

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELAGEM ACÚSTICA POR DIFERENÇAS FINITAS E
ELEMENTOS FINITOS EM 2-D E 2,5-D**

FRANCISCO DE ASSIS SILVA NETO



BELÉM
2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**MODELAGEM ACÚSTICA POR DIFERENÇAS
FINITAS E ELEMENTOS FINITOS EM 2-D E 2,5-D**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA POR

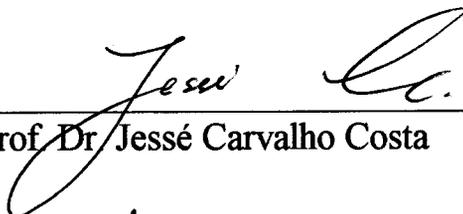
FRANCISCO DE ASSIS SILVA NETO

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

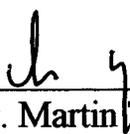
Data da aprovação : 26 / 10 / 2004

Nota : 90 % (EXCELENTE)

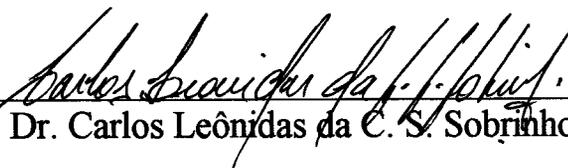
COMITÊ DA DISSERTAÇÃO



Prof. Dr. José Carvalho Costa



Prof. Dr. Martin Tygel



Prof. Dr. Carlos Leônidas da C. S. Sobrinho

BELÉM

2004

T SILVA NETO, Francisco de Assis

S586m **Modelagem acústica por diferenças finitas e elementos finitos em 2 D e 2,5 D** / Francisco de Assis Silva Neto; orientador, Jessé Carvalho Costa. --Belém: [s.n], 2004.

103f. : il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, CG, UFPA, 2004.

1.PROPAGAÇÃO DE ONDAS. 2.MODELAGEM COMPUTACIONAL. 3.ELEMENTOS FINITOS. 4.DIFERENÇAS FINITAS. 5.RELAÇÕES DE RECIPROCIDADE 6.RELAÇÃO DE DISPERSÃO. I.COSTA, Jessé Carvalho, Orient. II. Título.

CDD: 621.38131

Dedico este trabalho a minha mãe Jovelina, pois graças as muitas renúncias que fez em meu nome, colocando-me sempre em primeiro lugar, mesmo diante de muitas dificuldades fez de mim uma pessoa de bem, a você minha eterna gratidão.

Aos meus avós e minha tia Francisca que sempre me tiveram com um filho.

À minha namorada Bruna Aline por todo seu amor, dedicação, compreensão e apoio em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao *Mestre* Jessé Carvalho pela paciência e confiança em mim depositadas, ao longo de todos esses anos de saudável e produtiva convivência sob sua orientação, e por sempre acreditar, apesar das muitas limitações, que realmente sou capaz.

Agradeço ao Prof. Jaime Fernandes Eiras por toda atenção, e por sempre colocar-se à disposição para compartilhar seus valiosos conhecimentos.

Agradeço ao colega de curso Charles Lima e ao Prof. German Garabito pela concessão de seu modelo do Solimões, parte importante deste trabalho.

Um agradecimento especial ao Prof. Carlos Leônidas Sobrinho por toda atenção despendida em sua minuciosa correção deste trabalho, e pelas sugestões que contribuíram para a sua melhoria.

Agradeço ao Prof. Martin Tygel pela correção e por muitas sugestões que contribuíram para a melhoria deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante o curso, sem o qual a conclusão deste trabalho estaria comprometida.

Agradeço a Rede Cooperativa de Pesquisa em Risco Exploratório-Rede 01 / FINEP - CTPETRO, pelo apoio financeiro.

Agradeço a secretária Benildes Lopes por sempre fazer o máximo para facilitar nossa tão conturbada vida acadêmica.

SUMÁRIO

	i
AGRADECIMENTOS	ii
LISTA DE FIGURAS	iv
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 INTRODUÇÃO	3
2 MODELAGEM ACÚSTICA POR DIFERENÇAS FINITAS E ELEMENTOS FINITOS	8
2.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	8
2.2 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	9
2.2.1 Acuidade e estabilidade do método de diferenças finitas	10
2.2.2 Implementação da fonte	12
2.2.3 Condições de fronteira	13
2.2.3.1 Fronteira Livre	13
2.2.3.2 Camada com casamento perfeito de impedância	14
2.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	16
2.3.1 Equações fundamentais	18

2.3.2	Discretização	18
2.3.3	Relação de dispersão	20
2.3.4	Implementação da fonte e receptores	20
2.3.5	Condições de fronteira	21
2.3.6	Efeitos da discretização	24
3	DIFERENÇAS FINITAS 2,5-D	35
3.1	MODELAGEM 2,5-D	36
3.2	ESTABILIDADE	37
3.3	VALIDAÇÃO	38
4	VALIDAÇÃO DOS ALGORITMOS	40
4.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	40
4.1.1	Comparação com a solução analítica da equação de onda 2-D	40
4.1.2	Relações de Reciprocidade	43
4.1.2.1	Relação de reciprocidade para o campo de pressão	44
4.1.2.2	Relação de reciprocidade para o campo de velocidade	44
4.1.2.3	Relação de reciprocidade entre o campo de velocidade e o campo de pressão	45
4.2	VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	46
4.2.1	Comparação com a solução analítica da equação da onda 2-D	46
4.2.2	Relações de reciprocidade	48
4.2.2.1	Relação de reciprocidade para o campo de pressão	49
4.2.2.2	Relação de reciprocidade para o campo de velocidade	49
4.2.2.3	Relação de reciprocidade para a o campo de velocidade e o campo de pressão	50
5	APLICAÇÕES DOS ALGORITMOS	59

5.1	APLICAÇÃO I : MODELO MARMOUSI	60
5.2	APLICAÇÃO II : MODELO GEOLÓGICO SINTÉTICO DA BACIA PALEOZÓICA DO SOLIMÕES	62
6	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICES	84
	APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ACÚSTICO POR DIFERENÇAS FINITAS	85
A.1	Discretização da equação	85
A.2	Cálculo dos operadores de diferenças	87
	APÊNDICE B – RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA DIFERENÇAS FINI- TAS	89
	APÊNDICE C – CÁLCULO DOS OPERADORES DIFERENCIAIS	92
	APÊNDICE D – APROXIMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ACÚSTICO POR ELEMENTOS FINITOS	94
D.1	Aproximação dos operadores diferenciais	96
	APÊNDICE E – RELAÇÕES DE RECIPROCIDADE EM MEIOS ACÚSTICOS	98
E.1	Relação de reciprocidade do tipo convolução	99
E.2	As relações de reciprocidade do Campo Acústico	100
E.2.1	Simetrias do tensor de Green que decorrem da relação de convolução	101

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 Relações de dispersão de um esquema de diferenças finitas para $\mu = 0.25$. Observa-se que operadores de diferenças finitas de ordem acima de 8 ($N=4$) permitem uma amostragem de 3 pontos por comprimento de onda. 11
- Figura 2.2 Relações de dispersão para esquema de diferenças finitas com $N = 9$, em função de G^{-1} . São mostradas as relações de dispersão para os ângulos de incidência $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ e 45° comparados ao valor exato da relação. 12
- Figura 2.3 Dissipação da energia total para um esquema de diferenças finitas, obtida após 0,8 s de propagação. 16
- Figura 2.4 Componente vertical da velocidade, em quatro instantâneos da propagação da onda com ganho da ordem de cinco desvios padrão. A escala de cinza indica o valor da componente da velocidade. Observa-se que o campo de velocidade é fortemente dissipado ao incidir sobre as bordas. 17
- Figura 2.5 Malha intercalada formada por células triangulares e retangulares. As posições nas quais os campos e propriedades são amostrados, aparecem em destaque. 19
- Figura 2.6 Curvas de dispersão para o esquema de elementos finitos. Verifica-se que para $G = 10$ a dispersão numérica é mínima para todos os ângulos utilizados. .. 21
- Figura 2.7 Malha triangularizada em que cada nó é cercado por células dispostas simet-

ricamente em relação às direções horizontal e vertical	22
Figura 2.8 A figura mostra uma malha formada por elementos triangulares e retangulares nas bordas. Esse é o modelo típico de malha que utilizamos em nosso trabalho.	23
Figura 2.9 Energia dissipada obtida por elementos finitos obtida após 0,8 s de propagação da onda.	24
Figura 2.10 A componente vertical do campo de velocidade é mostrada em quatro instantes da propagação do campo acústico. São mostradas as amplitudes e as respectivas faixas de variação. É possível verificar que há uma fraca reflexão proveniente das bordas. Essa reflexão é muito inferior em modelo de maiores dimensões e maior complexidade estrutural.	25
Figura 2.11 Modelo de velocidade formado por duas camadas, e a interface levemente inclinada. As distâncias são medidas em m . Há entre as camadas do modelo um alto contraste de impedância acústica de. Esse valor foi exagerado propositalmente para realçar o efeito de <i>staircasing</i> na simulação.	26
Figura 2.12 A figura mostra a amplitude pulso Blackman-Harris em função do tempo. Verifica-se que a fonte é estreita o que garante que ela seja concentrada em torno da frequência dominante.	27
Figura 2.13 Três instantâneos da propagação do campo acústico modelado por diferenças finitas. É possível verificar as difrações provocadas pela falha na discretização da interface. Esse efeito é puramente numérico e não existiria na realidade em uma interface suavemente inclinada.	29
Figura 2.14 Sismogramas obtidos após 1,2 s de propagação, modelados pelo método de	

diferenças finitas. São mostrados o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. Verifica-se claramente que há registros de forte difração provocada pelo efeito *Staircasing*. Não ocorreriam difrações se a malha acompanhasse perfeitamente a interface. 30

Figura 2.15 Três instantâneos da propagação da frente onda modelada por diferenças finitas. A discretização da malha foi reduzida de 20 *m* para 5 *m*. Verifica-se que não há difrações perceptíveis. Nesse caso a malha ajustou-se perfeitamente a interface eliminando o *Staircasing*, e portanto as difrações 31

Figura 2.16 Sismogramas obtidos após 1,2 s de propagação, modelados pelo método de diferenças finitas. São mostrados o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. Verifica-se que ainda aparecem fracas difrações. Essas difrações seriam completamente eliminadas se a impedância acústica fosse menor. O refinamento da malha para reduzir as difrações, implicou em um aumento considerável no tempo de execução. Em uma malha de maiores dimensões e mais refinada o uso de esquemas DF de altas ordens tornaria a simulação proibitivamente demorada. 32

Figura 2.17 A figura mostra três instantâneos da propagação do campo acústico modelado por elementos finitos. É possível verificar que não há difrações, o uso de uma malha formada por células triangulares, melhora a representação da interface, evitando o *Staircasing*. 33

Figura 2.18 Sismogramas obtidos após 1,2 s da onda modelados pelo método de elementos finitos. São mostrados o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. Não há registros de difração nos sismogramas o que demonstra que o uso de elementos finitos é uma alternativa viável aos métodos de altas ordens quando o modelo possui interfaces levemente inclinadas ou topografia. Visto que a utilização de malhas irregulares permite que as células sejam ajustadas com mais precisão ao modelo. 34

- Figura 3.1 Relações de dispersão para o esquema de diferenças 2,5-D finitas com $N = 16$, em função de G^{-1} . No gráfico superior, $k_2 = k_{2max}$. No gráfico observa-se a forte dispersão para números de onda menores. No gráfico inferior $k_2 = 0$. Neste gráfico são mostradas as relações de dispersão para os ângulos de incidência $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ e 45° comparados ao valor exato da relação, verifica-se que não há dispersão para $h \leq \frac{\lambda}{3}$. Em ambos os gráficos $\mu = 0.1$ 38
- Figura 3.2 Comparação da solução por diferenças finitas e a solução analítica em um meio homogêneo de velocidade 3000 m/s . O gráfico acima mostra o pulso fonte; logo abaixo está o sinal normalizado pela amplitude máxima no receptor a 1500 m de distância calculado por diferenças finitas e pela solução analítica, também normalizada. Abaixo, o erro da aproximação. Neste teste foi usado $h = 12 \text{ m}$ e $\mu = 0.1$ 39
- Figura 4.1 Comparação entre um traço sísmico gerado através do método de diferenças finitas e a correspondente solução analítica da equação de onda acústica 2-D. Cada traço está normalizado por sua amplitude máxima. A figura superior mostra os traços obtidos para um intervalo de 1 s de propagação da onda acústica e apresentado entre os instantes 0.4 s e 0.7 s , sem a correção de fase. A figura central mostra a comparação entre as soluções após a correção de fase. A figura inferior mostra o erro obtido pela diferença entre as duas soluções após a correção de fase. O erro de fase e o desvio padrão do erro da amplitude encontrados foram respectivamente 1.3×10^{-4} e 0.0115 42
- Figura 4.2 Modelo de velocidade Marmousi. Os pontos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 indicam as posições utilizadas para avaliar as relações de reciprocidade. A escala de cores indica a velocidades em m/s 44
- Figura 4.3 Modelo de densidade do Marmousi obtido a partir da equação de Gardner et al.(1974). A escala de cores indica a densidade em kg/m^3 45

Figura 4.4 Relação de reciprocidade para o campo de pressão usando diferenças finitas para o caso de uma fonte explosiva, equação (4.5). A Figura (a) mostra a superposição dos traços. A linha vermelha contínua representa o campo de pressão $P(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Na Figura (b) é mostrada uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas. 46

Figura 4.5 Reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade representada pela equação (4.6). Na Figura (a) apresenta-se a superposição dos traços $v_{31}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$, linha vermelha contínua, e $v_{13}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$, linha representada por círculos azuis. Na Figura (b) destaca-se uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que a esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas. 47

Figura 4.6 Reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade representada pela equação (4.6). Na Figura (a) apresenta a superposição dos traços $v_{11}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$, linha vermelha contínua, e $v_{11}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$, linha representada por círculos azuis. Na Figura (b) destaca-se uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que a esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas. 48

Figura 4.7 Reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade representada pela equação (4.6). Em (a) apresenta a superposição dos traços $v_{33}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$, linha vermelha contínua, e $v_{33}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$, linha representada por círculos azuis. Em (b) destaca-se uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que a esta relação

- de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas. 49
- Figura 4.8 Reciprocidade entre o campo de pressão $P_3(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ gerado por uma fonte direcional polarizada na direção x_3 e situada na posição \mathbf{x}_1 , linha contínua, e a componente da velocidade $v_{30}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$ gerada por uma fonte explosiva, e a linha representada pelos círculos. Em b destaca-se uma ampliação no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para demonstrar a acuidade do método de diferenças ao obedecer essa relação de reciprocidade. 50
- Figura 4.9 Reciprocidade entre o campo de pressão $P_1(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ gerado por uma fonte direcional polarizada na direção x_1 e situada na posição \mathbf{x}_1 , linha contínua, e a componente da velocidade $v_{10}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$ gerada por uma fonte explosiva, linha representada pelos círculos. em b) destaca-se uma ampliação no no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para demonstrar a acuidade do método de diferenças ao obedecer essa relação de reciprocidade. 51
- Figura 4.10 Comparação entre um traço gerado numericamente pelo algoritmo de elementos finitos, e um outro gerado analiticamente a partir da equação (4.2). A Figura superior mostra a comparação entre os traços sem a correção de fase. A Figura central mostra a comparação após a correção de fase. A Figura inferior mostra o erro entre as medidas. 52
- Figura 4.11 Relação de reciprocidade para o campo de pressão obtido pelo algoritmo de elementos finitos. Na Figura (a) , a linha vermelha contínua representa o campo de pressão $P_0(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P_0(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Em b) destaca-se uma ampliação dos traços no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de elementos finitos. 53
- Figura 4.12 Relação de reciprocidade para as componentes do campo de velocidade v_1 e v_3 , gerados por fontes impulsivas, polarizadas respectivamente nas direções x_3 e

x_1 , A linha vermelha contínua representa o campo de velocidade $v_{13}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de velocidade $v_{31}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Os campos foram medidos após 2 s de propagação da onda acústica. A Figura (a) mostra a superposição dos campos medidos. A Figura (b) mostra em destaque o os campos medidos no intervalo entre 1.6 s e 2.0 s. 54

Figura 4.13 Relação de reciprocidade para a componente do campo de velocidade v_1 .

A linha vermelha contínua representa a componente do campo de velocidade $v_{11}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo $v_{11}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Os campos foram medidos após 2 s de propagação da onda acústica. Em (a) mostra-se a superposição dos campos medidos. A Figura (b) mostra em destaque o os campos medidos no intervalo entre 1.6 s e 2.0 s. 55

Figura 4.14 Relação de reciprocidade para a componente do campo de velocidade v_3 .

A linha vermelha contínua representa a componente campo de velocidade $v_{33}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica a componente $v_{33}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Os campos foram medidos após 2 s de propagação da onda acústica. Em (a) mostra-se a superposição dos campos medidos. A Figura (b) mostra em destaque o os campos medidos no intervalo entre 1.6 s e 2.0 s. As figuras mostram que a relação de reciprocidade para as componentes do campo de velocidade, foi respeitada com grande exatidão pelo algoritmo de elementos finitos. 56

Figura 4.15 Relação de reciprocidade entre a componente v_3 do campo de velocidade

e o campo de pressão P . A linha vermelha contínua representa o campo de velocidade $v_{30}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P_3(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. A Figura (a) mostra os campos superpostos medidos após 2.0 s de propagação da onda acústica. A Figura (b) mostra em destaque a superposição dos campos, no intervalo 1.6 s e 2.0 s mostrando que há perfeita concordância entre elas. 57

- Figura 4.16 Relação de reciprocidade entre a componente v_1 da velocidade, e o campo de pressão. A linha vermelha contínua representa o campo de velocidade $v_{10}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P_1(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Em (a) mostra-se a superposição dos campos, medidos após 2.0 s de propagação da onda acústica. A Figura (b) mostra em destaque a superposição dos campos, mostrando que há perfeita concordância entre elas. Desse modo garante-se que a relação de reciprocidade entre o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade são perfeitamente respeitadas. 58
- Figura 5.1 A figura mostra o campo de pressão gerado pelo algoritmo DF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. As fontes foram posicionadas nas coordenadas 6000 m 7000 m e 8000 m ao longo do eixo x_1 . As setas destacam os eventos mais representativos, que coincidem com a seção publicada em Versteeg (1993). 62
- Figura 5.2 As figuras mostram a componente vertical da velocidade geradas pelo algoritmo DF. Verifica-se que a qualidade das seções é semelhante a apresentada na Figura 5.1. É possível verificar também os mesmos eventos apresentados em Versteeg (1993). 63
- Figura 5.3 As figuras mostram a componente horizontal do campo de velocidade, gerada pelo algoritmo DF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. Verifica-se que as seções sísmicas registradas não possuem a mesma resolução que as apresentadas nas figuras anteriores, isso está associado a forte gradiente lateral de velocidade existente no modelo e a complexidade estrutural existente na direção x_1 . Esquemas de altas ordens não apresentam um bom resultado nessas situações como já foi mostrado em uma seção anterior. 64

- Figura 5.4 A figura mostra o campo de pressão gerado pelo algoritmo EF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. As fontes foram posicionadas nas coordenadas 6000 m , 7000 m e 8000 m ao longo do eixo x_1 . As setas destacam os eventos mais representativos, coincidentes com os eventos em Versteeg (1993). 65
- Figura 5.5 As figuras mostram a componente vertical da velocidade geradas pelo algoritmo EF. Verifica-se que a qualidade das seções é semelhante a apresentada na Figura 5.4. É possível verificar também os mesmos eventos apresentados em Versteeg (1993). 66
- Figura 5.6 As figuras mostram a componente horizontal do campo de velocidade, gerada pelo algoritmo EF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. Verifica-se que as seções sísmicas registradas possuem a mesma resolução que as apresentadas anteriormente para o algoritmo EF. O esquema EF por utilizar uma malha mais densa e utilizar células que se ajustam melhor às estruturas do modelo, não apresenta problemas com relação aos gradientes de velocidade existentes na direção x_1 67
- Figura 5.7 A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se através do modelo no instante $t = 0.58\text{ s}$. Nessa figura é possível identificar uma reflexão em uma estrutura no ponto de coordenadas $(6500\text{ m}; 500\text{ m})$. Esse evento foi registrado no sismograma por volta do instante 0.9 s 68
- Figura 5.8 A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se no instante 0.87 s . Verifica-se a frente de onda incidente nas falhas geológicas do modelo. Essa é uma região de grande complexidade do modelo. 68
- Figura 5.9 A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se no instante

$t = 1.16 s$. A frente de onda incide sobre um domo localizado na entre os ponto $(6000 m; 2000 m)$. Esse evento é representado intensamente nas seções sísmicas por volta do instante $2.3 s$ 69

Figura 5.10 A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se no instante $t = 1.45 s$. A frente de onda incide sobre um domo que constitui o topo de um reservatório no ponto de coordenadas $(6500 m; 2500 m)$ (VERSTEEG, 1993). Esse evento aparece fracamente nas seções por volta de $2.8 s$, não é possível distingüi-lo dos demais devido a grande quantidade de reflexões múltiplas registradas nesse instante. 69

Figura 5.11 Modelo de velocidade da seção geológica da Sub-bacia do Juruá. Algumas das principais características estruturais foram representadas neste modelo. 70

Figura 5.12 Modelo de densidade da seção geológica da Sub-bacia do Juruá pertencente a Bacia paleozóica do Solimões. 70

Figura 5.13 Seções sísmicas com os registros do campo de pressão gerados pelo algoritmo de diferenças finitas, em que os eventos de maior amplitude são destacados. A seta A identifica a reflexão da frente de onda na discordância entre a camada que representa o Terciário-Quaternário e a camada representando os sedimentos do Cretáceo. A seta B indica o evento de difração que pode ser mais facilmente identificado da Figura 5.19, resultante do pequeno rejeito na interface entre Terciário-Quaternário e o Cretáceo. A seta C corresponde a reflexão de grande amplitude na interface de maior contraste de impedância no modelo, a qual representa a discordância entre os sedimentos do Cretáceo e a soleira de diabásio no topo dos sedimentos Paleozóicos. As setas D e E identificam duas das várias reflexões múltiplas registradas. Devido a grande quantidade de múltiplas não é possível distingüir as reflexões nas interfaces em profundidade. 71

- Figura 5.14 Seções sísmicas com os registros da componente vertical do campo de velocidade modelada pelo algoritmo de diferenças finitas. É possível verificar os eventos coincidentes com os apresentados na Figura 5.13. 72
- Figura 5.15 Seções sísmicas com os registros da componente horizontal da velocidade modelada pelo algoritmo de diferenças finitas. É possível verificar os eventos coincidentes com os apresentados na Figura 5.13. 73
- Figura 5.16 Seções sísmicas com os registros do campo de pressão modelado pelo algoritmo de elementos finitos. Os eventos de maior amplitude destacados na Figura 5.13, podem ser encontrados nitidamente nos sismogramas produzidos pelo algoritmos de elementos finitos. 74
- Figura 5.17 Seções sísmicas com os registros da componente vertical do campo de velocidade modelado pelo algoritmo de elementos finitos. Verifica-se a grande semelhança com a Figura 5.15 em que é apresentado o componente vertical modelada por diferenças finitas. 75
- Figura 5.18 Seções sísmicas com os registros da componente horizontal do campo de velocidade modelado pelo algoritmo de elementos finitos. Verifica-se a grande semelhança com a Figura 5.16 em que é apresentado o componente modelada por diferenças finitas. 76
- Figura 5.19 Nesta figura verifica-se a reflexão da frente de onda na discordância entre o Terciário-Quaternário e o Cretáceo indicada na Figura 5.13 pela letra A. É possível identificar também uma difração em um pequeno rejeito sobre essa discordância, indicado na Figura 5.13, pela letra B . É visível nessa figura a forte reflexão sobre a discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico, o registro dessa reflexão é destacado na Figura 5.13 pela letra C. Verifica-se na parte superior do modelo que a onda incidente na superfície livre não sofreu inversão

de fase, diferente do que acontece com a onda que reflete na discordância que sofre inversão de fase devido a fronteira rígida. Isso garante que essa condição de fronteira livre foi corretamente implementada. 76

Figura 5.20 A figura mostra que o comprimento de onda na região do Paleozóico é da ordem de três vezes maior que a espessura da camada reservatório. Outro ponto a destacar é o pequeno contraste de impedância entre a rocha encaixante e a rocha reservatório, visto que aparentemente a frente de onda não sofre desvios. 77

Figura 5.21 Esta figura mostra que a reflexão na camada reservatório na região do Paleozóico possui amplitude muito pequena em relação ao sinal transmitido. 77

Figura 5.22 A figura mostra instantâneo do campo acústico após 2 s da ativação da fonte. Verifica-se que a intensidade das reverberações entre a superfície livre e a discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico, ainda é considerável. É visível na parte inferior e nas laterais do modelo que a frente de onda desaparece ao incidir nas bordas garantido desse modo que a fronteira absorvente foi corretamente implementada. 77

Figura A.1 Malha intercalada na qual são definidas as propriedades físicas. 86

Figura D.1 Célula triangular arbitrária utilizada pelo algoritmo de elementos finitos. É mostrado o caminho de integração para o cálculo dos coeficientes de elementos finitos. 95

Figura D.2 Malha intercalada formada por células triangulares e retangulares. As posições nas quais os campos e propriedades são amostrados, aparecem em destaque.

RESUMO

A modelagem acústica fornece dados úteis para avaliação de metodologias de processamento e imageamento sísmico, em modelos com estrutura geológica complexa. Esquemas de diferenças finitas (DF) e elementos finitos (EF) foram implementados e avaliados em modelos homogêneos e heterogêneos. O algoritmo de diferenças finitas foi estendido para o caso 2,5-D em modelos com densidade variável. Foi apresentada a modelagem de alvos geológicos de interesse exploratório existentes na Bacia Paleozóica do Solimões na Amazônia. Reflexões múltiplas de longo período produzidas entre a superfície livre e a discordância Cretáceo-Paleozóica, a baixa resolução da onda sísmica nas proximidades do reservatório e as fracas reflexões na interface entre as rochas reservatório e as rochas selantes são as principais características dos dados sintéticos obtidos, os quais representam um grande desafio ao imageamento sísmico.

ABSTRACT

Acoustic modeling provides useful synthetic data for evaluating seismic processing and imaging in complex geological settings. High order finite difference(FD) and finite elements(FE) was implemented and evaluated in homogeneous and inhomogeneous model. The FD algorithm are extended to 2,5-D for variable density models. Seismic modeling of oil reservoirs targets somewhat similar to those occurring at Paleozoic Basins in the Amazon are presented. Long period multiples produced between the free-surface and the Cretaceous-Paleozoic interface, the low resolution of the seismic waves near the reservoir and the weak reflections at the interface between the reservoir rocks and the cap rock are the main features of the synthetics which presents a challenge to seismic imaging.

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação teve como motivação o projeto Modelagem Acústica 3-D de Bacias Paleozóicas da Região Amazônica, e está ligado ao grupo Rede Cooperativa de Pesquisa em Risco Exploratório - Rede 01 / FINEP-CTPETRO, cujo objetivo principal é desenvolver metodologias de modelagem, tratamento, aquisição e interpretação de dados sísmicos, que contribuam para a redução do risco envolvido na exploração de petróleo e gás. A modelagem da propagação da onda constitui uma das áreas de maior importância na Geofísica de exploração. Metodologias de aquisição, tratamento e interpretação de dados sísmicos podem ser intensivamente testadas, a partir de dados numéricos gerados pela modelagem elástica/acústica da propagação da onda sobre modelos geológicos sintéticos, antes de serem levadas a campo, e aplicadas em situações reais. A seguir apresento duas abordagens utilizadas para modelar a propagação da onda acústica em meios 2-D, o método de diferenças finitas com operadores de alta ordem (HOLBERG, 1987; KARRENBACH, 1995) (DF), e o método de elementos finitos *lumped mass* (ZENG et al., 2001) (EF). Os algoritmos produzidos para a modelagem serão estendidos para o caso 3-D, e reutilizados no projeto anteriormente citado. Apliquei esses algoritmos em modelos geológicos sintéticos, com elevada complexidade estrutural, densidade variável, e forte contraste de impedância acústica entre as camadas. Tais características são comuns em Bacias Paleozóicas na Região Amazônica.

O algoritmo DF satisfaz explicitamente a condição de fronteira livre, ou seja, essa condição deve ser implementada diretamente no código, e possui como principais características a acuidade dos operadores, a capacidade de modelar corretamente o campo acústico, mesmo utilizando malhas esparsas, com baixa dispersão e anisotropia numéricas, e sua relativa facilidade de implementação. O algoritmo EF, tem como características a condição de fronteira livre que é satisfeita implicitamente, ou seja, sem a necessidade de implementação direta no algoritmo, a utilização de malhas flexíveis, capazes de ajustar-se com precisão a topografias

e interfaces encurvadas ou inclinadas.

A modelagem por diferenças finitas foi proposta inicialmente por Yee (1966), para a solução das equações de Maxwell no Eletromagnetismo. Alford et al. (1974) apresentaram uma solução analítica no domínio da frequência para a propagação da onda acústica em um meio 2-D homogêneo e ilimitado. Virieux (1986) apresentou as condições de estabilidade e a relação de dispersão de um esquema de diferenças finitas de segunda ordem no espaço e segunda ordem no tempo, em um meio elástico, e propôs uma malha em que o campo de pressão, as componentes do campo de velocidade e as propriedades físicas são amostrados em pontos intercalados. Levander (1988) utilizando a malha proposta por Virieux (1986), comparou esquemas de diferenças finitas de segunda e quarta ordem no espaço, ambos de segunda ordem no tempo, aplicados a equação de onda 2-D em um meio elástico e isotrópico, e verificou que esquemas de quarta ordem sofrem menos dispersão numérica, para altas frequências, mesmo utilizando poucos pontos da malha para representar o comprimento de onda. Holberg (1987) apresentou um critério baseado na máxima auto-similaridade, para o cálculo de operadores de diferenças finitas otimizados e de ordem arbitrária. Karrenbach (1995) avaliou em sua tese de doutorado esquemas de diferenças finitas com operadores de diferenças de ordem superior a oito, ditos de altas ordens, e propôs sugestões a respeito da implementação e avaliação desses esquemas, utilizando como principais referências entre outras, os trabalhos de Virieux (1986) , Holberg (1987) e Levander (1988).

Mittet (2002) propôs empiricamente um procedimento para simular a condição de fronteira livre, aplicada em esquemas de diferenças finitas de alta ordem sobre uma malha intercalada, para um meio elástico e isotrópico. Tal procedimento é desnecessário em elementos finitos, visto que o método satisfaz implicitamente a condição de fronteira.

O estudo da propagação de ondas sísmicas por elementos finitos, foi proposto por Smith (1985). Zienkiewicz (1977), utilizou um esquema isoparamétrico de segunda ordem, baseado no princípio variacional, em que os campos eram calculados em pontos específicos (nós), através de um polinômio interpolador, nesse mesmo trabalho ele substituiu a matriz de massa por uma matriz de massa diagonalizada, formada pela soma dos elementos de cada linha, esse procedimento foi chamado de *lumped mass*, com essa alteração tornou-se possível resolver a equação de onda explicitamente, sem a necessidade inversões matriciais, melhorando a performance do método. A modelagem por elementos finitos também pode ser efetuada no domínio da frequência. Esses esquemas chamados espectrais, possuem maior acuidade em

relação aos esquemas de baixa ordem implementados no tempo, mas envolvem um custo computacional maior quando utilizam formulações diferenciais (CARCIONE et al., 2002; JO et al., 1987). Zhang e Verschuur (2002) estudaram a propagação de ondas em um meio anisotrópico 2-D, utilizando esquema de elementos finitos *lumped mass* de baixa ordem, capaz de utilizar uma malha irregular formada por células triangulares e retangulares.

As reflexões indesejadas provocadas pela truncagem da malha nas bordas são um problema para modelagem, visto que interferem com os dados, introduzindo informações errôneas, e prejudicam a interpretação dos resultados. Para atenuar este efeito Berenger (1994) propôs uma condição de fronteira absorvente, com casamento perfeito de impedância entre as regiões interna e externa às bordas, para absorção de ondas eletromagnéticas. Chew e Liu (1996) estenderam o trabalho de Berenger (1994) para meios elásticos, e incluíram um sistema de variáveis *stretching* no domínio da frequência, esse sistema introduz uma atenuação do campo acústico na região das bordas, ao ser convertido para o domínio do tempo. Gardner et al. (1974) obtiveram experimentalmente uma relação entre a densidade e a velocidade de propagação da onda compressional em rochas. Portanto é possível produzir modelos sintéticos de densidade, que associados ao modelo de velocidade, produzem melhores observações do campo acústico.

Implementei o algoritmo de diferenças finitas com operadores diferenciais de alta ordem (HOLBERG, 1987; KARRENBACH, 1995), e o algoritmo de elementos finitos *lumped mass* (ZHANG; VERSCHUUR, 2002), utilizando a formulação Pressão-Velocidade (LEVANDER, 1988; VIRIEUX, 1986), através da linguagem de programação Fortran 90.

Validei os algoritmos em meios homogêneos, através da comparação entre um traço sísmico gerado numericamente e um traço gerado a partir da solução analítica da equação de onda acústica. As diferenças de fase e amplitude entre os traços foram quantificadas. Os traços obtidos através dos dois algoritmos concordaram com os traços analíticos, com isso garantiu-se inicialmente que ao menos para meios homogêneos, os algoritmos modelam o fenômeno da propagação da onda acústica corretamente. Soluções analíticas para a equação de onda acústica em meios estruturalmente complexos não estão disponíveis. Desse modo avaliei a acuidade dos resultados obtidos pelos algoritmos nesses meios, através da verificação de todas as relações de reciprocidade entre fonte e receptor. Os resultados mostraram que o campo acústico modelado através dos dois algoritmos respeita com grande acuidade às relações de reciprocidade.

A energia total injetada no modelo foi medida e a absorção do campo acústico nas bordas do modelo foi quantificada.

Apliquei os algoritmos DF e EF sobre o modelo sintético Marmousi em que simulei um experimento de aquisição de dados marinhos e comparei os resultados obtidos com os publicados na literatura em Versteeg (1993), e verifiquei que houve grande coincidência entre os dois resultados.

Em seguida apliquei os algoritmos em um modelo sintético em que procurou-se representar as principais características estruturais da Sub-Bacia do Juruá pertencente a Bacia Paleozóica do Solimões na região Amazônica (EIRAS, 1998). Esse modelo apresenta forte contraste de impedância acústica, na interface que separa as deposições de sedimentos do Cretáceo e as soleiras de diabásio do Triássico, na parte superior da região formada por sedimentos do Paleozóico (EIRAS, 1998). Os resultados obtidos através dos dois algoritmos foram semelhantes e mostraram que há grande quantidade de reflexões múltiplas de longo período entre a superfície livre e a interface Cretáceo-Paleozóica, registradas nas seções sísmicas obtidas.

Verifiquei que a performance ou seja o tempo de processamento do algoritmo de diferenças finitas, ao modelar a propagação do campo acústico em modelos estruturalmente complexos, foi da ordem de três vezes a performance do algoritmo de elementos finitos. A demanda computacional para armazenamento de dados exigida pelo algoritmo de elementos finitos, é 75% maior que a exigida pelo algoritmo de diferenças finitas de alta ordem.

A divisão dessa dissertação é apresentada a seguir . No segundo capítulo apresento a fundamentação teórica sobre as quais os algoritmos de elementos finitos e diferenças finitas foram implementados. No terceiro capítulo apresento a extensão do algoritmo de diferenças finitas 2-D para o caso 2,5-D. Nessa abordagem é possível simular experimentos 3-D através um esquema 2-D com pequenas alterações. No quarto capítulo os algoritmos são validados, para garantir a acuidade da modelagem do campo acústico. No quinto capítulo faço aplicações dos algoritmos simulando experimentos típicos de aquisição de dados sísmicos.

A primeira aplicação foi sobre o modelo sintético Marmousi, seguindo as informações contidas em Versteeg(1993), em que é simulado um experimento de aquisição de dados marinhos. Em seguida apliquei os algoritmos ao modelo sintético da Sub-Bacia do Juruá, em que foram registrados na superfície as reflexões ocorridas em estruturas geológicas em subsuperfície. No sexto capítulo apresento as considerações finais dessa dissertação.

2 MODELAGEM ACÚSTICA POR DIFERENÇAS FINITAS E ELEMENTOS FINITOS

Este capítulo apresenta o sistema de equações utilizado para a modelagem acústica descrita nesta dissertação. Apresento e analiso as duas aproximações numéricas para solução destas equações utilizadas nesta dissertação: o métodos de elementos finitos e o método de diferenças finitas. Discuto como determinar os operadores de diferenças finitas de alta ordem, e derivo a relação de dispersão associada a estas aproximações. Apresento, para as duas abordagens, a forma de implementar a condição de fronteira livre e fronteiras absorventes do tipo camada perfeitamente absorvente.

2.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

O sistema de equações de primeira ordem, que governa a propagação de ondas acústicas resulta da equação de balanço de momento linear, Segunda Lei de Newton, e da relação constitutiva para fluidos perfeitamente elásticos, Lei de Hook generalizada (AKI; RICHARDS, 1980). Utilizando a pressão e a velocidade para descrever o estado acústico, o sistema de equações resultantes para meios estacionários é

$$\partial_t v_j(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \partial_j P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} f_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

$$\partial_t P(\mathbf{x}, t) = -\kappa(\mathbf{x}) \partial_j v_j(\mathbf{x}, t) - \kappa(\mathbf{x}) \partial_t q(\mathbf{x}, t) , \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j$, é o vetor posição, t é o tempo, $v_j(\mathbf{x}, t)$ é o campo de velocidade na direção j , sendo $j = 1, 2, 3$; $P(\mathbf{x}, t)$ é o campo de pressão; os operadores ∂_t e ∂_j indicam, respectivamente,

às derivadas parciais em relação ao tempo e a direção x_j ; $\rho(\mathbf{x})$ é a densidade do meio, $\kappa(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \alpha^2(\mathbf{x})$ é o módulo de incompressibilidade, sendo $\alpha(\mathbf{x})$ a velocidade de propagação de onda compressional; $f_j(\mathbf{x}, t)$ é a densidade de forças de volume, em aplicações sísmicas estas fontes descrevem fontes dipolares, e $\partial_t q(\mathbf{x}, t)$ indica a taxa de injeção de volume utilizada para modelar fontes explosivas, mono-pólos.

2.2 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método de diferenças finitas aplicado à solução de sistema de equações diferenciais parciais consiste em substituir em (2.1) e (2.2) os operadores diferenciais contínuos por operadores de diferenças discretos. Na implementação apresentada nesta dissertação utilizo malhas intercaladas para a amostragem dos campos de velocidade e pressão. A aproximação para a primeira derivada é sempre avaliada no ponto médio do intervalo de aplicação do operador. Os operadores de diferenças para a primeira derivada (HOLBERG, 1987; KARRNBACH, 1995) de ordem $2N$ têm a forma

$$\mathbf{D}f_{i+1/2} = \frac{1}{h} \sum_{j=-N+1}^N d_j^1 f_{i-j} ,$$

em que d_j^1 são os coeficientes do operador de diferenças, h indica o intervalo de amostragem em uma malha regular, e f_i indica um campo escalar amostrado regularmente nas coordenadas x_i . Nesta notação os coeficientes do operador de diferenças correspondente a segunda derivada podem ser determinados pela convolução

$$d_i^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=-N+1}^N d_j^1 d_{i-j+1}^1 \quad i = -N, \dots, N-1 . \quad (2.3)$$

O sistema de equações formado por (2.1) e (2.2), foi discretizado sobre uma malha regular com espaçamento h , através do uso dos operadores de diferenças definidos em (2.3). Os campos de pressão e velocidade da partícula são amostrados em posições intercaladas na malha e subsequentes no tempo. Este esquema de discretização foi utilizado para modelagem elástica por Virieux (1986) e Levander (1988), e é uma extensão imediata do método proposto por Yee (1966) para solução das equações de Maxwell no Eletromagnetismo. Nesse esquema os operadores diferenciais foram substituídos por operadores de diferenças finitas de 2^a ordem no tempo e 2^a e 4^a ordens no espaço. Assim como em Levander (1988), utilizei operadores

de diferenças de 2^a ordem no tempo, mas de 18^a ordem no espaço. As equações (2.1) e (2.2), são mostradas na forma discretizada no Apêndice A .

2.2.1 Acuidade e estabilidade do método de diferenças finitas

A acuidade a estabilidade são condições necessárias para que a modelagem seja realizada de maneira satisfatória. A acuidade de um esquema de diferenças finitas é determinada a partir da relação de dispersão obtida através do método de Von Neuman (PRESS et al., 1990), fazendo a substituição do campo acústico de uma onda plana nas equações de diferenças, ver Apêndice B. Desse modo obtém-se a relação

$$\frac{C_{DF}}{C} = \frac{\text{sen}^{-1} \left\{ \mu \left[\sum_{j=1}^{N-1} d_{N+j}^2 \left(\text{sen} \left(\frac{j n_1 k_n}{2} \right)^2 + \text{sen} \left(\frac{j n_3 k_n}{2} \right)^2 \right) \right]^{1/2} \right\}}{k_n \mu}, \quad (2.4)$$

em que C é a velocidade de fase da onda no meio contínuo, C_{DF} é a velocidade de fase da onda sobre a malha, N corresponde a metade do comprimento do operador de diferenças finitas para a primeira derivada, $k_n = h k/2$ é o número de onda normalizado no intervalo $[0 ; \pi]$, sendo $n_1 = \cos \theta$ e $n_3 = \text{sen} \theta$, em que θ é o ângulo que define a direção do vetor número de onda; μ é o número de Courant-Friendrichs-Levy (ISERLES, 1996) e corresponde ao produto $C dt/h$, em que dt e h correspondem respectivamente a discretização no tempo e no espaço. O valor μ controla a estabilidade do esquema de diferenças finitas. Se o argumento do inverso da função seno em (2.4) for sempre menor ou igual a unidade, o esquema é estável. Portanto uma boa estimativa da condição de estabilidade para um esquema com de diferenças finitas de ordem $2N$ é

$$\mu \leq \sqrt{\frac{2}{d_0^2}}. \quad (2.5)$$

Esta condição permite determinar o incremento no tempo dt , conhecido o intervalo de discretização da malha,

$$dt \leq \sqrt{\frac{2}{d_0^2}} \frac{h}{C}. \quad (2.6)$$

A diferença entre a velocidade de propagação na malha e a velocidade de propagação determina o erro de fase do esquema. Fixado um valor para μ que garanta a estabilidade do esquema de diferenças finitas, a relação de dispersão 2.4 permite avaliar o erro de fase. É

conveniente parametrizar a relação de dispersão utilizando G

$$G = \frac{\pi}{k_n} = \frac{\lambda}{h}, \quad (2.7)$$

ou seja o comprimento de onda normalizado pelo intervalo de discretização da malha. A análise gráfica da relação de dispersão em função de G ou G^{-1} , permite determinar o menor número de pontos por comprimento de onda para manter o erro de fase dentro de uma dada tolerância. A Figura 2.1 mostra o gráfico da relação de dispersão (2.4) para $\theta = 30^\circ$ e $\mu = 0.25$ para operadores de diferentes ordens.

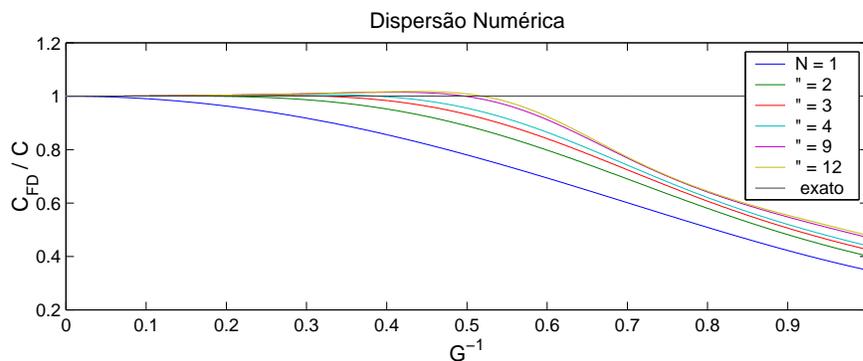


Figura 2.1: Relações de dispersão de um esquema de diferenças finitas para $\mu = 0.25$. Observa-se que operadores de diferenças finitas de ordem acima de 8 ($N=4$) permitem uma amostragem de 3 pontos por comprimento de onda.

Verificamos na Figura 2.1 que para os operadores de baixas ordens ($N = 1$), para que não haja dispersão numérica é necessário que $G \approx 10$ ou seja $h \leq \lambda/10$, para valores menores de G há forte dispersão numérica. Para os operadores de ordem acima de 8 ($N \geq 4$) a dispersão numérica é mínima para $G \approx 3$. A principal vantagem destes esquemas, chamados esquemas de alta ordem, é a economia de memória em relação aqueles que utilizam operadores de ordem mais baixa.

Outro ponto a ser avaliado é a anisotropia numérica. A Figura 2.2 mostra a mudança da relação de dispersão em função do ângulo entre o vetor número de onda \mathbf{k} e o versor da direção x_3 da malha, para um esquema com operadores de diferenças com $N = 9$ e $\mu = 0.25$. Verifica-se na Figura 2.2 que a dispersão numérica para esse esquema é praticamente nula para $h \leq \lambda/3$, desse modo é possível modelar a propagação da onda, utilizando uma malha espacial com baixa densidade de pontos.

A análise feita acima permite entender os passos para se efetuar a modelagem por

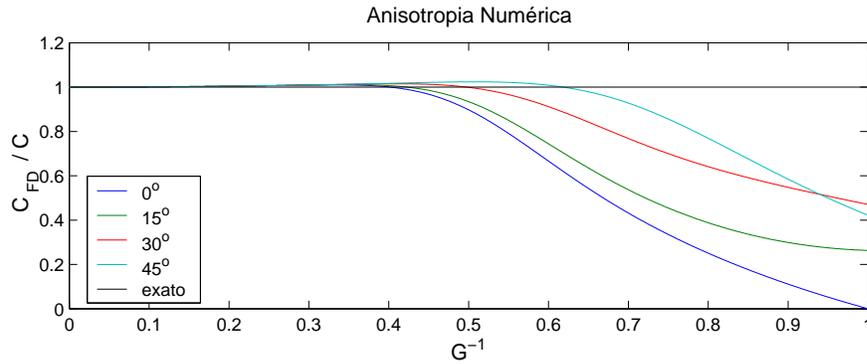


Figura 2.2: Relações de dispersão para esquema de diferenças finitas com $N = 9$, em função de G^{-1} . São mostradas as relações de dispersão para os ângulos de incidência $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ e 45° comparados ao valor exato da relação.

diferenças finitas:

- a) A partir do espectro do pulso fonte, determinar o valor da frequência máxima, f_{max} . A energia associada a essa frequência equivale a 5% da energia da associada à frequência dominante do pulso.
- b) O intervalo de amostragem da malha é determinado a partir da relação

$$h = \frac{\lambda_{min}}{G} = \frac{C_{min}}{G f_{max}},$$

em que C_{min} é a menor velocidade de propagação no modelo.

- c) Finalmente, o valor de dt é calculado pela relação

$$dt = \mu \frac{h}{C_{max}},$$

em que C_{max} é a maior velocidade de propagação do modelo.

2.2.2 Implementação da fonte

Em sismica de exploração as fontes de maior interesse são as fontes pontuais da forma

$$q(\mathbf{x}, t) = s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s),$$

$$f_i(\mathbf{x}, t) = s(t)\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s),$$

em que $s(t)$ representa o pulso fonte e \mathbf{x}_s indica a posição da fonte. Para evitar problemas de *aliasing* e dispersão numérica (KARRENBACH, 1995) a modelagem destas fontes em esquemas de diferenças finitas é feita distribuindo-se a fonte em uma região em torno de \mathbf{x}_s na forma

$$q^{DF}(\mathbf{x}, t) = s(t) W_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.8)$$

$$f_i^{DF}(\mathbf{x}, t) = s(t) \delta_{ij} W_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.9)$$

em que $W_s(x_1, x_3)$ é uma janela centrada em torno de \mathbf{x}_s . Nesta implementação utilizei uma janela Blackman-Harris (CHEW; LIU, 1996)

$$W_s(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi\|\mathbf{x}\|}{R_s}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi\|\mathbf{x}\|}{R_s}\right) & \text{se } \|\mathbf{x}\| \leq R_s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $a_0 = 1$, $a_1 = 25/21$ e $a_2 = a_1 - a_0$ e R_s determina a região fonte, em geral da ordem de quadro intervalos de amostragem da malha. Entretanto, para esquemas de diferenças finitas de ordem maior que 6 a fonte pode ser especificada em um único ponto da malha.

2.2.3 Condições de fronteira

Duas condições de fronteira devem ser consideradas na modelagem por diferenças finitas utilizando malhas intercaladas. A condição de fronteira livre, na parte superior da malha e condições de absorção nas outras bordas do modelo para eliminar as reflexões indesejáveis produzidas pelo truncamento da malha.

2.2.3.1 Fronteira Livre

Para implementar a condição de fronteira livre utilizei o esquema empírico proposto por Mittet (2002), que consiste em substituir as propriedades físicas em torno da superfície livre por médias convenientes. Para simular uma fronteira livre na posição $x_3 = 0$ a densidade e o módulo de incompressibilidade na primeira linha da malha são substituídas por

$$\rho^{-1}\left(i + \frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow \frac{4}{\rho(i, 1) + \rho(i + 1, 1)} \quad (2.10)$$

$$\kappa(i, 1) \rightarrow 0$$

considerando i um índice associado a cada ponto da malha ao longo da direção x_1 e j o índice de cada ponto da malha ao longo da direção x_3 .

2.2.3.2 Camada com casamento perfeito de impedância

A atenuação de reflexões nas outras bordas da malha foi efetuada utilizando-se camadas absorventes com casamento perfeito de impedância acústica (PML) (BERENGER, 1994; CHEW; LIU, 1996), referenciada a seguir como camada perfeitamente absorvente. Essa condição foi proposta por Berenger (1994) para a absorção de ondas eletromagnéticas e foi estendida para meios elásticos por Chew e Liu (1996).

Nesta implementação, na região da camada perfeitamente absorvente, o campo de pressão é decomposto na soma de duas componentes $P_1(\mathbf{x}, t)$ e $P_3(\mathbf{x}, t)$. Este é um artifício puramente matemático, visto que essas componentes não existem fisicamente. O sistema de equações (2.1) e (2.2) é substituído pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} \partial_t v_1(\mathbf{x}, t) + \gamma_1(\mathbf{x}) v_1(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \partial_1 P(\mathbf{x}, t) , \\ \partial_t v_3(\mathbf{x}, t) + \gamma_3(\mathbf{x}) v_3(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \partial_3 P(\mathbf{x}, t) , \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \partial_t P_1(\mathbf{x}, t) + \gamma_1(\mathbf{x}) P_1(\mathbf{x}, t) &= -\kappa(\mathbf{x}) \partial_1 v_1(\mathbf{x}, t) , \\ \partial_t P_3(\mathbf{x}, t) + \gamma_3(\mathbf{x}) P_3(\mathbf{x}, t) &= -\kappa(\mathbf{x}) \partial_3 v_3(\mathbf{x}, t) , \end{aligned}$$

$$P(\mathbf{x}, t) = P_1(\mathbf{x}, t) + P_3(\mathbf{x}, t) ,$$

nestas equações $\gamma_1(\mathbf{x}) = \gamma_1(x_1)$ e $\gamma_3(\mathbf{x}) = \gamma_3(x_3)$ são coeficiente de atenuação. A dedução deste sistema de equações e sua aproximação utilizando esquemas de diferenças finitas, encontra-se no Apêndice C. Uma camada que atenuar ondas que se propagam apenas na direção x_1 , é implementada tomando-se $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_3 = 0$ em toda camada. Para atenuar ondas que se propagam apenas na direção x_3 , toma-se $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_3 > 0$ em toda camada. Para conseguir o casamento perfeito de impedância os valores de γ devem aumentar continuamente, a partir de zero no início da região de absorção, até a fronteira da malha.

Há várias escolhas possíveis para o perfil de atenuação na região da camada PML (CHEW; LIU, 1996; ZENG et al., 2001) . Nos resultados apresentados a seguir utilizamos o perfil de

atenuação (ZENG et al., 2001)

$$\gamma_1 = 2 \pi a_0 f_d (L_{x_1}/L_{PML})^2 ,$$

em que f_d é a frequência dominante da fonte, $a_0 = 1,79$ é um fator de ajuste, L_{x_1} é a distância entre um ponto na região de absorção e o início dessa região, L_{PML} é a largura da região de absorção.

Para avaliar a eficácia das camadas PML medi a dissipação de energia do campo acústico ao atravessar estas camadas. A densidade de energia acústica em um ponto do meio em um instante arbitrário (AKI; RICHARDS, 1980) é

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}) v^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \frac{P^2(\mathbf{x}, t)}{\kappa(\mathbf{x})} \quad (2.12)$$

em que $v^2 = v_1^2 + v_3^2$ e P é o campo de pressão. ρ e κ são respectivamente a densidade e o módulo de incompressibilidade. A energia total do campo acústico em um dado instante, $E(t)$ é obtida integrando-se $\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)$ em todo domínio de propagação.

A energia acústica dissipada medida em decibéis é

$$\beta(t) = 10 \log \frac{E(t)}{E_0} \quad (2.13)$$

em que E_0 é a energia injetada pela fonte.

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos utilizando um esquema de diferenças finitas de ordem 18, em um modelo homogêneo composto por uma malha regular de dimensões 300×300 pontos com intervalo de amostragem $h = 10 m$. A densidade do modelo é de $\rho = 2290 kg/m^3$ e a velocidade de propagação da onda compressional $V_P = 3000 m/s$. A fonte injeção de volume foi colocada no centro da malha. Utilizei um pulso Ricker de frequência dominante de $f_d = 15 Hz$. Camadas PML foram aplicada em todas as bordas do modelo. A largura das camadas é $30 h$, o que corresponde a uma vez e meia o comprimento de onda dominante, dado pela razão entre a maior velocidade e a frequência dominante do pulso sísmico. O tempo total de simulação foi de $t = 0,8 s$. A Figura 2.3 mostra a energia total em função do tempo. Verifica-se que a partir do instante $0,05 s$ a fonte deixou de injetar energia no sistema, a energia é conservada até o instante $0,45 s$, e a partir desse instante a frente de onda atinge as fronteiras absorventes e a energia passou a ser dissipada. A atenuação produzida foi da ordem de $\beta_{DF} = 58 dB$.

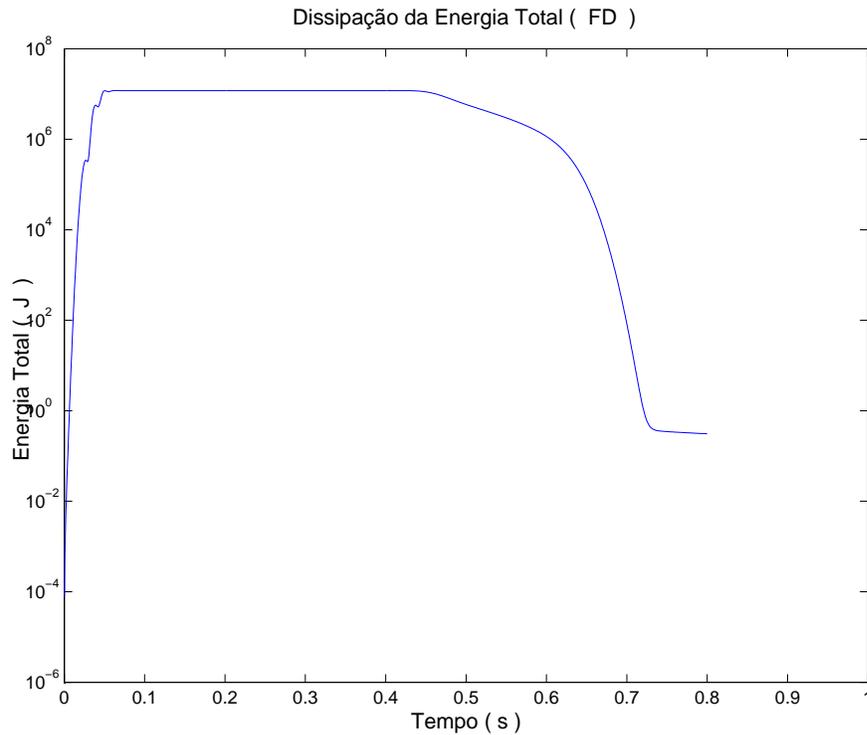


Figura 2.3: Dissipação da energia total para um esquema de diferenças finitas, obtida após 0,8 s de propagação.

A Figura 2.4 mostra a componente vertical do campo de velocidade em quatro instantâneos. As imagens foram plotadas com ganho da ordem de cinco desvios padrões, para realçar as menores amplitudes.

2.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Esquemas de diferenças finitas de alta ordem apresentam limitações, apesar de sua acuidade e reduzida demanda de armazenamento em relação a esquemas de baixa ordem. Em interfaces de pequena inclinação separado meios com fortes contrastes de impedância, a aproximação da interface por degraus produz difrações indesejáveis, este efeito é conhecido na literatura como *staircasing*. Este problema pode ser minimizado utilizando-se meios anisotrópicos efetivos, no caso acústico tomando-se o tensor de densidade anisotrópico (MUIR et al., 1992). Modelos que apresentam topografia irregular na superfície exigem esquemas de diferenças especiais para uma modelagem adequada. O método de elementos finitos (EF) pode ser uma alternativa na solução deste problemas.

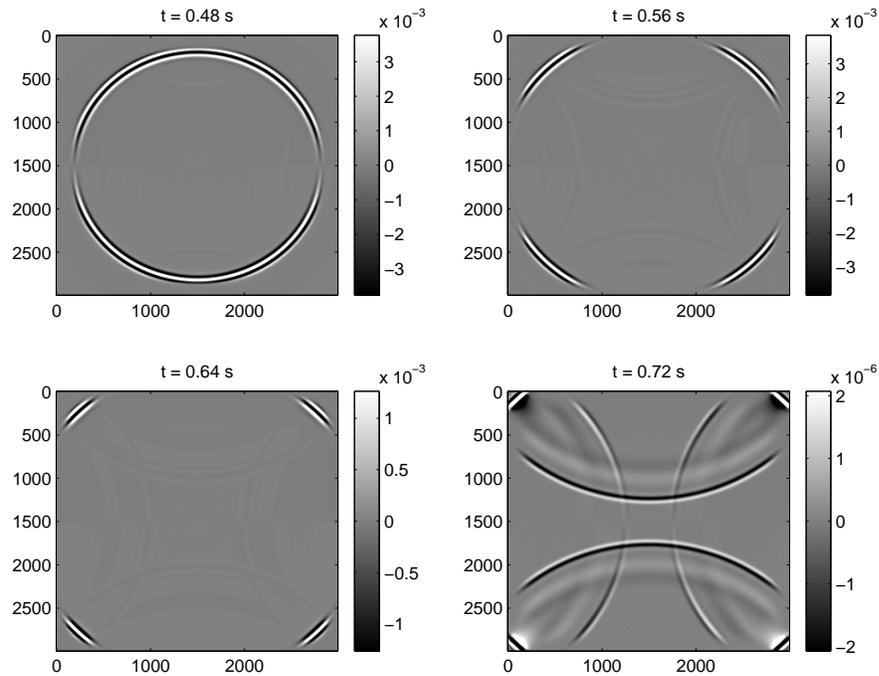


Figura 2.4: Componente vertical da velocidade, em quatro instantâneos da propagação da onda com ganho da ordem de cinco desvios padrão. A escala de cinza indica o valor da componente da velocidade. Observa-se que o campo de velocidade é fortemente dissipado ao incidir sobre as bordas.

Neste trabalho avaliamos o esquema de elementos finitos com matriz de massa diagonalizada, *lumped mass*, sugerindo em Zang e Verschuur (2002) na modelagem acústica em meios com forte contraste de impedância. Esse método é capaz de acomodar interfaces e fronteiras livres com topografia arbitrária amostrando o modelo em uma malha formada por células triangulares e retangulares. A condição de fronteira livre é incorporada naturalmente na modelagem através de elementos finitos e o efeito de *staircasing* é eliminado com a utilização de malhas irregulares que descrevem com acuidade a interface.

O preço a pagar é a utilização de malhas com geometria dependente do modelo de velocidade. Em 2-D há vários programas de geração de malhas disponíveis, mas em 3-D geradores de malha eficientes estão disponíveis apenas comercialmente. A seguir descrevo a formulação da modelagem acústica por elementos finitos e alguns detalhes de sua implementação, de forma semelhante a apresentação feita anteriormente para o método de diferenças finitas.

2.3.1 Equações fundamentais

A idéia principal do método de elementos finitos é utilizar o balanço de momento linear e a relação constitutiva a equação na forma integral. Nesta implementação, o campo de pressão é considerado uniforme no interior de cada célula da malha. O balanço de momento linear é avaliado em um domínio Ω que contém um único nó, em que as componentes do campo de velocidade v_1 e v_3 são definidas, como pode ser visto na Figura 2.5. Nestas condições a integração da equação de movimento (2.1) em Ω resulta na expressão

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t v_J d\Omega = - \int_{\Omega} \partial_J P d\Omega , \quad (2.14)$$

em que $J = 1, 3$ indica os componentes das direções x_1 e x_3 . Utilizando o teorema de Stokes, podemos substituir a integral do gradiente de pressão pela integral da pressão na fronteira de Ω , ver Apêndice D,

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t v_J d\Omega = - \int_{\partial\Omega} P n_J ds , \quad (2.15)$$

em que n_J é o coseno diretor associado ao versor unitário normal a fronteira do domínio Ω , que aponta para fora do domínio. No esquema tipo *lumped mass*, considera-se que toda a massa está concentrada nos nós, sendo nula no interior das células em (2.15). Nestas condições, considerando que o domínio Ω contém o nó i , a equação acima pode ser escrita na forma

$$M^i (\partial_t v_J)^i = - \int_{\partial\Omega} P n_J ds . \quad (2.16)$$

A massa M^i atribuída ao nó i , é obtida pela média das massas das células que circundam esse nó, ou seja, $M^i = M^{3i}/3 + M^{4i}/4$, em que M^{3i} e M^{4i} , correspondem respectivamente as somas das massas das células triangulares e retangulares, respectivamente, em torno do nó i . O campo de pressão em cada célula é obtido através de (2.2), em que o divergente do campo de velocidade é aproximado utilizando os valores de velocidade nos vértices da célula, ver Apêndice D.

2.3.2 Discretização

Considerando a pressão constante dentro de cada célula, a integral do lado direito de (2.16) é reduzida a :

$$M^i \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^i = - \left[\sum_{q=1}^Q P^q b^{iq} + \sum_{m=1}^L P^m d^{im} \right], \quad (2.17)$$

$$M^i \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} \right)^i = - \left[\sum_{q=1}^Q P^q c^{iq} + \sum_{m=1}^L P^m e^{im} \right], \quad (2.18)$$

em que L e Q são respectivamente o número de células triangulares e retangulares em torno do nó i , ou seja que possuem o nó i como um dos vértices, P^q é o campo de pressão na célula q ; os coeficientes b^{iq} , c^{iq} , e^{iq} e d^{iq} estão associados ao nó i , e representam a fração da fronteira $\partial\Omega$ dentro de cada célula q , do mesmo modo para m . O cálculo dos coeficientes é apresentado no Apêndice C.

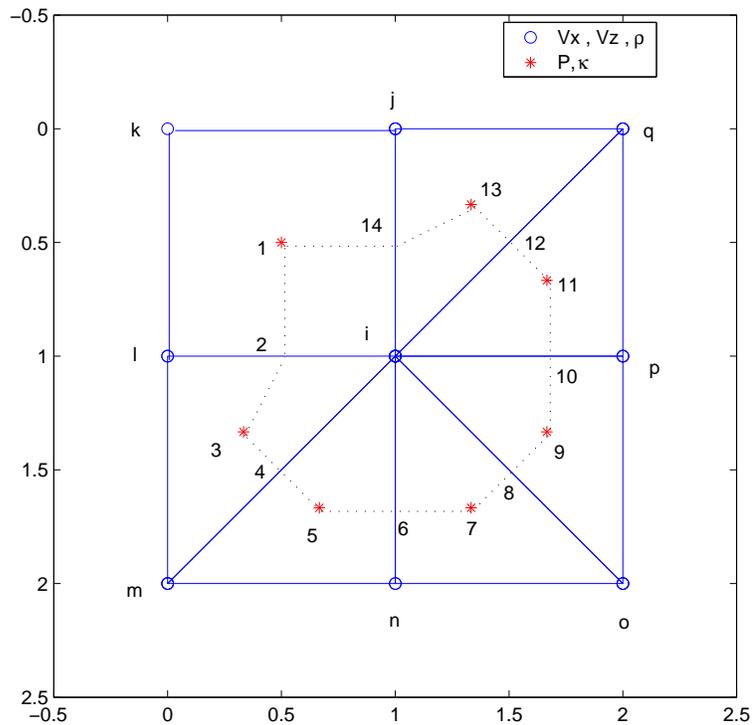


Figura 2.5: Malha intercalada formada por células triangulares e retangulares. As posições nas quais os campos e propriedades são amostrados, aparecem em destaque.

Na malha apresentada na Figura 2.5, a fronteira $\partial\Omega$ (linha tracejada), formada nesse caso pelo caminho $1, 2, 3, \dots, 13, 14, 1$. Tanto os pontos internos quanto os vértices das células, por convenção, são contados no sentido anti-horário. Para o cálculo do campo de velocidade, é feita a substituição do operador diferencial temporal, por um operador de diferenças em

(2.17), desse modo obtém-se para um nó i ,

$$\frac{(v_1^{n+1} - v_1^n)^i}{dt} = - (M^i)^{-1} \left[\sum_{q=1}^Q P^q b^{iq} + \sum_{m=1}^L P^m d^{im} \right], \quad (2.19)$$

$$\frac{(v_3^{n+1} - v_3^n)^i}{dt} = - (M^i)^{-1} \left[\sum_{q=1}^Q P^q c^{iq} + \sum_{m=1}^L P^m e^{im} \right], \quad (2.20)$$

em que dt é o incremento no tempo, $n + 1$ e n , são os instantes em que a velocidade é amostrada.

Para a discretização do campo de pressão utiliza-se a equação (2.2), e substitui-se a derivada temporal por um operador de diferenças, obtém-se para uma célula q ,

$$\frac{(P^{n+1/2} - P^{n-1/2})^q}{dt} = -\kappa \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right], \quad (2.21)$$

as derivadas parciais do lado direito de 2.21 são mostradas no Apêndice C.

2.3.3 Relação de dispersão

O esquema de elementos finitos apresentado, quando aplicado sobre uma malha regular, comporta-se aproximadamente como um esquema de diferenças finitas de baixa ordem ($N = 1$) (CARCIONE et al., 2002), portanto a equação (2.4) é uma boa aproximação para a relação de dispersão. O esquema de elementos finitos é estável para um $\mu = 0.6$, mas como um é esquema de baixa ordem, deve no mínimo ter $h \leq \frac{\lambda}{10}$, para modelar corretamente a propagação da onda acústica. Para este esquema o valor de $\mu = dt V_{max}/h$, em que V_{max} é a velocidade máxima do modelo e h é o valor do menor lado entre todas as células. As relações de dispersão para vários ângulos de incidência, associadas a um operador de ordem $L = 1$ e $\mu = 0.7$, são mostradas na Figura 2.6. Verifica-se que para os ângulos de 0° e 90° assim como para os ângulos de 30° e 60° as relações de dispersão são equivalentes.

2.3.4 Implementação da fonte e receptores

A fonte foi implementada de acordo com o processo apresentado em diferenças finitas na Seção 2.2.2, mas levando em consideração que os pesos da função w devem ser calculados no centro da célula para o campo de pressão, os valores calculados são adicionados ao campo de

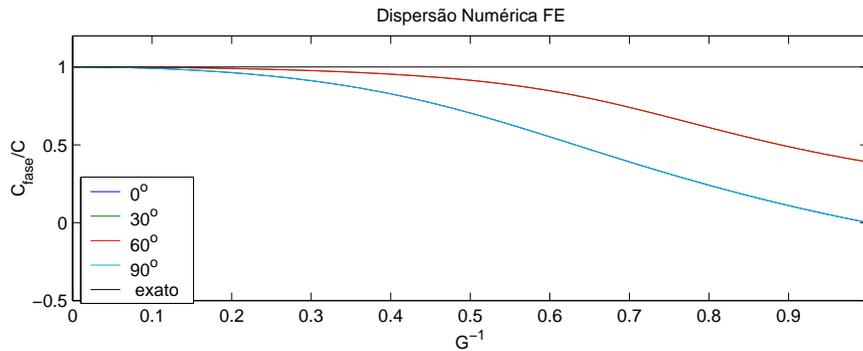


Figura 2.6: Curvas de dispersão para o esquema de elementos finitos. Verifica-se que para $G = 10$ a dispersão numérica é mínima para todos os ângulos utilizados.

pressão em cada célula que compõe a fonte. Neste esquema de elementos finitos foi verificado que as células que compõe a fonte devem ser simétricas em relação aos eixos horizontal e o vertical. Isso foi verificado após o teste com vários arranjos. Portanto o arranjo mais adequado para a região da fonte é mostrado na Figura 2.7. Essa simetria é necessária para que todos os pontos da frente de onda possam ser propagados igualmente. Fora da região da fonte, o esquema suporta qualquer tipo de arranjo. Para os receptores o mesmo procedimento deve ser repetido, portanto a função w deve ser a mesma da fonte. Isso garante que o princípio de reciprocidade não seja violado, mas torna-se uma limitação do esquema quando a fonte é colocada em regiões que não obedecem o arranjo mostrado na Figura 2.7.

2.3.5 Condições de fronteira

O método de elementos finitos tem por característica satisfazer implicitamente as condições de fronteira. Portanto não é necessária qualquer manipulação para implementar a fronteira livre, pois ela já existe implicitamente. Nas bordas laterais e inferior devem ser implementadas de modo a absorver as reflexões indesejadas provenientes dessas regiões, e em alguns casos a fronteira absorvente deve ser implementada na borda superior.

A condição de fronteira absorvente implementada no esquema de elementos finitos, foi a mesma apresentada em diferenças finitas na Seção 2.2.3, embora esse procedimento não tenha sido apresentado em nenhuma referência conhecida. Portanto o esquema apresentado em elementos finitos foi totalmente adaptado para esta dissertação, a partir do esquema de diferenças finitas. Para aproximar o comportamento da camada absorvente de um esquema de diferenças finitas utilizei uma malha composta de células triangulares no interior e retan-

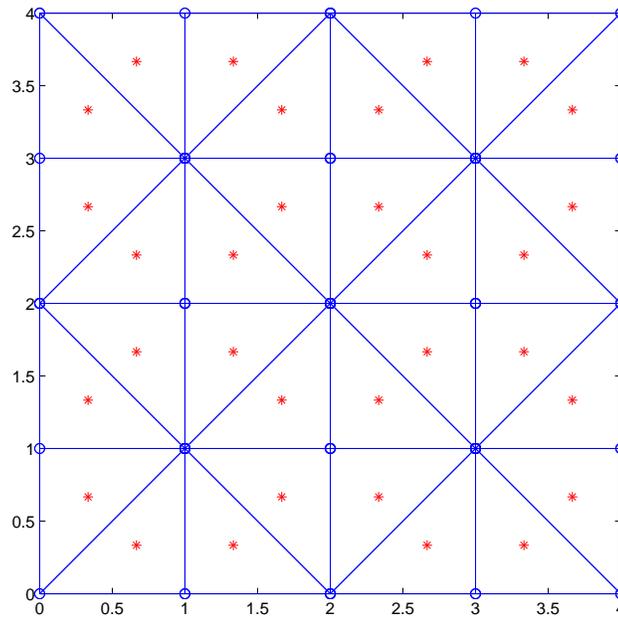


Figura 2.7: Malha triangularizada em que cada nó é cercado por células dispostas simetricamente em relação às direções horizontal e vertical

gulares nas bordas, embora algoritmo implementado seja flexível para aceitar qualquer malha formada por triângulos e quadriláteros, regulares ou irregulares. Conjuntamente as equações (2.19) e (2.21) foram reescritas de acordo com as equações mostradas em (2.11), para suportarem os fatores responsáveis pela absorção do campo incidente. A Figura 2.8 mostra uma malha típica utilizada neste trabalho. Para exemplificar o uso da fronteira absorvente utilizei o mesmo modelo apresentado para ilustrar a camada absorvente em diferenças finitas. O espaçamento entre os pontos da malha foi reduzido para $h = 5m$, desse modo, a malha final continha 600×600 pontos, ou seja quatro vezes a quantidade de pontos necessários em diferenças finitas de altas ordens, para a mesma situação. Essa redução foi necessária para satisfazer as condições de estabilidade e evitar dispersão numérica. Utilizei uma fonte de injeção de volume com um pulso Ricker de frequência dominante de $f_d = 15 Hz$. O tempo de propagação da onda foi de $t = 0,8 s$. A velocidade de propagação da onda compressional no modelo foi de $V_P = 3000 m/s$ e a densidade $\rho = 2290 kg/m^3$. Utilizei em todas as bordas PML em todo o modelo, de largura $60h$, equivalentes a uma vez e meia o comprimento de onda dominante. Calculei a energia total do sistema a partir da equação (2.12) e a energia dissipada através da equação (2.13). A energia total em função do tempo é mostrada na Figura (2.9). A seguir apresento o resultado obtido para a avaliação da camada absorvente PML no apresentado anteriormente. A componente vertical do campo de velocidade é mostrada em

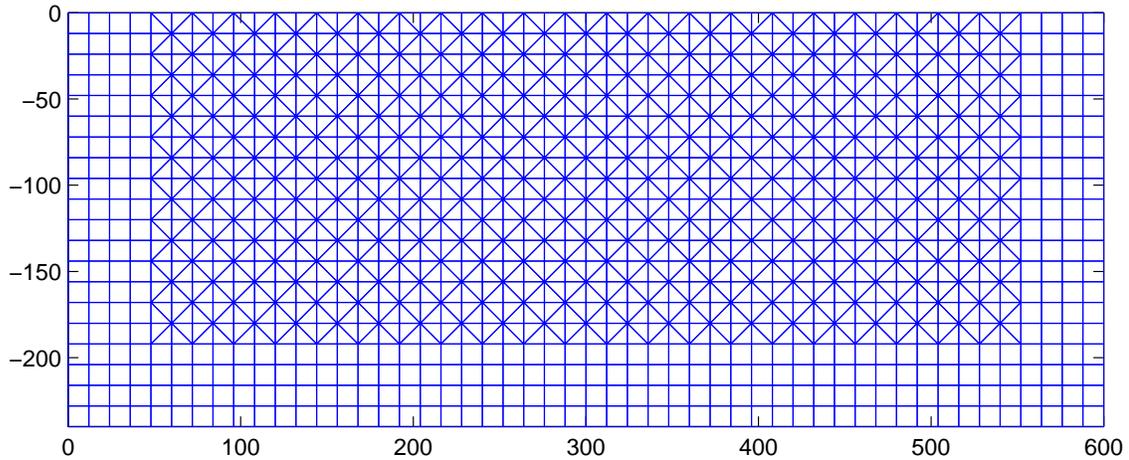


Figura 2.8: A figura mostra uma malha formada por elementos triangulares e retangulares nas bordas. Esse é o modelo típico de malha que utilizamos em nosso trabalho.

quatro instantâneos da propagação do campo acústico(Figura 2.10). É possível verificar a onda incidente sendo continuamente atenuada nas bordas do modelo. As figuras foram plotadas com ganho da ordem de cinco desvios padrões para realçar as amplitudes mais fracas do campo.

A energia dissipada calculada através da equação (2.13), foi da ordem de $\beta_{EF} = 34 dB$. Esse valor foi menor do que o encontrado em diferenças finitas que foi de $\beta_{DF} = 58 dB$. O que não significa que a fronteira absorvente PML não possa ser utilizada com sucesso em esquemas de elementos finitos. Uma prova disso é a aplicação de esquemas EF em modelos com dimensões superiores às utilizadas nesta seção, e com maior complexidade estrutural, que será vista em detalhes no Capítulo 5. Nessa situação a camada absorvente PML tem um rendimento melhor. Isso está relacionado ao fato de a energia do campo acústico, ser espalhada por uma área maior, e ser acumulada nas regiões de forte contraste de impedância acústica. Portanto a energia que incide nas bordas tem uma amplitude muito inferior àquela injetada inicialmente pela fonte.

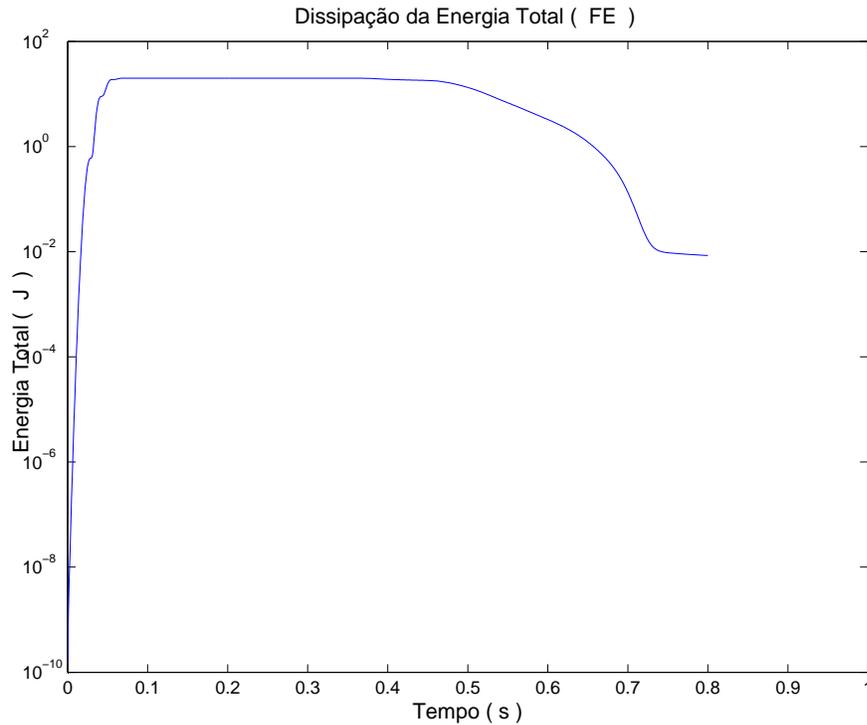


Figura 2.9: Energia dissipada obtida por elementos finitos obtida após 0,8 s de propagação da onda.

2.3.6 Efeitos da discretização

A seguir mostro os efeitos provocados pela discretização, quando o modelo possui interfaces com pequenos ângulos de inclinação. Essas interfaces são representadas erradamente por degraus quando malhas esparsas são utilizadas, esse efeito é chamado de *Staircasing*. Esses degraus provocam o aparecimento de difrações, principalmente e quando há forte contraste de impedância acústica entre os meios. Esse efeitos têm natureza puramente numérica e podem ser reduzidos ao extremo quando malhas densas são utilizadas, ou quando a malha acompanha exatamente a interface.

Os algoritmos diferenças finitas e elementos finitos foram aplicados a um modelo formado por duas camadas(Figura 2.11), sendo que a interface entre eles apresenta um ângulo de inclinação de 5° . Esse tipo de interface suavemente inclinada é comum em taludes continentais. As velocidades de propagação da onda compressional na camada superior e inferior foram respectivamente 3000 m/s e 4500 m/s . As densidades obtidas a partir da equação(4.4) foram respectivamente 2290 kg/m^3 e 2535 kg/m^3 . A impedância acústica entre as camadas,

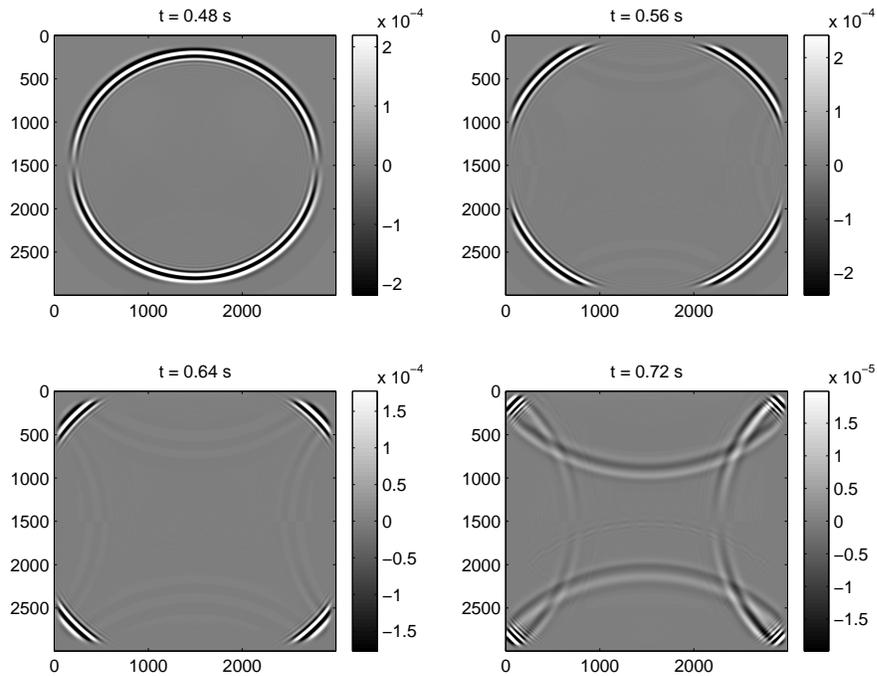


Figura 2.10: A componente vertical do campo de velocidade é mostrada em quatro instantes da propagação do campo acústico. São mostradas as amplitudes e as respectivas faixas de variação. É possível verificar que há uma fraca reflexão proveniente das bordas. Essa reflexão é muito inferior em modelo de maiores dimensões e maior complexidade estrutural.

calculada a partir da relação,

$$Z = \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1},$$

A impedância acústica entre as camadas foi de 0.2481, esse valor é alto quando comparado ao existente entre as camadas de modelos geológicos sintéticos. Isso foi feito propositalmente para tornar o efeito da difração mais perceptível.

Apliquei o algoritmo de diferenças finitas sobre o modelo apresentado na Figura 2.11, utilizando duas malhas. A primeira regular de 200×200 pontos igualmente separados por uma distância de $20 m$. Nessa malha utilizei $h = \lambda/5$, em que $\lambda = C_{min}/f_{max}$. Utilizei uma fronteira absorvente nas bordas laterais e inferior com 30 pontos de largura. A segunda formada por 800×800 pontos regular, com espaçamento $h = 5$. Nessa malha utilizei $h = \lambda/20$. Nas bordas laterais e inferior apliquei uma fronteira absorvente de 140 pontos de largura. Para o algoritmo de elementos finitos utilizei uma malha de 800×800 pontos, igualmente separados por uma distância $h = 5$, formada por células retangulares nas bordas laterais e inferior e células triangulares na região interior. Nas bordas laterais e inferior utilizei uma fronteira absorvente de 140 pontos de largura. Nos dois algoritmos utilizei fronteira livre,

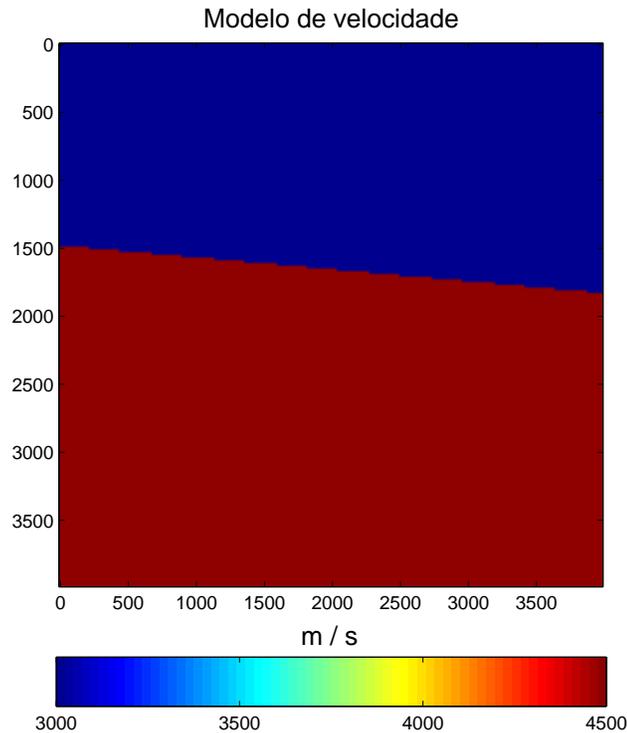


Figura 2.11: Modelo de velocidade formado por duas camadas, e a interface levemente inclinada. As distâncias são medidas em m . Há entre as camadas do modelo um alto contraste de impedância acústica de. Esse valor foi exagerado propositalmente para realçar o efeito de *staircasing* na simulação.

na borda superior. O tempo total de propagação foi $t = 1,2 s$, e o tempo de amostragem dos dados foi $dt = 2 ms$. A fonte foi posicionada nas coordenadas $(2000 m; 10 m)$. Utilizei 41 receptores igualmente separados por uma distância horizontal $dx = 50 m$, entre os pontos de coordenadas $(1000 m; 750 m)$ e $(3000 m; 750 m)$. Utilizei nos dois algoritmos uma fonte de injeção de volume, com um pulso do tipo Blackman-Harris (CHEW; LIU, 1996) (Figura 2.12), de frequência dominante $f_d = 15 Hz$ e frequência máxima $f_{max} = 30 Hz$. Esse pulso foi escolhido por apresentar um espectro estreito, e portanto tem a energia concentrada em torno da frequência dominante.

Três instantâneos da propagação da componente vertical do campo de velocidade v_3 são mostrados nas Figuras 2.13 e 2.15, os resultados foram obtidos através do método de diferenças finitas. Verifica-se na Figura 2.13, que no instante $t = 0,72 s$ há forte difração após a incidência na interface. Mas é imperceptível na Figura 2.15. Nas Figuras 2.14 e 2.16 são mostrados os sismogramas com os tempos de trânsito da frente de onda, obtidos para o campo de pressão e as componentes da velocidade. Aparecem nos sismogramas a onda

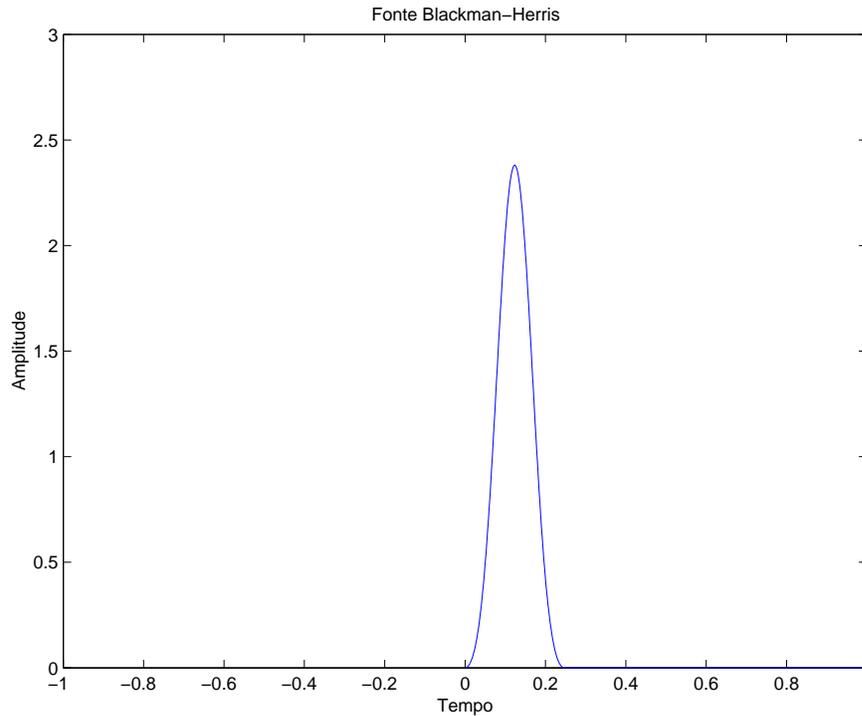


Figura 2.12: A figura mostra a amplitude pulso Blackman-Harris em função do tempo. Verifica-se que a fonte é estreita o que garante que ela seja concentrada em torno da frequência dominante.

direta e a onda refletida na interface. Verifica-se claramente a existência das difrações nos sismogramas mostrados na Figura 2.14, mas são vistos muito fracamente na Figura 2.16, se o contraste fosse menor, não haveria registros de difração nessa figura. A Figura 2.17 mostra os instantâneos da propagação da onda, anteriormente apresentados em diferenças finitas. Não se verifica nessa figura a existência de difrações, pois nesse caso a malha é mais refinada e é formada por células triangulares na região da interface, desse modo o efeito escada é eliminado. O aumento da densidade de pontos da malha em um esquema de diferenças finitas de alta ordem provoca um aumento significativo do tempo de execução. Nessa demonstração o algoritmo de elementos finitos foi duas vezes e meia mais rápido que o algoritmo de diferenças finitas de altas ordens, quando ambos são aplicados na mesma malha.

Portanto é possível concluir que o uso de malhas esparsas pelo algoritmo de diferenças finitas é problemático nas situações em que há interfaces com pequenos ângulos de inclinação, e forte contraste de impedância acústica entre as camadas. Desse modo recomenda-se nessas situações o uso de pelo menos $h = \lambda/10$, considerando que em um modelo geologicamente consistente a impedância acústica será muito inferior ao utilizado nesta seção, o que irá

eliminar completamente as difrações originadas pelo efeito de *Staircasing*. O uso de esquemas DF de altas ordens associado a malhas muito refinadas eliminaria o efeito de *Staircasing* se a impedância acústica fosse menor. Mas a eliminação da difração implicou em um aumento considerável no tempo de execução. Em uma malha de dimensões maiores e mais refinada o uso de esquemas DF de altas ordens tornaria a simulação proibitivamente demorada, nessa situação recomenda-se o uso de esquemas de baixas ordens como o esquema EF apresentado.

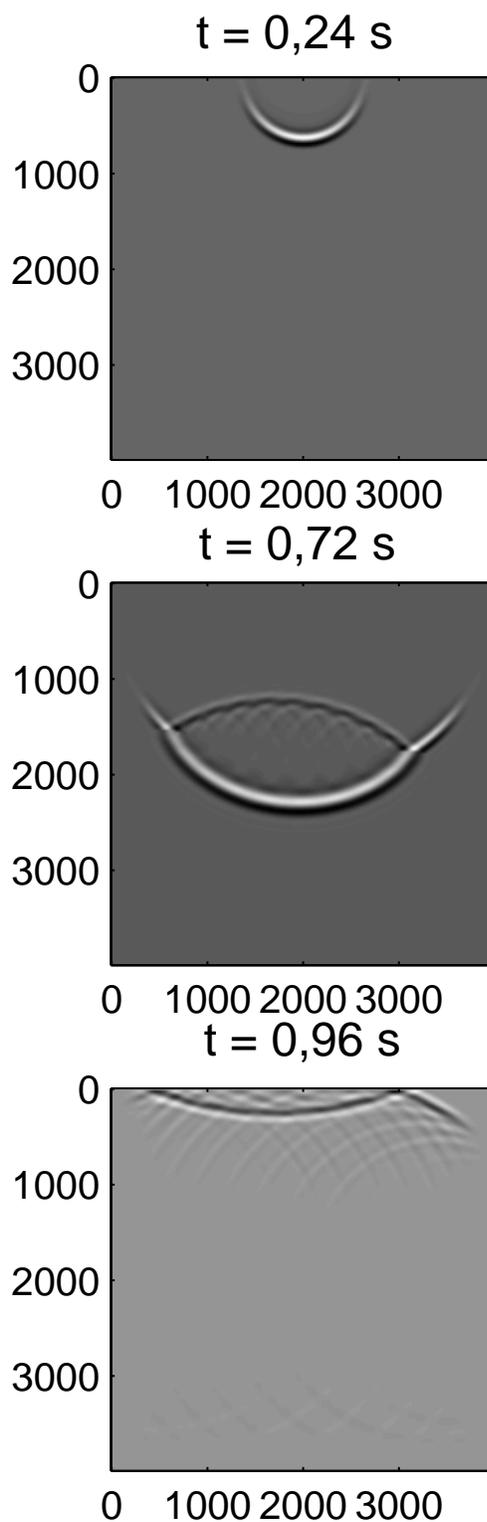


Figura 2.13: Três instantâneos da propagação do campo acústico modelado por diferenças finitas. É possível verificar as difrações provocadas pela falha na discretização da interface. Esse efeito é puramente numérico e não existiria na realidade em uma interface suavemente inclinada.

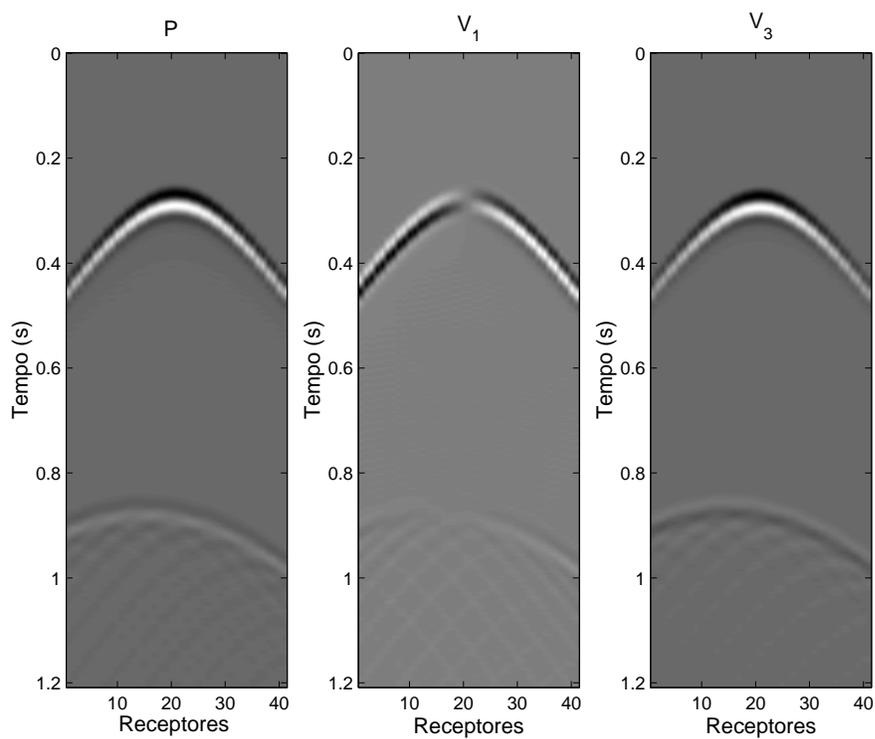


Figura 2.14: Sismogramas obtidos após 1,2 s de propagação, modelados pelo método de diferenças finitas. São mostrados o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. Verifica-se claramente que há registros de forte difração provocada pelo efeito *Staircasing*. Não ocorreriam difrações se a malha acompanhasse perfeitamente a interface.

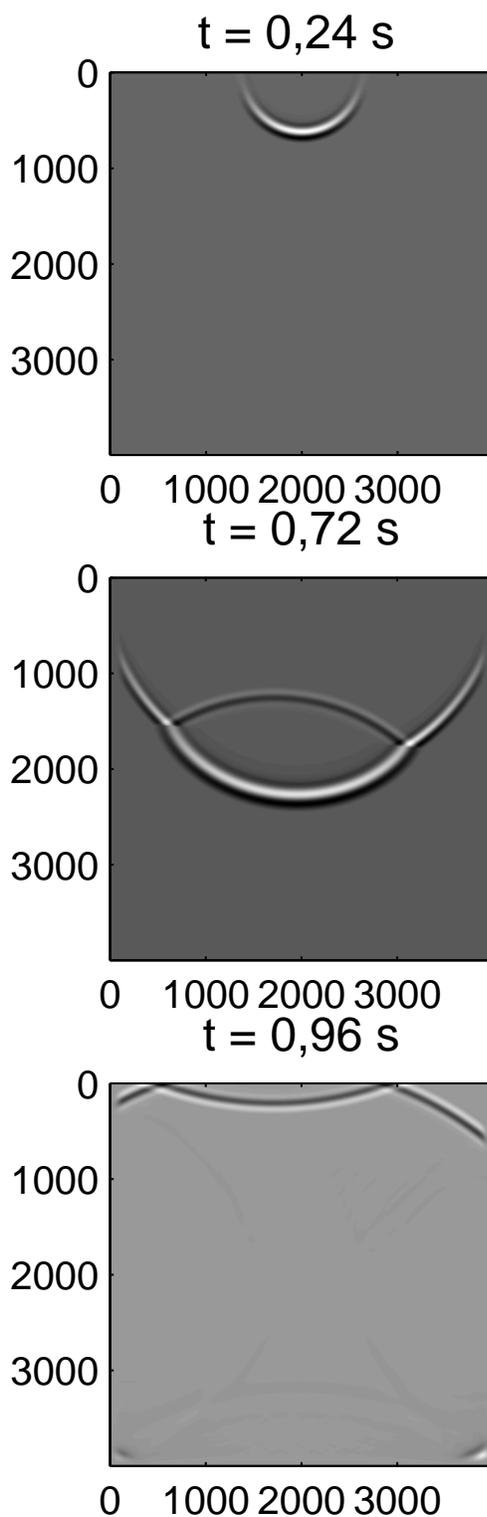


Figura 2.15: Três instantâneos da propagação da frente onda modelada por diferenças finitas. A discretização da malha foi reduzida de 20 m para 5 m . Verifica-se que não há difrações perceptíveis. Nesse caso a malha ajustou-se perfeitamente a interface eliminando o *Staircasing*, e portanto as difrações

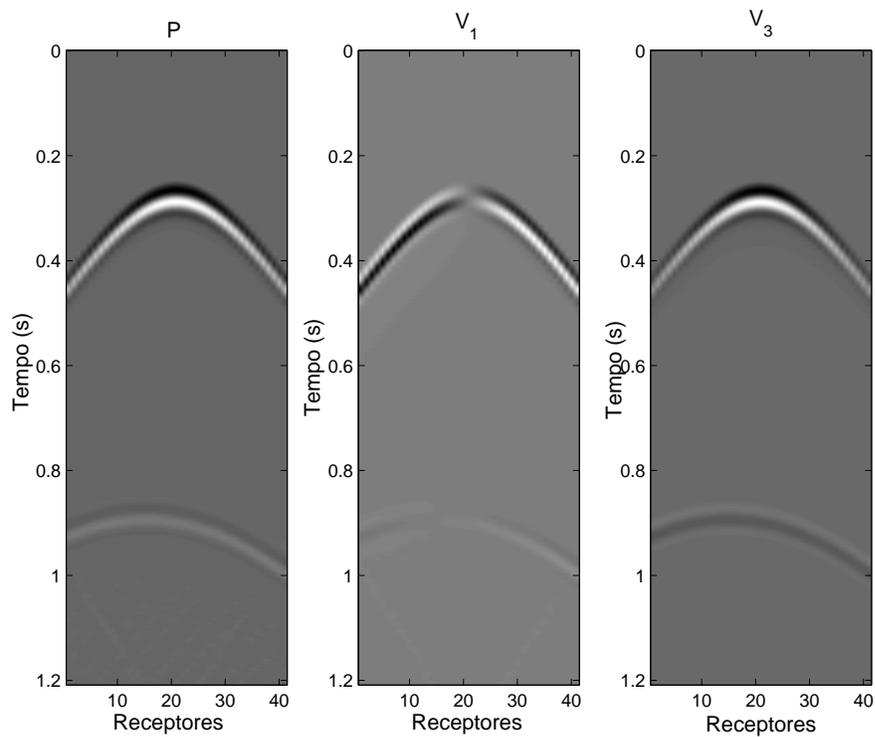


Figura 2.16: Sismogramas obtidos após 1,2 s de propagação, modelados pelo método de diferenças finitas. São mostrados o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. Verifica-se que ainda aparecem fracas difrações. Essas difrações seriam completamente eliminadas se a impedância acústica fosse menor. O refinamento da malha para reduzir as difrações, implicou em um aumento considerável no tempo de execução. Em uma malha de maiores dimensões e mais refinada o uso de esquemas DF de altas ordens tornaria a simulação proibitivamente demorada.

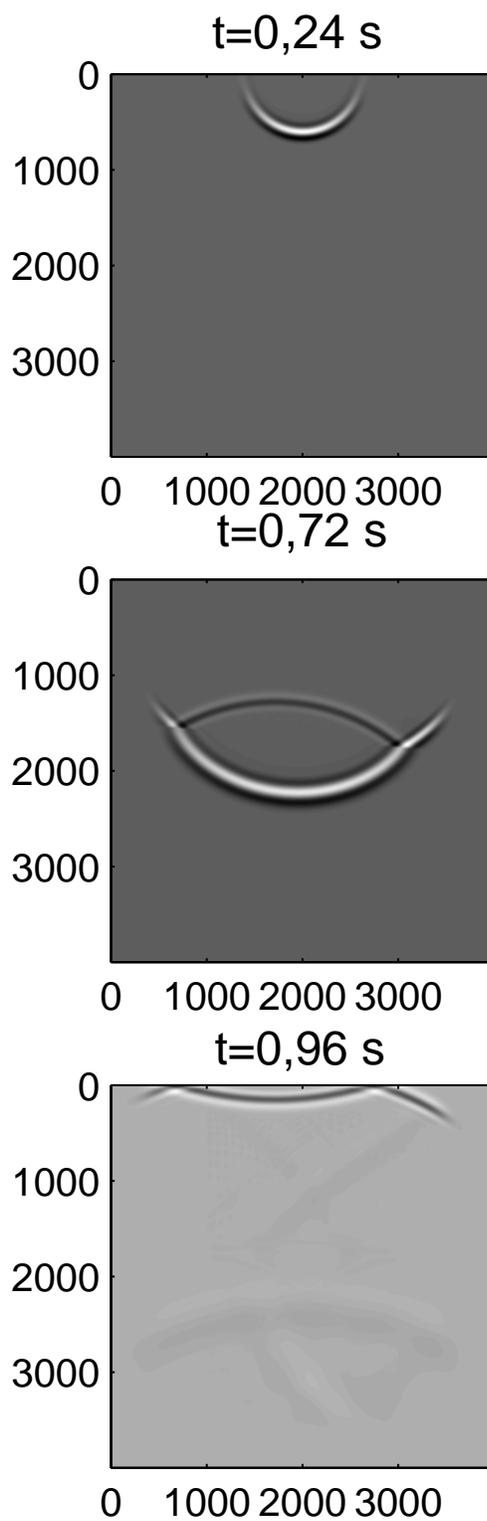


Figura 2.17: A figura mostra três instantâneos da propagação do campo acústico modelado por elementos finitos. É possível verificar que não há difrações, o uso de uma malha formada por células triangulares, melhora a representação da interface, evitando o *Staircasing*.

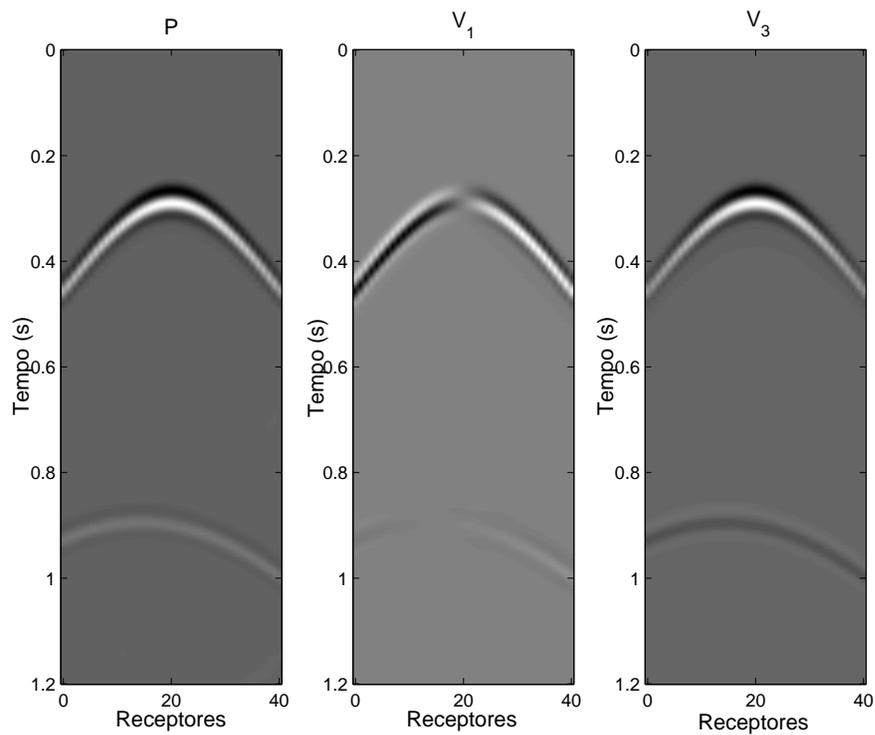


Figura 2.18: Sismogramas obtidos após 1,2 s da onda modelados pelo método de elementos finitos. São mostrados o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. Não há registros de difração nos sismogramas o que demonstra que o uso de elementos finitos é uma alternativa viável aos métodos de altas ordens quando o modelo possui interfaces levemente inclinadas ou topografia. Visto que a utilização de malhas irregulares permite que as células sejam ajustadas com mais precisão ao modelo.

3 DIFERENÇAS FINITAS 2,5-D

A modelagem da propagação de onda em 2,5-D é de interesse para a modelagem numérica de experimentos em que fonte e receptores estão em um mesmo plano. Algumas aplicações desta abordagem incluem levantamentos sísmicos 2D (LINER, 1991) e tomografia sísmica (PRATT; WILLIAMSON, 1995). O trabalho de Liner (1991) postulou uma solução para a equação de onda acústica para meios com velocidade variável somente no plano x_1, x_3 . Song e Williamson (1995) apresentaram a equação de onda em 2,5-D para meios acústicos com densidade constante, no domínio da frequência e aplicaram seus resultados a problemas tomográficos. Cao e Greenhalgh (1998) e Zhou e Greenhalgh (1998) apresentaram as condições de estabilidade, fronteiras absorventes e compararam a implementação no domínio da frequência e no domínio do tempo, novamente para a equação da onda com densidade constante. Recentemente Novais e Santos (2004), revisitaram a equação da onda com densidade constante e obtiveram as condições de estabilidade e limites para a amostragem do número de onda máximo, no domínio do tempo. Neste trabalho, apresento a solução do campo acústico completo para meios com densidade variável em 2,5-D no domínio do tempo. As condições de estabilidade são apresentadas para esquemas de diferenças finitas de alta ordem e um destes esquemas é validado em meios homogêneo.

Nesta dissertação o algoritmo de diferenças finitas 2,5-D não foi aplicado em modelos com elevada complexidade estrutural, devido às dimensões dos modelos utilizados e a demanda computacional exigida. Portanto neste somente apresento a fundamentação teórica e a validação do algoritmo em modelos homogêneos. Futuramente através da utilização de um computador do tipo *Cluster*, o algoritmo de diferenças finitas 2,5-D servirá para calibrar o algoritmo 3-D que ainda está em fase de implementação.

3.1 MODELAGEM 2,5-D

Nesta implementação a modelagem de ondas acústicas é efetuada através do sistema de equações definidas em (2.1) e (2.2). A modelagem 2,5-D pressupõe que as propriedades físicas do meio são invariantes por translação em uma direção, neste trabalho a direção x_2 . Considera-se ainda que as fontes e os receptores estão localizados no plano $x_2 = 0$. Efetuando a transformada de Fourier nesta coordenada, obtém-se

$$\begin{aligned}\partial_t v_J &= -\frac{1}{\rho(\mathbf{X})} \partial_J P + \frac{f_J(t)\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_s)}{\rho(\mathbf{X})} \\ \partial_t v_2 &= -\frac{1}{\rho(\mathbf{X})} \mathbf{i} k_2 P \\ \partial_t P &= -\rho(\mathbf{X})c^2(\mathbf{X}) (\partial_J v_J + \mathbf{i} k_2 v_2) + \partial_t q(t)\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_s)\end{aligned}$$

em que k_2 é o número de onda associado à coordenada x_2 , todos os campos são funções de (\mathbf{X}, k_2, t) , em que $\mathbf{X} = (x_1, x_3)$, o subscrito J assume os valores 1 e 3, \mathbf{X}_s indica a posição da fonte. Como estamos interessados no caso de ondas no plano x_1, x_3 a fonte dipolar não possui a componente f_2 . Neste caso a componente $v_2(\mathbf{X}, t)$ é uma função ímpar da coordenada x_2 e portanto $v_2(\mathbf{X}, k_2, t)$ é imaginário puro. Definindo o campo real $u_2(\mathbf{X}, k_2, t) \equiv \mathbf{i}v_2(\mathbf{X}, k_2, t)$, obtém-se o sistema a ser resolvido por diferenças finitas

$$\begin{aligned}\partial_t v_J &= -\frac{1}{\rho(\mathbf{X})} \partial_J P + \frac{f_J(t)\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_s)}{\rho(\mathbf{X})}, \\ \partial_t u_2 &= \frac{1}{\rho(\mathbf{X})} k_2 P, \\ \partial_t P &= -\rho(\mathbf{X})c^2(\mathbf{X}) (\partial_J v_J + k_2 u_2) + \partial_t q(t)\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_s).\end{aligned}$$

A aproximação das equações acima nas malhas intercaladas produz o esquema de diferenças

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_t^- v_{1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\rho_{j+\frac{1}{2},k}} \left(\mathbf{D}_1^+ P_{j,k}^n + f_{1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \mathbf{D}_t^- v_{3,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\rho_{j,k+\frac{1}{2}}} \left(\mathbf{D}_3^+ P_{j,k}^n + f_{3,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \mathbf{D}_t^- u_{2,j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= -\frac{k_2}{\rho_{j,k}} P_{j,k}^n \\ \mathbf{D}_t^+ P_{j,k}^n &= K_{j,k} \left(\mathbf{D}_1^- v_{1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{D}_3^- v_{3,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + k_2 u_{2,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

em que o campo de pressão está amostrado nas coordenadas $x_1 = jh$, $x_3 = kh$ e nos instantes $t = ndt$; o campo de velocidade está amostrado nas posições intercaladas, como indicado no Apêndice A, nos instantes $t = (n + \frac{1}{2})dt$; h é o intervalo de amostragem espacial e dt é o intervalo de amostragem no tempo; \mathbf{D}^+ e \mathbf{D}^- indicam operadores de diferenças finitas avançado e atrasado (ISERLES, 1996), respectivamente; $\kappa_{j,k}$ indica o módulo de incompressibilidade.

3.2 ESTABILIDADE

A estabilidade do esquema 2,5-D é obtida através do mesmo procedimento apresentado para o caso 2-D. A relação de dispersão para o caso 2,5-D é semelhante a equação do caso 2-D (2.4), com exceção do termo dependente de k_2 , desse modo

$$\frac{C_{DF}}{C} = \frac{\text{sen}^{-1} \left\{ \mu \left[\left(\frac{k_2 h}{2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{2N-1} d_j^2 \left(\text{sen} \left(\frac{j n_1 k_n}{2} \right)^2 + \text{sen} \left(\frac{j n_3 k_n}{2} \right)^2 \right) \right]^{1/2} \right\}}{k_n \mu} . \quad (3.1)$$

Para garantir a estabilidade, o argumento da função seno inversa deve ser menor ou igual a unidade, portanto

$$\mu \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_2 h}{2} \right)^2 + 2 d_0^2}} . \quad (3.2)$$

A condição de estabilidade para o esquema de diferenças finitas correspondente em 3-D, deduzida de maneira análoga no Apêndice B, é

$$\mu \leq \sqrt{\frac{2}{3 d_0^2}} . \quad (3.3)$$

Exigindo que, quando k_2 atinja seu valor máximo, o esquema 2,5-D satisfaça a relação (3.3) ((NOVAIS; SANTOS, 2004)), obtém-se

$$k_{2max} \leq \frac{\sqrt{2 d_0^2}}{h} . \quad (3.4)$$

Utilizando (3.1), é possível avaliar o comportamento do esquema em relação à dispersão e anisotropia numérica. Fazendo $k_2 = 0$, a equação (3.1) se reduz a (2.4). Utilizei neste trabalho operadores de diferenças de segunda ordem para a derivada no tempo, D_t . As derivadas em relação as coordenadas espaciais, D_1 e D_3 , foram aproximadas por operadores

de diferenças finitas de ordem 16 (Figura 3.1). Portanto verifica-se que para esse operador não há dispersão para $h \leq \frac{\lambda}{3}$.

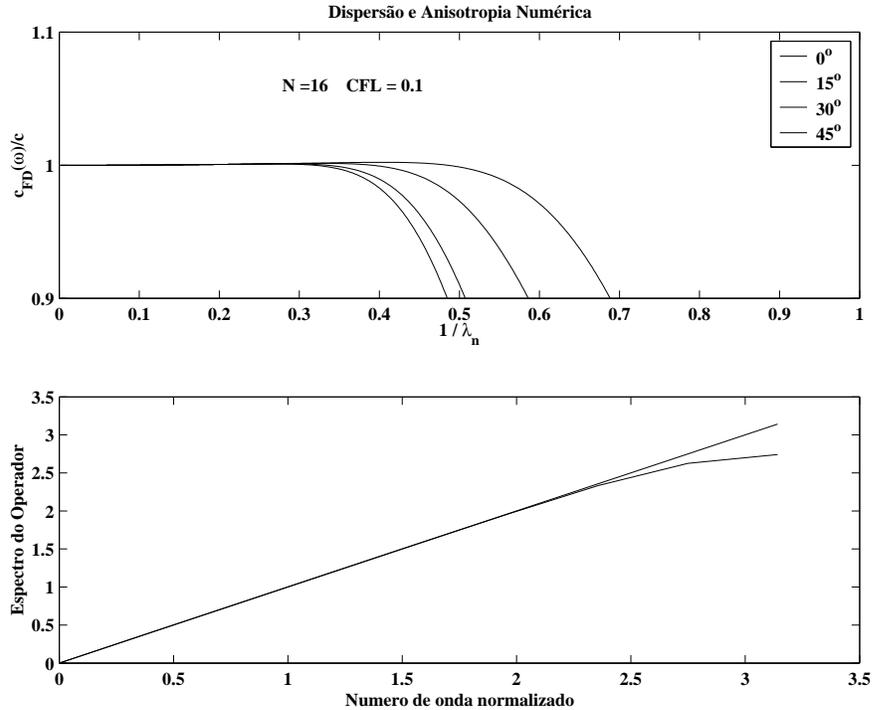


Figura 3.1: Relações de dispersão para o esquema de diferenças 2,5-D finitas com $N = 16$, em função de G^{-1} . No gráfico superior, $k_2 = k_{2max}$. No gráfico observa-se a forte dispersão para números de onda menores. No gráfico inferior $k_2 = 0$. Neste gráfico são mostradas as relações de dispersão para os ângulos de incidência $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ e 45° comparados ao valor exato da relação, verifica-se que não há dispersão para $h \leq \frac{\lambda}{3}$. Em ambos os gráficos $\mu = 0.1$.

3.3 VALIDAÇÃO

A implementação de um esquema 2,5-D requer pequenas mudanças no esquema de diferenças finitas 2-D apresentado. Sendo as condições de fronteira absorvente e fronteira livre, adaptações imediatas desse caso. Nesta seção comparo os resultados do esquema proposto com a solução analítica em um meio homogêneo 3-D, para o campo de pressão

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_s\|} w\left(t - \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_s\|}{c}\right) \quad (3.5)$$

em que \mathbf{X}_s é a posição da fonte e $w(t)$ é o pulso fonte. O intervalo de discretização do número de onda foi $\Delta k_2 = 2\pi/(N_1 h + N_3 h)$, em que N_1 e N_3 indicam o número de amostras nas

direções x_1 e x_3 , respectivamente. Uma vez calculados os campos de velocidade e pressão para todos os números de onda, o campo acústico nos receptores em $x_2 = 0$ é obtido efetuando as transformadas de Fourier inversas, que neste caso se reduzem as somas

$$v_I(x_1, x_2 = 0, x_3, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k_2} v_I(x_1, k_2, x_3, t)$$

$$P(x_1, x_2 = 0, x_3, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k_2} P(x_1, k_2, x_3, t)$$

pois todas as funções são pares em relação à x_2 .

Para exemplificar utilizo um meio com velocidade constante de 3000 m/s , fonte e recetor estão a distância de 1500 m . Utilizo como fonte um pulso Ricker de frequência 15 Hz . O meio foi discretizado com $h = 12 \text{ m}$. O tempo de amostragem é 2 ms . A Figura 3.2 mostra que o erro é da ordem de 5% .

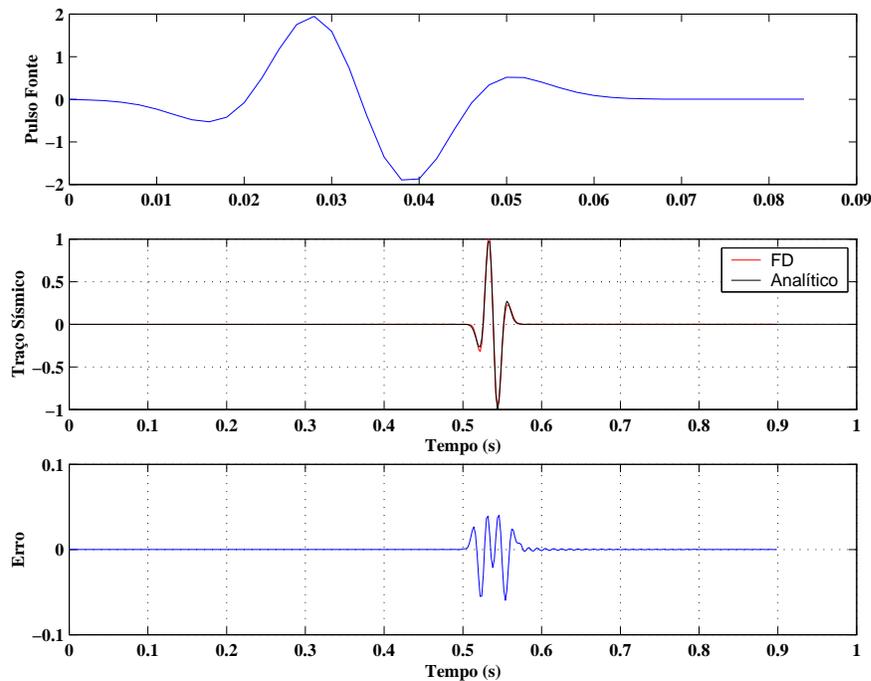


Figura 3.2: Comparação da solução por diferenças finitas e a solução analítica em um meio homogêneo de velocidade 3000 m/s . O gráfico acima mostra o pulso fonte; logo abaixo está o sinal normalizado pela amplitude máxima no receptor a 1500 m de distância calculado por diferenças finitas e pela solução analítica, também normalizada. Abaixo, o erro da aproximação. Neste teste foi usado $h = 12 \text{ m}$ e $\mu = 0.1$.

4 VALIDAÇÃO DOS ALGORITMOS

Neste capítulo faço a validação dos algoritmos de elementos finitos e diferenças finitas apresentados nos capítulos anteriores. Os dois algoritmos são inicialmente validados em meios homogêneos comparando-se as soluções numéricas com a solução analítica. Os erros na fase e amplitude dos sinais calculados numericamente são avaliados. A seguir os métodos são validados no modelo Marmousi (VERSTEEG, 1993) avaliando-se todas as relações de reciprocidade (HOOP; STAM, 1988) do campo acústico. Estas relações foram avaliadas para diferentes posições de fontes e receptores e os resultados de uma dessas configurações são apresentados neste capítulo.

Os resultados em meios homogêneos indicam que as duas implementações são adequadas para modelagem do campo acústico. Adicionalmente, as relações de reciprocidade são obedidas com grande precisão numérica pelos dois algoritmos.

Estes resultados confirmam a eficácia das duas estratégias na modelagem numérica da propagação de ondas em meios acústicos.

A eficiência computacional dos dois métodos também é avaliada. Para o modelo Marmousi, o algoritmo de elementos finitos é da ordem de três vezes mais lento que o algoritmo de diferenças finitas com operador de derivadas espaciais de ordem nove.

4.1 VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

4.1.1 Comparação com a solução analítica da equação de onda 2-D

Nesta seção faço a comparação entre um traço sísmico gerado através do algoritmo de diferenças finitas e a solução analítica correspondente da equação de onda 2-D para um meio homogêneo e ilimitado.

Através dessa comparação é possível avaliar a acuidade do algoritmo em um modelo simples. A equação da onda acústica para o campo de pressão, $P(\mathbf{x}, t)$, em um meio homogêneo para uma fonte de injeção de volume, $q(\mathbf{x}, t)$ é

$$\partial_t^2 P(\mathbf{x}, t) = \kappa(\mathbf{x}) \partial_i \left[\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \partial_i P(\mathbf{x}, t) \right] - \kappa(\mathbf{x}) \partial_t^2 q(\mathbf{x}, t) . \quad (4.1)$$

A solução analítica da equação (4.1) é apresentada em Alford et al. (1974). Em coordenadas cilíndricas, no domínio da frequência, esta solução é dada por

$$\tilde{P}(r, \phi, \omega) = \mathbf{i} \pi H_0^2(k|r - r_s|) \tilde{Q}(r, \phi, \omega) , \quad (4.2)$$

em que $\tilde{P}(\mathbf{x}, \omega)$ indica o espectro do campo de pressão, $\tilde{Q} = (-\mathbf{i}\omega)^2 \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega)$ é a transformada de Fourier do termo fonte $\partial_t^2 q$, H_0^2 é a função de Hankel do 2º tipo de ordem zero, e $|r - r_s|$ é a distância entre a fonte e o receptor. A solução no domínio do tempo é obtida através da transformada de Fourier inversa de (4.2), a qual foi avaliada numericamente neste trabalho . A Figura 4.1 apresenta a superposição dos traços normalizados calculados por diferenças finitas e analiticamente. A solução numérica foi avaliada em uma malha regular de 300×300 pontos com intervalo de $h = 10 m$ entre os nós utilizando um operador de diferenças finitas de ordem 9. Utilizei uma fonte de injeção de volume, com pulso do tipo Ricker, com frequência dominante $f_d = 15 Hz$ e frequência máxima $f_{max} = 45 Hz$, localizada no ponto de coordenadas $(1000 m, 1500 m)$. O receptor foi colocado no ponto de coordenadas $(2500 m, 1500 m)$. O tempo total de propagação calculado foi $t = 1 s$, com um intervalo de amostragem $dt = 2 ms$. A velocidade de propagação da onda compressional utilizada no modelo foi $V_P = 3000 m/s$ e densidade igual a $\rho = 2290 kg/m^3$.

O traço calculado numericamente e o traço calculado analiticamente foram normalizados pelo valor máximo de suas respectivas amplitudes. Para determinar os erros da aproximação numérica determinei os erros de amplitude e fase entre os traços normalizados. Inicialmente

o erro da fase foi avaliado determinando a correção de fase que deve ser aplicada ao traço calculado analiticamente, $S_c(t; \theta)$, para minimizar o erro quadrático em relação ao traço calculado numericamente. Esse problema é formulado através da solução de um esquema mínimos quadrados

$$\text{Min } \|S_{DF}(t) - S_c(t; \theta)\| ,$$

em que

$$S_{DF}(t; \theta) = \cos \theta S_a(t) + \text{sen} \theta \mathcal{H} [S_a(t)] , \quad (4.3)$$

nesta expressão, $S_{DF}(t)$ indica o traço calculado por diferenças finitas, $S_a(t)$ indica o traço calculado analiticamente e \mathcal{H} representa a transformada de Hilbert. O erro de fase é medido pelo tempo de deslocamento entre os dois sinais, $\Delta t = \theta/\omega_0$, em que ω_0 é a frequência dominante do pulso sísmico. O erro de amplitude foi obtido pela diferença $S_{DF}(t) - S_c(t; \theta)$. O erro de fase encontrado foi 1.3×10^{-4} s. Utilizei como medida absoluta do erro de amplitude o desvio padrão da diferença entre os traços. Desse modo o valor encontrado para o desvio padrão foi de 0.0115.

Tendo em vista a diferença de fase da ordem 1.3×10^{-4} s entre os traços apresentados na Figura 4.1, é equivalente no modelo testado, a uma diferença de 0.5 m entre as posições da fonte e do receptor. Ou seja uma discrepância de aproximadamente $h/20$. Assim como o desvio padrão do erro de 0.0115 na amplitude. Conclui que em relação a um modelo homogêneo e ilimitado no qual é conhecida uma solução analítica para a comparação, o fenômeno da propagação de onda é corretamente modelado, pelo algoritmo de diferenças finitas implementado.

4.1.2 Relações de Reciprocidade

Para modelos heterogêneos geologicamente relevantes para a exploração de petróleo, como o Modelo Marmousi (VERSTEEG, 1993), não há soluções analíticas disponíveis para validar o algoritmo. Neste caso optei por verificar se os algoritmos obedecem as relações de reciprocidade para todo o campo acústico, as quais estão descritas no Apêndice E . Para verificar as relações de reciprocidade, três fontes diferentes foram utilizadas, uma fonte de injeção de volume e duas fontes impulsivas uni-direcionais polarizadas nas direções x_1 e x_3 . O modelo de Marmousi foi utilizado para verificar se as relações de reciprocidade são obedecidas pelos

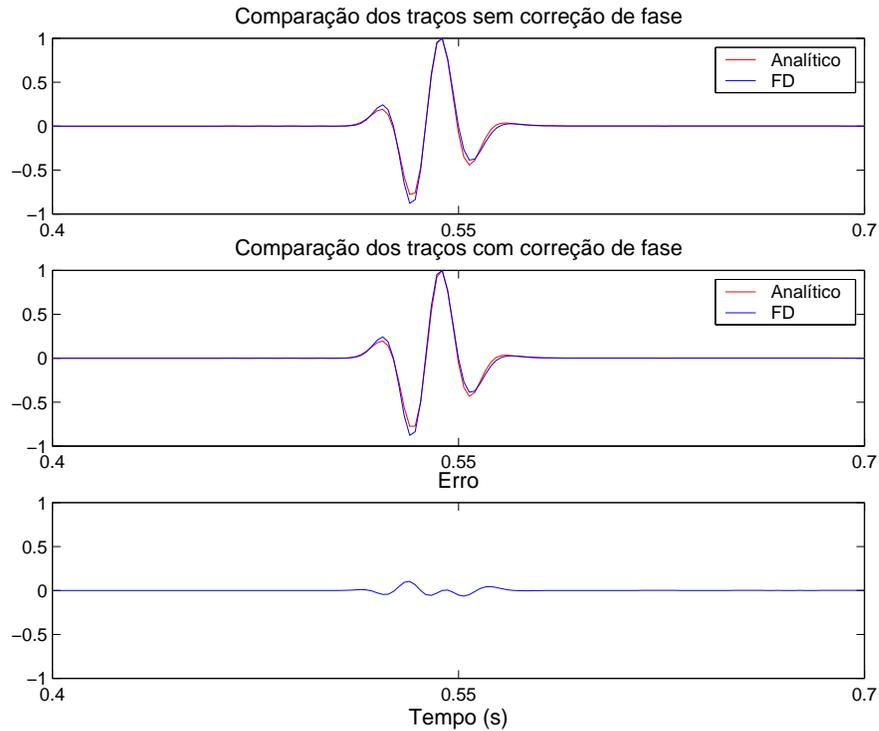


Figura 4.1: Comparação entre um traço sísmico gerado através do método de diferenças finitas e a correspondente solução analítica da equação de onda acústica 2-D. Cada traço está normalizado por sua amplitude máxima. A figura superior mostra os traços obtidos para um intervalo de 1 s de propagação da onda acústica e apresentado entre os instantes 0.4 s e 0.7 s, sem a correção de fase. A figura central mostra a comparação entre as soluções após a correção de fase. A figura inferior mostra o erro obtido pela diferença entre as duas soluções após a correção de fase. O erro de fase e o desvio padrão do erro da amplitude encontrados foram respectivamente 1.3×10^{-4} e 0.0115

algoritmos. A presença de fortes contrastes de velocidade e a complexidade estrutural, com falhas geológicas e interfaces com grande curvatura, são características que tornaram esse modelo uma referência para avaliação de metodologias de modelagem e imageamento em 2-D (VERSTEEG, 1993). A distribuição de velocidade e de densidade do modelo Marmousi estão indicadas nas Figuras 4.2 e 4.3. O modelo de densidade foi obtido a partir do modelo de velocidade, através da equação de Gardner et al. (1974), em unidades do sistema SI,

$$\rho = 230 \times (V_P / 0.3048)^{0.25}, \quad (4.4)$$

em que ρ é a densidade medida em kg/m^3 , e V_P é a velocidade da onda compressional medida em m/s .

Para o algoritmo de diferenças finitas os modelos de velocidade e densidade foram amostra-

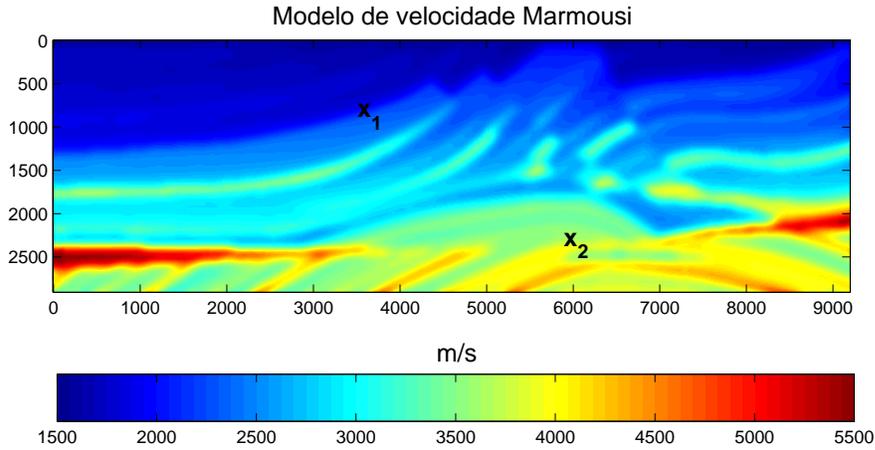


Figura 4.2: Modelo de velocidade Marmousi. Os pontos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 indicam as posições utilizadas para avaliar as relações de reciprocidade. A escala de cores indica a velocidades em m/s

dos em uma malha regular com espaçamento $h = 12 m$. A condição de superfície livre foi aplicada na fronteira superior e condições de camada perfeitamente absorvente foram aplicadas nas outras fronteiras da malha. Em todos os testes apresentados a seguir o pulso fonte é do tipo Ricker de frequência dominante, $f_d = 15 Hz$, e frequência máxima $f_{max} = 45 Hz$. Fontes e receptores foram posicionados alternadamente nas posições $\mathbf{x}_1 = (3600 m, 900 m)$ e $\mathbf{x}_2 = (6000 m, 2100 m)$. O tempo de propagação foi $t = 2 s$, e o intervalo de amostragem nos receptores é de $2 ms$. Foi utilizado um operador de diferenças finitas de ordem nove e $\mu = 0.25$.

4.1.2.1 Relação de reciprocidade para o campo de pressão

Permutando-se as posições fonte-receptor, no caso de fontes de injeção de volume, o campo de pressão medido deve satisfazer a seguinte relação de reciprocidade

$$P_0(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0) = P_0(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0) . \quad (4.5)$$

Nesta notação o subscrito 0 nos campos de pressão identifica que a fonte utilizada é uma fonte explosiva, conforme a notação indicada no Apêndice E. A Figura 4.4 mostra os dois traços indicados na relação acima calculados pelo algoritmo de diferenças finitas. Este resultado mostra que esta relação de reciprocidade é obedecida com grande acuidade pelo algoritmo.

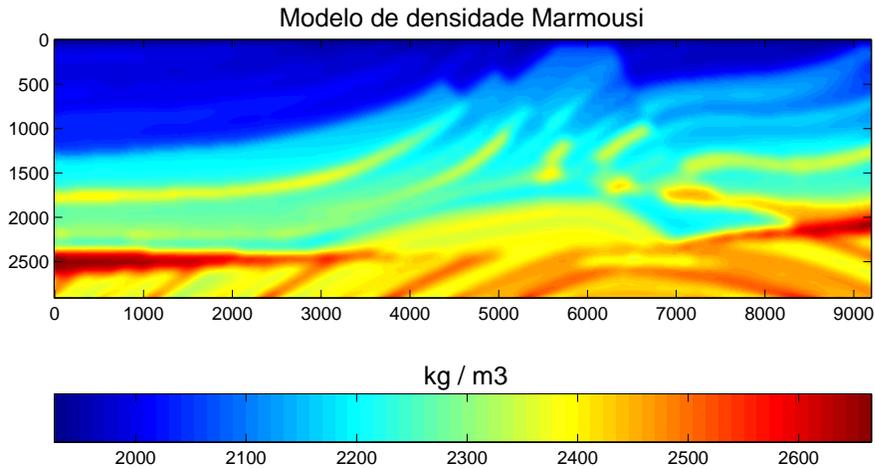


Figura 4.3: Modelo de densidade do Marmousi obtido a partir da equação de Gardner et al.(1974). A escala de cores indica a densidade em kg/m^3 .

4.1.2.2 Relação de reciprocidade para o campo de velocidade

Para fontes impulsivas uni-direcionais (dipólos), ao se permutar a posição de fonte e receptor, o campo de velocidade deve obedecer a relação de reciprocidade

$$v_{ij}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0) = v_{ji}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0) , \quad (4.6)$$

nesta notação o primeiro subscrito indica a componente do campo de velocidade registrada no receptor e o segundo subscrito indica a polarização da fonte. A Figura 4.5 mostra a avaliação desta relação utilizando o algoritmo de diferenças finitas para as componentes v_{13} e v_{31} , respectivamente. Na Figura 4.5 a fonte com polarização na direção x_1 está na posição \mathbf{x}_2 . Esta figura mostra que as relações de reciprocidade para o campo de velocidade são obedecidas com grande acuidade. As Figura 4.6 e 4.7 mostram os resultados do experimento recíproco aplicado individualmente em cada componente da velocidade.

4.1.2.3 Relação de reciprocidade entre o campo de velocidade e o campo de pressão

A última relação de reciprocidade relaciona o campo de pressão pressão e o campo de velocidade quando se permuta fonte explosiva com fonte uni-direcional. Conforme apresentado no apêndice E, neste caso os campos de velocidade e pressão devem obedecer a relação

$$P_j(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0) = Zv_{j0}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0) , \quad (4.7)$$

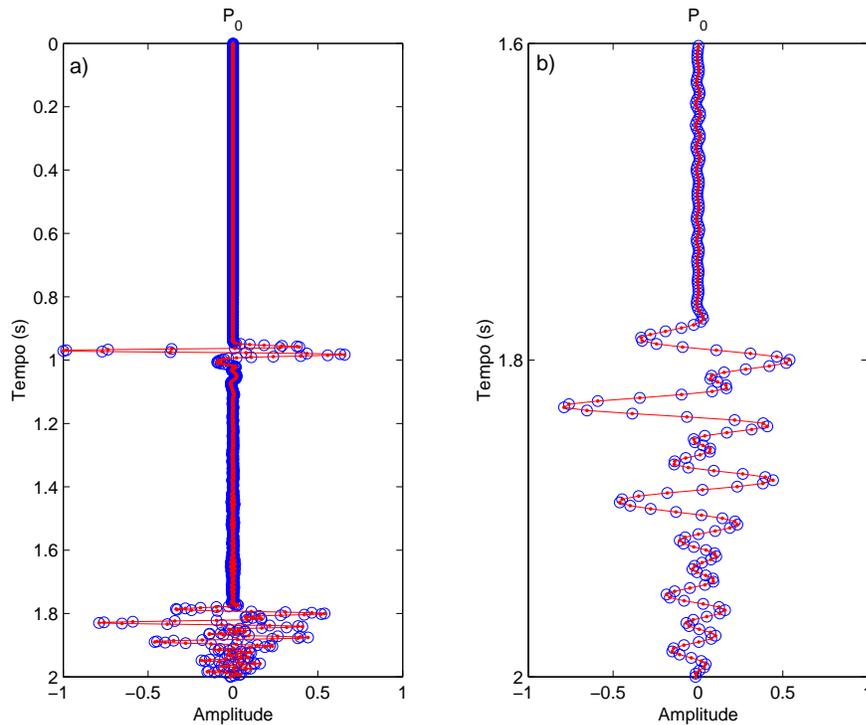


Figura 4.4: Relação de reciprocidade para o campo de pressão usando diferenças finitas para o caso de uma fonte explosiva, equação (4.5). A Figura (a) mostra a superposição dos traços. A linha vermelha contínua representa o campo de pressão $P(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Na Figura (b) é mostrada uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas.

nesta notação P_j indica o campo de pressão registrado quando a fonte uni-direcional está polarizada na direção x_j , v_{j0} representa a componente j do campo de velocidade, produzindo por uma fonte explosiva e Z é uma constante com a mesma unidade que a impedância. Esta relação implica que os traços recíprocos de pressão e velocidade indicados, quando normalizados, devem coincidir. As Figuras 4.8 e 4.9 mostram o resultado da comparação entre os traços recíprocos normalizados por suas respectivas amplitudes máximas. A fonte direcional utilizada para gerar campo P_j estava situada no ponto \mathbf{x}_2 , e a fonte explosiva utilizada para gerar a componente v_{j0} , estava situada no ponto \mathbf{x}_2 . Os resultados acima indicam que o campo acústico calculado por diferenças finitas com operadores de altas ordens, obedece todas as relações de reciprocidade em um meio fortemente heterogêneo.

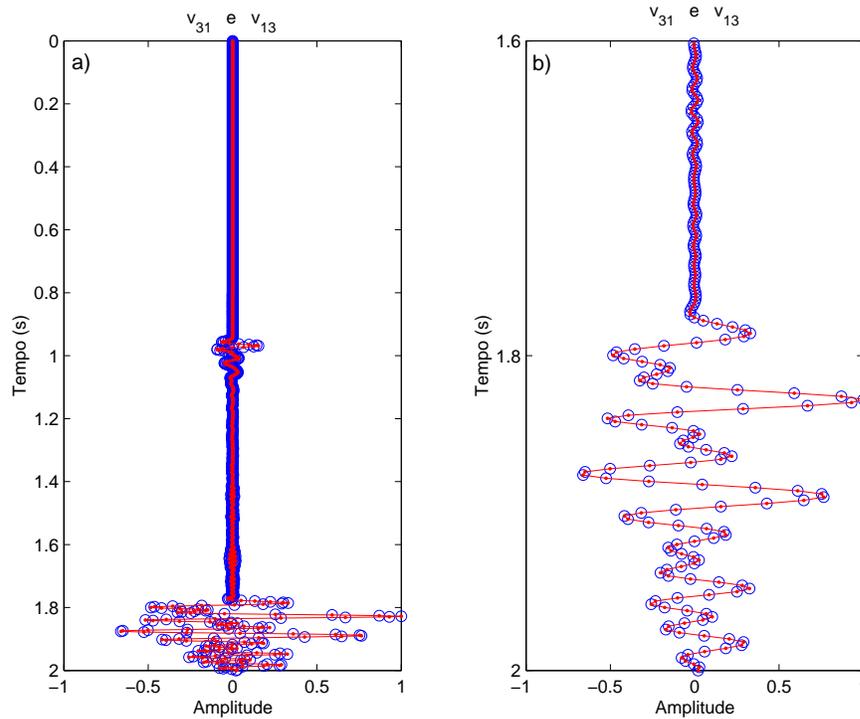


Figura 4.5: Reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade representada pela equação (4.6). Na Figura (a) apresenta-se a superposição dos traços $v_{31}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$, linha vermelha contínua, e $v_{13}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$, linha representada por círculos azuis. Na Figura (b) destaca-se uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que a esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas.

4.2 VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

4.2.1 Comparação com a solução analítica da equação da onda 2-D

Nesta seção faço a comparação entre um traço analítico obtido através da solução da equação (4.2), e um traço gerado numericamente através do método de elementos finitos. Os procedimentos mostrados nas seções 4.1.1 e 4.1.2 foram repetidos. A diferença de fase e o erro na amplitude entre os traços foram medidos. O modelo utilizado foi o mesmo da seção 4.1.1. Mudanças foram realizadas para que as condições de estabilidade e dispersão numérica, exigidas pelo algoritmo de elementos finitos fossem satisfeitas. O espaçamento entre os nós da malha foi reduzido para $h = 5$. O tempo de propagação da onda foi $t = 1$ s, e intervalo de amostragem foi $dt = 2$ ms. Utilizamos uma fonte de injeção de volume, com um pulso do tipo Ricker de frequência dominante $f_d = 15$ Hz e frequência máxima $f_{max} = 45$. O resultado

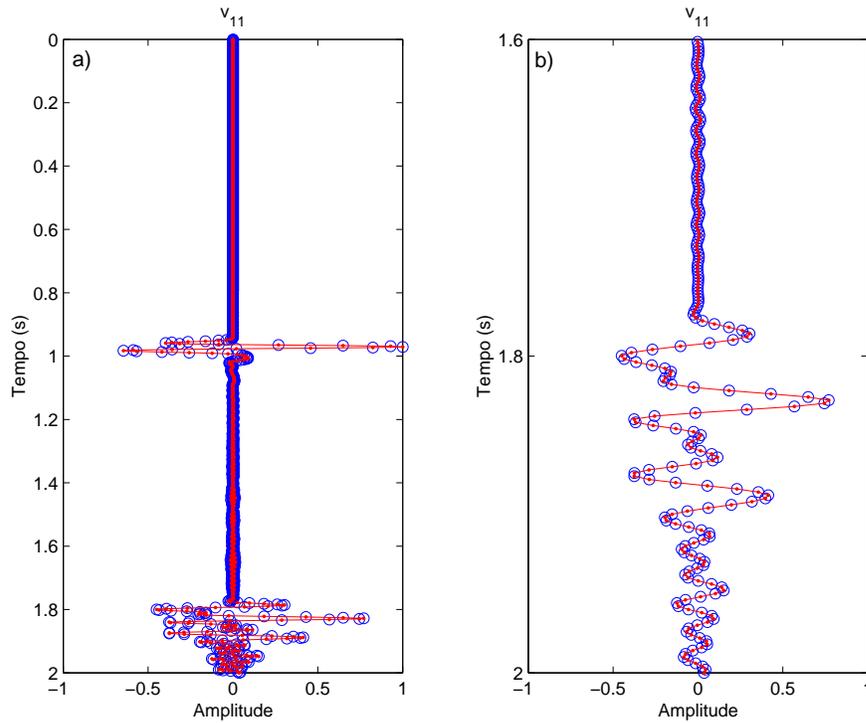


Figura 4.6: Reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade representada pela equação (4.6). Na Figura (a) apresenta a superposição dos traços $v_{11}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$, linha vermelha contínua, e $v_{11}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$, linha representada por círculos azuis. Na Figura (b) destaca-se uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que a esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas.

mostrado na Figura 4.10, é semelhante ao encontrado em diferenças finitas (Figura 4.1). Realizei a correção de fase entre os traços através da equação (4.3) e o valor encontrado foi da ordem de $2.56 \times 10^{-4} s$ e o valor encontrado para o desvio padrão do erro foi de 0.0156, próximo ao valor encontrado por diferenças finitas que foi 0.0115, essa diferença está associada ao uso de operadores de diferenças de altas ordens que resolvem com mais acuidade a equação da onda.

4.2.2 Relações de reciprocidade

Nesta seção repito os procedimentos aplicados ao algoritmo de diferenças finitas, para avaliar se campo acústico modelado pelo algoritmo de elementos finitos obedece as relações reciprocidade. Mantive os mesmos dados utilizados em diferenças finitas exceto a discretização do modelo e o valor μ . Os resultados a seguir apresentam a mesma seqüência utilizada na

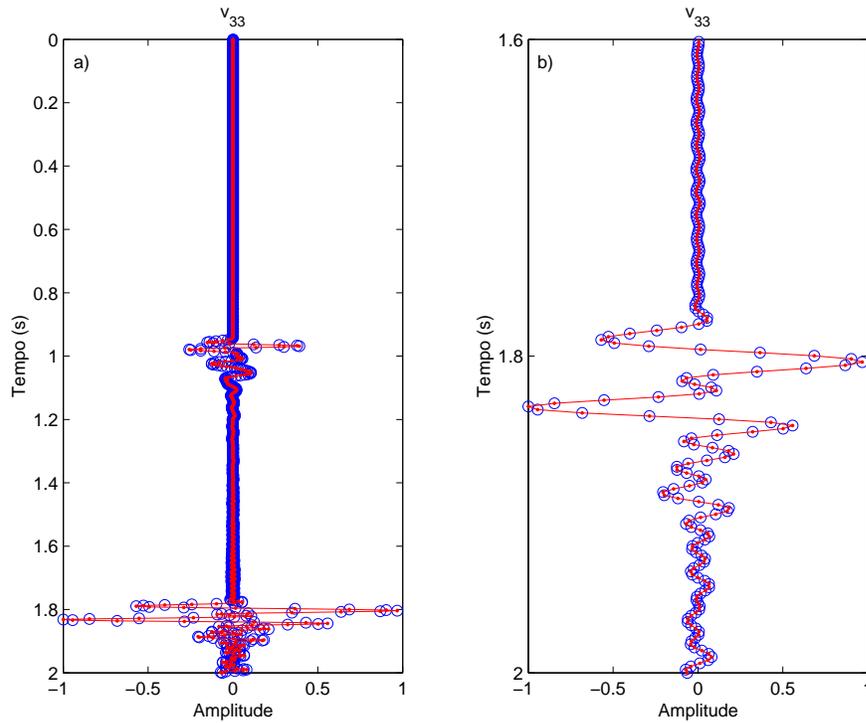


Figura 4.7: Reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade representada pela equação (4.6). Em (a) apresenta a superposição dos traços $v_{33}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$, linha vermelha contínua, e $v_{33}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$, linha representada por círculos azuis. Em (b) destaca-se uma ampliação da superposição dos traços recíprocos no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que a esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de diferenças finitas.

seção 4.1.2 usando diferenças finitas. Para obedecer a condição de estabilidade e minimizar a dispersão, o modelo Marmousi (Figuras 4.2 e 4.3) foi reamostrado com espaçamento regular $h = 6 m$. O modelo de densidade foi obtido a partir do modelo de velocidade, através da equação (4.4). A seguir são apresentados os resultados obtidos a partir da avaliação das relações de reciprocidade mostradas no seção 4.1.2 para o algoritmo de elementos finitos. Os campos medidos foram normalizados em função dos respectivos valores máximos de suas amplitudes.

4.2.2.1 Relação de reciprocidade para o campo de pressão

A Figura 4.11 mostra a avaliação da relação de reciprocidade (4.5). Pode-se verificar que há concordância entre o campo de pressão obtido através do experimento recíproco. O resultado mostra a mesma acuidade obtida pelo algoritmo de diferenças finitas.

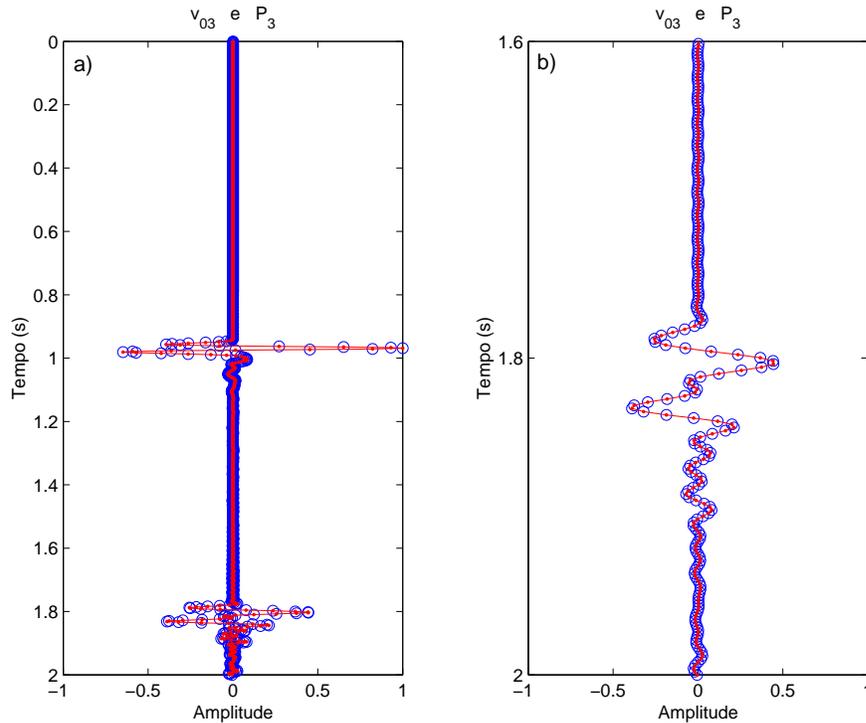


Figura 4.8: Reciprocidade entre o campo de pressão $P_3(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ gerado por uma fonte direcional polarizada na direção x_3 e situada na posição \mathbf{x}_1 , linha contínua, e a componente da velocidade $v_{30}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$ gerada por uma fonte explosiva, e a linha representada pelos círculos. Em *b* destaca-se uma ampliação no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para demonstrar a acuidade do método de diferenças ao obedecer essa relação de reciprocidade.

4.2.2.2 Relação de reciprocidade para o campo de velocidade

Utilizei a equação 4.6, para verificar a relação de reciprocidade entre as componentes do campo de velocidade. O resultado obtido mostra que o algoritmo de elementos finitos, respeita com grande exatidão a relação de reciprocidade, para as componentes do campo de velocidade. Apresento na Figura 4.12, o resultado obtido pelo experimento recíproco entre as componentes v_1 e v_3 . Nas Figuras 4.13 e 4.14 apresento o resultado do experimento recíproco aplicado a cada componente individualmente.

4.2.2.3 Relação de reciprocidade para a o campo de velocidade e o campo de pressão

Utilizei a equação (4.7) para verificar a relação de reciprocidade entre o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade. A seguir apresento o campo de pressão normalizado, gerado por uma fonte impulsiva polarizada na direção x_i , sobreposto à componente

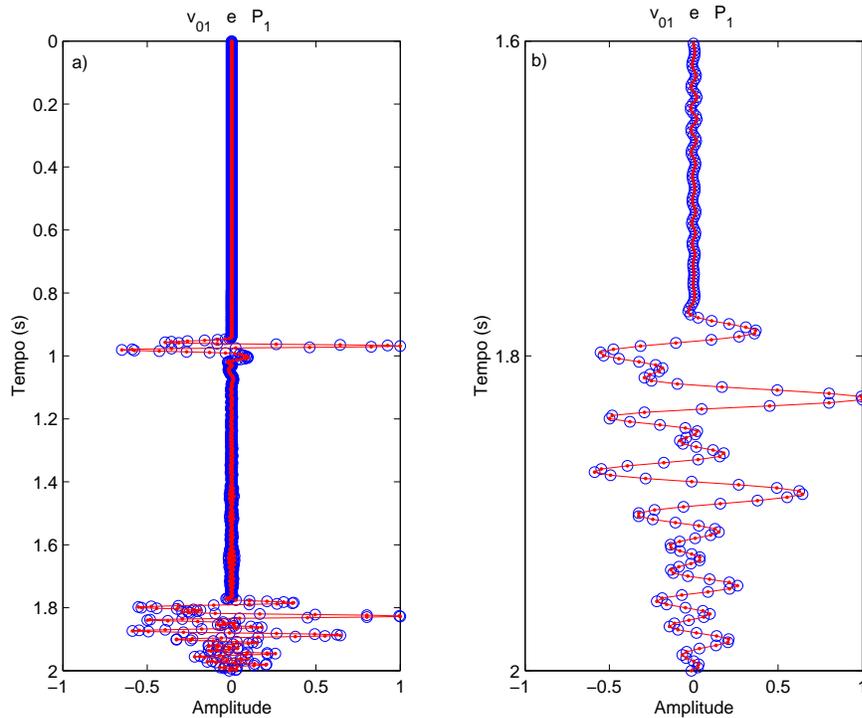


Figura 4.9: Reciprocidade entre o campo de pressão $P_1(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ gerado por uma fonte direcional polarizada na direção x_1 e situada na posição \mathbf{x}_1 , linha contínua, e a componente da velocidade $v_{10}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$ gerada por uma fonte explosiva, linha representada pelos círculos. em *b*) destaca-se uma ampliação no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para demonstrar a acuidade do método de diferenças ao obedecer essa relação de reciprocidade.

v_i do campo de velocidade, gerada por uma fonte explosiva, em que $i = 1, 3$. Os resultados obtidos através do experimento recíproco são apresentados nas Figuras 4.15 e 4.16. Verifica-se que há perfeita concordância entre os campos medidos, o que garante que a relação de reciprocidade para o campo de pressão as componentes da velocidade é perfeitamente respeitada.

Os experimentos numéricos descritos anteriormente atestam que o algoritmo de elementos finitos, modela a propagação do campo acústico em meios com estrutura geológica complexa, respeitando com grande acuidade as relações de reciprocidade para o campo acústico. Estes resultados reforçam a confiança sobre a correção e acuidade do algoritmo de elementos finitos.

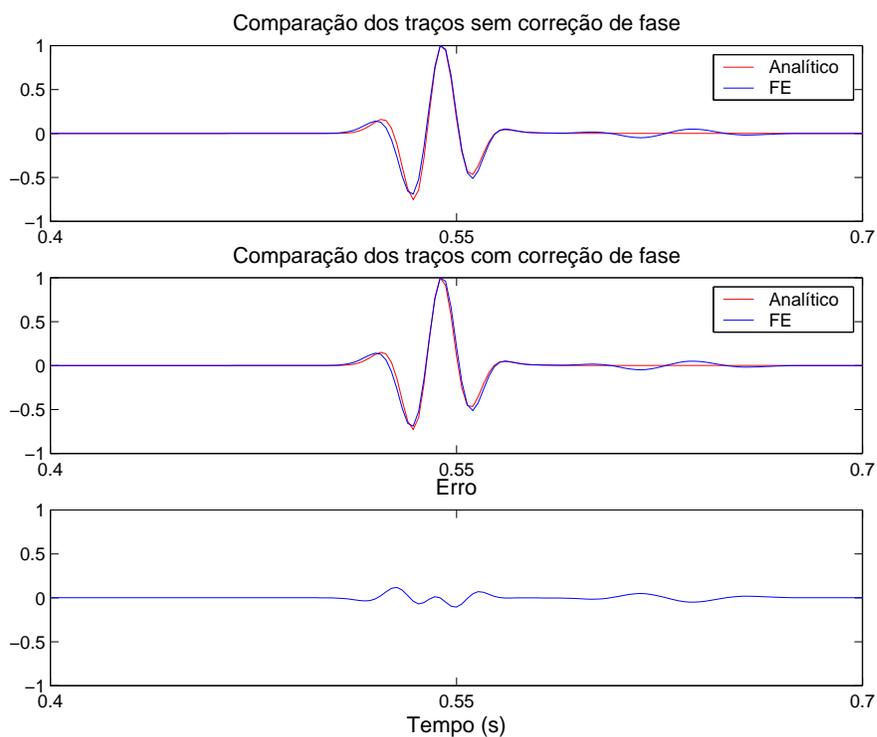


Figura 4.10: Comparação entre um traço gerado numericamente pelo algoritmo de elementos finitos, e um outro gerado analiticamente a partir da equação (4.2). A Figura superior mostra a comparação entre os traços sem a correção de fase. A Figura central mostra a comparação após a correção de fase. A Figura inferior mostra o erro entre as medidas.

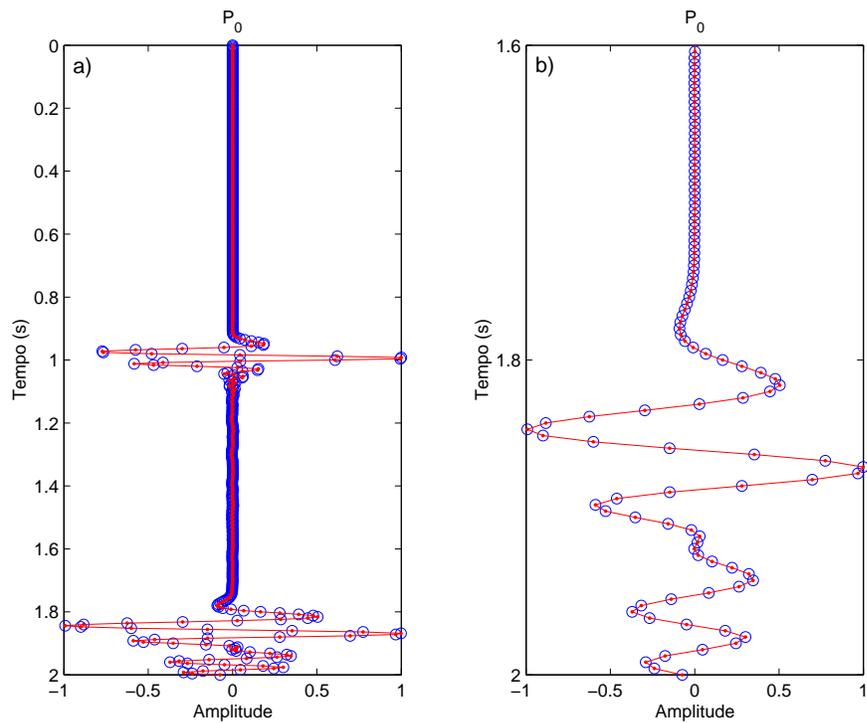


Figura 4.11: Relação de reciprocidade para o campo de pressão obtido pelo algoritmo de elementos finitos. Na Figura (a) , a linha vermelha contínua representa o campo de pressão $P_0(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P_0(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Em b) destaca-se uma ampliação dos traços no intervalo de 1.6 s a 2.0 s, para destacar a acuidade com que esta relação de reciprocidade é obedecida pelo algoritmo de elementos finitos.

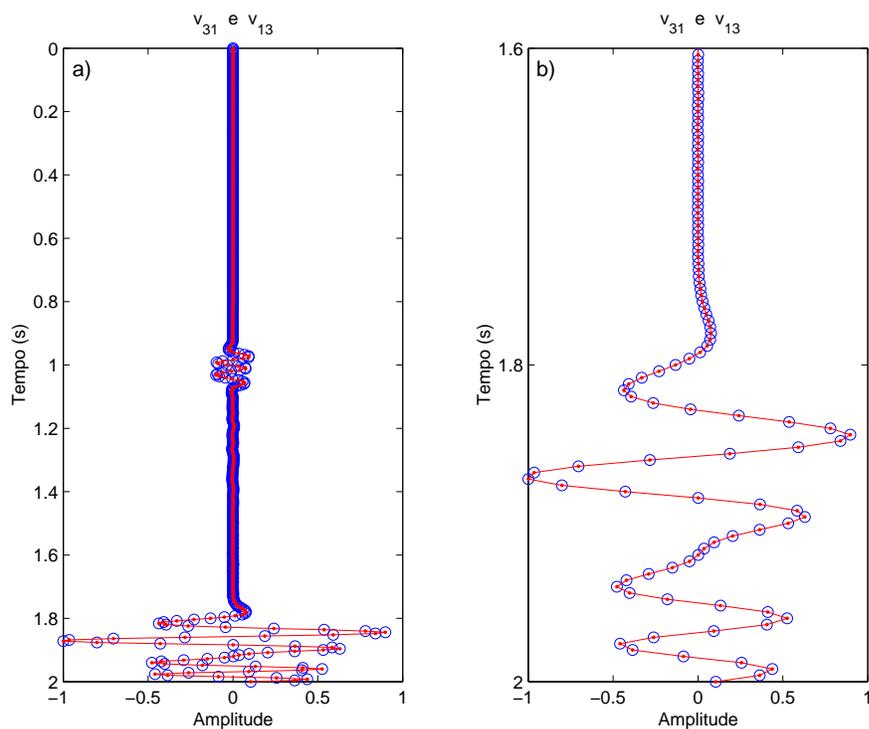


Figura 4.12: Relação de reciprocidade para as componentes do campo de velocidade v_1 e v_3 , gerados por fontes impulsivas, polarizadas respectivamente nas direções x_3 e x_1 . A linha vermelha contínua representa o campo de velocidade $v_{13}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de velocidade $v_{31}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Os campos foram medidos após 2 s de propagação da onda acústica. A Figura (a) mostra a superposição dos campos medidos. A Figura (b) mostra em destaque os campos medidos no intervalo entre 1.6 s e 2.0 s.

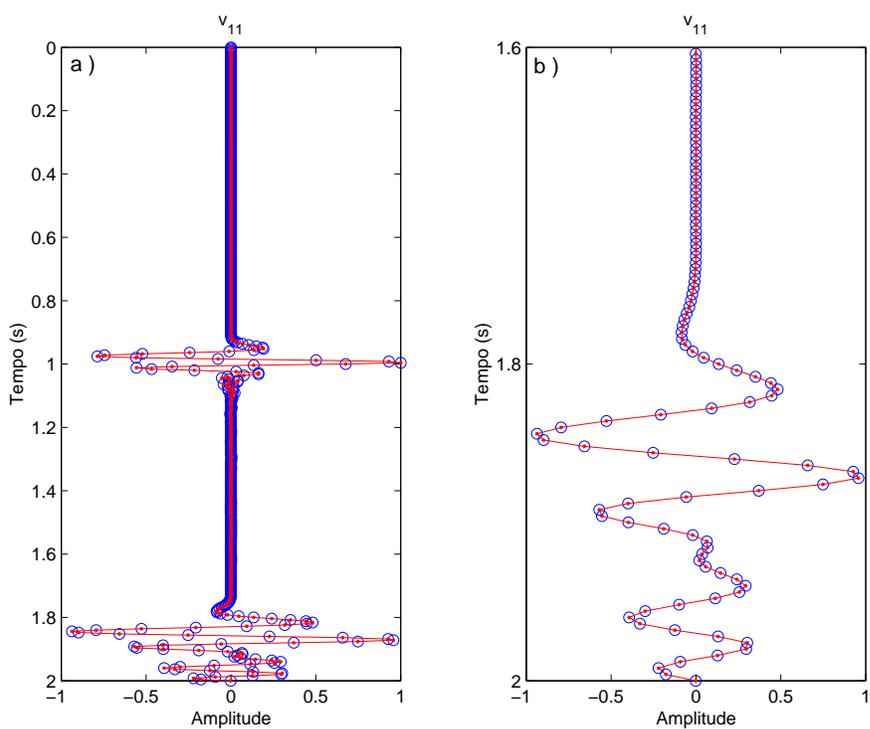


Figura 4.13: Relação de reciprocidade para a componente do campo de velocidade v_1 . A linha vermelha contínua representa a componente do campo de velocidade $v_{11}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo $v_{11}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Os campos foram medidos após 2 s de propagação da onda acústica. Em (a) mostra-se a superposição dos campos medidos. A Figura (b) mostra em destaque o os campos medidos no intervalo entre 1.6 s e 2.0 s.

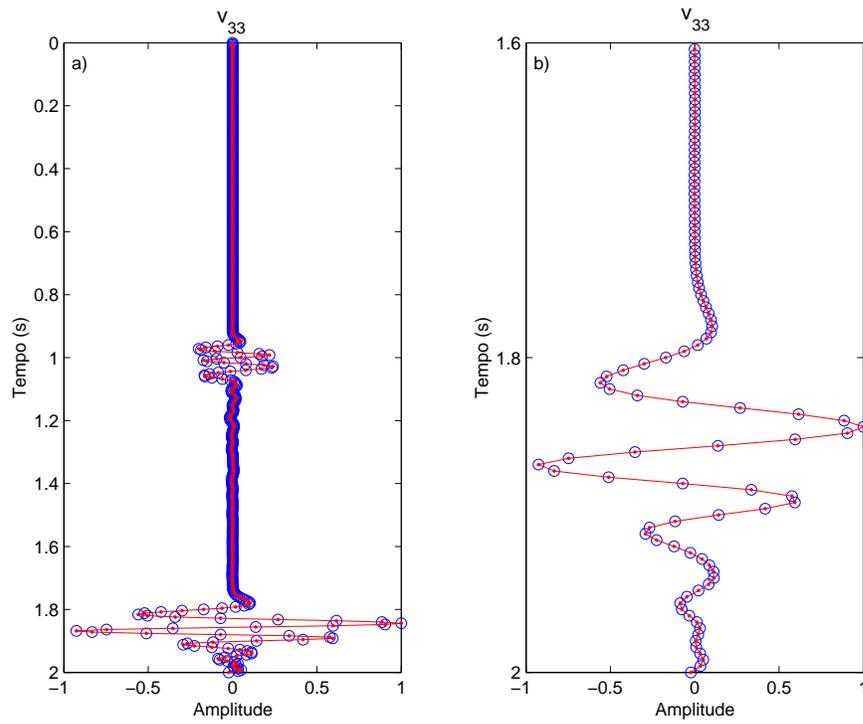


Figura 4.14: Relação de reciprocidade para a componente do campo de velocidade v_3 . A linha vermelha contínua representa a componente campo de velocidade $v_{33}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica a componente $v_{33}(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Os campos foram medidos após 2 s de propagação da onda acústica. Em (a) mostra-se a superposição dos campos medidos. A Figura (b) mostra em destaque o os campos medidos no intervalo entre 1.6 s e 2.0 s. As figuras mostram que a relação de reciprocidade para as componentes do campo de velocidade, foi respeitada com grande exatidão pelo algoritmo de elementos finitos.

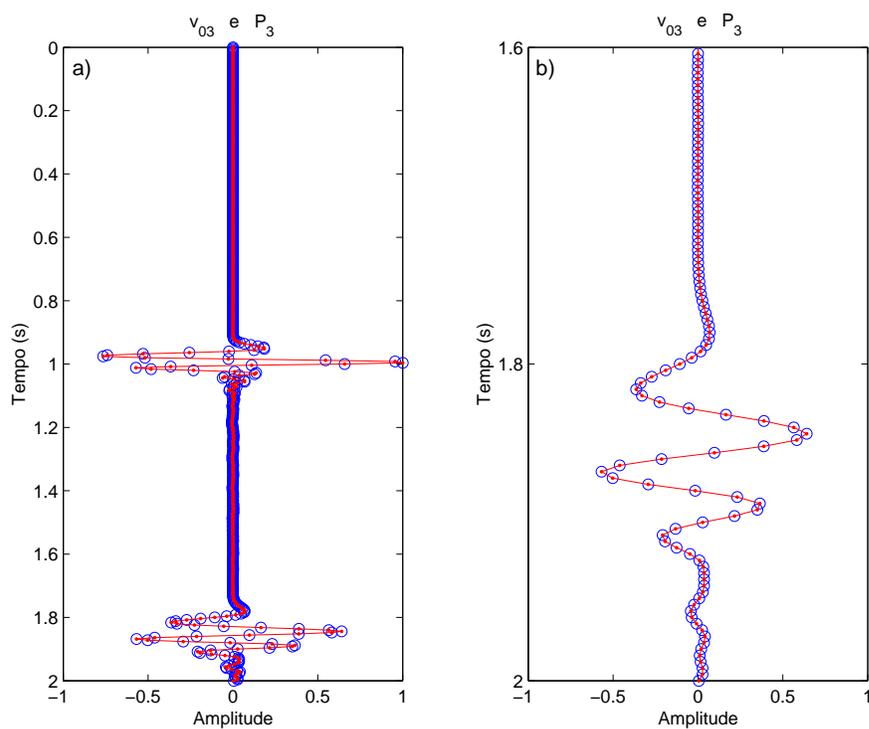


Figura 4.15: Relação de reciprocidade entre a componente v_3 do campo de velocidade e o campo de pressão P . A linha vermelha contínua representa o campo de velocidade $v_{30}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P_3(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. A Figura (a) mostra os campos superpostos medidos após 2.0 s de propagação da onda acústica. A Figura (b) mostra em destaque a superposição dos campos, no intervalo 1.6 s e 2.0 s mostrando que há perfeita concordância entre elas.

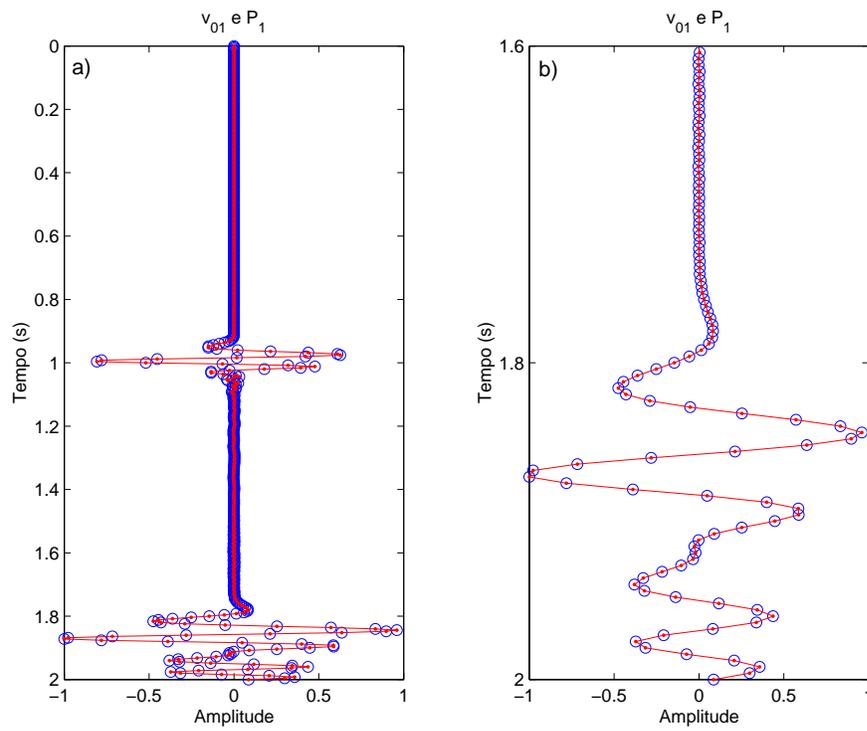


Figura 4.16: Relação de reciprocidade entre a componente v_1 da velocidade, e o campo de pressão. A linha vermelha contínua representa o campo de velocidade $v_{10}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ e a linha representada pelos círculos indica o campo de pressão $P_1(\mathbf{x}_2, t; \mathbf{x}_1, 0)$. Em (a) mostra-se a superposição dos campos, medidos após 2.0 s de propagação da onda acústica. A Figura (b) mostra em destaque a superposição dos campos, mostrando que há perfeita concordância entre elas. Desse modo garante-se que a relação de reciprocidade entre o campo de pressão e as componentes do campo de velocidade são perfeitamente respeitadas.

5 APLICAÇÕES DOS ALGORITMOS

Nesta seção faço a aplicação dos algoritmos de elementos finitos e diferenças finitas em modelos que representam alvos exploratórios. Inicialmente apliquei os algoritmos ao modelo Marmousi (VERSTEEG, 1993), esse modelo é caracterizado por apresentar fortes contrastes de impedância acústica entre as camadas e complexidade estrutural.

Produzi três seções sísmicas, seguindo as informações contidas em Versteeg (1993). Verifiquei que os eventos registrados através dos algoritmos de elementos finitos e diferenças finitas, reproduzem com grande exatidão resultados anteriores publicados em Versteeg (1993). Entretanto, não houve necessidade de filtragem dos dados simulados, devido a acurácia resultante de uma escolha conservadora para o parâmetro CFL e uma amostragem adequada do modelo de velocidade. O mesmo não ocorreu em Versteeg (1993), no qual os dados produzidos passaram por um processo de tratamento, para eliminar a dispersão numérica existente. Em seguida apliquei o algoritmo de diferenças finitas em um modelo geológico em que estão representadas algumas das principais características geológicas da Sub-Bacia do Juruá, pertencente a Bacia paleozóica do Solimões, na região Amazônica. Esse modelo tem como principal característica o forte contraste de impedância acústica entre as camadas de sedimentos depositados durante a era Paleozóica e sedimentos do período Cretáceo. Derrames de diabásio estão presentes em toda a bacia do Solimões, datam do período Triássico, e estão intrudidas nos sedimentos do Paleozóico. A velocidade de propagação da onda compressional nas formações Paleozóicas é elevada, acima de 3500 m/s , quando comparada a velocidade de formações mais recentes como as do período Quaternário/Terciário e Cretácio (EIRAS, 1998), abaixo de 2500 m/s . Os dados resultantes da simulação apresentam fortes reflexões múltiplas de longo período, associadas a reverberação da energia entre a interface Paleozóico/Cretácio e a superfície livre. Devido ao forte contraste de impedância existente nessa faixa, 45% da

energia injetada pela fonte é aprisionada nessa região, no primeiro segundo de propagação. Outra característica da propagação neste modelo é o grande comprimento de onda do campo acústico nas regiões de alta velocidade em torno do reservatório. Este fato, resulta em baixa resolução espacial, dificultando a detecção direta do reservatório. As figuras mostradas a seguir foram geradas com um ganho na amplitude da ordem de cinco desvios-padrão, desse modo as informações contidas na região inferior dessas figuras por serem muito fracas não seriam visualizadas na escala normal de cores.

5.1 APLICAÇÃO I : MODELO MARMOUSI

Aplicuei os algoritmos de elementos finitos e diferenças finitas, no modelo Marmousi, Figuras 4.2 e 4.3, para comparar os resultados, com as disponíveis na literatura. Esse modelo reúne as principais características geológicas de uma bacia sedimentar africana (VERSTEEG, 1993). Utilizei como referência para comparação o trabalho de Versteeg (1993). Os resultados apresentados em Versteeg (1993) foram obtidos através da simulação de um experimento de aquisição de dados marinhos. Como resultado da modelagem numérica utilizando os dois algoritmos registrei seções de tiro comum e instantâneos do campo acústico em diferentes instantes da propagação. Comparei as seções de tiro comum resultante da modelagem com as seções correspondentes publicadas em Versteeg (1993).

Para reproduzir o experimento apresentado em Versteeg (1993), apliquei o algoritmo de DF sobre uma malha com dimensões de 767×243 pontos, regularmente amostrados com $h = 12 m$. Utilizei nas bordas laterais e inferior do modelo uma camada PML de largura $70h$. A condição de fronteira livre atua na superfície superior do modelo para os dois algoritmos.

Para o algoritmo de elementos finitos utilizei uma malha regular 1533×485 pontos, com espaçamento entre os nós $h = 6 m$. Camadas absorventes, do tipo PML, foram utilizadas nas bordas laterais e inferior, com espessura de $140h$. Elementos triangulares foram utilizados em toda região interior da malha de discretização e elementos quadrangulares para implementar as camadas absorventes.

Em todas as simulações, o tempo total de propagação foi $t = 2.9 s$, e o intervalo de amostragem foi $dt = 2 ms$. Utilizei fontes de injeção de volume com um pulso do tipo Ricker, de frequência dominante $f_d = 10 Hz$ e frequência máxima $f_{max} = 30 Hz$. As coordenadas da fonte nas três simulações efetuadas, foram $(6000 m; 25 m)$, $(7000 m; 25 m)$ e $(8000 m; 25 m)$.

Utilizei 96 receptores igualmente separados por uma distância horizontal $dx = 25 m$, sendo que a distância entre a fonte e o receptor mais próximo foi de $200 m$. Os receptores foram colocados a uma profundidade de $25 m$. Em um experimento real a fonte e os receptores estariam localizados a uma pequena profundidade, próximos da superfície. Isso não foi possível na simulação devido a discretização da malha. Para cada simulação realizada o algoritmo de diferenças finitas é da ordem de três vezes mais rápido que algoritmo de elementos finitos.

A Figura 5.3 mostra o campo de pressão registrado nas três seções de tiro comum simuladas por diferenças finitas. As setas na Figura 5.1 indicam os pontos de concordância entre os resultados obtidos pelo algoritmo de diferenças finitas e a Figura 2a, publicada em Versteeg (1993). As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam as componentes horizontal e vertical do campo de velocidade obtidos no experimento. As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam seções de tiro comum para campo de pressão e as componentes vertical e horizontal do campo de velocidade simulados através do algoritmo EF.

As Figuras 5.7 à 5.10 mostram instantâneos da componente vertical do campo de velocidade propagando-se através do modelo, a fonte está na posição $(6000 m; 25 m)$. Observa-se toda a complexidade do campo de onda resultante do espalhamento da energia acústica em interfaces, falhas e cunhas difratoras. Adicionalmente observa-se a variação na largura das perturbações associadas as variações na velocidade de propagação. O alargamento da frente de onda com o aumento da profundidade reflete o correspondente aumento na velocidade de propagação. Na Figura 5.10 observa-se forte variação na amplitude da frente de onda, resultante da focalização da energia acústica produzida pelas heterogeneidades. Este fenômeno produz diferenças na iluminação dos refletores em subsuperfície, dificultando o imageamento sísmico.

A coincidência das seções sísmicas simuladas com as seções apresentadas em Versteeg (1993), simuladas utilizando outra implementação, reforça a validação dos algoritmos DF e EF implementados neste trabalho.

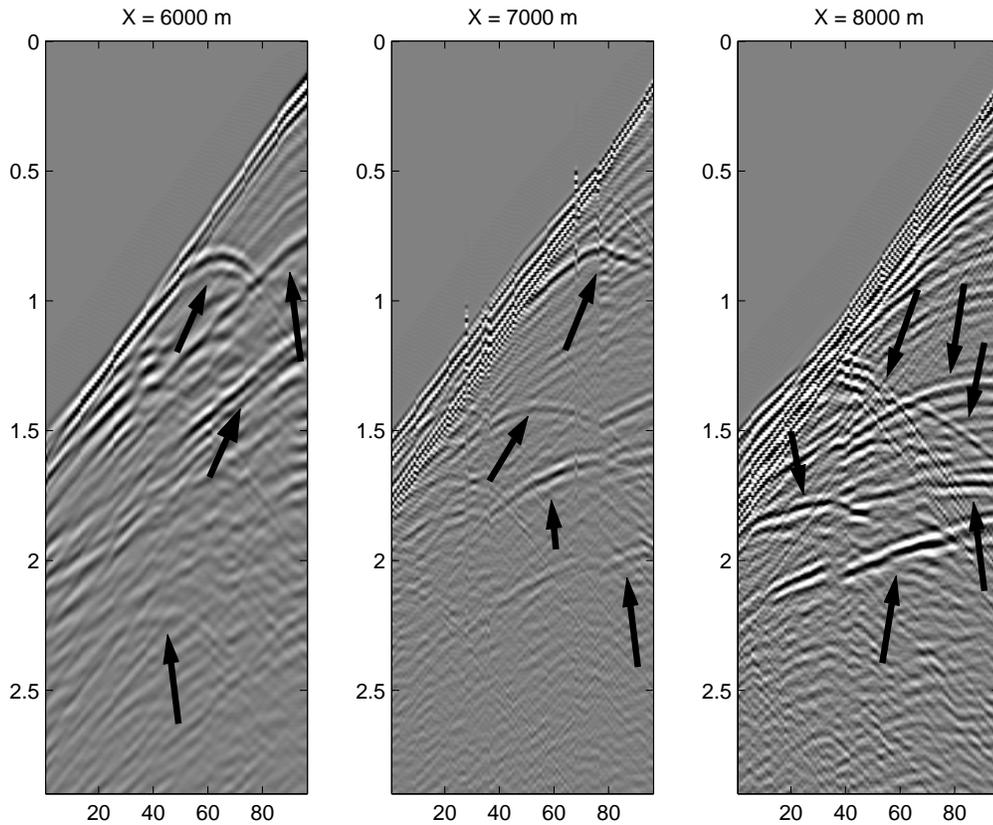


Figura 5.1: A figura mostra o campo de pressão gerado pelo algoritmo DF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. As fontes foram posicionadas nas coordenadas 6000 m 7000 m e 8000 m ao longo do eixo x_1 . As setas destacam os eventos mais representativos, que coincidem com a seção publicada em Versteeg (1993).

5.2 APLICAÇÃO II : MODELO GEOLÓGICO SINTÉTICO DA BACIA PALEOZÓICA DO SOLIMÕES

A Bacia Paleozóica do Solimões, localizada no Estado do Amazonas, estende-se por cerca de 400.000 km^2 . A Bacia está limitada ao sul e ao norte pelos escudos Brasileiro e das Guianas, respectivamente. Seu limite oeste é o Arco de Iquitos, e o limite leste se dá no Arco de Purus. Dentro desta bacia, podem ser distinguidas as sub-bacias do Jandiatuba e a do Juruá, separadas pelo Alto de Carauari. A Sub-bacia do Juruá é bem mais conhecida, em função da intensa pesquisa para petróleo desenvolvida pela PETROBRÁS a partir de 1978, com a perfuração de 109 poços e o registro de 56.000 km de linhas sísmicas (EIRAS, 1998). As Figuras 5.11 e 5.12 apresentam respectivamente os modelos de velocidade e densidade,

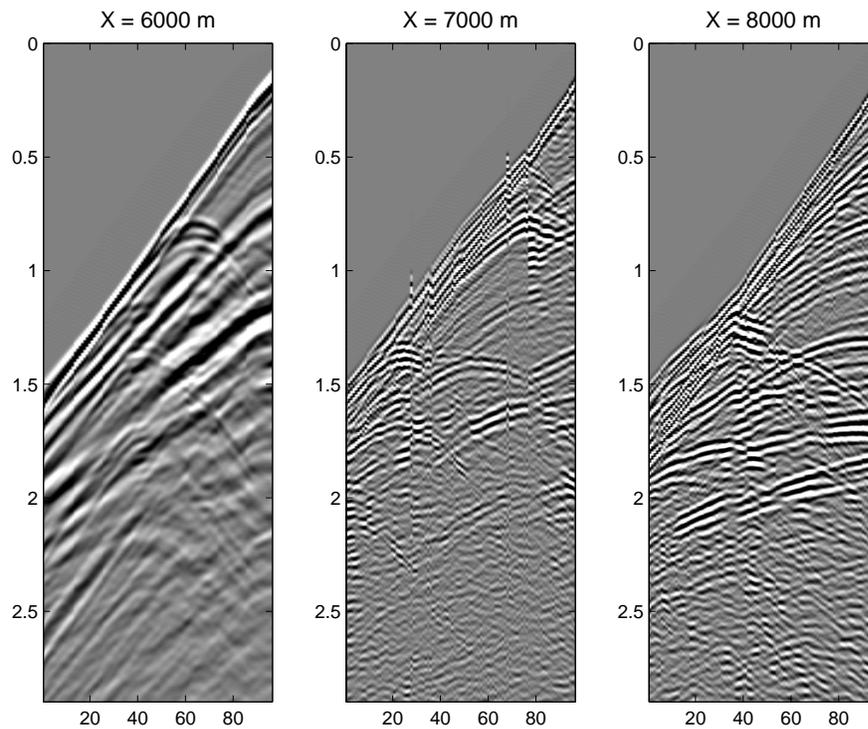


Figura 5.2: As figuras mostram a componente vertical da velocidade geradas pelo algoritmo DF. Verifica-se que a qualidade das seções é semelhante a apresentada na Figura 5.1. É possível verificar também os mesmos eventos apresentados em Versteeg (1993).

em que se buscou representar as principais características geológicas existente na Sub-bacia do Juruá. O modelo está constituído das camadas descritas a seguir (EIRAS, 1998). A primeira camada (azul intenso) modela as deposições de sedimentos que datam dos períodos Quaternário e Terciário (menos de 70 milhões de anos) , nessa camada as velocidades são da ordem de 1600 a 2000 m/s . A segunda e a terceira camada (azul claro e verde) simulam as deposições de sedimentos que datam do período Cretáceo(entre 70 e 150 milhões de anos), nessa camada as velocidades variam entre 2500 a 4000 m/s . As camadas em vermelho intenso representam derrames de diabásio ocorridas no período Triássico (entre 200 e 250 milhões de anos), essas camadas possuem velocidades da ordem de 6000 m/s . A região em vermelho claro e a parte superior da região em laranja representam as rochas da era Paleozóica (entre 250 e 550 milhões), e a camada em amarelo constituem a área de maior interesse na Bacia. As rochas geradoras e as rochas reservatório são encontradas nessa área. A última camada representada pela parte inferior da região laranja constitui as rochas geradoras e as rochas reservatório do Paleozóico, a baixo as rochas do Proterozóico (entre 550 milhões e 2.5 bilhões de anos) sobre as quais a bacia se formou. Os derrames de diabásio ocorridos no período

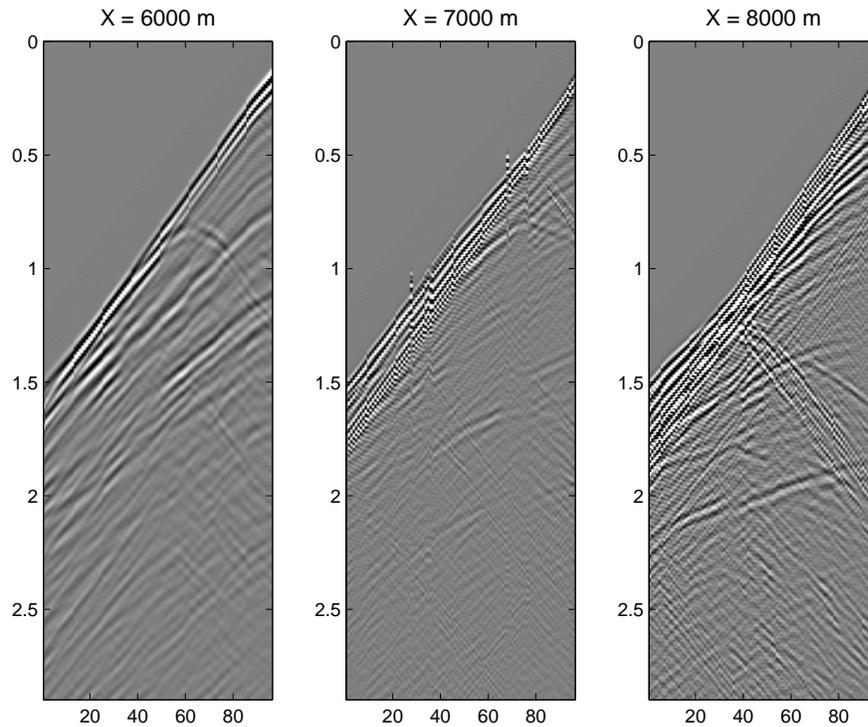


Figura 5.3: As figuras mostram a componente horizontal do campo de velocidade, gerada pelo algoritmo DF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. Verifica-se que as seções sísmicas registradas não possuem a mesma resolução que as apresentadas nas figuras anteriores, isso está associado a forte gradiente lateral de velocidade existente no modelo e a complexidade estrutural existente na direção x_1 . Esquemas de altas ordens não apresentam um bom resultado nessas situações como já foi mostrado em uma seção anterior.

Triássico provocaram a transformação do óleo contido nos reservatórios em gás natural, o que justifica o imenso volume de gás existente na Sub-bacia do Juruá (EIRAS, 1998) .

Produzi três seções sísmicas tiro-comum em pontos representativos do modelo. Utilizei uma fonte explosiva, com um pulso do tipo Ricker com frequência dominante de 10Hz. Em cada uma das seções a fonte foi posicionada nas coordenadas $(5000\text{ m}; 20\text{ m})$, $(7000\text{ m}; 20\text{ m})$ e $(9000\text{ m}; 20\text{ m})$, respectivamente. Esses pontos foram escolhidos por estarem ao redor das falhas geológicas que limitam o reservatório (EIRAS, 1998).

Utilizei dois conjuntos de receptores dispostos simetricamente em relação a fonte, arranjo *split-spread*, contendo 50 receptores em cada um. A distância mínima entre fonte e receptor é de 200 m e o espaçamento entre receptores é de 20 m . O intervalo de amostragem no tempo em cada receptor é de 2 ms .

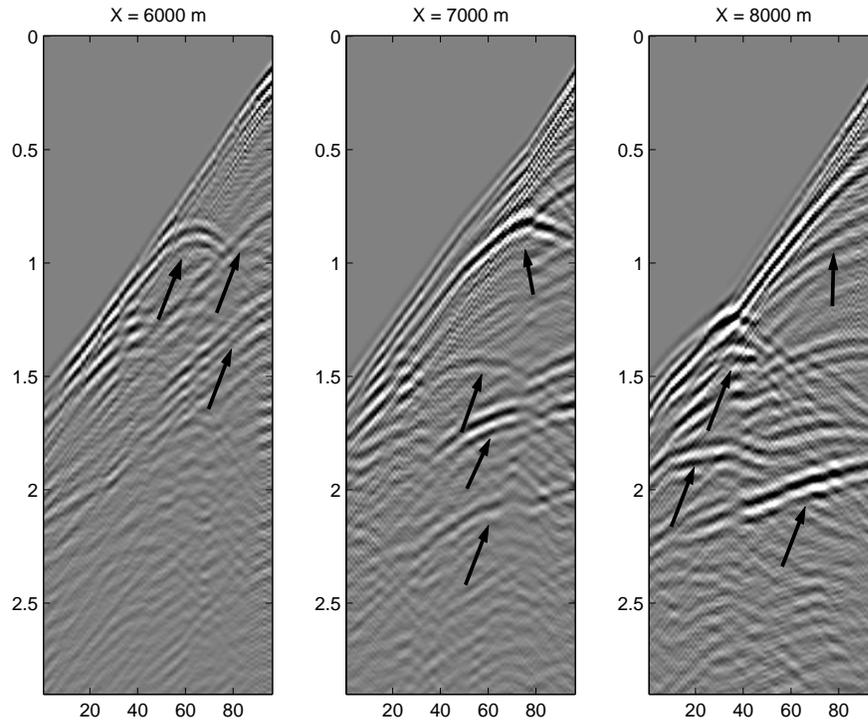


Figura 5.4: A figura mostra o campo de pressão gerado pelo algoritmo EF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. As fontes foram posicionadas nas coordenadas 6000 m , 7000 m e 8000 m ao longo do eixo x_1 . As setas destacam os eventos mais representativos, coincidentes com os eventos em Versteeg (1993).

Para a modelagem utilizando diferenças finitas, o modelo foi discretizado em uma malha regular de 401×1401 pontos, com $h = 10\text{ m}$. Camadas absorventes foram aplicadas nas laterais e na porção inferior da malha. A espessura das camadas absorventes foi de $60h$, que corresponde ao maior comprimento de onda associado a frequência dominante do pulso sísmico. Na borda superior do modelo foi utilizada, uma condição de fronteira livre, tanto para o método de diferenças finitas quanto para o método de elementos finitos.

A modelagem por elementos finitos foi realizada sobre uma malha regular de 801×2801 , com $h = 5\text{ m}$. Essa malha foi composta de células triangulares na região interior, e células retangulares nas bordas. Utilizei camadas absorventes com $200h$ de espessura, nas bordas laterais e inferior do modelo, este valor corresponde a uma vez e meia o maior comprimento de onda associado a frequência dominante do pulso sísmico.

As Figuras 5.13, 5.14 e 5.15, apresentam as seções sísmicas de tiro comum para o campo de pressão e as componentes vertical e horizontal da velocidade, resultantes da modelagem

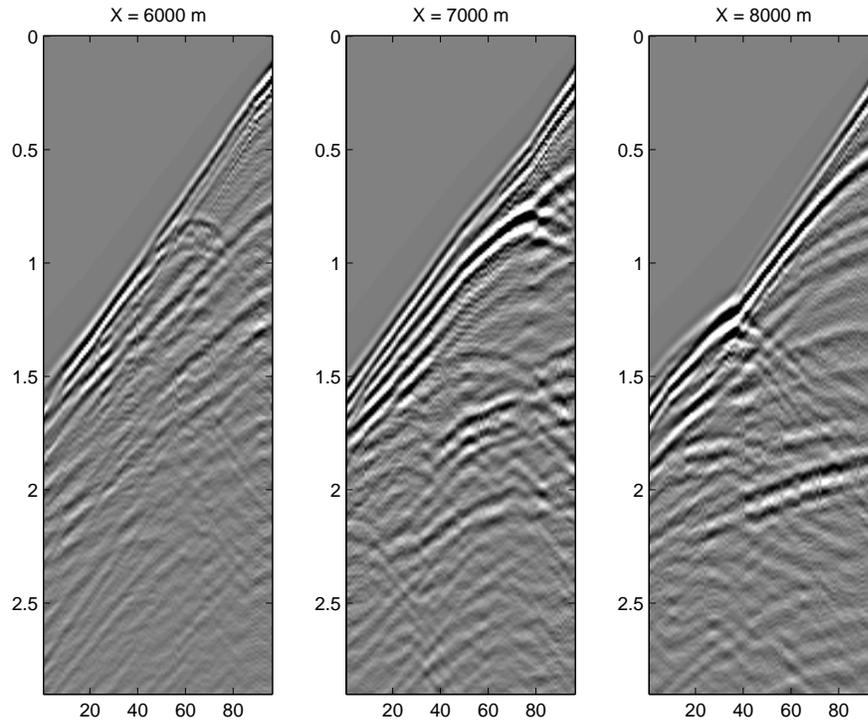


Figura 5.5: As figuras mostram a componente vertical da velocidade geradas pelo algoritmo EF. Verifica-se que a qualidade das seções é semelhante a apresentada na Figura 5.4. É possível verificar também os mesmos eventos apresentados em Versteeg (1993).

por diferenças finitas. As seções sísmicas correspondentes, calculadas por elementos finitos são apresentadas nas Figuras 5.16, 5.17 e 5.18.

A Figura 5.13 destaca alguns eventos de maior amplitude nas seções. A seta A identifica a reflexão da frente de onda na discordância entre a camada que representa o Terciário-Quaternário e a camada representando os sedimentos do Cretáceo. A identificação deste evento fica mais evidente na Figura 5.19, um instantâneo da componente vertical do campo de velocidade, mostra que esta é a primeira reflexão sofrida pela da frente de onda. A seta B (Figura 5.13) indica o evento de difração que pode ser mais facilmente identificado na Figura 5.19, resultante do pequeno rejeito na interface entre Terciário-Quaternário e o Cretáceo. A forte reflexão indicada pela seta C (Figura 5.13), corresponde a reflexão na interface de maior contraste de impedância no modelo, a qual representa a discordância entre os sedimentos do Cretáceo e a soleira de diabásio no topo dos sedimentos Paleozóicos. Este evento pode ser identificado na Figura 5.19. A superfície livre a discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico produzem fortes reverberações da energia acústica entre estas interfaces. Estes eventos produzem como múltiplas de longo período de forte amplitude em

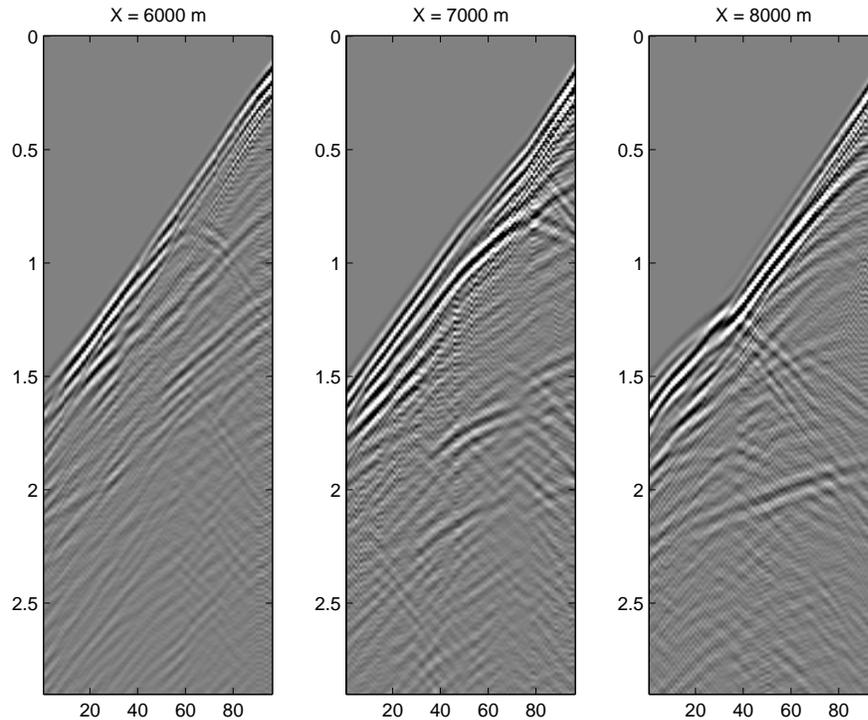


Figura 5.6: As figuras mostram a componente horizontal do campo de velocidade, gerada pelo algoritmo EF. O eixo horizontal representa o índice dos receptores e o vertical o tempo total de propagação do campo acústico. Verifica-se que as seções sísmicas registradas possuem a mesma resolução que as apresentadas anteriormente para o algoritmo EF. O esquema EF por utilizar uma malha mais densa e utilizar células que se ajustam melhor às estruturas do modelo, não apresenta problemas com relação aos gradientes de velocidade existentes na direção x_1 .

relação as amplitudes das reflexões nas interfaces mais profundas. As setas D e E (Figura 5.13) identificam duas destas múltiplas. Na Figura 5.20 é possível verificar a frente de onda que refletiu na discordância entre o Terciário-quaternário e o Cretáceo, foi novamente refletida na superfície livre reincidindo na discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico, este evento está indicado na Figura 5.13 pela seta D. O evento indicado pela seta E (Figura 5.13), indica a primeira múltipla entre a superfície livre a discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico. Observa-se nas seções modeladas que estas múltiplas de longo período são registradas durante todo o intervalo de 2 s, no qual a propagação é modelada, mascarando os registros de reflexões associadas as interfaces da região próxima ao reservatório. Medindo a distribuição de energia do campo acústico 1s após a ativação da fonte (Figura 5.21), verifiquei que 45% da energia total injetada pela fonte está aprisionada nessa região. O instantâneo do campo acústico após 2 s da ativação da fonte, apresentado na Figura 5.22 mostra com mais destaque a intensidade

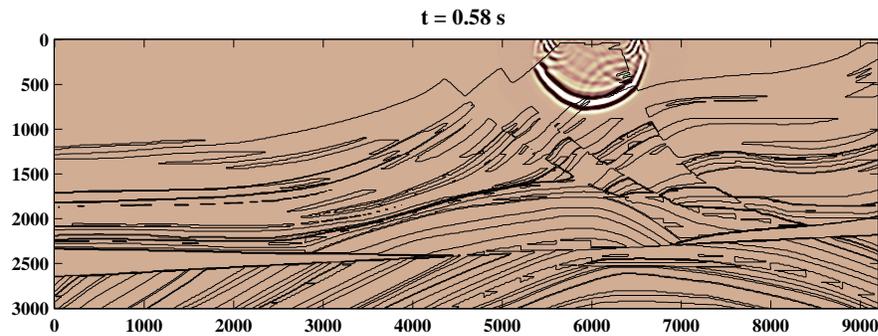


Figura 5.7: A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se através do modelo no instante $t = 0.58 s$. Nessa figura é possível identificar uma reflexão em uma estrutura no ponto de coordenadas $(6500 m; 500 m)$. Esse evento foi registrado no sismograma por volta do instante $0.9 s$.

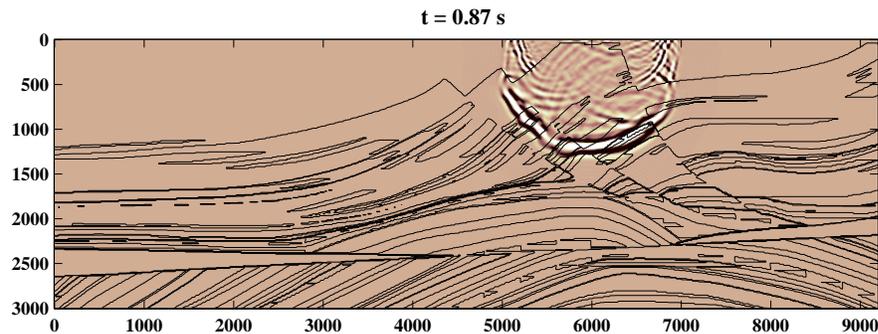


Figura 5.8: A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se no instante $0.87 s$. Verifica-se a frente de onda incidente nas falhas geológicas do modelo. Essa é uma região de grande complexidade dn modelo.

das reverberações entre a superfície livre e a discordância Cretáceo/Paleozóico.

Uma característica da propagação neste modelo é o grande comprimento de onda do campo acústico nas regiões de alta velocidade em torno do reservatório, como indicam as Figuras 5.20, 5.21 e 5.22. Particularmente, a Figura 5.20 mostra que o comprimento de onda é da ordem de três vezes maior que a espessura da camada reservatório. Outro ponto a destacar é o pequeno contraste de impedância entre a rocha encaixante e a rocha reservatório. A Figura 5.21 indica este fato ao se observar que a reflexão nesta camada possui amplitude muito pequena em relação ao sinal transmitido.

Os resultados acima demonstram a utilidade e acuidade dos dois algoritmos implementados para modelagem sísmica. Particularmente sem as camadas perfeitamente absorventes a modelagem da Sub-Bacia do Juruá estaria comprometida, pois devido a alta velocidade

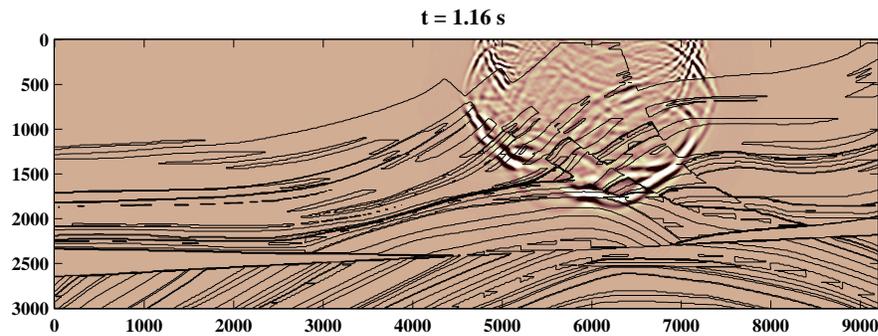


Figura 5.9: A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se no instante $t = 1.16 s$. A frente de onda incide sobre um domo localizado na entre os ponto $(6000 m; 2000 m)$. Esse evento é representado intensamente nas seções sísmicas por volta do instante $2.3 s$.

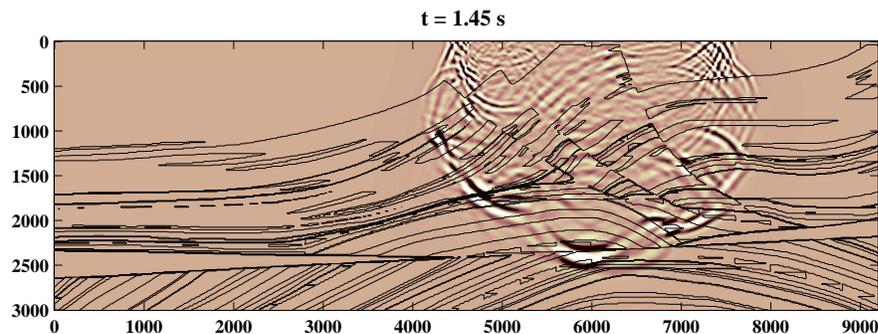


Figura 5.10: A figura apresenta o campo de velocidade vertical propagando-se no instante $t = 1.45 s$. A frente de onda incide sobre um domo que constitui o topo de um reservatório no ponto de coordenadas $(6500 m; 2500 m)$ (VERSTEEG, 1993). Esse evento aparece fracamente nas seções por volta de $2.8 s$, não é possível distingüi-lo dos demais devido a grande quantidade de reflexões múltiplas registradas nesse instante.

na região inferior do modelo, o sinal atinge rapidamente as bordas. A condição de fronteira livre implementada não apresentou erros de dispersão numérica e possibilitou a modelagem correta das fortes múltiplas de longo período, eventos importantes para avaliar métodos de processamento e imageamento em Bacias Paleozóicas na Amazônia.

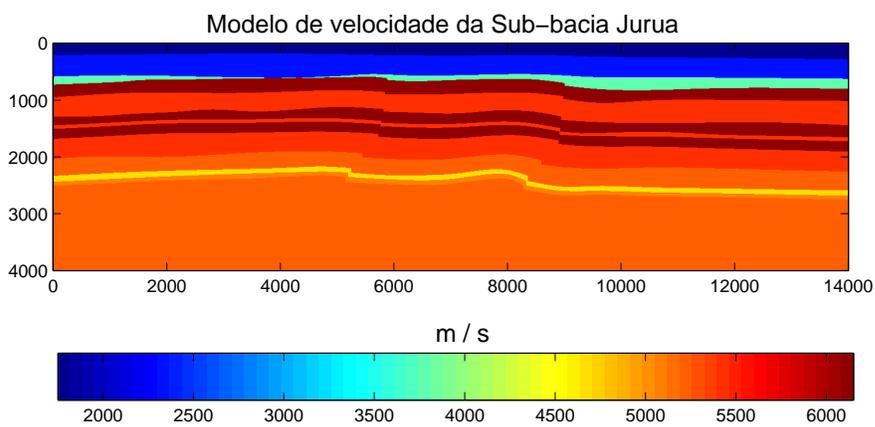


Figura 5.11: Modelo de velocidade da seção geológica da Sub-bacia do Juruá. Algumas das principais características estruturais foram representadas neste modelo.

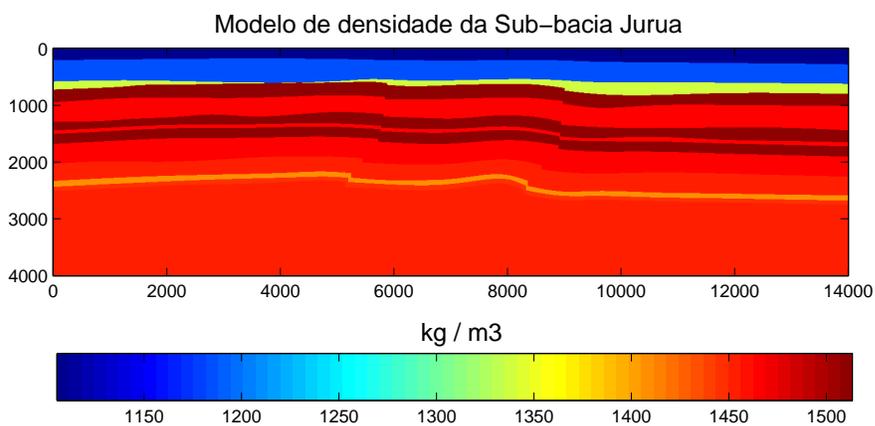


Figura 5.12: Modelo de densidade da seção geológica da Sub-bacia do Juruá pertencente a Bacia paleozóica do Solimões.

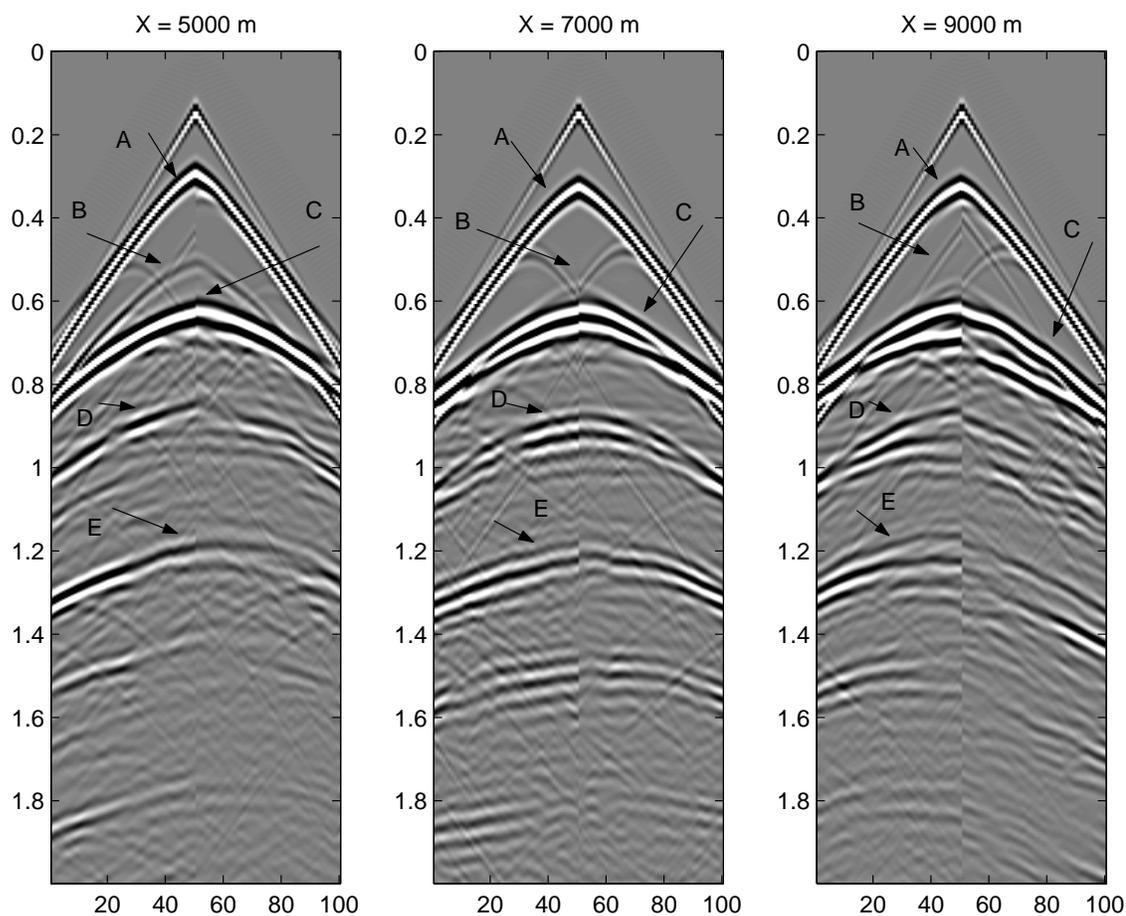


Figura 5.13: Seções sísmicas com os registros do campo de pressão gerados pelo algoritmo de diferenças finitas, em que os eventos de maior amplitude são destacados. A seta A identifica a reflexão da frente de onda na discordância entre a camada que representa o Terciário-Quaternário e a camada representando os sedimentos do Cretáceo. A seta B indica o evento de difração que pode ser mais facilmente identificado da Figura 5.19, resultante do pequeno rejeito na interface entre Terciário-Quaternário e o Cretáceo. A seta C corresponde a reflexão de grande amplitude na interface de maior contraste de impedância no modelo, a qual representa a discordância entre os sedimentos do Cretáceo e a soleira de diabásio no topo dos sedimentos Paleozóicos. As setas D e E identificam duas das várias reflexões múltiplas registradas. Devido a grande quantidade de múltiplas não é possível distinguir as reflexões nas interfaces em profundidade.

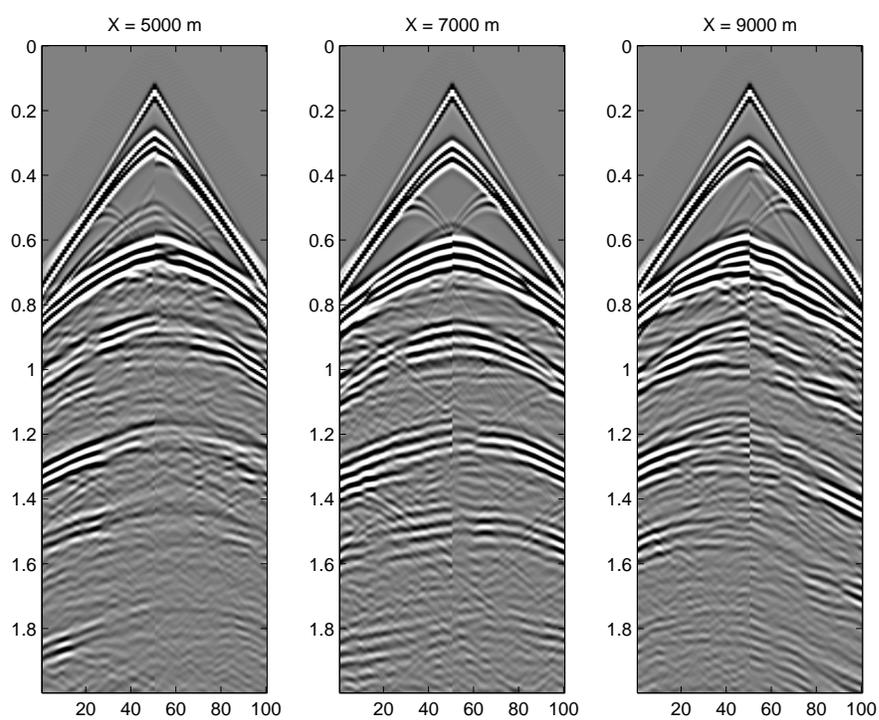


Figura 5.14: Seções sísmicas com os registros da componente vertical do campo de velocidade modelada pelo algoritmo de diferenças finitas. É possível verificar os eventos coincidentes com os apresentados na Figura 5.13.

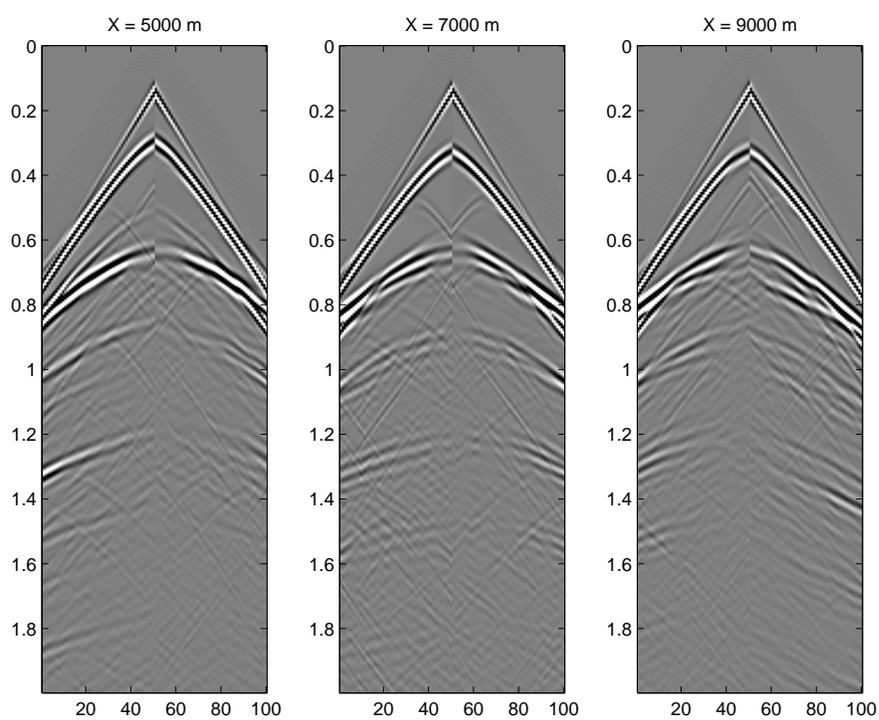


Figura 5.15: Seções sísmicas com os registros da componente horizontal da velocidade modelada pelo algoritmo de diferenças finitas. É possível verificar os eventos coincidentes com os apresentados na Figura 5.13.

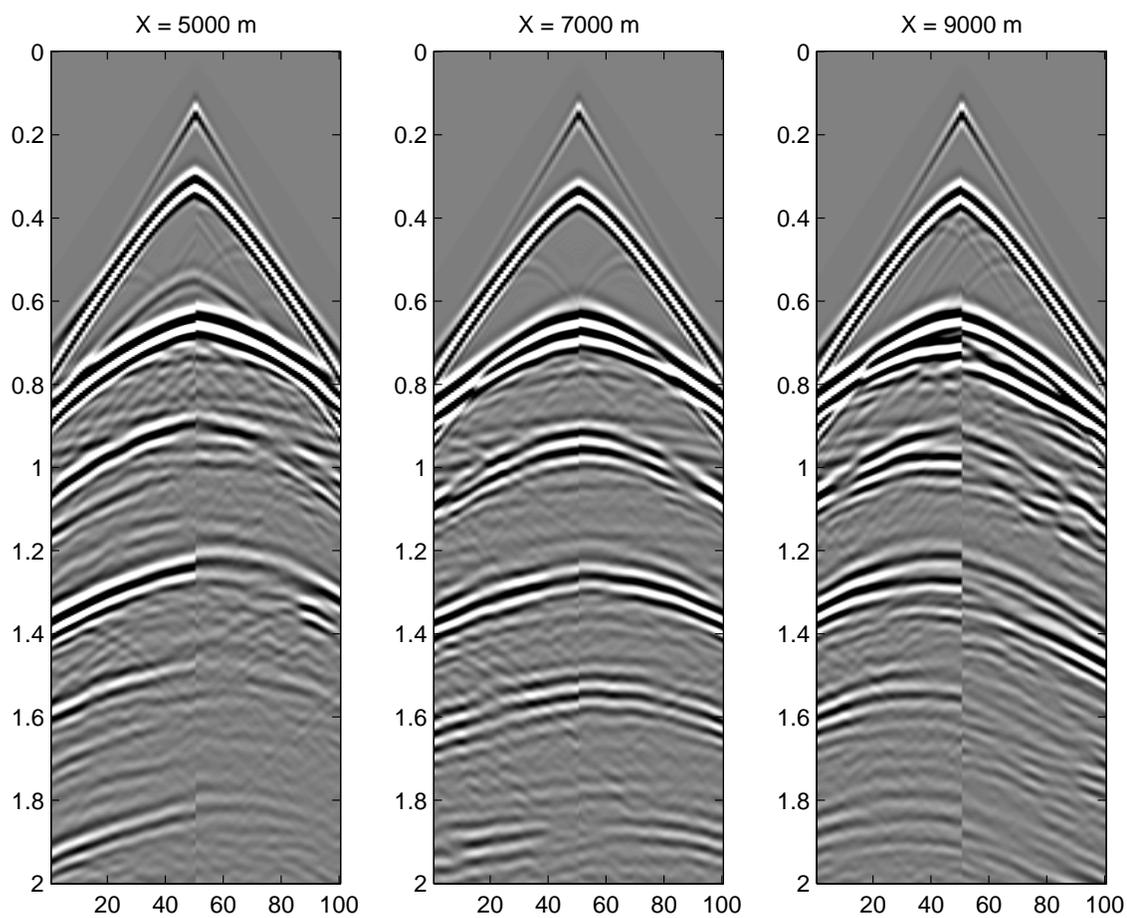


Figura 5.16: Seções sísmicas com os registros do campo de pressão modelado pelo algoritmo de elementos finitos. Os eventos de maior amplitude destacados na Figura 5.13, podem ser encontrados nitidamente nos sismogramas produzidos pelo algoritmo de elementos finitos.

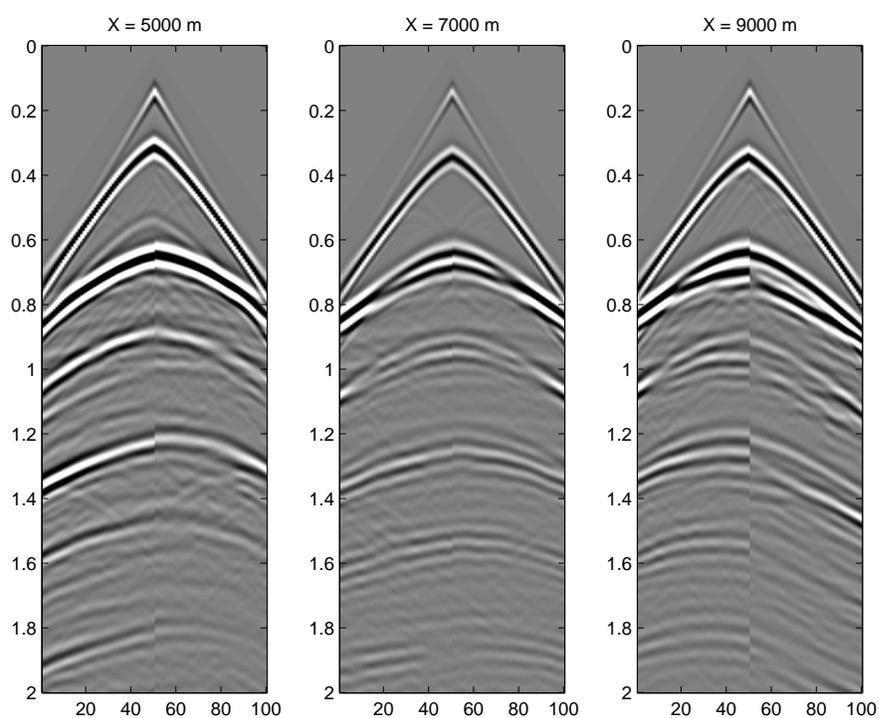


Figura 5.17: Seções sísmicas com os registros da componente vertical do campo de velocidade modelado pelo algoritmo de elementos finitos. Verifica-se a grande semelhança com a Figura 5.15 em que é apresentada o componente vertical modelada por diferenças finitas.

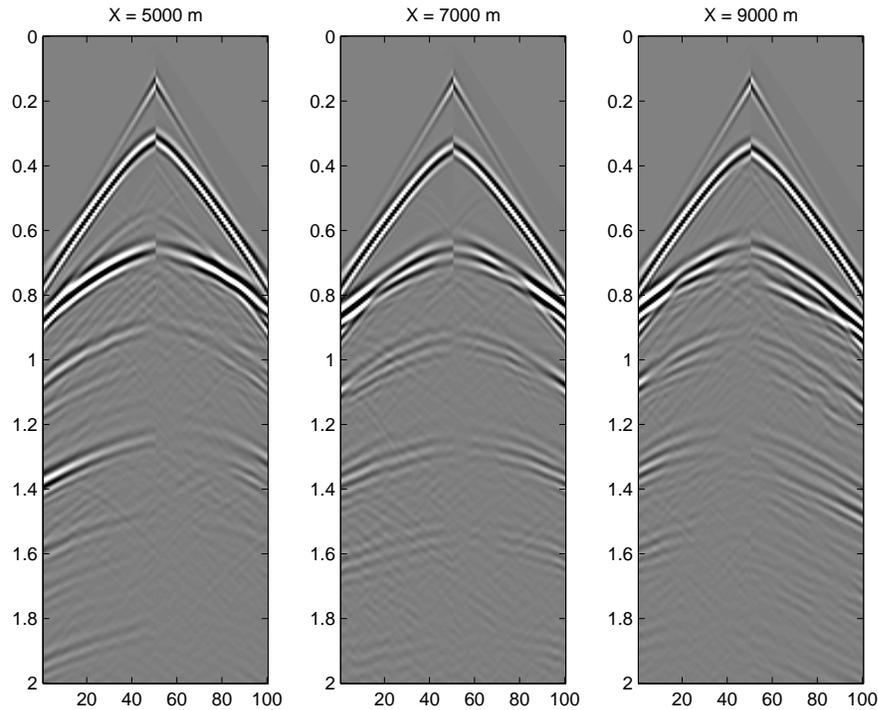


Figura 5.18: Seções sísmicas com os registros da componente horizontal do campo de velocidade modelado pelo algoritmo de elementos finitos. Verifica-se a grande semelhança com a Figura 5.16 em que é apresentado o componente modelado por diferenças finitas.

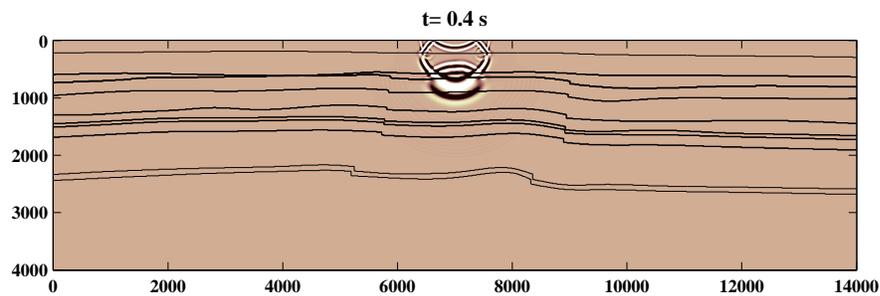


Figura 5.19: Nesta figura verifica-se a reflexão da frente de onda na discordância entre o Terciário-Quaternário e o Cretáceo indicada na Figura 5.13 pela letra A. É possível identificar também uma difração em um pequeno rejeito sobre essa discordância, indicado na Figura 5.13, pela letra B. É visível nessa figura a forte reflexão sobre a discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico, o registro dessa reflexão é destacado na Figura 5.13 pela letra C. Verifica-se na parte superior do modelo que a onda incidente na superfície livre não sofreu inversão de fase, diferente do que acontece com a onda que reflete na discordância que sofre inversão de fase devido a fronteira rígida. Isso garante que essa condição de fronteira livre foi corretamente implementada.

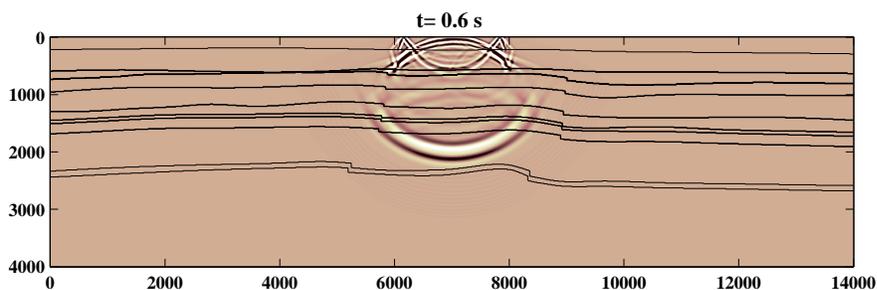


Figura 5.20: A figura mostra que o comprimento de onda na região do Paleozóico é da ordem de três vezes maior que a espessura da camada reservatório. Outro ponto a destacar é o pequeno contraste de impedância entre a rocha encaixante e a rocha reservatório, visto que aparentemente a frente de onda não sofre desvios.

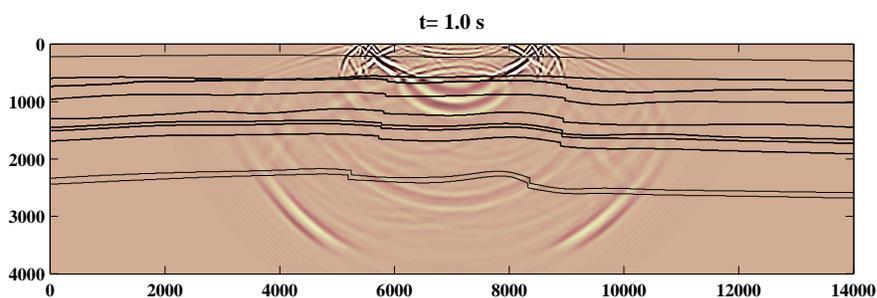


Figura 5.21: Esta figura mostra que a reflexão na camada reservatório na região do Paleozóico possui amplitude muito pequena em relação ao sinal transmitido.

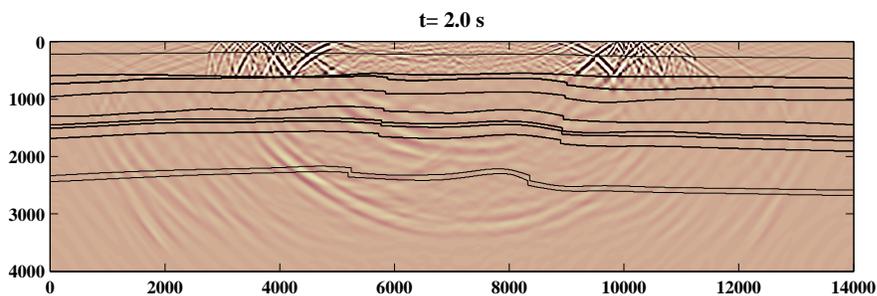


Figura 5.22: A figura mostra instantâneo do campo acústico após 2 s da ativação da fonte. Verifica-se que a intensidade das reverberações entre a superfície livre e a discordância entre o Cretáceo e o Paleozóico, ainda é considerável. É visível na parte inferior e nas laterais do modelo que a frente de onda desaparece ao incidir nas bordas garantido desse modo que a fonte absorvente foi corretamente implementada.

6 CONCLUSÃO

Apresentei nesta dissertação duas abordagens utilizadas para modelar a propagação do campo acústico em um meio 2-D, o método de elementos finitos *lumped mass*, e o método de diferenças finitas de alta ordem. Apresentei a extensão do método de diferenças finitas de alta ordem para 2,5-D em meios com densidade variável.

Para todos os algoritmos implementados foram determinadas as condições de estabilidade e as relações de dispersões sobre a malha de discretização. Todos os algoritmos foram validados em meios homogêneos e os erros de amplitude e fase foram quantificados abaixo de 0,15%. Adicionalmente, em meios heterogêneos, verifiquei que as relações de reciprocidade do campo acústico são obedecidas com grande acuidade pelos dois algoritmos. As condições de fronteira livre a fronteiras absorventes foram implementadas para elementos finitos e diferenças finitas. Para obter-se atenuação da energia da ordem de 40dB é camadas absorventes com largura de um comprimento de onda, medido em relação a frequência dominante no pulso sísmico. Estes resultados indicam que os dois algoritmos são eficazes para modelagem acústica.

Os dois algoritmos se diferenciam em relação a eficiência computacional. Métodos de DF de alta ordem permitem a discretização do modelo em malhas mais esparsas que as malhas utilizadas em métodos de DF de baixa ordem e no método EF apresentado. Nos experimentos efetuados, esta redução é da ordem de 75%. Métodos de DF de alta ordem permitem especificar a fonte em um único nó da malha sem que ocorra dispersão numérica, o que não acontece em esquemas de baixa ordem, a fonte precisa ser especificada em uma região sobre a malha, o que afeta o espectro do sinal modelado. Entretanto, em meios com fortes contrastes de impedância e maior complexidade estrutural, uma malha esparsa pode ser insuficiente para acomodar a geometria das interfaces e pode ocasionar difrações espúrias. Esquemas de diferenças alta ordem são exigentes em relação a condição CFL. Valores de μ menores que 0.5 são necessários para minimizar a dispersão numérica, o que implica em

menores valores para dt e, conseqüentemente, um maior número de iterações. Esta limitação pode ser contornada utilizando esquemas de integração de alta ordem no tempo (CARCIONE et al., 2002). De modo geral, esquemas DF de alta ordem apresentam uma performance superior a dos esquemas EF.

A aplicação dos dois algoritmos no modelo Marmousi (VERSTEEG, 1993), mostrou que as seções de tiro comum modeladas reproduzem os resultados publicados e apresentam maior resolução. Este fato decorre de uma escolha conservadora para o número CFL que garantiu baixa dispersão numérica o que eliminou a necessidade de filtragem dos dados após a modelagem.

A simulação acústica no modelo da Bacia do Solimões, mostrou que para esse modelo o contraste de impedância acústica entre a discordância Cretáceo-Paleozóico, gera fortes reflexões múltiplas de longo período, e reduz a energia disponível para iluminar o reservatório. A alta velocidade das formações Paleozóicas implica em comprimentos de onda maiores que a espessura da rocha reservatório. Adicionalmente o fraco contraste de impedância entre a rocha reservatório e o meio encaixante, faz com que a amplitude da onda refletida seja muito pequena. A combinação destes fatores praticamente impossibilita a detecção direta do reservatório. Entretanto, a modelagem acústica contém a assinatura das falhas e do padrão estrutural da região próxima ao reservatório. Os dados sintéticos da modelagem acústica podem, portanto, ser utilizados para aferir o processamento e o imageamento de dados sísmicos neste tipo de ambiente. Particularmente, a implementação do algoritmo de DF de alta ordem para 3-D, que é imediata a partir da discussão apresentada nesta dissertação, vai permitir obter um conjunto de dados importante para avaliar o processamento e imageamento sísmico nesse tipo de ambiente.

Finalmente, é importante destacar que a modelagem acústica apresenta limitações importantes na simulação da propagação de ondas em Bacias Paleozóicas na Amazônia. Alguns fenômenos importantes para se modelar são:

- A conversão de ondas P para S na discordância Cretáceo-Paleozóica;
- A resolução de ondas S, de menor comprimento de onda, na região do reservatório;

- O efeito do manto de intemperismo, zona de baixa velocidade, na atenuação das múltiplas de longo período;
- O efeito de atenuação associado a zonas de intenso fraturamento das soleiras de diabásio próximas a interface com o Cretáceo;
- O efeito das geometrias das soleiras no espalhamento da energia elástica em 3-D.

REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. G. *Quantitative seismology*. [S.l.]: W. H. Freeman & Co., 1980.
- ALFORD, R. M.; KELLY, K. R.; BOORE, D. M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, v. 39, n. 6, p. 834–842, dezembro 1974.
- BERENGER, J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, v. 111, n. 114, p. 185–200, 1994.
- CAO, S.; GREENHALGH, S. 2.5-d modeling of seismic wave propagation: Boundary condition, stability criterion, and efficiency. *Geophysics*, v. 63, n. 6, p. 2082–2090, setembro-outubro 1998.
- CARCIONE, J. M.; HERMAN, G. C.; KROOD, A. P. E. Y2k review article, seismic modeling. *Geophysics*, v. 67, n. 4, p. 1304–1325, julho-agosto 2002.
- CHEW, W. C.; LIU, H. Q. Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition. *J. Comput. Acous.*, v. 4, n. 4, p. 72–79, 1996.
- EIRAS, J. Tectônica sedimentação e sistemas petrolíferos da Bacia do Solimões In: *SEARCHING for Oil and Gas in the Land of Giants*. [S.l.]: Schlumberger Ed., 1998.
- FOKKEMA, J. *The acoustic reciprocity theorem and its applications in geophysics*. PPPG-UFBA, 1988.
- GARDNER, G. H. F.; GARDNER, L. F.; GREGORY, A. F. Formation velocity and density—the diagnostic basis for stratigraphic traps. *Geophysics*, v. 39, n. 6, p. 770–780, dezembro 1974.
- HOLBERG, O. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophys. prosp.*, v. 37, p. 629–655, 1987.
- HOOP, A. D.; STAM, H. J. Time-domain reciprocity theorems for elastodynamics wave fields in solids with relaxation and their application to inverse problems. *Wave Motion*, v. 10, p. 479–489, 1988.
- ISERLES, A. *A first course in the numerical analysis of differential equation*, Cambridge Texts in Applied Mathematics. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- JO, C. H.; SHIN, C.; SUH, J. H. An optimal 9-point finite-difference frequency-space 2-d scalar wave extrapolator. *Geophysics*, v. 61, p. 529–537, 1987.

- KARRENBACH, M. *Elastic Tensor Wave Fields*. Tese — Depto. of Geophysics, Stanford University, 1995.
- LEVANDER, A. R. Fourth-order finite-difference p-sv seismograms. *Geophysics*, v. 53, n. 11, p. 1425–1436, 1988.
- LINER, C. L. Theory of a 2.5-d acoustic wave equation for constant density media. *Geophysics*, v. 56, p. 2114–2117, 1991.
- MITTET, R. Free-surface boundary condition for elastic staggered-grid modeling schemes. *Geophysics*, v. 67, n. 5, p. 1616–1623, setembro-outubro 2002.
- MUIR, F.; DELLINGER, J.; NICHOLS, D. Modeling elastic fields across irregular boundaries. *Geophysics*, v. 57, n. 9, p. 1189–1193, setembro-outubro 1992.
- NOVAIS, A.; SANTOS, L. T. 2.5-d finite-difference solution of the acoustic wave equation. *Geophysical Prospecting*. Aceito para publicação. 2004.
- PRATT, R. G.; WILLIAMSON, P. R. A critical review of acoustic wave modeling procedures in 2.5-d dimension. *Geophysics*, v. 60, n. 2, p. 591–595, setembro-outubro 1995.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes the art of scientific computing (FORTRAN version)*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.
- SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods*. [S.l.]: Clarendon Press, 1985.
- SONG, Z.; WILLIAMSON, P. R. Frequency-domain acoustic-wave modeling and inversion of crosshole data: Part i— 2.5-d modeling method. *Geophysics*, v. 60, n. 3, p. 784–795, 1995.
- VERSTEEG, R. Sensivity of prestack depth migration to the velocity model. *Geophysics*, v. 58, n. 6, p. 873–882, junho 1993.
- VIRIEUX, J. P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, v. 51, p. 889–901, 1986.
- YEE, K. S. Numerical solution of initial boundary values problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, v. 14, p. 302–307, 1966.
- ZENG, Y. Q.; HE, J. Q.; LIU, Q. H. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, v. 66, n. 4, p. 1258–1266, julho-agosto 2001.
- ZHANG, J.; VERSCHUUR, D. J. Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method. *Geophysics*, v. 67, n. 2, p. 1258–1266, julho-agosto 2002.
- ZHOU, B.; GREENHALGH, S. A. Composite boundary-valued solution of the 2.5-d green's function for arbitrary acoustic media. *Geophysics*, v. 63, n. 5, p. 1813–1823, julho-agosto 1998.

ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method*. [S.l.]: McGraw Hill Book Co, 1977.

APÊNDICES

APÊNDICE A - APROXIMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ACÚSTICO POR DIFERENÇAS FINITAS

A.1 Discretização da equação

A seguir as equações (2.1) e (2.2) são apresentadas em sua forma discretizada. Os operadores diferenciais foram substituídos por operadores de diferenças definidos em (2.3), portanto:

$$D_t^+ v_1^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},k} = -\frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2},k}} \left(D_1^+ P^n_{i,k} + f_{1,i+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$D_t^+ v_3^{n-\frac{1}{2}}_{i,k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\rho_{i,k+\frac{1}{2}}} \left(D_1^+ P^n_{i,k} + f_{3,i,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$D_t^- P^{n+1}_{i,k} = -\kappa_{i,k} \left(D_1^- v_1^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},k} + D_3^- v_3^{n-\frac{1}{2}}_{i,k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.3})$$

em que o campo de pressão está amostrado nos pontos de coordenadas $x_1 = ih$ e $x_3 = kh$, e nos instantes $t = ndt$. O índice n corresponde ao instante em que a amostragem foi realizada. Neste esquema de diferenças tanto a discretização espacial quanto temporal são regulares, e correspondem a h e dt respectivamente. Verifica-se na Figura A.1, os pontos dentro da malha nos quais são aplicados os operadores de diferenças.

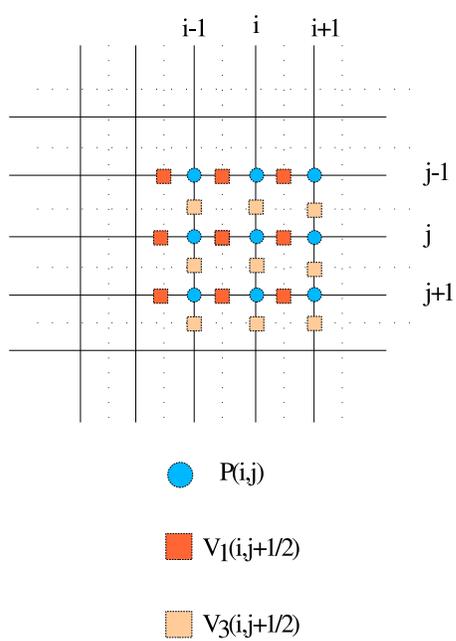


Figura A.1: Malha intercalada na qual são definidas as propriedades físicas.

A.2 Cálculo dos operadores de diferenças

O cálculo dos operadores de diferenças finitas de ordem $2N$ que aproximam a primeira derivada foi efetuado exigindo que o operador de diferenças seja exato para polinômios de ordem menor que $2N$ (ISERLES, 1996).

Na dedução da expressão para os coeficientes pressupõe-se uma malha regular de com intervalo de amostragem unitário. Sem perda de generalidade pressupomos que a derivada deve ser avaliada na coordenada $x = 0$ e os valores do campo que de deseja diferenciar, $f(x_i)$, são conhecidos nas coordenadas $x_i \in \{-N + 1 - \Delta, \dots, -\Delta, 1 - \Delta, \dots, N - \Delta\}$. Neste caso Δ indica que o ponto de avaliação da derivada não coincide com nenhum dos pontos de amostragem do campo. Nestas condições os coeficientes d_j do operador de diferenças que aproxima a primeira derivada deve satisfazer as equações

$$\sum_{j=-N+1}^N d_j (x_{i-j})^p = \delta_{p1} \quad p \in \{0, \dots, 2N - 1\},$$

em que δ_{ij} , indica o delta de Kroenecker. Karrenbach (1995) mostrou que operadores derivados de acordo com este critério possuem adicionalmente a propriedade de máxima-similaridade. Explicitamente, o operador de diferenças finitas que aproxima a derivada de ordem 1 em (2.1), no qual o comprimento do operador é de $2N$ pontos, é obtido pela solução do sistema linear

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{b}, \tag{A.4}$$

em que a matriz \mathbf{A} é definida por :

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ (-N + 1 - \Delta) & (-N + 2 - \Delta) & \dots & (-\Delta) & \dots & (N - 1 - \Delta) & (N - \Delta) \\ (-N + 1 - \Delta)^2 & (-N + 2 - \Delta)^2 & \dots & (-\Delta)^2 & \dots & (N - 1 - \Delta)^2 & (-\Delta)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \tag{A.5}$$

o vetor \mathbf{d} com os coeficientes do operador de diferenças finitas, é definido por :

$$\mathbf{d}^T = \left[d_{-N+1}^\Delta \quad d_{-N+2}^\Delta \quad \dots \quad d_1^\Delta \quad \dots \quad d_{N-1}^\Delta \quad d_N^\Delta \right] \quad (\text{A.6})$$

e o vetor \mathbf{b} é definido por :

$$\mathbf{b}^T = \left[0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{A.7})$$

Em que Δ representa a fração entre os pontos da malha e o ponto de aplicação do operador. No esquema com malha intercalada, tem-se o valor de $\Delta = 1/2$. Esta abordagem pode ser imediatamente estendida para determinar aproximações para derivadas de ordem superior, ou alternativamente, operadores de diferenças de ordem superior podem ser obtidos a partir da convolução de operadores de ordem 1.

APÊNDICE B - RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA DIFERENÇAS FINITAS

Em uma região sem fontes em um meio homogêneo ilimitado o sistemas de equações de diferenças que aproxima o sistema de equações acústico, (2.4), pode ser expresso na forma

$$\begin{bmatrix} \rho D_t^- & 0 & D_1^+ \\ 0 & \rho D_t^- & D_3^+ \\ D_1^- & D_3^- & K D_t^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(i + 1/2, j, n + 1/2) \\ v_3(i, j + 1/2, n + 1/2) \\ P(i, j, n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

em que K indica o módulo de compressibilidade, ou seja, $K = 1/\kappa$

Considera-se a propagação de uma onda plana com número de onda $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ e frequência angular ω sobre a malha intercalada. Nestas condições pode-se escrever os campos de velocidade e pressão sobre a malha (2.3) na forma :

$$\begin{aligned} v_1(i + 1/2, j, n + 1/2) &= V_1^0 \exp(\mathbf{i}(k_1 h/2 - \omega dt/2)) \exp(\mathbf{i}(k_1 x_1^i + k_3 x_3^j - \omega t^n)) \\ v_3(i, j + 1/2, n + 1/2) &= V_3^0 \exp[\mathbf{i}(k_3 h/2 - \omega dt/2)] \exp(\mathbf{i}(k_1 x_1^i + k_3 x_3^j - \omega t^n)) \\ P(i, j, n) &= P^0 \exp(\mathbf{i}(k_1 x_1^i + k_3 x_3^j - \omega t^n)) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A propagação desta onda plana sobre a malha requer a existência de uma solução não trivial para o sistema de equações (B.1), ou seja,

$$\det(\rho D_t^- [\rho K D_t^- D_t^+ - D_1^- D_1^+ - D_3^- D_3^+]) = 0 . \quad (\text{B.3})$$

o resultado da operação de $D_1^- D_1^+$ sobre a componente v_1 , equivale a aplicar os operadores no termo $\exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i)$, pois este é o único que apresenta variação espacial na direção x_1 , desse

modo

$$D_1^+ \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i) = \frac{1}{h} \sum_{p=-N+1}^N d_p^1 \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^{i-p}) \quad (\text{B.4})$$

$$D_1^- \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i) = \frac{1}{h} \sum_{p=-N+1}^N d_p^1 \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^{i-p+1}) , \quad (\text{B.5})$$

sendo d_p^1 os coeficientes do operador de primeira ordem, assim

$$\begin{aligned} D_1^- D_1^+ \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i) &= \frac{1}{h^2} \sum_{q=-N+1}^N d_q^1 \left[\sum_{p=-N+1}^N d_p^1 \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^{i-(p+q)+1}) \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{q=-N+1}^N \sum_{p=-N+1}^N d_p^1 d_q^1 \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^{i-(p+q)+1}) , \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

fazendo $n = p + q - 1$, temos

$$D_1^- D_1^+ \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i) = \frac{1}{h^2} \sum_{n=-2N+1}^{2N-1} d_n^2 \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^{i-n}) \quad (\text{B.7})$$

sendo que d_n^2 corresponde aos coeficientes do operador de segunda derivada, que são calculados através da expressão

$$d_n^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=-N+1}^N d_j^1 d_{n-j+1}^1 \quad (\text{B.8})$$

portanto

$$D_1^- D_1^+ \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i) = \left[\frac{1}{h^2} \sum_{n=-2N+1}^{2N-1} d_n^2 \exp(\mathbf{i}k_1 (i-n)h) \right] \exp(\mathbf{i}k_1 x_1^i) , \quad (\text{B.9})$$

A operação de $D_3^- D_3^+$ sobre a componente v_3 , é a mesma efetuada sobre a componente v_1 , e tem como resultado

$$D_3^- D_3^+ \exp(\mathbf{i}k_3 x_3^j) = \left[\frac{1}{h^2} \sum_{m=-2N+1}^{2N-1} d_m^2 \exp(\mathbf{i}k_1 (j-m)h) \right] \exp(\mathbf{i}k_3 x_3^j) \quad (\text{B.10})$$

Realizando os cálculos anteriores para os operadores D_t^+ e D_t^- , obtém-se

$$D_t^- D_t^+ = \frac{1}{dt} [\exp(-\mathbf{i}\omega dt) - 2 + \exp(\mathbf{i}\omega dt)] ,$$

em que dt corresponde a discretização no tempo, desse modo ,

$$D_t^- D_t^+ = -\frac{4}{dt^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega dt}{2} \right) , \quad (\text{B.11})$$

fazendo a substituição das equações (B.9), (B.10), (B.11) e utilizando a mesma identidade trigonométrica acima em (B.3), tem-se

$$-\frac{\rho K}{dt^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega dt}{2}\right) = \frac{1}{h^2} \left[\left(d_0^2 - 2 \sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \right) - \sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_1 p h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{k_3 p h}{2}\right) \right) \right]$$

observando que $d_0^2 - 2 \sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 = 0$, pois corresponde ao operador de segunda derivada aplicado a uma função constante, obtém-se a expressão

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega dt}{2}\right) = \frac{dt^2}{\rho K h^2} \left[\sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_1 p h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{k_3 p h}{2}\right) \right) \right]$$

observando que $\rho K = C^{-2}$,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega dt}{2}\right) = \frac{C^2 dt^2}{h^2} \left[\sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_1 h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_3 h}{2}\right) \right) \right],$$

$$\omega = \frac{1}{dt} \operatorname{sen}^{-1} \left\{ \frac{C dt}{h} \sqrt{\sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_1 h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_3 h}{2}\right) \right)} \right\}, \quad (\text{B.12})$$

definindo $\mu = C dt/h$, observando que a velocidade de fase da onda plana sobre a malha é $C_{FD} = \omega/k$, em que $k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$, obtém-se a relação de dispersão para o esquema de diferenças de ordem $2N$

$$\frac{C_{FD}(k)}{C} = \frac{1}{\mu k_n} \operatorname{sen}^{-1} \left\{ \mu \sqrt{\sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_1 h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_3 h}{2}\right) \right)} \right\}, \quad (\text{B.13})$$

em $k_n = kh/2$ é o número de onda normalizado, $0 \leq k_n \leq \pi$. Para garantir a estabilidade do esquema deve-se exigir que

$$\mu \sqrt{\sum_{p=1}^{2N-1} d_p^2 \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_1 h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{p k_3 h}{2}\right) \right)} \leq \mu \sqrt{\frac{d_0^2}{2}} \leq 1,$$

ou seja, uma condição de estabilidade para um esquema de ordem $2N$ é

$$dt < \sqrt{\frac{2}{d_0^2}} \frac{h}{C}. \quad (\text{B.14})$$

APÊNDICE C - CÁLCULO DOS OPERADORES DIFERENCIAIS

O cálculo dos operadores de diferenças finitas de ordem N em uma malha intercalada é obtido exigindo que o operador seja exato para polinômios de ordem menor que $2N$. Na dedução da expressão para os coeficientes pressupõe-se uma malha regular de com intervalo de amostragem unitário. Sem perda de generalidade pressupomos que a derivada deve ser avaliada na coordenada $x = 0$ e que são conhecidos os valores com campo $f(x_i)$ nas coordenadas $x_i \in \{-N + 1 - \Delta, \dots, -\Delta, 1 - \Delta, \dots, N - \Delta\}$. No caso das malhas intercaladas que utilizamos neste trabalho $\Delta = 1/2$. Nestas condições os coeficientes d_j do operador de diferenças que aproxima a primeira derivada deve satisfazer as equações

$$\sum_{j=-N+1}^N d_j (x_{i-j})^p = \delta_{p1} \quad p \in \{0, \dots, 2N - 1\} .$$

Karrenbach (1995) mostrou que operadores derivados de acordo com este critério possuem adicionalmente a propriedade de máxima-similaridade. Explicitamente, o operador de diferenças finitas correspondente a primeira derivada em (2.1), no qual a ordem do erro de aproximação é N e o comprimento do operador é de $2N$ pontos, é obtido pela solução do sistema linear.

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{b} \tag{C.1}$$

em que a matriz \mathbf{A} é definida por :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ (-N+1-\Delta) & (-N+2-\Delta) & \dots & (-\Delta) & \dots & (N-1-\Delta) & (N-\Delta) \\ (-N+1-\Delta)^2 & (-N+2-\Delta)^2 & \dots & (-\Delta)^2 & \dots & (N-1-\Delta)^2 & (-\Delta)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

o vetor \mathbf{f} com os coeficientes do operador de diferenças finitas, é definido por :

$$\mathbf{f}^T = \left[d_{-n+1}^\Delta \quad d_{-n+2}^\Delta \quad \dots \quad d_1^\Delta \quad \dots \quad d_{n-1}^\Delta \quad d_n^\Delta \right] \quad (\text{C.3})$$

e o vetor \mathbf{b} é definido por :

$$\mathbf{b}^T = \left[0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{C.4})$$

Em que Δ representa a fração entre os pontos da malha e o ponto de aplicação do operador. No esquema com malha intercalada, tem-se o valor de $\Delta = +1/2$, para o operador avançado e $\Delta = -1/2$, para o operador retardado. O termo igual a 1, em (C.4) corresponde ao elemento $m + 1$, em que m é a ordem da derivada, nesse caso, $m = 1$ para a primeira derivada.

APÊNDICE D - APROXIMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ACÚSTICO POR ELEMENTOS FINITOS

Partindo da equação (2.17), calculada no vértice i , definida por:

$$M^i \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^i = - \sum_{l=1}^N P^q b^{iq} ,$$

$$M^i \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} \right)^i = - \sum_{l=1}^N P^q c^{iq} ,$$

os coeficientes b^{iq} e c^{iq} correspondem as componentes x_1 e x_3 , sendo que o eixo x_3 aponta verticalmente para acima. A integração é feita ao longo do caminho indicado por setas na Figura D.1 . As coordenadas dos vértices i , j e k são definidas por \mathbf{x}^i , \mathbf{x}^j , \mathbf{x}^k , em que $\mathbf{x}^i = x_1^i \mathbf{e}_1 + x_3^i \mathbf{e}_3$, sendo que o mesmo é válido para os outros vértices. Os pontos médios dos lados ij e ki , e o ponto médio da célula são :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= (\mathbf{x}^i + \mathbf{x}^j) \frac{1}{2} , \\ \mathbf{x}^2 &= (\mathbf{x}^i + \mathbf{x}^j + \mathbf{x}^k) \frac{1}{3} , \\ \mathbf{x}^3 &= (\mathbf{x}^j + \mathbf{x}^k) \frac{1}{2} , \end{aligned} \tag{D.1}$$

Os vetores de deslocamento entre os pontos 1 e 2, e 2 e 3, são definidos por

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^1 &= \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \\ \Delta \mathbf{x}^2 &= \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \end{aligned} \tag{D.2}$$

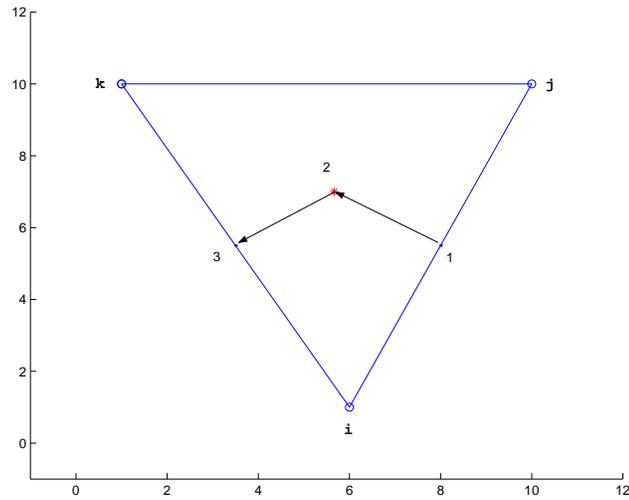


Figura D.1: Célula triangular arbitrária utilizada pelo algoritmo de elementos finitos. É mostrado o caminho de integração para o cálculo dos coeficientes de elementos finitos.

Após algumas manipulações obtemos,

$$\Delta \mathbf{x}^1 = \frac{1}{6} (2x_1^k - x_1^i - x_1^j) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} (2x_3^k - x_3^i - x_3^j) \mathbf{e}_3 \quad (\text{D.3})$$

$$\Delta \mathbf{x}^2 = \frac{1}{6} (x_1^i + x_1^k - 2x_1^j) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} (x_3^i + x_3^k - 2x_3^j) \mathbf{e}_3 \quad (\text{D.4})$$

Os vetores normais a $\Delta \mathbf{x}^1$ e $\Delta \mathbf{x}^2$, que apontam para fora do domínio, são

$$\|\Delta \mathbf{x}^1\| \mathbf{n}^1 = -\frac{1}{6} (2x_3^k - x_3^i - x_3^j) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} (2x_1^k - x_1^i - x_1^j) \mathbf{e}_3, \quad (\text{D.5})$$

$$\|\Delta \mathbf{x}^2\| \mathbf{n}^2 = -\frac{1}{6} (x_3^i + x_3^k - 2x_3^j) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} (x_1^i + x_1^k - 2x_1^j) \mathbf{e}_3, \quad (\text{D.6})$$

somando as equações (D.5) e (D.6), e efetuando o produto escalar pelos versores \mathbf{e}_1 e $-\mathbf{e}_3$, pois a integração é feita no sentido negativo eixo x , obtém-se

$$\left(\|\Delta \mathbf{x}^1\| \mathbf{n}^1 + \|\Delta \mathbf{x}^2\| \mathbf{n}^2 \right) \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} (x_3^k - x_3^j), \quad (\text{D.7})$$

$$\left(\|\Delta \mathbf{x}^1\| \mathbf{n}^1 + \|\Delta \mathbf{x}^2\| \mathbf{n}^2 \right) \cdot (-\mathbf{e}_3) = \frac{1}{2} (x_1^k - x_1^j), \quad (\text{D.8})$$

portanto os coeficientes b^{iq} e c^{iq} , correspondem respectivamente a

$$b^{iq} = \frac{1}{2} (x_3^k - x_3^j), \quad (\text{D.9})$$

$$c^{iq} = \frac{1}{2} (x_1^k - x_1^j) . \quad (\text{D.10})$$

Os coeficientes b^{jq} , b^{kq} , c^{jq} e c^{kq} são obtidos de acordo com o procedimento descrito acima, fazendo a permutação $i \rightarrow j \rightarrow k$. Para a célula retangular $ijkl$ (Figura D.2), os coeficientes d^{im} e e^{im} , correspondentes as direções x_1 e x_3 respectivamente, em que m é o índice da célula, obtidos a partir do do mesmo procedimento feito para células triangulares, são definidos por:

$$d^{im} = \frac{1}{2} (x_3^l - x_3^j) , \quad (\text{D.11})$$

$$e^{im} = \frac{1}{2} (x_1^l - x_1^j) , \quad (\text{D.12})$$

os coeficientes para os nós $j k l$, são obtidos através da permutação $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow l$, sendo que os índices são contados sempre em sentido anti-horário.

D.1 Aproximação dos operadores diferenciais

Os operadores diferenciais espaciais da equação (2.21), em uma célula l da malha formada pelos nós ijk (Figura D.1), são definidos por :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\Delta} [b^{im}(v_1)^i + b^{jm}(v_1)^j + b^{km}(v_1)^k] \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\Delta} [c^{im}(v_3)^i + c^{jm}(v_3)^j + c^{km}(v_3)^k] , \quad (\text{D.14})$$

em que Δ é a area da célula m . As velocidades são amostradas nos vértices ijk . Para a célula retangular $ijkl$ apresentada na Figura D.2, os operadores diferenciais são definidos por:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{A^m} [d^{im}(v_1)^i + d^{jm}(v_1)^j + d^{km}(v_1)^k + d^{lm}(v_1)^l] , \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{1}{A^m} [e^{im}(v_3)^i + e^{jm}(v_3)^j + e^{km}(v_3)^k + e^{lm}(v_3)^l] , \quad (\text{D.16})$$

em que A^m é a área da célula retangular $ijkl$.

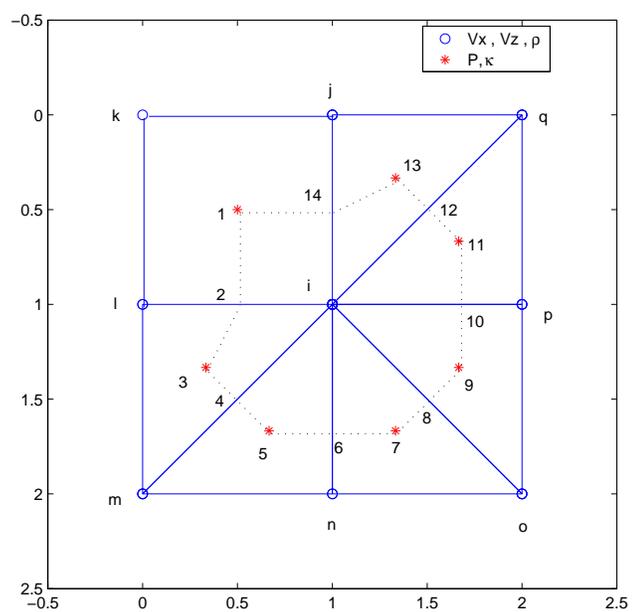


Figura D.2: Malha intercalada formada por células triangulares e retangulares. As posições nas quais os campos e propriedades são amostrados, aparecem em destaque.

APÊNDICE E – RELAÇÕES DE RECIPROCIDADE EM MEIOS ACÚSTICOS

Neste apêndice são apresentadas as relações de reciprocidade para meios acústicos (AKI; RICHARDS, 1980) . Pressuponho um meio causal, linear, localmente reativo e invariante no tempo. Nestas condições as propriedades físicas que descrevem o meio são: a função relaxação de inércia $\gamma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ e a função relaxação de compressibilidade, $\eta(\mathbf{x}, t)$ (HOOP; STAM, 1988). As equações que governam o campo de pressão $P(\mathbf{x}, t)$ e o campo de velocidade do fluido $v_j(\mathbf{x}, t)$ são

$$\partial_j P(\mathbf{x}, t) + \partial_t \Phi_j(\mathbf{x}, t) = f_j(\mathbf{x}, t), \quad (\text{E.1})$$

$$\partial_j v_j(\mathbf{x}, t) + \partial_t e(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t) \quad (\text{E.2})$$

$$\Phi_j(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \gamma_{jk}(\mathbf{x}, t - \tau) v_k(\mathbf{x}, \tau) dt, \quad (\text{E.3})$$

$$e(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \eta(\mathbf{x}, t - \tau) P(\mathbf{x}, \tau) dt, \quad (\text{E.4})$$

em $\Phi_j(\mathbf{x}, t)$ representa o fluxo de massa, $e(\mathbf{x}, t)$ indica a variação fracional de volume, $f_i(\mathbf{x}, t)$ indica a densidade de forças de volume e $q(\mathbf{x}, t)$ a taxa de injeção de volume (FOKKEMA, 1988).

O resultado fundamental para se estabelecer as propriedades de um meio acústico em relação a reciprocidade entre fontes e receptores é a relação de reciprocidade do tipo convolução (AKI; RICHARDS, 1980). Para descrever este resultado considera-se dois campos acústicos que podem ocorrer em meios diferentes. Cada um dos meios está referenciado aqui pelos sobre-escritos a e b sobre os respectivos campos e propriedades físicas . O vínculo sobre os dois campos é que eles ocorram na mesma região D do espaço, cuja fronteira é ∂D .

E.1 Relação de reciprocidade do tipo convolução

A relação de reciprocidade do tipo convolução (HOOP; STAM, 1988) estabelece que :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{x} \in \partial D} \left[\int_0^\tau \left(P^a(\mathbf{x}, t) v_k^b(\mathbf{x}, \tau - t) - P^b(\mathbf{x}, \tau - t) v_k^a(\mathbf{x}, t) \right) dt \right] \nu_k dS = \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau \left(P^a(\mathbf{x}, t) q^b(\mathbf{x}, \tau - t) - P^b(\mathbf{x}, \tau - t) q^a(\mathbf{x}, t) \right) dt \right] dV + \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau \left(f_k^a(\mathbf{x}, t) v_k^b(\mathbf{x}, \tau - t) - f_k^b(\mathbf{x}, \tau - t) v_k^a(\mathbf{x}, t) \right) dt \right] dV + \quad (E.5) \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\partial_\tau \int_0^\tau \left(\int_0^t [\eta^a(\mathbf{x}, t - \xi) - \eta^b(\mathbf{x}, t - \xi)] P^a(\mathbf{x}, \xi) d\xi \right) P^b(\mathbf{x}, \tau - t) dt \right] dV + \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\partial_\tau \int_0^\tau \left(\int_0^t [\gamma_{kj}^a(\mathbf{x}, t - \xi) - \gamma_{jk}^b(\mathbf{x}, t - \xi)] v_j^a(\mathbf{x}, \xi) d\xi \right) v_k^b(\mathbf{x}, \tau - t) dt \right] dV ,
\end{aligned}$$

em que ν indica o vetor unitário que aponta para fora de ∂D .

Como todas as integrais no tempo nesta relação são causais, a relação de reciprocidade do convolução vale para qualquer meio linear, causal e invariante no tempo.

Para meios instantaneamente reativos as relações de reciprocidade se reduzem a forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{x} \in \partial D} \left[\int_\tau^{+\infty} \left(P^a(\mathbf{x}, t) v_k^b(\mathbf{x}, t - \tau) + P^b(\mathbf{x}, t - \tau) v_k^a(\mathbf{x}, t) \right) dt \right] \nu_k dS = \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_\tau^{+\infty} \left(f_k^a(\mathbf{x}, t) v_k^b(\mathbf{x}, t - \tau) + f_k^b(\mathbf{x}, t - \tau) v_k^a(\mathbf{x}, t) \right) dt \right] dV + \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_\tau^{+\infty} \left(q^a(\mathbf{x}, t) P^b(\mathbf{x}, t - \tau) + q^b(\mathbf{x}, t - \tau) P^a(\mathbf{x}, t) \right) dt \right] dV - \quad (E.6) \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\partial_\tau \int_\tau^{+\infty} \left[\rho_{kj}^a(\mathbf{x}) - \rho_{jk}^b(\mathbf{x}) \right] v_j^a(\mathbf{x}, t) v_k^b(\mathbf{x}, t - \tau) dt \right] dV - \\
& \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\partial_\tau \int_\tau^{+\infty} \left[\kappa^a(\mathbf{x}) - \kappa^b(\mathbf{x}) \right] P^a(\mathbf{x}, t) P^b(\mathbf{x}, t - \tau) dt \right] dV .
\end{aligned}$$

E.2 As relações de reciprocidade do Campo Acústico

As relações de reciprocidade acima são consideradas por alguns autores (HOOP; STAM, 1988) as equações fundamentais da Acústica. As relação de reciprocidade impõem simetrias sobre o campo acústico. Para verificar estas simetrias pressupõem-se que o meio é recíproco, $\gamma_{ij}^a(\mathbf{x}, t) = \gamma_{ji}^b(\mathbf{x}, t) = \gamma_{ji}^a(\mathbf{x}, t)$ e $\eta^a(\mathbf{x}, t) = \eta^b(\mathbf{x}, t)$, e considera-se os dois tipos de fontes fundamentais para a acústica :

Fonte Puntual Explosiva

$$q(\mathbf{x}, t) = Q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'),$$

em que Q_0 é a taxa de injeção de volume da fonte. Esta fonte gera em um determinado domínio de propagação o campos de pressão $Q_0 \Gamma_{00}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ e o campo de velocidade $Q_0 \Gamma_{i0}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$.

Fonte Puntual Dipolar Impulsiva

$$f_i(\mathbf{x}, t) = F_{0j} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

em que F_{0j} tem dimensão de força por unidade de volume. Esta fonte produz o campo de pressão $\Gamma_{0j}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ e o campo de velocidade $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$.

Qualquer fonte acústica pode ser representada pela superposição destes dois tipos de fonte (HOOP; STAM, 1988) e a resposta de um meio a qualquer tipo de fonte pode ser escrita em função do tensor de Green

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \begin{pmatrix} \Gamma_{00} & \Gamma_{01} & \Gamma_{02} & \Gamma_{03} \\ \Gamma_{10} & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{20} & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{30} & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} .$$

Portanto todas as simetrias do tensor de Green são propriedades de qualquer campo acústico. Para estabelecer as simetrias do tensor de Green, considerar-se que os dois estados acústicos a que se refere as relações de reciprocidade ocorrem em um mesmo meio recíproco e são produzidos por um dos dois tipos de fontes apresentados acima. Na dedução destas propriedades considera-se que as condições de fronteira são homogêneas, ou seja, a pressão é nula sobre a

fronteira(fronteira livre), a velocidade da partícula se anula na fronteira(fronteira rígida), ou ainda a fronteira está a uma distância muito grande da fonte. Nestes casos a integral sobre a fronteira do domínio \mathcal{D} que aparece nas relações de reciprocidade se anula.

E.2.1 Simetrias do tensor de Green que decorrem da relação de convolução

Caso 1: Os estados acústicos a e b são produzidos, respectivamente, pelas fontes fundamentais:

$$\{q^a = Q_0^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \delta(t - t^a); f_i^a = 0\}$$

e

$$\{q^b = Q_0^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \delta(t - t^b); f_i^b = 0\} .$$

Substituindo a expressão para as fontes e os respectivos campos associados a cada fonte em (E.5) resulta na expressão

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau Q_0^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \delta(t - t^a) \Gamma_{00}^b(\mathbf{x}, \tau - t; \mathbf{x}^b, t^b) dt \right] dV &- \\ \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau Q_0^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \delta(\tau - t - \tau^b) \Gamma_{00}^a(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}^a, t^a) dt \right] dV &= 0 . \end{aligned}$$

Finalmente, efetuando as integrais,

$$Q_0^a \Gamma_{00}^b(\mathbf{x}^a, \tau - t^a; \mathbf{x}^b, t^b) = Q_0^b \Gamma_{00}^a(\mathbf{x}^b, \tau - t^b; \mathbf{x}^a, t^a) .$$

Segue imediatamente desta relação, tomando-se $t^a = t^b = 0$, que

$$\boxed{Q_0^a \Gamma_{00}^b(\mathbf{x}^a, \tau; \mathbf{x}^b, 0) = Q_0^b \Gamma_{00}^a(\mathbf{x}^b, \tau; \mathbf{x}^a, 0) .}$$

A interpretação física deste resultado é imediata: *para uma mesma fonte de injeção de volume, permutando a posição da fonte e do receptor o campo de pressão observado é o mesmo.*

Caso 2: As fontes que produzem os estados acústicos no meio são:

$$\{q^a = 0; f_i^a = F_{0j}^a \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \delta(t - t^a)\}$$

e

$$\{q^b = 0; f_i^b = F_{0j}^b \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \delta(t - t^b)\} .$$

Substituindo a expressão para as fontes e os respectivos campos associados em (E.5) resulta na expressão

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau F_{0n}^a \delta_{nk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \delta(t - t^a) \Gamma_{km}^b(\mathbf{x}, \tau - t; \mathbf{x}^b, t^b) dt \right] dV - \\ & \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau F_{0m}^b \delta_{mk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \delta(\tau - t - t^b) \Gamma_{kn}^a(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}^a, t^a) dt \right] dV = 0 . \end{aligned}$$

Efetuando a integração,

$$F_{0n}^a \Gamma_{nm}^b(\mathbf{x}^a, \tau - t^a; \mathbf{x}^b, t^b) = F_{0m}^b \Gamma_{mn}^a(\mathbf{x}^b, \tau - t^b; \mathbf{x}^a, t^a) .$$

Segue imediatamente, avaliando esta expressão para $t^a = t^b = 0$, a relação de reciprocidade para o campo de velocidades

$$\boxed{F_{0n}^a \Gamma_{nm}^b(\mathbf{x}^a, \tau; \mathbf{x}^b, 0) = F_{0m}^b \Gamma_{mn}^a(\mathbf{x}^b, \tau; \mathbf{x}^a, 0) .}$$

Para uma fonte dipolar de mesma intensidade, permutando-se simultaneamente a posição de fonte e receptor e a direção de polarização da fonte com a direção de polarização do receptor o campo observado é o mesmo.

Caso 3: Os estados acústicos são produzidos pelas fontes

$$\{q^a = Q_0^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \delta(t - t^a), f_i^a = 0\}$$

e

$$\{q^b = 0; f_i^b = F_{0j}^b \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \delta(t - t^b)\} .$$

Substituindo estas fontes e os respectivos campos em (E.5)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau Q_0^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \delta(t - t^a) \Gamma_{0m}^b(\mathbf{x}, \tau - t; \mathbf{x}^b, t^b) dt \right] dV - \\ & \int_{\mathbf{x} \in D} \left[\int_0^\tau F_{0m}^b \delta_{mk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \delta(\tau - t - t^b) \Gamma_{k0}^a(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}^a, t^a) dt \right] dV = 0 . \end{aligned}$$

Efetuando a integração,

$$Q_0^a \Gamma_{0m}^b(\mathbf{x}^a, \tau - t^a; \mathbf{x}^b, t^b) = F_{0m} \Gamma_{m0}^a(\mathbf{x}^b, \tau - t^b; \mathbf{x}^a, t^a)$$

avaliando esta expressão para $t^a = t^b = 0$

$$\boxed{Q_0^a \Gamma_{0m}^b(\mathbf{x}^a, \tau; \mathbf{x}^b, 0) = F_{0m} \Gamma_{m0}^a(\mathbf{x}^b, \tau; \mathbf{x}^a, 0)}$$

Permutando-se a posição de fonte e receptor a componente do campo de velocidade produzido por uma fonte explosiva é proporcional ao campo de pressão produzido por uma fonte dipolar com a direção de polarização na mesma direção em que a velocidade foi medida.

Estas simetrias do tensor de Green tem aplicações importantes no processamento de dados acústicos. Na extrapolação de dados acústicos, as relações de reciprocidade são a base da utilização de dados coletados com diferentes geometrias de aquisição, ou na equalização de dados acústicos efetuados com fontes de diferentes atributos (KARRENBACH, 1995).