

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Localização Eletromagnética e Comportamento
Assintótico em Meios com Memória**

Luis Paulo do Vale Matos

UFPA/ITEC/PPGEE
Belém - PA
Agosto, 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Localização Eletromagnética e Comportamento
Assintótico em Meios com Memória**

Autor: Luis Paulo do Vale Matos

Orientador: Prof. Dr. Victor Dmitriev

Belém - PA
Agosto, 2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UFPA, Belém-PA

Vale Matos, Luis Paulo do

Localização Eletromagnética e Comportamento Assintótico em Meios com Memória / Luis Paulo do Vale Matos. – 2010.

Orientador: Victor Dmitriev.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2010.

1. Ondas Eletromagnéticas - Transmissão 2. Dielétricos I. Dmitriev, Victor, Orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica III. Título.

CDD – 23. ed. 539.2

Localização Eletromagnética e Comportamento Assintótico em Meios com Memória

Luis Paulo do Vale Matos

Dissertação de Mestrado submetida à avaliação de Banca Examinadora aprovada pelo colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará – PPGEE - UFPA e julgada adequada para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica na área de Telecomunicações.

Aprovada em 06/08/2010.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Victor Dmitriev (Orientador/PPGEE - UFPA)

Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa (PPGEE - UFPA)

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PPGME - UFPA)

Visto:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Alves Nunes (Coordenador-PPGEE)

Belém - PA
06 de Agosto, 2010

RESUMO

Neste trabalho analisamos a propagação de ondas eletromagnéticas localizadas e o comportamento assintótico da energia em meios dielétricos não-ideais com memória. Para a existência de solução e o comportamento assintótico da energia utilizamos técnicas de semigrupos. Mostramos explicitamente soluções localizadas, campos harmônicos particulares e *focus wave mode* sem condições de fronteira.

ABSTRACT

In this work we analyse the propagation of localized electromagnetic waves and the asymptotic behavior of energy in non-ideal dielectric media. For the existence of solution and asymptotic behavior of energy, we make use of techniques of semigroup. We show localized solutions, harmonic fields and focus wave modes without boundary conditions.

Sumário

Introdução	1
1 Base Teórica	4
1.1 Introdução	4
1.2 Espaços de Sobolev	4
1.3 Semigrupos de Operadores	7
1.3.1 Comportamento Assintótico	9
1.4 Operadores Lineares em Espaços de Hilbert	10
2 Ondas Localizadas	11
2.1 Motivação	11
2.2 Histórico	13
2.3 Obtenção de Ondas Localizadas	15
2.4 Frozen Waves	19
2.5 Ondas Localizadas devido defeitos do material	21
3 Comportamento Assintótico e Localização em Meios Dielétricos Não-ideais com Memória	22
3.1 Introdução	22
3.2 Formulação Matemática	24
3.3 Existência de Solução	28
3.3.1 Notações e Espaços Funcionais	28
3.3.2 Existência de Solução: Abordagem via semigrupo	29
3.4 Estabilidade Exponencial	31

3.5	Análise de Decaimento para \mathbf{H}	34
3.6	Decaimento da Energia Eletromagnética	36
3.7	Campos Localizados	37
3.8	Campos Harmônicos propagantes em oz	47
3.9	Focus Waves Mode	49
3.10	Conclusão	54
A	Os Teorema de Hille-Yosida e de Lumer-Phillips	56
A.1	Introdução	56
A.2	Definições	57
A.3	O Teorema de Hille-Yosida	58
A.4	O Teorema de Lumer-Phillips	58
B	O Teorema de Prüss	61
C	Funções de Bessel	63
C.1	Função de Bessel de primeiro tipo	63
C.2	Função de Bessel de segundo tipo	65
C.3	Funções de Bessel Modificadas	66

Lista de Figuras

2.1	Experimento de Durnin	14
2.2	Pico de Intensidade de Campo (Vértice) Superluminal	14
2.3	Interpretação Geométrica	19
3.1	Módulo de J_0 com $K = 10$	40
3.2	Módulo de J_0 com $K = 100$	40
3.3	Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.	42
3.4	Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 50 \times 10^{16}$ Hz.	42
3.5	Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{17}$ Hz.	43
3.6	Módulo de J_0 para $M_1 = 1$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.	43
3.7	J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.	44
3.8	J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 50 \times 10^{16}$ Hz.	44
3.9	Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.	45
3.10	Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 50 \times 10^{16}$ Hz.	45
3.11	Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{17}$ Hz.	46
3.12	Módulo de J_0 para $M_1 = 1$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.	46

Introdução

É um fato conhecido que as ondas sofrem efeitos atenuantes como dispersão e difração quando se propagam em meios reais.

Na análise de sistemas de comunicação baseados em dispositivos ópticos, os efeitos de difração e dispersão são considerados fatores fundamentais para o projeto destes, isto é, sistemas reais devem reduzir ao máximos os erros de decodificação decorrentes da propagação eletromagnéticas nos canais de comunicação. Para isto é de fundamental importância estudos de técnicas que permitam reduzir tais efeitos.

A difração sempre ocorre em meios reais bidimensionais ou tridimensionais mesmo quando o meio é homogêneo. Qualquer que seja o tipo de onda, pulsos ou feixes, elas são a composição de diversas ondas viajando em direções e velocidades diferentes tais que modificam gradualmente sua forma espacial ao passarem por meios ou obstáculos da ordem de seu comprimento de onda. Ou seja, a difração é o fenômeno que altera a forma e/ou a direção da onda propagante quando ela passa por obstáculos da ordem de seu comprimento de onda. A alteração das diferentes componentes de onda e de direção causa, em sistemas reais, um espalhamento do sinal comprometendo o seu reconhecimento.

A dispersão é o efeito que ocorre em ondas ou pulsos que se propagam em meios materiais e que é caracterizado pelo alargamento do pulso no decorrer do tempo. Isto é, o efeito devido à variação do índice de refração n com a frequência f : cada componente espectral propaga-se com velocidade diferente. Ou seja, cada componente de frequência do pulso propaga de maneira diferente no meio considerado pois possuem diferentes velocidades de fase. Assim, em geral, o pulso sofre um gradual alargamento (ou espalhamento), o que implica em um outro fator limitante quando é requerido que o pulso mantenha sua forma ao longo do tempo.

Dados estes fatores limitantes em sistemas de comunicações, muitas técnicas surgiram na tentativa de minimizá-los, como, por exemplo, as que se utilizam de dispositivos ópticos, tais como amplificadores ópticos e regeneradores ópticos. No entanto, uma série de trabalhos teóricos, desenvolvidos com rigor a partir dos anos 80, apresentavam soluções para os problemas já mencionados. Estes analisavam soluções de onda com a interessante característica de resistir aos efeitos de dispersão e difração. Essas soluções, inicialmente estudadas com hipóteses ideais, são dotadas da capacidade de propagar por grandes distâncias em meios reais sem sofrer (ou sofrer pouca) alteração de suas propriedades básicas iniciais. Tais soluções de onda são chamadas *ondas localizadas* ou ondas não-difrativas. A definição mais detalhada será apresentada no Capítulo 2. Disto decorre uma grande possibilidade prática de redução de custo no projeto e construção de sistemas de comunicações baseados em dispositivos ópticos de recuperação e amplificação de sinal.

Inicialmente, a teoria sobre ondas localizadas foi desenvolvida para o espaço livre, no entanto, nos dias atuais, os estudos vêm sendo ampliados para meios mais complexos como, por exemplo, meios dispersivos, anisotrópicos, não-lineares e com perdas. Aliado a este fato, novos métodos matemáticos são desenvolvidos para obtenção de feixes ou pulsos localizados em regime subluminal, luminal ou superluminal, isto é, que se propagam com velocidade inferior, igual e superior à velocidade da luz (no caso de ondas eletromagnéticas), respectivamente. Atualmente, tanto a parte teórica quanto experimental está bem posta e estudos recentes sugerem que estas ondas são capazes de resistir à dispersão em meios materiais por longas distâncias.

Como exemplo de soluções localizadas citam-se casos particulares da solução de D'Alembert para a equação de onda 1D que é dada por

$$\phi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

onde c é a constante de propagação da equação e F, G são funções arbitrárias contínuas. Qualquer solução da forma $\phi(x, t) = F(x - ct)$ (ou $\phi(x, t) = G(x + ct)$) é localizada.

Um trabalho considerado marcante sobre ondas com localização no caso eletromagnético foi feito por Brittingham [1] em 1983. Neste trabalho, o autor parte das equações de Maxwell e obtém solução com a capacidade de propagação rígida, inalterável em forma e intensidade ao longo do tempo. Ele considera soluções com energia infinita com a capacidade de permanecerem localizadas indefinidamente. Brittingham chamou esta solução de *Focus Wave Mode* (FWM).

Na realidade, alguns autores já haviam obtido soluções de onda com localização [13]. Nestes casos as soluções obtidas também não são consideradas em meios complexos. Atualmente, devido aos esforços de diversos pesquisadores impulsionados pelos estudos iniciais à pouco mais de duas décadas, tanto teoria quanto os experimentos acerca de ondas localizadas estão bem estabelecidos no eletromagnetismo e acústica.

Dadas suas características, as *ondas localizadas* possuem aplicações em diversas áreas. Além das evidentes aplicações em Óptica, Acústica e Microondas, tais ondas são muito úteis em Geofísica e na Teoria de Partículas Elementares. Em certos casos, a descrição de uma onda extremamente localizada se confunde com a descrição de uma partícula e, em vista disto, muitos aspectos são tomados em analogia.

Destacamos, também, que ondas congeladas ou *Frozen Waves* apresentam aplicações em Medicina na resolução de imagem de órgãos humanos. A definição será dada no Capítulo 2.

Este trabalho está organizado com se segue.

No capítulo 1 resume-se a base teórica e aparato matemático utilizado no desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 são apresentados conceitos básicos com relação às ondas localizadas. Neste capítulo faz-se uma revisão histórica abreviada da evolução dos estudos e experimentos que levaram a solidificação das bases teóricas da localização de ondas. Também, é mostrado métodos simples de obtenção de ondas localizadas bem como aplicações das *Frozen Waves*. No fim do capítulo uma breve noção da chamada localização de Anderson é apresentada.

O capítulo 3 consiste a essência deste trabalho. Um estudo sobre a propagação de ondas harmônicas e de focus wave modes em dielétricos não-ideais com memória assim como o comportamento assintótico da energia é apresentado. Neste capítulo, há uma formulação matemática do problema de propagação dos campos, em seguida são mostrados o comportamento assintótico da energia associada ao modelo, soluções harmônicas e, por fim, focus wave modes.

Para consultas do leitor, eventualmente julgadas necessárias, acrescentam-se a este trabalho alguns apêndices.

Capítulo 1

Base Teórica

1.1 Introdução

Neste capítulo trataremos brevemente dos elementos teóricos e conceitos utilizados do decorrer do Capítulo 3.

Apresentamos alguns resultados e definições da Análise Funcional, da Teoria de Espaços de Sobolev, Equações Diferenciais Parciais e Semigrupos de Operadores. Por questões óbvias, omitimos as demonstrações dos teoremas apresentados. No entanto, deixamos indicadas as referências para verificação de detalhes. Tais resultados serão utilizados no desenvolvimento dos demais capítulos.

1.2 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto limitado do \mathbf{R}^N e $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tais que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty,$$

se $1 \leq p < \infty$, ou

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| < \infty,$$

se $p = \infty$.

Se $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pode-se, também, definir espaços $L^p(\Omega)$ ponderados com respeito a medida $\mu(s)ds$ e, nestes casos, $\eta \in L^p_{\mu}(\mathbf{R}_+, L^p(\Omega)) \Rightarrow \left(\int_0^{\infty} \|\eta\|^p k(s) ds \right)^{1/p} < \infty$. Aqui, vale antecipar que serão utilizadas relações constitutivas envolvendo campos elétrico e magnético onde aparecem convoluções, ou seja, há um efeito de relaxação atuante nas vetores de campo, daí, interessa utilizar espaços adequados que "comportem" bem estas funções (vetores de campo).

Quando $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|.$$

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{N}^N$ com $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Denotamos por D^{α} o operador derivada de ordem α , definido por

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Identificamos a derivada de ordem 0 pela própria função, isto é, $D^0 u = u$. A representação de derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pode ser, eventualmente, representada por D_i . Assim, denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tais que $D^{\alpha} u \in L^p(\Omega)$ no sentido das distribuições, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx.$$

Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados *espaços de Sobolev*.

Em particular, quando $p = 2$ fazemos a denotação $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, espaço usado neste trabalho. Este espaço é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx,$$

e norma

$$\|u\|_{H^m}^2 = \langle u, u \rangle_{H^m}.$$

As desigualdades abaixo serão utilizadas com frequência ao longo do capítulo 3 e, na maioria das vezes, sem fazer menção à desigualdade utilizada. Em

especial, a desigualdade de Young (com ϵ) será de grande valia na obtenção de limitações para as normas.

Teorema 1.2.1. (Desigualdade de Hölder)

Sejam $1 \leq p, q$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

A **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, freqüentemente utilizada neste texto, é um caso particular da Desigualdade de Hölder, mais especificamente, quando $p = q = 2$.

Teorema 1.2.2. (Desigualdade de Poincaré)

Seja Ω um aberto limitado do \mathbf{R}^n . Então, existe uma constante c dependendo de Ω e n tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lema 1.2.1. (Desigualdade de Young) Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A igualdade ocorre quando $a^p = b^q$. Para $p = q = 2$ tem-se, também, a chamada desigualdade de Young com ϵ . Isto é, seja $\epsilon > 0$, então, sob as mesmas condições do Lema anterior vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

O resultado é obtido tomando $\sqrt{\epsilon}a$ e $\frac{b}{\sqrt{\epsilon}}$ na desigualdade de Young. Este resultado será usado com freqüência no desenvolvimento do trabalho.

Lema 1.2.2. (Desigualdade de Peetre)

Seja Ω um aberto limitado do \mathbf{R}^n . Então, existe uma constante c dependendo de Ω e n tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla \times u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Esta última será utilizada para obter limitações para a norma do campo elétrico pela norma de seu rotacional, cada um destes definidos, obviamente, em espaços adequados.

1.3 Semigrupos de Operadores

Nas definições e teoremas desta seção, consideramos X um espaço de Banach.

Definição 1.3.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X , isto é, $T(t) \in \mathcal{B}(X, X)$, $\forall t \geq 0$, é um semigrupo uniparamétrico de operadores lineares limitados de X em X se*

1. $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Definição 1.3.2. *Quando um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x,$$

dizemos que este é um semigrupo fortemente contínuo ou C_0 -semigrupo.

Definição 1.3.3. *O gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ com domínio definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\}$$

e tal que

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}$$

para cada $x \in \mathcal{D}(A)$.

Teorema 1.3.1. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal, então a função $T : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X, X)$ é diferenciável em norma e satisfaz*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração: [1] Corolário 1.4, página 3.

Definição 1.3.4. *Seja X um espaço de Hilbert munido do produto interno \langle, \rangle e seja $A : X \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ um operador linear em X . Dizemos que A é dissipativo se*

$$\Re \langle AU, U \rangle \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}(A).$$

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então, que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M > 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$ (cf. [1]). Quando $\omega = 0$ dizemos que o semigrupo é *uniformemente limitado*. Se, além disso, $M = 1$ o chamamos de *C_0 -semigrupo de contrações*.

Teorema 1.3.2. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo gerado por A definido em um espaço de Hilbert H , então $S(t)$ é um semigrupo de contrações (isto é, $\|S(t)\| \leq 1$) se, e somente se, A é dissipativo.*

Demonstração: [2] Teorema 2.7.1, página 62.

Seja X um espaço de Banach e $A : X \rightarrow X$ um operador linear. Chamamos de *conjunto resolvente* de A e denotamos por $\rho(A)$ ao conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)\}.$$

Chamamos de *espectro* de A ao conjunto $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$. A família $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ de operadores lineares limitados, com $\lambda \in \rho(A)$, é chamada de *resolvente* de A .

Em seguida apresentam-se dois dos teoremas mais famosos da teoria de semigrupo. Tais teoremas são bastante úteis na análises de equações diferenciais. Para detalhes e exemplo de como se pode utilizá-los ver o apêndice A.

Teorema 1.3.3. (Hille - Yosida) *Um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

1. A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém \mathbf{R}^+ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: [1] Teorema 3.1, página 8.

Teorema 1.3.4. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X .*

1. Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração: [1] Teorema 4.3, página 14.

Teorema 1.3.5. *Seja A um operador dissipativo em X .*

- (a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então, $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*
- (b) *Se A é fechado, então, \bar{A} também é dissipativo.*
- (c) *Se $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, então, A é fechado.*

Demonstração: [1] Teorema 4.5, página 15.

Teorema 1.3.6. *Seja A um operador dissipativo tal que $\text{Im}(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Demonstração: [1] Teorema 4.6, página 16.

1.3.1 Comportamento Assintótico

Teorema 1.3.7. (Prüss) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo definido num espaço de Hilbert H . Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{\lambda : \Re \lambda \geq 0\} \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo λ tal que $\Re \lambda \geq 0$.

Demonstração: [2] Teorema 3.5.6, página 120.

Teorema 1.3.8. (Prüss) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de contrações definido num espaço de Hilbert H . Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{i\beta : \beta \in \mathbf{R}\} \equiv i\mathbf{R} \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo β real.

Demonstração: [2] Teorema 3.5.5, página 120.

1.4 Operadores Lineares em Espaços de Hilbert

Definição 1.4.1. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear limitado. Um operador linear limitado B sobre \mathcal{H} é chamado de adjunto de A se $\forall x, y \in \mathcal{H}$*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

Dizemos que A é auto-adjunto quando $B = A$.

Para demonstração e aprofundamento dos resultados que seguem, aconselha-se qualquer livro de Teoria Espectral de Operadores Compactos.

Teorema 1.4.1. *(Hellinger - Toeplitz) Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Então, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e é auto-adjunto.

Teorema 1.4.2. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão infinita e seja $\mathbb{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto, então existe uma base $\{\beta_i\}$ para \mathcal{H} formada por auto-vetores de \mathbb{O} .*

Teorema 1.4.3. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. T é auto-adjunto $\Leftrightarrow \Re\langle Tx, x \rangle \in \mathbf{R}$.*

Capítulo 2

Ondas Localizadas

Neste capítulo trataremos das ondas localizadas mostrando alguns conceitos relacionados, suas características, propriedades e aplicações. Os métodos mais tradicionais de obtenção de solução de onda localizada serão mostrados no decorrer. Uma noção sucinta da chamada localização de Anderson [11] também será apresentada, conceito que surge quando as imperfeições e impurezas de certos materiais favorecem o surgimento de ondas estacionárias.

2.1 Motivação

Em sistemas de comunicações ópticas onde são utilizados feixes e pulsos ópticos, sabe-se que dois dos principais fatores limitantes, levados em consideração no projeto destes, são os efeitos de difração e dispersão. Todo projeto de comunicação óptica deve reduzir tais efeitos a fim de obter alta eficiência na transmissão dos sinais.

À guisa de orientação vale lembrar as definições dos efeitos citados. A **dispersão** é o efeito que causa um alargamento de pulsos propagantes em meios materiais. Este ocorre, principalmente, devido à variação do índice de refração do material com a frequência, isto é, às diferentes velocidades de fase das componentes de frequência da onda. A **difração**, por sua vez, altera a forma espacial do pulso ou feixe ao longo da propagação. Isto ocorre pelas diferentes direções de propagação das componentes de onda provocando um espalhamento do sinal.

Seria interessante, portanto, do ponto de vista prático, encontrar meios que diminuíssem os efeitos de difração e de dispersão. Os métodos mais comuns para tratar destes problemas consistem da utilização de dispositivos

ópticos que permitem recuperar, com uma dada margem de erro, os sinais eletromagnéticos. São exemplos os regeneradores e amplificadores ópticos utilizados em cabos transatlânticos. Dependendo do comprimento total dos meios ou guias de onda, o custo para fabricação de sistemas baseados em dispositivos de recuperação é demasiado elevado.

Durante os anos 80 uma série de trabalhos de cunho teórico foram apresentados tendo como uma dentre as diversas aplicações vislumbradas a possibilidade de se reduzir os efeitos apontados anteriormente. Estes trabalhos tratavam de assuntos relacionados às chamadas ondas localizadas (*focus wave mode*). Dentre os mais importantes autores destacam-se Brittingham, cujo trabalho representa um marco para o caso eletromagnético, Recami, Sezginer, Besieres e Ziolkowski.

As chamadas ondas localizadas são soluções que, em princípio, teoricamente, possuem a capacidade de superar os efeitos apontados pela dispersão e pela difração. A maioria dos estudos iniciais partiam do estudo de propagações ideais, isto é, casos de pouca aplicabilidade com hipóteses impraticáveis. Os resultados analíticos mostram que estas ondas podem ser soluções de fenômenos acústicos e eletromagnéticos. Atualmente, a criação experimental de ondas com características de localização está bem desenvolvida e fundamentada em observações teóricas. Na prática, como é impossível produzir uma onda com energia infinita, estas ondas não podem propagar com localização por tempo e distância infinitos. Todavia, alguns resultados revelam que tais ondas possuem uma profundidade de campo muito maior que aquelas observadas em soluções não localizadas [14].

Embora a grande maioria dos trabalhos sobre ondas localizadas tenha sido publicada a partir dos anos 80, soluções localizadas já haviam sido previstas nos anos 40 por Stratton [13] quando ele exibiu soluções de onda por funções de Bessel.

Inicialmente os trabalhos sobre ondas localizadas eram voltados para casos ideais e propagação em espaço livre com energia infinita. Estudos mais atuais mostram aplicações para meios complexos: meios dispersivos, com perdas, não lineares etc. É mostrado que em situações reais ondas com características de localização e energia finita são experimentalmente possíveis e possuem qualidades superiores as soluções de onda não localizadas. Soluções localizadas apresentam uma profundidade de campo muito maior que outras formas de onda, isto é, podem propagar mantendo sua forma por longa distância em materiais reais.

2.2 Histórico

Acreditava-se que a única onda capaz de resistir à difração era onda plana, contudo, alguns autores mostraram que não. Stratton [13], em 1941, obteve solução monocromática para a equação de onda cuja distribuição transversal estava concentrada nas proximidades do eixo de propagação quando por funções de Bessel as representou. Atualmente, tais soluções constituem os chamados feixes de Bessel, os quais não sofrem difração desde que sua forma transversal não sofra variação ao longo do tempo. Essas soluções, assim como as ondas planas, possuem energia infinita.

Um problema investigado algumas décadas atrás foi a análise do que ocorreria com os feixes de Bessel ao serem truncados por uma abertura finita. Em 1987, Durnin [15] realizou alguns experimentos e mostrou que um feixe de Bessel de comprimento de onda $\lambda_0 = 632,8$ nm e largura inicial $\Delta\rho_0 = 59\mu\text{m}$ passando por uma abertura de raio 3,5 mm era capaz de percorrer cerca de 85 cm mantendo sua forma transversal aproximadamente constante. Isto é, ele mostrou que houve pequenas variações transversais por uma grande profundidade de campo.

Uma explicação para isso é que os campos transversais associados aos anéis que constituem o feixe de Bessel acabam por reconstruir o feixe por uma grande distância.

Uma das mais importantes aplicações de feixes de Bessel é a superposição adequada dos mesmos em mesma frequência mas com diferentes números de onda para formação de campos estacionários com alta localização transversal.

Para o eletromagnetismo, um dos estudos pioneiros de ondas localizadas foi realizado por James Brittingham, em 1983, quando ele provou a possibilidade de soluções para as equações de Maxwell com localização e com energia infinita. Brittingham chegou a uma solução luminal (velocidade de grupo $V = c$) com forma rígida, inalterável, sem sofrer difração.

Em 1985, Sezginer mostrou como construir pulsos luminiais com energia finita, que por esse motivo não podem propagar por uma distância infinita sem sofrer distorção, capazes de viajar a velocidade constante sem alterar sua forma por uma profundidade de campo considerável.

Anos mais tarde alguns autores desenvolveram uma técnica chamada de *decomposição bidirecional* para obtenção de novos pulsos luminiais não difrativos.

No início dos anos 90 uma nova solução para equação de onda foi obtida para o espaço livre. Tratava-se dos pulsos localizados de forma de X chama-

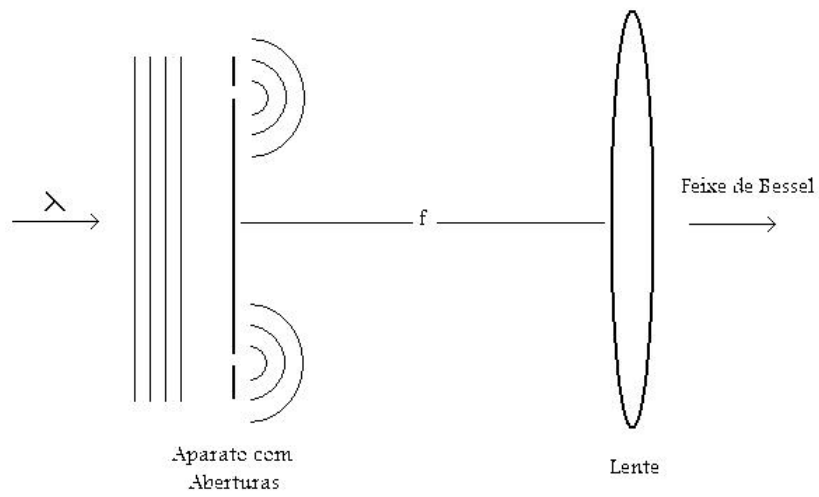


Figura 2.1: Experimento de Durnin

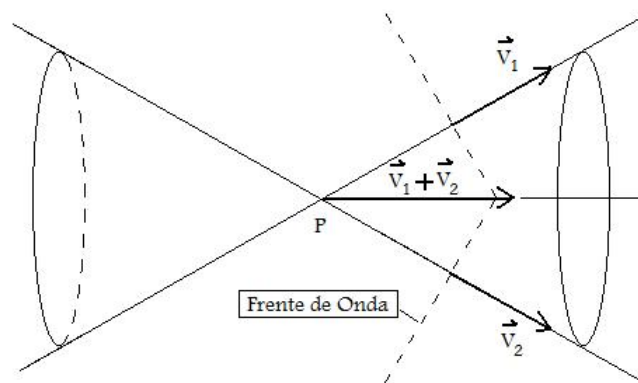


Figura 2.2: Pico de Intensidade de Campo (Vértice) Superluminal

dos, então, de ondas X (X -waves). Tais soluções foram obtidas por superposição contínua de feixes de Bessel com mesma velocidade de fase tal que o pulso resultado pode manter sua forma por longas distâncias. A velocidade (de grupo) deste tipo de onda é superluminal ou supersônica ($V > c$ onde c representa a velocidade da onda no meio considerado: velocidade da luz para o caso eletromagnético e do som para o caso acústico). Apesar de estas ondas serem obtidas por superposição de feixes de Bessel (gerados experimentalmente a partir de um conjunto de aberturas) com energia propagando com velocidade c de ondas planas neste meio, o pico de intensidade da onda X obtida é mais veloz.

2.3 Obtenção de Ondas Localizadas

Partiremos, à guisa de motivação, da equação de onda linear e homogênea no \mathbb{R}^3 . Esta equação surge no estudo de diversos fenômenos físicos nos campos de eletromagnetismo e acústica por exemplo. A equação de onda é uma equação diferencial parcial dada por

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, y, z, t) = 0.$$

A constante c caracteriza a velocidade de propagação da onda. Em geral, a equação de onda apresenta-se tomando esta constante igual a 1.

No caso unidimensional a equação de onda é da forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0,$$

apresentando como solução

$$\phi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

onde F, G são funções quaisquer. Tal solução geral é conhecida como solução de D'Alembert. Podemos citar como caso particular de solução a onda plana $\phi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ que é, portanto, da forma $F(x - ct)$. Elucidamos por um simples experimento que a onda plana tem a propriedade de manter sua forma ao longo da propagação: suponha um observador capaz de percorrer o eixo x com velocidade c . Em (x_0, t_0) a onda tem (para ele) a forma $F(x_0 - ct_0)$. Passado o tempo t , o observador se encontra em $x = x_0 + ct$ e, agora, a onda tem a forma $F(x - c(t_0 + t)) = F(x_0 - ct_0)$, isto é, continua se apresentando

da mesma forma que se apresentava em (x_0, t_0) . Daí, diz-se que a onda tem a propriedade de manter sua forma ao longo da propagação. Logo, inferimos, também, que a onda plana tem a capacidade de resistir a difração e de certa forma podemos dizer que se trata de uma solução localizada.

A partir da onda plana podemos obter solução mais gerais fazendo a integração de ondas planas, isto é,

$$\phi(x, t) = \int S(k)e^{i(kx - \omega t)} dk,$$

onde $F(k)$ é uma função dada. Notamos que qualquer solução da forma apresentada acima continua sendo da forma $F(x - ct)$ e, portanto, as propriedades de manter sua forma inalterada ao longo da propagação e de resistir a difração perduram nestas novas soluções.

No caso tridimensional a obtenção de soluções mais gerais obtidas pela integração de ondas planas não necessariamente confere à estas as mesmas propriedades da onda plana em si.

A onda plana, solução particular da equação de onda tridimensional, é dada por $\phi = e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$ onde

$$\mathbf{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \quad \text{e} \quad \omega = |\mathbf{k}|c$$

e soluções gerais podem ser produzidas por

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \int \int S(k)e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} (dk)^3.$$

Assim, é preciso uma forma muito particular de integração para obtermos ondas localizadas. Adiantamos que para soluções com simetria axial, podemos aplicar a transformada Hankel para expressar nossas soluções e, a partir de escolhas adequadas de núcleos espectrais, obter soluções com características de localização. Verificamos facilmente que as soluções acima não possuem, necessariamente, uma dependência do tipo $\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z - ct)$ como constata-se nas ondas planas unidimensionais e, além disso, ainda que seja possível conseguir tal tipo de onda, isto não garantiria que a onda possuía uma propagação sem alterar sua forma.

De fato, suponhamos que $\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y)\eta(z - ct)$. Substituindo esta na equação de onda tridimensional observamos que deve ser verificado que

$$\Delta_{\perp}\phi(x, y) = 0.$$

Mas, notemos que as soluções desta última são soluções harmônicas, de onde concluímos que soluções com dependência do tipo $z - ct$ não devem ser localizadas transversalmente pois satisfazem a equação de Laplace.

Veremos, então, como obter soluções localizadas utilizando a transformada Hankel. Consideraremos a equação de ondas em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) e simetria axial que, neste caso, implica que $\frac{\partial}{\partial \phi} \Phi = 0$. Daí, a equação de onde reduz-se a forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(\rho, z, t) = 0.$$

Soluções para a equação acima podem ser obtidas pela transformada Hankel

$$\Phi(\rho, z, t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Phi}(k_\rho, k_z, \omega) dk_\rho dk_z d\omega$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem zero e $\bar{\Phi}$ é a transformada de $\Phi(\rho, z, t)$.

Se substituirmos a equação acima na equação de onda verificamos que os parâmetros k_ρ , k_z e ω devem satisfazer a seguinte relação

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_\rho^2 + k_z^2. \quad (2.1)$$

Isto nos permite escrever qualquer solução de uma maneira mais simples, isto é, podemos eliminar um dos parâmetros e escolher uma função espectral $S(k_\rho, \omega)$, a saber

$$\Phi(\rho, z, t) = \int_0^{\omega/c} \int_{-\infty}^\infty k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{i\sqrt{\omega^2/c^2 - k_\rho^2} z} e^{-i\omega t} S(k_\rho, \omega) dk_\rho d\omega. \quad (2.2)$$

A partir da expressão acima podemos obter diversas soluções (localizadas ou não) escolhendo adequadamente a função espectral $S(k_\rho, \omega)$. Exibiremos alguns resultados conhecidos.

O feixe gaussiano

$$\Phi_{fg}(\rho, z, t) = \frac{a^2 \exp\left(\frac{-\rho^2}{4(a^2 + iz/2k_0)}\right)}{a^2 + iz/2k_0} e^{ik_0(z-ct)}$$

pode ser obtido fazendo

$$S(k_\rho, \omega) = 2a^2 e^{-a^2 k_\rho^2} \delta(\omega - \omega_0)$$

onde a é uma constante positiva.

Por outro lado, o pulso gaussiano

$$\Phi_{pg}(\rho, z, t) = \frac{a^2 \exp\left(\frac{-\rho^2}{4(a^2 + iz/2k_0)}\right)}{a^2 + iz/2k_0} \exp\left(\frac{-(z - ct)^2}{4c^2b^2}\right)$$

pode ser obtido fazendo

$$S(k_\rho, \omega) = \frac{2ba^2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2k_\rho^2} e^{-b^2(\omega - \omega_0)^2}$$

onde a e b são constantes positivas.

Em seguida, apresentamos soluções localizadas obtidas pela escolha da função espectral $S(k_\rho, \omega)$.

Feixe de Bessel: Consideramos que

$$S(k_\rho, \omega) = \frac{\delta(k_\rho - \frac{\omega}{c} \sin \theta)}{k_\rho} \delta(\omega - \omega_0),$$

que não se anula somente quando $k_\rho = \omega \sin \theta / c$, com $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Substituindo k_ρ dado da forma anterior na relação (2.1) vem que $k_z = \omega \cos \theta / c$. Agora, substituindo a equação anterior em (2.2) obtemos

$$\Phi_{fb}(\rho, z, t) = J_0\left(\frac{\omega_0}{c} \rho \sin \theta\right) \exp\left(i \frac{\omega_0}{c} \cos \theta \left(z - \frac{c}{\cos \theta} t\right)\right)$$

chamado Feixe de Bessel.

Notemos que, dependendo do ângulo θ , a velocidade de fase $v_{ph} = c / \cos \theta$ pode ser superior a velocidade c . Além disso, transversalmente, o feixe de Bessel é caracterizado pela função de Bessel J_0 e, portanto, é mais intenso nas proximidades de $\rho = 0$ (ou do eixo de propagação z).

X-shaped Pulso: Aqui considera-se a função espectral

$$S(k_\rho, \omega) = \frac{\delta(k_\rho - \frac{\omega}{c} \sin \theta)}{k_\rho} F(\omega),$$

onde $F(\omega)$ é uma função espectral de frequência. Substituindo $S(k_\rho, \omega)$ dado acima em (2.2) segue que

$$\Phi_X(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) J_0\left(\frac{\omega}{c} \rho \sin \theta\right) \exp\left(\frac{\omega}{c} \cos \theta \left(z - \frac{c}{\cos \theta} t\right)\right) d\omega.$$

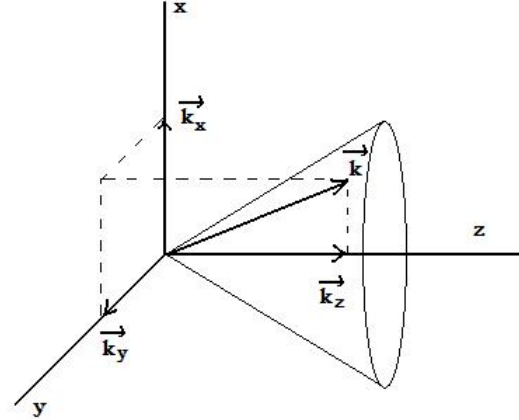


Figura 2.3: Interpretação Geométrica

É importante notar que os pulsos dados pela expressão acima são não-difrativos, pois, preservam sua forma transversal ao se propagar e, além disso, vale destacar que verifica-se a propriedade $\Phi_X(\rho, z, t) = \Phi_X(\rho, z - Vt)$ onde $V = c/\cos\theta$.

2.4 Frozen Waves

É possível, através da superposição adequada de ondas propagantes de mesma frequência (como feixes de Bessel), moldar um feixe cuja forma longitudinal esteja em fixa num intervalo qualquer $a < z < b$ onde z está no eixo de propagação e $|b - a| \gg \lambda$, com λ o comprimento de onda da feixe monocromático utilizado. Estas ondas são de grande interesse prático. A seguir são mostrados sucintamente os passos básicos para obtenção de tais soluções.

Seja o feixe de Bessel

$$\phi(\rho, z, t) = J_0(k_\rho \rho) e^{i(\beta z - \omega t)}$$

onde as frequências angulares satisfazem a relação

$$k_\rho^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

e $\omega/\beta > 0$ e $k_\rho^2 \geq 0$.

Superpondo $2N + 1$ feixes de Bessel de mesma frequência ω_0 e diferentes números de ondas longitudinais β_n obtém-se

$$\phi_F(\rho, z, t) = \sum_{-N}^N A_n J_0(k_{\rho n} \rho) e^{i(\beta_n z - \omega_0 t)}$$

onde os A_n são coeficientes reais e os β_n serão determinados depois.

Dadas as condições impostas para os números de onda, segue-se que

$$0 \leq \beta_n \leq \frac{\omega_0}{c}.$$

Agora, supõe-se existir uma função $F \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $|\phi_F(0, z, t)|^2$ assumira a forma de $|F|^2$ no intervalo $[0, L]$. Esta F , em termos de série de Fourier, pode ser escrita por

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{i\frac{2\pi}{L}nz}$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$B_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-i\frac{2\pi}{L}nz} dz.$$

É razoável escolher

$$\beta_n = C + \frac{2\pi}{L}n$$

onde $C > \frac{2\pi}{L}n$, $\forall n \in \{-N, \dots, N\}$, para garantir $\beta_n > 0$. Finalmente, conclui-se que

$$\phi_F(0, z, t) = e^{i(Cz - \omega_0 t)} \sum_{-N}^N A_n e^{i\frac{2\pi}{L}nz}$$

tal que

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-i\frac{2\pi}{L}nz} dz.$$

Notar que a velocidade de grupo de $\phi_F(0, z, t)$ é $V = 0$ pois F é fixa, o que justifica o nome *frozen wave*.

2.5 Ondas Localizadas devido defeitos do material

Um outro tipo de localização de onda é a chamada localização de Anderson [11]. Esta forma de localização de ondas eletromagnéticas surge de imperfeições nos materiais os quais favorecem o aparecimento de regiões de ondas estacionárias para determinadas faixas de frequências. As faixas de frequências para as quais não há propagação são chamadas *bandgaps*. As origens físicas para o surgimento de *bandgaps* e localização de ondas eletromagnéticas são as interferências destrutivas e os múltiplos espalhamentos devidos às impurezas do material.

Uma abordagem matemática bastante interessante sobre este assunto é feita por Figotin, Klein e o próprio Anderson [12][11]. Nestes trabalhos os autores utilizam-se dos operadores de Maxwell para construir uma equação de primeira ordem do tipo Schrödinger associada às equações de Maxwell. Desta equação partem as análises espectrais necessárias para mostrar a existência de autovalores associados a equação que produzem soluções localizadas, isto é, tais que a energia esteja fixa numa determinada região do espaço analisado. Além disso, para determinadas frequências (pertencentes ao *bandgap*) os autores mostram o por quê da não propagação da onda.

Figotin e Klein [12] mostram a obtenção de ondas localizadas para meios perturbados analisando a existência de pontos espectrais isolados em um intervalo fechado do espectro dos operadores que aparecem nas equações acima aos quais operadores de Maxwell chamam.

Mais especificamente, os autores consideram que $\epsilon(x)$ é uma função mensurável de valores reais satisfazendo $0 < \epsilon_- < \epsilon(x) < \epsilon_+ < +\infty$ onde ϵ_-, ϵ_+ são constantes positivas finitas. Os autores mostram que para certos tipos de materiais, a saber, por exemplo, aqueles onde há mudança drástica de valores em $\epsilon(x)$ numa vizinhança estreita, é possível mostrar a existência de pontos isolados no espectro dos operadores de Maxwell e a conseqüente existência de soluções localizadas.

Neste trabalho, cujo principal está no capítulo a seguir, todavia, levamos em consideração materiais não desordenados, porém, portadores de memória, isto é, aqueles em que a evolução de campos em tempos passados influencia a dinâmica dos campos no tempo presente.

Capítulo 3

Comportamento Assintótico e Localização em Meios Dielétricos Não-ideais com Memória

3.1 Introdução

Na teoria eletromagnética, muitos autores têm publicado artigos tratando da propagação de onda em materiais onde, na formulação matemática, as relações constitutivas não levam em consideração a influência da memória do material, ou seja, a propriedade que tem o material de guardar informações do passado. Por outro lado, atualmente, alguns autores ([4], [5]), a maioria deles matemáticos, analisam as características de propagação eletromagnética nos referidos materiais. Por exemplo, a análise do comportamento assintótico da energia eletromagnética para sistemas de evolução de campos em condutores com memória e na ionosfera vem sendo bastante estudada.

Os motivos que levam ao estudo de materiais com memória surgem da importância das aplicações decorrentes da teoria e do fato de que estes representam mais fielmente as características observadas em casos reais. Além disso, gradualmente, pesquisadores das ciências exatas têm encontrado importantes observações e aplicações quando é estudado problemas oriundos de fenômenos de absorção e dispersão de ondas eletromagnéticas. Em 1877, Hopkinson propôs uma teoria para descrever tais fenômenos observados em seus experimentos com a garrafa de Leyden. Seu trabalho e outros que vieram em seguida sugeriam que as relações constitutivas, que dependem de características intrínsecas de cada material, deveriam ser modificadas. Existem muitas possibilidades para relações constitutivas para diferentes fenômenos

físicos. Como exemplo, sejam $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ and \mathbf{J} os vetores *intensidade de campo elétrico, intensidade de campo magnético, densidade de fluxo elétrico, densidade de fluxo magnético e densidade de corrente elétrica induzida*. As seguintes relações constitutivas caracterizam um material dielétrico com memória

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_0^\infty \varepsilon'(\mathbf{x}, s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - s) ds \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= 0.\end{aligned}$$

isto é, há uma relação entre a densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} e a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} que leva em consideração a influência do passado no comportamento atual. Isto quer dizer que o vetor $\mathbf{D}(t_0)$ é influenciado pelo vetor campo elétrico $\mathbf{E}(t)$ para todos os valores de $t < t_0$. Alguns autores a classificam de *relação de hereditariedade*. A relação usual $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ não considera fenômenos tais como a absorção e dispersão de campos eletromagnéticos devido às características do material.

A função *kernel* de memória pode ser vista como uma função de relaxação, isto é, caracteriza como a história do campo elétrico vai influenciar a densidade de fluxo elétrico. Em [6] o autor usa como kernel uma função monotonamente decrescente do tipo $\varepsilon'(t) = R(t) = \alpha \exp(-at)$ representando a contribuição do passado no presente onde α é o parâmetro de decaimento. Naquele artigo, o autor mostra explicitamente uma solução localizada e soluções harmônicas para a equação de onda representativa.

Em [4] os autores analisam sistemas de evolução da teoria de eletromagnetismo com hereditariedade, especificamente, eles estudam um modelo geral de materiais condutores com memória e outro para fenômenos ionosféricos. Em ambos os modelos, as relações constitutivas do material consideram a história do campo elétrico. Em seguida, eles usam funcionais de Lyapunov e abordagem por semigrupos para mostrar a existência de soluções, falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial da energia.

Em [6] encontramos uma abordagem diferente daquela feita em [5] ou [4] para análise de propagação eletromagnética. As duas últimas citações são focadas na formulação matemática, existência de solução e comportamento assintótico de soluções globais para as equações de Maxwell com relações constitutivas com memória. Ou seja, eles mostram a existência de solução e como a energia eletromagnética decai quando o tempo tende ao infinito. Soluções explícitas ou eventuais aplicações não são dadas. Por outro lado,

em [6] encontramos uma abordagem mais próxima da engenharia, onde o autor mostra soluções particulares obtidas considerando algumas restrições e suposições, feitas devido a dificuldade do problema geral.

Neste capítulo mostramos a existência de soluções para o problema de campos eletromagnéticos em condutores com memória. Aqui, fazemos algumas considerações mais gerais que as feitas em [6]. As relações constitutivas consideradas aqui são

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 f * \mathbf{E} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_0 g * \mathbf{E},\end{aligned}$$

onde $*$ denota a convolução que é dada por $f * \mathbf{E} = \int_0^\infty f(s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - s) ds$.

Assumimos que o kernel é uma função que decai exponencialmente para zero e mostramos soluções analíticas aproximadas para soluções harmônicas e localizadas dadas por funções de Bessel.

O capítulo está organizado como segue. Na seção II, fazemos uma formulação matemática para a evolução eletromagnética em condutores com memória. Na seção III, mostramos a existência de solução para o modelo derivado na seção II usando uma abordagem por semigrupos. Nas seções IV, V e VI mostramos que a energia associada ao sistema decai exponencialmente. Da seção VII em diante temos a obtenção de ondas localizadas para o mesmo modelo. Encontramos soluções aproximadas que propagam na região próxima ao eixo de propagação e *focus wave modes*. Elas são expressas por funções de Bessel.

3.2 Formulação Matemática

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, i.e., a fronteira é de classe C^∞ . Como usual $t \in \mathbb{R}$ denota o tempo. Consideraremos as equações de Maxwell no espaço-tempo $\Omega \times \mathbb{R}^+$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{B}_t(\mathbf{x}, t) \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{3.4}$$

com as seguintes relações constitutivas para materiais condutores com memória, i.e.,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \int_0^\infty f(s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t-s) ds \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_0 \int_0^\infty g(s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t-s) ds.\end{aligned}$$

Supomos as hipóteses de que as funções kernel de memória $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ são contínuas e integráveis sobre $[0, \infty)$. Além disso, assumimos que elas satisfazem ¹

$$f', g' < 0, \quad f'', g'' > 0 \quad \text{e} \quad f''' < 0 \quad (3.5)$$

e que

$$\int_0^\infty f(s) ds < +\infty, \quad \int_0^\infty g(s) ds < +\infty.$$

A condição imposta acima sobre as integrais de f e g é apenas um formalismo matemático para evitar sobrecarga de notação posteriormente. O que importa é que tais funções são de classe $L^1(\mathbb{R}_+)$, integráveis no sentido de Lebesgue. Notar que se as funções de memória são o delta de Dirac seguem-se as relações constitutivas usuais.

Agora, como estamos considerando a ausência de cargas livres obtemos que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Deste modo, usando as conhecidas fórmulas para rotacionais temos que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$. Utilizando esta última equação, tomando o operador rotacional em ambos os lados de (3.1) e usando a segunda relação constitutiva (3.2)

$$-\Delta \mathbf{E} = -\mu_0 (\mathbf{D}_{tt} + \mathbf{J}_t)$$

e, fazendo uso da primeira e terceira relações constitutivas, obtemos

$$\begin{aligned}\mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_{tt} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_0^\infty f(s) \mathbf{E}_{tt}(t-s) ds + \\ + \mu_0 \sigma_0 \int_0^\infty g(s) \mathbf{E}_t(t-s) ds - \Delta \mathbf{E} = 0\end{aligned} \quad (3.6)$$

¹A notação $f^{(n)}$ indica derivada de ordem n com relação a s . Em geral, poder-se-ia ter assumido que $(-1)^{n+1} f^{(n)} < 0$ valendo também para g . Importa observar que funções da forma $f(s) = \alpha e^{-\alpha s}$, $\alpha > 0$, satisfazem as propriedades expressas. Na análise de ondas harmônicas e localizadas será suposto f, g assumindo esta forma.

Fazendo $k_1(s) = -g'(s)$, $k_2(s) = -f''(s)$ é fácil verificar que

$$\int_0^\infty k_1(s)(\mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(t-s))ds = \int_0^\infty g(s)\mathbf{E}_t(t-s)ds$$

e

$$f(0)\mathbf{E}_t(t) + \int_0^\infty k_2(s)(\mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(t-s))ds = \int_0^\infty f(s)\mathbf{E}_{tt}(t-s)ds$$

bastando para isto integração por partes e utilizar as hipóteses de que f e g devem se anular no infinito, ou seja, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$. Não havíamos colocados estas hipóteses, no entanto, as mesmas são conseqüências imediatas das hipóteses iniciais, isto é, se f e g são contínuas e integráveis satisfazendo $f', g' < 0$, então, segue os limites apresentados. De fato, se f é contínua, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = c > 0$ e $f' < 0$ temos que $f(s) > c, \forall s > 0$. Integrando esta desigualdade de 0 a ∞ concluiríamos que f não é integrável pois o lado direito tenderia ao infinito. Pondo todas as constantes físicas iguais a um, chegamos a

$$\mathbf{E}_{tt} - \Delta \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_t + \int_0^\infty k(s)(\mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(t-s))ds = 0 \quad (3.7)$$

onde $\alpha = f(0) > 0$ e $k(s) = k_1(s) + k_2(s) > 0$.

Acima, consideramos $-g' - f'' > 0$ e que $-g'' - f''' < 0^2$. Com intenção de usar uma abordagem via semigrupos e seguindo a abordagem feita por Dafermos [9], introduzimos a *história relativa da intensidade de campo elétrico* $\eta^t(\mathbf{x}, s)$ ³ definida como

$$\eta^t(s) = \mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(t-s). \quad (3.8)$$

Usando a última relação e fácil ver que

$$\eta_t^t + \eta_s^t = \mathbf{E}_t(t).$$

²Esta hipótese é fundamental para se assegurar a existência de solução usando semigrupos. É importante notar que o operador associado a este problema será dissipativo se $k'(s) < 0$. No caso em que $f(s) = a_1 e^{-a_1 s}$ e $g(s) = a_1(a_1 + \epsilon)e^{-a_1 s}$, $a_1, \epsilon > 0$, as hipóteses mencionadas conduziram a $a_1^2(a_1 + \epsilon)e^{-a_1 s} - a_1^3 e^{-a_1 s} > 0$ e $-a_1^3(a_1 + \epsilon)e^{-a_1 s} + a_1^4 e^{-a_1 s} < 0$

³A variável η introduzida faz-se necessária para transformar o modelo matemático num problema de Cauchy autônomo, isto é, algo da forma $U_t = \mathcal{A}U$. Caso contrário o próprio operador convolução forçaria a um sistema $U_t = \mathcal{A}(t)U$ cujas soluções não definem um semigrupo, mas este não é o objetivo aqui.

Deste modo, formulamos o sistema de evolução para o campo elétrico em um condutor com memória. Substituindo a relação introduzida (3.8) em (3.7) o sistema de evolução pode ser expresso da seguinte maneira

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{tt} - \Delta \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_t + \int_0^\infty k(s) \eta(s) ds = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \eta_t^t = -\eta_s^t + \mathbf{E}_t. \end{cases} \quad (3.9)$$

Para as condições iniciais consideramos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(-t) &= \mathbf{E}_0(t), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{E}_t(t) &= \mathbf{E}_1(t), & \text{em } \Omega \\ \mathbf{E}(t) \times \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde as funções $\mathbf{E}_0 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^3$ e $\mathbf{E}_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ são dadas e \mathbf{n} é o vetor unitário normal apontando para fora em cada ponto da fronteira $\partial\Omega$.

Para escrever o sistema de evolução como um problema de Cauchy, temos que saber os dados iniciais em $t = 0$. Para isto pomos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_0(0) \\ \eta_0(s) &= \mathbf{E}_0(0) - \mathbf{E}_0(s) \\ \mathbf{E}(t) \times \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \eta^t \times \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega \quad s > 0 \quad t \geq 0, \\ \eta^t(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \eta^t(s) = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Em seguida, usando as equações acima vem que

$$\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{E}_t(0) = \mathbf{E}_1, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.12)$$

$$\eta^0 = \eta_0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+. \quad (3.13)$$

A próxima seção é voltada para a existência de solução para o problema (3.9) com as condições (3.11)-(3.13). Faremos uso de técnicas de semigrupo para mostrar que o problema tem solução definida por um semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert a ser mostrado posteriormente.

3.3 Existência de Solução

Nosso objetivo inicial é escrever o sistema (3.9) com as condições (3.11)-(3.13) como um problema de Cauchy abstrato do tipo

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

definido em um espaço de Hilbert adequado.

Aqui, vamos usar técnicas de semigrupo para mostrar a existência de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{-\mathcal{A}t}$ para o problema de Cauchy associado ao problema (3.9). Primeiro, introduzimos alguns funcionais e algumas notações.

3.3.1 Notações e Espaços Funcionais

Como usual $L^2(\Omega)$ denota o espaço de Hilbert das funções quadrado integráveis e, neste espaço, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno e $\|\cdot\|$ denota a norma. Para uma adequada formulação do problema de evolução, introduzimos os seguintes espaços

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{v \in L^2(\Omega) : \nabla \cdot v = 0\} \\ \mathcal{H} &= \{v \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{V} : v \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\} \\ \mathcal{W} &= L_k^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}). \end{aligned}$$

O espaço \mathcal{W} é L^2 -ponderado com respeito a medida $k(s)ds$. Assim,

$$\eta \in \mathcal{W} \Leftrightarrow \int_0^\infty \|\eta\|^2 k(s) ds.$$

Além disso, introduzimos o operador linear $T = -\partial_s$ com domínio

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \eta \in \mathcal{W} : \eta_s \in \mathcal{W}, \eta(0) = 0 \right\}.$$

Para que façamos uma formulação abstrata definimos o operador $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $A \equiv -\Delta$ com domínio $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap \mathcal{H}$. O operador A assim definido é auto-adjunto e positivo definido. No espaço de domínio $\mathcal{D}(A^{r/2})$, para $r = 0, 1, 2$ definimos o produto interno

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{D}(A^{r/2})} = \langle A^{r/2}\xi_1, A^{r/2}\xi_2 \rangle = \int A^{r/2}\xi_1 A^{r/2}\xi_2 dx.$$

onde as imersões compactas $\mathcal{D}(A^{r_1/2}) \subset\subset \mathcal{D}(A^{r_2/2})$ ocorrem sempre que $r_1 > r_2$. É importante notar que $r = 0, 1, 2$ está associado a \mathcal{V} , \mathcal{H} e $\mathcal{D}(A)$, respectivamente e, desta forma, valem as imersões $\mathcal{D}(A) \subset\subset \mathcal{H} \subset\subset \mathcal{V}$. Por conseguinte, estão bem definidas algumas potências para o referido operador e, em particular, denotamos $A^{1/2}\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$. Observemos que

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle_{\mathcal{D}(A^{1/2})} = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dx = \int_{\Omega} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dx = \langle A\mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle.$$

Também assumimos que as funções kernel de memória $k_1, -k_2 \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap H^1(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$k(s) \geq 0, \quad \forall s \geq 0, \quad (3.14)$$

$$0 < \int_0^\infty |k_i(s)| ds = \beta_i < \infty. \quad (3.15)$$

Para uma boa formulação consideramos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{S} = \mathcal{H} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}. \quad (3.16)$$

onde estará posto o problema de Cauchy equivalente ao sistema de evolução (3.9). Em \mathcal{S} definimos o produto interno

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{S}} = \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathcal{D}(A^{1/2})} + \langle u_2, v_2 \rangle + \langle u_3, v_3 \rangle_{\mathcal{W}}, \quad (3.17)$$

onde $U = [u_1, u_2, u_3]^T$ e $V = [v_1, v_2, v_3]^T$ são elementos de \mathcal{S} . Fica claro que o produto interno é definido assim para a energia do sistema seja dada por $1/2 \langle U, U \rangle_{\mathcal{S}} = 1/2 \|U\|_{\mathcal{S}}^2$.

3.3.2 Existência de Solução: Abordagem via semigrupo

Fazendo

$$\begin{aligned} U(t) &= [\mathbf{E}(t), \mathbf{E}_t(t), \eta^t]^T, \\ U_0 &= [\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \eta_0]^T, \end{aligned}$$

o problema (3.9) pode ser reescrito como uma equação linear de evolução abstrata no espaço de Hilbert \mathcal{S} da forma

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), & t > 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

onde o operador \mathcal{A} é definido como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E}_t \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -A & -\alpha & -\int_0^\infty k(s)(\cdot)ds \\ 0 & I & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E}_t \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ -A\mathbf{E} - \alpha\mathbf{E}_t - \int_0^\infty k(s)\eta(s)ds \\ T\eta + \mathbf{E}_t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{S} : \mathbf{E}_t \in \mathcal{H} \cap \mathcal{W}, \quad \mathbf{E} \in \mathcal{D}(A), \quad \eta \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Agora, usando o produto interno (3.17) e a hipótese (3.14) temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} &= \langle \mathbf{E}_t, \mathbf{E} \rangle_{\mathcal{D}(A^{1/2})} + \langle T\eta + \mathbf{E}_t, \eta \rangle_{\mathcal{W}} \\ &\quad + \langle -A\mathbf{E} - \alpha\mathbf{E}_t - \int_0^\infty k(s)\eta(s)ds, \mathbf{E}_t \rangle \end{aligned}$$

e tomando a parte real \Re segue-se que

$$\begin{aligned} \Re \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} &= -\alpha \int_{\Omega} |\mathbf{E}_t|^2 dx + \Re \langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= -\alpha \|\mathbf{E}_t\|^2 - \Re \langle \eta_s, \eta \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= -\alpha \|\mathbf{E}_t\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty k'(s) \|\eta(s)\|^2 ds \leq 0. \end{aligned}$$

Desta forma, temos concluído que \mathcal{A} é um operador dissipativo em \mathcal{S} . Por conseguinte, aplicando o teorema de Lumer-Phillips (ver Apêndice A) podemos provar o

Teorema 3.3.1. *O operador linear \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações e^{At} sobre \mathcal{S} .*

Demonstração. Foi visto que \mathcal{A} é dissipativo. É suficiente, portanto, provar que $I - \mathcal{A}$ é um operador sobrejetor para completar a prova.

Considerando a equação resolvente $U - \mathcal{A}U = F$ em termos de suas componentes

$$\begin{cases} \mathbf{E} - \mathbf{E}_t = F_1 \\ \mathbf{E}_t + A\mathbf{E} + \alpha\mathbf{E}_t + \int_0^\infty k(s)\eta(s)ds = F_2 \\ \eta - T\eta - \mathbf{E}_t = F_3. \end{cases} \quad (3.19)$$

será mostrado que existe solução única U que a resolve quando $F \in \mathcal{S}$.

Da equação diferencial (3.19)₃ vem que

$$\eta(s) = \mathbf{E}_t(1 - e^{-s}) + e^{-s} \int_0^s \mathbf{F}_3(t)e^{-t} dt.$$

Substituindo \mathbf{E}_t de (3.19)₁ na igualdade acima e em (3.19)₂ obtém-se

$$(1 + \alpha + k_1 + A)\mathbf{E} = (1 + \alpha + k_1)F_1 + F_2 - \int_0^\infty e^{-s} \int_0^s \mathbf{F}_3(t)e^{-t} dt k(s) ds.$$

onde $k_1 = \int_0^\infty k(s)(1 - e^{-s}) ds$.

Como o operador $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $A \equiv -\Delta$ com domínio $\mathcal{D}(A) = H^2 \cap \mathcal{H}$ é sabido ser elíptico, segue que $(1 + \alpha + k_1 + A)$ também é, donde vem a garantia de uma solução $\mathbf{E} \in \mathcal{H}$ para a equação acima. Com isto \mathbf{E}_t e η estão bem definidos e determinados.

□

O que acabamos de provar é que \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$. Quando os dados iniciais $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ segue a existência de solução única para o problema proposto (3.18). De fato, notemos que $U(t) = T(t)U_0$ resolve (3.18), isto é, $U(0) = U_0$ e $U_t(t) = \frac{dT(t)}{dt}U_0 = \mathcal{A}T(t)U_0 = \mathcal{A}U_0$. A unicidade decorre da unicidade do semigrupo gerado por \mathcal{A} .

3.4 Estabilidade Exponencial

Aqui, mostraremos que a energia associada ao problema (3.9) com as condições iniciais (3.11)-(3.13) decai exponencialmente quando o tempo tende para o infinito. Assumimos existir constantes $a, b > 0$ tais que

$$-ak(s) \leq k'(s) \leq -bk(s). \quad (3.20)$$

Usaremos o teorema de Pruss que mostra as condições necessárias e suficientes para que haja o decaimento exponencial de C_0 -semigrupos, isto é, mostraremos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda \geq 0\} &\subset \rho(\mathcal{A}) \\ \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{S}} &< C, \end{aligned} \quad (3.21)$$

para todo $\Re\lambda \geq 0$ e onde $\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ é linear e contínuo}\}$ é o conjunto resolvente de \mathcal{A} .

Iniciamos com a equação resolvente $\lambda U - \mathcal{A}U = F$, onde $U = [\mathbf{E}, \mathbf{E}_t, \eta]^T$, $F = [F_1, F_2, F_3]^T \in \mathcal{S}$, em termos de suas componentes, isto é

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{E} - \mathbf{E}_t = F_1 \\ \lambda \mathbf{E}_t + A\mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_t + \int_0^\infty k(s)\eta(s)ds = F_2 \\ \lambda \eta - T\eta - \mathbf{E}_t = F_3. \end{cases} \quad (3.22)$$

Multiplicando a segunda equação de (3.22) por \mathbf{E}_t , obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \|\mathbf{E}_t\|^2 + \langle A^{1/2}\mathbf{E}, A^{1/2}\mathbf{E}_t \rangle \\ + \alpha \|\mathbf{E}_t\|^2 + \int_0^\infty k(s)\langle \eta(s), \mathbf{E}_t \rangle ds = \langle F_2, \mathbf{E}_t \rangle \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a terceira equação por $\int_0^\infty k(s)\eta(s)ds$ temos que

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty k(s)\|\eta(s)\|^2 ds + \int_0^\infty k(s)\langle \eta_s(s), \eta(s) \rangle ds \\ - \int_0^\infty k(s)\langle \eta(s), \mathbf{E}_t \rangle ds = \int_0^\infty k(s)\langle \eta(s), F_3 \rangle ds. \end{aligned}$$

Somando as duas últimas equações e usando \mathbf{E}_t da primeira equação em (3.22) vem que

$$\begin{aligned} \lambda \|\eta(s)\|_{\mathcal{M}}^2 - \int_0^\infty k'(s)\|\eta(s)\|^2 ds + \lambda \|\mathbf{E}_t\|^2 + \bar{\lambda} \|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 \\ + \alpha \|\mathbf{E}_t\|^2 = \int_0^\infty k(s)\langle \eta(s), F_3 \rangle ds \\ + \langle A^{1/2}\mathbf{E}, A^{1/2}F_1 \rangle + \langle F_2, \mathbf{E}_t \rangle. \end{aligned}$$

Desde que os termos no lado direito da última igualdade são todos positivos, tomando a parte real obtemos

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{E}_t\|^2 \leq \Re \int_0^\infty k(s)\langle \eta(s), F_3 \rangle ds + \Re \langle A^{1/2}\mathbf{E}, A^{1/2}F_1 \rangle \\ + \Re \langle F_2, \mathbf{E}_t \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade ϵ -Young concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{E}_t\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2} \left\{ \|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \right\} + \frac{1}{2\alpha} \|F_2\|^2 \\ + \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \|A^{1/2}F_1\|^2 + \|F_3\|_{\mathcal{M}}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pela mesma idéia anterior e usando (3.20) é verdade que

$$(b - \epsilon)\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \epsilon\|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|F_2\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\left\{\|A^{1/2}F_1\|^2 + \|F_3\|_{\mathcal{M}}^2\right\}. \quad (3.24)$$

Agora, multiplicando a segunda equação (3.22) por \mathbf{E}

$$\lambda\langle\mathbf{E}_t, \mathbf{E}\rangle + \|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 + \alpha\langle\mathbf{E}_t, \mathbf{E}\rangle + \int_0^\infty k(s)\langle\eta(s), \mathbf{E}\rangle ds = \langle F_2, \mathbf{E}\rangle,$$

aplicando Cauchy-Schwarz, usando \mathbf{E} da primeira equação em (3.22)

$$\|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 \leq \|\mathbf{E}_t\|^2 + \|\mathbf{E}_t\|\|F_1\| + \|F_2\|\|\mathbf{E}\| + \int_0^\infty k(s)\|\eta(s)\|\|\mathbf{E}\| ds + \alpha\|\mathbf{E}_t\|\|\mathbf{E}\|,$$

e aplicando o Lema de Peetre (ver [4]) ($\|\mathbf{E}\|^2 \leq C(\Omega)\|\nabla \times \mathbf{E}\|^2 = C(\Omega)\|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2$) é possível chegar a

$$c_1(\alpha, \Omega)\|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 \leq c_2(\alpha)\|\mathbf{E}_t\|^2 + c_3(\Omega)\|A^{1/2}F_1\|^2 + c_4\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \|F_2\|^2, \quad (3.25)$$

onde c_i são todas constantes positivas.

Finalmente, podemos multiplicar (3.23), (3.24) e (3.25) por constantes positivas adequadas para obter

$$C_1\left\{\|A^{1/2}\mathbf{E}\|^2 + \|\mathbf{E}_t\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2\right\} \leq C_2\left\{\|A^{1/2}F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + \|F_3\|_{\mathcal{M}}^2\right\}$$

que implica $\|U\|_{\mathcal{S}} \leq M\|F\|_{\mathcal{S}}$, onde $M > 0$. Desde que $U = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$, tomando a norma do supremo vem que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{S}} = \sup_{\|F\| \leq 1} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\| \leq M.$$

Então, pelo Teorema de Pruss (Ver Apêndice B), o semigrupo decai exponencialmente (ver também [10]). É importante notar que a energia $\mathcal{E}(t)$ é tal que

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \|e^{-At}\|_{\mathcal{S}}^2\|U_0\|_{\mathcal{S}}^2 \leq Ce^{-2kt}\|U_0\|_{\mathcal{S}}^2.$$

Destacamos que a taxa de decaimento obtida pode não ser ótima.

3.5 Análise de Decaimento para \mathbf{H}

Tomando o rotacional em (3.2) e considerando as relações constitutivas encontra-se que $-\Delta\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{D}_t + \nabla \times \mathbf{J}$ donde

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{H} &= \epsilon_0 \nabla \times \mathbf{E}_t + \epsilon_0 \int_0^\infty f(s) \nabla \times \mathbf{E}_t(t-s) ds + \sigma_0 \int_0^\infty g(s) \nabla \times \mathbf{E}(t-s) ds \\ &= -\epsilon_0 \mathbf{B}_{tt} - \epsilon_0 \int_0^\infty f(s) \mathbf{B}_{tt}(t-s) ds - \sigma_0 \int_0^\infty g(s) \mathbf{B}_t(t-s) ds \\ &= -\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{H}_{tt} - \epsilon_0 \mu_0 \int_0^\infty f(s) \mathbf{H}_{tt}(t-s) ds - \sigma_0 \mu_0 \int_0^\infty g(s) \mathbf{H}_t(t-s) ds \end{aligned}$$

e fazendo todas as constantes envolvidas iguais a 1 obtemos

$$\mathbf{H}_{tt} - \Delta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{H}_t(t) + \int_0^\infty r(s)\xi^t(s) ds = 0,$$

onde $r = r_1 + r_2$, $r_1(s) = -f''(s)$, $r_2(s) = -g'(s)$ e $\xi^t(s) = \mathbf{H}(s) - \mathbf{H}(t-s)$.

Analogamente ao que foi feito para o campo elétrico concluimos que

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{tt} - \Delta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{H}_t + \int_0^\infty r(s)\xi^t(s) ds = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \xi_t = -\xi_s + \mathbf{H}_t. \end{cases} \quad (3.26)$$

Para as condições iniciais consideramos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(-t) &= \mathbf{H}_0(t), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{H}_t(t) &= \mathbf{H}_1(t), & \text{em } \Omega \\ \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde as funções $\mathbf{H}_0 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^3$ e $\mathbf{H}_1 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ são dadas e \mathbf{n} é o vetor unitário na direção exterior em cada ponto da fronteira $\partial\Omega$.

Para escrever o sistema de evolução como um problema de Cauchy, temos que saber os dados iniciais em $t = 0$. Para isto pomos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{H}_0(0) \\ \xi_0(s) &= \mathbf{H}_0(0) - \mathbf{H}_0(s) \\ \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \xi^t \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega \quad s > 0 \quad t \geq 0, \\ \xi^t(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \xi^t(s) = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Das equações acima vem que

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{H}_t(0) = \mathbf{H}_1, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.29)$$

$$\xi^0 = \xi_0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+. \quad (3.30)$$

Definimos os seguintes espaços

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \{v \in L^2(\Omega) : \nabla \cdot v = 0\} \\ \mathcal{H}_h &= \{v \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{V} : v \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\} \\ \mathcal{W}_h &= L_r^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{H}_h). \end{aligned}$$

O espaço \mathcal{W}_h é L^2 -ponderado com respeito a medida $r(s)ds$. Além disso, utilizamos o operador linear $T_h = -\partial_s$, similar ao definido na análise de campo elétrico, com domínio

$$\mathcal{D}(T_h) = \left\{ \xi \in \mathcal{W}_h : \xi_s \in \mathcal{W}_h, \xi(0) = 0 \right\}.$$

Para a formulação abstrata utilizamos o operador $A : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}_h$ tal que $A_h \equiv -\Delta$ com domínio $\mathcal{D}(A_h) = H^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_h$. O operador A_h é auto-adjunto e positivo definido. No espaço de domínio $\mathcal{D}(A_h^{\gamma/2})$, para $\gamma = 0, 1, 2$ definimos o produto interno

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{D}(A_h^{\gamma/2})} = \langle A_h^{\gamma/2} \xi_1, A_h^{\gamma/2} \xi_2 \rangle = \int A_h^{\gamma/2} \xi_1 A_h^{\gamma/2} \xi_2 dx.$$

onde as imersões compactas $\mathcal{D}(A_h^{\gamma_1/2}) \subset\subset \mathcal{D}(A_h^{\gamma_2/2})$ ocorrem sempre que $\gamma_1 > \gamma_2$.

Assumimos que as funções kernel de memória $r_1, -r_2 \in C^1(\mathbf{R}^+) \cap H^1(\mathbf{R}^+)$ tal que

$$r(s) \geq 0, \quad \forall s \geq 0, \quad (3.31)$$

$$0 < \int_0^\infty |r_i(s)| ds = \theta_i < \infty. \quad (3.32)$$

Para uma boa formulação consideramos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{H}_h \times \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h. \quad (3.33)$$

onde estará posto o problema de Cauchy equivalente ao sistema de evolução (3.26). Em \mathcal{S}_h definimos o produto interno

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{S}} = \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathcal{D}(A_h^{1/2})} + \langle u_2, v_2 \rangle + \langle u_3, v_3 \rangle_{\mathcal{W}_h}, \quad (3.34)$$

onde $U = [u_1, u_2, u_3]^T$ e $V = [v_1, v_2, v_3]^T$ são elementos de \mathcal{S}_h . Além disso, produto interno é definido assim para a energia do sistema seja dada por $1/2 \langle U, U \rangle_{\mathcal{S}} = 1/2 \|U\|_{\mathcal{S}_h}^2$.

De modo análogo ao que na seção anterior foi feito, concluímos que a energia associado ao sistema (3.26) decai exponencialmente, isto é,

$$\|\nabla \times \mathbf{H}\|^2 + \|\mathbf{H}_t\|^2 + \|\xi\|_{\mathcal{W}_h}^2 = \mathcal{E}_h(t) = \frac{1}{2} \|U\|_{\mathcal{S}_h}^2 \leq \|e^{A_h t}\|_{\mathcal{S}}^2 \|U_0\|_{\mathcal{S}}^2 \leq C e^{-2kt} \|U_0\|_{\mathcal{S}}^2.$$

3.6 Decaimento da Energia Eletromagnética

Segue do Lema de Peetre que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|^2 &\leq C_1(\Omega) \|\nabla \times \mathbf{E}\|^2; \\ \|\mathbf{H}\|^2 &\leq C_2(\Omega) \|\nabla \times \mathbf{H}\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\mu \|\mathbf{H}\|^2 + \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 \right) \leq C(\Omega) \left(\|\nabla \times \mathbf{E}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{H}\|^2 \right) \leq C(\Omega) \left(\mathcal{E}_e(t) + \mathcal{E}_h(t) \right).$$

Além disso, é simples verificar que a energia eletromagnética total definida de forma usual, isto é, $\mathcal{E}_e(t) = \int_{\Omega} \left(\mu |\mathbf{H}|^2 + \varepsilon |\mathbf{E}|^2 \right) d\bar{x}$ é equivalente a energia $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_e(t) + \mathcal{E}_h(t)$ (soma das energias associadas aos dois sistemas analisados) e, portanto, também deve decair exponencialmente. Vale lembrar que a taxa de decaimento obtida pode não ser ótima.

3.7 Campos Localizados

Desta seção em diante assumimos somente a primeira equação em (3.9) sem as condições de contorno, ou seja, estaremos interessados em soluções em meios sem fronteira. Seja Φ uma componente escalar do campo elétrico. Supomos, aqui, soluções da forma

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y)e^{i\xi} \quad (3.35)$$

onde $\xi = \gamma z - \omega t$.

Para uma adequada análise gráfica e aproximação correta das constantes partiremos da equação (3.6) sem considerar as constantes físicas iguais a um. Neste caso, obtemos

$$\mathbf{E}_{tt} - (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}\Delta\mathbf{E} + \alpha\mathbf{E}_t + \int_0^\infty k(s)[\mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(t-s)]ds = 0$$

onde $\alpha = f(0)$, $k(s) = (\sigma_0/\varepsilon_0)k_1(s) + k_2(s)$ e k_1, k_2 são as mesmas da seção anterior.

Também assumimos que as funções de memória são do tipo $f(s) = a_1e^{-a_1s}$, $g(s) = (\sigma_0/\varepsilon_0)^{-1}a_1(a_1 + \epsilon)e^{-a_1s}$ e, conseqüentemente, $k(s) = a_1^2(a_1 + \epsilon)e^{-a_1s} - a_1^3e^{-a_1s} = \epsilon a_1^2e^{-a_1s}$. Agora, substituindo (3.35) na equação mostrada anteriormente e lembrando (3.8) temos

$$\left(\partial_{xx} + \partial_{yy} + K^2\right)\phi = 0,$$

onde a constante complexa $K^2 = M_1 + iM_2$ de forma que

$$M_1 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \gamma^2 - \mu_0\varepsilon_0\left(\epsilon a_1 - \frac{\epsilon a_1^3}{a_1^2 + \omega^2}\right)$$

e

$$M_2 = \mu_0\varepsilon_0\left(\alpha\omega + \frac{\epsilon a_1^2\omega}{a_1^2 + \omega^2}\right).$$

Aqui, já observamos a primeira diferença no estudo de soluções localizadas em meios com memória devido ao surgimento de uma constante complexa, o que conduz a uma equação de Bessel (supondo simetria axial) com parâmetro complexo. Como, geralmente, o parâmetro a_1 é suficientemente pequeno para desprezar potências de ordem maior ou igual a 2 e, além disso, $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ é uma constante bastante pequena, então

$$M_1 \approx \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \gamma^2, \quad M_2 \approx \alpha\mu_0\varepsilon_0\omega.$$

Vale notar que, em princípio, não se pode desprezar $\alpha\mu_0\varepsilon_0\omega$, pois, para frequências elevadas da ordem ou superiores a $10^{14}Hz$ (ultra-violeta, raios-X e raios gama, por exemplo) esta constante pode assumir valores consideráveis.

Assumindo simetria axial obtemos uma equação da forma

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 K^2 \phi(\rho) = 0, \quad (3.36)$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Esta última é uma equação de Bessel (cf. Apêndice C) de ordem zero com parâmetro complexo K .

Faremos a análise em duas partes: 1) quando $\alpha\mu_0\varepsilon_0\omega$ é suficientemente pequeno para desconsiderarmos a parte imaginária de K e, 2) quando não é. Para exemplificar consideramos a tabela.

Espectro de Radiação Eletromagnética		
Região	Comprimento de Onda (cm)	Frequência (Hz)
Rádio	> 10	3×10^9
Micro-ondas	$10 - 10^{-2}$	$3 \times 10^9 - 3 \times 10^{12}$
Infra-vermelho	$10^{-2} - 7 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{12} - 4.3 \times 10^{14}$
Luz visível	$7 \times 10^{-5} - 4 \times 10^{-5}$	$4.3 \times 10^{14} - 7.5 \times 10^{14}$
Ultravioleta	$4 \times 10^{-5} - 10^{-7}$	$7.5 \times 10^{14} - 3 \times 10^{17}$
Raio X	$10^{-7} - 10^{-9}$	$3 \times 10^{17} - 3 \times 10^{19}$
Raio Gama	$< 10^{-9}$	$> 3 \times 10^{19}$

CASO 1): Convencionamos desprezar a parte imaginária de K quando $M_2 < 10^{-2}$, isto é, como $\mu_0\varepsilon_0 = 1/(9 \times 10^{16})$ e α é tomado da ordem de 10^{-1} então $\alpha\mu_0\varepsilon_0\omega < 10^{-2}$ implica que $\omega < 9 \times 10^{15}$. Assim, até a faixa de frequência da luz visível podemos supor que $M_2 = 0$, e neste caso, $K = \sqrt{M_1}$ é um número real.

Para este caso, as soluções para a equação de Bessel (3.36) são dadas da forma

$$\phi(\rho) = \begin{cases} C_1 J_0(K\rho) + C_2 Y_0(K\rho), & K^2 > 0 \\ C_3 I_0(K\rho) + C_4 K_0(K\rho), & K^2 < 0. \end{cases}$$

Para dar sentido físico as soluções deve-se considerar apenas $\phi(\rho) = J_0(K\rho)$ e para tal deve-se ter que $K^2 > 0$. Logo, a solução anterior ocorre quando $K^2 = M_1 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \gamma^2 > 0$, portanto,

$$\frac{\omega}{\gamma} > \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c,$$

concluindo que a velocidade de fase é superior a velocidade da luz c . No entanto, a velocidade de grupo não é superluminal, mas, subluminal, pois,

$$v_{grupo} = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{\omega} c^2 = \frac{\gamma}{c\sqrt{K^2 + \gamma^2}} c^2 = \frac{\gamma}{\sqrt{K^2 + \gamma^2}} c < c.$$

Conclusão1: Em meios dielétricos não-ideais com memória e satisfazendo todas as hipóteses tomadas até aqui é possível obter soluções localizadas subluminais $\Phi(x, y, z, t) = J_0(K\rho)e^{i(\gamma z - \omega t)}$, $K > 0$, com velocidade de fase superluminais. Tais soluções são mais localizadas nas proximidades do eixo oz de propagação.

As figuras 3.1 e 3.2 mostram o comportamento da função $J_0(K\rho)$, para $0 < \rho < 1$, com $K = 10$ e $K = 100$, respectivamente.

CASO 2): Agora se não se pode desprezar M_2 as soluções para a equação de Bessel (3.36) são dadas da forma

$$\phi(\rho) = C_1 J_0(K\rho) + C_2 Y_0(K\rho).$$

Notemos que nas vizinhanças de $\rho = 0$, que é a de interesse, a função de Bessel Y_0 tende ao infinito em módulo, logo, esta solução não é praticável fisicamente. Consideremos soluções da forma $\phi(\rho) = J_0(K\rho)$ nas vizinhanças de $\rho = 0$. Escrevemos $K = A + iB$. Obviamente, $A^2 - B^2 = M_1$ e $2AB = M_2$. Do Teorema da Adição de Neuman (cf. [16] pg. 363)

$$J_0(K\rho) = J_0(\rho A + \rho B i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(\rho A) J_n(\rho B i) \quad (3.37)$$

podemos obter a solução através de cálculos de programas computacionais. Cabe lembrar que $J_n(\rho B i) = i^n I_n(\rho B)$ (cf. Apêndice C). Aqui, estamos interessados, em princípio, no estudo analítico. Na verdade, devido a dificuldade de, precisamente, analisar funções de Bessel com argumentos complexos e dar interpretações físicas consideramos soluções restritas.

Exigi-se, para uma melhor análise, um método numérico bem estabelecido para fazer os cálculos. Deixamos uma abordagem computacional para depois.

Agora, se $\rho \rightarrow 0$ os argumentos da função de Bessel tendem para zero. Deste modo, vamos usar a seguinte abordagem (ver [7])

$$J_0(\rho A + \rho B i) \approx \begin{cases} I_0(i\rho B) - i\rho A I_1(i\rho B); \\ J_0(\rho A) - i\rho B J_1(\rho A). \end{cases} \quad (3.38)$$

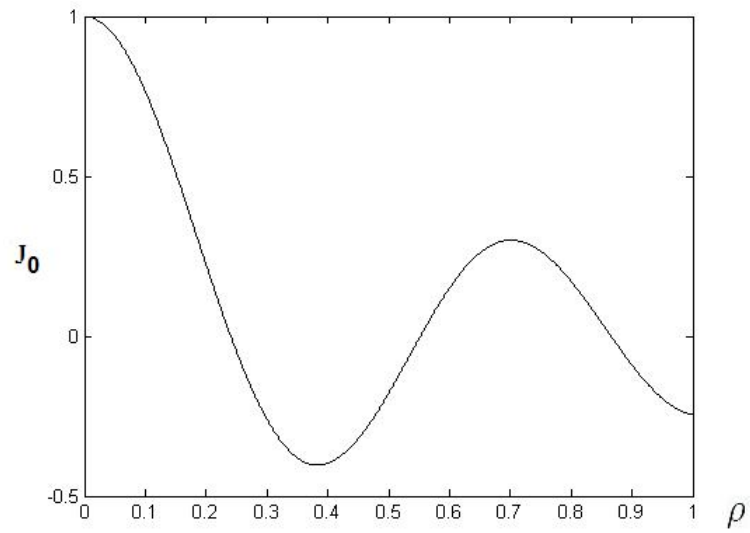


Figura 3.1: Módulo de J_0 com $K = 10$.

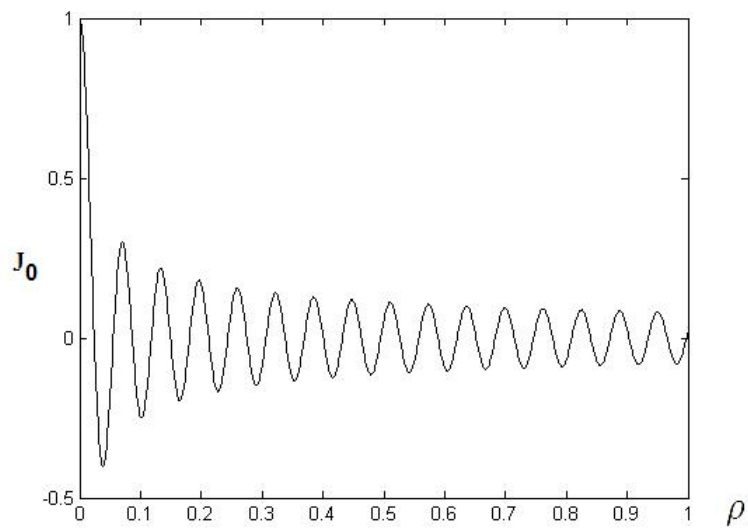


Figura 3.2: Módulo de J_0 com $K = 100$.

Vale lembrar que no referido artigo esta aproximação é excelente quando os argumentos satisfazem $\rho A < 10^{-2}$ para a primeira e $\rho B < 10^{-2}$ no caso da segunda. Tomando o módulo obtemos

$$|J_0(\rho A + \rho B i)|^2 \approx \left(J_0(\rho A)\right)^2 + \left(\rho B J_1(\rho A)\right)^2.$$

Com a fórmula de aproximação anterior podemos verificar graficamente o comportamento da solução localizada nas proximidades do eixo de propagação tomando cuidado de respeitar as condições para que as aproximações feitas sejam válidas. Isto será feito adiante.

Para soluções luminiais ($c = 1$) ou próximas a esta, temos que $\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - \gamma^2 \approx 0$ e disto vem que

$$A \approx \sqrt{\frac{M_2}{2}}, \quad B \approx \sqrt{\frac{M_2}{2}}.$$

Assim,

$$\Phi(\rho, z, t) \approx \left(J_0(\rho A) - i \rho B J_1(\rho A)\right) e^{i(\gamma z - \omega t)}.$$

É importante notar que está solução tem sentido físico somente nas vizinhanças de $\rho = 0$ e ω constante.

A análise de ondas localizadas da forma $\phi(x, y, z - ct)e^{i\xi}$ é deixada para uma próxima vez.

Sem coonsiderar soluções luminiais foram feitos alguns programas computacionais para o cálculo do $|J_0(K\rho)|$ e de $J_0(K\rho)$ utilizando a fórmula de adição de Neuman (3.37) com n variando até 100 e a fórmula de aproximação (3.38).

Nas figuras 3.3–3.6 são mostrados alguns gráficos obtidos por (3.37). Com (3.37) também obteve-se o gráfico de $J_0(K\rho)$ (figuras 3.7 - 3.8) com $0 \leq \rho \leq 10$ e para alguns valores de M_1 e de ω . Nota-se que em geral o aumento da frequência faz com que J_0 torne-se instável mais rapidamente.

As figuras 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12 foram realizadas pela fórmula (3.38). Observa-se que a medida que se aumenta a frequência ω a função $J_0(K\rho)$ tende a se tornar instável mais próximo do eixo de propagação. **Conclusão2:** Para uma frequência fixa o aumento de M_1 concentra o sinal nas proximidades do eixo.

Nas figuras abaixo temos que $0 \leq \rho \leq 10$.

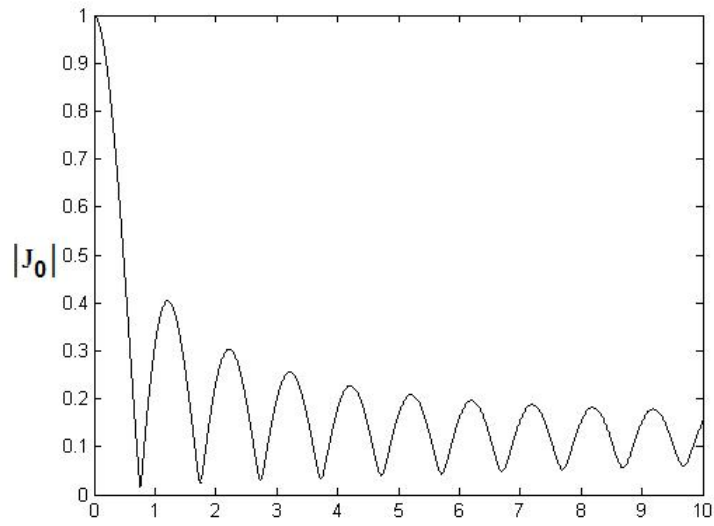


Figura 3.3: Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.

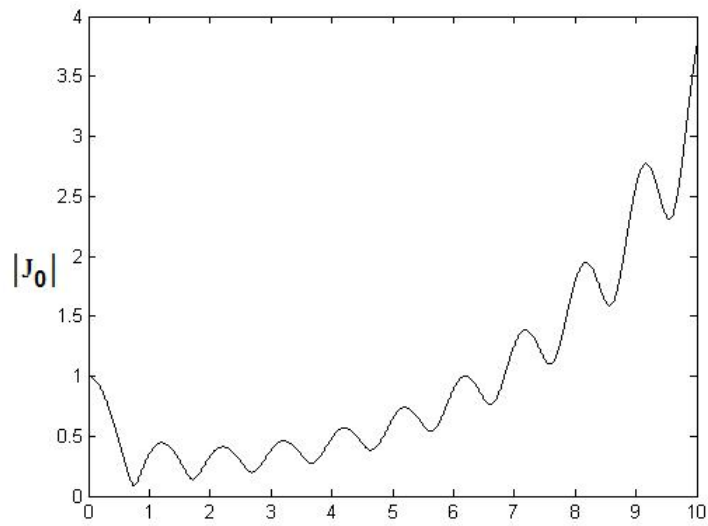


Figura 3.4: Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 50 \times 10^{16}$ Hz.

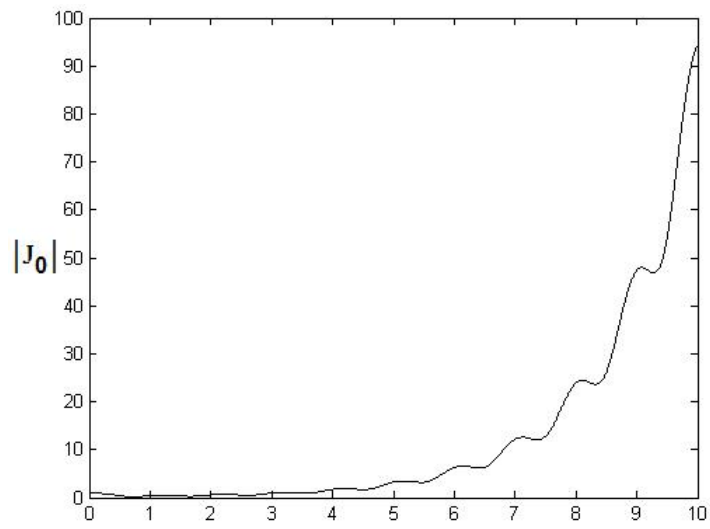


Figura 3.5: Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{17}$ Hz.

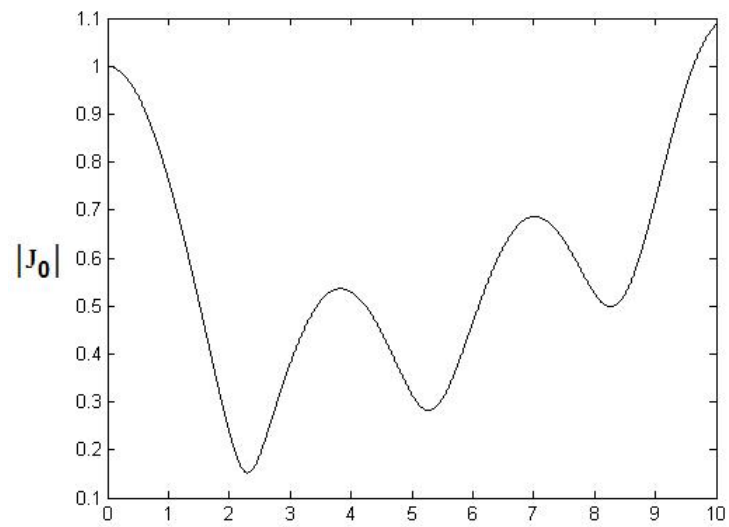


Figura 3.6: Módulo de J_0 para $M_1 = 1$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.

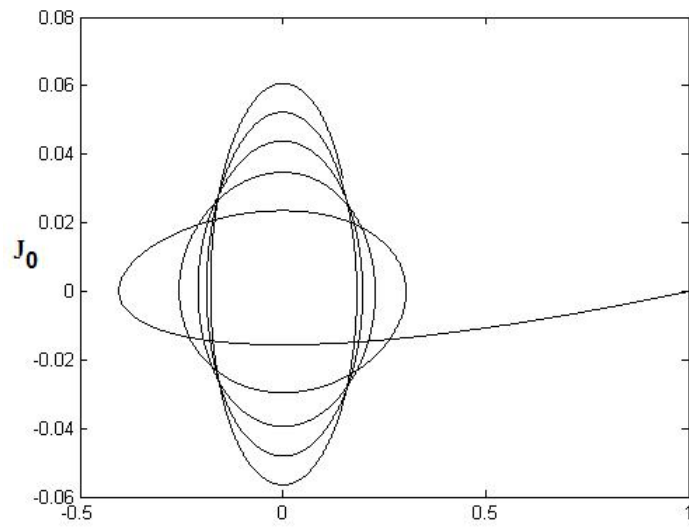


Figura 3.7: J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.

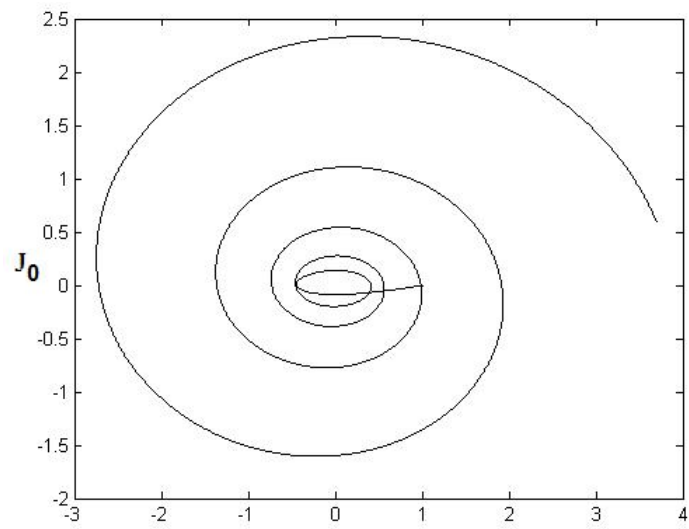


Figura 3.8: J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 50 \times 10^{16}$ Hz.

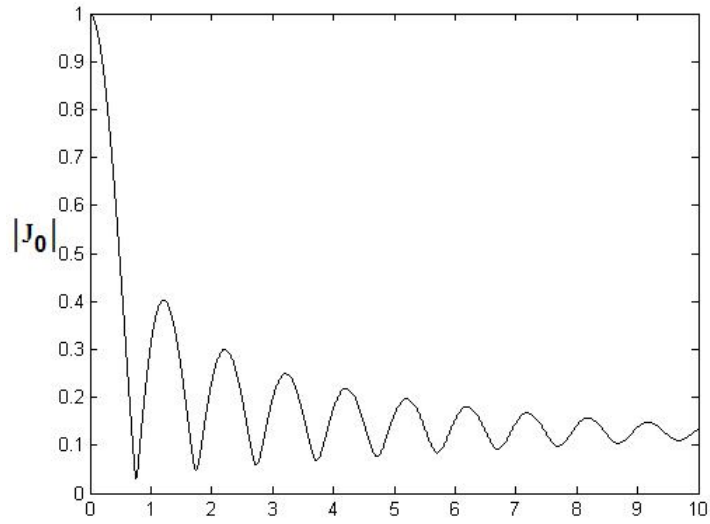


Figura 3.9: Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.

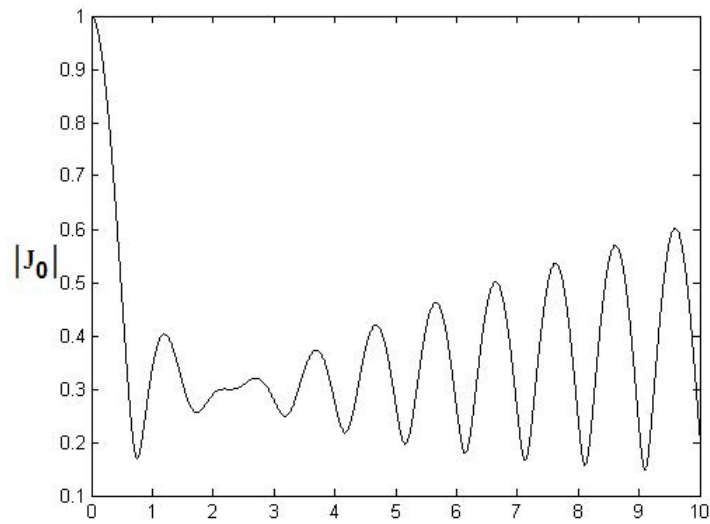


Figura 3.10: Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 50 \times 10^{16}$ Hz.

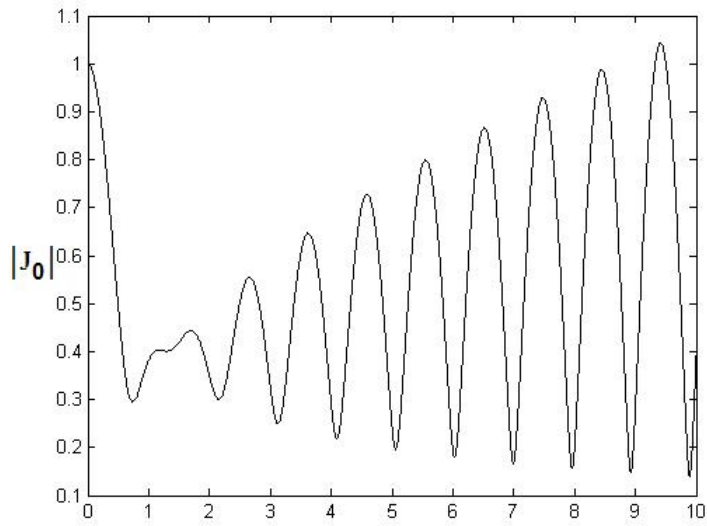


Figura 3.11: Módulo de J_0 para $M_1 = 10$ e $\omega = 9 \times 10^{17}$ Hz.

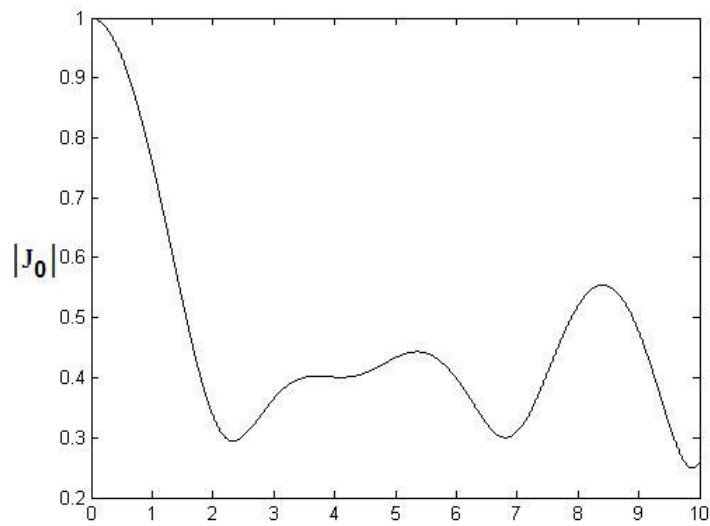


Figura 3.12: Módulo de J_0 para $M_1 = 1$ e $\omega = 9 \times 10^{16}$ Hz.

3.8 Campos Harmônicos propagantes em oz

Nesta seção, serão exibidas soluções harmônicas para materiais não-ideais com memória utilizando-se uma generalização da abordagem feita por Hillion [6] para tais dielétricos com memória. Ou seja, neste caso é feita um análise mais abrangente que aquela realizada pelo referido autor.

Seja Ψ uma componente de campo elétrico. Apenas para efeito de comparação supomos uma constante β multiplicando as integrais $f * \Psi$ e $g * \Psi$, assim, como $-\Delta \mathbf{E} = -\mu_0(\mathbf{D}_{tt} + \mathbf{J}_t)$ faz-se necessário resolver

$$\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \left[\varepsilon_0 \Psi + \varepsilon_0 \beta \int_0^\infty f(s) \Psi(t-s) ds \right] + \mu_0 \frac{d}{dt} \left[\sigma_0 \beta \int_0^\infty g(s) \Psi(t-s) ds \right] - \Delta \Psi = 0$$

São assumidas funções kernel de memória do tipo $g(s) = a_1 e^{-a_1 s}$, $f(s) = a_2 e^{-a_2 s}$. Logo,

$$\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \left[\varepsilon_0 \Psi + \varepsilon_0 \beta a_1 e^{-a_1 t} \int_{-\infty}^t e^{-a_1 \tau} \Psi(\tau) d\tau \right] + \mu_0 \frac{d}{dt} \left[\sigma_0 \beta a_2 e^{-a_2 t} \int_{-\infty}^t e^{-a_2 \tau} \Psi(\tau) d\tau \right] - \Delta \Psi = 0$$

Calculando as derivadas vem que

$$\mu_0 \varepsilon_0 \left[\Psi_{tt} + \beta a_1 \left(\Psi_t - a_1 \Psi + a_1^2 \int_{-\infty}^t e^{-a_1(t-\tau)} \Psi(\tau) d\tau \right) \right] + \mu_0 \sigma_0 \left[\beta a_2 \left(\Psi - a_2 \int_{-\infty}^t e^{-a_2(t-\tau)} \Psi(\tau) d\tau \right) \right] - \Delta \Psi = 0$$

donde

$$\begin{aligned} & \mu_0 \varepsilon_0 \Psi_{tt} - \Delta \Psi + \beta \mu_0 (a_1 \varepsilon_0) \Psi_t + \beta \mu_0 (a_2 \sigma_0 - a_1^2 \varepsilon_0) \Psi \\ & + \beta \mu_0 \varepsilon_0 a_1^3 \int_{-\infty}^t e^{-a_1(t-\tau)} \Psi(\tau) d\tau - \beta \mu_0 \sigma_0 a_2^2 \int_{-\infty}^t e^{-a_2(t-\tau)} \Psi(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Introduzindo as variáveis

$$t - \tau = (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} s \quad (3.40)$$

$$\delta_1 = a_1 (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}, \quad \delta_2 = a_2 (\mu_0 \sigma_0)^{1/2}, \quad (3.41)$$

na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} & \mu_0 \varepsilon_0 \Psi_{tt} - \Delta \Psi + \beta (\delta_1 (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}) \Psi_t + \beta (\delta_2 (\mu_0 \sigma_0)^{1/2} - \delta_1^2) \Psi \\ & + \beta \delta_1^3 \int_{-\infty}^t e^{-\delta_1 s} \Psi(t - (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} s) ds \\ & - \beta (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} \delta_2^2 \int_{-\infty}^t e^{-\delta_2 s} \Psi(t - (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} s) ds = 0 \end{aligned}$$

Agora, considerando ondas planas harmônicas na forma

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \exp \left(ik(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} t \right),$$

a equação anterior toma a forma

$$\begin{aligned} (k^2 + \Delta) A(\mathbf{x}) &= \beta ik (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} (\delta_1 (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}) A(\mathbf{x}) \\ &+ \beta (\delta_2 (\mu_0 \sigma_0)^{1/2} - \delta_1^2) A(\mathbf{x}) + \frac{\beta \delta_1^3}{\delta_1 + ik} - \frac{\beta (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} \delta_2^2}{\delta_2 + ik} \\ &= \beta ik \delta_1 \left[1 + ik^{-1} \delta_1 (1 - b_1) \right] A(\mathbf{x}) \\ &+ \beta \left[\delta_2 \sigma_0 \mu_0 - \frac{(\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} \delta_2^2}{\delta_2 + ik} \right] A(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

onde $b_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + ik}$.

Observação: Vale notar que a solução a seguir é uma solução mais abrangente que a solução obtida em [6], pois, quando $g \equiv 0$ e $\mathbf{J} = 0$, ou seja, $a_2 = 0$ e $\sigma_0 = 0$, o último termo na equação acima é todo nulo e resulta daí uma equação idêntica àquela obtida no referido artigo.

Logo, podemos reescrever a equação acima de forma mais simples (Helmholtz)

$$(\Delta + k^2 \chi^2) A(\mathbf{x}) = 0$$

onde $\chi^2 = 1 - \beta ik \delta_1 \left[1 + ik^{-1} \delta_1 (1 - b_1) \right] - \beta \left[\delta_2 \sigma_0 \mu_0 - \frac{(\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} \delta_2^2}{\delta_2 + ik} \right]$.

Para a onda plana $A(z) = \exp(-ik\chi z)$ (solução da equação acima), uma solução é dada por

$$\Psi(z, t) = \exp \left(ik(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} t - ik\chi z \right).$$

3.9 Focus Waves Mode

Conforme comentou-se no capítulo 2, no artigo [3] mostra-se solução localizada com energia infinita para as equações de Maxwell, chamada de *focus wave modes*. A maioria das soluções do tipo de Brittingham reduzem-se a

$$\Phi(\rho, \phi, z, \tau) = \frac{\rho^m e^{im\phi}}{(z + \tau)^{m+1}} f\left(z - \tau + \frac{\rho^2}{z + \tau}\right)$$

onde ρ, ϕ, z são coordenadas cilíndricas, m é um inteiro e $\tau = ct$, com c a velocidade de onda. Soluções localizadas desta forma se enquadram nas ondas progressivas do tipo identificado por Courant e Hilbert

$$\Phi(\mathbf{r}, \tau) = A(\mathbf{r}, \tau)F(\Theta(\mathbf{r}, \tau))$$

onde \mathbf{r} identifica um ponto no espaço coordenado, $F(\Theta)$ é uma função arbitrária com derivadas parciais contínuas e Θ e A função dadas denominadas de fase e amplitude (distorção, atenuação), respectivamente. Para que Φ dada anteriormente seja solução da equação de onda a fase deve satisfazer a equação de Hamilton-Jacobi

$$(\nabla\Phi)^2 - (\partial\Phi/\partial\tau)^2 = 0$$

Aqui, consideramos *focus wave modes* propagantes em oz (as mais famosas das ondas do tipo Courant-Hilbert [6])

$$\bar{\Psi}_0(\mathbf{x}, t) = (t + z + ia)^{-1} \exp [ik(t - z) - ikr^2(t + z + ia)^{-1}],$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Tal onda resolve a equação de onda linear homogênea tridimensional e será utilizada posteriormente para obtermos soluções da equação de onda do problema em questão.

Introduzindo as variáveis

$$u = t - z, \quad v = t + z, \quad \mathbf{w} = (x, y, u, v)$$

temos que

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}\partial_t &\equiv \partial_u + \partial_v \\ \Delta - \partial_t^2 &\equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 - 4\partial_u\partial_v. \end{aligned}$$

Com estas variáveis a *focus wave mode* anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\Psi}_0(\mathbf{x}, t) = (v + ia)^{-1} \exp [iku - ikr^2(v + ia)^{-1}]. \quad (3.42)$$

Supondo-se que as constantes a_1 e a_2 são pequenas o suficiente para serem desprezados os termos a_1^3 , a_2^2 e potências superiores a equação (3.39) fica na forma

$$\mu_0 \varepsilon_0 \Psi_{tt} - \Delta \Psi + \beta \mu_0 (a_1 \varepsilon_0) \Psi_t + \beta \mu_0 (a_2 \sigma_0 - a_1^2 \varepsilon_0) \Psi + 0(a_1^3) + 0(a_2^2) = 0.$$

onde $0(\cdot)$ denota o símbolo de Landau.

Utilizando as variáveis introduzidas anteriormente a equação anterior assume

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 - 4\partial_u \partial_v \right) \Psi(\mathbf{w}) = & \beta (\delta_1) (\partial_u + \partial_v) \Psi(\mathbf{w}) \\ & + \beta (a_2 \mu_0 \sigma_0 - \delta_1^2) \Psi(\mathbf{w}) + 0(\delta_1^3) + 0(\delta_2^2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Seguindo novamente a abordagem de [6] buscar-se-á solução da forma

$$\Psi(\mathbf{w}) = \Psi_0(\mathbf{w}) + \beta \Psi_1(\mathbf{w}) + 0(\beta^2). \quad (3.44)$$

Substituindo esta última na equação (3.43) e lembrando que deve-se desprezar termos de potência β^2 ou superiores obtém-se duas equações diferenciais parciais que devem ser satisfeitas por $\Psi_0(\mathbf{w})$ e $\Psi_1(\mathbf{w})$, a saber

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 - 4\partial_u \partial_v \right) \Psi_0(\mathbf{w}) &= 0 \\ \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 - 4\partial_u \partial_v \right) \Psi_1(\mathbf{w}) &= (\delta_1) (\partial_u + \partial_v) \Psi_0(\mathbf{w}) \\ &+ (a_2 \mu_0 \sigma_0 - \delta_1^2) \Psi_0(\mathbf{w}) + 0(\delta_1^3) + 0(\delta_2^2). \end{aligned} \quad (3.45)$$

É importante notar que a *focus wave mode* (3.42) é solução da equação (3.45)₁ pois é a equação de onda homogênea. Agora, calculando o termo do lado direito da igualdade na equação (3.45)₂ vem

$$(\partial_u + \partial_v) \bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) = ik \left(1 + \frac{i}{k(v + ia)} + \frac{r^2}{(v + ia)^2} \right) \bar{\Psi}_0(\mathbf{w}).$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
A^*(v, r) &= 1 + \frac{i}{k(v + ia)} + \frac{r^2}{(v + ia)^2} \\
A &= (\delta_1) \\
B &= -ik^{-1}(a_2\mu_0\sigma_0 - \delta_1^2)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
& \left[(\delta_1 + \sigma_0\mu_0^{1/2}\varepsilon_0^{-1/2})(\partial_u + \partial_v) + a_2\mu_0\sigma_0 - \delta_1^2 \right] \bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) = \\
& ik \left[AA^*(v, r) + B \right] \bar{\Psi}_0(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $B^*(v, r) = AA^*(v, r) + B$ a equação (3.45)₂ torna-se

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 - 4\partial_u\partial_v \right) \Psi_1(\mathbf{w}) = ikB^*(v, r)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 0(\delta_1^3) + 0(\delta_2^2). \tag{3.47}$$

Para esta última equação buscar-se-á solução da forma

$$\Psi_1^*(\mathbf{w}) = [g_1(v) + r^2g_2(v)]\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 0(\delta_1^3) + 0(\delta_2^2). \tag{3.48}$$

Para exibir a solução acima precisa-se determinar as funções g_1 e g_2 , isto é, determinadas as funções g_i , encontra-se Ψ_1^* e por conseguinte determina-se a solução procurada Ψ dada em (3.44). Para isto, será utilizada a coordenada radial r , onde $r^2 = x^2 + y^2$, ao invés de x e y . Com esta variável a equação de onda (3.47) fica

$$\Box\Psi_1(\mathbf{w}) = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - 4\partial_u\partial_v \right) \Psi_1(\mathbf{w}) = ikB^*(v, r)\Psi_0^*(\mathbf{w}).$$

Com foi suposto que Ψ_1 é da forma dada em (3.48) vem que

$$\begin{aligned}
& \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \right) (g_1 + r^2g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \\
& = g_2 \left[4\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 4r\partial_r\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + r^2\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \right)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \right] \\
& \quad + g_1\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \right)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
4\partial_u\partial_v(g_1 + r^2g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) &= 4\partial_u \left[(\partial_vg_1 + r^2\partial_vg_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + (g_1 + r^2g_2)\partial_v\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \right] \\
&= 4(\partial_vg_1 + r^2\partial_vg_2)\partial_u\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 4(g_1 + r^2g_2)\partial_u\partial_v\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Subtraindo estas duas últimas identidades segue-se que

$$\begin{aligned}\square\Psi_1(\mathbf{w}) &= g_2 \left[4\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 4r\partial_r\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \right] - 4(\partial_v g_1 + r^2\partial_v g_2)\partial_u\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \\ &\quad + (g_1 + r^2 g_2)\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) - 4(g_1 + r^2 g_2)\partial_u\partial_v\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \\ &= g_2 \left[4\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 4r\partial_r\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \right] - 4ik(\partial_v g_1 + r^2\partial_v g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}),\end{aligned}$$

e disto, observando que $\partial_u\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) = ik\bar{\Psi}_0(\mathbf{w})$ (basta ver a expressão de (3.42)) e que

$$\begin{aligned}(g_1 + r^2 g_2)\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) - 4(g_1 + r^2 g_2)\partial_u\partial_v\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \\ = (g_1 + r^2 g_2)\left[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - 4\partial_u\partial_v\right]\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) = 0,\end{aligned}$$

pois a *focus wave mode* $\bar{\Psi}_0(\mathbf{w})$ é solução da equação de onda homogênea, obtém-se que

$$\begin{aligned}\square\Psi_1(\mathbf{w}) &= g_2 \left[4\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + 4r\partial_r\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \right] - 4ik(\partial_v g_1 + r^2\partial_v g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \\ &= g_2 \left[4 - 8ikr^2(v + ia)^{-1} \right]\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) - 4ik(\partial_v g_1 + r^2\partial_v g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Como, pela equação (3.47), $\square\Psi = ikB^*(v, r)\bar{\Psi}_0$ deve-se encontrar g_1 e g_2 que satisfaçam a equação

$$\begin{aligned}g_2 \left[4 - 8ikr^2(v + ia)^{-1} \right]\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) - 4ik(\partial_v g_1 + r^2\partial_v g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) \\ = ik[AA^*(v, r) + B]\bar{\Psi}_0 \\ = ik \left[A \left(1 + \frac{i}{k(v + ia)} + \frac{r^2}{(v + ia)^2} \right) + B \right]\bar{\Psi}_0(\mathbf{w})\end{aligned}\tag{3.49}$$

Igualando os coeficientes independentes de r e os dependentes de r^2 de ambos os lados da equação acima resulta o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} 4g_2 - 4ik\partial_v g_1 = ik \left[A \left(1 + \frac{i}{k(v + ia)} \right) + B \right] \\ -8ik(v + ia)^{-1}g_2 - 4ik\partial_v g_2 = ikA(v + ia)^{-2} \end{cases}\tag{3.50}$$

A solução da equação diferencial ordinária (3.50)₂ segue de forma bastante intuitiva bastando olhar os coeficientes envolvidos após dividi-la por $-4ik$ obtendo $2(v + ia)^{-1}g_2 + \partial_v g_2 = -A(v + ia)^{-2}/4$. Supondo $g_2 = C_1(v + ia)^{-1} + C_2$ segue que $2g_2(v + ia)^{-1} + \partial_v g_2 = C_1(v + ia)^{-2} + 2C_2(v + ia)^{-1}$. Portanto, $C_2 = 0$ e $C_1 = -A/4$. Logo,

$$g_2(v) = -\frac{A}{4}(v + ia)^{-1}.$$

Agora, substituindo g_2 em (3.50)₁ obtém-se a equação

$$-4\partial_v g_1 = A + B,$$

cuja solução pode ser escrita convenientemente por

$$g_1(v) = -\frac{A + B}{4}(v + ia).$$

De (3.48) vem que

$$\Psi_1^*(\mathbf{w}) = (g_1 + r^2 g_2)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) = -\frac{1}{4}\left[(A + B)(v + ia) + r^2 A(v + ia)^{-1}\right]\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}).$$

Finalmente, de (3.44) a solução procurada é da forma

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{w}) &= \bar{\Psi}_0(\mathbf{w}) + \beta\Psi_1^*(\mathbf{w}) \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{4}\left[(A + B)(v + ia) + r^2 A(v + ia)^{-1}\right]\right)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= (\delta_1) \\ B &= -ik^{-1}(a_2\mu_0\sigma_0 - \delta_1^2) \\ \bar{\Psi}_0(\mathbf{x}, t) &= (v + ia)^{-1} \exp[iku - ikr^2(v + ia)^{-1}].\end{aligned}$$

É importante notar que nas proximidades do eixo $r = 0$ a solução aproxima-se por uma onda plana $\Psi = \left[1 + (A + B)(v + ia)/4\right](v + ia)^{-1} \exp(iku)$.

Nota-se que esta solução é função do *focus wave mode* $\bar{\Psi}_0$, que é a solução localizada em hipóteses ideais. Além disso, esta solução estende a solução do artigo [6].

3.10 Conclusão

A propagação de ondas eletromagnéticas em materiais dielétricos não-ideais com memória obedece uma equação que envolve um termo de convolução devido às relações constitutivas apresentarem tal termo. A função kernel de memória, que depende das características físicas do material, desempenha um papel essencial na análise da solução do problema de evolução associado a propagação. Foi necessário impor as condições

$$k(s) > 0 \quad \text{e} \quad k'(s) < 0$$

onde $k(s) = -g'(s) - f''(s)$, sendo f, g as funções de núcleo, para que pudéssemos mostrar a existência de solução por semigrupos. Isto não quer dizer, é claro, que se $k'(s)$ não fosse negativa sempre (por exemplo, uma função oscilante decaindo para zero) então não seria possível mostrar a existência de semigrupo que resolvesse o problema. Neste último caso a análise requeria artifícios e técnicas mais profundas. Por isso, em análises posteriores foram utilizadas funções $f(s) = a_1 e^{-a_1 s}$ e $g(s) = a_1(a_1 + \epsilon)e^{-a_1 s}$ que satisfazem as condições. Além disso, fazendo-se $g = 0$ observa-se que funções da forma $f(s) = a_1 e^{-a_1 s}$, com $a_1 > 0$, não satisfazem as hipóteses e disto decorre que o decaimento da energia para o problema analisado em [6] não pode ser abordado com as hipóteses utilizadas aqui.

A hipótese de que a função kernel é monotonicamente decrescente implica que há perda de energia eletromagnética durante a propagação, ou seja,

$$d(\text{Energia})/dt = \Re\langle \mathcal{A}U, U \rangle \leq 0$$

e isto é fundamental na utilização das ferramentas matemáticas que garantem a existência de solução. Uma observação interessante sobre soluções harmônicas e soluções localizadas com velocidade de propagação diferente de c é que a existência de um termo de memória implica que a equação de Bessel obtida $J_0(K\rho)$ apresenta argumento complexo K que depende das características do material, da frequência e dos parâmetros da função de onda e, devido a este fato, as solução expressas por funções de Bessel apresentam comportamento físico e propriedades um pouco diferentes daquelas observadas em meios usuais sem memória.

Neste trabalho, mostramos que até uma certa faixa de frequência (a da luz visível) é possível obter soluções localizadas dadas por funções de Bessel da forma $\Phi(x, y, z, t) = J_0(K\rho)e^{i(\gamma z - \omega t)}$, $K > 0$, com velocidade de fase superluminais. Quando a frequência ω da onda torna-se demasiada alta não

se pode considerar solução dada pela fórmula anterior. Neste caso é preciso calcular adequadamente a função de Bessel para argumentos imaginários. Em particular é possível aproximar tais funções quando a parte real ou a parte imaginária do argumento tende a zero. Diversos gráficos foram exibidos mostrando o comportamento da solução com a variação da frequência.

As soluções harmônicas e o *focus wave mode* obtidos neste trabalho

$$\Psi(z, t) = \exp\left(ik(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}t - ik\chi z\right).$$

e

$$\Psi(\mathbf{w}) = \left(1 - \frac{\beta}{4}[(A + B)(v + ia) + r^2A(v + ia)^{-1}]\right)\bar{\Psi}_0(\mathbf{w}),$$

generalizam as respectivas soluções obtidas no artigo [6] onde o autor considera a propagação eletromagnética em dielétricos com memória. Provavelmente, o artigo citado foi o primeiro a fazer análise de soluções localizadas para meios com memória.

Apêndice A

Os Teorema de Hille-Yosida e de Lumer-Phillips

A.1 Introdução

A teoria de semigrupo de operadores teve início em meados da década de 40 com os trabalhos de K. Yosida e E. Hille. Diversos outros matemáticos contribuíram para consolidação da teoria, dentre eles, destacamos Lumer e Phillips. Uma das mais importantes aplicações de semigrupos de operadores ocorre na análise de problemas em equações diferenciais parciais.

No sentido da álgebra abstrata, um *grupo* é uma estrutura $(G, *)$ formada por um conjunto não vazio G e uma lei de composição $(a, b) \mapsto a*b : G \times G \rightarrow G$ satisfazendo os seguintes axiomas: (a) (lei associativa) para todo $a, b, c \in G$, é válido que $(a*b)*c = a*(b*c)$; (b) (existência do elemento identidade) para cada $a \in G$ existe $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$; (c) (existência de inversa) para cada $a \in G$ existe $a' \in G$ tal que $a*a' = a'*a = e$. Quando (a) e (b) são satisfeitos, mas não necessariamente (c), $(G, *)$ é chamado *semigrupo*.

Em termos de operadores, um semigrupo uniparamétrico é uma família de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ definidos num espaço de Banach X satisfazendo as seguintes propriedades: (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ; (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$. Conforme será apresentado neste capítulo, existem algumas classificações para os semigrupos. Os semigrupos de maior interesse prático são os C_0 -semigrupos.

Esta teoria constitui uma forma elegante no trato de equações diferenciais

parciais (EDP), em particular, sistemas de evolução. A principal forma de abordagem reside no fato de que, para alguns problemas, a solução para o problema de Cauchy associado ao problema em questão pode ser definida por um semigrupo. Os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips estabelecem as condições para que isto ocorra. Neste apêndice apresentamos os teoremas citados para semigrupos de operadores não-limitados com ênfase na aplicação e como estes podem ser úteis para mostrar a existência de solução.

A.2 Definições

Definição A.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X , isto é, $T(t) \in \mathcal{B}(X, X)$, $\forall t \geq 0$, é um semigrupo uniparamétrico de operadores lineares limitados de X em X se*

- $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
- $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Se, além disso, um semigrupo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz a condição

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$,

dizemos que é um semigrupo uniformemente contínuo.

Definição A.2.2. *O gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ domínio definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} \text{ existe em } X \right\}$$

e tal que

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}$$

para cada $x \in \mathcal{D}(A)$.

A.3 O Teorema de Hille-Yosida

Teorema A.3.1. (Hille - Yosida) Um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,

1. A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém \mathbf{R}^+ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: [1].

A.4 O Teorema de Lumer-Phillips

Vimos que o Teorema de Hille-Yosida faz uma caracterização de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de contrações. O Teorema de Lumer-Phillips faz uma caracterização diferente para tais geradores infinitesimais.

Definição A.4.1. Um operador linear A é dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\Re \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

Teorema A.4.1. Um operador linear A é dissipativo se, e somente se, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Teorema A.4.2. (Lumer-Phillips) Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X .

1. Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .
2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração: [1]

Corolário A.4.1. *Seja A um operador linear, dissipativo com domínio denso em X . Se $0 \in \rho(A)$, então, A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

Teorema A.4.3. *Seja A um operador dissipativo em X .*

- (a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então, $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*
- (b) *Se A é fechado, então, \bar{A} também é dissipativo.*
- (c) *Se $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, então, A é fechado.*

Teorema A.4.4. *Seja A um operador dissipativo tal que $Im(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Um importante resultado que expressa notavelmente as possíveis aplicações dos teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips numa formulação pelo sistema de Cauchy em espaços de Hilbert é

Teorema A.4.5. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e \mathbf{A} seu gerador infinitesimal, então $\forall x \in \mathcal{D}(\mathbf{A}), T(t)x \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Segue deste teorema que se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$, a função $U(t) = T(t)U_0$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathbf{A}U \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Portanto, o que se faz é transforma o sistema dado em um sistema de Cauchy equivalente definido num certo espaço de Hilbert e, em seguida, mostrando que o operador A associado ao problema de Cauchy é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, seja pelo teorema de Hille-Yosida seja pelo de Lumer-Phillips, mostra-se que o sistema inicial possui solução.

Suponhamos, como exemplo, que se queira mostrar a existência de solução $u(x, t)$ por semigrupo da equação de onda linear $u_{tt} - u_{xx} = 0$ com a condição de que $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_t(x, 0) = u_1(x)$, onde u_0 e u_1 são funções dadas. Como foi mostrado deve-se associar o sistema em questão a um problema de Cauchy. Aparentemente, isto não é possível pois na equação de onda linear aparece a segunda derivada em t e

no problema de Cauchy tem-se a primeira derivada. No entanto, fazendo $U(t) = [u(x, t) \quad u_t(x, t)]^T$ e $U_0 = [u_0 \quad u_1]^T$ temos

$$\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\cdot)_{xx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}.$$

Portanto, o problema $U_t = \mathbf{A}U$ tal que $U(0) = U_0$ é equivalente a equação de onda linear com as condições impostas, onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\cdot)_{xx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente que para se trabalhar com a teoria deve-se definir este problema num espaço de Hilbert adequado e verificar as condições dos teoremas de Hille-Yosida ou Lumer-Phillips.

Apêndice B

O Teorema de Prüss

Em sistemas dissipativos a análise do comportamento assintótico da energia pode ser feita de diversas formas. É comumente utilizado pelos matemáticos o método da energia de Lyapunov que consiste, basicamente, em construir um funcional adequado \mathcal{L} equivalente a energia do sistema $E(t)$, isto é, que existam constantes a, b tais que

$$aE(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq bE(t)$$

satisfazendo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\delta E(t).$$

Em muitos casos a obtenção de funcionais desta forma pode ser muito trabalhosa. Um dos resultados mais elegantes na temática de comportamento assintótico da energia foi obtido pelo matemático J. Prüss, onde é dada a condição necessária e suficiente para que um semigrupo decaia exponencialmente. O Teorema de Prüss é uma outra alternativa na abordagem de sistemas dissipativos onde utiliza-se principalmente uma formulação visando aplicar técnicas de semigrupos e análise espectral.

Teorema B.0.6. (Prüss) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo definido num espaço de Hilbert H . Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{\lambda : \Re \lambda \geq 0\} \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo λ tal que $\Re \lambda \geq 0$.

Demonstração: [2] Teorema 3.5.6, página 120.

Este teorema permite uma visão bastante sofisticada do comportamento ou evolução de sistemas de equações diferenciais pela análise do espectro do operador resolvente associado ao problema. Isto é, o espectro do operador resolvente deve pertencer ao semiplano esquerdo do plano complexo e para estes valores o operador resolvente deve ser limitado.

Teorema B.0.7. (Prüss) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de contrações definido num espaço de Hilbert H . Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{i\beta : \beta \in \mathbf{R}\} \equiv i\mathbf{R} \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo β real.

Demonstração: [2] Teorema 3.5.5, página 120.

Apêndice C

Funções de Bessel

Entende-se por funções de Bessel algumas soluções *Equação de Bessel de ordem p* que é um equação diferencial de segunda ordem da forma

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

onde p é um parâmetro que pode, eventualmente, ser um complexo, mas, na maioria dos casos, real. Esta equação aparece com freqüência em diversas áreas da matemática aplicada, engenharias e física, merecendo destaque os fenômenos de propagação de onda e calor em domínios cilíndricos.

C.1 Função de Bessel de primeiro tipo

Supondo soluções da equação de Bessel de ordem p da forma

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

obtém-se a equação indicial

$$s^2 - p^2 = 0,$$

e a relação

$$[(n + s)^2 - p^2]a_n = -a_{n-2}, \tag{C.1}$$

$$a_1 = 0, \tag{C.2}$$

$$a_0 \neq 0. \tag{C.3}$$

Sem perda de generalidade, se $p \geq 0$ as últimas equações determinam a solução

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)},$$

escolhendo $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ e $s = p$. A função Γ é a *função gama* definida para $x > 0$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

A função $J_p(x)$ é conhecida como *função de Bessel de primeiro tipo de ordem p* . Devido ao termo p^2 na equação de Bessel, é razoável observar que a função

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)},$$

também seja ua solução para esta equação. Tal função é chamada de *função de Bessel de primeiro tipo de ordem $-p$* .

É fácil ver que

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

para $m \in \mathbb{N}/\{0\}$.

Quando p não é inteiro e $x < 0$ a função $J_p(x)$ assume valores complexos. Também, é de simples verificação que se p é par $J_p(x)$ é uma função par e se p é ímpar $J_p(x)$ é uma função ímpar.

Para quaisquer p as relações abaixo são válidas.

$$\begin{aligned} J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) &= 2J'_p(x), \\ J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) &= 2\frac{p}{x}J_p(x). \end{aligned}$$

Outra maneira de pensar as funções de Bessel é como coeficientes da série de Laurent da função $g(x, t) = e^{\frac{x}{2}(1-1/t)}$, isto é,

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

De fato, expandindo as exponenciais $e^{\frac{xt}{2}}$ e $e^{\frac{-x}{2t}}$ em séries de Maclaurin, tem-se

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!}\right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}\right).$$

Efetuando o produto, para um dado s , o termo de t^n ($n \geq 0$) surge quando $r = n + s$, e neste caso aparece

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}.$$

Portanto, os coeficientes de t^n são

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (x/2)^{2s}}{s!(n+s)!}.$$

C.2 Função de Bessel de segundo tipo

Quando $p > 0$ não é inteiro, as funções $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente independentes e, portanto, a solução da equação de Bessel pode ser escrita na forma

$$y(t) = AJ_p(x) + BJ_{-p}(x),$$

onde A e B são constantes.

No caso em que $p > 0$ é um inteiro, $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente dependentes e, por conseguinte, a solução acima já não mais representa uma solução geral da equação de Bessel. São introduzidas as funções de Bessel de segundo tipo para obtenção de uma solução geral que valha para qualquer p .

Derivando a equação de Bessel com relação a p , obtém-se

$$x^2 \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)'' + x \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)' + (x^2 - p^2) \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) - 2py = 0.$$

visto que $J_m(x) = (-1)^{-m} J_{-m}(x)$ vem que $\left(\frac{\partial J_p}{\partial p}\right) - (-1)^m \left(\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}\right) \Big|_{p=m}$ é solução da equação de Bessel. Defini-se as funções de Bessel de segundo tipo de ordem p por

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$$

Quando $p = m$ inteiro, tem-se uma indeterminação, mas pode-se definir $Y_m(x)$ para inteiros m fazendo

$$Y_m(x) = \lim_{p \rightarrow m} Y_p(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_p}{\partial p}\right) - (-1)^m \left(\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}\right) \Big|_{p=m}.$$

Daí, para qualquer valor de p , a solução geral da equação de Bessel é dada por

$$y(x) = AJ_p(x) + BY_p(x)$$

onde A, B são constantes reais.

C.3 Funções de Bessel Modificadas

A equação de Bessel modificada de ordem p é dada por

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0.$$

As soluções desta equação podem ser obtidas da equação de Bessel fazendo a mudança de x por ix . Disto, as soluções da equação de Bessel modificada são da forma

$$y(x) = AJ_p(ix) + BY_p(ix),$$

A, B constantes. Em virtude do fato de estas soluções serem, em geral, complexas escreve-se alternativamente

$$y(x) = AI_p(x) + BK_p(x),$$

onde $I_p(x)$ e $K_p(x)$ são funções complexas denominadas de funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, nesta ordem, onde

$$I_p(x) = i^{-p}J_p(ix)$$

e

$$K_p(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi}, & p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \lim_{p \rightarrow m} K_p(x), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications for Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] J. E. M. Rivera, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Série de Métodos Matemáticos - EAC, Rio de Janeiro, 2008.
- [3] J. M. Brittingham, *Focus wave modes in homogeneous Maxwell's equations*, Jour. Appl. Phys. 54 (1983) 1179-1188.
- [4] J. E. M. Rivera, M. G. Nazo and E. Vuk, *Asymptotic Behavior of the Energy for Electromagnetic Systems with Memory*, Math. Meth. App. Sci. 2004; 27:819-841.
- [5] C. Giorgio, M. G. Nazo and V. Pata, *Energy Decay of Electromagnetic Systems with Memory*, Math. Mod. Meth. App. Sci. 2005; Vol. 15, No. 10:1489-1502.
- [6] P. Hillion, *Electromagnetic Waves in Dielectrics with Memory*, International Journal for Light and Electron Optics. Optik 115, No. 10 (2004) 433-438.
- [7] H. A. Yousif and R. Melka, *Bessel Functions of the first kind with complex argument*, Computer Physics Communications, 106 (1997) 199-206.
- [8] M. C. Cray, *Bessel Functions of Integral order and Complex Argument*, Communications of the ACM, 169.
- [9] C. Dafermos, *Asymptotic Stability in Viscoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal., 37 (1970) 297-308.
- [10] J. Pruss, *On the spectrum of C_0 -semigroups*, Transactions of the American Mathematical Society 1984, 284(2) 847-857.

- [11] P. W. Anderson, *A question of classical localization. A theory of white paint*, Philos. Mag. B 53, 505-509 (1985).
- [12] A. Figotin and A. Klein, *Localization of classical waves II: Electromagnetic waves*, Commun. Math. Phys. 184, 411-441 (1997).
- [13] J. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Int. Ser. Pur. Appl. Phy., McGraw-Hill Book Company (1941).
- [14] E. Recami, M. Rached and H. Figueroa *Localized Waves: A Historical and Scientific Introduction*, Pre-Print, arxiv.org, 2007.
- [15] J. Durnin, J. Miceli and J. Heberly *Diffraction-free beams*, Phy. Rev. Let., vol. 58, 1499-1501 (1987).
- [16] M. Abramowitz, and I.A. Stegun *Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, (1968).