

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CENTRO DE GEOCIÊNCIAS**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

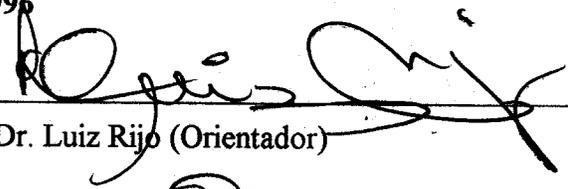
**ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DO MODELO DE HUGHES**  
**EM SONDAGENS MAGNETOTELÚRICAS**

**TESE APRESENTADA POR**  
**ELINEI PINTO DOS SANTOS**

**COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE**  
**MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA**

**Data de Aprovação :** 13/02/1996

**COMITÊ DE TESE:**

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Luiz Rijo (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Om Prakash Verma

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Licurgo Peixoto de Brito

**BELEM**

**1996**

**SANTOS, Elinei Pinto dos. Análise da resolução do modelo de Hughes em sondagens magnetotelúricas. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1994. 80p.**

**Tese (Mestrado em Geofísica) - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1995.**

**1. MÉTODO MAGNETOTELÚRICO. 2. MODELO DE HUGHES. I. Título.**

Aos meus pais, Avelino Santos (em  
memória) e Iolane Santos e a meus  
irmãos, Eliana, Elivilson, Elivaldo,  
Elinaldo, Elisabeth e Elineth.

## AGRADECIMENTOS

Em especial, ao Dr. Luiz Rijo, pela orientação, pela paciência e pelas sugestões valiosas à realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Drs. Licurgo Peixoto de Brito e Om Prakash Verma, pela disponibilidade e revisão crítica do trabalho de tese.

Aos professores que compõem o quadro docente do Curso de Pós-Graduação em Geofísica.

A todos os demais funcionários do prédio de Pós-Graduação em Geofísica.

Ao Departamento de Geofísica, pela infra-estrutura oferecida e ao convênio UFPA-PETROBRÁS-FADESP, pelo suporte financeiro necessário à realização deste trabalho.

Ao Departamento de Física pela minha liberação das atividades de ensino permitindo a realização deste trabalho.

Aos amigos Simone Fraiha, Jessé Costa, Valéria Cristina e a todos os alunos do Curso de Pós graduação em Geofísica pelo apoio, sugestões e incentivo no decorrer da tese.

A Leidi Jucá por todo seu amor e dedicação para comigo deste minha graduação.

# SUMÁRIO

	p.
<b>DEDICATÓRIA</b> . . . . .	i
<b>AGRADECIMENTOS</b> . . . . .	ii
<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	iv
<b>RESUMO</b> . . . . .	1
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	3
<b>1 - INTRODUÇÃO</b> . . . . .	4
1.1 MOTIVAÇÃO . . . . .	4
1.2 MÉTODOS ELETROMAGNÉTICOS USADOS PARA INVESTIGAR A ES- TRUTURA DA TERRA . . . . .	4
1.3 O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO . . . . .	5
1.4 OBJETIVO DA TESE . . . . .	6
1.5 METODOLOGIA DO MODELAMENTO . . . . .	7
<b>2 - MODELO DE HUGHES</b> . . . . .	8
2.1 RESPOSTAS DE MATERIAIS GEOLÓGICOS PARA ONDAS ELETROMAGNÉTICA NA BAIXA FREQUÊNCIA . . . . .	8
2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO MODELO DE HUGHES . . . . .	11
2.2.1 Condições de Contorno . . . . .	13
2.2.2 Resultados Obtidos . . . . .	15
<b>3 - GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE HUGHES</b> . . . . .	24
3.1 INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA . . . . .	24
3.2 MODELAMENTO DE INTERFACES CURVAS . . . . .	24
3.3 PRIMEIRO MODELO - FALHA EM SUBSUPERFÍCIE . . . . .	28
3.3.1 Análise da amplitude de $H_x/H_0$ e Fase . . . . .	28
3.3.2 Análise da amplitude de $H_z/H_x$ e Fase. . . . .	29
3.3.3 Análise da Resistividade Aparente Através do Degrau. . . . .	32

3.3.4	Fase da impedância ( $Z_{yx}$ ) através do degrau. . . . .	32
3.4	SEGUNDO MODELO - GRABEM I . . . . .	34
3.4.1	Resistividade Aparente $\rho$ . . . . .	34
3.4.2	Fase da Impedância ( $Z$ ) . . . . .	35
3.5	COMPARAÇÃO DO MÉTODO COM A TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS. . . . .	35
3.6	COMPARAÇÃO ENTRE O MODELAMENTO POR SUPERPOSIÇÃO DE FUNÇÃO ÍMPAR E MODELAMENTO POR FUNÇÃO PAR. . . . .	36
3.7	VARIAÇÃO DO SEGUNDO MODELO - GRABEM II. . . . .	42
3.7.1	Análise da Resistividade Aparente e Fase. . . . .	42
3.7.2	Comparação do método com a técnica de elementos finitos. . . . .	42
3.8	VARIAÇÃO DO SEGUNDO MODELO - GRABEM III. . . . .	46
3.8.1	Análise da Resistividade Aparente e Fase. . . . .	46
3.8.2	Comparação do método com a técnica de elementos finitos. . . . .	46
3.9	VARIAÇÃO DO SEGUNDO MODELO - BACIA AFLORANTE . . . . .	50
3.9.1	Amplitude e fase da componente horizontal do campo magnético ( $H_x/H_0$ ) através da bacia. . . . .	50
3.9.2	Amplitude da razão $H_z/H_x$ através da bacia . . . . .	51
3.9.3	Fase de ( $H_z/H_x$ ) através da bacia. . . . .	51
4	CONCLUSÕES . . . . .	54
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	55
I	APÊNDICE A . . . . .	57
I.1	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO . . . . .	57
II	APÊNDICE B . . . . .	70
II.1	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO PARA A GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DE HUGHES . . . . .	70
III	APÊNDICE C . . . . .	76
III.1	EXPANSÃO EM SÉRIE DE FOURIER DAS ESTRUTURAS . . . . .	76

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## FIGURAS

Figura 2.1	Modelo de Hughes . . . . .	11
Figura 2.2	Amplitude de $\beta$ para vários valores de $p$ , usando o primeiro conjunto de valores. . . . .	18
Figura 2.3	Amplitude de $\beta$ para vários valores de $p$ , usando o segundo conjunto de valores. . . . .	18
Figura 2.4	A fase de $\beta$ para vários valores de $p$ , usando o primeiro conjunto de valores. . . . .	19
Figura 2.5	A fase de $\beta$ para vários valores de $p$ , usando o segundo conjunto de valores. . . . .	19
Figura 2.6	Amplitude de $\beta$ para vários valores de $z_0$ , usando o primeiro conjunto de valores. . . . .	20
Figura 2.7	Amplitude de $\beta$ para vários valores de $z_0$ , usando o segundo conjunto de valores. . . . .	20
Figura 2.8	Amplitude de $\beta$ para várias condutividades da camada superior, usando o primeiro conjunto de parâmetros. . . . .	21
Figura 2.9	Amplitude de $\beta$ para várias condutividades da camada superior, usando o segundo conjunto de parâmetros. . . . .	21
Figura 2.10	Amplitude de $\beta$ para várias condutividades do embasamento, usando o primeiro conjunto de parâmetros. . . . .	22
Figura 2.11	Amplitude de $\beta$ para várias condutividades do embasamento, usando o segundo conjunto de parâmetros. . . . .	22
Figura 2.12	Resistividade aparente ( $\rho$ ) para vários valores de $p$ , usando o primeiro conjunto de parâmetros. . . . .	23
Figura 2.13	Fase para impedância ( $Z$ ) para vários valores de $p$ , usando o primeiro conjunto de parâmetros. . . . .	23
Figura 3.1	Falha em subsuperfície para modelamento . . . . .	28
Figura 3.2	Campo $H_x/H_0$ através do degrau para vários períodos. . . . .	30
Figura 3.3	Fase $H_x/H_0$ através do degrau para vários períodos. . . . .	30
Figura 3.4	Amplitude $H_z/H_x$ através do degrau para vários períodos. . . . .	31

Figura 3.5	Fase $H_z/H_x$ através do degrau para vários períodos. . . . .	31
Figura 3.6	Resistividade Aparente para o degrau ( $A = 1km; z_0 = 3km$ ) em várias posições de sondagem. . . . .	33
Figura 3.7	Fase da Impedância ( $Z$ ) para o degrau ( $A = 1km; z_0 = 3km$ ) várias posições de sondagem. . . . .	33
Figura 3.8	Estrutura para modelamento . . . . .	34
Figura 3.9	Resistividade Aparente ( $\rho_a$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ). . .	37
Figura 3.10	Fase da Impedância ( $Z_{yx}$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ). . . . .	37
Figura 3.11	Comparação entre método semi-analítico(SA) e técnica de elementos finitos(EF) - Curvas de Resistividade. . . . .	38
Figura 3.12	Comparação entre método semi-analítico(SA) e técnica de elementos finitos(EF) - Curvas de Fase. . . . .	39
Figura 3.13	Comparação em superposição seno e cosseno - Curvas de Resistividade. . . . .	40
Figura 3.14	Comparação em superposição seno(SS) e cosseno(SC) - Curvas de Fase. . . . .	41
Figura 3.15	Resistividade Aparente ( $\rho$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ). . . . .	43
Figura 3.16	Fase da Impedância ( $Z$ ) variando a posição de sondagem. . . . .	43
Figura 3.17	Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Resistividade. . . . .	44
Figura 3.18	Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Fase. . . . .	45
Figura 3.19	Resistividade Aparente ( $\rho$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ). . . . .	47
Figura 3.20	Fase da Impedância ( $Z$ ) variando a posição de sondagem. . . . .	47
Figura 3.21	Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Resistividade. . . . .	48
Figura 3.22	Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Fase. . . . .	49
Figura 3.23	Bacia aflorante para modelamento . . . . .	50
Figura 3.24	Módulo do campo magnético horizontal $H_x/H_0$ através da heterogeneidade . . . . .	52
Figura 3.25	Fase do campo magnético horizontal $H_x/H_0$ através da bacia . . . . .	52
Figura 3.26	Módulo da razão $H_z/H_x$ através da bacia . . . . .	53
Figura 3.27	Fase da razão $H_z/H_x$ através da bacia . . . . .	53

## TABELAS

Tabela 2.1	Valores do <i>skin depth</i> para vários períodos nas condutividades usadas	15
------------	---	----

## RESUMO

Na maioria dos métodos de exploração geofísica, a interpretação é feita assumindo-se um modelo da Terra uniformemente estratificado. Todos os métodos de inversão, inclusive o de dados eletromagnéticos, exigem técnica de modelamento teórico de modo a auxiliar a interpretação. Na literatura os dados são geralmente interpretados em termos de uma estrutura condutiva unidimensional; comumente a Terra é assumida ser horizontalmente uniforme de modo que a condutividade é função somente da profundidade. Neste trabalho uma técnica semi-analítica de modelagem desenvolvida por Hughes (1973) foi usada para modelar a resposta magnética de duas camadas na qual a interface separando as camadas pode ser representada por uma expansão em série de Fourier.

A técnica envolve um método de perturbação para encontrar o efeito de um contorno senoidal com pequenas ondulações. Como a perturbação é de primeira ordem a solução obtida é linear, podemos então usar o princípio da superposição e combinar soluções para várias senoides de forma a obter a solução para qualquer dupla camada expandida em série de Fourier.

Da comparação com a técnica de elementos finitos, as seguintes conclusões podem ser tiradas:

- Para um modelo de dupla camada da Terra, as camadas separadas por uma interface cuja profundidade varia senoidalmente em uma direção, as respostas eletromagnéticas são muito mais fortes quando a espessura da primeira camada é da ordem do *skin depth* da onda eletromagnética no meio, e será tanto maior quanto maior for o contraste de condutividade entre as camadas;
- Por outro lado, a resistividade aparente para este modelo não é afetada pela mudança na frequência espacial ( $\nu$ ) do contorno;
- Em caso do uso da solução geral para qualquer dupla camada na Terra cuja interface possa ser desenvolvida em série de Fourier, esta técnica produziu bons resultados quando comparado com a técnica de elementos finitos. A linearização restringe a aplicação da técnica para pequenas estruturas, apesar disso, uma grande quantidade de estruturas pode ser modelada de modo simples e com tempo computacional bastante rápido;

- Quando a dimensão da primeira camada possui a mesma ordem de grandeza da estrutura, esta técnica não é recomendada, porque para algumas posições de sondagem, as curvas de resistividade aparente obtidas mostram um pequeno deslocamento quando comparadas com as curvas obtidas por elementos finitos.

## ABSTRACT

In most geophysical exploration methods, the interpretation is carried out assuming a uniformly stratified Earth model. Due to the lack of uniqueness in the inversion of electromagnetic data, all of the methods require theoretical modeling techniques to aid interpretation. In the literature data has usually been interpreted in terms of a one-dimensional conductivity structure; commonly the Earth is assumed to be horizontally uniform so that the conductivity is a function of depth only.

In this work a new technique was developed to model a generic two-layer Earth in which the interface separating the layers can be represented by a Fourier series. The technique involves a perturbation method to find the effects of a sinusoidal boundary with small undulations. Because the first-order perturbation solution is a linear one, we can use the overlap principle and combine solutions for several different sinusoids to form the solution for any two-layer in which the boundary is represented by a Fourier series.

Comparison with the finite elements technique, the following conclusions can be drawn:

- For one model of a flat, two-layer Earth, the layers separated by an interface whose depth varies sinusoidal in one direction, the electromagnetic response are more strong when the first layer thickness is of the order of *skin depth* of the electromagnetic wave in the medium;
- On the other hand, the apparent resistivity for this model is not affected by the change in the spatial frequency ( $\nu$ ) of the boundary;
- In case of using the general solution for any two layer Earth that can be developed in Fourier series, this technique produced good results when compared to finite elements technique. The linearization restrict the application of the technique to small structure, nevertheless, a lot of structure can be model in simple way and the computational time is very fast;
- When the dimension of the first layer has the same order of magnitude of the structure, this technique is not recommended because for some particular sounding position, the apparent resistivity curves obtained show a small shift when compared to the curves obtained by finite elements.

# 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O efeito da geometria da subsuperfície sobre o campo eletromagnético tem sido estudado para relativamente poucas configurações, embora a indução eletromagnética em meios com estratificação horizontal, na presença de qualquer fonte, seja um assunto clássico na literatura geofísica CAGNIARD (1953), WEAVER(1963), KEEVA VOZOFF(1972), KAUFMAN & KELLER(1981). Com relação a indução em meios com interface senoidal, a literatura em Geofísica contém muita pouca informação. Este é um problema de maior dificuldade e por isso, mais raro na literatura, a despeito de sua importância na solução semi-analítica, através da análise de Fourier, da resposta eletromagnética de meios com variação lateral de condutividade.

Para interpretação de dados na exploração geofísica, a maioria dos métodos assume um modelo de Terra estratificado. Para a técnica de inversão, todos os métodos necessitam de um modelo direto a fim de auxiliar a interpretação dos dados de campo. Embora a técnica de elementos finitos seja eficiente e precisa no cálculo de modelos diretos, seu custo computacional é elevado, além de exigir um grande esforço na implementação computacional. Neste trabalho apartir apartir de uma técnica semi-analítica desenvolvida por Hughes (1973), desenvolveu-se um algoritmo eficiente que pode ser usado na inversão sob a condição de linearidade imposta no trabalho de Hughes para obtenção da solução semi-analítica. Este algoritmo é eficiente e de implementação simples para modelamento direto de qualquer estrutura que possa ser desenvolvida em série de Fourier.

## 1.2 MÉTODOS ELETROMAGNÉTICOS USADOS PARA INVESTIGAR A ESTRUTURA DA TERRA

Um grande número de diferentes técnicas eletromagnéticas são usadas para investigar a estrutura da Terra. Esses métodos variam da frequência das variações geomagnéticas naturais diária, usadas para mapear a estrutura da condutividade do manto inferior e as altas frequências na faixa de MHz usadas para investigar baixas profundidades como as minas de carvão. Nesse trabalho de tese estamos interessados em estudar os efeitos da

heterogeneidade lateral usando um modelo de estratificação não paralela sobre as medidas eletromagnéticas. Faremos uso de dois parâmetros para esse estudo o "Wave Tilt" ou medida da micropulsção ( $H_z/H_x$ ), sendo esta uma medida na frequência em uma posição fixa e a impedância de superfície ( $Z=E_y/H_x$ ), mais comumente chamado "Método Magnetotelúrico". Esses parâmetros são convenientes pois não dependem do valor absoluto do campo fonte medido.

### 1.3 O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

O método magnetotelúrico é uma técnica de medida de campo eletromagnético a qual emprega certos campos eletromagnéticos em grandes escalas (geralmente baixa frequência) e sistemas de correntes terrestres induzidas por esses campos. A existência de correntes terrestres em grande escala, foi primeiramente estabelecido por Barlow em 1847 durante os primeiros estudos dos sistemas britânico de telégrafo. Registros de períodos longos foram feitos em Paris, Greenwich e Berlin no século dezenove. Nos dias atuais são feitos em várias partes do mundo.

A fonte dessas correntes são localizadas em regiões exteriores a Terra. Flutuações periódicas e transientes podem ser correlacionadas com variações diurnas no campo magnético da Terra, causado por emissão solar, aurora e outros fenômenos atmosféricos. Essas atividades tem uma influência direta sobre a corrente na ionosfera, este é o modo que as correntes telúricas são induzidas na Terra pelas correntes na ionosfera.

A fonte geradora do campo natural que provoca essas correntes é devido a flutuações que ocorrem naturalmente no campo magnético da terra. Essa fonte está presente sobre toda a terra e praticamente em todo instante, tendo um grande intervalo de frequência. Na prospecção é geralmente usado o intervalo de  $10^{-4}$  a  $10^4 Hz$ . Para frequências abaixo de  $1 Hz$  a maioria das fontes de energia vem das micropulsções do campo natural eletromagnético causada por distúrbios na ionosfera. Essas micropulsções são causadas principalmente pela interação do vento solar com a ionosfera. A intensidade das micropulsções varia com a posição diária do Sol decrescendo na ionosfera e são fortemente dependente da presença e magnitude das explosões que ocorrem no interior do Sol.

Nas frequências acima de  $1 Hz$ , a energia das fontes provém dos fenômenos elétricos na atmosfera, tal como os relâmpagos. Esta energia gerada localmente propaga-se sobre uma grande distância no espaço entre a superfície condutora da terra e a ionosfera. Como um guia de onda usado em transmissão de sinais.

Uma vasta quantidade de trabalhos tem sido realizados de modo a caracterizar essas

fontes naturais do campo eletromagnético. É largamente aceito, pelo menos para efeito de facilidade de trabalho, que na superfície da terra as fontes naturais geram ondas planas eletromagnéticas. Devido ao grande contraste de condutividade entre a terra mais condutora e o ar isolante, essas ondas planas penetram verticalmente dentro da terra.

Após o campo de indução magnético ser gerado pela ionosfera ou pelas atividades de relâmpagos em um dado lugar na superfície da terra, este gera uma onda plana que penetra verticalmente no interior da terra. O campo então interage com a estrutura geológica. A onda incidente sofre todos os fenômenos ondulatórios usuais, como reflexão, transmissão e refração como uma onda plana interagindo com uma estrutura condutora de mais de uma dimensão. Pode-se tratar as várias partes da estrutura geológica como um sistema que consiste de um condutor colocado em um campo magnético dependente do tempo. De acordo com a lei de Faraday este campo magnético variável no tempo gera por indução um campo elétrico na estrutura geológica. Um observador na superfície da terra pode desta forma medir tanto o campo magnético quanto o campo elétrico induzido. O campo magnético age principalmente como campo fonte, enquanto o campo elétrico é um fenômeno secundário induzido pela interação entre o campo magnético e a estrutura geológica.

Baseado nesse estudo, Conrad Schlumberger em 1921 elaborou o método telúrico, o qual relaciona o campo magnético das correntes naturais na terra, em vários postos de investigação com medidas simultâneas observadas numa estação base.

Analisando as variações magnéticas das componentes verticais de longos períodos, WIESE, iniciou em 1951 ( na antiga Alemanha Oriental), o método hoje conhecido como sondagem geomagnética profunda. Das idéias desenvolvidas por SCHUMBERGER e WIESE, TIKHONOV (1950) propôs um método no qual utiliza simultaneamente as medidas das componentes totais dos campos elétricos (**E**) e magnética (**H**) nos pontos de investigação, para obter os valores da resistividade aparente da subsuperfície em função da profundidade, sendo necessário somente selecionar um intervalo de frequência apropriado do campo eletromagnético natural. CAGNIARD(1953) denominou este novo método de magnetotelúrico, nome que enfatiza o uso das duas componentes utilizadas, magnética e elétrica.

#### 1.4 OBJETIVO DA TESE

Este trabalho tem por objetivo encontrar uma solução semi-analítica da resposta eletromagnética de interfaces não planas. Inicialmente apresentamos a solução fechada para acamamento com interface variando senoidalmente, modelo resolvido por HUGHES(1973). Para este modelo Hughes verificou que a resposta eletromagnéticas são muito mais fortes quando

a espessura da primeira camada é da dimensão do *skin depth* da onda eletromagnética no meio. Neste trabalho verificamos que resistividade aparente para este modelo não é afetada pela variação da frequência espacial ( $\nu$ ) da interface, variando somente com parâmetros de condutividade e profundidade como era esperado. A partir do modelo de Hughes foi feita uma generalização para o modelamento de qualquer estrutura que possa ser desenvolvida por série de Fourier. A decomposição espectral da estrutura em harmônicos de Fourier possibilita usar a solução anterior (determinada para um único harmônico) para o cálculo da micropulsção e resistividade aparente de estruturas complexas, simplesmente usando as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier da estrutura. Uma aproximação linear é feita a fim de facilitar o desenvolvimento analítico e obtermos uma solução semi-analítica fechada para os modelos. Esta aproximação restringe a aplicação da técnica a estruturas de dimensões menores que  $3km$ , para essas dimensões a solução semi-analítica não converge para a solução calculada por elementos finitos. A convergência não depende do número de termos da série, de fato verifica-se que a resposta não se modifica a partir de trezentos termos.

## 1.5 METODOLOGIA DO MODELAMENTO

Duas estruturas foram modeladas para verificação do método, uma com simetria par em forma de trapézio e outra com simetria ímpar em forma de degrau, representando uma falha em subsuperfície. Para a estrutura com simetria par, usamos trinta termos da série de Fourier da função que descreve a estrutura a fim de modelarmos uma bacia aflorante com características bem distintas das bacias modeladas geralmente por depressão retangular. Aumentando o número de termos reproduzimos totalmente a estrutura em forma de trapézio e analisamos sua influência nas medidas de micropulsção e resistividade aparente, quando variadas as dimensões de profundidade e dimensão da estrutura.

Para estrutura com simetria ímpar analisamos também as influências das variações de profundidade e dimensão da estrutura nas medidas de resistividade aparente e micropulsção. Para analisar a resolução dos modelos aqui tratados comparamos com os resultados computados pelo método dos elementos finitos.

## 2 - MODELO DE HUGHES

### 2.1 RESPOSTAS DE MATERIAIS GEOLÓGICOS PARA ONDAS ELETROMAGNÉTICA NA BAIXA FREQUÊNCIA

Para meios isotrópicos e contínuos valem as equações constitutivas:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

em que

$\mathbf{B}$  - vetor indução magnética( $T$ );

$\mathbf{D}$  - vetor deslocamento elétrico( $C/m^2$ );

$\mathbf{J}$  - vetor densidade de corrente elétrica( $A/m^2$ );

$\mathbf{H}$  - campo magnético( $A/m$ );

$\mathbf{E}$  - campo elétrico( $V/m$ );

$\mu$  - permeabilidade magnética do meio( $H/m$ );

$\epsilon$  - permissividade elétrica do meio( $F/m$ );

$\sigma$  - condutividade elétrica do meio( $S/m$ );.

As equações de Maxwell para meios homogêneos, isotrópicos e independentes de fontes de carga e corrente no meio são dadas por:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.4)$$

Usando a relação:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , e tomando o rotacional da equação(2.1), temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

como  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  no estado estacionário, a equação acima se reduz para:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial(\sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})}{\partial t}.$$

Efetuada a derivada em relação ao tempo, obtemos;

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

Para uma onda plana monocromática de frequência angular  $\omega$ , assumimos que  $\mathbf{E}$  possui dependência temporal na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

temos portanto que;

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}); \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Usando estas derivadas na equação (2.6), temos;

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -i\sigma\mu\omega \mathbf{E} + \epsilon\mu\omega^2 \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Vamos considerar a magnitude relativa dos termos que aparecem no lado direito da equação (2.7). Com exceção da água ( $\epsilon/\epsilon_0 = 80$ ) a permissividade elétrica raramente varia mais do que uma ordem de magnitude, e para a maioria das rochas e minerais típicos o valor é de aproximadamente  $\epsilon = 9\epsilon_0 = 8 \times 10^{-11} F/m$ . Até mesmo entre minerais ferromagnéticos a permeabilidade magnética relativa permanece menor do que 3, e na grande maioria dos casos é muito próximo da unidade; portanto podemos fazer  $\mu = \mu_0 = 1.3 \times 10^{-6} \text{ henry/m}$ . Sobre a condutividade elétrica, contudo, não podemos generalizar; para esta propriedade podemos tomar dentro do intervalo, valores de praticamente zero no ar, até outros valores da ordem de  $10^{-3} S/m$  em rochas relativamente não condutoras a valores tão grandes quanto  $10^4 S/m$  em certos minerais semimetálicos. A magnitude do parâmetro remanescente  $\omega$  depende do aparato. Frequências típicas são cerca de  $10^3 \text{ cps}$  ( $6,0 \times 10^3 \text{ rad/s}$ ). Este quadro é raramente

excedido em larga-escala em sistema de prospecção cuja dimensões globais são tão grandes quanto  $10^3 m$ . Se agora compararmos a magnitude dos termos da equação à distâncias menores do que  $10^3 m$  da fonte, nós encontramos que acima da superfície onde  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$  e  $\sigma = 0$ ;

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0,$$

desde que o receptor localize-se bem dentro da zona quase-estática do transmissor, i.e, distâncias que são pequenas em relação ao comprimento de onda da radiação emitida pela fonte.

Por outro lado, em rochas normalmente condutoras onde  $\epsilon = 9\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  e  $\sigma \cong 10^{-3} S/m$ , temos;

$$\nabla^2 \mathbf{E} = [(6,03 \times 10^{-13} - 7,5 \times 10^{-6}i)m^{-2}] \mathbf{E}$$

e em zonas altamente condutoras onde  $\sigma$  pode ocorrer tão alto quanto  $10^4 S/m$ , temos que;

$$\nabla^2 \mathbf{E} = [6,03 \times 10^{-13} - 75,4i)m^{-2}] \mathbf{E}.$$

Podemos verificar pelos exemplos anteriores que a parte real do coeficiente de  $\mathbf{E}$  é tão pequeno em relação a parte imaginária que podemos negligenciá-lo. Em rochas normalmente condutoras até mesmo o termo imaginário tem muito pouco efeito na maioria dos casos, porém em zonas altamente condutoras isto não ocorre. Portanto podemos concluir que:

Em regiões não condutoras o campo obedece a equação:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0, \tag{2.8}$$

enquanto em zonas tendo uma condutividade apreciável o campo satisfaz a equação:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -i\sigma\mu\omega\mathbf{E}. \tag{2.9}$$

## 2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO MODELO DE HUGHES

Nesta seção vamos reproduzir o modelo desenvolvido por Hughes(1973), tanto a solução analítica quanto seus resultados a fim de termos uma melhor compreensão do problema e confiança no programa desenvolvido com estas equações, acrescentaremos a sondagem magnetotélúrica não utilizada por Hughes.

O primeiro modelo solucionado por Hughes, consistiu de um modelo de camada bi-dimensional com embasamento variando senoidalmente. O modelo consiste de duas camadas de condutividades diferentes separadas por um embasamento do tipo ( $Z = Z_0 + Z_1 \text{Sen}vx$ ). A Figura 2.1 representa o modelo a ser resolvido.

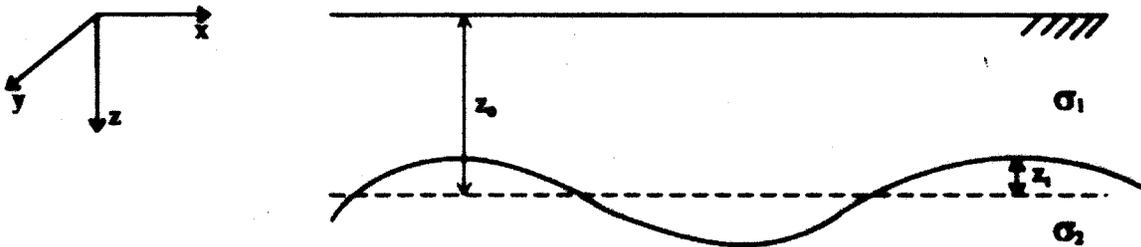


Figura 2.1 - Modelo de Hughes

No modelo resolvido por Hughes o campo incidente foi adotado como uma onda eletromagnética plana, incidindo normalmente. O modelo é bi-dimensional de forma que um campo vertical é induzido através de todo o modelo. O modelo é uniforme na direção- $y$  de modo que  $\partial/\partial y = 0$ . O campo incidente foi considerado polarizado com o seu vetor campo elétrico ao longo do eixo- $y$ . Esta configuração é conhecida como TE ou "polarização-E" por JONES & PRICE (1970), com esta configuração de campo incidente teremos uma componente vertical( $z$ ) e horizontal( $x$ ) induzida do campo magnético, mas não do campo elétrico. Considerando o modelo constituído por duas camadas as quais são separadas por uma interface cuja profundidade varia periodicamente com relação a  $x$ .

Tomando o campo  $E$  polarizado ao longo do eixo- $y$ , de forma que

$$E = E_y \hat{j}.$$

Representando  $E_y$  por uma expansão em série de Fourier na direção- $x$

$$E_y(x, z) = \sum_n E_n(z) e^{in\nu x} \quad (2.10)$$

no ar e na camada homogênea a equação (2.9) pode ser simplificada e separada, ou seja

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -i\sigma\mu\omega E_y. \quad (2.11)$$

Como  $\partial/\partial y = 0$  e usando o campo representado como uma serie de Fourier

$$\frac{\partial^2 E_y(x, z)}{\partial x^2} = -n^2\nu^2 E_y(x, z),$$

a equação(2.11) se reduz para

$$\frac{\partial^2 E_n(z)}{\partial z^2} - n^2\nu^2 E_n(z) = -i\sigma\mu\omega E_n(z) = -(i\sigma\mu\omega - n^2\nu^2)E_n = -\gamma_n^2 E_n(z). \quad (2.12)$$

A solução da equação(2.12) é

$$E_n = a_n e^{i\gamma_n z} + b_n e^{-i\gamma_n z}, \quad (2.13)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são as constantes de integração determinadas pelas condições de contorno e

$$\gamma_n^2 = i\sigma\mu\omega - n^2\nu^2. \quad (2.14)$$

Usando a equação de Maxwell,  $\nabla \times \mathbf{E} = i\mu\omega\mathbf{H}$ , e usando  $\mathbf{E} = E_y(x, z)\hat{j}$  obtemos

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad H_y = 0; \quad H_z = \frac{-i}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Em uma camada homogênea obtemos desse modo:

$$E_y = \sum_n (a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}, \quad (2.16)$$

$$H_x = -\frac{1}{\omega\mu} \sum_n \gamma_n (a_n e^{i\gamma_n Z} - b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}, \quad (2.17)$$

$$H_z = \frac{\nu}{\omega\mu} \sum_n n (a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}. \quad (2.18)$$

Queremos determinar a impedância e a micropulsação dadas respectivamente por:

$$Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{-\omega\mu \sum_n (a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}}{\sum_n \gamma_n (a_n e^{i\gamma_n Z} - b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}}, \quad (2.19)$$

$$\beta = \frac{H_z}{H_x} = \frac{-\nu \sum_n n (a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}}{\sum_n \gamma_n (a_n e^{i\gamma_n Z} - b_n e^{-i\gamma_n Z}) e^{in\nu x}}. \quad (2.20)$$

Usando a impedância  $Z_{yx}$  obtemos a resistividade aparente do meio (CAGNIARD, 1953)

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu_0} |Z_{yx}|^2. \quad (2.21)$$

## 2.2.1 Condições de Contorno

O campo elétrico em todo o espaço é dado por

$$E_y(x, z) = \sum_n E_n(z) e^{in\nu x},$$

onde para primeira camada temos que:

$$E_n^{(1)} = a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z} \quad (2.22)$$

e para o embasamento:

$$E_n^{(2)} = a'_n e^{i\gamma'_n Z} + b'_n e^{-i\gamma'_n Z}. \quad (2.23)$$

No ar como  $\sigma = 0$ ,  $\gamma_n^2 = -n^2\nu^2$  logo  $\gamma_n = in\nu$  de forma que os coeficientes da série de Fourier que expressam o campo se tornam

$$E_n^{(a)} = \alpha_n e^{\nu n z} + \beta_n e^{-\nu n z}. \quad (2.24)$$

Em cada interface a componente tangencial do campo elétrico e magnético devem ser contínuas sobre todo o contorno. No interior da Terra o campo deve diminuir com a profundidade, assim como a grandes altitudes acima da superfície o campo induzido também tende a decair a zero. Desse modo, temos:

(a) Quando a profundidade aumenta, ou seja  $Z \rightarrow \infty$ , o campo  $E_y \rightarrow 0$ . Portanto, analisando a equação (2.23), verificamos que na segunda camada como a parte imaginária de  $\gamma'_n$  é sempre positiva, temos que  $b'_n = 0$  para todo valor de  $n$ . O valor de  $E_n$  será dado por:

$$E_n^{(2)} = a'_n e^{i\gamma'_n Z}. \quad (2.25)$$

(b) Quando a profundidade diminui, ou seja  $Z \rightarrow -\infty$ , o campo  $E_n \rightarrow 0$ . Portanto analisando a equação (2.24)  $\beta_n = 0$  para  $n > 0$  e  $\alpha_n = 0$  para  $n < 0$ . Assim  $E_n$  será somente:

$$E_n^{(a)} = \alpha_n e^{\nu n Z}. \quad (2.26)$$

(c) Em  $Z = 0$  e  $Z = Z(x)$ , as componentes tangenciais do campo magnético e do campo elétrico devem ser ambas contínuas, pois não há acúmulo de cargas entre as camadas ou presença de pólos isolados entre as contornos da interface. Portanto,  $E_y$ ,  $(\partial E_n / \partial x)$  e  $(\partial E_n / \partial z)$  devem ser contínuos.

Fazemos agora uma aproximação linear ao modelo. Considerando que se  $z_1 \ll 1/\gamma_n$ , temos que os termos de segunda ordem em diante em  $\gamma_n z_1$  podem ser negligenciados.

Mostramos no Apêndice A que  $a_n$  e  $b_n$  são da ordem de  $(\gamma_n z_1)^2$ . De forma que a linearização permite que os harmônicos de ordem superior ao primeiro sejam negligenciados de maneira que somente consideraremos os termos  $E_0$  e  $E_{\pm 1}$  do campo. Usando as condições de contorno mostramos também que as constantes de integração são dadas por:

$$a_1 = -a_{-1} = \frac{-z_1(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)e^{-i\gamma_1 z_0}}{2(\gamma_1 - \gamma_1') - 2f(\gamma_1 + \gamma_1')} C_0, \quad (2.27)$$

onde

$$f = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} e^{-2i\gamma_1 z_0}, \quad (2.28)$$

$$b_1 = -b_{-1} = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} a_1, \quad (2.29)$$

$$a_0 = \frac{\gamma_0 + \gamma_0'}{2\gamma_0} e^{-i\gamma_0 z_0} C_0, \quad (2.30)$$

$$b_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_0'}{2\gamma_0} e^{i\gamma_0 z_0} C_0. \quad (2.31)$$

A constante  $C_0$  está presente em todos os termos de forma que quando fizermos as substituições destas constantes nas equações dos campos ela será eliminada. Sendo os termos  $a_{-1} = -a_1$  e  $b_{-1} = -b_1$ , podemos substituir essas constantes nas Equações 2.19 e 2.20, conseguindo uma forma explícita para  $\beta e Z_{yx}$  dadas respectivamente por:

$$\beta = \frac{-2\nu(a_1 + b_1)\cos\nu x}{\gamma_0(a_0 - b_0) + 2i\gamma_1(a_1 - b_1)\text{sen}\nu x}, \quad (2.32)$$

$$Z_{yx} = \frac{-\omega\mu_0[(a_0 + b_0) + 2i(a_1 + b_1)\text{sen}\nu x]}{\gamma_0(a_0 - b_0) + 2i\gamma_1(a_1 - b_1)\text{sen}\nu x}. \quad (2.33)$$

Estas fórmulas serão usadas para calcularmos a micropulsção e a resistividade aparente de nosso modelo. Os valores de  $\beta$  e  $Z_{yx}$  foram determinados onde o valor da função  $\beta$  é máxima com respeito ao valor de  $x$ , ou seja:

$$x_{max} = \frac{1}{\nu} \arcsin\left(\frac{-2i\gamma_1(a_1 - b_1)}{\gamma_0(a_0 - b_0)}\right).$$

Todas as equações foram normalizadas pelo *skin depth*, ou profundidade pelicular, associado a condutividade do meio,  $\sigma$ , dado por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}},$$

assim como as dimensões relativas a comprimento, profundidade, frequência espacial ( $\nu$ ) e distância periódica horizontal ( $p$ ) da estrutura, ou seja esses parâmetros normalizados serão:

$$\bar{x} = \frac{x^*}{\delta}; \quad \bar{z}_0 = \frac{z}{\delta}; \quad \bar{\nu} = 2\pi\delta\nu; \quad \bar{p} = 1/\bar{\nu} \quad (2.34)$$

Tabela 2.1 - Valores do *skin depth* para vários períodos nas condutividades usadas

Período (s)	Frequência (Hz)	<i>skin depth</i> (km)	
		0.1 $S.m^{-1}$	0.001 $S.m^{-1}$
0.1	10	0.5	5
1	$10^0$	1.6	15.8
3	$3 \times 10^{-1}$	2.9	28.9
10	$10^{-1}$	5.0	50.1
33	$3 \times 10^{-2}$	9.2	91.5
100	$10^{-2}$	15.8	158.1
333	$3 \times 10^{-3}$	28.9	289.4
1000	$10^{-3}$	50.1	501.3
10000	$10^{-4}$	159.1	1590.6

## 2.2.2 Resultados Obtidos

Neste trabalho são escolhidos dois modelos como referência usados no modelamento numérico; o primeiro conjunto representa um sistema geológico, consistindo de um extrato sedimentar condutivo sobre um embasamento ígneo de baixa condutividade e o segundo inverso do primeiro, sendo mais raro de ocorrer geologicamente, exceto perto da superfície onde o extrato pode ter sido invertido por algum tectonismo. Valores "padrões" de condutividade ( $\sigma_1 e \sigma_2$ ), profundidade média de interface ( $z_0$ ) e comprimento de onda ( $p$ ) para os dois modelos são:

Conjunto 1	Conjunto 2
$\sigma_1 = 10^{-1} mho.m^{-1}$	$\sigma_1 = 10^{-3} mho.m^{-1}$
$\sigma_2 = 10^{-3} mho.m^{-1}$	$\sigma_2 = 10^{-1} mho.m^{-1}$
$z_0 = 3km$	$z_0 = 3km$
$p = 3km$	$p = 30km$

Os efeitos da variação da profundidade média da interface ( $z_0$ ), comprimento de onda ( $p$ ) e condutividade sobre a amplitude e fase de  $\beta$  são estudados em relação a estes valores "padrão" citados.

### 1. Efeito do comprimento de onda ( $p$ ) na amplitude de $\beta$ .

Verificamos na Figura 2.2 que a amplitude de  $\beta$  aumenta suavemente até um máximo e então decresce rapidamente. As curvas da Figura 2.2 possuem um máximo muito mais bem definido que as curvas da Figura 2.3 e todos os máximos ocorrem a muito mais baixas frequências. Esta é a principal diferença nas curvas provocada pelos dois conjuntos de parâmetros utilizados, onde invertemos a condutividades das camadas.

A amplitude onde ocorre o valor máximo aumenta com o aumento do comprimento de onda ( $p$ ) e frequência em que isto ocorre diminui a medida que  $p$  aumenta. As curvas da Figura 2.3 são deslocadas para direita provavelmente devido a alta condutividade ter sido usado no modelo. Verificamos ainda que o máximo ocorre quando  $p$  é da mesma ordem que o *skin depth* da onda na camada superior.

Na Figura 2.3 o máximo novamente ocorre quando  $p$  é da mesma ordem que o *skin depth* da onda na camada superior. Porém, este é um improvável modelo geológico, onde a amplitude parece diminuir com o aumento do comprimento de onda ( $p$ ).

Na Figura 2.4 e Figura 2.5 mostramos a diferença de fase encontrada variando a distância periódica horizontal para os dois conjuntos de parâmetros. A Figura 2.4 mostra que as componentes passam em fase próximo da frequência com que o máximo ocorre na Figura 2.2. O crescimento acentuado na diferença de fase em altas frequências ocorre quando a amplitude dos campos é muito pequena, logo pode ser ignorada. A Figura 2.5 mostra que as componentes estão  $180^\circ$  fora de fase próximo da frequência onde ocorre o máximo na Figura 2.3 ocorre.

### 2. Efeito da variação da profundidade média ( $Z_0$ ) na amplitude de $\beta$ .

A Figura 2.6 e Figura 2.7 mostram o efeito da variação da profundidade média da camada interfacial para os dois conjuntos de parâmetros. Vemos novamente aqui que o valor máximo das curvas geradas pelo primeiro conjunto são muito mais pronunciados do que aqueles gerados pelo segundo conjunto. Em ambas figuras verificamos que a amplitude decai com a profundidade, como era de se esperar fisicamente, porém o decaimento é muito mais acentuado na Figura 2.6, de modo que, embora usando o primeiro conjunto de valores temos um maior efeito a profundidades rasas, quando a profundidade é  $10\text{km}$  os efeitos são iguais. Notamos que a escala vertical da Figura 2.6 é dez vezes maior do que a da Figura 2.7.

### 3. Efeito da variação das condutividades das camadas ( $\sigma$ ) na amplitude de $\beta$ .

A Figura 2.8 e Figura 2.9 ilustram os efeitos da variação da condutividade da primeira camada ( $\sigma_1$ ) para os dois conjuntos de valores respectivos. A Figura 2.8 mostra claramente que a frequência no qual a amplitude máxima ocorre é fortemente dependente da condutividade da camada superior. As curvas novamente vem mostrar que a frequência onde isto ocorre é fortemente determinada pela frequência em que  $p$  é igual ao *skin depth* da camada superior. A mudança na amplitude máxima da função ocorre devido a diferença entre as condutividades das camadas. O efeito de indução será tanto mais acentuado quanto for maior a diferença entre as condutividades das camadas.

A Figura 2.9 correspondente ao segundo conjunto de parâmetros, também mostra que o efeito máximo ocorre quando  $p$  é igual ao *skin depth* na camada superior, porém em amplitude bem menor que o mostrado na Figura 2.8. O efeito é muito mais pronunciado quando o contraste de condutividade da primeira camada e embasamento é grande.

A Figura 2.10 e Figura 2.11 mostram o efeito na variação da condutividade do embasamento. Podemos notar que a frequência na qual a amplitude máxima ocorre é levemente alterada, e aumenta com aumento de condutividade. Vemos novamente, principalmente através da Figura 2.10 que o efeito da indução é maior quando a contraste de condutividade entre as camadas é maior.

### 4. Efeito da variação do comprimento de onda ( $p$ ) na resistividade aparente ( $\rho_a$ ) e fase ( $z$ ).

Para o método magnetotelúrico representaremos uma sondagem no período como apresentado na literatura. Na Figura 2.12 e Figura 2.13 temos a resistividade aparente e a fase medidas na posição em que  $\beta$  é máximo. Não há influência perceptível nas medidas variando-se a o comprimento de onda do embasamento senoidal. As curvas obtidas possuem comportamento semelhante ao modelo de duas camadas com embasamento mais resistivo.

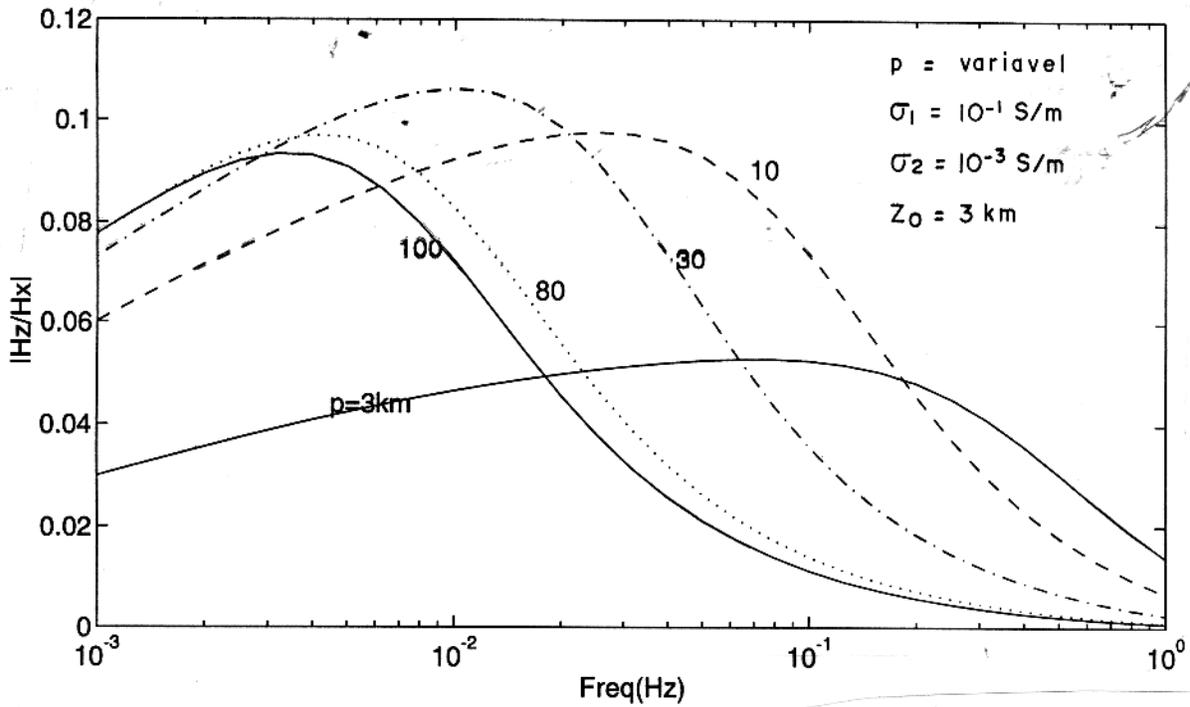


Figura 2.2 - Amplitude de  $\beta$  para vários valores de  $p$ , usando o primeiro conjunto de valores.

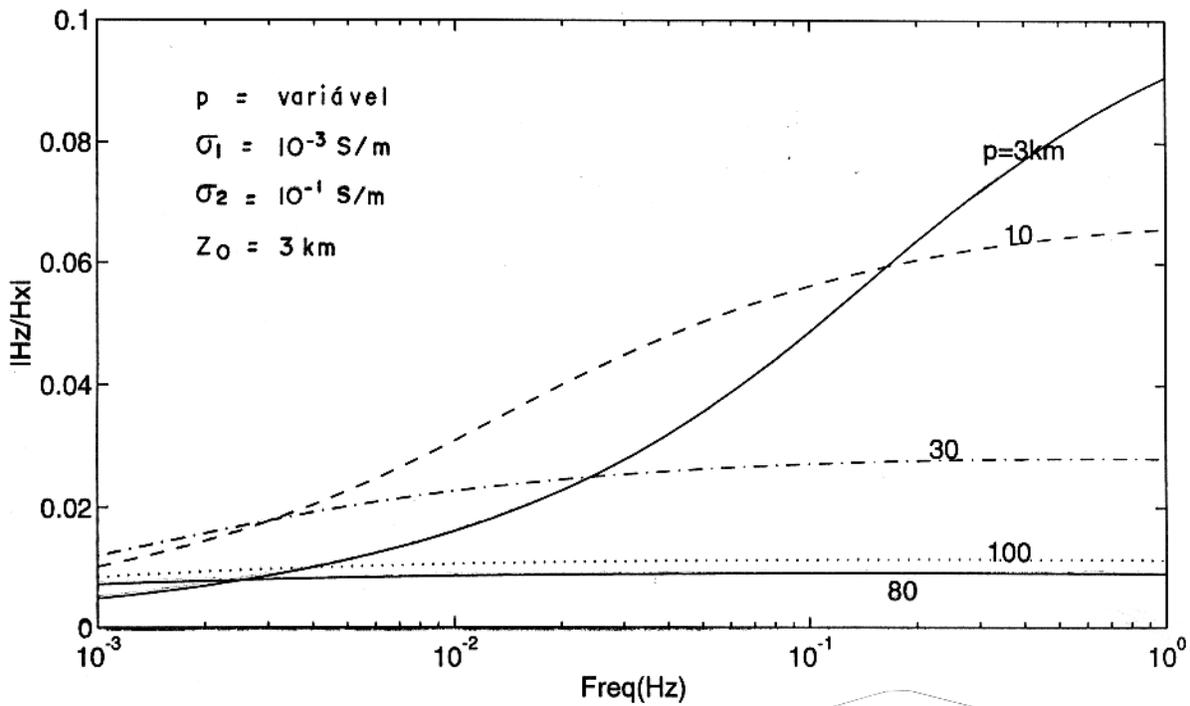


Figura 2.3 - Amplitude de  $\beta$  para vários valores de  $p$ , usando o segundo conjunto de valores.

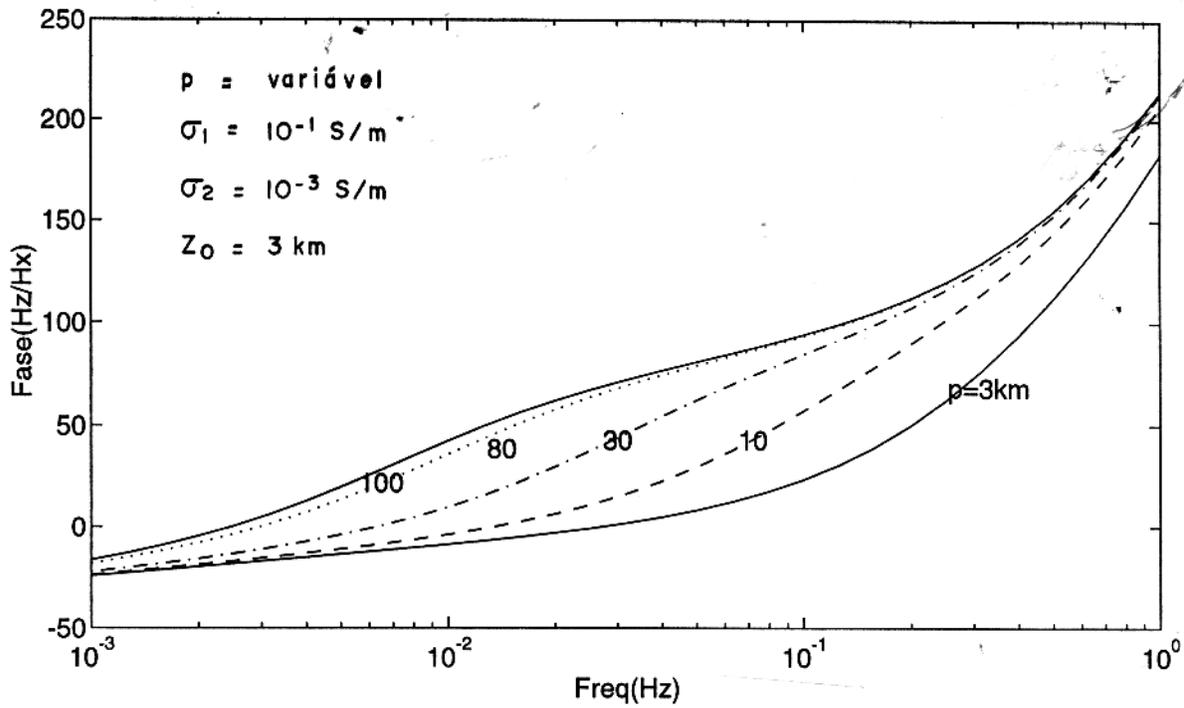


Figura 2.4 - A fase de  $\beta$  para vários valores de  $p$ , usando o primeiro conjunto de valores.

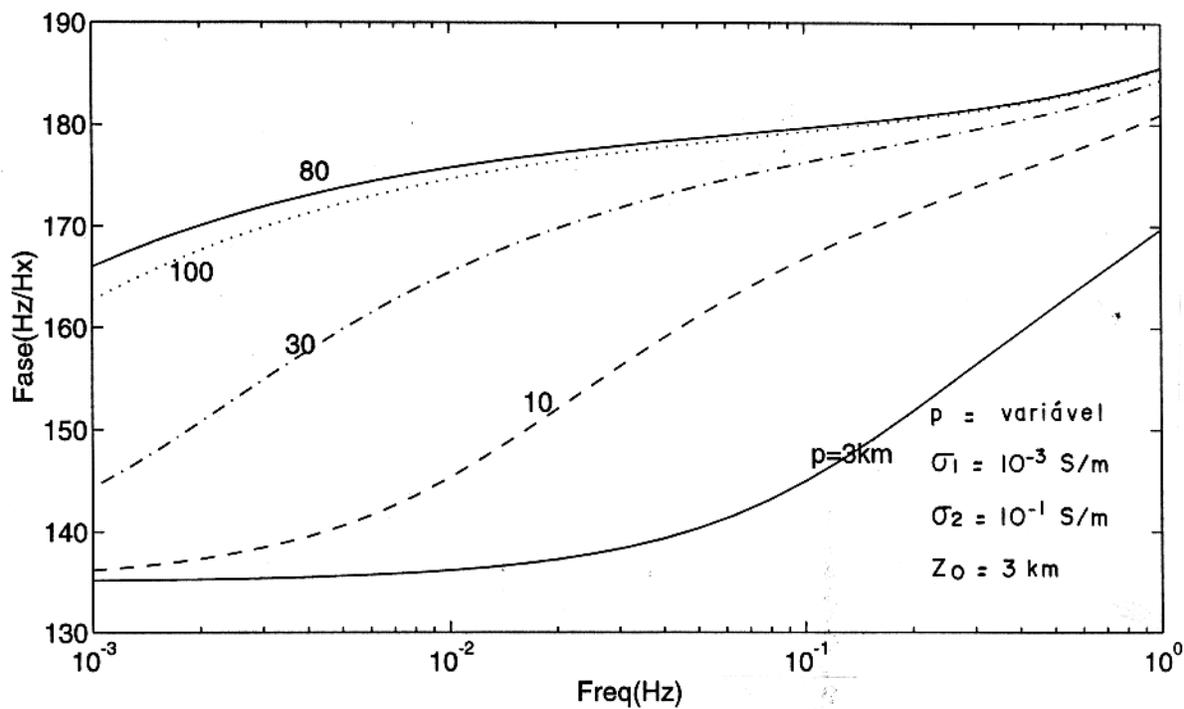


Figura 2.5 - A fase de  $\beta$  para vários valores de  $p$ , usando o segundo conjunto de valores.

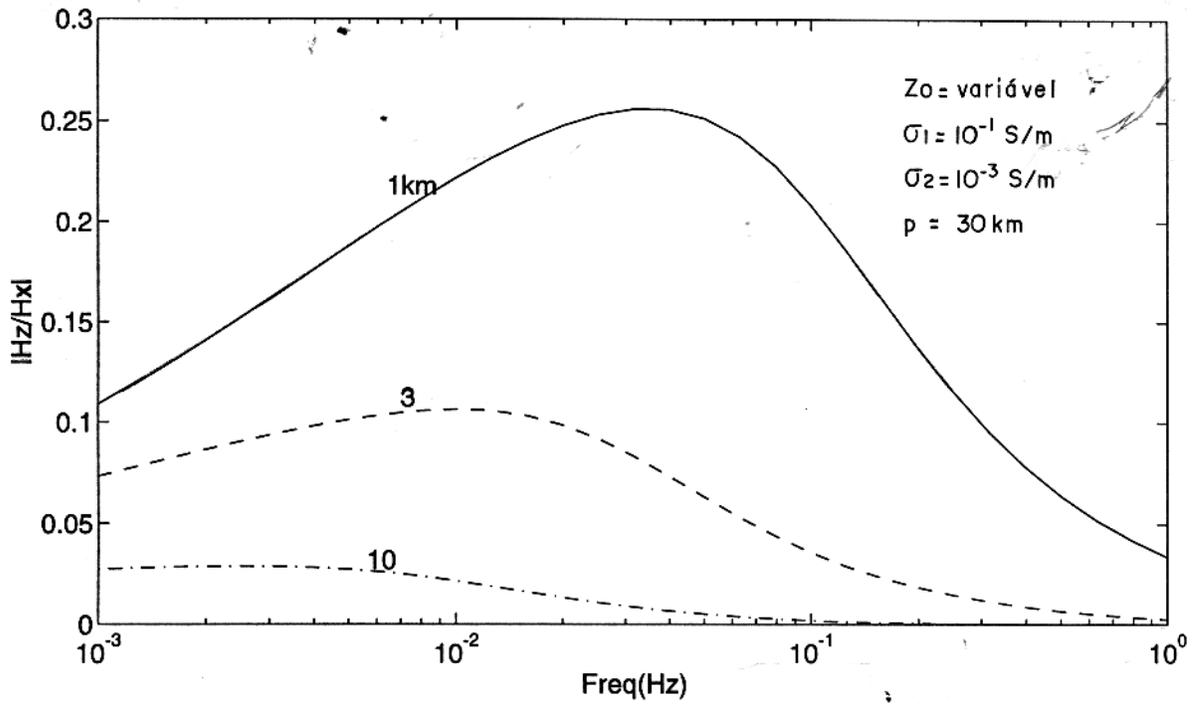


Figura 2.6 - Amplitude de  $\beta$  para vários valores de  $z_0$ , usando o primeiro conjunto de valores.

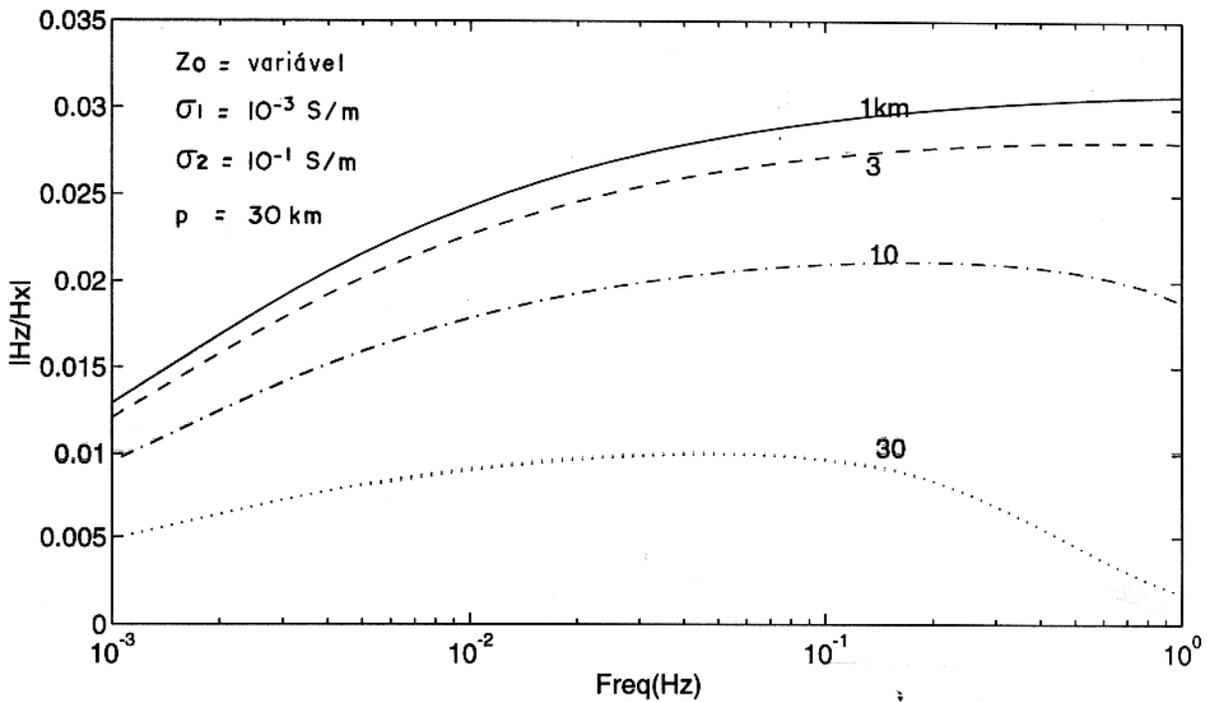


Figura 2.7 - Amplitude de  $\beta$  para vários valores de  $z_0$ , usando o segundo conjunto de valores.

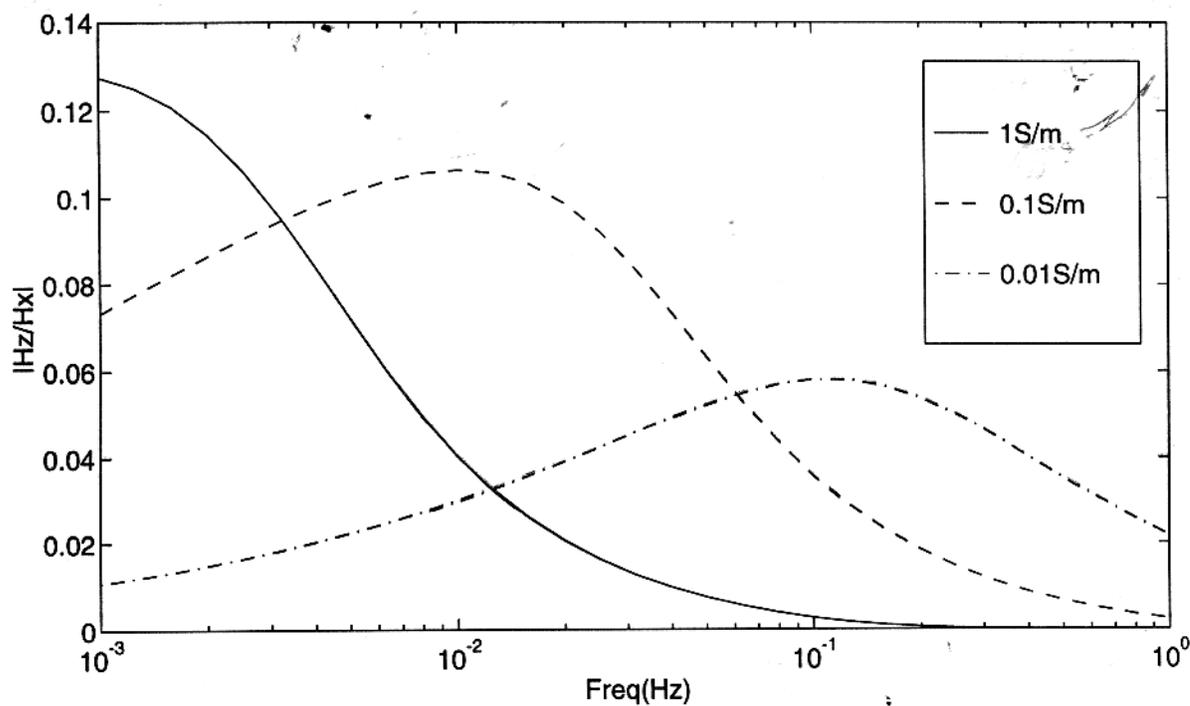


Figura 2.8 - Amplitude de  $\beta$  para várias condutividades da camada superior, usando o primeiro conjunto de parâmetros.

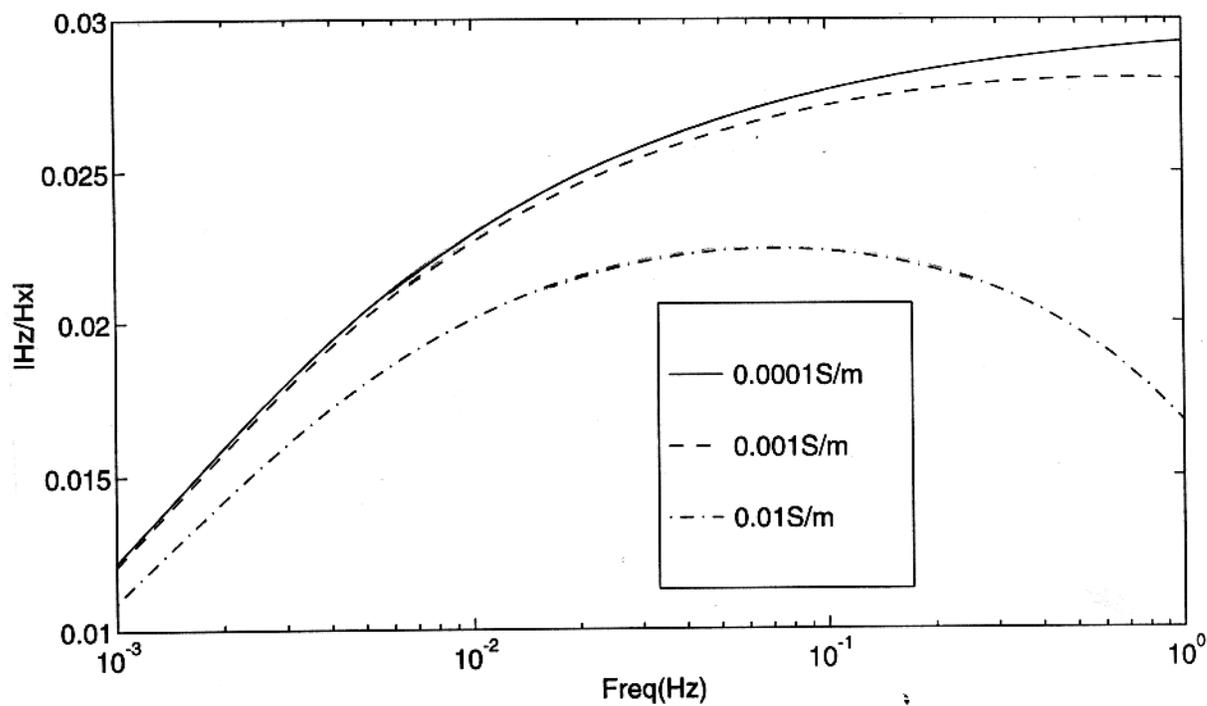


Figura 2.9 - Amplitude de  $\beta$  para várias condutividades da camada superior, usando o segundo conjunto de parâmetros.

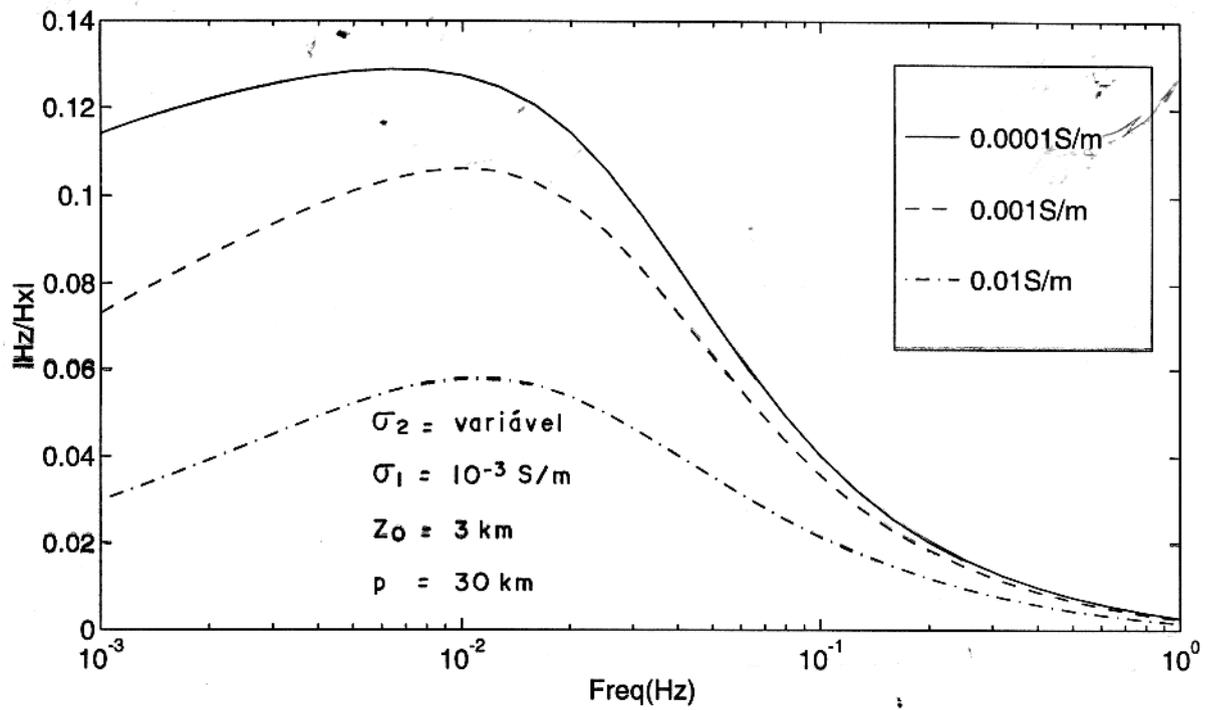


Figura 2.10 - Amplitude de  $\beta$  para várias condutividades do embasamento, usando o primeiro conjunto de parâmetros.

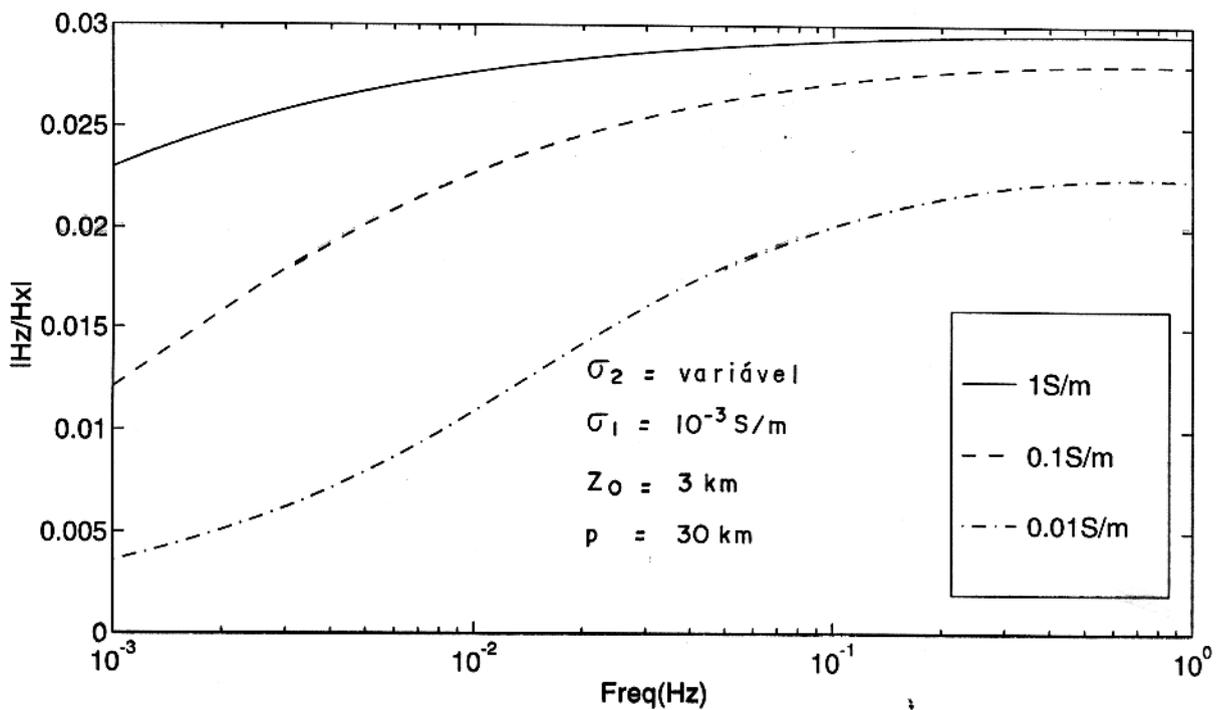


Figura 2.11 - Amplitude de  $\beta$  para várias condutividades do embasamento, usando o segundo conjunto de parâmetros.

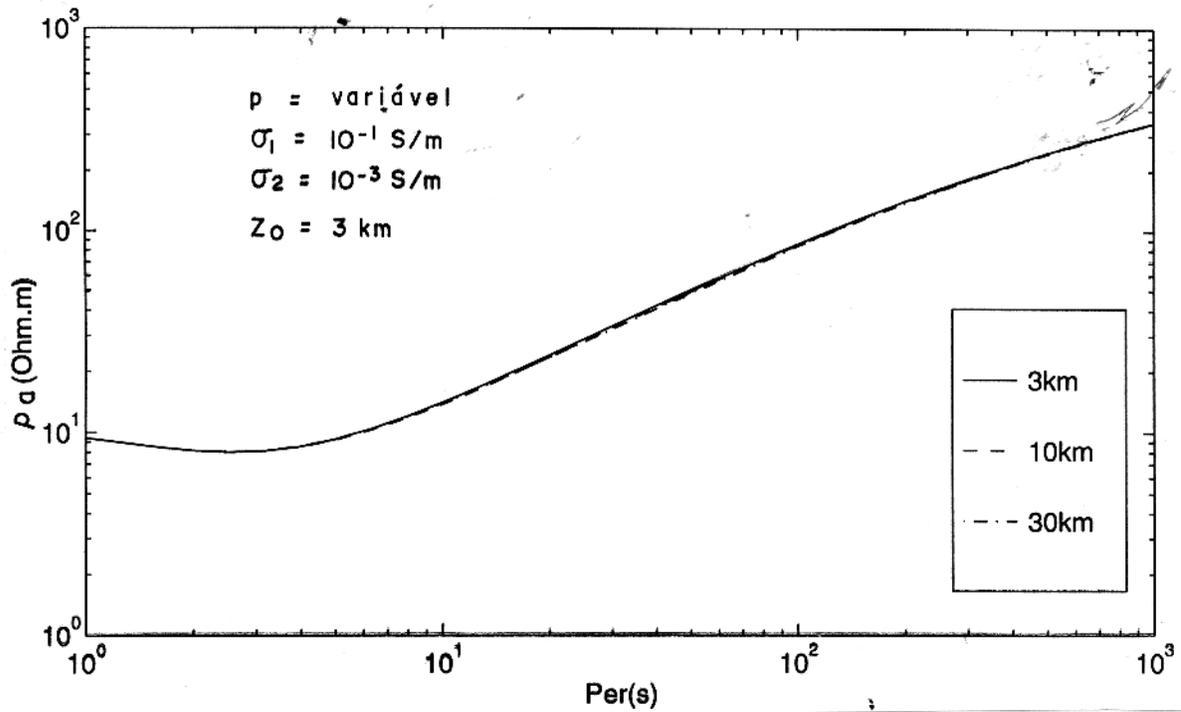


Figura 2.12 - Resistividade aparente ( $\rho$ ) para vários valores de  $p$ , usando o primeiro conjunto de parâmetros.

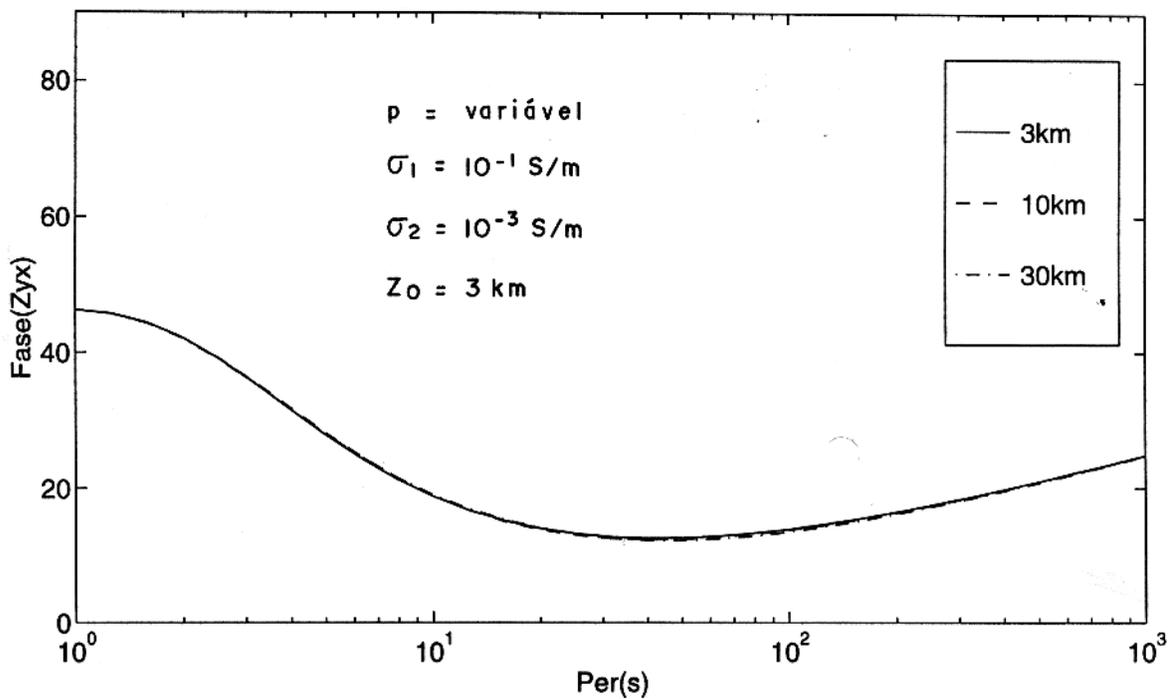


Figura 2.13 - Fase para impedância ( $Z$ ) para vários valores de  $p$ , usando o primeiro conjunto de parâmetros.

### 3 - GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE HUGHES

Neste capítulo vamos generalizar o modelo de Hughes. Usamos uma técnica linear para modelagem de anomalia na superfície da Terra. Esta generalização torna possível o modelamento de qualquer interface irregular entre duas camadas de diferentes condutividade usando uma superposição de Fourier das soluções para interface senoidal encontrada no capítulo anterior.

#### 3.1 INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Quando uma onda eletromagnética plana incide sobre um condutor perfeito, o campo magnético tangencial visto na superfície é o dobro da onda incidente, enquanto a componente normal tende a zero.

Para acamamento horizontal, cuja condutividade é função somente da profundidade, isto ocorre de maneira aproximada, por causa do grande contraste de condutividade na superfície. Quando ocorre, no entanto, uma heterogeneidade lateral, os campos na superfície sofrem perturbações causadas pela estrutura condutiva. Vimos no capítulo anterior que estas perturbações ou variações nos campos são mais acentuadas quando a dimensão da escala da heterogeneidade é da mesma ordem que o *skin depth* da onda no meio.

No caso de anomalia bi-dimensional o problema é muito mais simples e somente a componente magnética perpendicular ao *strike* da camada é afetada. Desse modo, esta componente perpendicular ao *strike* contém informação da variação lateral da heterogeneidade.

#### 3.2 MODELAMENTO DE INTERFACES CURVAS

De posse da solução linear, semi-analítica encontrada por HUGHES(1973), para o problema bi-dimensional de duas camadas com interface senoidal, resolvido anteriormente. Apresentamos os resultados da extensão desta solução linear, comparando com a técnica de elementos finitos para modelar qualquer interface que possa ser representada por uma série de Fourier. Sabemos que uma série de Fourier pode modelar apenas estruturas periódicas, a distância periódica pode ser feita suficientemente grande de tal modo que para um só período

as características individuais da estrutura se comportem independentemente, eliminando assim qualquer "efeito de borda" que possa existir em nosso modelamento. Esta técnica nos fornece um modo eficaz de modelamento de feições geológicas curvadas, como bacias, a qual geralmente é modelada por meio de depressão retangular.

Vamos novamente considerar o modo TE ou polarização-E, onde o campo elétrico incidente é polarizado ao longo do *strike* da estrutura. Como vimos anteriormente isto causará variações no campo magnético que pode ser visto na superfície.

Vimos no Capítulo-2 que o campo elétrico foi representado por uma expansão em série dada pela equação(2.16), reescrita abaixo

$$E_y(x, z) = \sum_n (a_n e^{i\gamma_n z} + b_n e^{-i\gamma_n z}) e^{in\nu x}, \quad (3.1)$$

onde

$$\gamma_n^2 = i\omega\mu\sigma - \nu^2 n^2 \quad (3.2)$$

e os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são determinados pelas condições de contorno nas interfaces e no infinito.

Vamos considerar uma interface que pode ser desenvolvida em série de Fourier, na forma:

$$Z = \sum_{m=0}^M Z_m \sin(m \nu x). \quad (3.3)$$

Usando as aproximações anteriores que linearizam o problema, mostramos no Apêndice B que somente  $a_{\pm m}$  e  $b_{\pm m}$ ,  $m = 0, \dots, M$  necessitam ser considerados. As aproximações feitas são que:

$$\begin{aligned} \gamma_0 z_m &\ll 1, \\ \gamma_m z_m &\ll 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

A primeira aproximação restringe que todas as amplitudes ( $z_m$ ) dos coeficientes sejam muito menores do que o *skin depth* da onda em ambos os lados da interface. A segunda aproximação restringe que todas as amplitudes ( $z_m$ ) sejam muito menores que o comprimento de onda do campo nos meios e menores que o comprimento de onda da M-ésima componente da série de Fourier.

Usando a equação:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mu\omega\mathbf{H},$$

obtemos como anteriormente os campos  $H_x$  e  $H_z$ , reescritos abaixo:

$$H_x(x, z) = \frac{-1}{\omega\mu} \sum_n (a_n e^{i\gamma_n z} - b_n e^{-i\gamma_n z}) \gamma_n e^{i\nu x}, \quad (3.5)$$

$$H_z(x, z) = \frac{\nu}{\omega\mu} \sum_n (a_n e^{i\gamma_n z} + b_n e^{-i\gamma_n z}) n e^{i\nu x}, \quad (3.6)$$

onde no Apêndice B, mostramos que:

$$a_m = -a_{-m} = \frac{-z_m(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)e^{-i\gamma_0 z_0}}{2(\gamma_m - \gamma_m') - 2f(\gamma_m + \gamma_m')} C_0, \quad (3.7)$$

$$b_m = -b_{-m} = \frac{\gamma_m + im\nu}{\gamma_m - im\nu} a_m, \quad (3.8)$$

$$f = \frac{\gamma_m + im\nu}{\gamma_m - im\nu} e^{-2i\gamma_m z_0}, \quad (3.9)$$

onde  $1 \leq m \leq M$ , sendo  $M$  o número de harmônicos da série de Fourier da estrutura. Os termos  $a_0$  e  $b_0$  são dadas respectivamente pelas Equações (2.30) e (2.31).

Para estruturas descritas como funções ímpares usando 3.7 e 3.8 nas Equações (3.1, 3.5 e 3.6), podemos reescrever essas equações numa forma mais compacta como:

$$E_y(x, 0) = (a_0 + b_0) + \sum_{m=1}^M 2i(a_m + b_m) \sin(m\nu x), \quad (3.10)$$

$$H_x(x, 0) = -\frac{1}{\omega\nu} [(a_0 - b_0)\gamma_0 + \sum_{m=1}^M 2i\gamma_m(a_m - b_m) \sin(m\nu x)], \quad (3.11)$$

$$H_z(x, 0) = \frac{\nu}{\omega\mu} \sum_{m=1}^M 2m(a_m + b_m) \cos(m\nu x). \quad (3.12)$$

Embora este seja um desenvolvimento em seno da série de Fourier para funções ímpares, o resultado se aplica da mesma forma para funções pares. Consideremos a função em forma de degrau desenvolvido em série de Fourier no Apêndice C, para gerarmos uma função par em forma de trapézio que será usado para a modelagem de uma bacia em subsuperfície, geramos duas funções ímpares e como a solução semi-analítica é linear podemos usar o princípio da superposição dos campos gerados pelos harmônicos destas funções e obtermos a resposta eletromagnética de bacias retangulares com simetria par.

Uma outra maneira para se modelar estruturas com simetria par é usar a função delta como mostrado no Apêndice C. Nesse caso basta dar um deslocamento de  $(\pi/2)$  nas equações

dos campos ( $e^{i(m\nu x + \pi/2)}$ ), pois desenvolvimento analítico para funções pares pode ser visto como uma função seno deslocada de ( $\pi/2$ ). Dessa forma as equações de campo para desenvolvimento em série de Fourier de funções pares serão:

$$E_y(x, 0) = (a_0 + b_0) + \sum_{m=1}^M 2i(a_m + b_m) \cos(m\nu x), \quad (3.13)$$

$$H_x(x, 0) = \frac{-1}{\omega\nu} [(a_0 - b_0)\gamma_0 + \sum_{m=1}^M 2i\gamma_m(a_m - b_m) \cos(m\nu x)], \quad (3.14)$$

$$H_z(x, 0) = \frac{\nu}{\omega\mu} \sum_{m=1}^M 2im(a_m + b_m) \sin(m\nu x). \quad (3.15)$$

Para isto devemos ter que  $a_m = a_{-m}$  e  $b_m = b_{-m}$ , ou seja, as constantes de que dependem das condições de contorno devem ser simétricas, tendo comportamento de função par em relação a  $m$ . Analisando a Equação (3.7), verificamos que estas condições são satisfeitas,  $a_m$  e  $b_m$  dependem de  $\gamma_m$ ,  $f$  e  $z_m$ . Todos os valores de  $\gamma_m$  são funções pares, uma vez que a dependência em relação a  $m$  é quadrática, assim como o valor de  $f$  que só depende do valor absoluto de  $m$ , os valores de  $z_m$  para funções pares é também simétrico com relação a  $m$  como pode ser visto no Apêndice C.

Estas equações nos mostram que o campo magnético vertical ( $H_z$ ) não possui o termo em  $a_0$  e  $b_0$ , ao contrário do campo horizontal ( $H_x$ ). Dessa forma, para uma onda plana normalmente incidente a componente vertical do campo magnético é devido somente a anomalia, contudo tanto a componente do campo elétrico quanto do campo magnético possuem parte normal, inerente ao campo fonte e anômala, devido a interação da onda eletromagnética com a estrutura geológica. Portanto, a medida da componente vertical do campo magnético é usado para indicar a presença da anomalia ou variação lateral da heterogeneidade. A parte anômala de  $H_x$  e  $H_z$  será normalizada pela parte normal de  $H_x$ , denominada  $H_0 = \gamma_0(a_0 - b_0)$ . Assim os campos medidos serão campos normalizados dados por:

$$\bar{H}_x = \frac{H_x}{H_0} \quad \bar{H}_z = \frac{H_z}{H_0}.$$

### 3.3 PRIMEIRO MODELO - FALHA EM SUBSUPERFÍCIE.

O primeiro modelo mostrado na Figura 3.1 consiste de um degrau representando uma falha com a camada superior mais condutiva sobre um embasamento resistivo. Este modelo por ter simetria ímpar é a forma padrão para nosso desenvolvimento semi-analítico, que considera uma estrutura desenvolvida em série seno de Fourier. Apartir desse modelo é possível, por superposição, gerar modelos com simetria par. A profundidade média  $z_0$  da superfície a linha que divide o degrau ao meio foi tomado inicialmente como  $3km$ , sendo que o degrau vai de  $1km$  a  $4km$  em  $2km$  tendo  $27^\circ$  graus com a vertical.

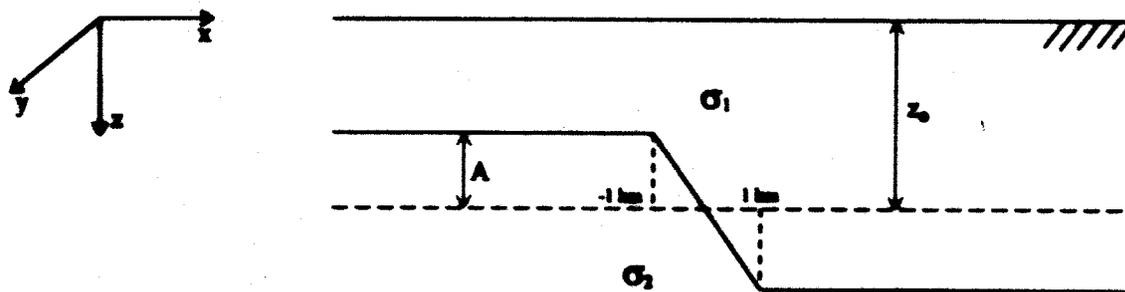


Figura 3.1 - Falha em subsuperfície para modelamento

#### 3.3.1 Análise da amplitude de $H_x/H_0$ e Fase

Na Figura 3.2 representamos o módulo do campo  $H_x/H_0$  com relação a distância horizontal. O módulo do campo  $H_x$  é menor no lado resistivo do que no lado condutivo, e o valor é maior para o período de  $333s$ . Isto se dá devido ao *skin depth* da onda ser maior para longos períodos. O escudo condutivo de  $2km$  possui maior influência nas medidas do que em curtos períodos. A curva de  $1000s$  é um pouco abaixo da curva de  $333s$ , para este período a estrutura já é vista como uma falha rasa de forma que o efeito é menor. A curtos períodos o campo retorna a unidade para ambos os lados muito mais rapidamente para longos períodos, o efeito da falha é sentido a poucos *skin depth* em ambos os lados do degrau. A fase representada na Figura 3.3 possui similar características. As medidas das amplitudes do módulo e da fase são pequenas devido a cobertura condutiva que diminui o poder de penetração da onda, mascarando a falha.

### 3.3.2 Análise da amplitude de $H_z/H_x$ e Fase.

A Figura 3.4 mostra como  $H_z/H_x$  varia com relação a distância horizontal  $x$  através do degrau. A amplitude de  $H_z/H_x$  possui um máximo levemente deslocado em direção ao lado mais resistivo do degrau. Isto ocorre devido ao fato, de que apesar de  $H_z$  ser um máximo imediatamente acima do degrau,  $H_x$  é muito menor sobre o lado resistivo do que sobre o mais condutivo. Na Figura 3.5 temos a plotagem da fase, esta não mostra mudança abrupta de forma que seus picos apontam na mesma direção, isto é, em direção ao lado condutivo.

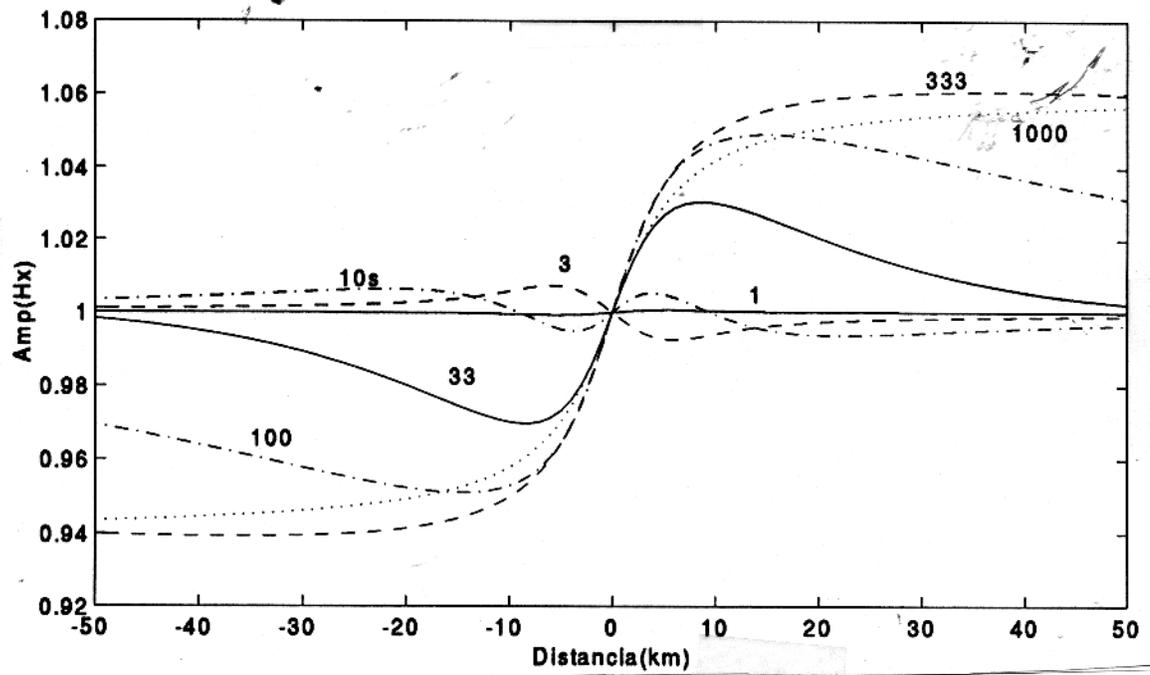


Figura 3.2 - Campo  $H_x/H_0$  através do degrau para vários períodos.

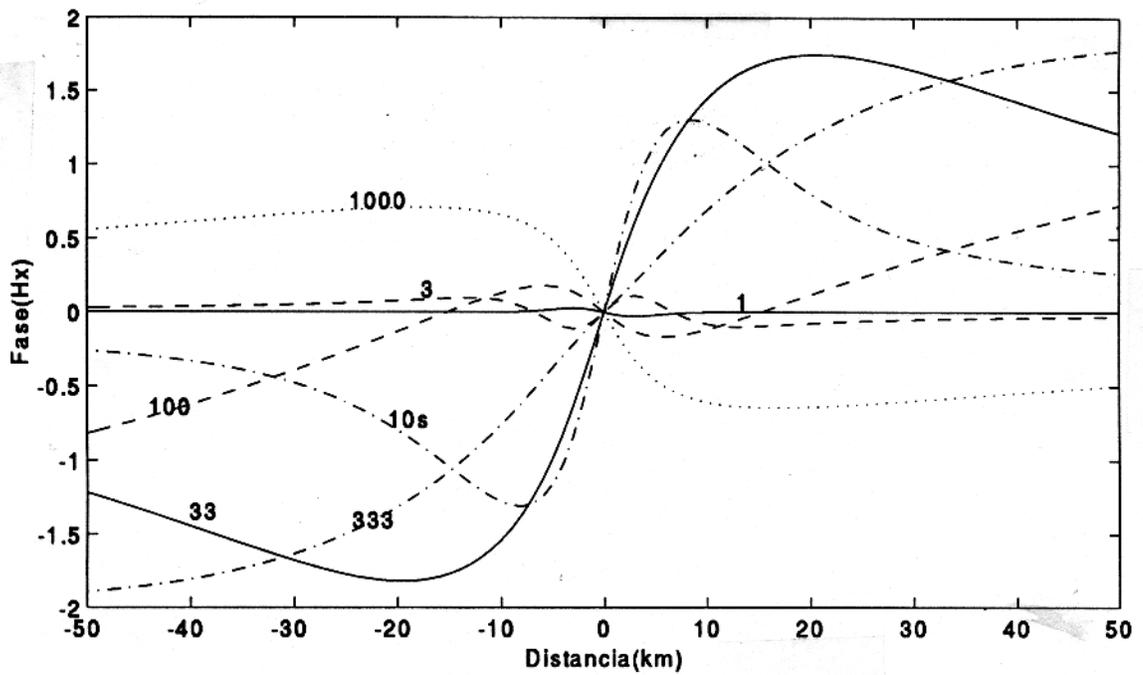


Figura 3.3 - Fase  $H_x/H_0$  através do degrau para vários períodos.

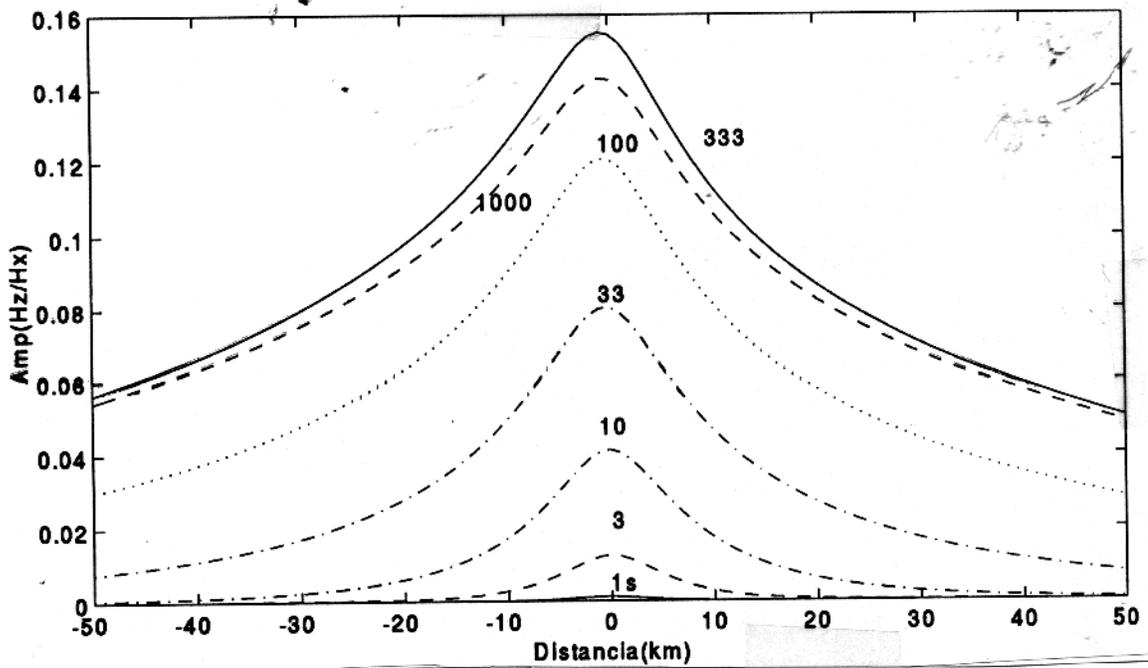


Figura 3.4 - Amplitude  $H_z/H_x$  através do degrau para vários períodos.

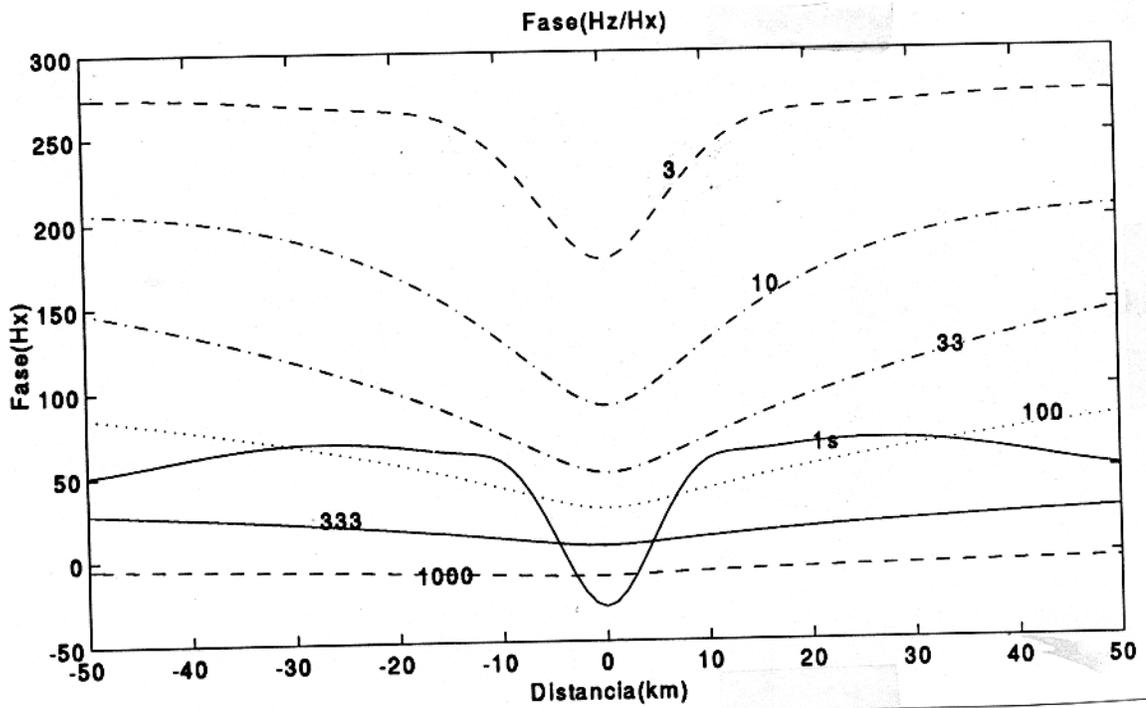


Figura 3.5 - Fase  $H_z/H_x$  através do degrau para vários períodos.

### 3.3.3 Análise da Resistividade Aparente Através do Degrau.

Na Figura 3.6 temos as curvas de sondagem magnetotélúricas para várias posições através do degrau ( $-15, -5, 0, 5, 15km$ ). As posições com sinal negativo na legenda indicam o lado esquerdo, mais resistivo de degrau, e o sinal positivo o lado mais condutivo. As curvas possuem o mesmo comportamento em todas as posições de sondagem em relação ao período da onda, um comportamento similar ao modelo de duas camadas. Em curtos períodos (curtos comprimentos de onda) a sondagem se restringe a resistividade da primeira camada, a medida que o período aumenta (longos comprimentos de onda) a *skin depth* da onda se torna maior e o embasamento é quem responde pela resistividade aparente. Para todas as posições de sondagem até o período de 10s a falha não influencia na medida, a partir deste período, o *skin depth* da onda se torna significativo em qualquer posição. A influência da falha é sentida a mais baixo período no lado resistivo, e muito mais rapidamente a medida que a sondagem é feita próximo ao centro do degrau. No lado mais condutivo a presença falha é sentida a maior período, a condutividade maior, dissipa o onda eletromagnética sem sofrer grande influência do degrau, por isso o aumento no período faz com que a profundidade de penetração aumente revelando a falha. Para períodos maiores que  $10^4$  as curvas tendem assintoticamente a resistividade do embasamento, para esses períodos o *skin depth* é suficientemente grande que a falha é vista como rasa. A descontinuidade condutiva juntamente com a forma geométrica do degrau modela uma zona de resistividade aparente intermediária, maior que a resistividade do lado condutivo e menor do que a do lado resistivo. Esta zona será notada em maior ou menor intensidade dependendo do período da onda e da posição em relação ao centro que se faz a sondagem.

### 3.3.4 Fase da impedância ( $Z_{yx}$ ) através do degrau.

Na Figura 3.7 temos as curvas de fase. A influência da anomalia é sentida na fase entre 8s e  $10^2$ s. Para posições de sondagem sobre o lado resistivo a presença do degrau possui mais rápida influência nas curvas de fase, enquanto que para a posição simétrica do lado condutivo a resposta é mais retardada, devido a dissipação da onda no meio. Para longos períodos todas as posições de sondagem tendem a sentir a anomalia como uma anomalia rasa e as curvas tendem a se unirem assintoticamente. As curvas possuem um comportamento intermediário entre dois modelos de dupla camada; um primeiro modelo com camada superior de 4km e um segundo com camada superior de 5km e contraste de condutividade de  $\sigma_2/\sigma_1 = 100$ .

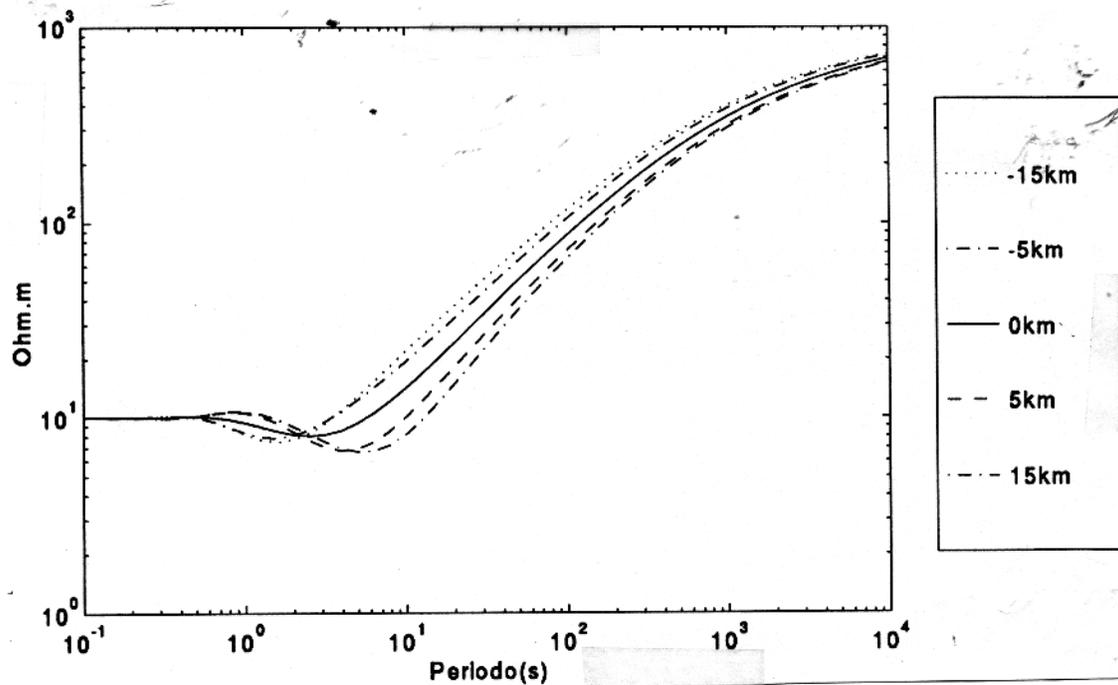


Figura 3.6 - Resistividade Aparente para o degrau ( $A = 1km; z_0 = 3km$ ) em várias posições de sondagem.

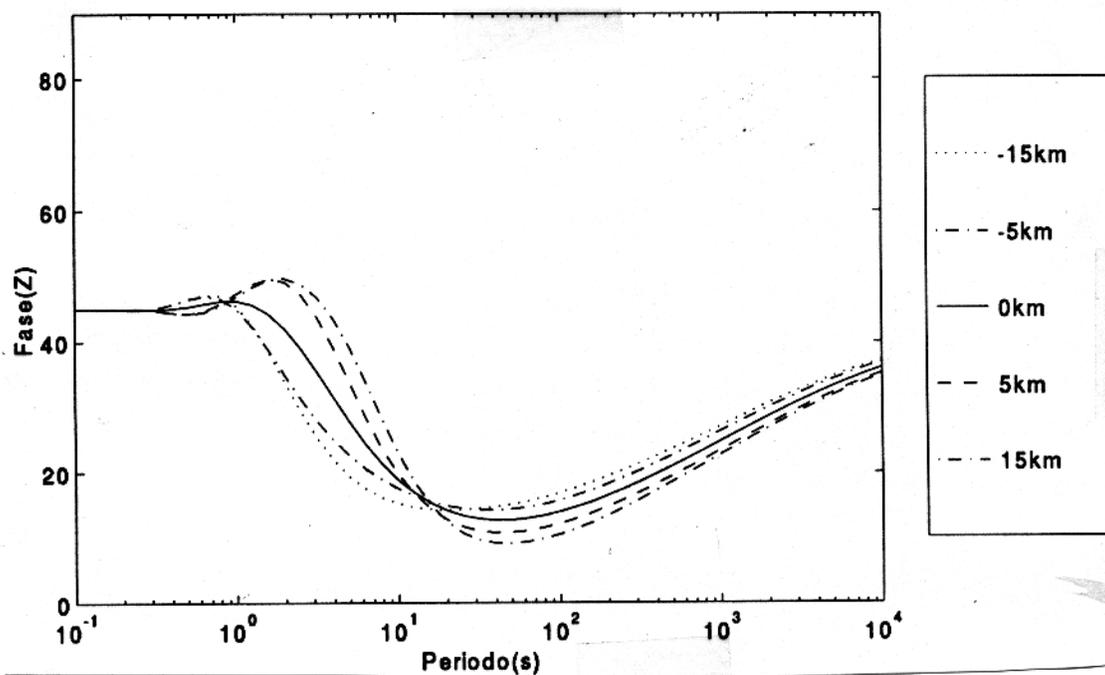


Figura 3.7 - Fase da Impedância (Z) para o degrau ( $A = 1km; z_0 = 3km$ ) várias posições de sondagem.

### 3.4 SEGUNDO MODELO - GRABEM I

O segundo modelo consiste de uma estrutura tipo grabem em forma de trapézio conforme a Figura 3.8 abaixo. Esta estrutura possui simetria par, de forma que para sua modelagem usamos dois modelos anteriores de simetria ímpar e por superposição destes modelos geramos esta estrutura. Foram usados 600 termos do desenvolvimento em série de Fourier. A estrutura está a  $z_0 = 2km$  de profundidade, com um contraste de condutividade de  $\sigma_2/\sigma_1 = 100$  e amplitude  $A = 0.5km$ .

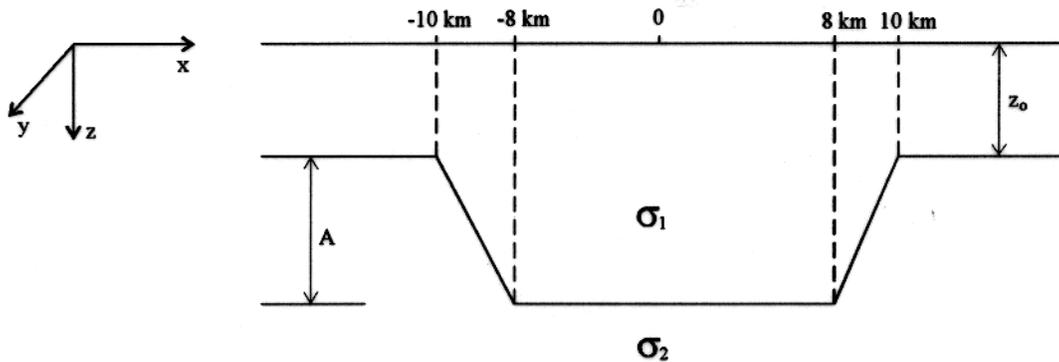


Figura 3.8 - Estrutura para modelamento

#### 3.4.1 Resistividade Aparente $\rho$

Na Figura 3.9 são mostradas quatro sondagens das bordas ao centro da depressão (15, 9, 5, 0km). A grandes distâncias do centro o modelo se comporta como um de duas camadas onde a primeira possui espessura de 2km. Em curtos períodos a onda possui rasa penetração, e a resistividade é aproximadamente a da primeira camada. A medida que o período aumenta a resistividade aparente tende ao valor do embasamento, uma vez que onda possui maior poder de penetração. A medida que se aproxima do centro a resistividade diminui, o efeito da depressão começa a se tornar efetivo, a reflexão da onda pelas paredes laterais da depressão se faz notar nas medidas. O comportamento das sondagens entre o centro e regiões distantes mostra um decaimento gradual nas curvas de resistividade, mostrando a transição num modelo de duas camadas; o primeiro modelo com espessura de 2km na camada superior indo para um segundo modelo com camada superior de 2.5km.

### 3.4.2 Fase da Impedância ( $Z$ )

Na Figura 3.10 temos a fase da Impedância. Para curtos períodos, o retardamento do campo magnético é de  $45^\circ$  e independe do período e da posição da sondagem. Para longos períodos, o retardamento em fase volta a aproximar de  $45^\circ$  para todos pontos de sondagem. O desvio de  $45^\circ$  ocorre nos períodos intermediários para todas as curvas, verifica-se que a fase diminui de  $45^\circ$ , pois a resistividade aumenta com a profundidade. A presença da estrutura é notada na fase, onde curva para sondagem no ponto central da anomalia ( $0km$ ) possui um retardamento mais lento do que aquele na posição mais distante ( $15km$ ), o comportamento das curvas são semelhantes a resposta do modelo de duas camadas, sendo que no centro a espessura da primeira camada é maior, esta transição é bem mais notada na fase.

### 3.5 COMPARAÇÃO DO MÉTODO COM A TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS.

Para comparação da técnica semi-analítica com técnica numérica de elementos finitos, os resultados desta última foram obtidos com programa EGSLIB/TE2DMT (RIJO, 1993), este programa fornece resultados bastantes precisos e por isso servem de referência para comparar com os resultados da modelagem semi-analítica. Esta comparação servirá para verificarmos em que casos o modelo de Hughes que usa a aproximação linear pode ser usado para modelamento direto no auxílio de inversão.

Na Figura 3.11 apresentamos a comparação entre o modelamento analítico usando a decomposição espectral da estrutura por série de Fourier e o modelamento numérico usando a técnica de elementos finitos. As curvas geradas por solução analítica (SA) e por elementos finitos (EF) são praticamente idênticas para este modelo, tanto para a resistividade aparente quanto para fase. O desvio maior se dá na sondagem no centro da depressão, onde a convergência da série é mais crítica, independente do número de termos usados, isso é inerente a própria limitação do método semi-analítico no qual se usa a aproximação linear a fim de se obter uma solução fechada para o problema. Na verdade o método semi-analítico é uma técnica de perturbação linear e fora da linearidade ele não converge muito bem. Verifica-se também que o maior desvio ocorre em torno do período em que o *skin depth* da onda no meio é da dimensão da espessura da primeira camada ou um pouco maior, tendo grande influência da depressão.

### 3.6 COMPARAÇÃO ENTRE O MODELAMENTO POR SUPERPOSIÇÃO DE FUNÇÃO ÍMPAR E MODELAMENTO POR FUNÇÃO PAR.

A Figura 3.12 e Figura 3.13 representam a comparação das curvas geradas por superposição de desenvolvimento em seno de funções ímpares (SS) e desenvolvimento em cosseno de funções pares (SC), usando a função delta. As curvas são praticamente iguais para ambos os métodos de modelamento, no centro e em regiões distantes as curvas coincidem, havendo uma pequena diferença em posições intermediárias, a diferença é muito mais pronunciada nas curvas de fase. Verificamos que o uso da superposição de funções ímpares são mais eficazes para a modelagem, pois obedecem a premissa inicial do desenvolvimento analítico que considera um embasamento representado por um desenvolvimento em série seno de Fourier.

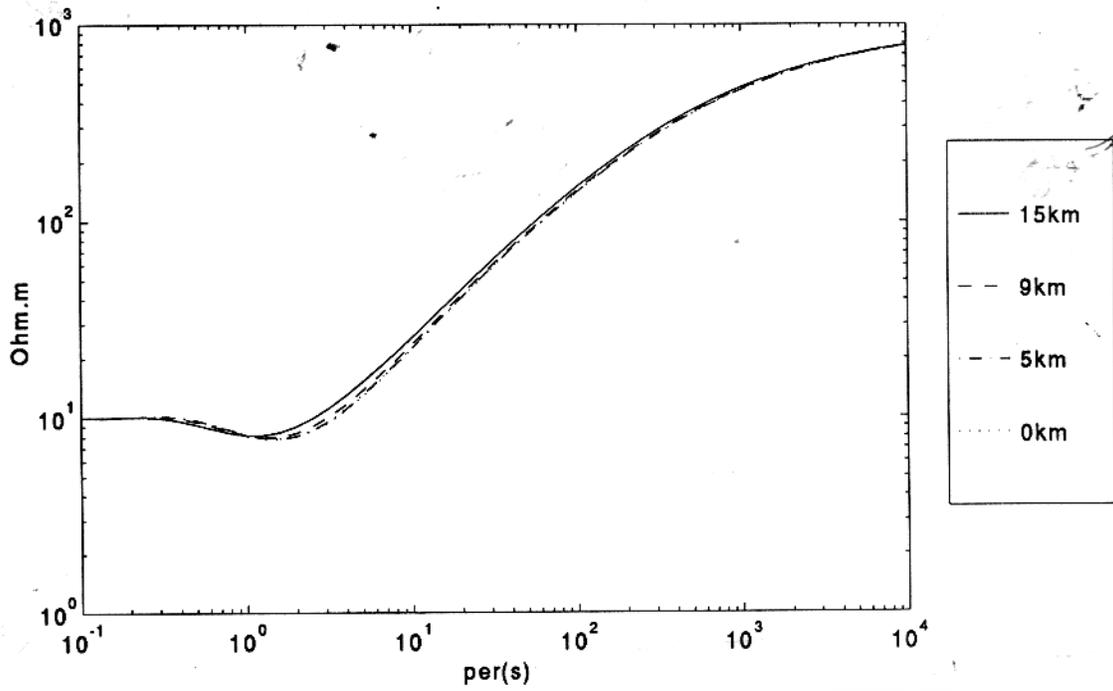


Figura 3.9 - Resistividade Aparente ( $\rho_a$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ).

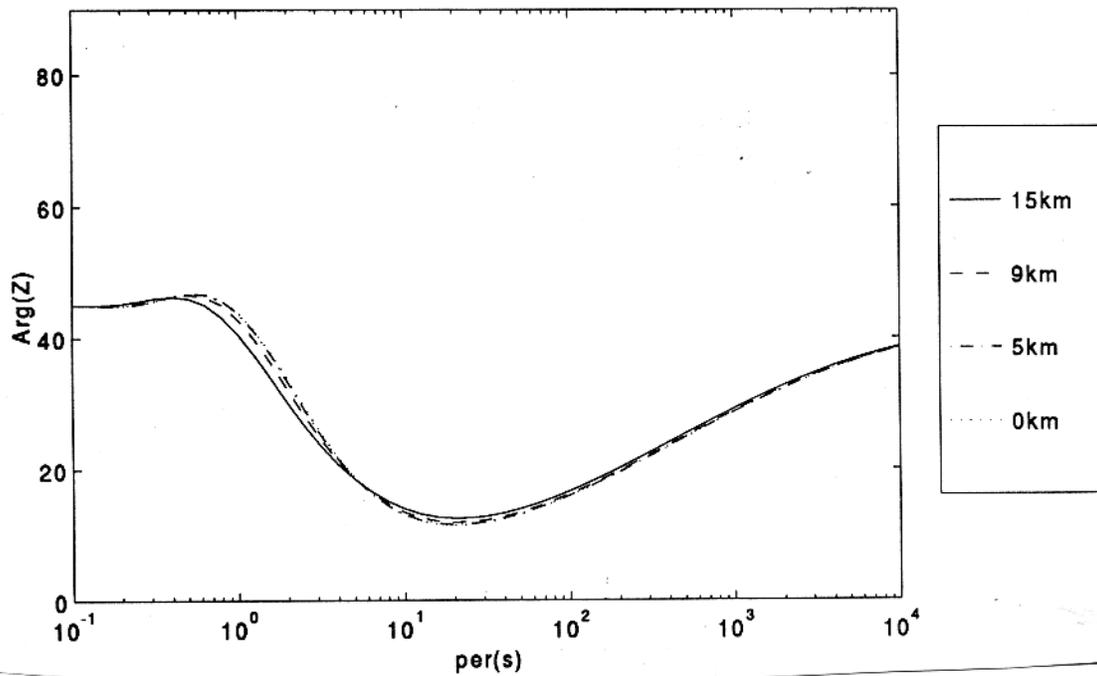


Figura 3.10 - Fase da Impedância ( $Z_{yx}$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ).

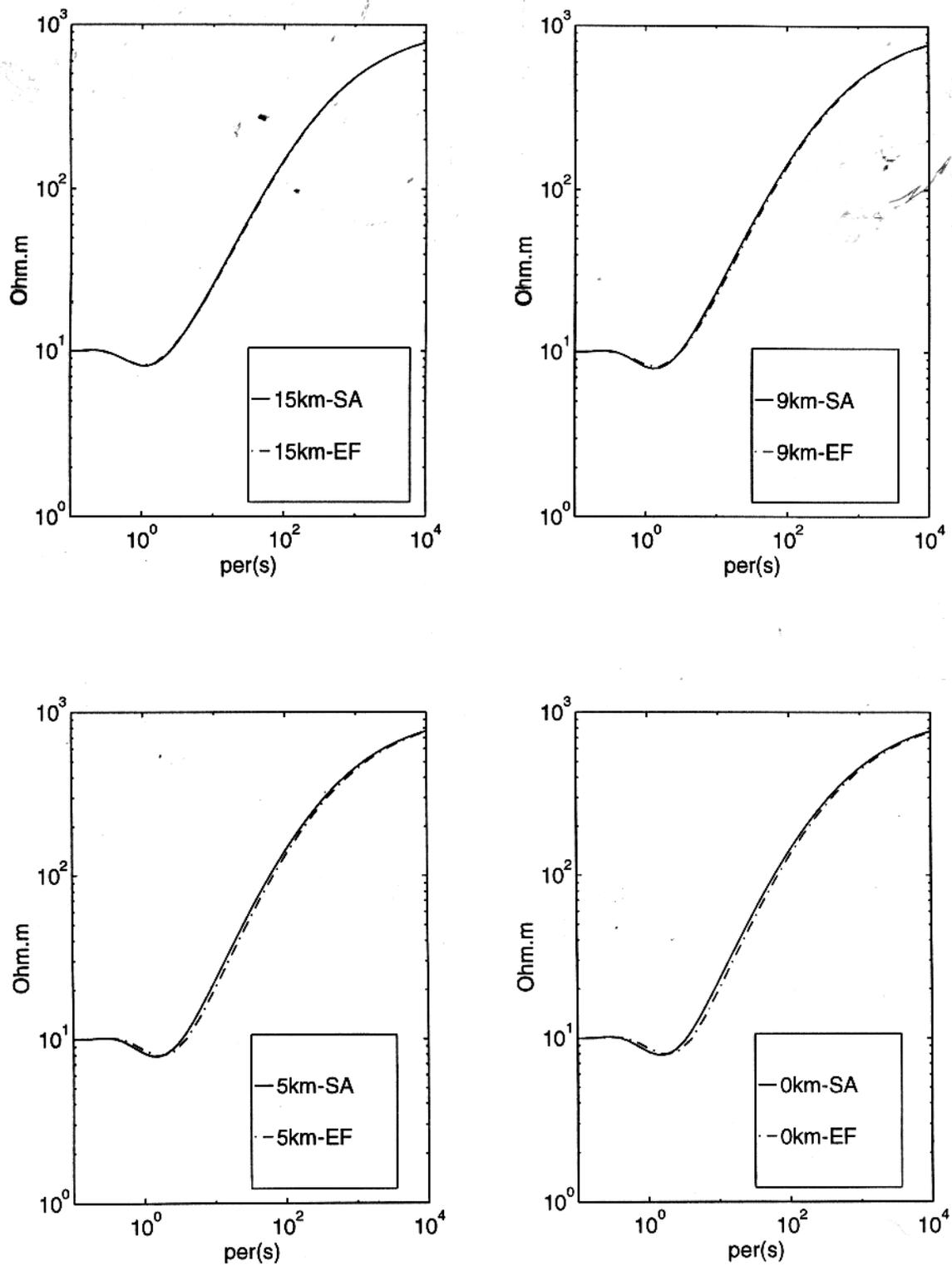


Figura 3.11 - Comparação entre método semi-analítico(SA) e técnica de elementos finitos(EF) - Curvas de Resistividade.

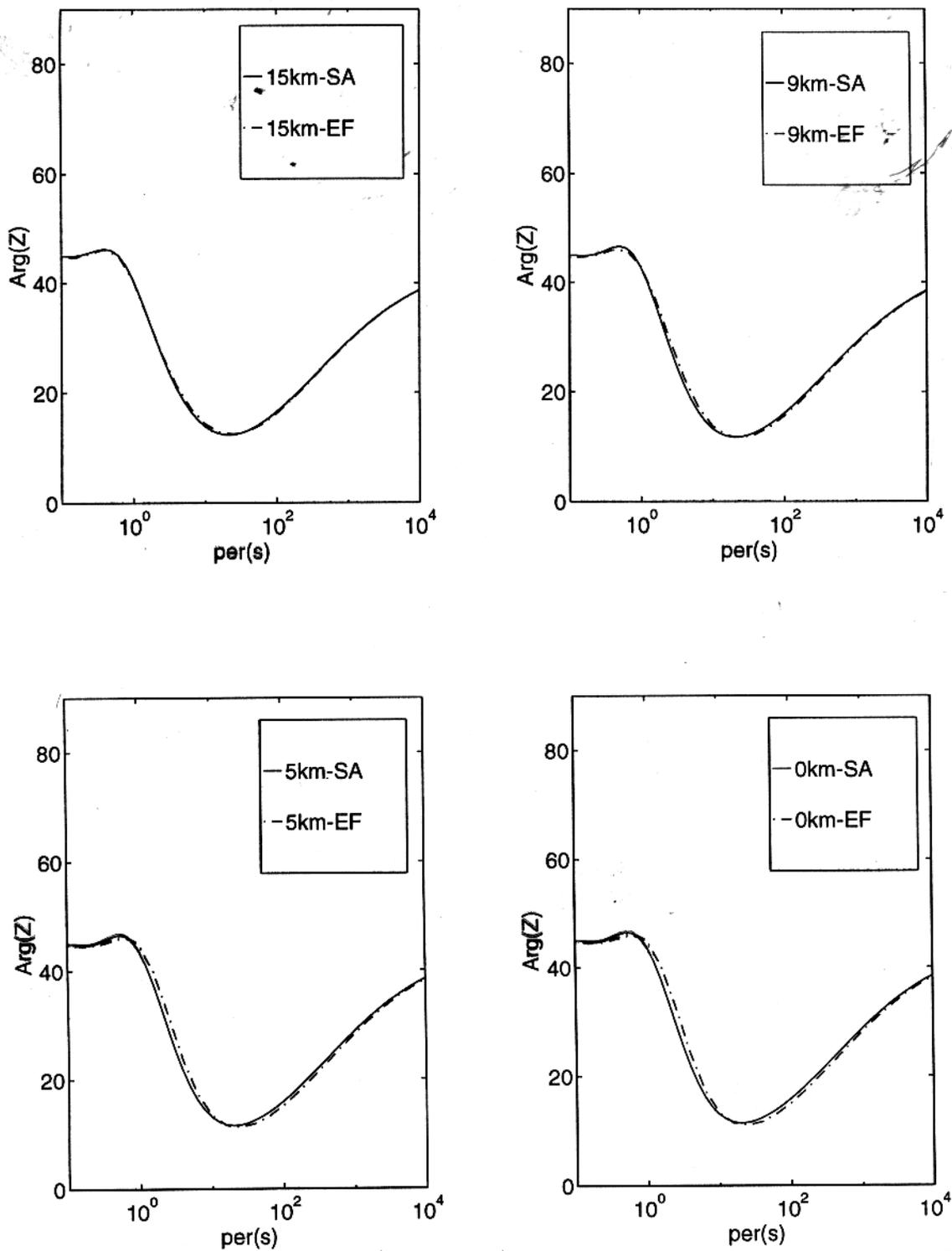


Figura 3.12 - Comparação entre método semi-analítico(SA) e técnica de elementos finitos(EF) - Curvas de Fase.

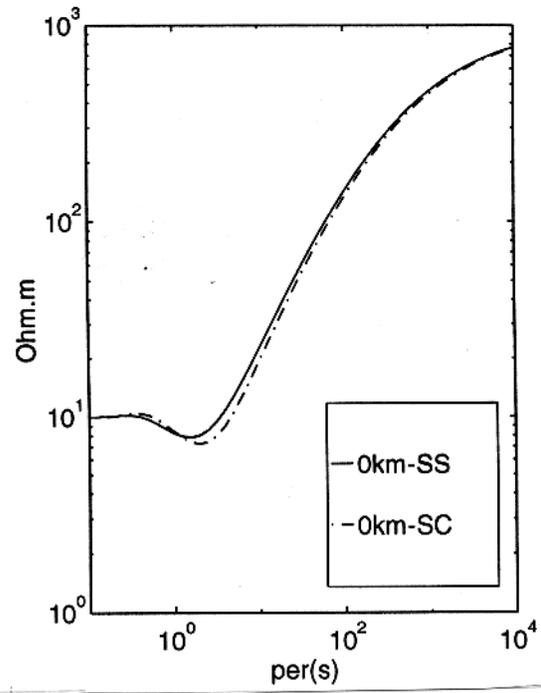
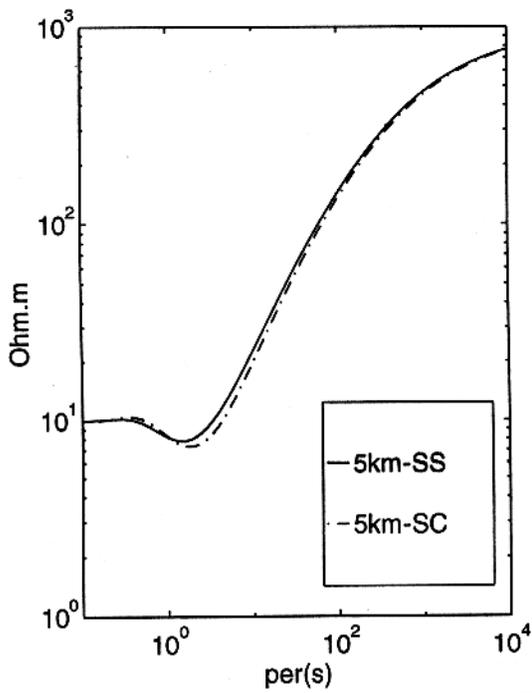
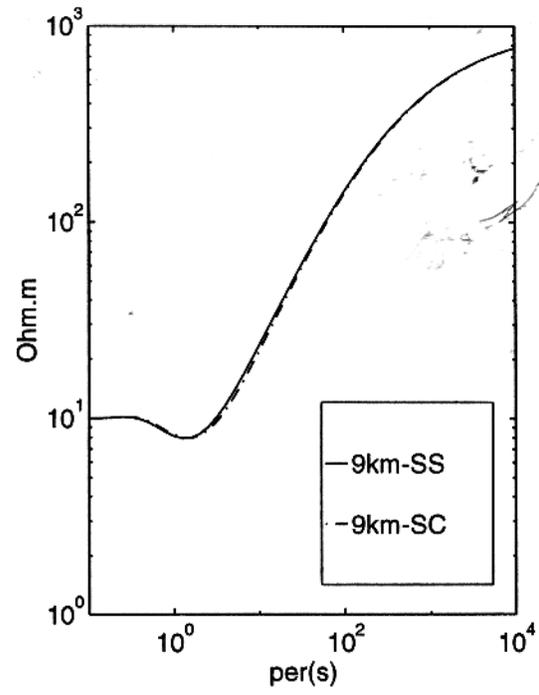
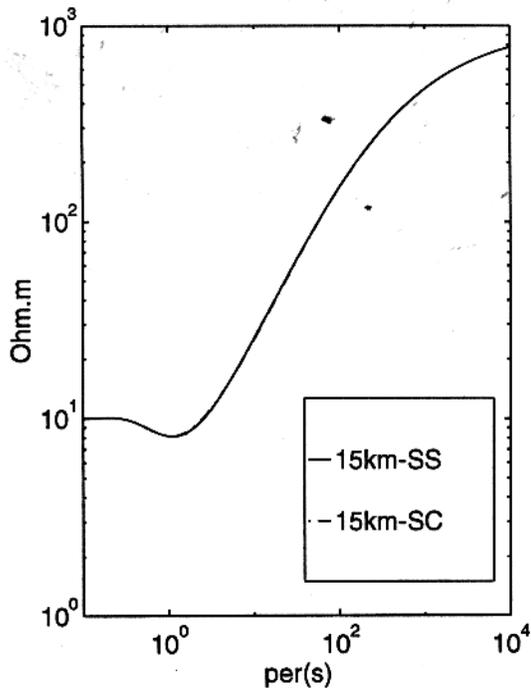


Figura 3.13 - Comparação em superposição seno e cosseno - Curvas de Resistividade.

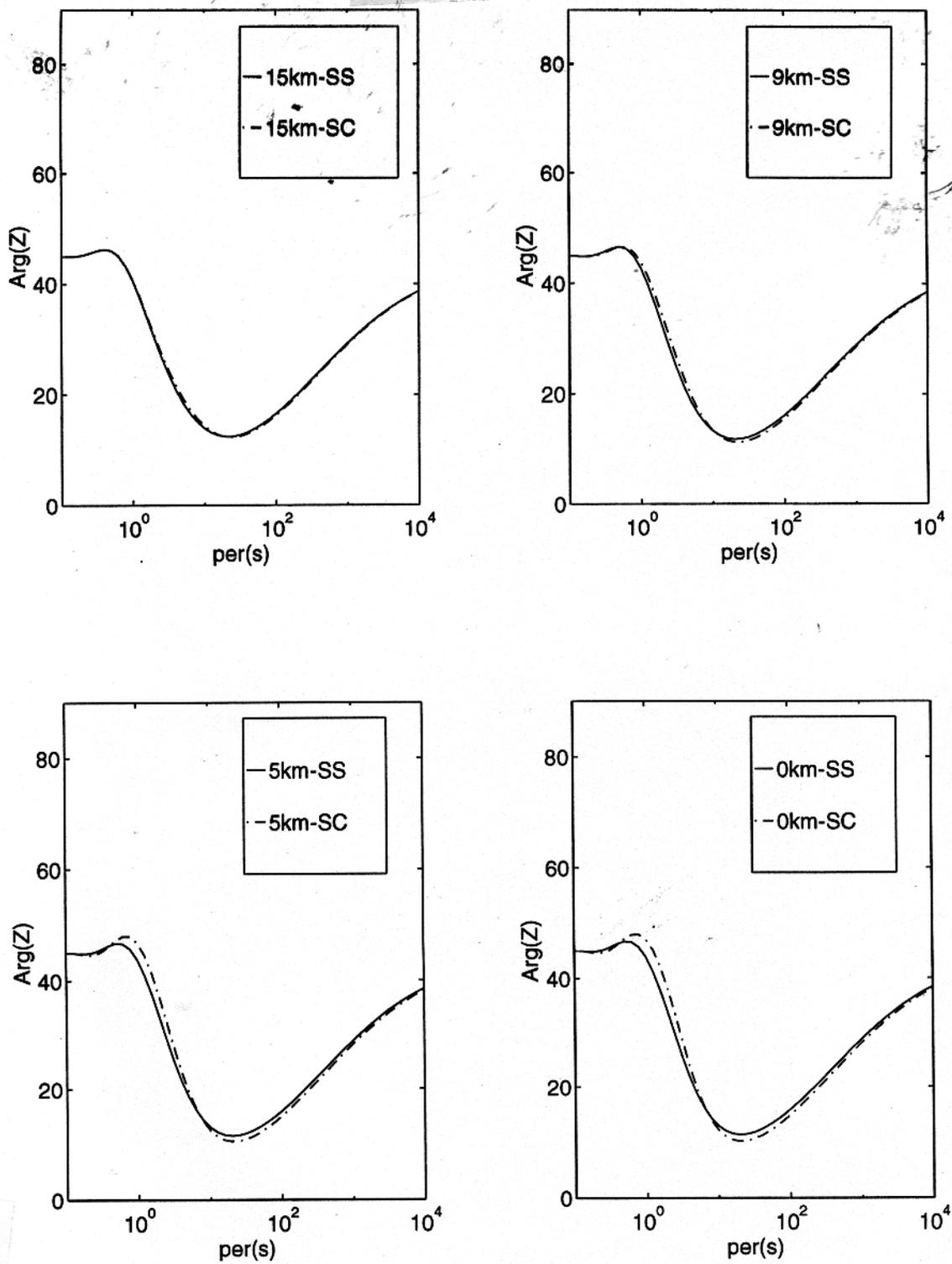


Figura 3.14 - Comparação em superposição seno(SS) e cosseno(SC) - Curvas de Fase.

### 3.7 VARIAÇÃO DO SEGUNDO MODELO - GRABEM II.

Este modelo possui as características do anterior (Figura 3.8), sendo que a profundidade é maior e a amplitude  $A = 1km$ , com o mesmo contraste de condutividade  $\sigma_2/\sigma_1 = 100$ .

#### 3.7.1 Análise da Resistividade Aparente e Fase.

Na Figura 3.15 e Figura 3.16 mostramos a resistividade aparente e a fase para este modelo nas mesmas posições de sondagem que o modelo anterior. As curvas possuem o mesmo comportamento que as curvas anteriores o aumento na dimensão da estrutura compensou a maior profundidade a que ela se encontra.

#### 3.7.2 Comparação do método com a técnica de elementos finitos.

Na Figura 3.17 e Figura 3.18 temos a comparação dos resultados da técnica semi-analítica por elementos finitos. Para este modelo as curvas também são praticamente iguais, principalmente para regiões distantes do centro da depressão ( $15km$ ), mesmo para posições no centro ( $0km$ ) as curvas estão muito próximas, embora a solução por elementos finitos mostre uma resistividade um pouco menor que a da solução semi-analítica. Essa diferença se mostra muito mais acentuada nas curvas de fase, principalmente para a curva na posição central ( $0km$ ).

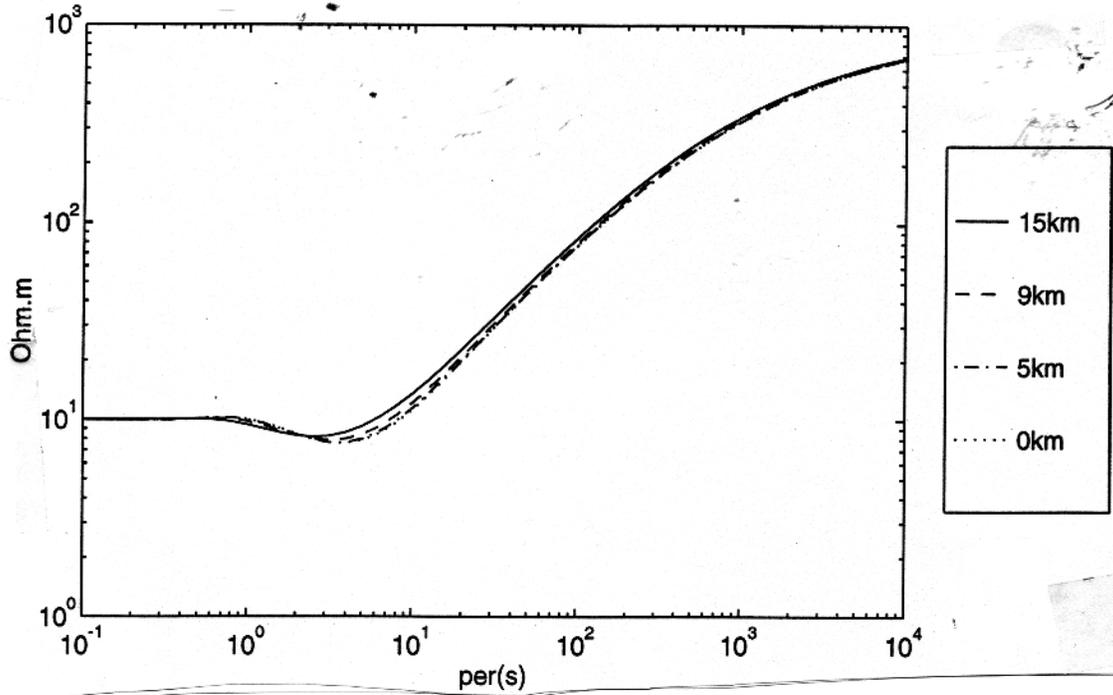


Figura 3.15 - Resistividade Aparente ( $\rho$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ).

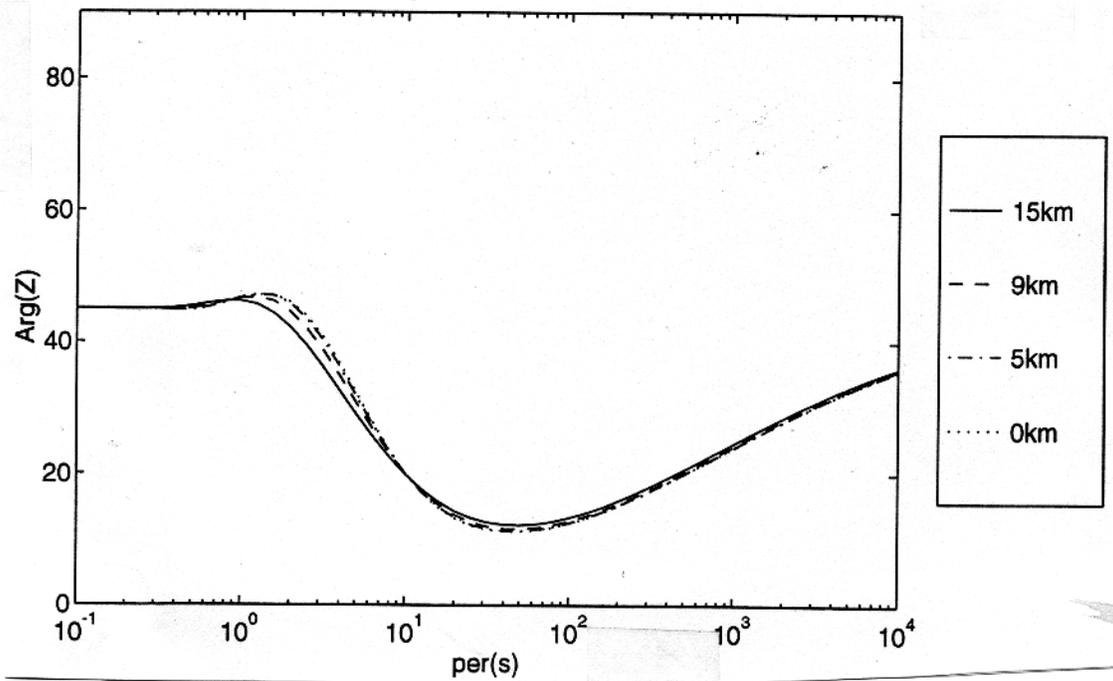


Figura 3.16 - Fase da Impedância ( $Z$ ) variando a posição de sondagem.

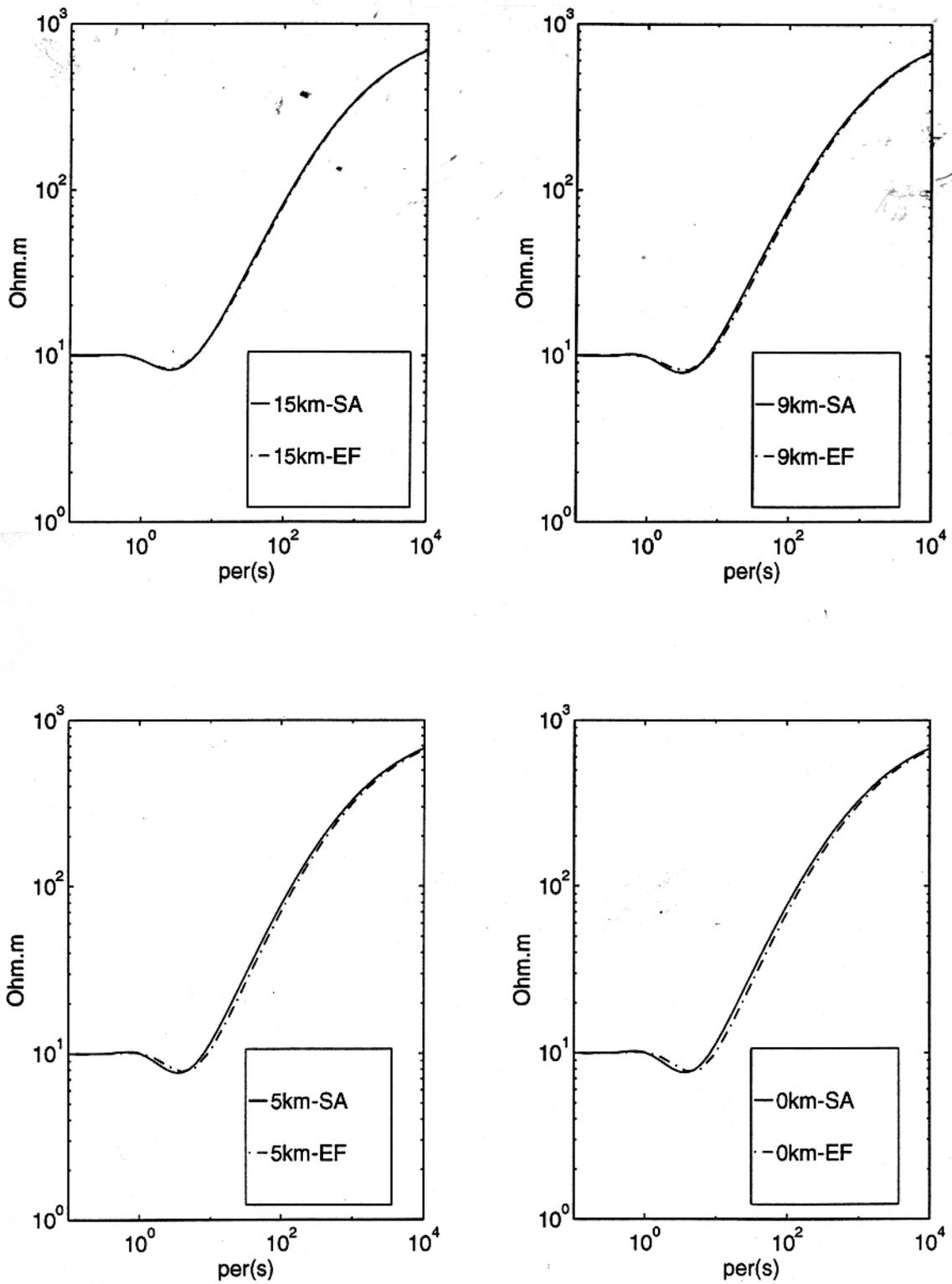


Figura 3.17 - Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Resistividade.

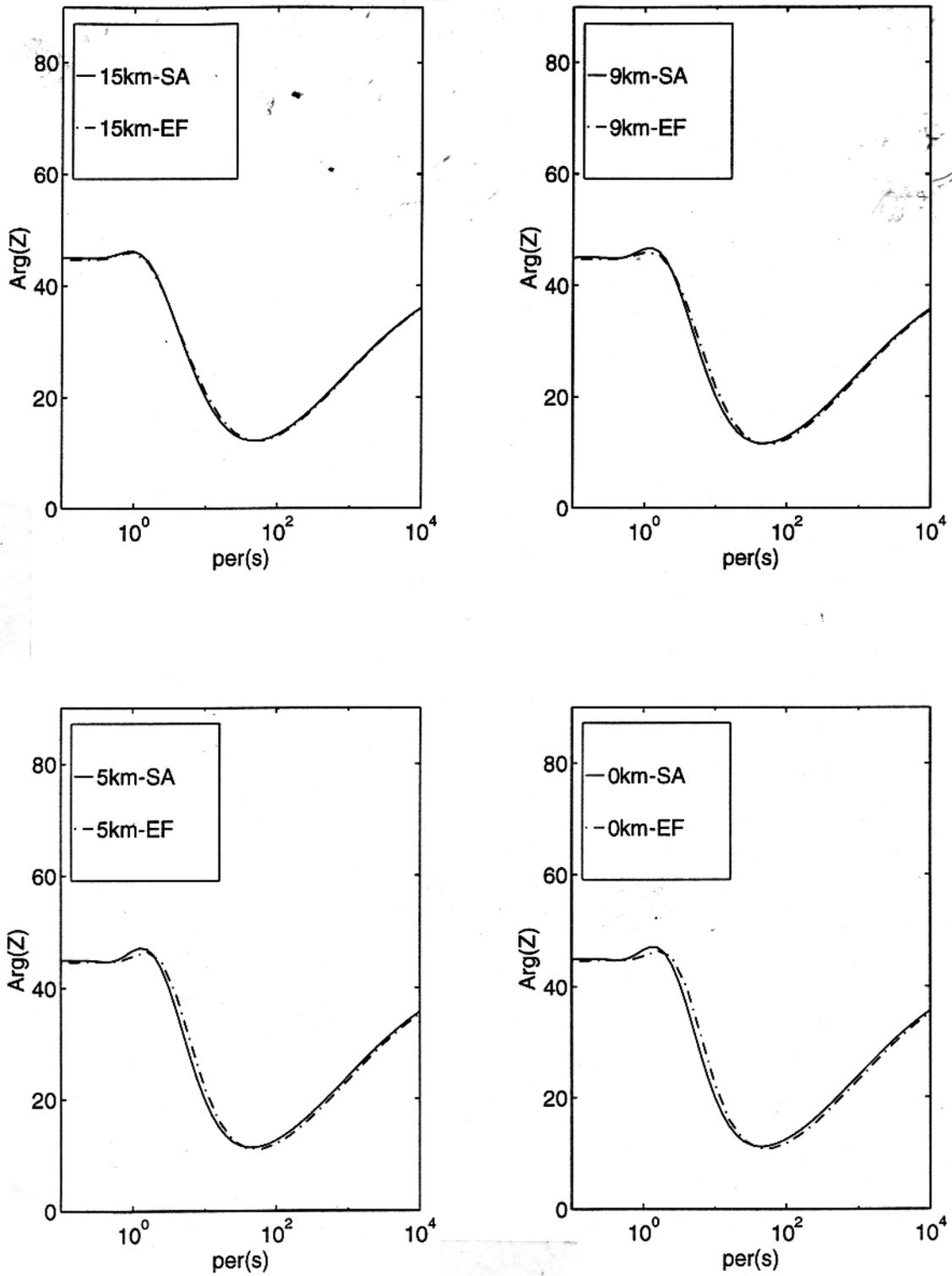


Figura 3.18 - Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Fase.

### 3.8 VARIAÇÃO DO SEGUNDO MODELO - GRABEM III.

Este modelo possui as mesmas dimensões laterais que os anteriores, onde mantivemos também a profundidade e aumentamos a amplitude da depressão para  $A = 2km$ .

#### 3.8.1 Análise da Resistividade Aparente e Fase.

A Figura 3.19 e Figura 3.20 representam respectivamente a resistividade aparente e a fase para o modelo. Como o contraste de resistividade é o mesmo, as curvas possuem o mesmo comportamento, no entanto as amplitudes das curvas são mais acentuadas que os modelos anteriores, pois a amplitude  $A$  da estrutura é maior. A maior separação nas curvas de resistividade ocorre novamente em torno do período em que o *skin depth* da onda é da dimensão da espessura da primeira camada, essa diferença é maior nas curvas de fase.

#### 3.8.2 Comparação do método com a técnica de elementos finitos.

Na Figura 3.21 e Figura 3.22 temos a comparação dos resultados da técnica semi-analítica por elementos finitos. Vemos que para região distantes do centro há uma boa convergência para as curvas, a medida que a sondagem é feita no centro a convergência diminui, pois a aproximação linear exige estruturas de pequenas dimensões, a diferença nas curvas é muito mais marcante nas curvas de fase. A diferença nas curvas se dá justamente em torno do período em que se investiga a estrutura, ou onde o *skin depth* da onda no meio é um pouco maior que a espessura da primeira camada, tendo ressonância com a estrutura.

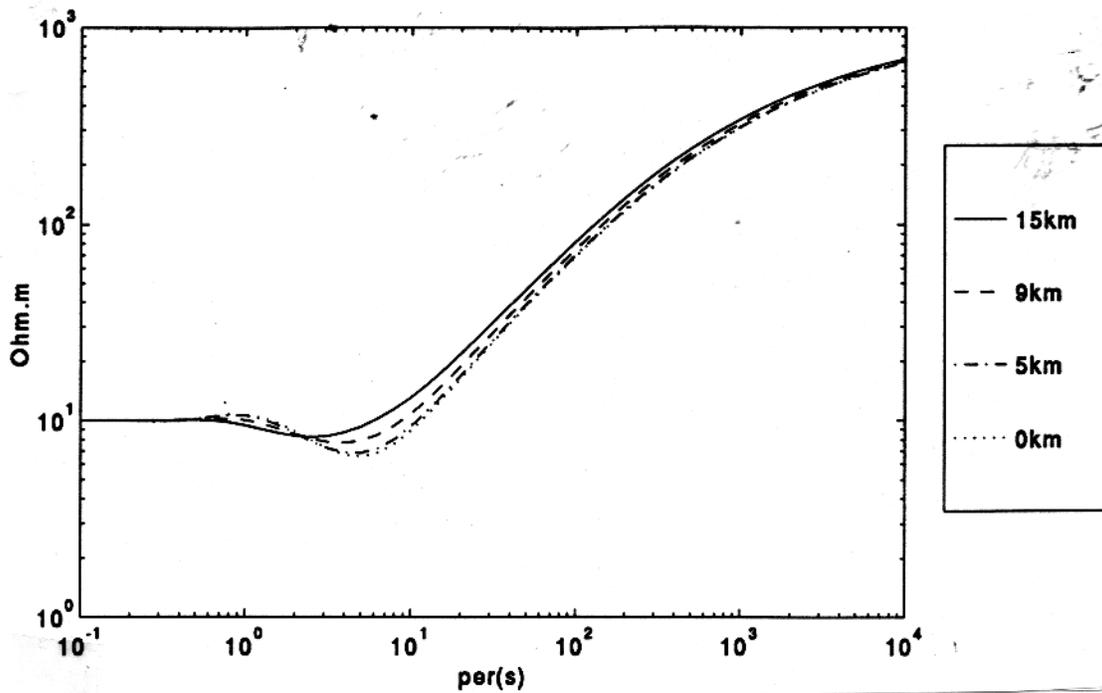


Figura 3.19 - Resistividade Aparente ( $\rho$ ) variando a posição de sondagem ( $x$ ).

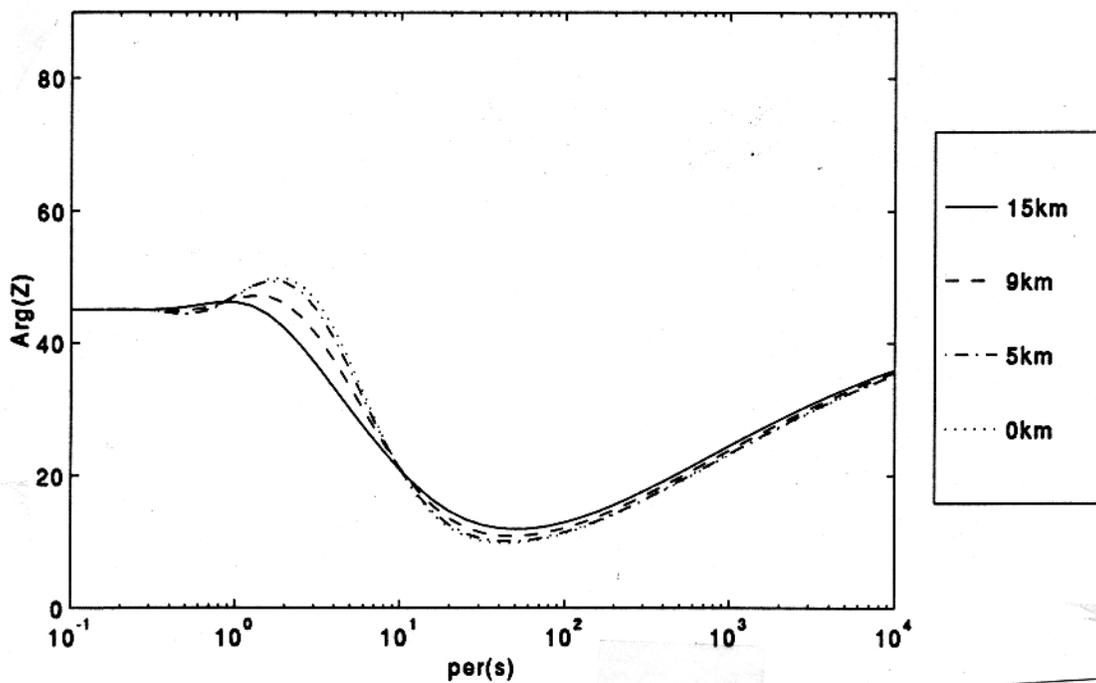


Figura 3.20 - Fase da Impedância ( $Z$ ) variando a posição de sondagem.

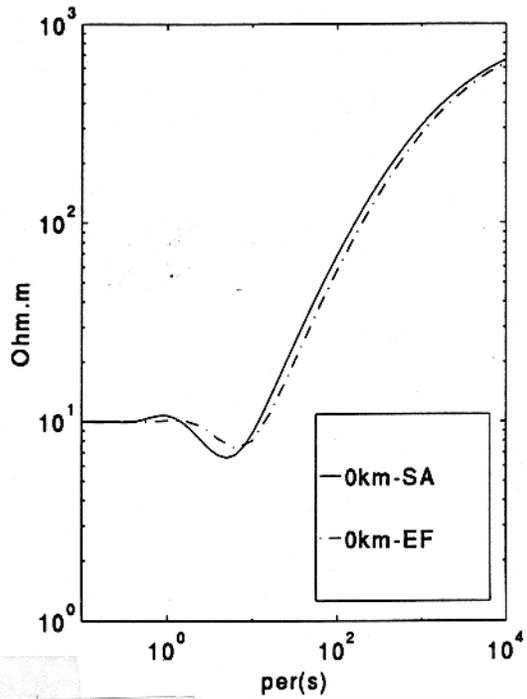
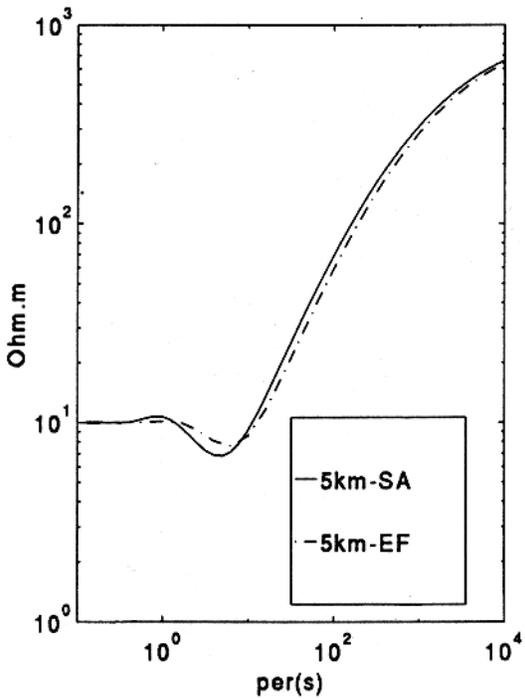
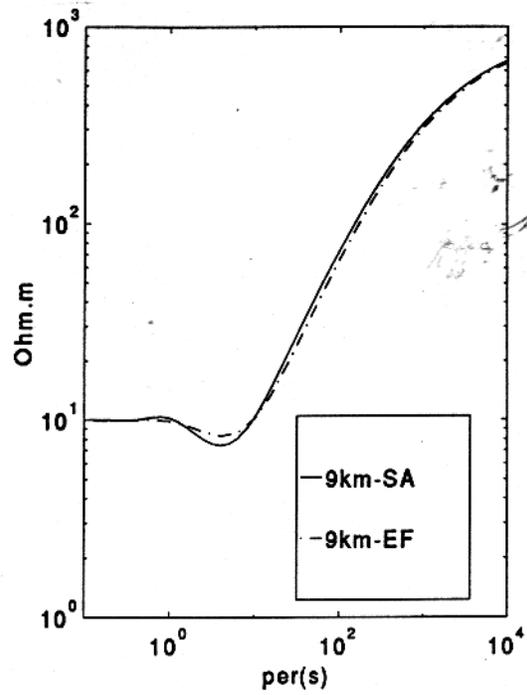
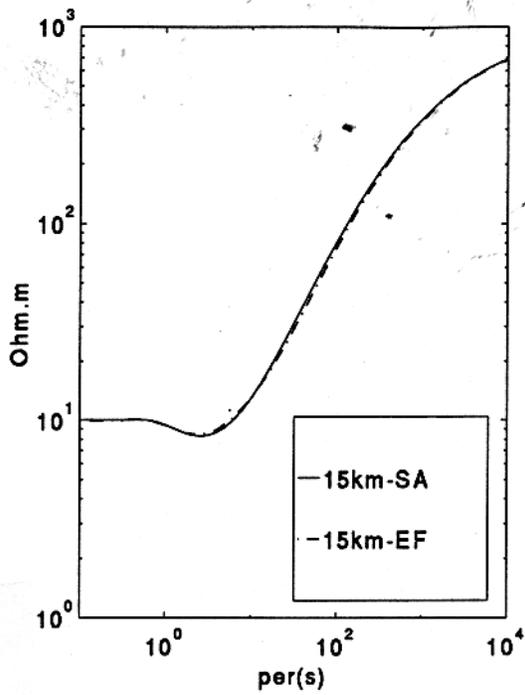


Figura 3.21 - Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Resistividade.

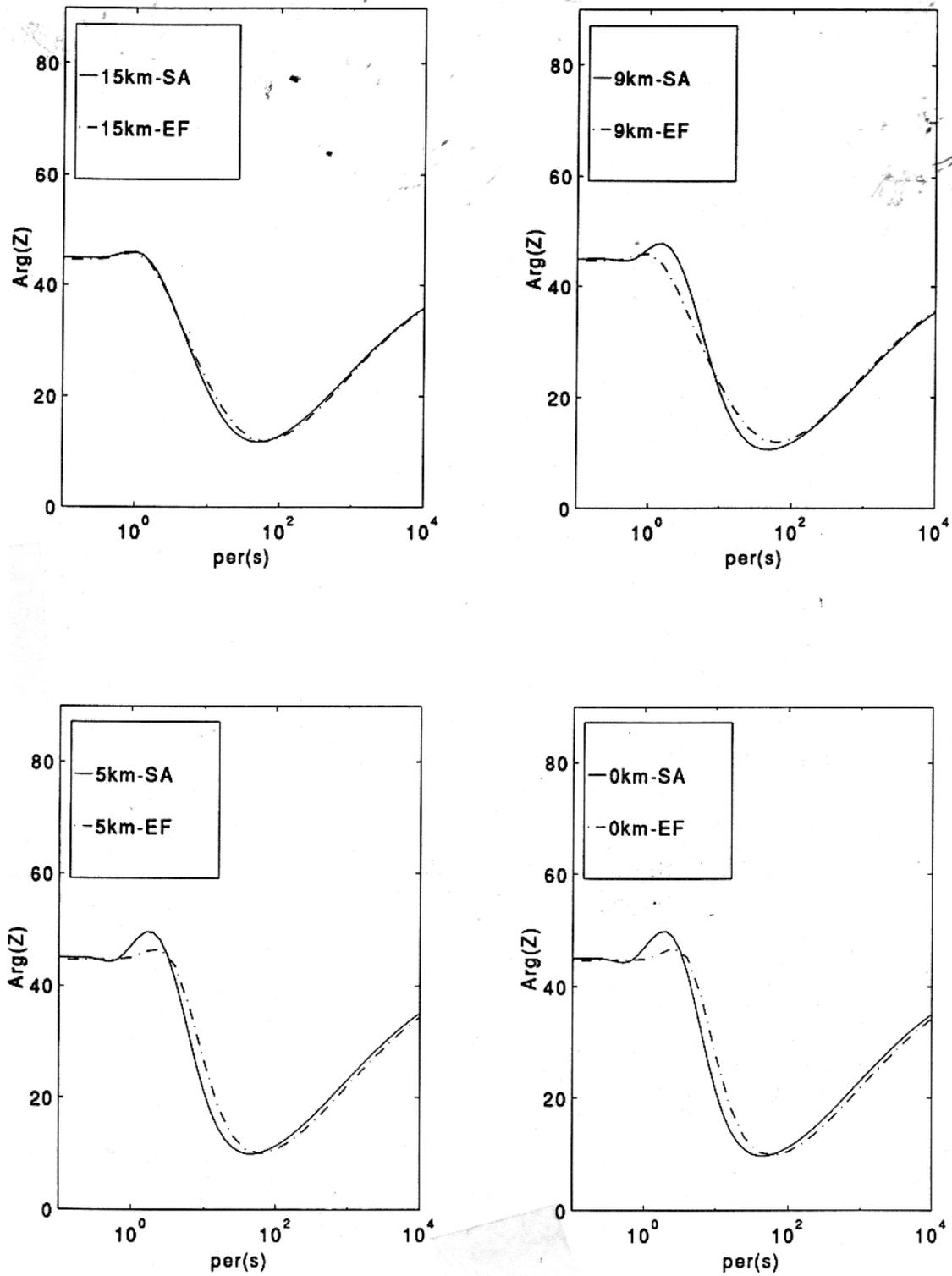


Figura 3.22 - Comparação entre método analítico e técnica de elementos finitos - Curvas de Fase.

### 3.9 VARIAÇÃO DO SEGUNDO MODELO - BACIA AFLORANTE

Este modelo consiste de uma depressão em forma convexa, a qual representa uma bacia sedimentar típica de alta condutividade, cujos os sedimentos foram depositados sobre um embasamento cristalino de alta resistividade (Figura 3.23). A forma suave da bacia foi obtido usando-se apenas 30 harmônicos da série de Fourier para uma estrutura geométrica em forma de trapézio dos modelos anteriores.

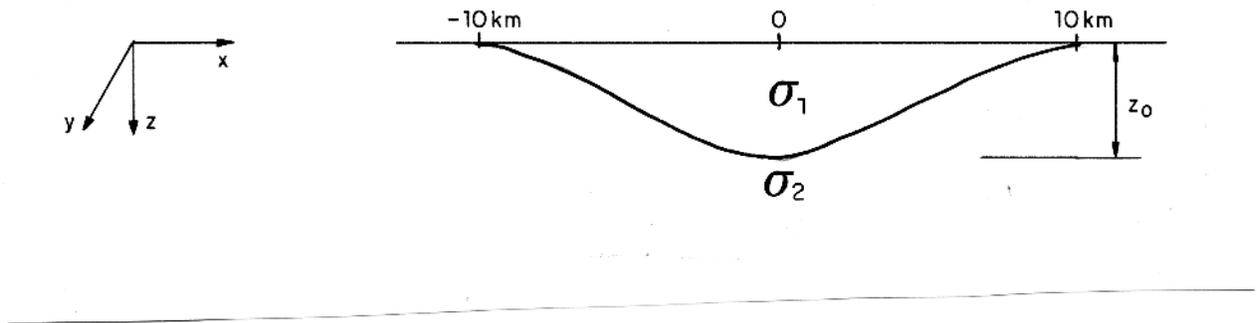


Figura 3.23 - Bacia aflorante para modelamento

#### 3.9.1 Amplitude e fase da componente horizontal do campo magnético ( $H_x/H_0$ ) através da bacia.

A Figura 3.24 e Figura 3.25 mostram, respectivamente como o módulo do campo  $H_x/H_0$  e a fase se comportam através da anomalia. O módulo de  $H_x/H_0$  possui um pico máximo sobre o centro da bacia diminuindo aos poucos para as bordas e a grandes distâncias do centro o valor do módulo do campo tende a unidade. Isto ocorre devido ao campo elétrico  $E_y$  ser uniforme sobre todo o modelo e paralelo ao *strike* da estrutura (modo TE), de forma que no interior da bacia, por ser uma região mais condutiva haverá uma densidade de corrente  $J$  de maior intensidade que a densidade de corrente na região mais resistiva do embasamento. Portanto o campo magnético induzido gerado por estas correntes de acordo com a lei de Biot-Savart será maior no centro que nas bordas da bacia. A forma das curvas é a mesma para todos os períodos, porém o efeito é muito mais significativo para o período menor. Os períodos longos tendo um *skin depth* muito maior (ver tabela Tabela 2.1) são afetados pelas características a grandes distâncias na estrutura, tanto horizontal como vertical, a essas

distâncias a Terra se comporta muito mais uniformemente. Sendo a região externa da bacia uma região mais resistiva, o campo elétrico terá um módulo e um poder de penetração maior do que na região central mais condutiva, devido ao efeito pelicular. Quanto a densidade de corrente, ao contrário, será maior no interior da bacia que nas regiões exteriores, isto devido a alta condutividade, no entanto a sua distribuição espacial ocorre a rasas profundidades concentrando-se na superfície da bacia, pois a densidade de corrente depende diretamente do campo elétrico. Para longos períodos e regiões distantes da bacia quando se calcula o campo magnético de superfície usando a lei de Ampère devemos encontrar que a integração da corrente total para essa região é a mesma que a do centro da bacia. O aumento na profundidade de penetração do campo elétrico na região mais resistiva compensa a redução da densidade de corrente na superfície, e o campo magnético torna-se uniforme.

### 3.9.2 Amplitude da razão $H_z/H_x$ através da bacia

Na Figura 3.26 estamos estudando o efeito na micropulsação ( $H_z/H_x$ ) ao longo da bacia, esta alcança um valor máximo sobre cada lado da bacia, decaindo suavemente para regiões distantes do centro, e indo a zero nesta posição. O máximo das curvas tendem a ficarem mais próximos a medida que o período aumenta. Isto é devido aos lados da bacia estarem mais próximos na base (região mais profunda) e portanto tendo maior influência na medida a longos períodos nos quais a onda eletromagnética possui maior *skin depth*.

### 3.9.3 Fase de ( $H_z/H_x$ ) através da bacia.

Na Figura 3.27 plotamos a fase de ( $H_z/H_x$ ). Esta permite determinar a razão das pontas da seta para onde aponta a parte real e a parte imaginária. Sendo a estrutura bi-dimensional, ambas setas apontam sempre na direção  $\pm x$ , porém mudam abruptamente no centro da bacia, mostrando uma mudança de  $180^\circ$  na direção das setas, de forma que sempre procuram apontar para a concentração central de corrente.

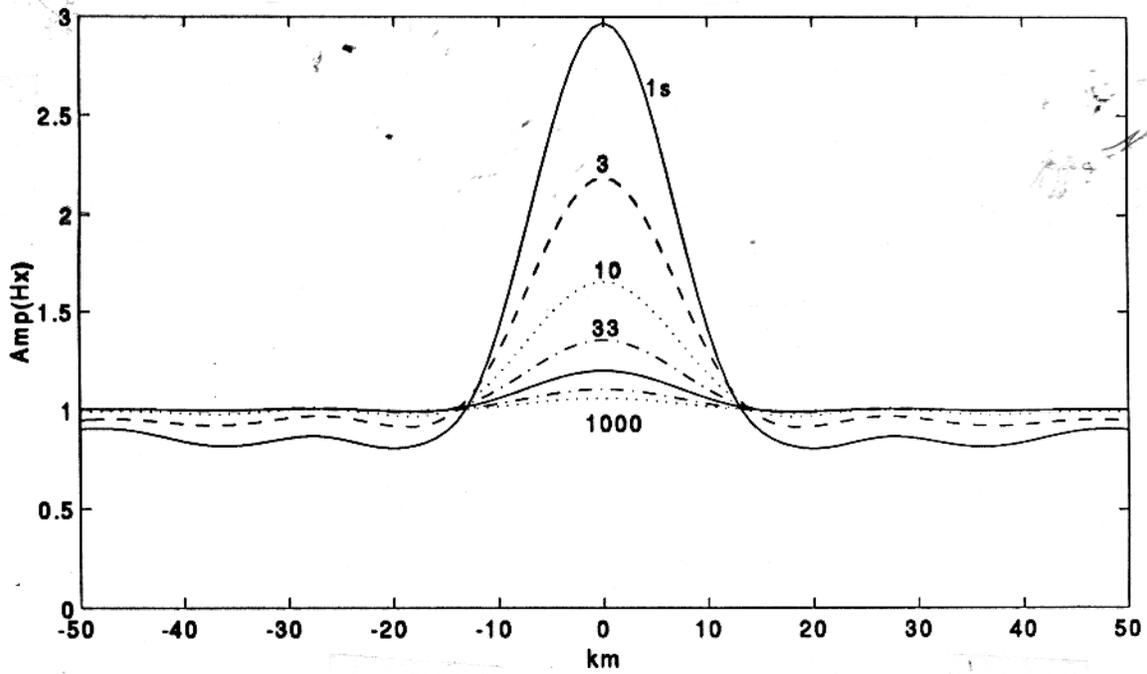


Figura 3.24 - Módulo do campo magnético horizontal  $H_x/H_0$  através da heterogeneidade

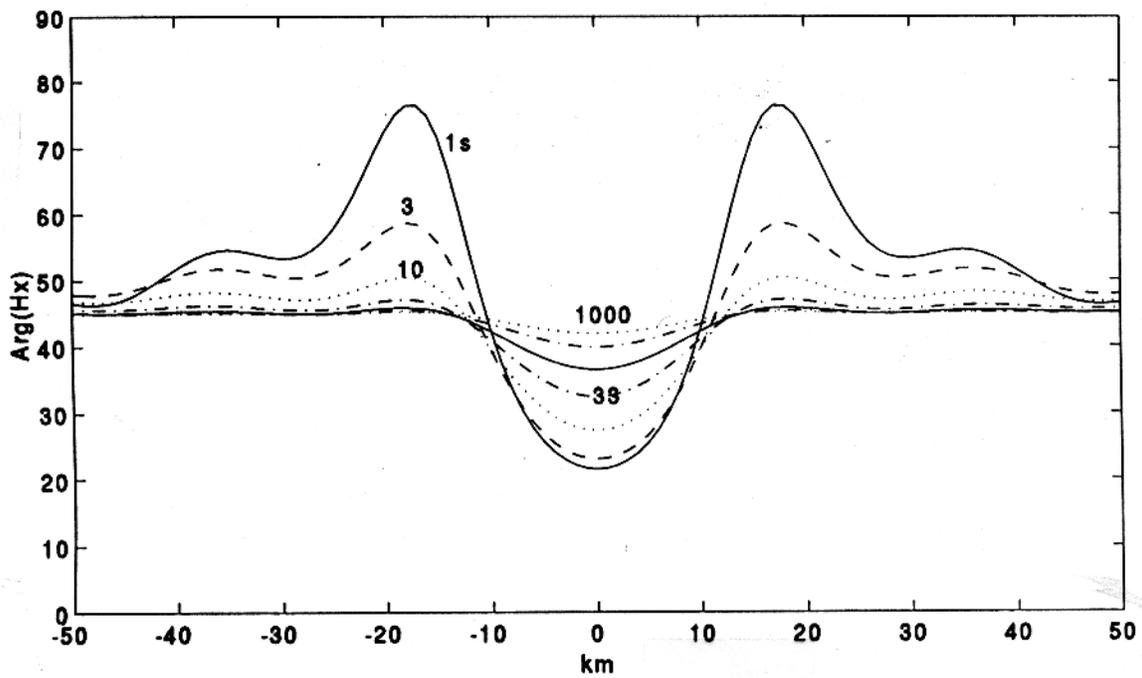


Figura 3.25 - Fase do campo magnético horizontal  $H_x/H_0$  através da bacia

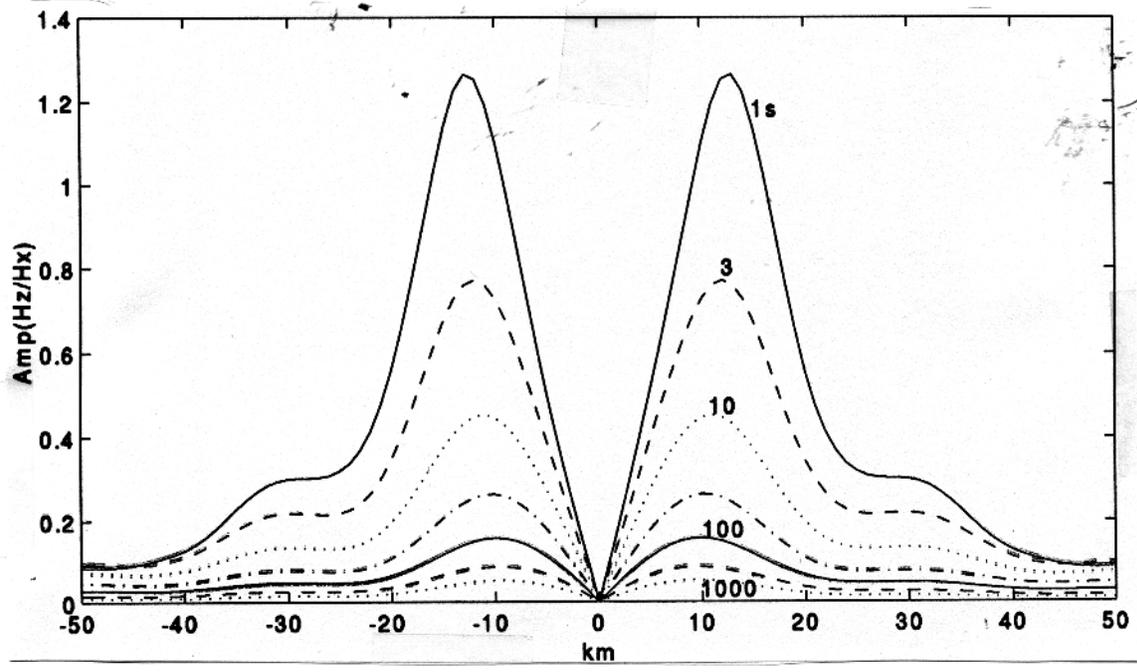


Figura 3.26 - Módulo da razão  $H_z/H_x$  através da bacia

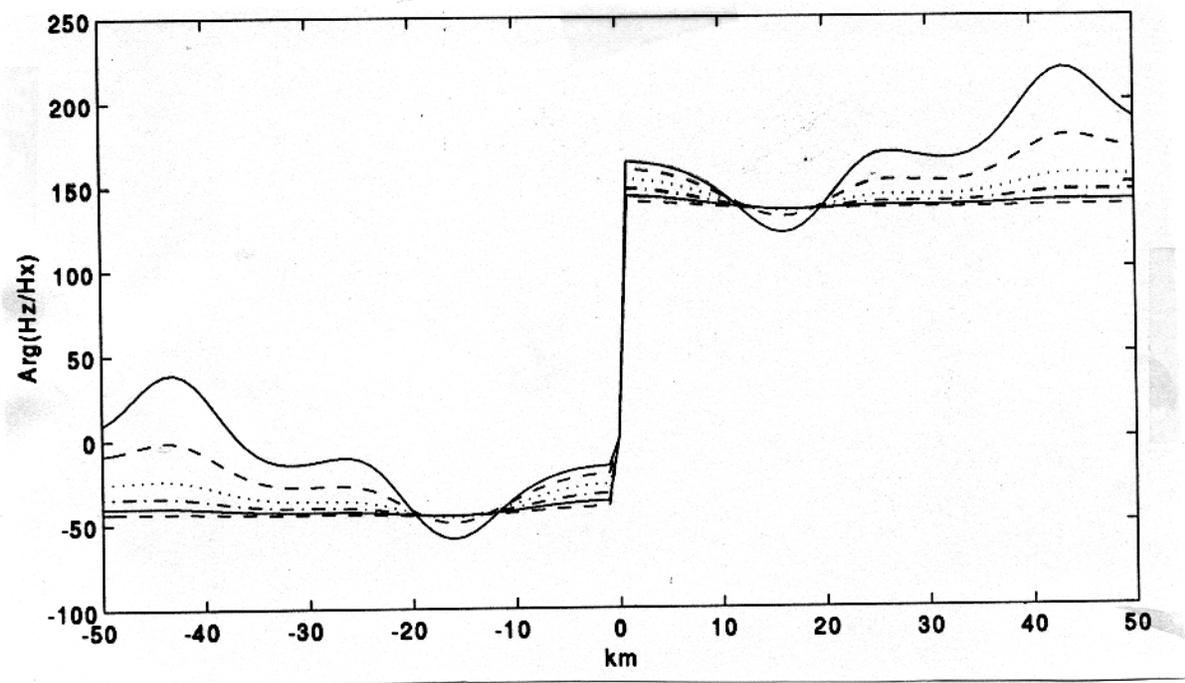


Figura 3.27 - Fase da razão  $H_z/H_x$  através da bacia

## 4 - CONCLUSÕES

O modelamento semi-analítico mostrou-se eficiente e preciso nos casos em que são obedecidas as condições de linearidade do modelo. A linearidade foi útil no sentido de que com isto obtivemos uma solução fechada para o problema que envolva o modelamento de qualquer estrutura que possa ser desenvolvida por série de Fourier. Esta solução é compacta e computacionalmente eficiente, pois para o modelamentos das estruturas é necessário somente determinar a série de Fourier para a função que descreve a estrutura.

A comparação da técnica com FEM mostrou que a solução semi-analítica converge a partir de 300 harmônicos da série. A convergência não é satisfatória quando as dimensões da estrutura não satisfazem a linearidade e nem a premissa inicial para o desenvolvimento analítico, que considera uma dupla camada com interface senoidal, onde as amplitudes dos harmônicos não sejam superiores a espessura da primeira camada.

Uma forma de melhorar a convergência da solução seria considerar os termos de maior ordem na expansão da estrutura em série de Fourier complexa, ou seja considerar a expansão das funções de Bessel até termos de mais alta ordem. O cálculo algébrico certamente será muito difícil e tedioso, assim como os sistemas gerados pelas equações serão de difícil solução, ou talvez impossível. No entanto um desenvolvimento quase analítico pode ser tentado, desenvolver analiticamente até que não se consiga manipular algebricamente as equações e resolver o restante por método numérico.

Mesmo com esta aproximação de primeira ordem, um modelamento considerando uma terceira camada sob as estrutura pode ser tentado, uma vez que dessa forma a presença desta camada estabilizaria a solução dando-lhe uma melhor convergência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAGNIARD, L. 1953. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. **Geophysics**, 18: 605-635.
- ERCEVILLE, I.D. & KUNETZ. 1962. The effect of a fault on the earth's natural electromagnetic field. **Geophysics**, 27: 651-665.
- HUGHES, W. J. 1973. The effect of two periodic conductivity anomalies on geomagnetic micropulsation measurements. **Geophysics J. Roy. Astron. Soc.**, 31: 407-431.
- HUGHES, W. J. 1974. The polarization of micropulsation and geo-electric structure. **Geophysics J. Roy. Astron. Soc.**, 38: 95-117.
- HUGHES, W. J. 1975. Effective wave tilt and surface impedance over a laterally inhomogeneous two-layer Earth. **Radio Science**, 10: 1001-1008.
- HUGHES, W. J. & WAIT, J. R. 1975. Electromagnetic induction over a two-layer Earth with sinusoidal overburden. **Pure Appl. Geophysics**, in press.
- JONES, F. W. & PRICE, A. T. 1970. The perturbations of alternating geomagnetic fields by conductivity anomalies. **Geophysics J. R. Astr. Soc.**, 20: 317.
- KAUFMAN, ALEXANDER A. 1981. **The magnetotelluric sounding method**. Amsterdam, Elsevier. 591p.
- RANKIN, D. & REDDY, I. K. 1972. The effect of geoelectric structure on the polarization characteristic of micropulsations. **J. geophys. Res.**, 77: 1286.
- REDDY, I. K. & RANKIN, D. 1972. On the interpretation of magnetotelluric data in the plains of Alberta. **Can. J. Earth Sci.**, 9: 514-527.
- RIJO, L. 1992. **Teoria dos métodos eletromagnéticos I: Notas de aula**. Belém, UFPA. 211p. (no prelo).
- TELFORD, W.M.; GELDART, L.P.; SHERIFF, R.E.; KEYS, D.A. 1975. **Applied Geophysics**. Cambridge, Cambridge University Press. 860 p.

- TIKHONOV, A.N. 1950. On determining electrical characteristics of the deep layers of the earth's crust. **Doklady**, 73: 295-297.
- VOZOFF, KEEVA. 1972. The magnetotelluric Method in the exploration of sedimentary basins. **Geophysics**, 37: 98-141.
- WAIT, J.R. 1954. On the relation between telluric currents and the earth's magnetic field. **Geophysics**, 19: 281-289.
- WEAVER, J.T. 1963. A Discussion of the "faut" and "dike" problems in magnetotelluric theory. **Geophysics**, 28: 487-490.
- WAIT, J.R. 1962. Theory of magnetotelluric fields. **Journal of Research of the Natural Bureau of Standards-D, Radio Propagation**, 66: 509-541.

# I - APÊNDICE A

## I.1 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO

Neste apêndice desenvolveremos explicitamente o modelo desenvolvido por Hughes (1973), onde determinaremos as constantes de integração dos campos eletromagnéticos gerados por um embasamento do tipo senoidal. Este desenvolvimento explícito se faz necessário para a compreensão plena do problema e como premissa inicial para a generalização que permita determinar a resposta da interação da onda eletromagnética com estruturas decompostas em harmônicos por série de Fourier. As constantes dependem das condições de contorno no infinito, tanto para regiões no interior da Terra como regiões externas no ar, assim como a condição de continuidade dos campos na interface que separa as duas camadas.

(i) Na interface Terra-ar ou seja  $Z = 0$  no ar com, com  $n \neq 0$ ,  $E_n$  dado pela equação(2.24) pode ser escrito como

$$E_n^{(a)} = \alpha_n e^{|n|\nu Z}. \quad (I.1)$$

Usando a continuidade de  $E_n$  entre o ar e a primeira camada  $E_n^{(a)} = E_n^{(1)}$  na superfície ( $z = 0$ ) obtemos

$$a_n + b_n = \alpha_n. \quad (I.2)$$

O campo na primeira camada é dado por

$$E_n^{(1)} = a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z}.$$

derivando parcialmente em relação a  $Z$ , temos

$$\frac{\partial E_n^{(1)}}{\partial z} = i\gamma_n a_n e^{i\gamma_n Z(x)} - i\gamma_n b_n e^{-i\gamma_n Z(x)}.$$

No ar

$$\frac{\partial E_n^{(a)}}{\partial z} = |n|\nu \alpha_n e^{|n|\nu z},$$

usando a condição de continuidade:

$$\frac{\partial E_n^{(a)}}{\partial z} = \frac{\partial E_n^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

obtemos,

$$i\gamma_n(a_n - b_n) = |n|\nu\alpha_n. \quad (I.3)$$

Usando as equações (I.3) e (I.2), temos

$$\begin{cases} a_n + b_n = \alpha_n \\ i\gamma_n(a_n - b_n) = |n|\nu\alpha_n. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema chegamos a:

$$a_n(\gamma_n + i|n|\nu) = b_n(\gamma_n - i|n|\nu). \quad (I.4)$$

(ii) Na interface entre a camada superior e o embasamento  $Z = Z(x)$

O campo elétrico em todo espaço é dado por

$$E_y = \sum_n E_n e^{i\nu x}$$

$$E_n = a_n e^{i\gamma_n Z} + b_n e^{-i\gamma_n Z}$$

No interior do embasamento por condições físicas, o campo será atenuado com a profundidade, logo  $b'_n = 0$  para todo valor de  $n$ , de forma que a equação do campo no interior do embasamento será:

$$E_y^{(2)} = \sum_n E_n a'_n e^{i\gamma'_n Z} e^{i\nu x}.$$

Da continuidade de  $E_y$ ,  $\partial E_y / \partial z$ ,  $\partial E_y / \partial x$  na interface senoidal respectivamente, temos:

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n Z(x)} + b_n e^{-i\gamma_n Z(x)}\} e^{i\nu x} = \sum_n a'_n e^{i\gamma'_n Z(x)} e^{i\nu x}, \quad (I.5)$$

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n Z(x)} - b_n e^{-i\gamma_n Z(x)}\} \gamma_n e^{i\nu x} = \sum_n a'_n \gamma'_n e^{i\gamma'_n Z(x)} e^{i\nu x}, \quad (I.6)$$

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n Z(x)} + b_n e^{-i\gamma_n Z(x)}\} n e^{i\nu x} = \sum_n a'_n n e^{i\gamma'_n Z(x)} e^{i\nu x}. \quad (I.7)$$

Substituindo-se  $Z(x) = z_0 + z_1 \text{sen } \nu x$  na equação (I.5), temos

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n(z_0 + z_1 \text{sen } \nu x)} + b_n e^{-i\gamma_n(z_0 + z_1 \text{sen } \nu x)}\} e^{i\nu x} = \sum_n a'_n e^{i\gamma'_n(z_0 + z_1 \text{sen } \nu x)} e^{i\nu x}.$$

Reescrevendo esta equação

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n z_0} e^{i\gamma_n z_1 \text{sen } \nu x} + b_n e^{-i\gamma_n z_0} e^{-i\gamma_n z_1 \text{sen } \nu x}\} e^{i\nu x} = \sum_n a'_n e^{i\gamma'_n z_0} e^{i\gamma'_n z_1 \text{sen } \nu x} e^{i\nu x} \quad (I.8)$$

Usando a relação

$$e^{iz \text{sen } \theta} = \sum_m e^{im\theta} J_m(z), \quad (I.9)$$

onde  $J_m(z)$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ . Temos ainda que  $J_m(-z) = J_{-m}(z)$ .

Chamando

$$\begin{aligned} a_n e^{i\gamma_n z_0} &= A_n, \\ b_n e^{-i\gamma_n z_0} &= B_n, \\ a'_n e^{i\gamma'_n z_0} &= C_n. \end{aligned}$$

Substituindo-se estas relações na equação(I.8),

$$\sum_n \sum_m \{A_n e^{im\nu x} J_m(\gamma_n z_1) + B_n e^{im\nu x} J_m(-\gamma_n z_1)\} e^{i\nu x} = \sum_n \sum_m C_n e^{im\nu x} J_m(\gamma'_n z_1) e^{i\nu x}.$$

Juntando termos semelhantes

$$\sum_n \sum_m \{A_n e^{i(m+n)\nu x} J_m(\gamma_n z_1) + B_n e^{i(m+n)\nu x} J_m(-\gamma_n z_1)\} = \sum_n \sum_m C_n e^{i(m+n)\nu x} J_m(\gamma'_n z_1)$$

e igualando os coeficientes de  $e^{im\nu x}$  da equação acima resulta

$$\sum_n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1). \quad (I.10)$$

Efetuando o mesmo procedimento para equação(I.6) temos,

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n Z(x)} - b_n e^{-i\gamma_n Z(x)}\} \gamma_n e^{i\nu x} = \sum_n a'_n \gamma'_n e^{i\gamma'_n Z(x)} e^{i\nu x}.$$

Substituindo-se  $z(x) = z_0 + z_1 \text{sen } \nu x$ , obtemos:

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n(z_0 + z_1 \text{sen } \nu x)} - b_n e^{-i\gamma_n(z_0 + z_1 \text{sen } \nu x)}\} \gamma_n e^{i\nu x} = \sum_n a'_n \gamma'_n e^{i\gamma'_n(z_0 + z_1 \text{sen } \nu x)} e^{i\nu x},$$

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n z_0} e^{i\gamma_n z_1 \text{sen } \nu x} - b_n e^{-i\gamma_n z_0} e^{-i\gamma_n z_1 \text{sen } \nu x}\} \gamma_n e^{i\nu x} = \sum_n a'_n \gamma'_n e^{i\gamma'_n z_0} e^{i\gamma'_n z_1 \text{sen } \nu x} e^{i\nu x}.$$

Substituindo-se as definições anteriores e a relação(I.9 ) na equação acima, obtemos;

$$\sum_n \{A_n \sum_m e^{im\nu x} J_m(\gamma_n z_1) - B_n \sum_m e^{im\nu x} J_m(-\gamma_n z_1)\} \gamma_n e^{in\nu x} = \sum_n C_n \gamma'_n \sum_m e^{im\nu x} J_m(\gamma'_n z_1) e^{in\nu x}.$$

$$\sum_n \sum_m \{A_n \gamma_n e^{i(m+n)\nu x} J_m(\gamma_n z_1) - \gamma_n B_n e^{i(m+n)\nu x} J_{-m}(\gamma_n z_1)\} = \sum_n \sum_m C_n \gamma'_n e^{i(m+n)\nu x} J_m(\gamma'_n z_1).$$

Igualando os termos  $e^{im\nu x}$  na equação acima temos,

$$\sum_n \gamma_n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) - \sum_n \gamma_n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n \gamma'_n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1). \quad (I.11)$$

Usando o procedimento anterior na equação(I.7), resulta

$$\sum_n n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1). \quad (I.12)$$

Assumindo que os argumentos das funções de Bessel são pequenos, podemos aproximar as funções de Bessel para:

$$\begin{aligned} J_0 &\approx 1 - \frac{1}{4}(\gamma_n z_1)^2, \\ J_{\pm 1} &\approx \pm \frac{1}{2}\gamma_n z_1, \\ J_{\pm 2} &\approx \frac{1}{8}(\gamma_n z_1)^2. \\ J_n &= 0 \quad |n| > 2 \end{aligned} \quad (I.13)$$

Como  $A_0$  e  $B_0$  são somente termos da fonte é fácil ver que  $A_n$  e  $B_n$  devem ser da ordem de  $(\gamma_n z_1)^2$ . Escrevendo todas as equações de segunda ordem em  $\gamma_n z_1$ . Aplicando as aproximações para as funções de Bessel na equação(I.10 ) com  $m = 0$  e variando o valor de  $n$  ( $n = -1, 0, 1$ ) temos,

$$\begin{aligned} A_0 J_0(\gamma_0 z_1) + B_0 J_0(\gamma_0 z_1) + A_{-1} J_1(\gamma_{-1} z_1) + B_{-1} J_{-1}(\gamma_{-1} z_1) + A_1 J_{-1}(\gamma_1 z_1) + \\ B_1 J_1(\gamma_1 z_1) = C_{-1} J_1(\gamma'_{-1} z_1) + C_0 J_0(\gamma'_0 z_1) + C_1 J_{-1}(\gamma'_1 z_1). \end{aligned}$$

Como  $\gamma_n = \gamma_{-n}$  e substituindo-se as aproximações (I.13), temos

$$\begin{aligned} A_0 [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0 z_1)^2] + B_0 [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0 z_1)^2] + A_1 (-\frac{1}{2}\gamma_1 z_1) + B_1 (\frac{1}{2}\gamma_1 z_1) + A_{-1} (\frac{1}{2}\gamma_1 z_1) + \\ B_{-1} (-\frac{1}{2}\gamma_1 z_1) = C_0 [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_0 z_1)^2] + C_1 (-\frac{1}{2}\gamma'_1 z_1) + C_{-1} (\frac{1}{2}\gamma'_1 z_1). \end{aligned}$$

Juntando termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0 z_1)^2](A_0 + B_0) + \frac{1}{2}\gamma_1 z_1(A_{-1} - B_{-1} - A_1 + B_1) &= \frac{1}{2}\gamma'_1 z_1(C_{-1} - C_1) \\ &+ [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_0 z_1)^2]C_0. \end{aligned} \quad (I.14)$$

Seja a equação(I.10)

$$\sum_n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1).$$

Aplicando as aproximações (I.13) para as funções de Bessel e com  $m = 1$ , temos

$$\sum_n A_n J_{1-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n B_n J_{-1+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n C_n J_{1-n}(\gamma'_n z_1).$$

Expandindo os três primeiros termos com  $n = 0, 1$ ,

$$A_0 J_1(\gamma_0 z_1) + B_0 J_{-1}(\gamma_0 z_1) + A_1 J_0(\gamma_1 z_1) + B_1 J_0(\gamma_1 z_1) = C_0 J_1(\gamma'_0 z_1) + C_1 J_0(\gamma'_1 z_1)$$

e substituindo-se as aproximações (I.13) e agrupando os termos semelhantes

$$\frac{1}{2}\gamma_0 z_1(A_0 - B_0) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2](A_1 + B_1) = \frac{1}{2}\gamma'_0 z_1 C_0 + [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2]C_1. \quad (I.15)$$

Seja a equação(I.11)

$$\sum_n \gamma_n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) - \sum_n \gamma_n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n \gamma'_n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1)$$

sendo  $m=1$

$$\sum_n \gamma_n A_n J_{1-n}(\gamma_n z_1) - \sum_n \gamma_n B_n J_{-1+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n \gamma'_n C_n J_{1-n}(\gamma'_n z_1).$$

Expandindo o somatório par  $n = 0, 1$ ,

$$\gamma_0 A_0 J_1(\gamma_0 z_1) - \gamma_0 B_0 J_{-1}(\gamma_0 z_1) + \gamma_1 A_1 J_0(\gamma_1 z_1) - \gamma_1 B_1 J_0(\gamma_1 z_1) = \gamma'_0 C_0 J_1(\gamma'_0 z_1) + \gamma'_1 C_1 J_0(\gamma'_1 z_1).$$

Usando as aproximações(I.13) e agrupando termos semelhantes, temos

$$\frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2]\gamma_1(A_1 - B_1) = \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0 + \gamma'_1 [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2]C_1. \quad (I.16)$$

Seja a equação(I.12)

$$\sum_n n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1)$$

sendo  $m = 1$

$$\sum_n n A_n J_{1-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n n B_n J_{-1+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n n C_n J_{1-n}(\gamma'_n z_1).$$

Para  $n = 1$ , pois o termo para  $n = 0$  se anula,

$$A_1 J_0(\gamma_1 z_1) + B_1 J_0(\gamma_1 z_1) = C_1 J_0(\gamma'_1 z_1).$$

Substituindo as aproximações (I.13) e reduzindo a termos semelhantes, temos

$$\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right](A_1 + B_1) = C_1 \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right]. \quad (\text{I.17})$$

Vamos agora fazer o mesmo procedimento par  $m = -1$  nas equações (I.10), (I.11) e (I.12), aplicando as aproximações (I.13), obtemos então

Seja a equação (I.10) com  $m = -1$

$$\sum_n A_n J_{-1-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n B_n J_{1+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n C_n J_{-1-n}(\gamma'_n z_1),$$

variando o valor de  $n = -1, 0$

$$A_0 J_{-1}(\gamma_0 z_1) + B_0 J_1(\gamma_0 z_1) + A_{-1} J_0(\gamma_{-1} z_1) + B_{-1} J_0(\gamma_{-1} z_1) = C_{-1} J_0(\gamma'_{-1} z_1) + C_0 J_{-1}(\gamma'_0 z_1).$$

Usando as aproximações para  $J_m$ , obtemos

$$\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right](A_{-1} + B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0 z_1(A_0 - B_0) = \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_{-1} z_1)^2\right]C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma'_0 z_1 C_0. \quad (\text{I.18})$$

Seja a equação (I.11) com  $m = -1$

$$\sum_n \gamma_n A_n J_{-1-n}(\gamma_n z_1) - \sum_n \gamma_n B_n J_{1+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n \gamma'_n C_n J_{-1-n}(\gamma'_n z_1)$$

e expandindo o somatório para  $n = -1, 0$

$$\gamma_{-1} A_{-1} J_0(\gamma_{-1} z_1) + \gamma_0 A_0 J_{-1}(\gamma_0 z_1) - \{\gamma_{-1} B_{-1} J_0(\gamma_{-1} z_1) + \gamma_0 B_0 J_1(\gamma_0 z_1)\} = \gamma'_{-1} C_{-1} J_0(\gamma'_{-1} z_1) + \gamma'_0 C_0 J_{-1}(\gamma'_0 z_1),$$

sendo  $\gamma_m = \gamma_{-m}$ , temos

$$\gamma_1 A_{-1} J_0(\gamma_1 z_1) + \gamma_0 A_0 J_{-1}(\gamma_0 z_1) - \{\gamma_1 B_{-1} J_0(\gamma_1 z_1) + \gamma_0 B_0 J_1(\gamma_0 z_1)\} = \gamma'_1 C_{-1} J_0(\gamma'_1 z_1) + \gamma'_0 C_0 J_{-1}(\gamma'_0 z_1). \quad (\text{I.19})$$

Usando as aproximações anteriores e juntando termos semelhantes, obtemos

$$\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] \gamma_1 (A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2} \gamma_0^2 z_1 (A_0 + B_0) = \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right] \gamma'_1 C_{-1} - \frac{1}{2} \gamma_0'^2 z_1 C_0. \quad (I.20)$$

Seja a equação (I.12)

$$\sum_n n A_n J_{m-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n n B_n J_{-m+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n n C_n J_{m-n}(\gamma'_n z_1)$$

fazendo  $m = -1$ , temos

$$\sum_n n A_n J_{-1-n}(\gamma_n z_1) + \sum_n n B_n J_{1+n}(\gamma_n z_1) = \sum_n n C_n J_{-1-n}(\gamma'_n z_1).$$

Para  $n = 0, -1$ , o somatório será reduzido para

$$A_{-1} J_0(\gamma_{-1} z_1) + B_{-1} J_0(\gamma_{-1} z_1) = C_{-1} J_0(\gamma'_{-1} z_1).$$

Como  $\gamma_n = \gamma_{-n}$ , então

$$A_{-1} J_0(\gamma_1 z_1) + B_{-1} J_0(\gamma_1 z_1) = C_{-1} J_0(\gamma'_1 z_1).$$

Usando as aproximações para a função de Bessel, temos

$$\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] A_{-1} + \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] B_{-1} = \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right] C_{-1},$$

colocando em evidência termos semelhantes

$$\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] (A_{-1} + B_{-1}) = \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right] C_{-1}. \quad (I.21)$$

Resumo das equações para a resolução do sistema:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_0 z_1)^2\right] (A_0 + B_0) + A_1 \frac{1}{2} \gamma_1 z_1 (A_{-1} - B_{-1} - A_1 + B_1) &= \frac{1}{2} \gamma'_1 z_1 (C_{-1} - C_1) \\ &+ \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_0 z_1)^2\right] C_0, \end{aligned} \quad (I.22)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_0 z_1 (A_0 - B_0) + \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] (A_1 + B_1) = \frac{1}{2} \gamma'_0 z_1 C_0 + \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right] C_1, \quad (I.23)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_0^2 z_1 (A_0 + B_0) + \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] \gamma_1 (A_1 - B_1) = \frac{1}{2} \gamma_0'^2 z_1 C_0 + \gamma'_1 \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right] C_1, \quad (I.24)$$

$$\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2\right] (A_1 + B_1) = C_1 \left[1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2\right], \quad (I.25)$$

$$[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2](A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0 z_1(A_0 - B_0) = [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2]C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma'_0 z_1 C_0, \quad (I.26)$$

$$[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2]\gamma_1(A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) = [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2]\gamma'_1 C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0, \quad (I.27)$$

$$[1 - \frac{1}{4}(\gamma_1 z_1)^2](A_{-1} + B_{-1}) = [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_1 z_1)^2]C_{-1}. \quad (I.28)$$

Usando aproximação até primeira ordem estas equações simplificam para:

$$[1 - \frac{1}{4}(\gamma_0 z_1)^2](A_0 + B_0) + \frac{1}{2}\gamma_1 z_1(A_{-1} - B_{-1} - A_1 + B_1) = \frac{1}{2}\gamma'_1 z_1(C_{-1} - C_1) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma'_0 z_1)^2]C_0, \quad (I.29)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_0 z_1(A_0 - B_0) + A_1 + B_1 = \frac{1}{2}\gamma'_0 z_1 C_0 + C_1, \quad (I.30)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) + \gamma_1(A_1 - B_1) = \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0 + \gamma'_1 C_1, \quad (I.31)$$

$$A_1 + B_1 = C_1, \quad (I.32)$$

$$(A_{-1} + B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 - B_0) = C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0, \quad (I.33)$$

$$\gamma_1(A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) = \gamma'_1 C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0, \quad (I.34)$$

$$(A_{-1} + B_{-1}) = C_{-1}. \quad (I.35)$$

Eliminando  $A_{\pm 1}$  e  $B_{\pm 1}$  das equações I.29, I.31 e I.34.

Da equação(I.31) obtemos:

$$\gamma_1(A_1 - B_1) = -\frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) + \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0 + \gamma'_1 C_1. \quad (I.36)$$

Da equação(I.34) obtemos:

$$\gamma_1(A_{-1} - B_{-1}) = \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) + \gamma'_1 C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0. \quad (I.37)$$

Substituindo-se (I.36) e (I.37) em (I.29), temos:

$$\frac{1}{2}z_1\left\{\frac{1}{2}\gamma_0^2z_1(A_0 + B_0) + \gamma_1' C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2z_1C_0 + \frac{1}{2}\gamma_0^2z_1(A_0 + B_0) - \frac{1}{2}\gamma_0'^2z_1C_0 - \gamma_1' C_1\right\} + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0z_1)^2](A_0 + B_0) = \frac{1}{2}\gamma_1'z_1(C_{-1} - C_1) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0'z_1)^2]C_0.$$

Arrumando os termos semelhantes, obtemos,

$$\frac{1}{2}z_1\{\gamma_0^2z_1(A_0 + B_0) - \gamma_0'^2z_1C_0 + \gamma_1'(C_{-1} - C_1)\} + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0z_1)^2](A_0 + B_0) = \frac{1}{2}\gamma_1'z_1(C_{-1} - C_1) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0'z_1)^2]C_0.$$

Fazendo a multiplicação do colchete;

$$\frac{1}{2}\gamma_0^2z_1^2(A_0 + B_0) - \frac{1}{2}\gamma_0'^2z_1^2C_0 + \frac{1}{2}z_1\gamma_1'(C_{-1} - C_1) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0z_1)^2](A_0 + B_0) = \frac{1}{2}\gamma_1'z_1(C_{-1} - C_1) + [1 - \frac{1}{4}(\gamma_0'z_1)^2]C_0.$$

Podemos expandir e rearranjar termos semelhantes, de forma que obtemos;

$$(A_0 + B_0) + \frac{\gamma_0^2z_1^2}{4}(A_0 + B_0) - \frac{1}{2}\gamma_0'^2z_1^2C_0 + \frac{1}{4}\gamma_0'^2z_1^2C_0 = C_0.$$

Agrupando termos semelhantes;

$$[1 + \frac{1}{4}(\gamma_0z_1)^2](A_0 + B_0) = [1 + \frac{1}{4}(\gamma_0'z_1)^2]C_0. \quad (I.38)$$

Usando a aproximação até primeira ordem, temos:

$$A_0 + B_0 = C_0. \quad (I.39)$$

Eliminando agora  $A_1$  e  $B_1$  das equações (I.30) e (I.32), temos

$$\frac{1}{2}\gamma_0z_1(A_0 - B_0) + (A_1 + B_1) = \frac{1}{2}\gamma_0'z_1C_0 + C_1$$

$$A_1 + B_1 = C_1.$$

Substituindo-se  $A_1 + B_1 = C_1$  na equação (I.30), obtemos:

$$\gamma_0(A_0 - B_0) = \gamma_0'C_0. \quad (I.40)$$

Usando as equações (I.31), (I.32) e (I.39), podemos eliminar  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_1$  da equação (I.31);

$$\frac{1}{2}\gamma_0^2z_1(A_0 + B_0) + \gamma_1(A_1 - B_1) = \frac{1}{2}\gamma_0'^2z_1C_0 + \gamma_1'C_1,$$

$$(A_1 + B_1) = C_1,$$

$$A_0 + B_0 = C_0.$$

Fazendo as substituições,

$$\frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1 (A_0 + B_0) + \gamma_1 (A_1 - B_1) = \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0 + \gamma_1' (A_1 + B_1).$$

Reescrevendo esta equação, temos;

$$A_1(\gamma_1 - \gamma_1') - B_1(\gamma_1 + \gamma_1') = \frac{1}{2}z_1(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2)C_0. \quad (\text{I.41})$$

Seja a equação (I.4),

$$a_n(\gamma_n + i|n|\nu) = b_n(\gamma_n - i|n|\nu), \quad (\text{I.42})$$

sendo que:

$$a_n = A_n e^{-i\gamma_n z_0}$$

$$b_n = B_n e^{i\gamma_n z_0}.$$

Substituindo-se estes valores em (I.42) com  $n = 1$ , obtemos;

$$B_1 = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} e^{-2i\gamma_1 z_0} A_1 = f A_1, \quad (\text{I.43})$$

onde:

$$f = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} e^{-2i\gamma_1 z_0}. \quad (\text{I.44})$$

Seja a equação (I.41);

$$A_1(\gamma_1 - \gamma_1') - B_1(\gamma_1 + \gamma_1') = \frac{1}{2}z_1(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2)C_0. \quad (\text{I.45})$$

Substituindo-se (I.43) na equação (I.45), temos;

$$A_1(\gamma_1 - \gamma_1') - f A_1(\gamma_1 + \gamma_1') = \frac{1}{2}z_1(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2)C_0.$$

Colocando  $A_1$  em evidência, chegamos facilmente a:

$$A_1 = \frac{-z_1(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2)}{2(\gamma_1 - \gamma_1') - 2f(\gamma_1 + \gamma_1')} C_0. \quad (\text{I.46})$$

Sendo:

$$a_1 = A_1 e^{-i\gamma_1 z_0}$$

obtemos então:

$$a_1 = \frac{-z_1(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)e^{-i\gamma_1 z_0}}{2(\gamma_1 - \gamma_1') - 2f(\gamma_1 + \gamma_1')} C_0. \quad (\text{I.47})$$

Sendo:

$$b_1 = B_1 e^{i\gamma_1 z_0}. \quad (\text{I.48})$$

Usando a relação (I.43), em (I.48) temos;

$$b_1 = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} e^{-i\gamma_1 z_0} A_1,$$

$$b_1 = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} a_1. \quad (\text{I.49})$$

Trabalhando da mesma forma com as equações (I.33), (I.34) e (I.35), temos:

Seja a equação (I.33),

$$(A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0 z_1 (A_0 - B_0) = C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0' z_1 C_0$$

e a equação (I.35)

$$A_{-1} + B_{-1} = C_{-1}.$$

Eliminando  $A_{-1} + B_{-1}$  e  $C_{-1}$  dessas equações, obtemos;

$$\gamma_0(A_0 - B_0) = \gamma_0' C_0. \quad (\text{I.50})$$

Eliminando  $A_0, B_0$  e  $C_{-1}$  de I.34, usando as relações (I.35), (I.39), as quais são respectivamente:

$$A_{-1} + B_{-1} = C_{-1},$$

$$A_0 + B_0 = C_0.$$

Seja a equação (I.34),

$$\gamma_1(A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1(A_0 + B_0) = \gamma_1' C_{-1} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0$$

substituindo as relações anteriores nesta equação, temos:

$$\gamma_1(A_{-1} - B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_1 C_0 = \gamma_1'(A_{-1} + B_{-1}) - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_1 C_0.$$

Separando em termos semelhantes, obtemos;

$$A_{-1}(\gamma_1 - \gamma_1') - B_{-1}(\gamma_1 + \gamma_1') = \frac{1}{2}z_1(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)C_0. \quad (\text{I.51})$$

Usando a relação (I.4) com  $n = -1$ , temos,

$$a_{-1}(\gamma_{-1} + i\nu) = b_{-1}(\gamma_{-1} - i\nu).$$

Temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= A_n e^{-i\gamma_n z_0}, \\ b_n &= B_n e^{i\gamma_n z_0}. \end{aligned}$$

Substituindo-se  $a_{-1}$  e  $b_{-1}$ , na equação anterior, temos;

$$A_{-1} e^{-i\gamma_{-1} z_0} (\gamma_{-1} + i\nu) = B_{-1} e^{i\gamma_{-1} z_0} (\gamma_{-1} - i\nu). \quad (\text{I.52})$$

Manipulando algebricamente, podemos escrever;

$$B_{-1} = \frac{\gamma_{-1} + i\nu}{\gamma_{-1} - i\nu} e^{-2i\gamma_{-1} z_0} A_{-1}$$

como  $\gamma_n = \gamma_{-n}$ , temos;

$$B_{-1} = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} e^{-2i\gamma_1 z_0} A_{-1} = f A_{-1},$$

onde  $f$  é dado pela relação (I.44), definida anteriormente.

Substituindo-se  $B_{-1}$  acima na equação (I.51), obtemos;

$$A_{-1}(\gamma_1 - \gamma_1') - f A_{-1}(\gamma_1 + \gamma_1') = \frac{1}{2}z_1(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)C_0.$$

Colocando  $A_{-1}$  em evidência, temos que;

$$A_{-1} = \frac{z_1(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)}{2(\gamma_1 - \gamma_1') - 2f(\gamma_1 + \gamma_1')} C_0.$$

Sendo  $a_{-1} = A_{-1}e^{-i\gamma_1 z_0} e$ .

$$a_1 = \frac{-z_1(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)e^{-i\gamma_1 z_0}}{2(\gamma_1 - \gamma_1') - 2f(\gamma_1 + \gamma_1')} C_0.$$

Notamos que:

$$a_{-1} = -a_1, \quad (I.53)$$

assim como;

$$b_{-1} = \frac{\gamma_1 + i\nu}{\gamma_1 - i\nu} a_{-1} = -b_1. \quad (I.54)$$

Usando a equação (I.39) e (I.50), respectivamente reescritas abaixo;

$$\begin{aligned} A_0 + B_0 &= C_0, \\ \gamma_0(A_0 - B_0) &= \gamma_0' C_0 \end{aligned}$$

usando as relações abaixo,

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 e^{-i\gamma_0 z_0} \\ b_0 &= B_0 e^{i\gamma_0 z_0} \end{aligned}$$

nas equações acima, formamos um sistema em  $a_0$  e  $b_0$  a determinar;

$$\begin{cases} a_0 e^{i\gamma_0 z_0} + b_0 e^{-i\gamma_0 z_0} = C_0 \\ \gamma_0(a_0 e^{i\gamma_0 z_0} - b_0 e^{-i\gamma_0 z_0}) = \gamma_0' C_0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos;

$$a_0 = \frac{\gamma_0 + \gamma_0'}{2\gamma_0} e^{-i\gamma_0 z_0} C_0, \quad (I.55)$$

$$b_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_0'}{2\gamma_0} e^{i\gamma_0 z_0} C_0. \quad (I.56)$$

## II.- APENDICE B.

### II.1 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO PARA A GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DE HUGHES

Usando a equação I.5 do Apêndice A onde desenvolvemos a solução para um único harmônico temos

$$\sum_n \{a_n e^{i\gamma_n d(x)} + b_n e^{-i\gamma_n d(x)}\} e^{i\nu x} = \sum_n a'_n e^{i\gamma'_n d(x)} e^{i\nu x}, \quad (\text{II.1})$$

onde  $d(x)$  é a função que descreve a profundidade em função da distância horizontal ( $x$ ).

Separando o primeiro termo desta equação

$$T = \sum_n a_n e^{i\gamma_n d(x)} e^{i\nu x} \quad (\text{II.2})$$

e fazendo a substituição de  $d(x)$  pela forma da interface entre a primeira camada e o embasamento dada por

$$d(x) = \sum_{m=0}^M z_m \text{sen } m\nu x \quad (\text{II.3})$$

obtemos então

$$T = \sum_n a_n e^{i\gamma_n \sum_{m=0}^M z_m \text{sen } m\nu x} e^{i\nu x}. \quad (\text{II.4})$$

Separando o termo para  $m = 0$  temos

$$T = \sum_n a_n e^{i\gamma_n z_0} e^{i\gamma_n \sum_{m=1}^M z_m \text{sen } m\nu x} e^{i\nu x}. \quad (\text{II.5})$$

Chamando

$$A_n = a_n e^{i\gamma_n z_0} \quad (\text{II.6})$$

e considerando que as  $M$  somas das potências da exponencial podem ser escritas como o produto de  $M$  exponenciais obtemos

$$T = \sum_n A_n e^{i\nu x} \prod_{m=1}^M e^{i\gamma_n z_m \text{sen } m\nu x}. \quad (\text{II.7})$$

Usando a relação:

$$e^{izsen\theta} = \sum_l e^{il\theta} J_l(z), \quad (II.8)$$

onde  $J_l$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ , podemos reescrever a equação em  $T$  como

$$T = \sum_n A_n e^{in\nu x} \prod_{m=1}^M \sum_l e^{ilm\nu x} J_l(\gamma_n z_m). \quad (II.9)$$

Variando  $m$  de 1, 2, ...,  $M$  podemos reescrever esta equação como

$$T = \sum_n A_n e^{in\nu x} \sum_l e^{il\nu x} J_l(\gamma_n z_1) \sum_l e^{2il\nu x} J_l(\gamma_n z_2) \sum_l e^{3il\nu x} J_l(\gamma_n z_3) \dots \sum_l e^{Mil\nu x} J_l(\gamma_n z_M) = \quad (II.10)$$

$$T = \sum_n A_n e^{in\nu x} \sum_{l,m=1} \sum_{l,m=2} \sum_{l,m=3} \dots \sum_{l,m=M} e^{il\nu x} e^{2il\nu x} e^{3il\nu x} \dots e^{Mil\nu x} J_l(\gamma_n z_1) J_l(\gamma_n z_2) J_l(\gamma_n z_3) \dots J_l(\gamma_n z_M) = \quad (II.11)$$

$$T = \sum_n A_n e^{in\nu x} \sum_{l,m=1} \sum_{l,m=2} \dots \sum_{l,m=M} [e^{i\nu x \sum_{m=1}^M ml_m} \prod_{m=1}^M J_{l_m}(\gamma_n z_m)] \quad (II.12)$$

Assumindo que os argumentos da função de Bessel são pequenos de tal modo que podemos eliminar os termos de segunda ordem em diante, mantendo somente os termos onde

$$\sum_{m=1}^M |l_m| \leq 1. \quad (II.13)$$

Portanto os coeficientes de  $e^{in\nu x}$  em  $T$  serão:

$$A_n \prod_{m=1}^M J_0(\gamma_n z_m) + \sum_{m=1}^M [A_{n-m} J_1(\gamma_{n-m} z_m) + A_{n+m} J_{-1}(\gamma_{n+m} z_m)]. \quad (II.14)$$

Realizando um processo similar em toda equação II.1, obtemos

$$\begin{aligned} (A_n + B_n) \prod_{m=1}^M J_0(\gamma_n z_m) + \sum_{m=1}^M [A_{n-m} J_1(\gamma_{n-m} z_m) + A_{n+m} J_{-1}(\gamma_{n+m} z_m) + \\ B_{n-m} J_{-1}(\gamma_{n-m} z_m) + B_{n+m} J_1(\gamma_{n+m} z_m)] = \\ = C_n \prod_{m=1}^M J_0(\gamma'_n z_m) + \sum_{m=1}^M [C_{n-m} J_1(\gamma'_{n-m} z_m) + C_{n+m} J_{-1}(\gamma'_{n+m} z_m)] \end{aligned} \quad (II.15)$$

onde

$$B_n = b_n e^{-i\gamma_n z_0} \text{ e } C_n = a'_n e^{i\gamma'_n z_0} \quad (\text{II.16})$$

Como  $A_0$  e  $B_0$  são os únicos termos dependentes do campo fonte, então  $A_n$  e  $B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, M$  são da ordem de  $\gamma_n z_m$  e para  $n > M$  são de muito mais alta ordem de forma que podem ser negligenciados.

Podemos escrever todas as equações até segunda ordem em  $\gamma_n z_m$ . Aproximando as funções de Bessel para:

$$\begin{aligned} J_0 &= 1 - \frac{1}{4}(\gamma_n z_m)^2 \\ J_{\pm 1} &= \pm \frac{1}{2}\gamma_n z_m \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

e colocando  $n = 0$  na equação II.15 temos:

$$\begin{aligned} (A_0 + B_0)\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M [A_{-m} - B_{-m} - A_m + B_m]\gamma_m z_m &= \\ = C_0\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0'^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (C_{-m} - C_m)\gamma'_m z_m. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Com  $n = i$ ,  $-1 \leq i \leq M$ , a equação II.15 torna-se

$$A_i + B_i + \frac{1}{2}\gamma_0 z_i (A_0 - B_0) = C_i + \frac{1}{2}\gamma_0' z_i C_0 \quad (\text{II.19})$$

e para  $n = i$ ,  $-1 \geq i \geq -M$ , a equação II.15 torna-se

$$A_i + B_i - \frac{1}{2}\gamma_0 z_i (A_0 - B_0) = C_i - \frac{1}{2}\gamma_0' z_i C_0 \quad (\text{II.20})$$

As equações II.18, II.19 e II.20 são exatamente equivalentes as equações I.29, I.30 e I.33. Usando o mesmo procedimento nas equações I.6 e I.7 chegamos a

$$\gamma_m (A_{\pm m} - B_{\pm m}) \pm \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_m (A_0 + B_0) = \gamma'_m C_{\pm m} \pm \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_m C_0 \quad (\text{II.21})$$

e

$$A_{\pm m} + B_{\pm m} = C_{\pm m} \quad (\text{II.22})$$

para  $1 \leq m \leq M$ .

As equações II.21 e II.22 são equivalentes as equações I.31, I.34, I.32 e I.35. Vamos fazer o mesmo procedimento efetuado no Apêndice A para determinarmos as constantes de integração.

Usando a equação II.21 temos que

$$\gamma_m(A_m - B_m) = -\frac{1}{2}\gamma_0^2 z_m(A_0 + B_0) + \gamma'_m C_m + \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_m C_0, \quad (\text{II.23})$$

assim como

$$\gamma_m(A_{-m} - B_{-m}) = \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_m(A_0 + B_0) + \gamma'_m C_{-m} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_m C_0. \quad (\text{II.24})$$

Podemos reescrever a equação II.18 como

$$\begin{aligned} (A_0 + B_0)\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M [-\gamma_m(A_m - B_m) + \gamma_m(A_{-m} - B_{-m})]z_m = \\ = C_0\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0'^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (C_{-m} - C_m)\gamma'_m z_m. \end{aligned}$$

Substituindo-se as relações II.23 e II.24 na expressão anterior temos que

$$\begin{aligned} (A_0 + B_0)\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left\{\gamma_0^2 z_m(A_0 + B_0) - \gamma'_m C_m - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_m C_0 + \right. \\ \left. \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_m(A_0 + B_0) + \gamma'_m C_{-m} - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_m C_0\right\}z_m = C_0\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0'^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (C_{-m} - C_m)\gamma'_m z_m. \quad (\text{II.25}) \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes no interior do colchete, temos

$$\begin{aligned} (A_0 + B_0)\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left\{\gamma_0^2 z_m(A_0 + B_0) - \gamma_0'^2 z_m C_0 + \right. \\ \left. \gamma'_m(C_{-m} - C_m)\right\}z_m = C_0\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0'^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (C_{-m} - C_m)\gamma'_m z_m. \quad (\text{II.26}) \end{aligned}$$

Separando os termos entre colchete, após a multiplicação por  $z_m$  obtemos,

$$\begin{aligned} (A_0 + B_0)\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2(A_0 + B_0) - \frac{1}{2}\gamma_0'^2 \sum_{m=1}^M z_m^2 C_0 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (C_{-m} - C_m)\gamma'_m z_m = C_0\left[1 - \frac{1}{4}\gamma_0'^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (C_{-m} - C_m)\gamma'_m z_m. \quad (\text{II.27}) \end{aligned}$$

Eliminando os termos em  $C_w$  e reagrupando a equação anterior chegamos a uma equação simples dada por

$$(A_0 + B_0)\left[1 + \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right] = C_0\left[1 + \frac{1}{4}\gamma_0^2 \sum_{m=1}^M z_m^2\right], \quad (\text{II.28})$$

de onde podemos concluir que

$$A_0 + B_0 = C_0. \quad (\text{II.29})$$

Substituindo-se a equação II.22 para a relação positiva dos termos na equação II.19, obtemos que

$$\frac{1}{2}\gamma_0 z_i (A_0 - B_0) = \frac{1}{2}\gamma_0' z_i C_0. \quad (\text{II.30})$$

Substituindo-se ao mesmo tempo as equações II.22 e II.29 na equação II.21 temos

$$\gamma_m (A_m - B_m) + \frac{1}{2}\gamma_0^2 z_m C_0 = \gamma_m' (A_m + B_m) + \frac{1}{2}\gamma_0'^2 z_m C_0,$$

reagrupando em  $A_m$ ,  $B_m$  e  $C_0$ , temos

$$(\gamma_m - \gamma_m') A_m - (\gamma_m + \gamma_m') B_m = \frac{1}{2}(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2) z_m C_0. \quad (\text{II.31})$$

Usando a relação I.4, reescrita abaixo

$$a_n(\gamma_n + i | n | \nu) = b_n(\gamma_n - i | n | \nu), \quad (\text{II.32})$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= A_n e^{-i\gamma_n z_0} \\ b_n &= B_n e^{i\gamma_n z_0}. \end{aligned}$$

Substituindo-se estas relações na equação II.32 temos

$$B_n = \frac{\gamma_n + i | n | \nu}{\gamma_n - i | n | \nu} A_n e^{-2i\gamma_n z_0}. \quad (\text{II.33})$$

Podemos então escrever  $B_n$  da seguinte forma

$$B_n = f A_n, \quad (\text{II.34})$$

onde

$$f = \frac{\gamma_n + i | n | \nu}{\gamma_n - i | n | \nu} e^{-2i\gamma_n z_0}, \quad (\text{II.35})$$

substituindo-se II.33 na forma escrita acima em II.31, temos

$$(\gamma_m - \gamma'_m)A_m - (\gamma_m + \gamma'_m)fA_m = \frac{1}{2}(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2)z_m C_0.$$

Colocando  $A_m$  em evidência temos,

$$A_m = \frac{-z_m(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)}{2(\gamma_m - \gamma'_m) - 2f(\gamma_m + \gamma'_m)} C_0, \quad (\text{II.36})$$

portanto

$$a_m = \frac{-z_m(\gamma_0^2 - \gamma_0'^2)}{2(\gamma_m - \gamma'_m) - 2f(\gamma_m + \gamma'_m)} e^{-i\gamma_m z_0} C_0. \quad (\text{II.37})$$

Sendo  $b_m = B_m e^{i\gamma_m z_0}$  e usando a equação II.33, determinamos  $b_m$  como:

$$b_m = \frac{\gamma_m + im\nu}{\gamma_m - im\nu} a_m, \quad (\text{II.38})$$

sendo,

$$f = \frac{\gamma_m + im\nu}{\gamma_m - im\nu} e^{-2i\gamma_m z_0} \quad (\text{II.39})$$

Fazendo se o mesmo procedimento para com as equações II.20, II.21 e II.22 como foi feito no Apêndice-1, temos que:

$$a_m = -a_{-m}; \quad b_m = -b_{-m}, \quad (\text{II.40})$$

$m = 1, 2, 3, \dots, M$ ,  $M$  é o número de termos da representação da estrutura em série de Fourier.

### III - APÊNDICE Ç

#### III.1 EXPANSÃO EM SÉRIE DE FOURIER DAS ESTRUTURAS

Uma função periódica pode ser definida como qualquer função para a qual

$$f(t) = f(t + T)$$

para todo  $t$ . A menor constante  $T$  que satisfaz a igualdade é chamada *período* da função.

Seja uma função  $f(x)$  periódica de período  $T$ . Então esta função pode ser representada por uma série trigonométrica, chamada série trigonométrica de Fourier dada pela expressão

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right]$$

As amplitudes dos coeficientes dos harmônicos da série são calculados pelas integrais

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.1})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Usando a fórmula de Euler podemos escrever esta série na forma complexa como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{\frac{i2n\pi}{T}x} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{i2n\pi}{T}x} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Seja  $f(x)$  uma função com período  $T = 2\tau$ . Se  $f(x)$  é par, então a série de Fourier se restringe a uma série em cosseno

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}x\right)$$

com coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}x\right) dx.$$

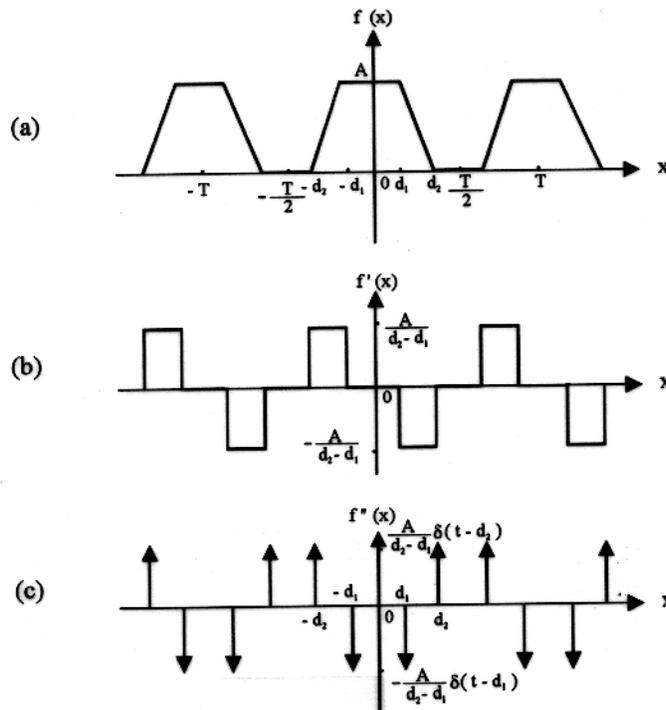
Se  $f(x)$  for ímpar, então a série se restringe a uma série Seno de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}x\right)$$

com

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}x\right) dx.$$

Para o modelo de bacia consideramos a estrutura abaixo onde  $A$  é a profundidade da



bacia e  $2d_2$  e  $2d_1$  são respectivamente a largura do topo e da base da bacia, a relação de dimensão entre eles determinará o ângulo de inclinação dos lados da bacia com a horizontal. É importante determinar o termo  $a_0$ , pois este deve ser somado a profundidade média ( $z_0$ ), fazendo isto estamos deslocando a estrutura para o nível zero de referência de forma a termos exatamente a profundidade média como a medida da superfície ao topo da bacia. Como modo elegante e maior facilidade do cálculo da série de Fourier desta estrutura, usamos a função impulso- $\delta$  conjuntamente com a diferenciação de funções.

Solução: Seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)] \quad (\text{III.3})$$

onde  $\omega_0 = 2\pi/T$ , e diferenciando a equação acima temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [-n\omega_0 a_n \text{sen}(n\omega_0 x) + n\omega_0 b_n \text{cos}(n\omega_0 x)], \quad (\text{III.4})$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \text{cos}(n\omega_0 x) - (n\omega_0)^2 b_n \text{sen}(n\omega_0 x)], \quad (\text{III.5})$$

Como  $f''(x)$  é uma função ímpar generalizada e

$$f''(x) = \frac{A}{d_2 - d_1} [-\delta(t - d_1) + \delta(t - d_2)], \quad 0 < t < \frac{1}{2}T. \quad (\text{III.6})$$

Portanto,

$$-(n\omega_0)b_n = 0 \quad b_n = 0, \quad (\text{III.7})$$

$$\begin{aligned} -(n\omega_0)^2 a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f'' \text{cos}(n\omega_0 x) dx \\ &= \frac{4A}{T(d_2 - d_1)} \int_0^{T/2} [-\delta(t - d_1) + \delta(t - d_2)] \text{cos}(n\omega_0 x) dx \\ &= -\frac{4A}{T(d_2 - d_1)} (\text{cos } n\omega_0 d_1 - \text{cos } n\omega_0 d_2), \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4A}{(n\omega_0)^2 T (d_2 - d_1)} (\text{cos } n\omega_0 d_1 - \text{cos } n\omega_0 d_2) \\ &= \frac{AT}{n^2 \pi^2 (d_2 - d_1)} (\text{cos } n\omega_0 d_1 - \text{cos } n\omega_0 d_2). \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

O termo constante  $\frac{1}{2}a_0$  pode ser obtido como

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{A}{T} (d_1 + d_2). \quad (\text{III.10})$$

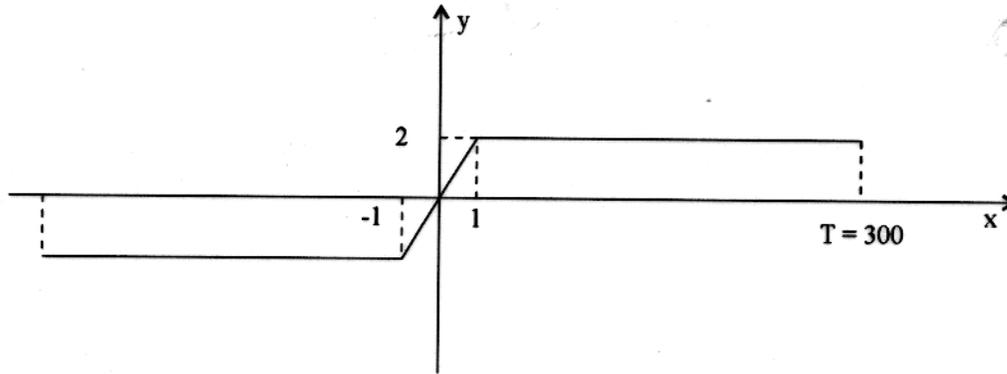
Portanto,

$$f(x) = \frac{A}{T} (d_1 + d_2) + \frac{AT}{\pi^2 (d_2 - d_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{cos } n\omega_0 d_1 - \text{cos } n\omega_0 d_2) \text{cos } n\omega_0 x}{n^2}. \quad (\text{III.11})$$

Dessa forma temos que as amplitudes dos harmônicos que serão usados para a modelagem da estrutura com simetria par será:

$$z_m = \frac{A}{T} (d_1 + d_2) + \frac{AT}{\pi^2 (d_2 - d_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\text{cos } m\omega_0 d_1 - \text{cos } m\omega_0 d_2)}{m^2} \quad (\text{III.12})$$

Para estrutura em forma de degrau abaixo, tendo simetria ímpar podemos desenvolver esta função em série seno de Fourier:



$$z_m = \frac{2}{300} \left[ \int_0^1 2x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}x\right) dx + \int_1^{300} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}x\right) dx \right] \quad (\text{III.13})$$

$$z_m = \frac{4}{300} \left[ \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}x\right) dx + \int_1^{300} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}x\right) dx \right] \quad (\text{III.14})$$

$$z_m = \frac{1}{75} \left[ \frac{300(300 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}\right) - m\pi \cos(m\pi))}{(m\pi)^2} \right] \quad (\text{III.15})$$

$$z_m = \frac{4}{(m\pi)^2} \left[ 300 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}\right) - m\pi \cos(m\pi) \right] \quad (\text{III.16})$$

Para gerarmos uma função com simetria par de amplitude ( $A=2$ ), usando este desenvolvimento em seno, fazemos a superposição de duas funções ímpares como mostrado na figura abaixo, onde as equações que geram a função par serão dadas por:

$$f_1 = \sum_{m=1}^M z_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}(x + 10)\right), \quad (\text{III.17})$$

$$f_2 = - \sum_{m=1}^M z_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{300}(x - 10)\right). \quad (\text{III.18})$$

Aqui  $f_1$  é função deslocada para esquerda e  $f_2$  é deslocada para direita. Este procedimento será usado para a modelagem de estrutura com simetria par, pois o desenvolvimento linear permite a superposição dos campos gerados pelos harmônicos das estruturas.