das células de cada parâmetro.

Para o processo de inversão, os dados geofísicos coletados a uma distância menor do que 1000 m foram desprezados, já que até 1000 m a influência do campo proveniente da fonte é dominante, mascarando a presença de qualquer alvo e reduzindo drasticamente a sensibilidade dos parâmetros distantes da fonte como mostra a Figura 5 (a,b) com a fonte

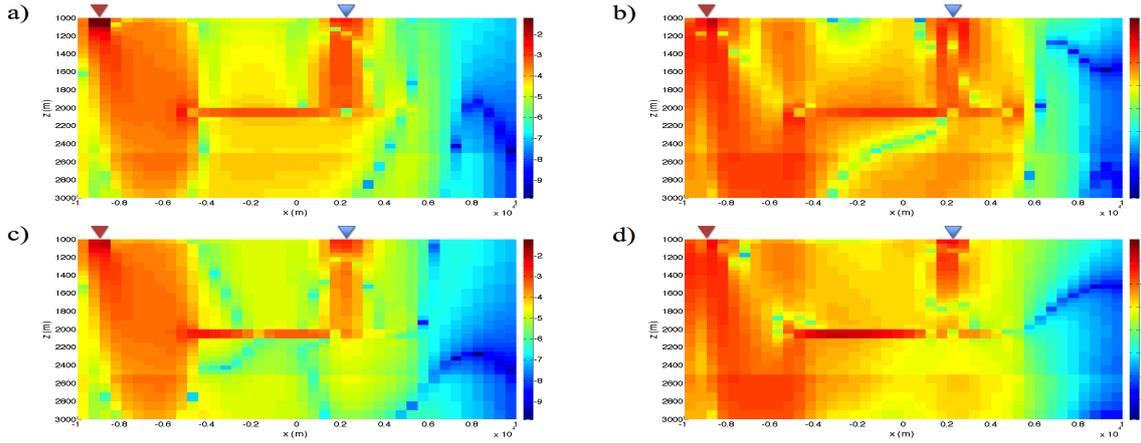


Figura 4: Sensibilidade do CSEM marinho para o modelo geolétrico mostrado na figura 2. O triângulo azul indica a posição da fonte, enquanto que o triângulo vermelho indica a posição de medida e consequentemente a posição da fonte adjunta. a) e c) mostram a $\log_{10}|\partial \ln |E_x|/\partial \ln \sigma|$ calculada com o método do estado adjunto e com o método do estado adjunto aproximado respectivamente. b) e d) mostram a $\log_{10}|\partial \Phi_E/\partial \ln \sigma|$ calculada com o método do estado adjunto e com o método do estado adjunto aproximado respectivamente.

localizada em $x = 500$ m e a medida em $x = 0$ m. Devido a profundidade pelicular a situação se torna ainda mais agravante com o aumento da frequência, onde a sensibilidade dos parâmetros mais distâtes chega a zero como mostrado na Figura 5 (c,d) onde a sensibilidade foi calculada na força bruta para a frequência de 1 Hz.

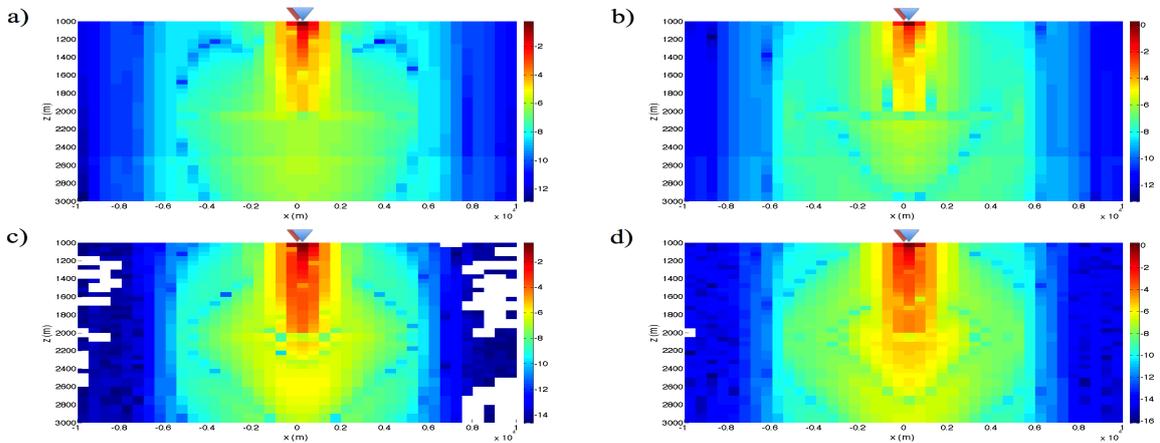


Figura 5: Sensibilidade do CSEM marinho para o modelo geolétrico mostrado na figura 2. O triângulo azul indica a posição da fonte, enquanto que o triângulo vermelho indica a posição de medida e consequentemente a posição da fonte adjunta. a) e c) mostram a $\log_{10}|\partial \ln |E_x|/\partial \ln \sigma|$ calculada para a frequência de 0.125 Hz e 1 Hz respectivamente. b) e d) mostram a $\log_{10}|\partial \Phi_E/\partial \ln \sigma|$ calculada para a frequência de 0.125 Hz e 1 Hz respectivamente.

Modelagem em Paralelo com Topologia

A modelagem da matriz de sensibilidade na força bruta mostrada na Figura 6 foi realizada em paralelo com 70 processadores, onde cada processador ficou responsável por 20 parâmetros, em um total de 1400 parâmetros. Com o modelo direto rodando em 5 min temos a matriz de sensibilidade em 3 h e 20 min (isso para uma posição de fonte e uma frequência). Se adicionamos 9 diferentes posições para a fonte levamos 33 h e 20 min para conseguir a matriz de sensibilidade em cada iteração no processo de inversão.

Com o método do estado adjunto aproximado o tempo computacional se limita a chamar o modelo direto 2.5D apenas uma vez, já que o tempo para chamar o modelo 1D é desprezível. Desta forma paralelizamos o modelo direto 2.5D com o uso da topologia em um grid 2D (f_n, S_n) , onde f_n é o número de frequências e S_n o número de posições da fonte. Na figura abaixo mostramos o esquema do grid, onde cada célula é um processador.

f_1, S_1	f_1, S_2	f_1, S_3	f_1, S_4	f_1, S_5	...	f_1, S_n
f_2, S_1	f_2, S_2	f_2, S_3	f_2, S_4	f_2, S_5	...	f_2, S_n
f_3, S_1	f_3, S_2	f_3, S_3	f_3, S_4	f_3, S_5	...	f_3, S_n
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
f_n, S_1	f_n, S_2	f_n, S_3	f_n, S_4	f_n, S_5	...	f_n, S_n

Figura 6: Grid de topologia utilizado no paralelismo

Dessa forma, havendo processadores suficientes, a cada iteração no processo de inversão o tempo computacional para o cálculo da matriz de sensibilidade aproximada fica limitada apenas ao tempo para chamar o modelo direto 2.5D para uma frequência e uma posição. Se o número de posições da fonte vezes o número de frequências é maior do que número de processadores do *cluster*, o tempo de processamento aumentará, pois um processador terá que realizar mais de uma tarefa.

Inversão

O modelo usado para gerar os resultados é mostrado na Figura 2. O modelo interpretativo utilizado na inversão é formado por 1400 células homogêneas e isotrópicas tendo uma discretização de 41 células em x e 36 células em z .

O conjunto de parâmetros m_j a ser estimado forma o vetor \mathbf{m} . Estes parâmetros são as resistividades das células que formam o modelo interpretativo. A função objetivo de \mathbf{m} a ser minimizada é

$$\Phi(\mathbf{m}) = \phi^d(\mathbf{m}) + \phi^m(\mathbf{m}), \quad (23)$$

em que ϕ^d expressa o desajuste entre os dados observados e os dados calculados, e $\phi^m(\mathbf{m})$ é o funcional usado para introduzir o vínculo estabilizador.

Os dados a serem invertidos são $\ln |E_x|$ e a fase. No funcional ϕ^d os dados são normalizado pelas observações:

$$\phi^d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{W}_d (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m}))\|_2 \quad (24)$$

em que $\bar{\mathbf{y}}$ é um vetor em que todas as componente são iguais a 1 e $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$ é um vetor em que as componentes são dadas pela razão entre os dados calculados e os observados (Almeida & Rijo, 2011), de maneira que é feito um ajuste do vetor de dados normalizados com uma reta igual a 1. A matriz de peso dos dados \mathbf{W}_d , é dada como em Weitemeyer *et al.* (2010):

$$W_{ii} = \left(\sum_k (\mathbf{J}_{ik}^0)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Onde \mathbf{J}^0 é a primeira matriz de sensibilidade com o modelo inicial. As medidas tomadas próximo a fonte, sofrem maior influência dos sinal proveniente desta, assim o uso da matriz de peso dos dados, reduz a contribuição das medidas tomadas próximo a fonte (Abubakar *et al.* (2009)).

A primeira função regularizadora ϕ^m através da qual introduzimos informação *a priori* é

$$\phi^m(\mathbf{m}) = \alpha \phi^{IA} + \gamma \phi^{VT}, \quad (26)$$

em que função ϕ^{IA} é usada para impor vínculo de igualdade absoluta nos valores de condutividades para os quais tenhamos uma estimativa baseada em informação geológica ou proveniente de outros métodos geofísicos, de maneira aproximada, no sentido de mínimos-quadrados, como apresentada em Medeiros & Silva (1996):

$$\phi^{IA} = \|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{v}\|_2. \quad (27)$$

Sendo \mathbf{v} o vetor com os valores aos quais vincularemos os parâmetros e \mathbf{G} a matriz cujas linhas são formadas por zeros, exceto na posição do parâmetro que queremos vincular, onde o elemento será 1.

A versão discreta do conceito de “variação total” de uma função é definida em Acar & Vogel (1994) e é empregada na definição de um funcional ajustante para o problema da determinação do relevo do embasamento de bacias sedimentares com dados gravimétricos em Martins *et al.* (2011) e Lima *et al.* (2011). Nós aplicamos essa definição para a função que descreve a distribuição de condutividade através das células dos modelos 2D. A inversão minimiza essa função junto com a medida de desajuste dos dados.

A função ϕ^{VT} força a igualdade entre os valores de condutividade entre as células adjacentes na direção horizontal ou vertical. Para as células i e j , a relação expressa pelo vínculo é $\sigma^{(i)} - \sigma^{(j)} = 0$. Essa relação entra como uma função estabilizadora na forma da matriz \mathbf{S} , cuja as linhas são formadas por zeros, exceto nas posições dos dois parâmetros que queremos vincular. Por exemplo, se os parâmetros i e j devem ter os

seu valores o mais próximo possível um do outro, a matriz deve ter uma linha na forma $[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ \dots \ 0 \ 0]$ onde os números 1 e -1 estão nas posições i e j , respectivamente.

Enquanto o desajuste dos dados são medidos na norma L_2 , o afastamento da igualdade expressa em \mathbf{S} é medido na norma L_1 ($\|\cdot\|_1$):

$$\phi^{VT} = \|\mathbf{S} \mathbf{m}\|_1. \quad (28)$$

Os parâmetros de regularização α e γ são usados para dar pesos diferentes a essas informações *a priori*. Esses parâmetros devem ter os menores valores possíveis, mas que ainda possam conduzir a uma solução estável.

Pela definição da norma, a função ϕ^{VT} , para M linhas e N colunas, com um total de $M \times N$ parâmetros, deve ser escrita como:

$$\phi^{VT} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N-1} |\sigma^{(i,j)} - \sigma^{(i,j+1)}|. \quad (29)$$

Entretanto, essa função não é diferenciável quando a diferença entre os parâmetros é igual a zero. Para evitar esse comportamento, a função foi modificada por Acar & Vogel (1994) aproximando as diferenças por

$$|\sigma^{(i,j)} - \sigma^{(i,j+1)}| \approx \left[(\sigma^{(i,j)} - \sigma^{(i,j+1)})^2 + \beta \right]^{1/2}, \quad (30)$$

onde β é um número positivo pequeno.

A segunda função regularizadora ϕ^m através da qual introduzimos informação *a priori* é composta por:

$$\phi^m(\mathbf{m}) = \alpha \phi^{IA} + \gamma \phi^{SG}. \quad (31)$$

Onde, ϕ^{SG} é o regularizador de suavidade global na norma L_2

$$\phi^{SG} = \|\mathbf{S} \mathbf{m}\|_2. \quad (32)$$

Sendo \mathbf{S} , a mesma matriz usada no regularizador de variação total.

Agora, para implementar o método Gauss-Newton, precisamos construir o vetor gradiente \mathbf{g} e a matriz Hessiana \mathbf{H} associada com essa função modificada. Martins *et al.* (2011) apresentam uma análise detalhada para estas construções. A solução desse problema não linear é encontrada de forma iterativa pelo método Gauss-Newton usando a estratégia de Marquardt (1963). Primeiro expande-se $\Phi^m(\mathbf{m})$ em série de Taylor em torno da aproximação $\hat{\mathbf{m}}_k$, obtida na k -ésima iteração, conservando apenas os termos até segunda ordem; em seguida deriva-se a função expandida e truncada, $\Phi^m(\hat{\mathbf{m}}_k + \Delta \mathbf{m}_k)$ em relação a $\Delta \mathbf{m}_k$ e iguala-se ao vetor nulo. Desta forma, obtemos a equação normal para a estimativa de

$\Delta \mathbf{m}_k$:

$$\mathbf{H}_k \Delta \mathbf{m}_k = -\mathbf{g}_k \quad (33)$$

Neste caso temos a Hessiana do funcional $\Phi(\mathbf{m})$ com os regularizadores Variação Total e Suavidade Global da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_k^{VT} = \mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \mathbf{S}^T (\gamma \mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{S} + \alpha \mathbf{G}^T \mathbf{G} \quad (34)$$

$$\mathbf{H}_k^{SG} = \mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{G}^T \mathbf{G} \quad (35)$$

e os vetores gradiente

$$\mathbf{g}_k^{VT} = -\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) + \gamma \mathbf{S}^T \mathbf{d} + \alpha \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{m}_k - \mathbf{v}) \quad (36)$$

$$\mathbf{g}_k^{SG} = -\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) + \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_k + \alpha \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{m}_k - \mathbf{v}) \quad (37)$$

O vetor $\hat{\mathbf{m}}$ que minimiza a função $\Phi(\mathbf{m})$ é encontrado através da estratégia de Marquardt com o regularizador de variação total, pela seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{m}}^{VT} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \mathbf{S}^T (\gamma \mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{S} + \alpha \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) - \gamma \mathbf{S}^T \mathbf{d} - \alpha \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{m}_k - \mathbf{v})] \quad (38)$$

e, para o vínculo de suavidade global:

$$\hat{\mathbf{m}}^{SG} = \mathbf{m}_k + [\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{m})) - \beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_k - \alpha \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{m}_k - \mathbf{v})] \quad (39)$$

A matriz \mathbf{J} é a matriz de sensibilidade (Jacobiana) normalizada pelos dados observados. \mathbf{d} é o vetor com a dimensão (L) igual a quantidade de pares de parâmetros que queremos vincular, avaliado em $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k$, cujo l -ésimo elemento é dado por

$$\mathbf{d} \equiv d_l = \frac{m_i - m_j}{[(m_i - m_j)^2 + \beta]^{\frac{1}{2}}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_k} \quad (40)$$

e \mathbf{R} é a matriz diagonal, avaliada em $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k$, cujo l -ésimo elemento da diagonal é dado por

$$\mathbf{R} \equiv R_{ll} = \frac{\beta}{[(m_i - m_j)^2 + \beta]^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_k} \quad (41)$$

O método não irá penalizar variações bruscas porque, na norma L_1 , a medida de desajuste entre os pares de parâmetros adjacentes, dará o mesmo valor se a variação dos parâmetros for suave ou se a variação for abrupta, o que não é o caso se o mesmo desajuste é medido na norma L_2 , pois em uma distribuição suave a medida do desajuste é menor, sendo assim favorecida pela minimização desta norma (Lima *et al.* (2011)). Por outro lado, a função objectivo deve ajustar as observações, o que impedirá a distribuição dos parâmetros de ser descontínua em locais onde a descontinuidade não pode ser explicada pelos dados.

O método TV reforça a proximidade entre os parâmetros adjacentes, mas, quando a influência de uma descontinuidade é sentida nos dados, este permite mudanças abruptas sobre os parâmetros. Isso faz com que o método seja uma alternativa válida, quando os dados observados usados na inversão do CSEM marinho provém de um ambiente geológico com uma distribuição suave de condutividade, mas que pode apresentar descontinuidades em lugares como as interfaces entre as camadas geoeletricas, que podem ser zonas muito resistivas no interior de sedimentos condutivos, como na margem de uma zona de óleo ou de um corpo de sal.

Resultados

O modelo que gerou os dados que foram utilizados na inversão, é constituído por um corpo de 100 m de espessura, 10 km de largura e com uma resistividade de $100 \Omega.m$, localizado a uma profundidade de 2.0 km, dentro de um semi-espaço infinito com uma resistividade de $1 \Omega.m$, como mostra a Figura 2. Os dados observados (log da amplitude e fase da componente E_x) foram obtidos com 5 frequências (0.125 Hz, 0.25 Hz, 0.5 Hz, 0.75 Hz e 1 Hz). Foi adicionado 1% de ruído aos dados observados.

Discretizamos o modelo em 840 parâmetros, em um grid com 21 linhas e 40 colunas. Os dados observados foram compostos por 20 receptores, 19 posições de fonte e 5 frequências dando um total de 3800 observações, entre amplitude e fase. Adicionamos o vínculo de igualdade absoluta para os parâmetros que estão fora do retângulo branco mostrados na Figura 7, vinculando um total de 360 parâmetros. Selecionamos uma área com 600 m de espessura, 14 km de largura, como o provável local onde se encontra o nosso corpo, e usamos como modelo inicial para essa área, uma resistividade de $10 \Omega.m$

O resultado, para a inversão usando o regularizador de suavidade global, consegue identificar o corpo resistivo em profundidade, mas devido a suavização horizontal não conseguimos identificar as bordas laterais (Figura 8). Enquanto que o regularizador de variação total, consegue identificar o corpo resistivo em profundidade, e melhor identificar as bordas laterais (Figura 9).

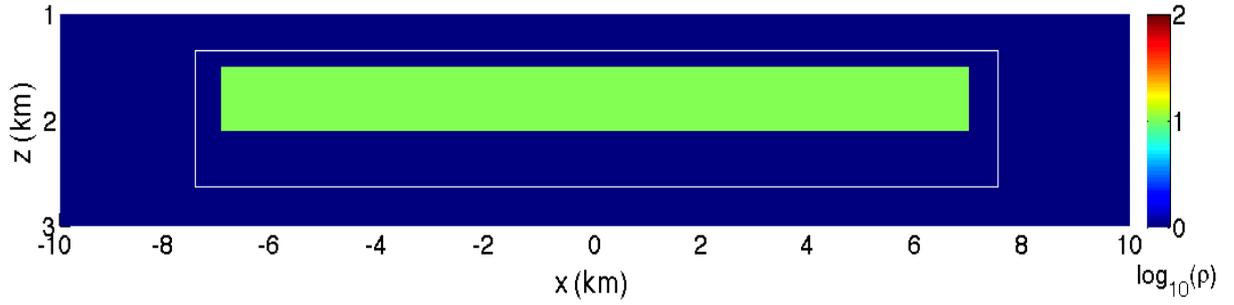


Figura 7: Modelo inicial, com os parâmetros entre os dois retângulo vinculados com a igualdade absoluta

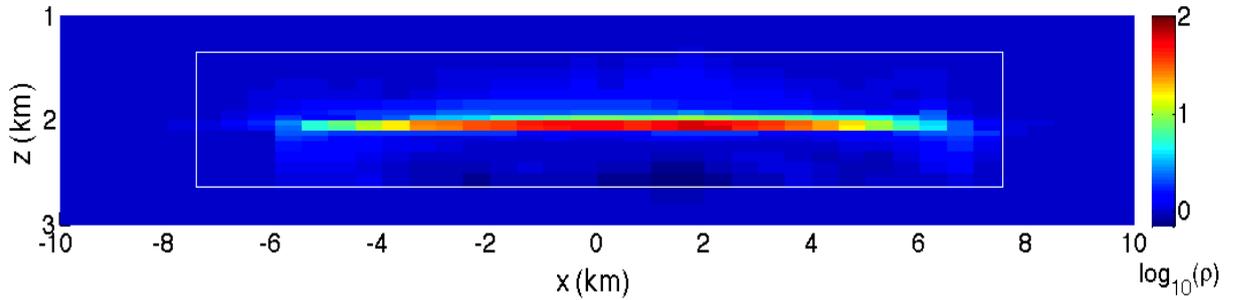


Figura 8: Resultado da inversão, usando os regularizadores de suavidade global e de igualdade absoluta

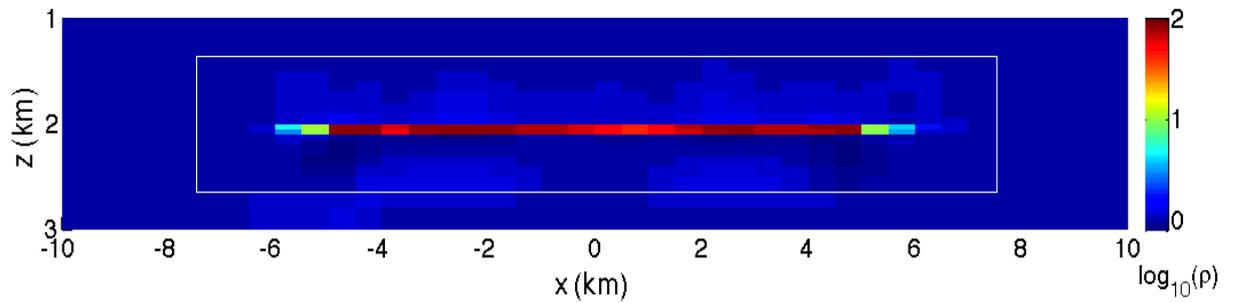


Figura 9: Resultado da inversão, usando os regularizadores de variação total e de igualdade absoluta

Conclusão

O cálculo da matriz de sensibilidade aproximada para o CSEM marinho com aplicação do método dos “Estados Adjuntos” proporcionou uma enorme redução no tempo computacional e se mostrou uma excelente aproximação. A aplicação de somente um dos regularizadores tratados aqui, seja o de Variação Total, seja o de Suavidade Global, não é suficiente para prover uma solução estável, sendo necessário a introdução de mais informação a priori, a qual foi introduzida com o regularizador de igualdade absoluta. Após inserirmos as devidas informações a priori, o método TV melhora os resultados nas bordas do corpo em relação ao de Suavidade Global, por permitir variações abruptas nos parâmetros, enquanto continua a aplicar a igualdade entre os parâmetros adjacentes, onde quer

que seja exigido pelo ajuste das observações.

Para trabalhos futuros com a inversão de dados do CSEM marinho faz-se necessário um estudo sobre outros possíveis regularizadores ou combinações de regularizadores que possam proporcionar uma solução estável.

Referências Bibliográficas

- Abubakar, A., Habashy, T. M., Li, M., & Liu, J. 2009. TOPICAL REVIEW: Inversion algorithms for large-scale geophysical electromagnetic measurements. *Inverse Problems*, **25**.
- Almeida, Frayzer Lima de, & Rijo, Luiz. 2011. Modelagens direta e inversa de dados mCSEM 3D. *Revista Brasileira de Geofísica*, **29**(06), 289 – 308.
- Acar, R., & Vogel, C. R. 1994. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, **10**, 1217–1229.
- Christensen, Niels B., & Dodds, Kevin. 2007. 1D inversion and resolution analysis of marine CSEM data. *Geophysics*, **72**(2), WA27–WA38.
- Constable, S. C., Parker, R. L., & Constable, C. G. 1987. Occam’s inversion: a practical algorithm for generating smooth models from EM sounding data. *Geophysics*, **52**(3), 289–300.
- de Groot-Hedlin, C. D., & Constable, S. C. 1990. Occam’s inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*, **55**(12), 1613–1624.
- Farquharson, C. G., & Oldenburg, D. W. 1996. Approximate sensitivities for the electromagnetic inverse problem. *Geophysical Journal International*, **126**(1), 235–252.
- Gunning, J., Glinsky, M., & Hedditch, J. 2010. Resolution and uncertainty in 1D CSEM inversion: A Bayesian approach and open-source implementation. *GEOPHYSICS*, **75**(6), F151–F171.
- Key, Kerry. 2009. 1D inversion of multicomponent, multifrequency marine CSEM data: Methodology and synthetic studies for resolving thin resistive layers. *Geophysics*, **74**(2), F9–F20.
- Key, Kerry. 2011. <http://marineemlab.ucsd.edu/Projects/MARE2D/index.html>
- Lima, Williams A., Martins, Cristiano M., Silva, Joao B. C., & Barbosa, Valeria C. F. 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 2 — Phy-

- sicogeologic meaning and comparisons with previous inversion methods. *Geophysics*, **76**(1), I13–I20.
- Marquardt, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**(2), 431–441.
- Martins, Cristiano M., Lima, Williams A., Barbosa, Valeria C. F., & Silva, Joao B. C. 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 — Mathematical details and applications. *Geophysics*, **76**(1), I1–I12.
- McGillivray, P. R., Oldenburg, D. W., Ellis, R. G., & Habashy, T. M. 1994. Calculation of sensitivities for the frequency-domain electromagnetic problem. *Geophysical Journal International*, 1–4.
- Medeiros, Walter E., & Silva, J. B. C. 1996. Geophysical inversion using approximate equality constraints. *Geophysics*, **61**(6), 1678–1688.
- Ramananjaona, Christophe, MacGregor, Lucy, & Andréis, David. 2011. Sensitivity and inversion of marine electromagnetic data in a vertically anisotropic stratified earth. *Geophysical Prospecting*, **59**(2), 341–360.
- Rudin, Leonid I., Osher, Stanley, & Fatemi, Emad. 1992. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, **60**(1-4), 259–268.
- Weiss, Chester J., & Constable, Steven. 2006. Mapping thin resistors and hydrocarbons with marine EM methods: Insights from 1D modeling. *Geophysics*, **71**, 43–51.
- Weitemeyer, K., Gao, G., Constable, S., & Alumbaugh, D. 2010. The practical application of 2D inversion to marine controlled-source electromagnetic sounding. F199–F211.
- Zhdanov, Mikhail Semenovich. 2002. *Geophysical inverse theory and regularization problems*. Vol. 36. Amsterdam: Elsevier Science.

APÊNDICE A

Cálculo da Sensibilidade com Método dos estados Adjuntos

Para uma breve revisão sobre como calcular a sensibilidade com o método dos Estados Adjuntos, vamos adotar que em todo o nosso domínio Ω a condutividade σ varia em função da posição, mas a permissividade elétrica ϵ e a permeabilidade magnética μ permanecem constante. No levantamento geofísico temos as fontes de corrente elétrica ou magnética \mathbf{J}_s e \mathbf{M}_s usadas para gerar os campos elétricos \mathbf{E} e magnéticos \mathbf{H} , que satisfazem as equações de Maxwell, e as condições de fonteira.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{M}_s \quad (42)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (43)$$

Na inversão, vamos representar a condutividade como uma combinação linear de funções bases ψ_k :

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sigma_k \psi_k(\mathbf{r}). \quad (44)$$

Em situações típicas, nas quais o modelo é composto por blocos com condutividade uniforme, a função ψ_k é constante e igual a 1, dentro da célula k e zero em todo o restante do domínio Ω . Substituindo (44) em (42) e (43), e derivando com relação a σ_k temos:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma_k} = -i\omega\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \sigma_k}, \quad (45)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \sigma_k} = (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma_k} + \psi_k \mathbf{E} \quad (46)$$

As derivadas parciais $\partial \mathbf{E} / \partial \sigma_k$ e $\partial \mathbf{H} / \partial \sigma_k$, são as sensibilidades dos campos elétrico e magnético em relação a σ_k . O modelo direto é normalmente calculado estendendo o domínio discretizado até pontos distantes o suficiente das heterogeneidades bidimensionais para que se possam aplicar condições de fronteira homogêneas, logo as sensibilidades calculadas acima também satisfazem a forma homogênea da condição de fronteira.

Considere agora um problema auxiliar em que os campos elétrico $\tilde{\mathbf{E}}$ e magnético $\tilde{\mathbf{H}}$,

são gerados no domínio Ω por novas fontes elétrica $\tilde{\mathbf{J}}_s$ e magnética $\tilde{\mathbf{M}}_s$.

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{M}}_s \quad (47)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = (\sigma + i\omega\epsilon)\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}_s \quad (48)$$

Estes campos satisfazem as condições de fronteira homogênea, se Ω é finito as condições de fronteira são as mesma que a da sensibilidade, mas não são necessariamente as mesmas se Ω se estende ao infinito. Por exemplo, se o nosso problema original e o magnetotelúrico, por mais que eu tenha uma malha que se estenda ao infinito, o campo eletromagnético nunca será zero, enquanto que o campo no infinito proveniente das minhas fontes auxiliares, que geralmente são dipolos elétricos e magnéticos, é igual a zero.

Usamos a seguinte identidade vetorial para os campos definidos por 45, 46, 47 e 48.

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (49)$$

e integramos sobre o domínio Ω usando o teorema do divergente.

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{\mathbf{M}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \sigma_k} + \tilde{\mathbf{J}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma_k} \right) dv = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} \psi_k dv \quad (50)$$

Onde, $\tilde{\mathbf{M}}_s$ e $\tilde{\mathbf{J}}_s$ são as fontes magnética e elétrica, respectivamente, e ψ_k são as funções base usadas para definir os sub-domínios onde as integrais são realizadas.

Ao definir as fontes adjuntas apropriadas, somos capazes de calcular a sensibilidade dos campos magnético \mathbf{H} e elétrico \mathbf{E} . Por exemplo, para obter a sensibilidade de H_y em relação a condutividade σ_k , procedemos da seguinte forma: como o nosso dado é a componente H_y do campo magnético, vamos usar como fonte adjunta uma fonte dipolar magnética, com momento de dipolo orientado na direção y e localizada no ponto onde foi efetuada a medida do dado: $\tilde{\mathbf{M}}_s = \delta(x - x_0)\hat{y}$, e $\tilde{\mathbf{J}}_s = 0$. Então a equação 50 torna-se

$$\frac{\partial H_y(x_0)}{\partial \sigma_k} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} \psi_k dv \quad (51)$$

Em que $\tilde{\mathbf{E}}$ é definido como o campo elétrico no domínio Ω devido a um dipolo magnético orientado na direção y e com um momento unitário, localizado na posição de medida, e \mathbf{E} é o campo elétrico no domínio Ω devido a onda plana proveniente do campo magnetotelúrico no modo TM (transversal magnético). Dessa forma conseguimos a sensibilidade da medida de H_y em relação à condutividade do bloco k .

APÊNDICE B

Sensibilidade com Método dos estados Adjuntos para o CSEM marinho 2.5D

Dedução das sensibilidade pelo método adjunto para o problema 2.5D do CSEM marinho. Para um dipolo na direção x a expressão da sensibilidade é dada por

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{E} \, ds \, dy \quad (52)$$

em que

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{x}, \mathbf{k}'_y, \mathbf{z}) e^{i\mathbf{k}'_y(\mathbf{y}-\mathbf{T}'_y)} \, d\mathbf{k}'_y \quad (53)$$

com T'_y sendo a ordenada do ponto de observação, e

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{x}, \mathbf{k}_y, \mathbf{z}) e^{i\mathbf{k}_y(\mathbf{y}-\mathbf{T}_y)} \, d\mathbf{k}_y \quad (54)$$

sendo T_y a ordenada da fonte da modelagem direta. Então explicitamente teremos:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+ \cdot \hat{\mathbf{E}} e^{i(k'_y+k_y)y} e^{-i(k'_y T'_y+k_y T_y)} \, ds \, dk'_y \, dk_y \, dy \quad (55)$$

pelo fato de que

$$\delta(k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y} \, dy \quad (56)$$

então

$$\delta(-(k'_y + k_y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[-(k'_y+k_y)]y} \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'_y+k_y)y} \, dy \quad (57)$$

e assim a integral em y pode dar o aparecimento da expressão:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+ \cdot \hat{\mathbf{E}} \delta(-(k'_y + k_y)) e^{-i(k'_y T'_y+k_y T_y)} \, ds \, dk'_y \, dk_y \quad (58)$$

Realizando-se a integração em k'_y teremos resultados nulos para todos $k'_y \neq -k_y$, e 1

quando $k'_y = -k_y$, isso decorrente da função δ . então podemos reescrever:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}(x, k_y, z) e^{-i(T_y - T'_y)} ds dk_y \quad (59)$$

É de costume colocarmos a fonte da modelagem direta com ordenada na origem, logo $T_y = 0$, mas como geralmente utilizamos filtros seno e/ou cosseno para realizar a transformada inversa de Fourier, nossas observações não podem ser com ordenada nula, ou seja, $T'_y = 0$. Isso nos possibilita escrever:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}(x, k_y, z) e^{iT'_y} ds dk_y \quad (60)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}(x, k_y, z) \left[\cos(T'_y k_y) + i \sin(T'_y k_y) \right] ds dk_y \quad (61)$$

O uso devido a filtros seno ou cosseno depende da paridade de cada parcela do produto escalar $\hat{\mathbf{E}}^+ \cdot \hat{\mathbf{E}}$. No entanto, é sabido que em cada componente a paridade é a mesma para esses campos, logo, o produto será sempre par, e conseqüentemente usaremos somente o filtro cosseno. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial \sigma_j} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}_x^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}_x(x, k_y, z) \cos(T'_y k_y) ds dk_y \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}_y^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}_y(x, k_y, z) \cos(T'_y k_y) ds dk_y \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{A_j} \hat{\mathbf{E}}_z^+(x, -k_y, z) \cdot \hat{\mathbf{E}}_z(x, k_y, z) \cos(T'_y k_y) ds dk_y \end{aligned} \quad (62)$$

APÊNDICE C

Sensibilidade para amplitude e fase

O campo elétrico no domínio da frequência é uma quantidade complexa que pode ser definida como

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}| e^{i\Phi_E} \quad (63)$$

como os dados observados utilizados na inversão são $\ln |\mathbf{E}|$ e Φ_E , tiramos o \ln da equação acima.

$$\ln \mathbf{E} = \ln(|\mathbf{E}| e^{i\Phi_E}) \quad (64)$$

$$\ln \mathbf{E} = \ln |\mathbf{E}| + \ln e^{i\Phi_E} \quad (65)$$

como a inversão feita com $\ln \sigma$ temos que:

$$\frac{\partial \ln \mathbf{E}}{\partial \ln \sigma} = \frac{\partial \ln |\mathbf{E}|}{\partial \ln \sigma} + \frac{\partial \ln e^{i\Phi_E}}{\partial \ln \sigma} \quad (66)$$

$$\frac{1}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \ln \sigma} = \frac{\partial \ln |\mathbf{E}|}{\partial \ln \sigma} + \frac{1}{e^{i\Phi_E}} \frac{\partial e^{i\Phi_E}}{\partial \ln \sigma} \quad (67)$$

usando no lado esquerdo da equação acima a relação

$$\frac{\partial}{\partial \ln \sigma} = \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (68)$$

temos que

$$\frac{\sigma}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \ln |\mathbf{E}|}{\partial \ln \sigma} + i \frac{\partial \Phi_E}{\partial \ln \sigma} \quad (69)$$

Assim a matriz de sensibilidade é constituída por

$$\frac{\partial \ln |\mathbf{E}|}{\partial \ln \sigma} = \text{Re} \left(\frac{\sigma}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \sigma} \right) \quad (70)$$

$$\frac{\partial \Phi_E}{\partial \ln \sigma} = \text{Im} \left(\frac{\sigma \partial \mathbf{E}}{\mathbf{E} \partial \sigma} \right) \quad (71)$$