



Programa de Pós-Graduação em Engenharia
de Recursos Naturais da Amazônia

**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS EM ESTRUTURAS
ESBeltas E FLEXÍVEIS, COMO CORDAS E VIGAS, SUJEITAS
À MOVIMENTAÇÃO AXIAL UTILIZANDO A TÉCNICA DA
TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

Rogilson Nazaré da Silva Porfírio

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, PRODERNA/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientadores: João Nazareno Nonato Quaresma
Emanuel Negrão Macêdo

Belém, PA - Brasil

Maio de 2024

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS EM ESTRUTURAS ESBELTAS E FLEXÍVEIS, COMO CORDAS E VIGAS, SUJEITAS À MOVIMENTAÇÃO AXIAL UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Rogilson Nazaré da Silva Porfírio

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

Examinada por:

Documento assinado digitalmente
 JOAO NAZARENO NONATO QUARESMA
Data: 21/07/2025 18:38:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

João Nazareno Nonato Quaresma, D. Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA - Orientador)

Documento assinado digitalmente
 EMANUEL NEGRAO MACEDO
Data: 21/07/2025 15:18:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Emanuel Negrão Macêdo, D. Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA - Coorientador)

Documento assinado digitalmente
 JERSON ROGERIO PINHEIRO VAZ
Data: 16/07/2025 15:30:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Jerson Rogério Pinheiro Vaz, D. Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA - Membro)

Documento assinado digitalmente
 BRUNO MARQUES VIEGAS
Data: 10/07/2025 10:45:05-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Bruno Marques Viegas, D. Eng.
(PPGBIOTEC/ICB/UFPA - Membro)

Documento assinado digitalmente
 MARCIO FERREIRA MARTINS
Data: 14/07/2025 10:19:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Márcio Ferreira Martins, D. Eng.
(UFES -Membro)

Documento assinado digitalmente
 CARLOS FREDERICO TROTTA MATT
Data: 11/07/2025 09:28:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Carlos Frederico Trotta Matt, D. Sc.
(CEPEL - Membro)

Belém, PA - BRASIL
Maio de 2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

- P832a Porfírio, Rogilson Nazaré da Silva.
Análise de vibrações mecânicas em estruturas esbeltas e flexíveis, como cordas e vigas, sujeitas a movimentação axial utilizando a técnica da transformada integral generalizada / Rogilson Nazaré da Silva Porfírio, . — 2024.
147 f. : il. color.
- Orientador(a): Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
Coorientador(a): Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais na Amazônia, Belém, 2024.
1. Vibrações mecânicas. 2. Estruturas esbeltas e flexíveis.
3. Vibrações em Cordas e Vigas. 4. GITT. I. Título.

CDD 620.3

DEDICATÓRIA

*Dedico inteiramente este trabalho, de todo o meu coração, as três pessoas mais importantes da minha vida, à minha amada esposa **Darilena** e aos meus dois adorados filhos **Danillo** e **Diogo**, que nos nossos cafés da tarde, sempre me apoiaram, incentivaram a continuar, perseverar e reerguer-me ao longo desses anos, e que sem esse apoio não seria fácil o término desse trabalho, aos meus familiares e amigos que de alguma forma contribuíram para essa conclusão.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, a quem devo os dons do Espírito Santo.

A todos os meus familiares que sempre torceram pelo meu sucesso e crescimento.

Ao amigo e Orientador Professor Dr. João Nazareno Nonato Quaresma pela orientação, incentivo e ajuda na elaboração e composição desse trabalho.

Ao Professor Dr. Emanuel Negrão Macêdo pela ajuda e colaboração no desenvolvimento do trabalho, com dicas e estratégias computacionais.

Ao Professor Dr. Carlos Frederico T. Matt pela paciência, ajuda, orientações e correções matemáticas particularmente sobre a aplicação do princípio de Hamilton.

A Ingrid V. Curcino pela ajuda na construção do primeiro programa.

A todos os colegas do PRODERNA pela troca de informações, incentivo, colaboração e convivência em especial ao Helder Miyagawa pela ajuda com o Comsol 5.2.

Aos meus Colegas professores do IFPA, que torceram pela conclusão do trabalho.

Aos meus alunos dos grupos de Pesquisa GPQA-Labtec (G1-G6), TCC, IC, Projetos e Estagiárias(os), que sempre torceram pelo meu sucesso com esse trabalho.

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D. Eng.).

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS EM ESTRUTURAS ESBELTAS E FLEXÍVEIS, COMO CORDAS E VIGAS, SUJEITAS A MOVIMENTAÇÃO AXIAL UTILIZANDO À TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Rogilson Nazaré da Silva Porfírio

Maio/2024

Orientadores: João Nazareno Nonato Quaresma

Emanuel Negrão Macêdo

Área de Concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais

A análise dinâmica das vibrações em estruturas flexíveis é de extrema importância na engenharia e representa um desafio significativo para sua resolução. Este estudo tem como objetivo investigar estruturas esbeltas e flexíveis, como cordas e vigas, que oscilam em apoios do tipo engastado-engastado e engastado-massa concentrada, os quais determinam as condições de contorno do problema em análise. Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), para converter a equação diferencial parcial desenvolvida nessa pesquisa pelo método de Hamilton em uma equação diferencial ordinária, otimiza o processo numérico e controla eficientemente o erro relativo dos cálculos. Neste estudo, desenvolveu-se e aplicou-se um método inovador que trata as condições de contorno sem recorrer ao uso de filtros para homogeneizar a equação. A metodologia de cálculo estabelecida foi implementada em Fortran, utilizando a sub-rotina DIVPAG da IMSL. Uma análise abrangente da convergência e estabilidade do método foi conduzida, considerando o comportamento de quatro modelos de cordas e dois modelos de vigas como referência. A validação do método abordou aspectos funcionais, como deslocamento transversal, velocidades do sistema, frequências e amortecimento, comparando os resultados obtidos pela GITT com outros estudos anteriores que empregaram as mesmas condições de simulação. Os resultados foram satisfatórios, evidenciando a relevância da aplicação dessa técnica de análise. Além disso, avaliou-se a aplicabilidade do método em diferentes configurações vibracionais de cada modelo, demonstrando seu grande potencial como uma solução para problemas envolvendo as estruturas

analisadas. Portanto, este estudo representa uma contribuição significativa para o avanço do conhecimento na modelagem dinâmica de estruturas esbeltas e flexíveis e destacar a influência das condições de contorno nas características vibracionais dessas estruturas. Além disso, introduz uma metodologia inovadora ao tratar as condições de contorno sem o uso de filtros, ampliando as possibilidades de análise e compreensão desse campo específico da engenharia.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFGA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resources Engineering (D. Eng.)

ANALYSIS OF MECHANICAL VIBRATIONS IN SLENDER AND FLEXIBLE STRUCTURES, SUCH AS ROPES AND BEAMS, SUBJECT TO AXIAL MOTION USING THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE

Rogilson Nazaré da Silva Porfírio

May/2024

Advisors: João Nazareno Nonato Quaresma

Emanuel Negrão Macêdo

Research Area: Use and Transformation of Natural Resources

The dynamic analysis of vibrations on flexible structures is of an extreme importance in engineering and its solution represents a significant challenge to be tackled. This study has the objective to investigate thin and flexible structures such as beams and ropes, that oscillate in supports clamped-clamped and clamped-concentrated mass, which determine the boundary conditions of the analysis problem. Using the generalized integral transformation technique (GITT) that converts the partial differential equation (PDE) developed by the Hamiltonian method in an Ordinary Differential Equation (ODE), it optimizes the numerical process and controls efficiently the relative error of the calculations. In this study, it was developed and applied an innovative method that treats the boundary conditions without the use of filters to homogenize the equations. The calculations methodology was implemented in Fortran, utilizing a sub-routine DIVPAG of IMSL. As reference, a thorough analysis of convergence and stableness was applied, considering the behavior of four different models of ropes and two models of beams. The validation of methodology was approached comparing functional aspects such as transversal displacement, system velocities, frequencies, and damping, with results obtained by GITT and other studies that applied the same simulation conditions. The results of this study were found to be satisfactory, which highlights the relevancy of application of this vibration analysis method. It was also assessed the application of this method in different

vibration configurations in each model, which exemplifies its broad potential in problems involving the structures analyzed. Therefore, this study represents a significant contribution to the advance of knowledge in dynamic modeling of thin and flexible structures and highlights the influence of boundary conditions in vibrational characteristics of these structures. Furthermore, it introduces an innovative methodology for treating boundary conditions without the use of filters, expanding the analysis possibilities in this field of engineering.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 – JUSTIFICATIVAS E MOTIVAÇÕES.....	2
1.3 – OBJETIVOS.....	8
1.4 – CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO.....	9
1.5 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	10
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE OSCILAÇÕES DE CORDAS.....	11
2.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE OSCILAÇÕES DE VIGAS.....	16
2.3 – POTENCIALIDADE DO MÉTODO DA GITT.....	22
2.4 – GITT APLICADA EM ANÁLISES DE VIBRAÇÕES.....	23
CAPÍTULO 3 - ESTUDO DE VIBRAÇÕES EM CORDAS E VIGAS.....	27
3.1 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES EM CORDAS.....	27
3.1.1 – Formulação do Modelo I.....	27
3.1.2 – Formulação do Modelo II.....	33
3.1.3 – Formulação do Modelo III.....	37
3.1.4 – Formulação do Modelo IV.....	40
3.1.5 – Adimensionalização dos Modelos de Cordas.....	43
3.1.6 – Equação Geral do Modelo e Cordas.....	44
3.2 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES EM VIGAS.....	45
3.2.1 – Formulação dos Modelos de Vigas.....	45
3.2.2 – Adimensionalização dos Modelos de Vigas.....	51
3.1.6 – Equação Geral do Modelo de Vigas.....	51

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	53
4.1 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	53
4.2 - SOLUÇÃO DE ESTRUTURAS TIPO CORDAS.....	53
4.2.1 - Modelo Expresso em Forma de Matriz.....	56
4.3 - SOLUÇÃO DE ESTRUTURAS TIPO VIGAS.....	57
4.3.1 - Solução para a Condição de Contorno C - C.....	57
4.3.2 - Solução para a condição de contorno C - CM.....	61
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	67
5.1 - MODELOS DE VIBRAÇÕES OBTIDOS PELA GITT.....	67
5.2 - ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA DOS MODELOS DE CORDAS....	69
5.2.1 - Análise da convergência do modelo I.....	69
5.2.2 - Análise da convergência do modelo II.....	72
5.2.3 - Análise da convergência do modelo III.....	76
5.2.4 - Análise da convergência do modelo IV.....	80
5.3 - AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS DOS MODELOS DE CORDAS..	86
5.3.1 - Resultados numéricos do modelo I.....	86
5.3.2 - Resultados numéricos do modelo II.....	91
5.3.3 - Resultados numéricos do modelo III.....	95
5.3.4 - Resultados numéricos do modelo IV.....	101
5.4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS MODELOS DE VIGAS.....	107
5.4.1 - ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA ASSUMINDO $a=0$ e $b=0$...	107
5.4.1.1 - Resultados da condição de contorno C-C.....	108
5.4.1.2 - Resultados da condição de contorno C-CM.....	110
5.4.2 - AVALIAÇÃO NUMÉRICA ASSUMINDO $a=0$ e $b=0$	112
5.4.2.1 - Resultados da condição de contorno C-C.....	112
5.4.2.2 - Resultados da condição de contorno C-CM.....	114
5.4.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS ASSUMINDO $a=1$ e $b=0$	115

5.4.3.1 – Resultados da condição de contorno C-C.....	116
5.4.3.2 – Resultados da condição de contorno C-CM.....	117
5.4.4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS ASSUMINDO $a=0$ e $b=1$	119
5.4.4.1 – Resultados da condição de contorno C – C.....	119
5.4.4.2 – Resultados da condição de contorno C – CM.....	120
5.4.5 – AVALIAÇÃO NUMÉRICA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO C-C e C-CM.....	121
5.4.5.1 – Resultados da condição de contorno C-C.....	122
5.4.5.2 – Resultados da condição de contorno C-CM.....	125
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS.....	129
6.1 – CONCLUSÕES.....	129
6.2 – RECOMENDAÇÕES FUTURAS.....	132
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	125

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Ilustrações de estruturas esbeltas e flexíveis.....	1
Figura 1.2	Diagrama esquemáticos dos tipos de apoio investigados.....	4
Figura 1.3	Exemplo de cordas de violão e os três primeiros modos de oscilação	4
Figura 1.4	Exemplo de linhas de transmissão de energia elétrica.....	5
Figura 1.5	Exemplo do conjunto polias e correia para transmissão de potência....	5
Figura 1.6	Exemplo do conjunto de rodas e amortecedores de um vagão de trem..	6
Figura 1.7	Exemplo de ponte para travessia de pedestre sobre um rio.....	6
Figura 1.8	Exemplo de aplicação de um sensor piezoelétrico.....	7
Figura 2.1	Plano vibracional do 1º modo de oscilação de uma corda biengastada.	13
Figura 2.2	Perfil vibracional do 1º modo de oscilação de uma corda biengastada.	14
Figura 2.3	Modelo de viga de <i>Euler-Bernoulli</i> com vibração transversal e diagrama de corpo livre para um elemento infinitesimal deformado por uma força distribuída na unidade de comprimento.....	16
Figura 2.4	Diagrama esquemático de uma viga (ponte) biengastada.....	17
Figura 2.5	Sistema viga-massa concentrada.....	19
Figura 3.1	Arranjo do modelo I para uma corda esbelta e flexível oscilando na direção x e deslocamento transversal $w(x,t)$	27
Figura 3.2	Distribuição das componentes do segmento $\overline{PP'}$	29
Figura 3.3	Diagrama esquemático da movimentação axial do modelo II.....	34
Figura 3.4	Diagrama esquemático de uma correia sobre duas polias com velocidade $V(t)$ na direção x e deslocamento transversal y	38
Figura 3.5	Diagrama esquemático do sistema viscoelástico com velocidade $V(t)$ na direção x e deslocamento transversal y	41
Figura 3.6	Representação esquemática da viga com contorno C–C.....	50
Figura 3.7	Representação esquemática da viga com contorno C–CM.....	50
Figura 5.1	Linhas de código do monitoramento do tempo de CPU.....	68
Figura 5.2	Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo I.....	69
Figura 5.3	Resultados da verificação da estabilidade do modelo I.....	70
Figura 5.4	Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo I.....	71

Figura 5.5	Resultados de comparação da dinâmica comportamental do modelo I	72
Figura 5.6	Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo II.....	73
Figura 5.7	Resultados da verificação da estabilidade do modelo II.....	73
Figura 5.8	Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo II.....	74
Figura 5.9	Resultado da análise oscilatória do modelo II e variação de β em função de τ	75
Figura 5.10	Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo III.....	76
Figura 5.11	Resultados da verificação da estabilidade do modelo III.....	77
Figura 5.12	Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo III.....	77
Figura 5.13	Aferição dos resultados da dinâmica do modelo III em função de τ	79
Figura 5.14	Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo IV.....	80
Figura 5.15	Resultados da verificação da estabilidade do modelo IV.....	81
Figura 5.16	Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo IV.....	82
Figura 5.17	Resposta harmônica à vibração forçada em função de $w(\xi, \tau)$	83
Figura 5.18	Resposta do sistema à vibração forçada em função de $w(\xi, \tau)$	84
Figura 5.19	Resultados da avaliação da convergência para vibração livre em função de diferentes valores de τ	85
Figura 5.20	Resultado das oscilações do período fundamental (τ_f) em função de β	86
Figura 5.21	Frequência natural para cinco modos de oscilação.....	90
Figura 5.22	Resultados das oscilações do modelo II no campo deslocamento transversal em função de τ e ξ	85
Figura 5.23	Perfil comportamental dos parâmetros α , β e λ em função τ_i^*	87
Figura 5.24	Resultados do 1º modo de vibração do modelo III em curvas de <i>Lissajous</i> em função dos parâmetros β x γ	96
Figura 5.25	Resultados do diagrama de estabilidade do modelo III para $N = 8$	99
Figura 5.26	Diagrama de estabilidade da região crítica do sistema para $N = 8$	100
Figura 5.27	Diagrama de estabilidade do modelo III com teste de <i>Lyapunov-Floquet</i> para $N = 8$	101
Figura 5.28	Resultados da GITT para resposta à vibração forçada em função τ	102
Figura 5.29	Respostas das vibrações livres e forçadas para o modelo IV.....	103
Figura 5.30	Resultados das exigências operacionais para $N = 200$	104

Figura 5.31	Resultados da verificação da convergência para o apoio C–C do Modelo de Viga	108
Figura 5.32	Resultados da verificação da estabilidade em cinco pontos da coordenada espacial η em função de τ para o modelo C–C da viga.....	109
Figura 5.33	Resultados da verificação da convergência do contorno C–CM.....	110
Figura 5.34	Resultado da verificação da estabilidade da GITT na coordenada espacial η	111
Figura 5.35	Representação gráfica da dinâmica de oscilações da viga com contorno C–C.....	116
Figura 5.36	Resultados da inclusão de α no termo EDP no contorno C–CM.....	118
Figura 5.37	Representação gráfica da dinâmica de oscilações da viga com contorno C–C.....	120
Figura 5.38	Resultados da inclusão de α no termo EDIP do contorno C–CM.....	121
Figura 5.39	Efeito da velocidade (v) sobre $w(\eta,\tau)$ em função de η e contorno C–C.....	122
Figura 5.40	Efeito da variação da velocidade (ε) sobre $w(\eta,\tau)$ em função de τ e contorno C–C.....	123
Figura 5.41	Efeito da rigidez à flexão (ξ) sobre $w(\eta,\tau)$ em função de τ e contorno C–C.....	123
Figura 5.42	Efeito da frequência angular (ω) sobre $w(\eta,\tau)$ em função de τ e contorno C–C.....	124
Figura 5.43	Efeito da velocidade (v) sobre $w(\eta,t)$ em função de η para o contorno C-CM.....	125
Figura 5.44	Efeito das flutuações da velocidade (ε) em função de τ e contorno C–CM.....	126
Figura 5.45	Efeito da rigidez a flexão (ξ) com função de η e contorno C–CM.....	126
Figura 5.46	Efeito da frequência angular (ω) com função de τ e contorno C–CM...	127

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Parâmetros empregados e equações modelos.....	44
Tabela 5.1	Frequência natural para cinco modos de oscilação com solução exata e GITT em função da velocidade de transporte (β).....	90
Tabela 5.2	Multiplicadores de <i>Floquet</i> para $N = 2$	98
Tabela 5.3	Deslocamento transversal em função da velocidade axial (v) e rigidez a flexão (ξ).....	113
Tabela 5.4	Frequências naturais (ω) em função de γ e diferentes métodos de análise.....	115

NOMENCLATURA

Modelo de Cordas

- Ao – amplitude de propagação adimensional.
- ξ - coordenada longitudinal adimensional.
- β – velocidade de transporte adimensional.
- α – deformação axial.
- γ – frequência angular.
- $f(\tau)$ – fator de velocidade axial.
- $g(\tau)$ – fator de aceleração axial,
- κ – rigidez da mola adimensional.
- δ – fator de amortecimento adimensional.
- F_0 – força de excitação externa adimensional.
- τ_l – período de oscilação da corda adimensional.
- τ_l^* – período de oscilação da corda modificado adimensional.
- Q - grau de qualidade do amortecimento adimensional.
- ζ - taxa de amortecimento adimensional.
- T – tensão aplicada.
- $w(\xi, \tau)$ – deslocamento lateral adimensional.

Modelo de Vigas

- a, b – coeficientes numéricos unitários [0 ou 1].
- α – rigidez a deformação axial adimensional.
- ε - fator de relaxação da velocidade média.
- ω - frequência angular adimensional.
- Ω - frequência angular do sistema.
- ao – amplitude propagação adimensional.
- η – coordenada espacial adimensional.
- τ – variável temporal adimensional.
- Vo – velocidade média do sistema.
- ξ – rigidez à flexão adimensional.
- v – velocidades de transporte adimensional.
- γ – razão de massa.
- W, w, $w(\eta, \tau)$ – deslocamento transversal adimensional.

Outros Símbolos e Variáveis

- A – área da seção transversal.
- x – direção longitudinal.
- y - direção transversal.
- EDP – Equação Diferencial Parcial.
- EDIP – Equação Integro-Diferencial Parcial.
- E – modulo de elasticidade.
- I – momento de inércia.
- K – constante de rigidez da mola.
- L – comprimento.
- N – número de termos.
- V - velocidade constante.
- V(t) – velocidade variável.
- ρ – densidade linear.
- t – tempo.
- τ – tempo adimensional.
- W(x,t) – deslocamento transversal ou lateral

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em diversos setores da engenharia, é inegável a influência das vibrações, que exigem abordagens eficazes para mitigar efeitos e garantir a segurança e o desempenho adequados das estruturas envolvidas. Em geral essas estruturas são simples ou mesmo complexas e dependem de sistemas flexíveis ou móveis, que podem ter sua integridade comprometida pelas vibrações.

Esses sistemas podem ter apoios simples, restrito ou livre, com ou sem amortecimento que quando tratados corretamente, conseguem controlar ou dissipar a energia acumulada reduzindo o efeito da vibração. Vários setores, como construção civil, indústria naval, indústria de alimentos, ferrovias, linhas de transmissão, indústria têxtil, pontes, cabos de elevadores, e outras. São afetadas por problemas de vibrações (RAO, 2007; PHAM e HONG, 2020). Na Fig. 1.1 estão presentes imagens ilustrativas de sistemas considerados esbeltos e flexíveis, que representam a ideia básica do projeto de oscilação.

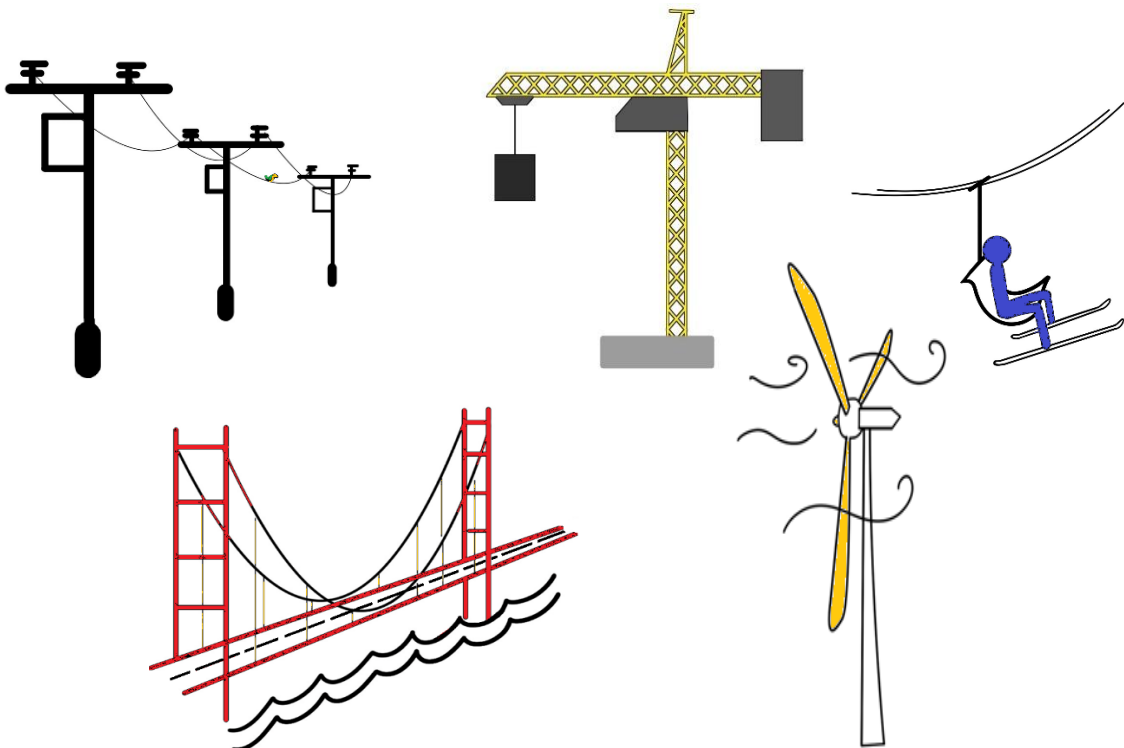


Figura 1.1 – Ilustrações de estruturas esbeltas e flexíveis.

A complexidade das estruturas móveis e flexíveis, por desprezarem a rigidez à flexão, demanda uma ação cuidadosa diante das vibrações mecânicas geradas, conforme RAO (2007). Resistir a estímulos diversos, desde vibrações livres até efeitos naturais como vento e terremotos, requer um entendimento profundo das propriedades estruturais dos sistemas dinâmicos. Autores como BLEVINS (1979), CHEN (2005) e PHAM e HONG (2020) têm contribuído significativamente para esse campo, oferecendo exemplos e conhecimentos valiosos sobre o tema. Essa ação proporcionará uma compreensão do comportamento dinâmico desses sistemas em diversas situações.

Para isso, será utilizado ao longo do trabalho, as informações de artigos sobre vibrações e movimentações de estruturas flexíveis, acessados através da Base de Dados de Periódicos da CAPES (<https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br>), da plataforma ACADEMIA (<https://www.academia.edu/>) e arquivos de repositórios com acesso livre presentes na Internet.

O desafio então, será lidar com a matemática envolvida nesses problemas de modo a fornecer resultados precisos que capturem a complexidade comportamental das estruturas estudadas, em particular as esbelta e flexíveis, onde a relação ($L/w > 10$), sendo (L) comprimento e (w) largura, caracterizam essa denominação. Além disso, é necessário adaptar os modelos às exigências normativas e considerando a rigidez, velocidade, tensão aplicada e amortecimento do sistema (LIMA, 2022).

1.2 – JUSTIFICATIVAS E MOTIVAÇÕES

O avanço tecnológico visa otimizar processos complexos em tempo reduzido. Isso pode levar o funcionamento dos sistemas a gerar vibrações indesejadas. Surge então, o interesse em usar ferramentas computacionais e de cálculo para analisar e solucionar problemas que envolvem vibrações de estruturas flexíveis como Cordas e Vigas.

Inicialmente os métodos clássicos utilizavam a mecânica newtoniana ou lagrangeana para obter as equações dos modelos, o que geravam desafios pela complexidade das equações e necessidades de soluções analíticas por reduzir os modelos a uma forma linear.

Com as novas arquiteturas computacionais, esses métodos passam a ser resolvidos de forma mais representativa com *solvers* e *packages* comerciais, como: Matlab, Scilab, Comsol, Ansys, Fluent. etc. Baseados em métodos numérica como Diferenças finitas, Volumes finitos,

Galerkin, Hamilton, Runge-kutta, Perturbações e outros. Buscando atender os requisitos de aplicação imediata nos mais variados setores da engenharia.

A proposta desse trabalho, em sua essência, é desenvolver uma metodologia de cálculo moderna baseada em um modelo geral estabelecido pela *Técnica da Transformada Integral Generalizada* (Generalized Integral Transform Technique – **GITT**), onde esse modelo será utilizado para encontrar outros modelos, permitindo a análise de sistemas sob diferentes condições de contorno. Isso será feito com o desenvolvimento de um programa computacional em Fortran-95, capaz de realizar análises precisas de sistemas reais em estruturas flexíveis e esbeltas, que apresentam movimentos na direção axial e oscilam no sentido transversal.

Métodos como a GITT, proporcionam uma avançada e flexível vantagem alcançando os mesmos e outros resultados de cálculo dos primeiros ou originais modelos. Permitem uma análise detalhada e uma resolução precisa dos problemas relacionados a estruturas flexíveis. Impulsionam avanços na compreensão e aplicação prática e melhoram o estudo de vibrações (PHAM e HONG, 2020).

A técnica da GITT se destaca por permitir controlar o erro relativo ao adaptar ordens de truncamento nas expansões das autofunções. Sua distinta natureza híbrida minimiza a demanda computacional, realizando a integração numérica na dimensão temporal (própria para estudo de vibrações) sem afetar a espacial. Mantém altos níveis de precisão, garantindo convergência e estabilidade do método (ÖZISIK, 1993).

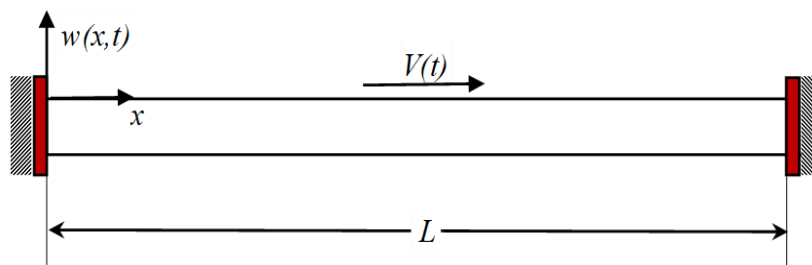
É inegável as vantagens da GITT, mas existem algumas dificuldades como as enfrentadas por usuários iniciantes, devido à natureza complexa da matemática envolvida. A aplicação prática é dificultada pela necessidade de acesso a demais softwares específicos. Outra questão é a precisão, afetada por parâmetros e condições iniciais exigindo atenção na configuração do modelo.

A escolha dos problemas para estudo representa uma contribuição valiosa para a aplicação da GITT, dada a falta de exploração do tema na literatura até o momento. A ênfase em questões relacionadas às vibrações em estruturas reais é particularmente relevante, considerando as melhorias substanciais que essa técnica oferece no tratamento matemático desses problemas. Um exemplo de aplicação seria a integração dessas ideias em sistemas de qualidade no aprimoramento das práticas de manutenção preditiva, o que pode gerar benefícios em termos de eficiência e segurança operacional.

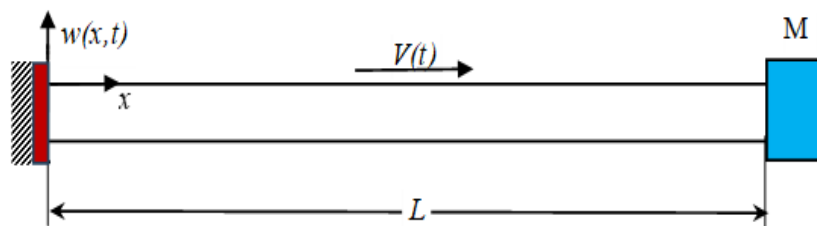
Na concepção dos modelos, será adotada uma visão baseada na adaptação de equações diferenciais estabelecidas em PHAM e HONG (2020). Para serem adequadas à aplicação do

método de Hamilton generalizado, juntamente com os fundamentos teóricos da viga de Euler-Bernoulli, para a formulação da EDP dos modelos por meio da GITT. Isso permitirá avaliar os efeitos das vibrações e frequências naturais no campo espacial e temporal. Considerando a sensibilidade e as características dinâmicas dos sistemas, que representam as oscilações de uma corda ou viga flexíveis.

Na análise do sistema da corda, serão considerados quatro modelos com apoio engastado-engastado (Clamped-Clamped, C – C). Já para o sistema da viga, serão explorados dois tipos de apoio: engastado-engastado (Clamped-Clamped, C – C) e engastado com massa na extremidade (Clamped-Concentrated Mass, C – CM). A Fig. 1.2 ilustra esses dois apoios por meio de diagramas esquemáticos.



(a) Engastado-Engastado (C – C).



(b) Engastado-Massa Concentrada (C – CM).

Figura 1.2 – Diagrama esquemáticos dos tipos de apoio investigados.

A primeira formulação aplicando a GITT estabelece uma equação governante onde é mantida a condição de contorno (C – C) e conforme a finalidade, a equação geral será modificada estabelecendo um novo comportamento ao sistema. Analisando quatro modelos com dinâmicas diferentes:

1º modelo – Esse modelo original foi concebido como uma corda esbelta e flexível que se assemelha a uma corrente (SACK, 1954; LEE, 1957). A Fig. 1.3 ao lado, mostra um exemplo de aplicação real do modelo I.

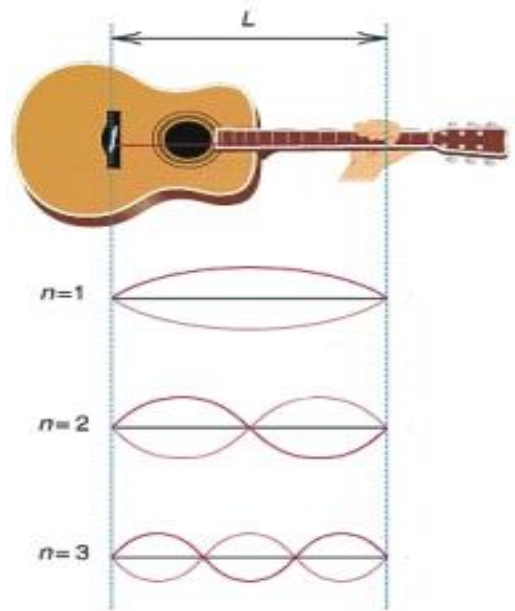


Figura 1.3 – Exemplo de cordas de violão e os três primeiros modos de oscilação. Fonte: Figura licenciada por CCBY-AS de imagens Online da Plataforma Bing. Acessado em: 04/05/2024, às 19:19.

2º modelo – Emprega o efeito da deformação para descrever as oscilações de uma corda flexível (SWOPE e AMES, 1963; MOTE Jr., 1966; BAPAT e SRINIVASAN, 1967; AMES *et al.*, 1968; WICKERT, 1992; SUWEKEN e VAN HORSSSEN, 2003). A Fig. 1.4 mostra um exemplo de aplicação real do modelo II.



Figura 1.4 – Exemplo de linhas de transmissão de energia elétrica.

3º modelo – Envolve a velocidade de transferência e aceleração de uma correia transportadora (PAKDEMIRLI *et al.*, 1994; ZWIERS e BRAUN, 2007). A Fig. 1.5 apresenta um caso real de aplicação da equação do modelo III.



Figura 1.5 – Exemplo do conjunto polias e correia para transmissão de potência. Fonte: ABECOM, <https://www.abecom.com.br/polia-industrial/>. Acessado em: 05/05/2024, às 23:43.

4º modelo – Aborda as oscilações aplicando a rigidez e o amortecimento de um sistema sustentado por molas e amortecedores distribuídos (SWOPE e AMES, 1963; BANICHUK *et al.*, 2014). A Fig. 1.6 mostra um exemplo real de aplicação do modelo.



Figura 1.6 – Exemplo do conjunto de rodas e amortecedores de um vagão de trem. Fonte: licenciada em CCBY-SA. Banco de dados de Imagens Online da Plataforma Bing. Acessado em: 04/05/2024, às 19:32.

A segunda formulação usando a GITT, é uma evolução da metodologia das oscilações de Cordas aplicada as oscilações das Vigas. Será estabelecida uma equação governante que é mantida e duas condições de contorno aplicadas conforme a finalidade do modelo, uma C – C, denominada clássica e outra C – CM denominada nãoclássica. Estabelecendo dois modelos com diferentes dinâmicas.

1º modelo – Esse modelo considera uma estrutura fixada nas extremidades, com condição de contorno tipo C – C, denominando clássica. A Fig. 1.7 mostra um exemplo de aplicação desse tipo de problema.



Figura 1.7 – Exemplo de ponte para travessia de pedestre sobre um rio. Fonte: Autor Desconhecido licenciada em CCBY-SA. Banco de dados de Imagens Online da Plataforma Bing. Acessado em: 05/05/2024, às 23:00.

2º modelo – Esse modelo trata de um sistema com Condição de contorno tipo C – CM chamada nãoclássica. A Fig. 1.8 mostra um exemplo de aplicação desse tipo de modelo.

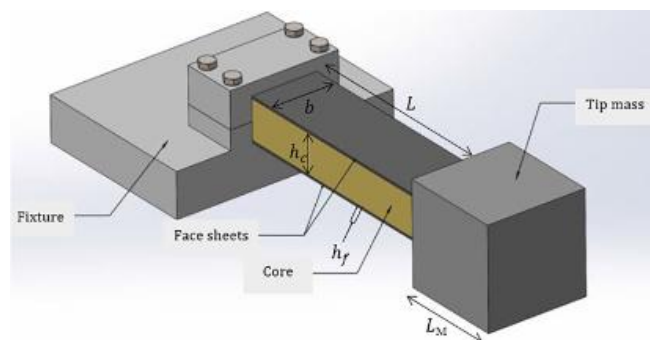


Fig. 1. Schematic of sandwich beam with tip mass.

Figura 1.8 – Exemplo de aplicação de um sensor piezoelétrico. Fonte: BARRY *et al.* (2019).

A convergência e a estabilidade desses modelos serão avaliadas mediante ao grau de tolerância estabelecido na GITT. Os resultados obtidos serão validados por comparação com resultados encontrados na literatura que tenham a mesma sistemática de cálculo estabelecida.

Portanto, essa abordagem propõe avanços significativos na compreensão e na aplicação dos modelos em diversos contextos e configurações de sistemas. Além de permitir uma análise abrangente e reflexiva do uso da informação original, aliada à capacidade de resolução moderna ao integrar métodos atualizados aos modelos tradicionais, tornando-os ainda mais eficazes e adaptáveis às demandas contemporâneas, impulsionando potenciais avanços na compreensão e aplicação prática das vibrações.

1.3 – OBJETIVOS

O objetivo geral desse trabalho é aplicar a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para analisar o comportamento de estruturas homogêneas, esbeltas e flexíveis que oscilam na direção longitudinal, como Cordas e Vigas seguramente engastadas e móveis, com ou sem amortecimento, quando submetidas a carregamentos dinâmicos.

Como objetivos específicos para o desenvolvimento do trabalho pretende-se:

- Obter as equações diferenciais utilizando o método de *Hamilton* para análise das oscilações de Cordas. Com base na teoria de *Euler-Bernoulli* os modelos para oscilações de Vigas.
- Resolver as equações de cinco modelos, sendo quatro de Cordas e um de Vigas, a partir da aplicação da metodologia da GITT.
- Desenvolver um código computacional em linguagem Fortran-95 para simular soluções numérico-analíticas discretizadas em função da posição e estado.
- Obter valores de deslocamento transversal, velocidades, frequências e amortecimento e realizar suas respectivas análises.
- Fazer modelagens numéricas das estruturas analisadas com o programa desenvolvido, e validar os resultados numéricos, avaliando a convergência e a estabilidade da resolução em função do deslocamento transversal e seus comportamentos.
- Comparar os resultados de vibrações das estruturas flexíveis com de outros autores encontrados na literatura, considerando as mesmas condições de simulação empregadas nos modelos estudados.

- Usar o programa desenvolvido para simular os modelos sob diferentes configurações e avaliar a aplicabilidade do método de cálculo sobre o conjunto de parâmetros empregados.
- Discutir o potencial do método de cálculo em relação aos modos de vibração, variação da amplitude, alterações na velocidade característica e frequência.

1.4 – CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

O trabalho se fundamenta nas equações dos modelos originais de vibrações em cordas e vigas flexíveis examinadas as aplicações teóricas e práticas. Destacando as metodologias empregadas no desenvolvimento e a relevância da contribuição da atualização dessas informações. Mediante a isso, será feito uma proposta do uso da GITT em outro tipo de problemas, introduzindo novas ideias e conceitos.

Buscar ampliar a exploração da aplicabilidade do método desenvolvido pela GITT em soluções de classes mais amplas de problemas. Como equações integro-diferenciais, que combinam tanto características de equações diferenciais ordinárias (EDO) quanto de equações diferenciais parciais (EDP), envolvendo operadores integrais e diferenciais simultaneamente.

Como o uso de filtro é uma questão peculiar na resolução de equações diferenciais, por serem empregados na atenuação de componentes ou remoção de ruídos da equação, o que torna a solução mais estável ou próxima do comportamento desejado. Assim sendo, será introduzida uma nova forma de cálculo para problemas de valores de contorno para os modelos com massa concentrada (C–CM). Dessa forma, a formulação da solução pela GITT será baseada no uso de autovalores, experimentando a resolução sem o uso de filtros para modificar as propriedades de ortogonalidade das autofunções. Uma vez que esse tipo de abordagem ainda não foi realizado para esse tipo de problema.

O filtro pode ser aplicado diretamente na discretização do problema ou como parte dos métodos utilizados para resolver as equações dos modelos, homogeneizando as condições de contorno potencializando a equação do problema transformado. O uso de filtros na GITT é um processo que pode acelerar a convergência e a precisão na solução de problemas com geometria complexa, condições de contorno não-lineares e demais casos. Como os filtros implícitos utilizados na solução de problemas de condução de calor com condições de contorno não-lineares, para melhorar o desempenho computacional e a solução de eventuais problemas de convergência causados pelas não-linearidades (MIKHAILOV e COTTA, 1998).

COTTA *et al.* (2015, 2016) deram uma nova visão ao uso dos filtros quando incorporaram os operadores diferenciais não-lineares ao problema de autovalores auxiliares,

que pode também ser transformado, e depois resolvido simultaneamente pelo sistema de EDO provenientes do problema original. O resultado demonstrou que a estruturação nova foi melhor que a metodologia tradicional.

Também COTTA *et al.* (2018) identificaram que essa técnica oferece boa relação ao cálculo, por ser tipicamente encontrada em métodos analíticos puros. Mas apresenta boa flexibilidade para solução de problemas envolvendo EDP não-linear em métodos numéricos.

Como MATT (2013) que empregando a técnica da GITT resolveu problemas de vibrações. Baseada na expansão de autofunções. Um esquema de filtro implícito, utilizado para resolver as equações governantes das vibrações transversais de uma viga cantiléver (engastada em uma extremidade) com uma massa excêntrica na ponta na direção axial. Semelhantemente, SILVA (2017) que apresenta um recurso obtido por GITT ao problema de filtro, aplicando uma metodologia de solução dada por um esquema de ordenamento de autovalores apropriadamente escolhido de forma a obter uma resposta analítica. Em que as autofunções são determinadas por um reordenamento dos autovalores nas respectivas direções dos índices, reduzindo-os a um único autovalor. Esse procedimento reduz os múltiplos somatórios a um único somatório em função de um único índice.

Ao propor essa contribuição de avanço na resolução de problemas específicos aplicando a GITT, isso ofertará uma nova perspectiva na resolução matemática desse tipo de problema. Sua aplicação pode resultar em abordagens contemporâneas que promovam uma compreensão mais profunda e precisa dos fenômenos estudados, que podem levar a avanços significativos na área de análise de vibrações em estruturas flexíveis.

1.5 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 1, é realizada uma apresentação detalhada do trabalho, incluindo considerações sobre as capacidades da GITT e como ela resolve problemas dessa complexidade. Explora-se a motivação por trás do estudo e sua importância para a pesquisa, ressaltando as contribuições para a compreensão das vibrações em estruturas flexíveis, como cordas e vigas. Destaca-se ainda a contribuição que esse trabalho trouxe para o avanço do tema.

No Capítulo 2, são apresentados os modelos que descrevem as vibrações em cordas e vigas flexíveis. Discutindo os trabalhos pioneiros que estabeleceram as bases nesse campo, destacando as metodologias utilizadas para desenvolver os modelos. Também são exploradas

as aplicações teóricas e práticas ao longo do tempo, ressaltando a importância das informações específicas sobre a aplicação da GITT como ferramenta de cálculo em sistemas de vibrações.

No Capítulo 3, é detalhada a metodologia de desenvolvimento dos modelos, partindo da origem e aplicando passo a passo o método de *Hamilton* generalizado até obter quatro modelos de vibrações de cordas e dois de vigas, considerando condições de contorno iguais e diferentes.

No Capítulo 4, é tratada a metodologia de desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias (EDO) envolvendo vibrações de cordas e vigas, utilizando a estrutura algébrica da GITT para resolver os problemas propostos.

O Capítulo 5 apresenta a interpretação dos resultados obtidos pela GITT para avaliar a convergência e estabilidade do método em função do deslocamento transversal e seus comportamentos. Os resultados são validados através de comparação com dados provenientes de publicações da literatura que tratam da mesma dinâmica de cálculo. Além disso, são discutidos os resultados das frequências, modos de vibração, comportamento dinâmico em diferentes condições e a influência de parâmetros do modelo, como: velocidade, rigidez, massa e amortecimento.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões sobre o perfil comportamental das vibrações de Cordas e Vigas e a utilização da GITT na resolução desse tipo de problema. Tanto para as condições de contorno iguais como para as variáveis. Além disso, as discussões sobre as principais sugestões para a continuação do trabalho em etapas futuras.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Utilizar informações de artigos sobre vibrações em estruturas flexíveis publicados a algum tempo foi uma decisão estratégica para estabelecer a base sólida ao desenvolvimento da pesquisa. Os artigos foram acessados através da Base de Dados de periódicos da CAPES (<https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br>), a plataforma ACADEMIA (<https://www.academia.edu/>) e arquivos de acesso livre presentes na Internet.

A modernização das análises, numéricas ou não, busca constantemente integrar métodos inovadores que permitam avaliações mais precisas da realidade. Dessa forma, a interpretação da origem das informações buscou ampliar os conceitos existentes e atualizá-los de maneira inovadora e contemporânea, propondo contribuir ao avanço da informação acerca do uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Para facilitar o entendimento e a organização do desenvolvimento metodológico adotado neste trabalho, este capítulo foi dividido em quatro partes: a primeira aborda as oscilações de cordas; a segunda trata das oscilações de vigas, incluindo contornos engastado–engastado e engastado–massa concentrada; a terceira apresenta estudos sobre o uso da GITT como ferramenta de cálculo; e a quarta discute a aplicação da GITT em sistemas semelhantes a cordas e vigas.

2.1 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE OSCILAÇÕES DE CORDAS

Muitas contribuições sobre vibração e estabilidade de sistemas com movimentação axial podem ser encontradas na literatura. Como os trabalhos de CHEN (2005) e PHAM e HONG (2020), por apresentarem uma análise abrangente das vibrações transversais de cordas em movimento axial, cruciais em diversas aplicações de engenharia. Fazendo uma abordagem com modelos lineares explorando análise modal, restrições complexas e vibrações acopladas. Enquanto modelos não lineares são tratados com aproximações analíticas ou numéricas.

Também nesse tipo de literatura, são discutidos temas como modelagem com amortecimento, controle ativo e adaptativo de vibrações e sugestões para pesquisas futuras

sobre vibrações não lineares, restrições complexas, estudos experimentais e sistemas híbridos contendo cordas em movimento.

Os primeiros modelos abordaram o problema de forma linear para demonstrar e descrever o movimento de cordas flexíveis, como LEE (1957) investigou o movimento de uma corda tensionada, presa nas extremidades e sujeita a uma força transversal no centro, resultando em oscilações não lineares. Em seguida, BAPAT e SRINIVASAN (1967) desenvolveram equações diferenciais parciais não lineares, considerando uma grande deflexão no sistema. AMES *et al.* (1968) exploraram os movimentos axiais e a dinâmica linear de cordas finas flexíveis, servindo como base para o cálculo. Esses estudos foram essenciais para estabelecer os princípios iniciais da modelagem comportamental de oscilação, definindo um padrão da onda em uma corda com suportes fixos, sob velocidade e tensão constantes. Na prática, a condição mais importante para autores como MOTE Jr (1966), BAPAT e SRINIVASAN (1967), ULSOY *et al.* (1978) e CHEN (2005), era que a frequência de excitação coincidissem com a frequência natural dos harmônicos da corda, e, em alguns casos, o amortecimento deveria ser considerado como um parâmetro do modelo. Eles conduziram uma extensa revisão investigativa de vibrações e estabilidade de modelos de cordas que tratam das movimentações em coordenadas radiais e axiais. Esse tipo de sistemática também foi explorado por alguns pesquisadores, como AMES *et al.* (1968), que analisaram os modos de vibração de uma corda, considerando as trajetórias de oscilação e sua configuração dinâmica, incluindo a mudança de fase ao longo do eixo, conforme ilustrado na foto representativa da Fig. 2.1.

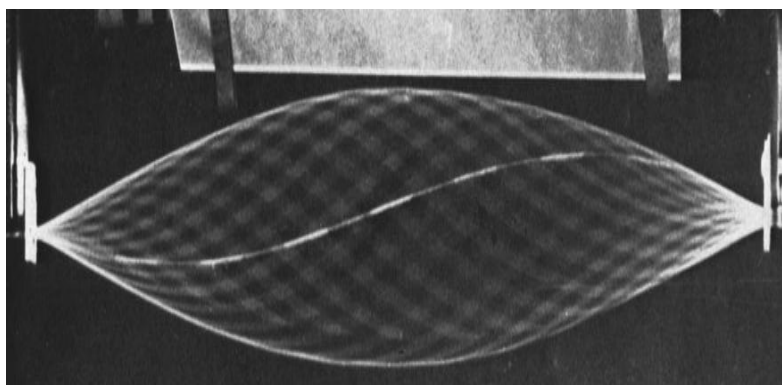


Figura 2.1 – Plano vibracional do 1º modo de oscilação de uma corda biengastada. Fonte: AMES *et al.* (1968).

Com o intuito de aprimorar a movimentação longitudinal, WICKERT e MOTE Jr (1990) e WICKERT (1992) integraram os efeitos da tensão de elasticidade não linear ao processo de

cálculo, examinando tanto a velocidade subcrítica quanto a supercrítica de um sistema em movimento. Seguindo uma semelhante, CHAKRABORTY *et al.* (1999) exploraram as respostas livres e forçadas de um feixe com deslocamento em velocidade variável, considerando harmônicos pontuais e estabilidade linear. Por outro lado, PAKDEMIRLI e ÖZ (2008) analisaram o desempenho da variação da velocidade utilizando uma solução analítica com o método de múltiplas escalas. Esses estudos contribuíram significativamente para uma compreensão mais abrangente e precisa da dinâmica da movimentação axial empregada em oscilações de cordas.

A análise do movimento da corda, considerando velocidade e tensão, requer a resolução de equações diferenciais por métodos específicos de cálculo. Por exemplo, BAPAT e SRINIVASAN (1967) correlacionaram a velocidade longitudinal da corda com sua frequência natural de oscilação, sob tensão constante ou variável de forma senoidal. HUANG *et al.* (1995) destacaram a aplicabilidade do princípio de *Hamilton* para análise de sistemas em movimento axial envolvendo dissipação de energia, considerando o trabalho virtual realizado pelo amortecimento viscoso acoplando uma roda dentada aos movimentos transversal e longitudinal dos segmentos. PAKDEMIRLI e ULSOY (1997) empregaram o método de Galerkin para discretizar o sistema e obter um conjunto de equações diferenciais ordinárias que descrevem o movimento de uma corda em movimento axial. Como pode ser notado nos perfis vibracionais do diagrama esquemático na Fig. 2.2.

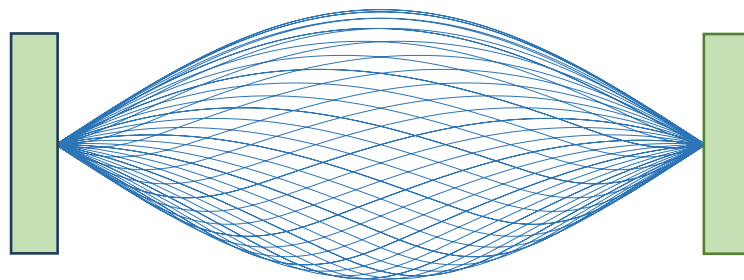


Figura 2.2 – Perfil vibracional do 1º modo de oscilação de uma corda biengastada.

Uma vasta quantidade de publicações sobre movimentos axiais de cordas destaca as técnicas analíticas de análise, muitas vezes recorrendo a métodos de perturbação para resolver a equação governante do movimento oscilatório. No entanto, alguns pesquisadores optam por abordagens diferentes, como a integração temporal direta ou o método de diferenças finitas. Apesar da maioria dos estudos ter se concentrado em sistemas com velocidade axial constante,

também houve análises sobre o efeito da variação da velocidade nas vibrações paramétricas do sistema. Esses sistemas podem ser modelados tanto por formulações matemáticas lineares quanto não lineares (GHAYESH *et al.*, 2012).

Com o avanço da computação, modelos e abordagens tornaram-se mais amplamente utilizados para obter e comparar resultados. Como fizeram PAKDEMIRLI *et al.* (1994) quando aplicaram a teoria de Floquet para avaliar a estabilidade de uma corda em aceleração axial com velocidade variável de forma harmônica, enquanto WICKERT (1996) usou o método analítico assintótico de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM) para analisar equações fracamente não lineares em uma corda sujeita a aceleração. ÖZ *et al.* (1998) estudaram a transição de um sistema de cordas para vigas em aceleração axial. Em outros trabalhos, como ÖZKAYA e PAKDEMIRLI (2000), uma característica sistemática foi adotada na análise das vibrações e estabilidade de cordas e vigas em movimento, usando técnicas de perturbação.

À medida que a pesquisa sobre vibrações de cordas avança, estudos têm explorado exemplos de aplicação em situações do cotidiano. QUEIROZ *et al.* (1999) formularam equações para o movimento acoplado de uma corda e um atuador, usando o método de Lyapunov para desenvolver um sistema de controle que requer o conhecimento preciso da massa do atuador e da tensão na corda. FUNG e CHANG (2001) investigaram o comportamento dinâmico não linear de sistemas com polias, apresentando um modelo para pequenas vibrações transversais acopladas ao movimento longitudinal das polias. ZHANG e CHEN (2016) abordaram a movimentação axial de uma correia apoiada por uma base viscoelástica flexível, considerando o efeito giroscópico do amortecimento.

Os modelos modernos, que levam em conta efeitos viscoelásticos, desempenham um papel crucial nas análises matemáticas e computacionais para alcançar níveis desejados de amortecimento em máquinas e estruturas industriais, com o objetivo de suprimir ruídos ou evitar falhas. ZHANG e ZU (1998), empregando o método de múltiplas escalas, investigaram a vibração não linear livre em sistemas viscoelásticos com movimento axial. Eles trataram o sistema como um conjunto giroscópico autônomo, contínuo e levemente não linear, introduzindo o amortecimento que afeta a amplitude das oscilações sem impactar significativamente as frequências naturais.

Compreender as vibrações de uma corda e seus movimentos, é importante para analisar vibrações de máquinas e a melhoria do desempenho. Alcançar respostas para esses problemas requer um esforço matemático elevado para compor as equações dos modelos, devido às características do sistema que nem sempre é possível adaptá-los.

2.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE OSCILAÇÕES DE VIGAS

Essa seção abordará uma temática que envolve a dinâmica vibracional de uma viga e a determinação das frequências e formas modais de sistemas não amortecidos, que utilizam o princípio de cálculo considerando a dinâmica comportamental estabelecida e as condições de contornos apropriadas, que geram oscilações transversais em vigas delgadas e flexíveis, como as vigas de *Euler-Bernoulli* (SANTOS, 2017), conforme ilustrado na Fig. 2.3.

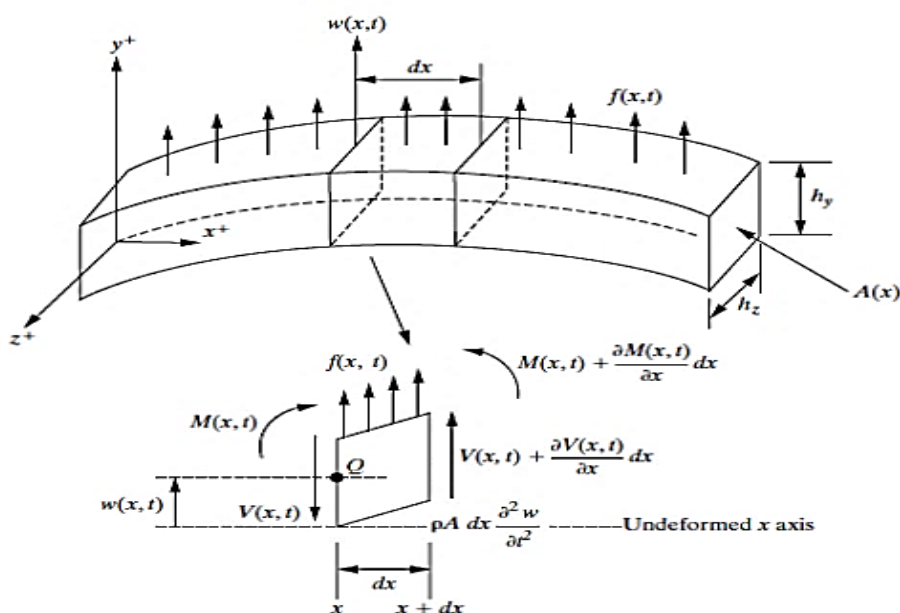


Figura 2.3 – Modelo de viga de *Euler-Bernoulli* com vibração transversal e diagrama de corpo livre para um elemento infinitesimal deformado por uma força distribuída na unidade de comprimento. Fonte: SANTOS (2017).

Diversas bibliografias apresentam estudos e análises da dinâmica oscilatória de vigas com movimentos transversais e axiais. MOTE Jr. (1965) publica um trabalho que tratou de forma sustentada a análise do movimento de uma viga de *Euler-Bernoulli*, e investigou a relação entre a extensão axial e a flexão da viga submetida a tensão constante e a forma da energia envolvida no processo.

O livro de BLEVINS (1979) é pioneiro em agrupar esse forma de análise, ele descreve em diversos tipos de sistemas com base na teoria das oscilações, como contornos clássicos e nãoclássicos, formas alongadas, circulares, finas, placas, tubos, e outra forma, oferecendo uma ferramenta de pesquisa abrangente para diferentes sistemas de vibração. Sua importância reside

na extensa quantidade de informações apresentadas por meio de fórmulas e tabelas, destinadas ao uso como referência de cálculo para estudos e projetos nessa área de pesquisa.

Alguns autores aprimoraram os modelos, definindo a viga biengastada como um elemento padrão e rígido de suporte de carga, amplamente utilizado na engenharia e com vários tipos de apoios. O estudo desses sistemas oferece uma visão valiosa da análise dinâmica de estruturas sob diferentes condições de contorno, aplicáveis em contextos cotidianos e teóricos.

Essa forma de estrutura pode resistir a cargas aplicadas com baixo índice de falha, garantindo segurança e estabilidade quando utilizada. Os resultados dos cálculos se revelam eficaz em uma grande quantidade de cenários (ABRO *et al.*, 2021). A viga biengastada é comumente encontrada em estruturas de pontes, telhados, lajes, prédios e outras formas vistas no nosso cotidiano. É facilmente reconhecida como no esquema da Fig. 2.4.

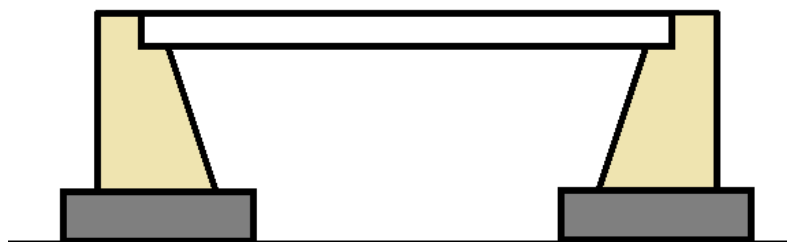


Figura 2.4 – Diagrama esquemático de uma viga (ponte) biengastada.

De acordo com SIBTAIN *et al.* (2023), a análise de vibrações em vigas é crucial para evitar ressonâncias, que podem resultar em desgaste e danos. A velocidade desses sistemas influencia sua frequência natural, sendo fundamental compreender seu efeito para prevenir movimentos harmônicos indesejados. Processos mecânicos operam dentro de tolerâncias restritas, e controlar esses efeitos pode prolongar a vida útil do sistema. Em sistemas com velocidades iniciais baixas, a possibilidade de vibrações supercríticas ou dinâmicas complexas pode causar falta de controle em todas as direções durante o movimento da viga.

Os métodos de análise, especialmente os numéricos, têm sido empregues para investigar as movimentações axiais de vigas, como ilustrado por ÖZKAYA e PAKDERMILI (2000), que conduziram uma análise das vibrações transversais de uma viga em movimento axial, considerando a variação harmônica da velocidade axial em torno de uma média. Eles formularam a equação do movimento em termos adimensionais e exploraram soluções aproximadas usando o método de múltiplas escalas (MMS) e expansões assintóticas casadas

(MMAE). Por outro lado, PELLICANO e VESTRONI (2002) investigaram a resposta dinâmica de uma viga móvel sujeita a uma carga transversal na região de velocidade supercrítica, baseando-se na teoria das vigas e sugerindo a inclusão de um mecanismo simples de amortecimento viscoso. Este trabalho expressou o campo de deslocamento em uma série de modos de flambagem senoidais, empregando técnicas de análise da resposta dinâmica para estudar as oscilações periódicas e simulações diretas para investigar as dinâmicas não estacionárias. Além disso, CHEN *et al.* (2004) examinaram a estabilidade dinâmica na vibração paramétrica transversal de um sistema tensionado com aceleração axial em um simples harmônico com variação em torno da média, utilizando o método Galerkin para discretização com condições de contorno rigidamente engastadas. Foi aplicado o método das médias para análise da estabilidade da dinâmica do sistema, validada por simulações numéricas, incluindo ressonância sub-harmônica e combinada e truncada em dois termos.

Outro modo de avaliar as oscilações em vigas esbeltas e flexíveis envolve o uso de programas de computador dedicados, como demonstrado por DING e CHEN (2009) ao determinar os equilíbrios de vigas em movimento axial na velocidade de transporte supercrítica. Eles reduziram as equações governantes do movimento planar acoplado a uma EDP e uma EDIP, empregando o Método das Diferenças Finitas (DFM) e a quadratura diferencial (DQM) para prever qualitativamente a tendência de equilíbrio da EDP. Notavelmente, os resultados quantitativos mais definidos foram obtidos para as equações acopladas usando a EDIP. NI *et al.* (2011) trouxeram uma inovação ao aplicar o Método de Transformação Diferencial (DTM) para analisar semianaliticamente o problema de vibração livre em tubos transportadores de fluido com várias condições de contorno clássicas. Eles obtiveram frequências naturais e velocidades críticas de fluxo usando esse método, comparando os resultados com os da DQM e com outros encontrados na literatura.

Aprimorar a simulação de estruturas complexas envolve integrar métodos numéricos com modelos matemáticos abrangentes, considerando geometria, materiais, efeitos dinâmicos e ambientais para prever com maior precisão.

Baseado nisso, modelos modernos e complexos de estruturas biengastadas foram desenvolvidos, como o de DING *et al.* (2017), que investigou o transporte supercrítico de fluidos em sistemas altamente flexíveis. Eles utilizaram a teoria da viga de Timoshenko para analisar a vibração livre em sistemas contínuos de alta velocidade, empregando o método Galerkin para resolver problemas de frequências naturais com condições de contorno simplesmente suportadas. Frequências naturais foram verificadas usando duas abordagens de

transformada discreta de Fourier (DFT) e comparadas com um modelo de viga de *Euler-Bernoulli*. Outras análises sobre vibrações focaram na frequência angular, como CHEN e YANG (2005), que examinaram a ressonância paramétrica na vibração transversal de vigas viscoelásticas em movimento com velocidade de movimentação axial. Eles derivaram uma equação não linear e aplicaram a teoria da estabilidade linearizada de *Lyapunov* para analisar a estabilidade do equilíbrio direto e a resposta não trivial do estado estacionário. VARGHAEI *et al.* (2019) analisaram a vibração não linear de uma viga em balanço viscoelástica fracionada com massa adicional, sujeita a excitação, utilizando o princípio de Hamilton estendido para derivar a equação de movimento. Eles desenvolveram uma análise semianalítica usando integração numérica direta e o método de múltiplas escalas com técnica de perturbação para resolver as equações não lineares. TÜFEKCI *et al.* (2024) investigaram a vibração de vigas retangulares com suportes simulados com falhas, focando no papel do atrito único nas interfaces de contato. Modelando o atrito usando modelos que introduzem a não linearidade, resolvendo analiticamente a equação diferencial e comparando com modelos numéricos usando elementos finitos e comportamento estrutural com diversas condições operacionais.

Alguns autores buscaram trabalhar com modelos desenvolvidos para analisar comportamentos de vigas com contornos diferentes do tradicional, mas que pudessem descrever o comportamento vibracional de sistemas reais da engenharia.

Como LAURA *et al.* (1974, 1975) que consideraram ausências de força e determinaram as frequências naturais e formas modais das vibrações de vigas engastadas em uma extremidade com massa concentrada M na extremidade livre. Tabulando uma série de autovalores e várias condições de contorno (apoio) tipo: *clamped-clamped*, *clamped-free*, *clamped-supported*, *free-supported* e *supported-supported*. Os autores apresentaram resultados precisos para diferentes razões de massa (massa concentrada) / (massa da viga), M/M_0 , e analisaram a variação da tensão dinâmica máxima para o primeiro modo de vibração, como descrito na Fig. 2.5:

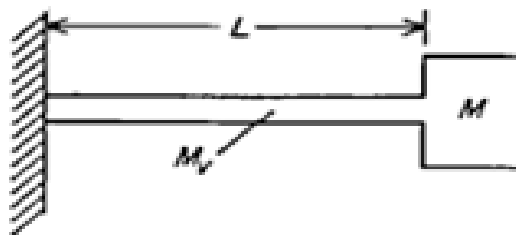


Figura 2.5 – Sistema viga-massa concentrada. Fonte: LAURA *et al.* (1974).

PARNELL e COBBLE (1976) analisaram o problema das vibrações transversais em uma viga em balanço com seção transversal uniforme, contendo uma massa concentrada na extremidade livre. O problema foi resolvido sob as condições mais gerais de uma carga lateral distribuída arbitrariamente e com condições iniciais e de contorno conhecidas. O método de resolução utilizou a teoria de resíduos de variáveis complexas para determinar a inversão da integral, resultando na solução do problema em transformada de Laplace de valor de contorno. GÜRGÖZE (1984) destaca a aplicação dos autovalores em casos de vibrações de vigas com massa adicionada na ponta. O autor aborda a determinação aproximada da frequência fundamental e da forma do primeiro modo de vibração para uma viga esbelta que oscila em pontos onde massas com peso conhecido são anexadas. Ele determina os autovalores na equação geral como base de análise e aplica a teoria envolvida em três exemplos de vibração, demonstrando resultados bastante satisfatórios. WU e LIN (1990) investigaram as frequências naturais e formas modais de uma viga em balanço com múltiplas massas concentradas, usando um método Analítico-Numérico Combinado (ANC) que simplifica a derivação das propriedades da viga. A equação do autovalor foi derivada analiticamente, seguida pelo cálculo numérico dos autovalores e autovetores. Esse método permite a inclusão de modos de vibração adicionais na equação de superposição dos harmônicos, resultando em frequências naturais mais precisas para os modos de ordem superior.

Segundo CHEN (2005) em geral os métodos numéricos desenvolveram soluções para sistema reais com aplicação de métodos como de Galerkin, múltiplas escalas e de diferenças ou elementos finitos. STYLIANOU e TABARROK (1994) analisaram o movimento axial de uma viga delgada por meio da solução numérica das equações governantes, empregando o método dos elementos finitos. Examinaram os impactos da flexibilidade e da massa concentrada nos deslocamentos transversais durante o movimento da viga.

Estudos sobre vibrações lineares e não lineares, estabilidade de sistemas em movimento axial foram realizados envolvendo inclusão de mecanismos de dissipação de energia, tensão e velocidade dependentes do tempo e suporte adicional, para diversos modelos de vigas.

PIOVANA e SAMPAIO (2008), empregaram o MEF para analisar as vibrações de vigas de parede fina e os efeitos da flexibilidade da massa concentrada na ponta e dos constituintes do material na dinâmica do movimento, com seção transversal cilíndrica e anular. WANG *et al.* (2009) investigaram o comportamento dinâmico de uma viga em balanço com velocidade variável ao longo do tempo utilizando uma EDP para uma viga de *Euler-Bernoulli*. Estudaram a avaliação dos efeitos de acoplamento entre o movimento de translação axial e a flexão, bem

como na deformação durante as operações de extensão ou retração da viga por meio do movimento oscilatório. LI *et al.* (2013) investigaram a vibração transversal de uma viga *cantilever* sujeita a um carregamento axial distribuído com massa concentrada na extremidade livre. Os efeitos da inércia rotacional e da gravidade da massa concentrada sobre as frequências naturais foram considerados, e examinaram o problema como uma viga suspensa ou em pé.

WANG *et al.* (2014) empregaram a teoria da vibração forçada, o método de separação de variáveis e técnicas analíticas avançadas para determinar as frequências naturais e as formas modais de uma viga cantiléver uniforme com massa na ponta. Utilizaram a função delta de Dirac para representar as forças inerciais equivalentes concentrados e os momentos de inércia para as respostas transitórias de deslocamento constante do sistema em balanço, sob excitação senoidal na base, validando os resultados por meio de testes experimentais. HUO e WANG (2016) com base na teoria da viga de *Euler-Bernoulli* e no princípio de *Hamilton*, derivaram a equação para um tubo vertical em balanço transportando fluido durante movimentos de implantação ou retração com a contribuição da gravidade na estabilidade das vibrações transversais. A equação resultante foi discretizada pelo método de Galerkin, utilizando autofunções de viga livre. A durante os movidos de implantação e retração. KUMAR (2016) apresentou uma formulação com o MEF para uma viga em balanço, comparando resultados com a massa concentrada localizada, utilizando um programa em Matlab. O estudo inclui a análise de carga uniformemente variável (UVL) e distribuída (UDL), comparando os resultados obtidos (MEF) com solução analítica das vigas de *Euler-Bernoulli* em diferentes locais de cargas. WANG *et al.* (2017) investigaram uma viga com extremidade engastada e massa adicionada na extremidade livre. Essa configuração gerou um momento fletor distinto devido à dinâmica vibracional da inércia da massa concentrada, demonstrando que a equação transcendental do modelo incorpora diversos efeitos físicos no sistema, resultando em impactos significativos na frequência natural e na forma do modo. NAJAFI e DEHGOLAN (2017) abordaram de maneira distinta o estudo de uma viga flexível com propriedades uniformemente distribuídas ao longo do comprimento e uma massa concentrada na ponta. Eles assumiram que a viga se movia com uma velocidade harmônica, introduzindo uma não linearidade geométrica por meio da hipótese de grandes deformações. O modelo, baseado na teoria da viga de *Euler-Bernoulli* e utilizando o método da expansão modal, simulou os efeitos da inércia rotativa e da força axial, considerando as condições de contorno. A solução do problema foi obtida por meio do método de múltiplas escalas, proporcionando uma aproximação eficiente da solução real. RANDIVE e ADMUTHE (2020) apresentaram uma análise sobre a aplicação de diversos

métodos de cálculo e comparação de resultados relacionados a vigas em balanço com massa concentrada. Os autores investigam e exploram a influência da rigidez transversal da viga e da massa na ponta na determinação das frequências naturais calculadas, utilizando a teoria da viga de *Euler-Bernoulli*. As primeiras frequências naturais foram obtidas por meio do programa ANSYS, no módulo de análise modal, levando em consideração diferentes razões de massa conforme os tipos de análise realizados. AGHAMOHAMMADI *et al.* (2023) avaliaram um sistema parametricamente excitado de uma viga engastada com massa na ponta, analisando sua resposta e características de enrijecimento e flexão com amortecimento linear. Usando métodos como MVA e MMS, mostraram que, com o crescimento exponencial das vibrações, o termo da inércia não linear e a não linearidade podem tender a zero. A comparação entre análises e medições experimentais indicou que a massa na ponta altera o comportamento da parte livre da viga, reduzindo a amplitude e ampliando a faixa de frequência estável.

2.3 – POTENCIALIDADE DO MÉTODO DA GITT

O estudo da resposta de modelos utilizando técnicas de análise que combinam conhecimentos analíticos e computacionais tem recebido destaque na comunidade científica há algum tempo. Essas abordagens oferecem vantagens complementares e superam métodos puramente numéricos em diversos aspectos, devido à sua ampla gama de aplicações. Nesse contexto, a aplicação da *Técnica da Transformada Integral Generalizada* (GITT) proporciona uma solução baseada na expansão de autofunções com precisão controlada e eficiência computacional para coeficientes de dependência espacial linear ou não (COTTA, 1993).

A GITT, originalmente desenvolvida para aplicações em fluxo de calor e fluido, tem sido aplicada com sucesso em diversos sistemas de engenharia. Nas últimas décadas, esse método tem sido progressivamente generalizado sob um evidente enfoque numérico-analítico. A consolidação da técnica trouxe consigo uma ampla e avançada aplicação em casos envolvendo sistemas complexos, impulsionada pelo desenvolvimento tecnológico e pela evolução de rotinas computacionais extremamente confiáveis e precisas, especialmente implementadas em linguagens de programação como o Fortran. Essa técnica converte Equações Diferenciais Parciais (EDPs) em equações algébricas, simplificando o desenvolvimento de tarefas numéricas, otimização e resolução de problemas. Isso permite aproximar as situações reais, a obtenção de informações físicas do sistema, redução de esforço

computacionais e aproximação dos resultados a uma ordem analítica (COTTA, 1990; 1993; 1994; 1998; COTTA e MIKHAILOV, 1997; 2006; COTTA *et al.*, 2017; 2018).

MIKHAILOV e COTTA (1998), usaram filtros implícitos na solução de problemas de condução de calor com condições de contorno não-lineares para melhorar o desempenho computacional e a solução de eventuais problemas de convergência causados pelas não-linearidades. COTTA *et al.* (2015, 2016) deram uma nova concepção ao uso dos filtros quando incorporaram os operadores diferenciais não-lineares ao problema de autovalor auxiliar, que pode também ser transformado, e depois resolvido simultaneamente ao sistema de EDOs provenientes do problema original, e o resultado demonstrou que a nova concepção foi melhor que a metodologia tradicional. COTTA *et al.* (2018) identificaram que essa técnica oferece boa relação custo-benefício ao cálculo, relação tipicamente encontrada em métodos analíticos puros, mas que, apresenta boa flexibilidade para solução de problemas envolvendo EDPs não-lineares, característica de métodos numéricos.

Recentes avanços na técnica da GITT permitiram o uso de processos que aceleram a convergência e melhoram a precisão de problemas com geometrias complexas, condições de contorno não-lineares e outros casos. Como exemplo, QUARESMA *et al.* (2020) quando estudaram a interação de gradientes térmicos e o colapso de vórtices em sistemas rotativos considerando um comportamento híbrido numérico-analítica. Assim como, MACÊDO e QUARESMA (citados em MIYAGAWA *et al.*, 2019) estudando o comportamento de biofluido em canal tipo Darcy-Forcheimer sob campo magnético externo, influenciado pelo número de Reynolds, Prandtl e Schmidt simultaneamente.

2.4 – GITT APLICADA EM ANÁLISES DE VIBRAÇÕES

O uso da GITT para estudar a dinâmica de vibrações de vigas flexíveis e esbeltas ainda é limitado, com poucas publicações disponíveis. Encontrar artigos sobre esse tema pode ser desafiador, mas há uma tendência crescente de publicações à medida que novas pesquisas sejam conduzidas e desenvolvidas. Como fez MA *et al.* (2006) empregaram a GITT para resolver um problema de vibração transversal em uma corda móvel, utilizando o comportamento observado para avaliar a convergência da solução obtida pela transformada integral e analisar a influência das oscilações experimentadas por esse sistema. MATT (2009) descreveu a aplicação da GITT na análise teórica de vibrações induzidas pelo vento em condutores aéreos. O modelo matemático simplifica a geometria helicoidal do condutor tratando-o como uma corda esticada

homogênea suportada nas duas extremidades. A resolução da EDP governante pela GITT proporciona uma solução analítica ou analítico-numérica do deslocamento transversal em função da posição e do tempo, combinando resultados com previsões analíticas anteriores para determinar as amplitudes do condutor e as cepas de flexão em locais críticos.

A viga de Euler-Bernoulli oferece soluções analíticas simples para problemas de engenharia, mas tem limitações. Modelos mais avançados e completos são mais apropriados para descrever o comportamento oscilatórios de sistemas reais. Como fizeram GU e MA (2016) estudando o efeito da relação entre comprimento e diâmetro na resposta dinâmica de um tubo de transporte de fluido usando a viga de Timoshenko. As EDPs acopladas são resolvidas por GITT, comparando os resultados com a viga de *Euler-Bernoulli* para avaliar os efeitos das relações dos modos de vibração nas frequências naturais com velocidade interna do fluido e estabilidade do sistema. TAN *et al.* (2023) avaliando o aumento da estabilidade e a segurança das operações de tubulações de água fria do mar (CWP) para conversão de energia examinando seus atributos vibracionais em diversas condições contorno, examinando seus perfis vibracionais em diversas configurações de estabilidade. Utilizando a teoria da viga de Euler-Bernoulli para criar a estrutura analítica e oferecer uma resolução semianalítica utilizando GITT, testando a convergência e a precisão da proposta através de análises comparativas com teorias existentes e a influência do fluxo interno no deslocamento transversal e na frequência natural sob diferentes condições de contorno. AN e SU (2017) realizaram um estudo numérico sobre o comportamento dinâmico de um tubo axialmente graduado que transporta fluido, utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Eles transformaram integralmente a equação de vibração transversal em um sistema acoplado de equações diferenciais de segunda ordem na variável temporal. Para resolver esse sistema, utilizaram a subrotina NDSolve do Matematica, obtendo resultados satisfatórios que foram comparados com dados da literatura. HE *et al.* (2020) utilizaram a GITT para analisar a vibração livre de placas finas retangulares ortotrópicas de espessura constante com duas arestas opostas fixadas e uma ou duas arestas livres, com conceitos comportamentais de uma viga. As condições de contorno nas arestas livres foram satisfeitas exatamente considerando os termos gerados nas equações transformadas por integração por partes, que estavam ausentes nas equações pelo método tradicional de Rayleigh-Ritz. LI *et al.* (2020) examinaram a vibração de uma tubulação que conduz um fluxo bifásico gás-líquido, utilizando um modelo de amortecimento combinado para mitigar a vibração excessiva induzida pelo fluxo. Eles aplicaram a GITT para modelar o comportamento dinâmico e suas condições de contorno. Estudos paramétricos exploraram os

efeitos das taxas de amortecimento e da instabilidade da frequência crítica, expressa como número complexo. Um parâmetro adimensional foi derivado para controlar a estabilidade normalizada do revestimento do tubo destacando a relevância desse método para análises de risers em águas profundas. TUO *et al.* (2022) exploraram a estabilidade de um tubo conduzindo um fluido com perfil axial, baseado na teoria da viga de *Euler-Bernoulli*. Usando a GITT, a equação governante da vibração foi transformada em um sistema infinito de EDOs de segunda ordem, truncado em termos finitos para determinar a autofrequência em relação ao fluxo e aos parâmetros estruturais. Os estudos paramétricos investigaram os efeitos do módulo de elasticidade e das distribuições de densidade, revelando que a estabilidade linear dos tubos axialmente graduados é influenciada pelo gradiente do módulo de elasticidade, pela densidade e, significativamente, pela autofrequência, bem como pela velocidade crítica de instabilidade de flambagem e pela vibração acoplada ao tubo graduado. IKE (2023) apresentou uma determinação das frequências naturais de vibração transversal de uma viga de *Euler-Bernoulli* em fundações tipo *Winkler* utilizando GITT para avaliar falhas de ressonância quando a frequência de excitação é igual ou menor que a natural. A solução das equações algébricas produziu soluções exatas para o problema estudado. As soluções exatas para uma infinidade de parâmetros da frequência da viga foram obtidas para quatro casos diferentes de condições de contorno para valores de parâmetros específicos da base considerada.

Na busca por descrever os efeitos de vibrações em vigas, alguns artigos utilizam o princípio de Hamilton para formular as equações de movimento dos sistemas físicos. Ele oferece uma forma geral para a modelagem e análise de sistemas dinâmicos empregando a GITT. MATT (2021) contribuiu para o avanço do estado da arte da GITT, considerando cuidadosamente as incertezas nos parâmetros do modelo e na própria modelagem para aprimorar a precisão dos modelos computacionais na dinâmica estrutural. Através de equações derivadas do princípio de Hamilton estendido, ele previu as vibrações de flexão de uma estrutura delgada conectada a uma viga rígida e giratória, semelhante a estruturas complexas de engenharia. A atualização do modelo foi realizada com métodos estatísticos, como máxima verossimilhança e Bayesiano, para construir modelos estocásticos, utilizando as primeiras frequências naturais como resultados observáveis. CORDEIRO *et al.* (2022) investigaram o problema inverso da identificação de danos usando uma abordagem bayesiana aplicada à resposta do modelo contínuo da estrutura, fornecido pela GITT. Eles utilizaram o método Hamiltoniano de Monte Carlo (HMC) para amostrar a função de densidade de probabilidade posterior dos parâmetros de coesão, os quais descrevem o estado de dano da estrutura. Por meio

de simulações numéricas em uma viga de Euler-Bernoulli, avaliaram a aplicabilidade da identificação de danos, demonstrando que o método HMC é capaz de gerar cadeias de Markov com altas taxas de convergência e estados não correlacionados desde o início das cadeias. ALI e HAWWA (2023) aplicaram o princípio de Hamilton para obter a equação diferencial parcial hiperbólica (HPDE) e depois o método das diferenças finitas (MDF) para investigar a vibração transversal não linear de uma viga em movimento. A Comparação do modelo MDF está em excelente concordância com a forma modal (soluções analíticas) em comparação com a GITT (método numérico). Essa avaliação foi confirmada pelo estudo paramétrico realizado na avaliação do impacto da velocidade de translação axial e rigidez de flexão da viga na amplitude, frequências e instabilidades da resposta transversal.

Em muitos casos que envolvem a GITT, é comum empregar métodos e sub-rotinas computacionais de acordo com a aplicabilidade do problema. Para a resolução das EDOs dos modelos, é frequente o uso da sub-rotina DIVPAG, especialmente em sistemas com alto grau de rigidez, como recomendado pela IMSL (2003). AN e SU (2011) utilizaram a GITT para analisar a equação de vibração de uma viga, modelando-a com um sistema acoplado de EDP de segunda ordem na variável temporal. A resolução numérica do sistema utilizou a sub-rotina DIVPAG, demonstrando excelente convergência pela comparação do deslocamento de vibração em diferentes pontos ao longo do comprimento da viga. Resultados numéricos foram apresentados para diferentes valores de velocidade de translação axial e rigidez flexora. Por outro lado, GU *et al.* (2013) investigaram a resposta dinâmica de um fluido transportado em um duto com suporte biengastado, empregando a GITT. A equação diferencial parcial governante foi transformada em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, resolvidas numericamente com a sub-rotina DIVPAG. Uma análise de convergência foi realizada, gerando resultados para deflexão transversal em diferentes momentos e posições da viga com uma análise de separação modal conduzida para avaliar a influência da razão de massa na deflexão em diferentes frequências naturais, tanto qualitativamente quanto quantitativamente.

CAPÍTULO 3

ESTUDO DE VIBRAÇÕES EM CORDAS E VIGAS

Nesse capítulo serão descritos dois problemas físicos distintos que envolvem oscilações de estruturas esbeltas e flexíveis que se movimentam como:

- I – Cordas em quatro modelos de equações diferentes com condições de contorno iguais.
- II – Vigas com a mesma característica material e condições de contorno diferentes.

A equação governante de cada modelo, será estabelecida utilizando equações específicas (PHAM e HONG, 2020). Seguida de manipulações algébricas para simplificação e posteriormente aplicação do *Princípio de Hamilton* para formalizar a equação governante. Serão realizadas simulações utilizando a GITT e os resultados obtidos comparados com outros trabalhos da literatura.

3.1 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES EM CORDAS

3.1.1 – Formulação do Modelo I

Esse modelo foi concebido como uma corda esbelta e flexível, composta por um número equidistante de partes móveis, assemelhado a uma corrente. Para aprimorar os cálculos, foi considerado o efeito da velocidade longitudinal em vez da discretização individual, sendo incapaz de descrever a vibração (SACK, 1954; LEE, 1957). O arranjo do sistema proposto é ilustrado na Fig. 3.1.

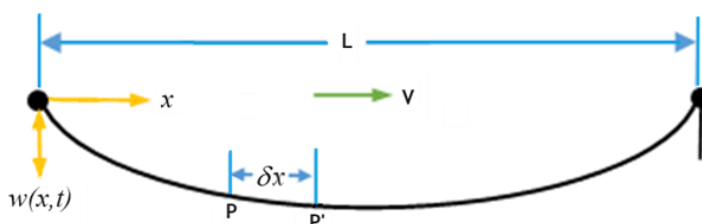


Figura 3.1 – Arranjo do modelo I para uma corda esbelta e flexível oscilando na direção x e deslocamento transversal $w(x,t)$. Fonte: Adaptado de SACK (1954).

A Fig. 3.1 representa a dinâmica oscilatória do sistema proposto, concebido como uma corda homogênea com extensão L , partes móveis de comprimento δx e velocidade longitudinal V . Considerando que a perturbação no contorno desse sistema resulta em um deslocamento transversal $w(x,t)$, que se desloca de P até P' na direção x no intervalo de tempo δt . Essa movimentação pode ser descrita pela seguinte expressão (SACK, 1954; LEE, 1957).

$$dw(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t} \delta t + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x \quad (3.1)$$

Assim, a velocidade transversal será representada pela seguinte derivada:

$$\frac{dw(x,t)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} V \quad (3.2)$$

Como a movimentação desloca o arranjo de coordenadas ao longo de L . Isso configura o sistema como sendo *Lagrangeano* (MOTE Jr, 1966; HECHT, 1990; WICKERT, 1992; SUWEKEN, 2003; HUO e WANG, 2016; TAN *et al.*, 2018; PHAM e HONG, 2020).

Dessa forma, a equação governante é estabelecida com base na Lei da Conservação da Energia, considerando a ausência de deformações na corda e o movimento do pulso na direção de propagação da onda. Assim, as variações da energia cinética (δK) e potencial (δU) estarão relacionadas às movimentações de um sistema conservativo, onde K é expressa por:

$$K = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right)^2 dx = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (3.3)$$

Como o ponto de equilíbrio dos movimentos é P , então o segmento $\overline{PP'}$ será igual a ds representado por $ds = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$. Sendo δx o alongamento causado pelo deslocamento transversal $w(x,t)$, conforme ilustrado no gráfico da Fig. 3.2.

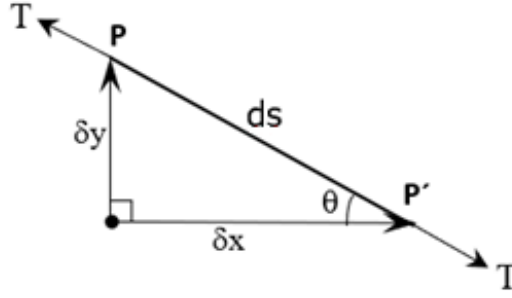


Figura 3.2 – Distribuição das componentes do segmento $\overline{PP'}$.

No gráfico da Fig. 3.2, a variação do trabalho de deformação estará relacionada à tensão longitudinal (T) e ao deslocamento ds , associado apenas ao trabalho de deformação (δw_D), expresso da seguinte forma:

$$\delta w_D = \int_0^L T ds = \int_0^L T \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \quad \therefore \text{fazendo } \delta x = dx \text{ e } \delta y = dw$$

$$\delta w_D = \int_0^L T \sqrt{dx^2 + dw^2} = \int_0^L T \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} = \int_0^L T \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \right) dx \quad (3.4)$$

Dos gráficos das Figs. 3.1 e 3.2, a componente do vetor posição $dx\mathbf{i} + \delta w\mathbf{j}$, será:

$$\vec{s} = dx\mathbf{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)\mathbf{j} \quad (3.5)$$

Considerando a pequena variação no comprimento da corda, $|\vec{s}|$, a Eq. (3.5) terá a forma:

$$ds = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \right] dx \quad (3.6)$$

A deformação (ϵ_x) sofrida devido a tensão longitudinal (T), em geral é expressa pela relação ds/dx , conforme a Eq. (3.6). Assim ela passa a ser definida do seguinte modo:

$$\varepsilon_x = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \quad (3.7)$$

A substituição da Eq. (3.7) na Eq. (3.4) permite determinar (δw_D), que neste caso é o próprio trabalho de deformação axial (δw_F). Assim, a distribuição da variação da energia potencial (U) pode ser representada da seguinte maneira:

$$\delta w_D = U = \int_0^L T \varepsilon_x ds \quad (3.8)$$

A EDP do sistema analisado e a condição de contorno associada é obtida por meio do *princípio de Hamilton generalizado*. É uma integração do funcional Lagrangiano (\mathcal{L}), que representa a movimentação temporal de dois estados de uma trajetória percorrida. Ele descreve o comportamento da energia total, por meio da diferença entre a energia cinética (K) e potencial (U), representado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(K, U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt \quad (3.9)$$

Substituindo os termos da Eq. (3.3) e (3.8), na Eq. (3.9) chega-se a seguinte equação integral:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] - 2T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \right\} dx dt = 0 \quad (3.10)$$

O processo de resolução da Eq. (3.10) envolve o operador de variação (δ) e as integrais em relação ao tempo (t) e ao comprimento (L). Avaliado termo a termo, mantendo as resoluções individuais o mais explícito possível, para compor a equação geral do modelo. Assim sendo, o primeiro termo será:

$$\begin{aligned}
\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt &= \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \rho A \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dt \right\} dx = \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \rho A 2 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dt \right\} dx \\
&= \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dt \right\} dx = \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dt \right\} dx \\
&= \int_0^L \left\{ \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt \right\} dx
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Após a integração por partes, o termo $\rho A (\partial w / \partial t) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2}$ se torna identicamente zero, conforme o Lema de *Du Bois-Reymond* no qual cada termo da Eq. (3.11) deve ser zero (LEITÃO, 2001; RIBEIRO, 2021). Nesse caso, isso ocorre porque não há energia suficiente para sustentar todas as variações arbitrárias (δw) durante a movimentação do sistema no intervalo de t_1 a t_2 . Assim sendo, repetindo a mesma marcha de cálculo anterior, o segundo termo da Eq. (3.10) será dado por:

$$\begin{aligned}
\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dx dt &= \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho A 2V \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt \right\} dx \\
&= \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho A 2V \left[\frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dt \right\} dx = \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho A 2V \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right] dt \right\} dx \\
&= \int_0^L \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho A 2V \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dt \right\} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \rho A 2V \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \right\} dt \\
&= \int_0^L \left\{ \rho A 2V \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho A 2V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w dt \right\} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A 2V \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \rho A 2V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\rho A V \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) \Big|_0^L - \int_0^L \rho A 2V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\rho A 2V \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) \Big|_0^L - \int_0^L \rho A 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta w dx \right\} dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

De maneira análoga na Eq. (3.12), o termo $\rho A V (\partial w / \partial x) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2}$ também será nulo, assumindo que $\delta w = 0$ durante a movimentação do sistema no intervalo t_1 a t_2 . Então repetindo, a mesma marcha de cálculo do procedimento anterior, o terceiro termo da Eq. (3.10) será:

$$\begin{aligned}
\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} \rho A V^2 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \rho A V^2 \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \rho A V^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A V^2 \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \rho A V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx \right\} dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De maneira análoga aos procedimentos de cálculo anteriores e assumindo que a oscilação em torno da configuração de equilíbrio é pequena, ou seja, se a inclinação $\partial w/\partial x$ é pequena (HARRISON e NETTLETON, 1998; SHEN e YE, 2013), o quarto termo da Eq. (3.10) será trabalhado como:

$$\begin{aligned}
\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L 2T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \delta T \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L T \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ T \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx \right\} dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Combinando os resultados das Eqs. (3.11 a 3.14), obtém-se a equação.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w dx dt \\
+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho A \left(V \frac{\partial w}{\partial t} + V^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L dt = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Como a Eq. (3.15) é igual a zero para as variações arbitrárias (δw), os termos entre colchetes devem ser identicamente zero. O primeiro termo originará a EDP do modelo, enquanto o segundo às condições de contorno do problema.

Na aplicação da equação do modelo nos contornos dados por $w(0,t) = w(L,t) = 0$, é crucial que o segundo termo da Eq. (3.15) seja nulo. Isso implica em considerar $\delta w(0) = \delta w(L) = 0$ ou que os termos entre colchetes também sejam nulos em $x = 0$ e $x = L$, em decorrência do contorno biengastado (SACK, 1954; LEE, 1957; WICKERT, 1990; SUWEKEN e VAN HORSSSEN, 2003; MARYNOWSKI e KAPITANIAK, 2014).

Considerando a teoria das oscilações, desprezando o amortecimento e realizando uma integração por partes. A EDP que descreve a dinâmico do modelo I é dada por:

$$\rho A \left(\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{Lateral} + 2V \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{Coriolis} + V^2 \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{centrípeta} \right) - \underbrace{T_0}_{Tensão} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.16)$$

Os termos da Eq. (3.16), conhecida como equação de Miranker (LAD e KARTIK, 2015). Conforme mostrado, contados da esquerda para a direita, estão associados às acelerações laterais e acelerações de Coriolis, aceleração centrípeta e Tensão à rigidez da corda (WICKERT, 1992; PHAM e HONG, 2020).

3.1.2 – Formulação do Modelo II

Nesse modelo, os efeitos relacionados à tensão (T), deslocamento transversal $w(x,t)$ e velocidade (V) são incorporados para descrever as oscilações lineares de uma corda flexível estabelecida dinamicamente. A frequência natural dessas oscilações não depende só de T, mas também da amplitude dos harmônicos formados (SWOPE e AMES, 1963; MOTE Jr., 1966; BAPAT e SRINIVASAN, 1967; AMES *et al.*, 1968; WICKERT, 1990 e 1992; SUWEKEN e VAN HORSSSEN, 2003).

A equação desse modelo está associada à energia cinética (K) e potencial (U) de uma corda de comprimento L entre apoios fixos com deformação, semelhante a uma linha de transmissão (MOTE Jr., 1966; BAPAT e SRINIVASAN, 1967). Como pode ser visto no diagrama esquemático da Fig. 3.3.

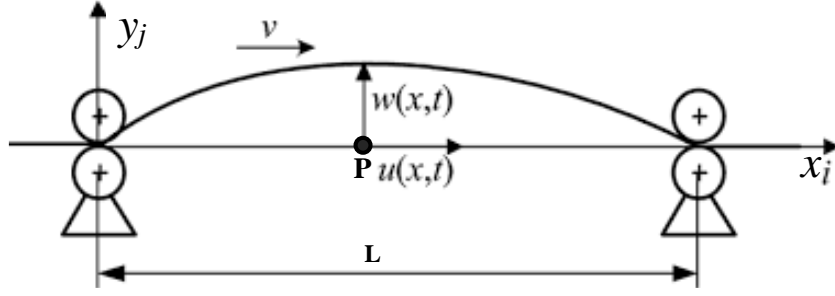


Figura 3.3 – Diagrama esquemático da movimentação axial do modelo II. Adaptado PHAM e HONG (2020).

A Fig. 3.3 representa a simplificação da dinâmica vibracional de um sistema com coordenadas dependentes do deslocamento transversal $w(x,t)$ e longitudinal $u(x,t)$. Considerando que o sistema esteja em equilíbrio dinâmico, sem deflexão e oscilações longitudinais, a energia cinética (K) do modelo pode ser expressa pela equação (MOTE, 1966; BAPAT e SRINIVASAN, 1967; SUWEKEN, 2003; HUO e WANG, 2016; TAN *et al.*, 2018):

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left[\left(\frac{du(x,t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (3.17)$$

A energia potencial (U) utiliza as informações dos trabalhos realizados. A variação do trabalho de deformação (δw_D) estará em equilíbrio com os trabalhos de deformação aparente (δw_A) e axial (δw_F), ou seja, $\delta w_D = \delta w_A + \delta w_F$.

Dessa forma, δw_A está relacionado com as tensões normais em qualquer ponto $x(\sigma_x)$ e a variação da deformação ($\delta \epsilon_x$), conforme estabelece a lei de *Hooke*, $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$, onde $\sigma_x = T/A$ e T é a força aplicada na seção transversal (A). Assim, a equação para δw_A é dada por:

$$\delta w_A = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{1}{2} A \int_0^L \sigma_x \epsilon_x dx = \frac{1}{2} A \int_0^L E \epsilon_x \epsilon_x dx = \frac{1}{2} AE \int_0^L \epsilon_x^2 dx \quad (3.18)$$

Com base no tratamento dado a Eq. (3.4), δw_F será expresso por:

$$\delta w_F = \int_0^L T (ds - dx) = \int_0^L T \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) dx \therefore \delta x = dx + du \quad e \quad \delta y = dw \quad (3.19)$$

Dessa forma, δw_D será dado pela seguinte equação:

$$\delta w_D = \frac{1}{2} AE \int_0^L \varepsilon_x^2 dx + \int_0^L T \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) dx \quad (3.20)$$

Conforme o gráfico da Fig. 3.3, a componente do vetor posição será $(P + dx) \mathbf{i}$, onde P é a componente $(\delta u \mathbf{i} + \delta w \mathbf{j})$ que faz o vetor posição $(\delta u \mathbf{i} + \delta w \mathbf{j} + dx \mathbf{i})$, ser descrito da seguinte maneira:

$$\vec{s} = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right) \mathbf{j} \quad (3.21)$$

Seguindo a mesma lógica usada no modelo I, a deformação sofrida pela tensão (ε_x) para esse modelo será igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad (3.22)$$

Assim, a energia potência (U) desse modelo será igual a δw_D , expressa por:

$$U = \int_0^L \left[\frac{1}{2} AE \delta \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right)^2 + T \delta \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) \right] dx \quad (3.23)$$

Aplicando o *princípio de Hamilton*, Eq. (3.9), obtém-se a equação integral para o modelo II, equivalente a seguinte expressão:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - 2T \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right] - AE \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right]^2 \right\} dx dt = 0 \quad (3.24)$$

De acordo com a teoria das oscilações, algumas simplificações serão aplicadas na Eq. (3.24), como: rejeitar as derivadas de ordens superiores para linearizar a equação, $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} < 1$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \ll \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ e garantir que a oscilação máxima seja sempre menor que L . Essas considerações deixam a Eq. (3.24) com o seguinte aspecto:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2V \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - 2T \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] - AE \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right]^2 \right\} dx dt = 0 \quad (3.25)$$

Considerando que a parte linear da Eq. (3.25) já foi trabalhada no modelo I, resta agora solucionar o termo do efeito não linear. Assim, considerando a metodologia de resolução utilizada, a condição de inextensibilidade ($\varepsilon = 0$) e a teoria das curvas (AMES *et al*, 1968; WICKERT, 1990; DING e CHEN, 2009), o termo a ser tratado terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L AE \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right]^2 dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \delta \frac{1}{2} AE \left[2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \right] dx \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L AE \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L AE \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ AE \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{3}{2} AE \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx \right\} dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dessa forma, combinando os resultados da Eq. (3.26) com das Eqs. (3.11 a 3.14), e conservando os termos que dão origem as condições de contorno como no modelo I, chega-se a seguinte expressão:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{2} AE \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w \, dx \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho A \left(V \frac{\partial w}{\partial t} + V^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T \frac{\partial w}{\partial x} + AE \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}} \right] \delta w \Big|_0^L dt = 0 \quad (3.27)$$

Como realizado no modelo I, a primeira parte origina a expressão governante do modelo, enquanto as demais fornecem as condições de contorno devido aos apoios biengastado. Dessa forma, a EDP do modelo II será dada pela seguinte expressão:

$$\rho A \left(\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{Lateral}} + 2V \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{\text{Coriolis}} + V^2 \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\text{Centrípeta}} \right) - \underbrace{T_0}_{\text{Tensão}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{3}{2} AE \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}_{\text{Deformação longitudinal}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.28)$$

Sendo E o módulo de *Young* e AE a medida da rigidez do material devido à deformação axial, os demais termos permanecem inalterados em relação ao estabelecido anteriormente.

3.1.3 – Formulação do Modelo III

Esse modelo descreve o movimento longitudinal de um sistema similar a uma correia. Ele se desloca entre duas polias separadas por uma distância L , tensão constante (T), rigidez da mola K e com velocidade variável $V(t)$ na direção x . Essas variações afetam significativamente a operação provocando instabilidades no sistema. Avaliadas pela teoria de *Lyapunov-Floquet* com o objetivo de manter a integridade dos componentes (PAKDEMIRLI *et al.*, 1994; ZWIERS e BRAUN, 2007). Um diagrama esquemático desse sistema pode ser visto na Fig. 3.4.

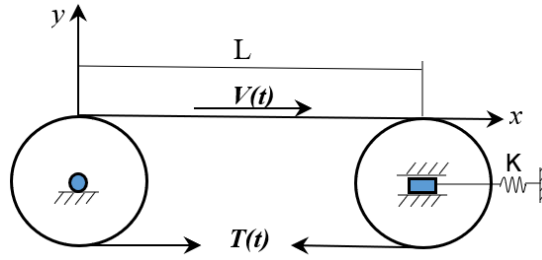


Figura 3.4 – Diagrama esquemático de uma correia sobre duas polias com velocidade $V(t)$ na direção x e deslocamento transversal y . Adaptado de PAKDEMIRLI *et al.* (1994).

Para obter o vetor velocidade em qualquer ponto de x , partindo do vetor posição de um ponto material (P) qualquer sobre a correia. Toma-se a derivada material do vetor posição $\vec{s} = (dx + \delta u)\mathbf{i} + \delta w\mathbf{j}$, obtendo a expressão do vetor velocidade em P dada por:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \mathbf{j} = \left(V + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} V \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} V \right) \mathbf{j} \quad (3.29)$$

Nesse modelo, a equação da energia cinética (K) está relacionada ao centro neutro da correia, obtida pela integração da Eq. (3.29) ao longo de L , resultando em:

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left[\left(V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (3.30)$$

Durante o funcionamento do sistema, as movimentações assumem um perfil senoidal acelerado tornando $V(t)$ muito dependente do tempo, comprometendo o sistema devido ao excesso de deformação axial igual a $\varepsilon_x = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1$. Se na equação da energia potencial (U) for incluído o termo relacionado ao carregamento distribuído (F) devido à movimentação radial, a equação será:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[AE \varepsilon_x^2 + 2T \varepsilon_x + 2Fw \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ AE \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right]^2 + 2T \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \right] + 2Fw \right\} dx \quad (3.31)$$

Usando o *princípio de Hamilton*, Eq. (3.9), a equação integral do Modelo III será:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] - AE \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right]^2 \right. \\ \left. - 2T \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] - 2Fw \right\} dx dt = 0 \quad (3.32)$$

Se for considerado a inextensibilidade ($AE < T$), descartar-se o termo da inércia do movimento longitudinal por entender que a velocidade de propagação das ondas longitudinais $\sqrt{AE/T}$ excede a velocidade de propagação das ondas transversais $\sqrt{T/\rho A}$ (PAKDEMIRLI *et al.*, 1994; PAKDEMIRLI e ULSOY, 1997; ZWIERS e BRAUN, 2007; TAN *et al.*, 2018). Então a Eq. (3.32) terá a seguinte forma:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] - 2T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - Fw \right\} dx dt = 0 \quad (3.33)$$

Considerando as variações relacionadas a w e o pressuposto de cálculo proposto por PAKDEMIRLI *et al.* (1994), onde $F = \rho A \frac{\partial V}{\partial t}$, o rearranjo dos termos da Eq. (3.33) originará:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] V \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \right. \\ \left. - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dt \quad (3.34)$$

Eliminando na Eq. (3.34) os termos de ordem elevada, utilizando o operador derivativo de *Euler-Lagrange* e aplicando a integração por partes com a mesma sistemática de cálculo anterior, obtém-se a EDP que descreve a dinâmica das vibrações do modelo III, expressa por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \delta w \, dx \, dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho AV \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L \, dt + \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} \, dx = 0$$
(3.35)

Após a integração por partes, o termo $\rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta w \Big|_{t_1}^{t_2}$, será nulo por considerar que a variação $\delta w = 0$ de t_1 a t_2 , obtendo-se a seguinte expressão:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \delta w \, dx \, dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho AV \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L \, dt = 0$$
(3.36)

Como realizado no modelo I e II, a primeira parte da Eq. (3.36) origina a expressão governante do modelo, enquanto as demais fornecem as condições de contorno associadas ao problema de apoio biengastado. As condições de contorno essenciais são estabelecidas como $\delta w|_{x=0} = \delta w|_{x=L} = 0$ com $\rho AV \left[\frac{\partial w}{\partial t} + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$, em $x = 0$ e $x = L$, originando a EDP do modelo III, dada por:

$$\rho A \left(\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{Lateral}} + 2V \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{\text{Coriolis}} + V^2 \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\text{Centrípeta}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{Velocidade variável}} \right) - \underbrace{T_0}_{\text{Tensão}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
(3.37)

A Eq. (3.37) será válida para pequenos deslocamentos e grandes T_0 , onde a dinâmica giroscópica das oscilações laterais e movimentos axiais, acoplada à periódica, assume um perfil senoidal acelerado que compromete o sistema devido à deformação longitudinal, aumento da elasticidade e instabilidade dos movimentos.

3.1.4 – Formulação do Modelo IV

Será considerado um sistema semelhante a uma suspensão com molas de rigidez k e amortecedores (ζ - zeta) conjugados. Com uma base viscoelástica uniforme e flexível de

comprimento L , densidade linear ρ , velocidade axial V , tensão constante T e força de excitação externa $F(x,t)$. Essa suspensão é projetada para absorver as variações de cargas provocadas pelas respostas livres e forçadas (SWOPE e AMES, 1963; BANICHUK *et al.*, 2014). Como mostrado no diagrama da Fig. 3.5.

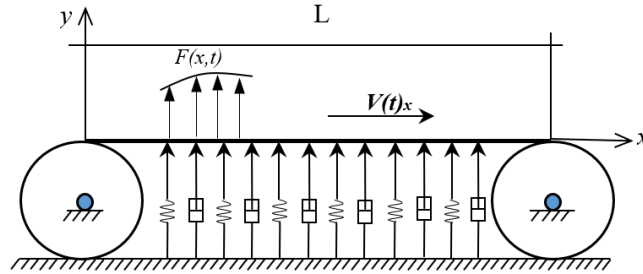


Figura 3.5 – Diagrama esquemático do sistema viscoelástico com velocidade $V(t)$ na direção x e deslocamento transversal y . Adaptado de ZHANG e CHEN (2016).

O modelo IV representado na Fig. 3.5 não leva em consideração a rigidez axial (AE) do sistema. Por isso, a energia cinética (K) desse sistema está associada a $V(t)$, levando a utilizar a Eq. (3.30). A energia potencial (U) relacionada a T constante e a k da mola, é expressa pela seguinte equação:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L 2T (ds - dx) + \int_0^L \frac{1}{2} kw^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[2T \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) + k w^2 \right] dx \quad (3.38)$$

$$\cong \frac{1}{2} \int_0^L \left(2T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + kw^2 \right) dx$$

A variação do trabalho de amortecimento (δW_d) provocada pela força viscosa da base e devido as forças externas (δW_e), conforme ZHANG e CHEN (2016), é dada por:

$$\delta W_d = - \int_0^L \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w dx \quad (3.39)$$

$$\delta W_e = \int_0^L F(x,t) \delta w dx \quad (3.40)$$

Aplicando o *princípio de Hamilton*, Eq. (3.9), a equação integral do modelo IV (ver Fig. 3.5) é expressa por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_d + \delta W_e) dt \quad (3.41)$$

Substituindo a Eqs. (3.38 a 3.40) na Eq. (3.41), obtém-se a expressão integral do modelo:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + V^2 \right] - 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k w^2 + \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{ext} \right\} dx dt = 0 \quad (3.42)$$

Por questões praticas, serão mantidos apenas os termos lineares de modo que, o modelo seja válido decididamente para problemas que envolvam pequenas deformações. Considerando a rotina de cálculo estabelecida no modelo III, após a integração por partes, o termo

$\rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta w \Big|_{t_1}^{t_2}$ será nulo também nesse modelo. Por considerar que $\delta w = 0$ em t_1 a t_2 . A

equação geral do modelo IV será:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k w + \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{ext} \right\} \delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho A V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L dt = 0 \quad (3.43)$$

Como realizado no modelo III, a primeira parte da Eq. (3.43) dará origem à EDP governante e a segunda as condições de contorno do problema, caracterizada por apoios biengastados. A expressão que representa a dinâmica do modelo IV, será:

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k w + \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) = F_{ext} \quad (3.44)$$

Lateral
Coriolis
Centrípeta
Tensão
Rigidez da Mola
Coefficiente de Amortecimento
Excitação Externa

3.1.5 – Adimensionalização dos Modelos de Cordas

Por conveniência das análises, os termos das equações governantes dos modelos, serão adimensionalizados por um conjunto de fatores correspondentes às variáveis de processo e que são parâmetros comuns nas equações, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} & w^* &= \frac{w}{L} & A_0 &= \frac{a_0}{L} & \tau &= \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \cdot \frac{t}{L} & \beta &= \frac{V}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{T_0}{AE}} & \gamma &= \frac{\omega_0 L}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}} & \kappa &= L \sqrt{\frac{k}{T_0}} & \delta &= \sqrt{\frac{\zeta^2}{\rho A T_0}} & F_0 &= f_0 \frac{L}{T_0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$f(\tau) = \text{sen}(\gamma \tau) \quad g(\tau) = \text{cos}(\gamma \tau)$$

Os fatores adimensionais nas Eqs. (3.45), representam as variáveis do sistema com as seguintes representações: τ – tempo adimensional, β – velocidade de transporte, α – rigidez a deformação axial, γ – frequência angular, κ – rigidez da mola, δ – fator de amortecimento, F_0 – força de excitação externa, $f(\tau)$ – velocidade axial e $g(\tau)$ – aceleração axial. A notação asterisco (w^*) será denotada por w , para não sobrecarregar a notação matemática da EDP do modelo adimensionalizada.

Os modelos se distinguem por meio de parâmetros específicos que se repetem em suas estruturas. Eles são consolidados em uma única equação que descreve a dinâmica comportamental de vibrações de uma corda avaliada por esse modelo unificado. A representação da equação geral do modelo é expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta f(\tau) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + [\beta^2 f(\tau)^2 - 1] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}}_{\substack{\text{Modelo I} \\ \text{Original}}} - \underbrace{\frac{3}{2\alpha^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}}_{\substack{\text{Modelo II} \\ \text{Deformação}}} + \underbrace{\beta \gamma g(\tau) \frac{\partial w}{\partial \xi}}_{\substack{\text{Modelo III} \\ \text{V(t) variável}}} \\ &+ \underbrace{\delta \left(\beta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \tau} \right)}_{\substack{\text{Modelo IV} \\ \text{Amortecimento, Rigidez e Força externa}}} + \kappa^2 w = F \end{aligned} \quad (3.46)$$

Esta equação será usada para analisar as vibrações de cordas homogêneas e flexíveis, com densidade (ρ), área da seção transversal (A), tensão aplicada (T), velocidade de propagação da onda transversal $\sqrt{\frac{T}{\rho A}}$ e velocidade de propagação do pulso longitudinal que causa deformação $\sqrt{\frac{AE}{T_0}}$.

3.1.6 – Equação Geral do Modelo de Cordas

Como discutido a equação geral, Eq. (3.46), abrange várias equações de modelos derivados de uma equação básica constituinte, utilizados para resolver uma variedade de problemas. A expressão de cada modelo é determinada pela seleção de parâmetros específicos, como os indicados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Parâmetros empregados e equações dos modelos.

Modelo	Parâmetros (S – Sim)								Equações
	β	$f(\tau)$	$g(\tau)$	α	γ	δ	κ	F	
I	S	1	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$
II	S	1	0	S	0	0	0	0	$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$
III	S	S	S	0	S	0	0	0	$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta f(\tau) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + (\beta^2 f(\tau)^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \beta \gamma g(\tau) \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$
IV	S	1	0	0	0	S	S	S	$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \delta \left(\beta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) + k^2 w = F$

Assim como as equações dos modelos, as condições de contorno e iniciais também foram adimensionalizadas. Assim, as condições de contorno são dadas por:

$$w(0, \tau) = 0 \quad \text{e} \quad w(1, \tau) = 0 \quad (3.47)$$

A velocidade inicial adimensional é assumida como zero, ou seja, $\left. \frac{dw}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$. Mas nesse caso, o deslocamento inicial para os quatro modelos apresentados é definido como $w(\xi, 0) = A_0 \sin(\pi \xi)$, onde $A_0 = 0,01$ é a amplitude de propagação da onda.

3.2 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES EM VIGAS

A resposta dinâmica da vibração será realizada utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Essa técnica converte a Equação Diferencial Parcial (EDP) do modelo, no domínio do espaço-estado, em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) no domínio temporal. Esta técnica aproxima a equação resultante por meio de uma função analítica, reduzindo o tempo de processamento e simplifica a implementação computacional, permitindo um controle eficiente do erro relativo dos cálculos executados (ÖZISIK, 1993).

O método da GITT será aplicado diferentes condições de contorno com características similares à teoria da viga de *Euler-Bernoulli* (PHAM e HONG, 2020). Considerando diferentes tipos de apoios tratadas como definições matemáticas e classificadas em condições clássicas (viga de massa conhecida com apoio clamped-clamped) e não clássicas (viga de massa conhecida com apoio clamped-concentrated mass na extremidade livre).

O problema físico envolve uma viga homogênea e flexível de densidade volumétrica (ρ) e área da seção transversal uniforme (A). Suportada nas extremidades pelas condições clássicas e não clássicas, separadas pela distância L . Sendo desprezado cisalhamento, rotação, forças dissipativas e movimentação longitudinal.

As oscilações laterais terão deformação no plano medial representada por (ϵ), momento de inércia da seção transversal (I) e tensão constante (T_0). A oscilação será descrita pelo deslocamento transversal $W(x,t)$, onde (t) representa o tempo e (x) a coordenada axial. Todo o sistema estará sujeito à ação da velocidade de transporte (V) (MOTE Jr., 1965; WICKERT, 1992; CHEN e YANG, 2005; GHAYESH *et al.*, 2016; PHAM e HONG, 2020).

3.2.1 – Formulação dos Modelos de Vigas

A equação governante será estabelecida como no modelo de Cordas, aplicando princípio de *Hamilton generalizado*. Isso permitirá visualizar o formalismo matemático da transição do modelo do método das Cordas para o de Vigas, incorporando os movimentos básicos pertinentes a esse tipo de problema e considerando o equilíbrio dinâmico do novo sistema.

Nesse sistema, a energia cinética (K) está relacionada ao centro da viga representado pela expressão (PAKDEMIRLI, 1994; ÖZKAYA e PAKDEMIRLI, 2002; SUWEKEN, 2003; CHEN *et al.*, 2007; ZWIERS e BRAUN, 2007; HUO e WANG, 2016; TAN *et al.*, 2018; PHAM e HONG, 2020):

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] dx \quad (3.48)$$

A energia potencial (U) ocasionada pelos efeitos dinâmicos correspondente a carga distribuída no sistema, é expressa por meio da formulação (YANG e CHEN, 2005; CHEN e YANG, 2005; CHEN *et al.*, 2007; DING e CHEN, 2009; HUO e WANG, 2016; TAN *et al.*, 2018, PHAM e HONG, 2020).

$$U = \int_0^L \left[T_0 \varepsilon_x + \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \int_0^L \varepsilon_x^2 dx + \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] \quad (3.49)$$

Aplicando o princípio de *Hamilton* e substituindo os termos da Eqs. (3.48 e 3.49) na Eq. (3.9). A equação parcial governante associada ao sistema analisado, terá a seguinte expressão:

$$\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] - 2T_0 \varepsilon_x - EI \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{AE}{L} \int_0^L \varepsilon_x^2 dx \right\} dx dt = 0 \quad (3.50)$$

Sabendo se tratar de uma transição na estruturação matemática dos modelos, o processo de resolução para os cinco primeiros termos da Eq. (3.50) seguirá o mesmo procedimento utilizado nos modelos das Cordas. Portanto, atenção será focada apenas nos termos destacados em negrito, o sexto e o sétimo termos da equação. Assim, a rigidez a flexão (EI) será constante, e após duas integrações por partes o termo de 4ª ordem, sexto termo na Eq. (3.50) terá a seguinte resolução:

$$\begin{aligned}
\delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L EI \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \frac{1}{2} EI \left[\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \Big|_0^L - \int_0^L EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) (\delta w) dx \right] dt
\end{aligned} \tag{3.51}$$

De maneira análoga aos tratamentos dos modelos de cordas, o termo $EI \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) (\delta w) \Big|_0^L$ será considerado nulo mediante a variação $\delta w \Big|_0^L = 0$. Conforme o *Lema de Dubois-Raymand*.

Com relação ao sétimo termo, se o deslocamento transversal tiver uma amplitude finita, ele pode ser descrito pela teoria linear das vigas, conforme estabelecido pela aproximação de *Von Karman*. Onde a deformação axial (ε) resultante da tensão (T) aplicada é determinada pela relação geométrica não linear: $\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, conhecida como deformação Lagrangeana ao longo do eixo axial. Seguindo nesse raciocínio, devido a variação espacial da tensão (σ_x) ser relativamente pequena influenciada pela baixa inercia longitudinal. A rigidez à deformação será obtida usando o valor médio das tensões parciais dada por: $\frac{1}{L} \int_0^L AE \varepsilon_x dx$.

Assim, a resolução do sétimo termo será dada pela seguinte formulação (WICKERT, 1992; YANG e CHEN, 2005; CHEN e YANG, 2005; CHEN *et al.*, 2007; DING e CHEN, 2009; HUO e WANG, 2016; TAN *et al.*, 2018, PHAM e HONG, 2020).

$$\begin{aligned}
& \delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{AE}{L} \left\{ \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx \right\} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{AE}{2L} \delta \int_0^L \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\frac{AE}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{AE}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) dx \right\} dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{AE}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{AE}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) dx \right\} dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{AE}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{AE}{2L} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] (\delta w) dx \right\} dt
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Na Eq. (3.52) todos os termos são identicamente zero (*Lema de Dubois-Raymand*). Assim, organizando todos os termos trabalhados, incluindo os das Eqs. (3.51 e 3.52), chega-se à equação governante de vigas, dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{3}{2} AE \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{AE}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \right\} (\delta w) dx dt = 0
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Na Eq. (3.53), os termos correspondentes as condições de contornos em $w(0,t)=w(L,t)=0$, foram previamente anulados. Isso implica em considerar que as condições de contorno são próprias ao perfil analisado, e dependerão da condição de movimentação do sistema. Dessa forma, a equação governante que descreve a dinâmica do modelo da viga será dada por:

$$\rho A \left(\underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}}_{\text{Oscilador Lateral}} + 2V \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}}_{\text{Coriolis}} + V^2 \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}_{\text{Centrípeta}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{Velocidade variável}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \underbrace{T_0}_{\text{Tensão Aplicada}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \underbrace{EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}}_{\text{Rigidez à Flexão de Euler-Bernoulli}}$$

(3.54)

$$-a \left[\underbrace{\frac{3}{2} EA \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2}_{\text{Deformação Longitudinal Distribuída}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - b \left[\underbrace{\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2}_{\text{Deformação Longitudinal Média}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx \right] = 0$$

Dessa forma, os termos na Eq. (3.54) descrevem da esquerda para a direita, segundo PAKDEMIRLI *et al.* (1994), PAKDEMIRLI e ULSOY (1997), ZWIERS e BRAUN (2007), PHAM e HONG (2020), a aceleração local ou oscilador lateral, aceleração centrípeta, aceleração de *Coriolis*, velocidade variável no tempo, tensão ou carga aplicada, rigidez à flexão de Euler-Bernoulli e deformação longitudinal distribuída e longitudinal média.

Os coeficientes 'a' e 'b' são inteiros (0 ou 1), empregados para incorporar a equação o efeito da rigidez à deformação longitudinal distribuída, por meio do termo relacionado a *Equação Diferencial Parcial* (EDP), e o efeito da rigidez à deformação longitudinal média relacionando o termo a uma *Equação Diferencial Integro Parcial* (EDIP).

Para esse tipo de problema, é considerado que a velocidade $V(t)$ varia harmonicamente em torno da velocidade média V_0 , com $V(t) = V_0 + \varepsilon \sin(\Omega t)$ e $\dot{V} = \varepsilon \Omega \cos(\Omega t)$. Sendo (ε) um parâmetro adimensional $\ll 1$, representante da amplitude das flutuações e Ω a frequência (ÖZ e PAKDEMIRLI, 1999). Os suportes ou apoios serão tratados sem perda de generalidade considerando duas hipóteses de análise envolvendo as seguintes condições de contorno:

1º hipótese - Condição Clássica.

- Clamped–Clamped [C–C]

2º hipótese - Condição Não clássica.

- Clamped–Concentrated Mass [C–CM]

As pesquisas na literatura, em sua maioria, tratam em geral as condições de contorno clássicas, enquanto as condições não clássicas são menos exploradas. A condição de contorno não clássica envolverá a presença de uma massa concentrada em uma das extremidades da viga, conforme mencionado por SILVA *et al.* (2016).

Nesse contexto, o campo de deslocamento transversal e suas derivadas tornam-se fortemente dependente das condições de contorno (LAURA *et al.*, 1974 e 1975; WANG *et al.*, 2008), por caracterizarem o comportamento da estrutura fornecendo informações para a análise do sistema. As condições de contorno correspondentes ao apoio C–C ou biengastado, serão:

$$W(0,t) = \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = 0, \quad W(L,t) = \frac{\partial W(L,t)}{\partial x} = 0 \quad (3.55)$$

Assumindo que não há mudança de inclinação nos contornos e que as extremidades estão fixadas aos suportes, o resultado das movimentações será apenas o deslocamento transversal $W(x,t)$ (MOUSAVI *et al.*, 2019), da viga ilustrada na Fig. 3.6.

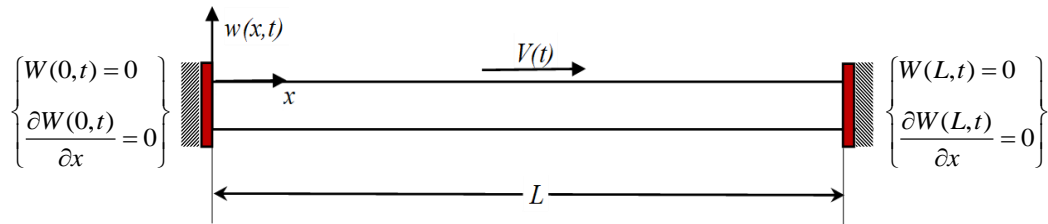


Figura 3.6 – Representação esquemática da viga com contorno C–C.

Para o contorno C–CM, as respectivas condições de contorno são expressas por:

$$W(0,t) = \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial t^2} \quad (3.56)$$

O termo EI denota a rigidez à flexão para o esforço cortante e a massa concentrada M na extremidade livre da viga, como descrevem LAURA *et al.* (1974 e 1975) e WANG *et al.* (2008). Ilustrado na Fig. 3.7.

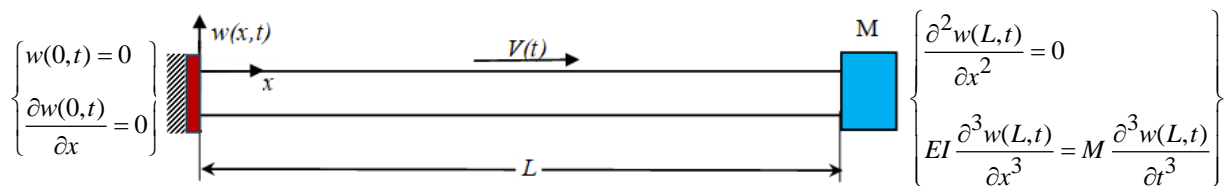


Figura 3.7 – Representação esquemática da viga com contorno C–CM.

Na concepção relacionado à resistência à flexão e ao movimento devido à velocidade $V(t)$, as oscilações da viga serão sempre iniciadas quando $W(x,0) = 0$ no intervalo $0 \leq x \leq L$, de amplitude inicial de propagação B_0 , com a perturbação periódica expressa pela equação:

$$\frac{dW(x,0)}{dt} = B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.57)$$

3.2.2 – Adimensionalização dos Modelos de Vigas

Para simplificar as equações governantes dos movimentos vibracionais da viga envolvidos nas modelagens, a adimensionalização dos parâmetros utilizando os seguintes grupos de variáveis:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{W}{L}, \quad \tau = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \cdot \frac{t}{L}, \quad \xi = \frac{EI}{T_0 L^2}, \\ \omega = \frac{\Omega L}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}}, \quad v = \frac{V}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{T_0}{AE}}, \quad \gamma = \frac{M}{\rho AL} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Sendo as equivalências paramétricas representadas por: η – variável espacial, w – deslocamento transversal, τ – variável temporal, ω – frequência angular, ξ – rigidez à flexão, v – velocidades de transporte, α – rigidez a deformação axial e γ – razão de massa.

3.2.3 – Equação Geral do Modelo de Vigas

Os termos da equação governante, independente das condições de contorno, podem ser reescritos de forma adimensionalizada e simplificada usando w ao invés do $w(x,t)$ e os termos destacados em azul, representam os termos da Equação da Viga de Euler, conforme a expressão:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial w}{\partial \eta} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \xi \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}}_{\text{Equação do modelo Euler-Benoulli Ampliada}}$$

$$- a \underbrace{\left[\frac{3}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right]}_{EDP} - b \underbrace{\left[\frac{1}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right]}_{EDIP} = 0 \quad (3.59)$$

As condições de contorno do apoio clássico C–C adimensionalizadas são expressas por:

$$w(0, \tau) = \frac{\partial w(0, \tau)}{\partial \eta} = 0, \quad w(1, \tau) = \frac{\partial w(1, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.60)$$

As condições de contorno não-clássicas (C–CM) adimensionalizadas, são dadas por:

$$w(0, \tau) = \frac{\partial w(0, \tau)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \eta^3} = \gamma \frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (3.61)$$

A adimensionalização da condição inicial é expressa por $w(0, \tau) = 0$. Já a adimensionalização da equação representativa das perturbações periódicas, com a amplitude inicial de propagação adimensional $a_0 = 0,01$, no intervalo $0 < \eta < 1$, é dada pela equação:

$$\frac{\partial w(\eta, 0)}{\partial \tau} = a_0 \text{sen}(\eta\pi) \quad (3.62)$$

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

4.1 – DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A determinação da representação matemática do movimento oscilatório para cada modelo estudado será estabelecida utilizando a estrutura metodológica da GITT. A equação geral dos modelos levará em considerará diversos efeitos, incluindo massas em movimento, deformação, movimentos giroscópicos, amortecimento, velocidade constante e variável, resistência à aceleração, rigidez intrínseca e forças de excitação.

A Equação Diferencial Ordinária (EDO) de cada modelo será obtida em duas seções distintas. A primeira tratará da solução da equação do modelo das Cordas, enquanto a segunda abordará a equação do modelo das Vigas. Em ambas as seções, será aplicado o processo de transformada-integral, na coordenada espacial e no domínio temporal.

4.2 – SOLUÇÃO DE ESTRUTURAS TIPO CORDAS

O método empregado envolve o desenvolvimento por meio do processo de transformada-integral para o intervalo $\xi \in [0,1]$ no domínio de τ . Esse processo utiliza autovalores e autofunções na solução das equações. Um problema de autovalor auxiliar é selecionado para fornecer a base ortogonal das autofunções, utilizada na expansão do campo de deslocamento transversal $w(x,t)$, dado por:

$$\frac{d^2 \psi_i(\xi)}{d\xi^2} + \mu_i^2 \psi_i(\xi) = 0 \quad (4.1)$$

Como o problema tratado tem suporte biengastado, as condições de contorno utilizadas nesse tipo de problema são representadas por:

$$\psi_i(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi_i(1) = 0 \quad (4.2)$$

Sendo $\psi_i(\xi)$ a autofunção e μ_i o autovalor, o problema estudado terá a seguinte condição de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ Ni, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.3)$$

Resolvendo a integral da Eq. (4.3), a normalização do problema é feita pela expressão:

$$N_i = \int_0^1 \psi_i^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

A solução da equação do autovalor (μ_i), Eq. (4.3), resulta na expressão:

$$\psi_i(\xi) = \text{sen}(\mu_i \xi), \quad \text{sendo } \mu_i = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Assim, o problema de autovalor considerado permitirá definir o potencial do par *transformada-inversa* para a determinar o deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$, dada por:

$$\begin{cases} \bar{w}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\xi) w(\xi, t) d\xi, & \text{transformada} \\ w(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\xi) \bar{w}_i(\tau), & \text{inversa} \end{cases} \quad (4.6)$$

Dessa forma, a autofunção agora normalizada poderá ser expressa por:

$$\tilde{\psi}_i(\xi) = \frac{\psi_i(\xi)}{\sqrt{N_i}} = \sqrt{2} \psi_i(\xi) \quad (4.7)$$

Portanto, o desenvolvimento do processo de aplicação da GITT ao problema de autovalor com solução desenvolvida no processo de transformada-integral no intervalo $\xi \in [0, 1]$ no domínio de τ , terá no processo de solução da EDP, o emprego da Eq. (4.4), as condições

de contorno da Eq. (4.2) e a multiplicação da equação adimensionalizada por $\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\xi) d\xi$, obtendo a EDO utilizada na determinação de $w(\xi, \tau)$ dada pela equação:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2\beta f(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} - (\beta^2 f(\tau)^2 - 1) \mu_i^2 \bar{w}_i(\tau) \\ + \beta(\gamma g(\tau) + \delta) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) + k^2 \bar{w}_i(\tau) + \delta \frac{d\bar{w}_i(\tau)}{d\tau} \\ - \frac{3}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{ijkl} \cdot \bar{w}_i(\tau) \cdot \bar{w}_j(\tau) \cdot \bar{w}_k(\tau) \cdot \bar{w}_l(\tau) = \bar{F}_i(\tau), \quad i=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sendo $F(\xi, \tau) = F_0 g(\tau)$, e os coeficientes A_{ij}, B_{ijkl} e $\bar{F}_i(\tau)$ da EDO, expressos por:

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\xi) \tilde{\psi}'_j(\xi) d\xi \quad (4.9a)$$

$$B_{ijkl} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\xi) \tilde{\psi}'_j(\xi) \tilde{\psi}'_k(\xi) \tilde{\psi}'_l(\xi) d\xi \quad (4.9b)$$

$$\bar{F}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\tau) F(\xi, \tau) d\xi \quad (4.9c)$$

A solução da Eq. (4.8) depende de sua condição inicial e de contorno. Para isso é aplicado o mesmo processo de transformada-integral a essas condições de modo a satisfazer as autofunções, fornecendo as seguintes expressões:

$$\bar{w}_i(0) = A_0 \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\xi) \sin(\pi\xi) d\xi, \quad \frac{d\bar{w}_i(0)}{d\tau} = 0 \quad (4.10)$$

O cálculo dos coeficientes numéricos para as equações transformadas, Eqs. (4.9a-c), deve ser otimizado para minimizar o custo computacional. Determinar esses coeficientes diretamente no programa durante a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias resulta em um processamento lento e dispendioso, aumentando significativamente o tempo de

execução. Avaliá-los externamente, seja por métodos computacionais ou numéricos, é frequentemente uma alternativa mais eficaz, conforme sugere COUTINHO (2021).

No entanto, os coeficientes integrais e numéricos serão determinados internamente no programa utilizando a sub-rotina DIVPAG da biblioteca IMSL (IMSL, 2003), devido à estruturação lógica e a boa arquitetura estabelecida no algoritmo desenvolvido para a GITT.

4.2.1 – Modelo Expresso em Forma de Matriz

A representação da equação do modelo, Eq. (4.8), em forma de matriz é um recurso operacional que tornar simples o trabalho das variáveis. As matrizes serão representadas por: **[M]** matriz de massa do sistema, **[G]** matriz associada aos efeitos giroscópios, **[D]** matriz de amortecimento do sistema, **[C]** matriz que contempla o efeito da rigidez do suporte, **[H]** matriz que contempla o efeito do amortecimento do suporte, **[K]** matriz de rigidez do sistema, **[N]** matriz que contempla o efeito da rigidez axial do sistema e **[F]** forças de excitação externas. Os elementos dos operadores matriciais são:

$$[\mathbf{M}] \Rightarrow M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \Rightarrow [\mathbf{M}] = [\mathbf{I}]_N \quad (4.11a)$$

$$[\mathbf{G}] \Rightarrow G_{ij} = 2\beta f(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \quad (4.11b)$$

$$[\mathbf{D}] \Rightarrow D_{ij} = \delta \quad (4.11c)$$

$$[\mathbf{C}] \Rightarrow C_{ij} = -(\beta^2 f(\tau)^2 - 1)\mu_i^2, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.11d)$$

$$[\mathbf{H}] \Rightarrow H_{ij} = \beta(\gamma g(\tau) + \delta) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \quad (4.11e)$$

$$[\mathbf{K}] \Rightarrow K_{ij} = \kappa^2 \quad (4.11f)$$

$$[\mathbf{N}] \Rightarrow N_{ijkl} = -\frac{3}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{ijkl} \cdot \bar{w}_j(\tau) \cdot \bar{w}_k(\tau) \cdot \bar{w}_l(\tau) \quad (4.11g)$$

A equação geral do modelo é descrita utilizando-se operadores matriciais, onde é importante ressaltar que a matriz $[\mathbf{N}]$ depende do campo transformado, vindo a ser responsável por tornar a EDO do sistema em não linear, conforme a expressão:

$$[\mathbf{M}] \left\{ \frac{d^2 \bar{w}(\tau)}{d\tau^2} \right\} + ([\mathbf{G}] + [\mathbf{D}]) \left\{ \frac{d\bar{w}(\tau)}{d\tau} \right\} + ([\mathbf{C}] + [\mathbf{H}] + [\mathbf{K}] + [\mathbf{N}(\{\bar{w}(\tau)\})]) \{\bar{w}(\tau)\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (4.12)$$

O sistema de EDO para os campos transformados, definido pela Eq. (4.8) ou, equivalentemente, pela Eq. (4.12), será resolvido numericamente com uma tolerância prescrita de 10^{-10} para o erro relativo da solução numérica.

4.3 – SOLUÇÃO DE ESTRUTURAS TIPO VIGAS

A solução utilizará os fundamentos das vigas de *Euler-Bernoulli* e os efeitos da rigidez à deformação por meio de uma EDP ou EDIP que ampliarão significativamente os aspectos práticos do uso da GITT sem aplicar filtros nas condições contorno. Essas validações externas fortalecem a credibilidade do estudo e garantem que os resultados estejam em consonância com expectativas da robustez do método, contribuindo para a confiabilidade e relevância da análise.

4.3.1 – Solução para a Condição de Contorno C – C

Desenvolvida pelo processo de transformada-integral para o intervalo $\eta \in [0,1]$ no domínio de τ , empregando autovalores e autofunções na solução das equações. Usará o problema de autovalor auxiliar selecionado para fornecer a base ortogonal das autofunções para a expansão do campo de deslocamento transversal $w(x,t)$, dado por:

$$\frac{d^4 \psi_i(\eta)}{d\eta^4} = \mu_i^4 \psi_i(\eta) \quad (4.13)$$

Para esse tipo de apoio, as condições de contorno transformadas são as seguintes:

$$\psi_i(0) = \psi_i'(0) = 0, \quad \psi_i(1) = \psi_i'(1) = 0 \quad (4.14)$$

Dessa forma, a solução analítica da Eq. (4.13) usando a Eq. (4.14), pode ser expressa pela autofunção $\psi_i(\eta)$ dada por:

$$\psi_i(\eta) = \begin{cases} \frac{\cos\left[\mu_i\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\right] \cosh\left[\mu_i\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\mu_i}{2}\right) \cosh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)}, & i = \text{impar} \\ \frac{\sen\left[\mu_i\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\right] \sinh\left[\mu_i\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\right]}{\sen\left(\frac{\mu_i}{2}\right) \sinh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)}, & i = \text{par} \end{cases} \quad (4.15)$$

Os autovalores de μ_i , são determinados pelas equações transcendentais a seguir:

$$\tanh\left(\frac{\mu_i}{2}\right) = \begin{cases} -\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_i}{2}\right), & i = \text{impar} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_i}{2}\right), & i = \text{par} \end{cases} \quad (4.16)$$

Assim, a condição de ortogonalidade então será expressa pela seguinte integral definida:

$$\int_0^1 \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.17)$$

Ao resolver a integral da Eq. (4.17), obtém-se a normalização do problema dada por:

$$N_i = \int_0^1 \psi_i^2(\eta) d\eta = 1 \quad (4.18)$$

O problema de autovalor considerado permite obter $w(\eta, \tau)$ por meio do potencial *transformada-inversa*, expresso por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta, \quad \text{transformada} \\ w(\eta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{w}_i(\tau), \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

A autofunção agora normalizada poderá ser expressa da seguinte forma:

$$\tilde{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{\sqrt{N_i}} = \psi_i(\eta) \quad (4.20)$$

Empregando a técnica da GITT na resolução do problema de autovalor (μ_i), a solução da EDP do modelo, obtida pelo processo de *transformada-integral* para $\eta \in [0,1]$ no domínio de τ , envolve o uso da Eq. (4.15), as condições de contorno especificadas na Eq. (4.14) e a multiplicação da EDO obtida pela integral $\int_0^1 \bar{\Psi}_i(\eta) d\eta$. Resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} d\eta + \frac{dv}{d\tau} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + 2v \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \tau} d\eta + (v^2 - 1) \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta + \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta \\ & - a \left[\frac{3}{2\alpha^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] - b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ao aplicar a transformada-integral representada pela Eq. (4.19) nos termos da Eq. (4.21), obtém-se os termos (T_1 a T_7), que farão parte da equação governante desse modelo:

$$T_1 = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} d\eta = \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta = \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} \quad (4.22a)$$

$$T_2 = \frac{dv}{d\tau} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = \frac{dv}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau), \quad A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j'(\eta) d\eta \quad (4.22b)$$

$$T_3 = 2v \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \tau} d\eta = 2v \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = 2v \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} \quad (4.22c)$$

$$T_4 = (v^2 - 1) \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta = - (v^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau), \quad B_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j''(\eta) d\eta \quad (4.22d)$$

$$T_5 = \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta = \xi \frac{d^4}{d\eta^4} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta = \xi \frac{d^4 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^4} = \xi \mu_i^4 \bar{w}_i(\tau) \quad (4.22e)$$

$$\begin{aligned} T_6 &= -a \left[\frac{3}{2\alpha^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] \\ &= -\frac{3a}{2\alpha^2} \left[\int_0^1 \tilde{\psi}_i \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j''(\eta) \bar{w}_j(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k'(\eta) \bar{w}_k(\tau) \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\psi}_\ell'(\eta) \bar{w}_\ell(\tau) d\eta \right] \\ &= -\frac{3a}{2\alpha^2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{ijk\ell} \bar{w}_j(\tau) \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right] \end{aligned} \quad (4.22f)$$

$$\begin{aligned} T_7 &= -b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] \\ &= -\frac{b}{2\alpha^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j''(\eta) \bar{w}_j(\tau) \right) \left[\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k'(\eta) \bar{w}_k(\tau) \right) \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\psi}_\ell'(\eta) \bar{w}_\ell(\tau) \right) d\eta \right] d\eta \\ &= -\frac{b}{2\alpha^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j''(\eta) \bar{w}_j(\tau) \right) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_k'(\eta) \tilde{\psi}_\ell'(\eta) d\eta \right) \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right] d\eta \\ &= -b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_{k\ell} \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.22g)$$

Portanto, a equação do modelo transformada, composta pela substituição dos termos da Eq. (4.22a-g) na Eq. (4.21), tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2\nu \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} + \frac{d\nu}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) - (\nu^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) + \xi \mu_i^4 \bar{w}_i(\tau) \\
& - a \left[\frac{3}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{ijk\ell} \bar{w}_j(\tau) \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right] \\
& - b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_{k\ell} \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Os coeficientes apresentados na Eq. (4.23) são especificados pelas equações:

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}'_j(\eta) d\eta \tag{4.24a}$$

$$B_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}''_j(\eta) d\eta \tag{4.24b}$$

$$C_{ijk\ell} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}''_j(\eta) \tilde{\psi}'_k(\eta) \tilde{\psi}'_\ell(\eta) d\eta \tag{4.24c}$$

$$D_{k\ell} = \int_0^1 \tilde{\psi}'_k(\eta) \tilde{\psi}'_\ell(\eta) d\eta \tag{4.24d}$$

As condições iniciais para os campos transformados adimensionalizadas são dadas por:

$$\bar{w}_i(0) = 0, \quad \frac{d\bar{w}_i(0)}{d\tau} = a_0 \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \operatorname{sen}(\pi\eta) d\eta \tag{4.25}$$

4.3.2 – Solução para a condição de contorno C – CM

Os movimentos intensos, a deformação, o cisalhamento e a flexão são invariavelmente reconhecidos como dissipadores de energia nesse tipo de problema. As condições de contorno incorporam a inércia da massa M ao sistema, resultando em um efeito significativo nas

frequências e nas formas dos modos de vibração (WANG *et al.*, 2017). A aplicação da técnica da GITT a esse contorno resulta na EDO usada na equação auxiliar e na solução do problema.

$$\frac{d^4 \psi_i(\eta)}{d\eta^4} = \mu_i^4 \psi_i(\eta) \quad (4.26)$$

Considerando o tipo de apoio as condições de contorno transformadas serão:

$$\psi_i(0) = \psi_i'(0) = 0, \quad \psi_i''(1) = 0, \quad \psi_i'''(1) + \mu_i^4 \gamma \psi_i(1) = 0 \quad (4.27)$$

A solução da Eq. (4.26) usando a Eq. (4.27), resulta na equação da autofunção $\psi_i(\eta)$:

$$\psi_i(\eta) = \cos(\mu_i \eta) - \cosh(\mu_i \eta) - \frac{[\cos(\mu_i) - \cosh(\mu_i)]}{[\sin(\mu_i) + \sinh(\mu_i)]} [\sin(\mu_i \eta) + \sinh(\mu_i \eta)] \quad (4.28)$$

A determinação dos autovalores (μ_i) são determinados pela equação transcendente:

$$[1 + \cos(\mu_i) \cosh(\mu_i)] + \gamma \mu_i [\cos(\mu_i) \sinh(\mu_i) - \sin(\mu_i) \cosh(\mu_i)] = 0 \quad (4.29)$$

A condição de ortogonalidade para essa análise será:

$$\int_0^1 \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) d\eta + \gamma \psi_i(1) \psi_j(1) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.30)$$

Resolvendo a integral definida apresentada na Eq. (4.30), chega-se à normalização do problema dada pela equação:

$$N_i = \int_0^1 \psi_i^2(\eta) d\eta + \gamma \psi_i^2(1) \quad (4.31)$$

O problema de autovalor considerado permite obter $w(\eta, \tau)$ por meio do potencial *transformada-inversa*, expresso por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \gamma \tilde{\psi}_i(1) w(1, \tau), \quad \text{transformada} \\ w(\eta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{w}_i(\tau), \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Dessa forma, a autofunção agora normalizada poderá ser expressa pela equação:

$$\bar{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{\sqrt{N_i}} = \psi_i(\eta) \quad (4.33)$$

Assim, ao empregar a técnica da GITT na resolução do problema de autovalor (μ_i), a solução da EDP, obtida pela *transformada-integral* com $\eta \in [0,1]$ no domínio de τ , envolverá o uso da Eq. (4.28), juntamente com as condições de contorno especificadas na Eq. (4.27) e a multiplicação da EDO obtida pela integral $\int_0^1 \bar{\psi}_i(\eta) d\eta$. Esse procedimento resulta em uma equação governante dada por:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} d\eta + \frac{dv}{d\tau} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + 2v \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \tau} d\eta + (v^2 - 1) \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta + \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta \\ & - a \left[\frac{3}{2\alpha^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] - b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aplicando o método da transformada integral para o primeiro e quinto termo da EDP do modelo, Eq. (4.34), tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} d\eta + \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta = \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta \\ & \text{1}^\circ \text{ integração: } \left\{ \begin{array}{l} u = \tilde{\psi}_i(\eta) \quad \therefore \quad du = \tilde{\psi}_i'(\eta) d\eta \\ dv = \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta \quad \therefore \quad v = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \end{array} \right. : \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} d\eta = \left[\tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right]_0^1 - \int_0^1 \tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} d\eta \end{aligned} \quad (4.35a)$$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \xi \left[\tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right]_0^1 - \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} d\eta$$

$$2^\circ \text{ integração: } \begin{cases} u = \tilde{\psi}_i'(\eta) & \therefore du = \tilde{\psi}_i''(\eta) d\eta \\ dv = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} d\eta & \therefore v = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} d\eta = \left[\tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right]_0^1 + \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i''(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta \quad (4.35b)$$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \xi \left[\tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right]_0^1 + \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i''(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta$$

$$3^\circ \text{ integração: } \begin{cases} u = \tilde{\psi}_i''(\eta) & \therefore du = \tilde{\psi}_i'''(\eta) d\eta \\ dv = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta & \therefore v = \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \tilde{\psi}_i''(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} d\eta = \left[\tilde{\psi}_i''(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_0^1 - \int_0^1 \tilde{\psi}_i'''(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta \quad (4.35c)$$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \xi \left[\tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \tilde{\psi}_i''(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_0^1 - \xi \int_0^1 \tilde{\psi}_i'''(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta$$

$$4^\circ \text{ integração: } \begin{cases} u = \tilde{\psi}_i'''(\eta) & \therefore du = \tilde{\psi}_i''''(\eta) d\eta = \mu_i^4 \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \\ dv = \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta & \therefore v = w(\eta, \tau) \end{cases} \quad (4.35d)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \tilde{\psi}_i'''(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = \tilde{\psi}_i''''(\eta) w(\eta, \tau) - \int_0^1 \mu_i^4 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta$$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \xi \left[\tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \tilde{\psi}_i'(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \tilde{\psi}_i''(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \tilde{\psi}_i'''(\eta) w(\eta, \tau) \right]_0^1 \quad (4.35e)$$

$$+ \xi \mu_i^4 \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta$$

Multiplicando a condição de contorno, Eq. (4.1) por $\tilde{\psi}_i(1)$ e Eq. (4.31) por $\xi w(1, \tau)$, tem:

$$\tilde{\psi}_i(1) \left[\xi \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \eta^3} - \gamma \frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad \text{e} \quad \xi w(1, \tau) \left[\tilde{\psi}_i'''(1) - \mu_i^4 \gamma \tilde{\psi}_i(1) \right] = 0 \quad (4.36)$$

Igualando as duas expressões da Eq. (4.36), obtém-se:

$$\xi \tilde{\Psi}_i(1) \left. \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \eta^3} \right|_{\eta=1} - \xi \tilde{\Psi}_i'''(1) w(1, \tau) = \gamma \tilde{\Psi}_i(1) \left. \frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\eta=1} + \xi \mu_i^4 \gamma \tilde{\Psi}_i(1) w(1, \tau) \quad (4.37)$$

Substituindo a Eq. (4.36) na Eq. (4.37), chega-se a seguinte expressão:

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \gamma \tilde{\Psi}_i(1) \frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \tau^2} + \xi \mu_i^4 \gamma \tilde{\Psi}_i(1) w(1, \tau) + \xi \mu_i^4 \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta \quad (4.38)$$

Substituindo a Eq. (4.38) na Eq. (4.32), obtém-se a expressão transformada:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\tau^2} \left[\int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \gamma \tilde{\Psi}_i(1) w(1, \tau) \right] + \xi \mu_i^4 \left[\int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta) w(\eta, \tau) d\eta + \gamma \tilde{\Psi}_i(1) w(1, \tau) \right] \\ & = \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + \xi \mu_i^4 \bar{w}_i(\tau) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Os demais termos transformados são dados pelas expressões da Eq. (4.33). Portanto, a equação governante transformada será descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2\nu \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} + \frac{d\nu}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) - (\nu^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) + \xi \mu_i^4 \bar{w}_i(\tau) \\ & - a \left[\frac{3}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{ijkl} \bar{w}_j(\tau) \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right] \\ & - b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_{k\ell} \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Os coeficientes apresentados na Eq. (4.38) são especificados nas expressões:

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}'_j(\eta) d\eta \quad (4.41a)$$

$$B_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}''_j(\eta) d\eta \quad (4.41b)$$

$$C_{ijk\ell} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}''_j(\eta) \tilde{\psi}'_k(\eta) \tilde{\psi}'_\ell(\eta) d\eta \quad (4.41c)$$

$$D_{k\ell} = \int_0^1 \tilde{\psi}'_k(\eta) \tilde{\psi}'_\ell(\eta) d\eta \quad (4.41d)$$

A obtenção dos coeficientes numéricos e integrais das equações transformadas, Eq. (4.26a-d e 4.41a-d), durante a resolução da EDO do modelo resulta em alto custo computacional (COUTINHO, 2021). Mesmo com uma boa estruturação lógica e eficaz arquitetura do algoritmo da GITT, neste trabalho, os coeficientes integrais são determinados de forma analítica usando o software *Mathematica* (Wolfram). Os resultados obtidos são incorporados ao algoritmo do modelo, tornando o processamento eficiente evitando lentidões e custos computacionais excessivos.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 – MODELOS DE VIBRAÇÕES OBTIDOS PELA GITT

Nesta seção, serão apresentados os resultados e discussões dos modelos de vibrações, abordando análises e interpretações dos resultados das equações resolvidas com essa técnica.

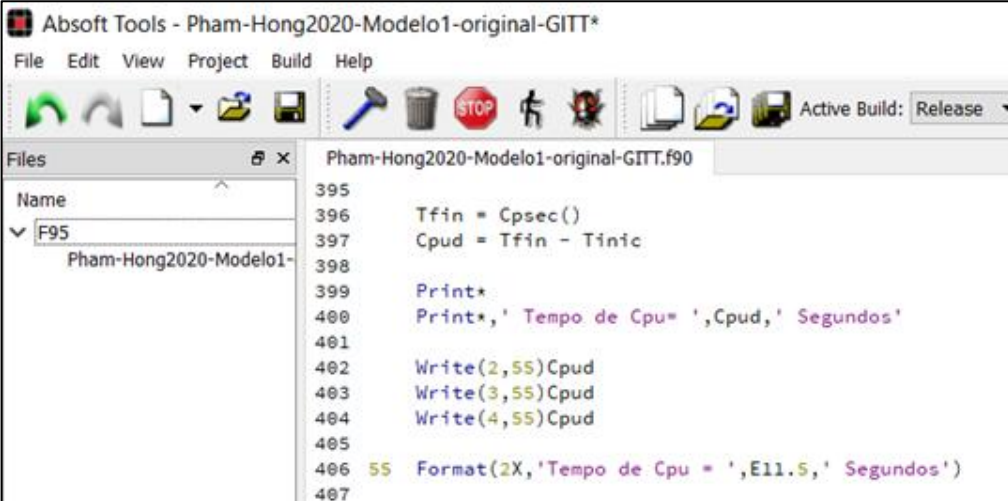
Serão discutidas as frequências naturais, modos de vibração e comportamento dinâmico sob diferentes condições de carga e geometria, incluindo a influência de parâmetros como rigidez, massa e amortecimento. Para obter uma visão abrangente do desempenho e das capacidades dos modelos, com ênfase na análise da convergência, estabilidade e validação dos resultados em cada caso.

Segundo CHAPRA e CANALE (2020), a convergência pode ser interpretada como a capacidade de produzir resultados consistentes e confiáveis. Enquanto a estabilidade é essencial para garantir a qualidade e a representatividade dos resultados, assegurando que os coeficientes da equação permaneçam estáveis em diferentes condições e cenários de aplicação. Já a validação é uma certificação do processo de cálculo que assegura o objetivo sobre a adequação da metodologia, a robustez do modelo e a qualidade dos resultados em conformidade com as características dos modelos. Nas etapas seguintes:

- 1) Verificação da convergência, seguirá a metodologia proposta por GU *et al.* (2016), que determina N em função do fator 2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$), um número mínimo de termos $N = 4, 8, 16, 32$ e 64 , representando os resultados da tolerância estabelecida de acordo com a estabilidade do método.
- 2) Estabilidade numérica, relaciona a precisão do algoritmo. Essas análises são fundamentais na avaliação e confiabilidade dos resultados numéricos dos coeficientes ajustados.
- 3) Perfil vibracional, estabelece uma relação entre a energia e o campo deslocamento lateral. Analisa o resultado do modelo aplicando a FFT no estado do movimento para avaliar a consistência espectral da energia do sistema.
- 4) Validação dos resultados, por se tratar de um trabalho de Método, a eficácia da solução é validada comparando os resultados obtidos com dados publicados na literatura por autores que abordem a mesma sistemática de cálculo.

As equações dos modelos serão tratadas no ambiente Fortran-95 da Absoft Tools (2013), versão 14.0.3 (2.2). Por se tratar de um problema de valor inicial, será empregada a sub-rotina DIVPAG da IMSL (2003). Para o processamento dos cálculos será utilizado um Computador da marca DELL, modelo Inspiron 7559, Intel(R) Cor™ i7-6700HQ, CPU 2.6 GHz, 32 GB de RAM, Sistema Operacional Windows 10 Home Single Language (64 bits) v. 22H2.

De forma instituída, será monitorado o tempo de CPU para observar a eficácia e concisão da implementação computacional da GITT como ferramenta de cálculo. Para isso serão implementadas linhas de código no programa em Fortran-95 desenvolvido para as análises dos modelos. As linhas de código que dizem respeito ao monitoramento do tempo de CPU, estão mostradas na Fig. 5.1.



```
Absoft Tools - Pham-Hong2020-Modelo1-original-GITT*
File Edit View Project Build Help
Active Build: Release
Files
Name
F95
Pham-Hong2020-Modelo1-
Pham-Hong2020-Modelo1-original-GITT.f90
395
396 Tfin = Cpsec()
397 Cpu = Tfin - Tini
398
399 Print*
400 Print*, 'Tempo de Cpu = ', Cpu, ' Segundos'
401
402 Write(2,55)Cpu
403 Write(3,55)Cpu
404 Write(4,55)Cpu
405
406 55 Format(2X, 'Tempo de Cpu = ', E11.5, ' Segundos')
407
```

Figura 5.1 – Linhas de código do monitoramento do tempo de CPU.

O monitoramento do tempo de CPU será particularmente realizado em cenários que envolvam um grande volume de dados durante as interações das malhas. Em geral, esse monitoramento tem um limite para os processamentos para acompanhar o desempenho dos programas e garantir que o processamento permaneça dentro do intervalo de execução considerado razoável ou até mesmo bom, conforme a ISO/IEC 25010. Nesse trabalho, 600 segundos de processamento será considerado suficiente para verificar a necessidade de alterações lógicas ou metodológicas para melhorar o tempo de CPU e garantir a razoabilidade do processamento considerando a configuração do computador utilizado.

5.2 – ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA DOS MODELOS DE CORDAS

5.2.1 – Análise da convergência do modelo I

Nesse modelo o comportamento dinâmico foi fundamentado nos dados oscilatórios de uma corda fina pela sua sensibilidade às mudanças operacionais nesse tipo de sistema (SUWEKEN, 2003; SUWEKEN e VAN HORSSSEN, 2003; PHAM e HONG, 2020).

A análise da convergência dos resultados numéricos obtidos por simulações com a GITT, para o deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$ e da coordenada longitudinal (ξ), requer verificar o comportamento oscilatório do sistema em três valores da velocidade de transporte adimensional β : $\beta = 0,1, 0,5$ e $0,8$. Essas simulações serão realizadas para $N = 4, 8, 16, 32$ e 64 termos em $\tau = 2,5$. Os resultados estão representados graficamente na Fig. 5.2.

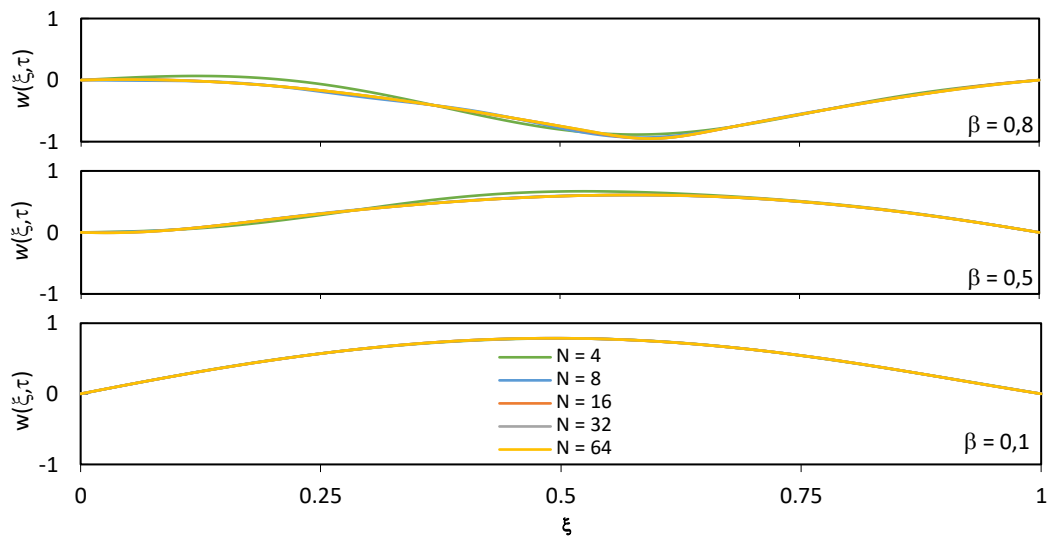


Figura 5.2 – Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo I.

Segundo os critérios adotados é possível garantir um número mínimo e seguro de termos viável quando $N \geq 8$, de acordo com o contexto específico da expansão das autofunções. Os resultados estabelecem que o aumento de β causa um crescimento na amplitude das oscilações $w(\xi, \tau) \times 10^2$. Essa avaliação pode ajudar na eficácia do método numérico ou identificar possíveis problemas na convergência, levando a um refinamento nos parâmetros do modelo. A verificação da estabilidade numérica para os campos transformados é importante para garantir a qualidade dos resultados e a confiança da representatividade.

A Fig. 5.3 apresenta os gráficos da verificação da estabilidade numérica do modelo I, para o deslocamento lateral em função de τ e f em cinco pontos igualmente espaçados ao longo da coordenada ξ , simulado para $N = 32$.

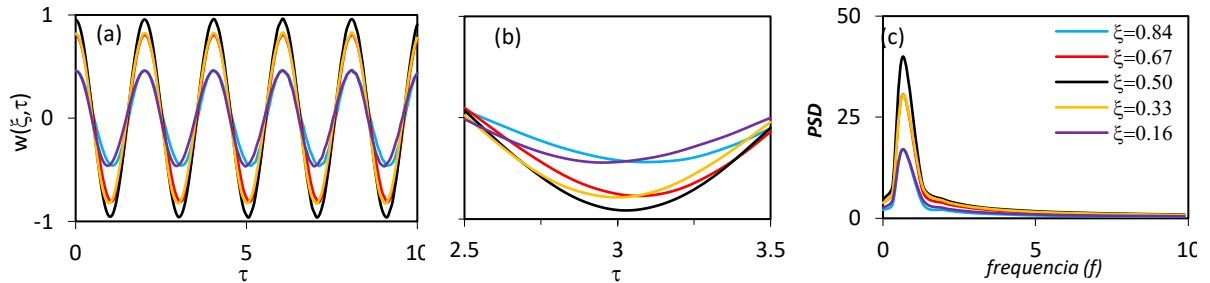


Figura 5.3 – Resultados da verificação da estabilidade do modelo I.

O gráfico 5.3(a) destaca claramente a evolução temporal da solução em diferentes posições com deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$, 5.3(b) oferece uma compreensão da estabilidade do sistema na fração do domínio temporal para $\tau \in [2,5;3,5]$, identificando padrões e comportamentos relevantes pela aplicação da GITT, enquanto 5.3(c) revela o espectro de potência, representando a distribuição detalhada de energia no domínio da frequência (f), obtido por meio da Transformada Rápida de Fourier (*FFT*) realizada em 5.3(b). A determinação da *FFT* utilizou as Ferramentas de Análise do Excel a partir dos dados da GITT, para mostrar a densidade de potência dos campos de deslocamento $w(\xi, \tau)$. Essa interpretação possibilita identificar aspectos do comportamento do sistema ao analisar a densidade espectral de potência (PSD), observando a distribuição da energia nas pequenas vibrações ao longo dos contornos até atingir as frequências máximas no centro da corda.

Assim, a análise modal é uma ferramenta empregada para determinar os modos vibracionais de um sistema e identificar ressonâncias (LAURA, 1974; PAKDEMIRLI *et al.*, 1994; CHAPRA e CANALE, 2020). Nesse contexto, é conveniente utilizar a GITT para esse tipo de problema, uma vez que a solução está na forma de expansões das autofunções do campo de deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$.

Os resultados da verificação modal do modelo I, foram exemplificadas na aplicação experimental, nos três primeiros modos de oscilação, com $\beta = 0,01$, em $\tau = 2,5$, deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$ e $N = 32$. Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 5.4.

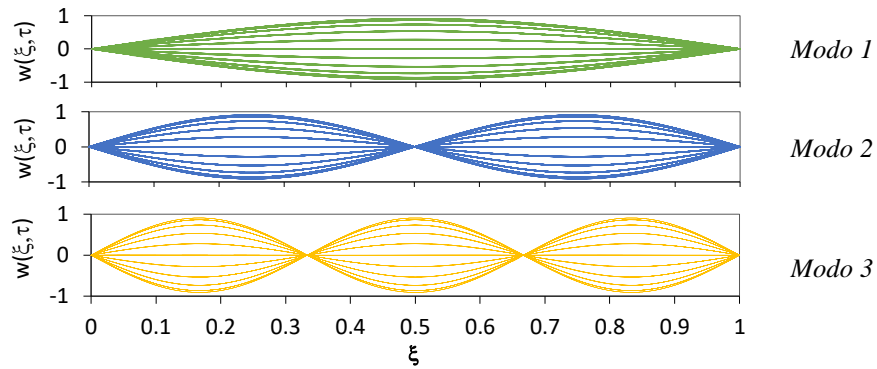
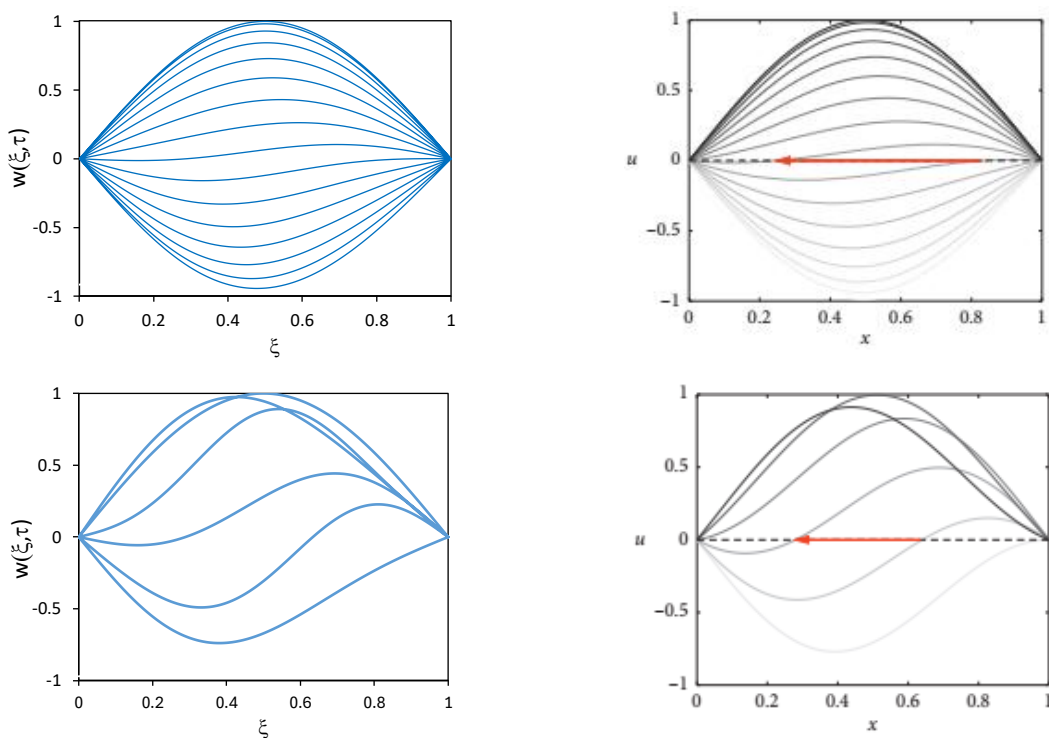
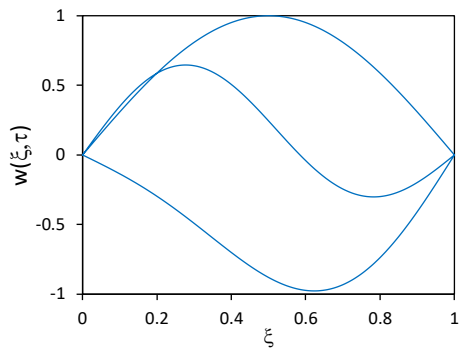


Figura 5.4 – Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo I.

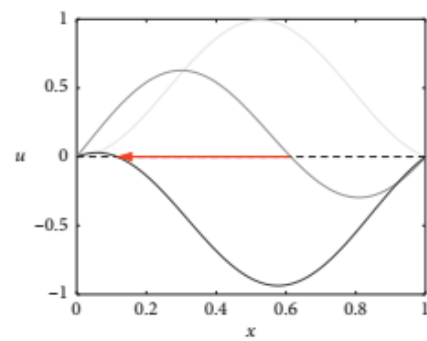
Percebe-se na Fig. 5.4 que as deflexões diminuem à medida que o número do modo de oscilação aumenta, sugerindo uma influência predominante do 1º modo sobre as deflexões. Essa observação é confirmada pela análise da PSD, onde as amplitudes de vibração se aproximam à medida que o número de termos (N) tende ao infinito. Isso mostra que, para valores pequenos de β (cerca de 1% de ξ) o sistema, submetido apenas à velocidade de propagação e à tensão na corda, converge para um número infinitamente menor em relação aos modos de oscilação.

Avaliação da eficácia da forma de cálculo do modelo I, foi testada comparando os resultados determinados pela GITT com de LU *et al.* (2019). Em três velocidades de transporte $\beta = 0.1, 0.5$ e 0.9 com $N = 2$, no primeiro modo de oscilação. Como mostrado na Fig. 5.5.





GIT



LU *et al.* (2019)

Figura 5.5 – Resultados de comparação da dinâmica comportamental do modelo I.

Os gráficos da Fig. 5.5 retratam o movimento de uma corda flexível na direção axial sob tensão constante (T) em diferentes velocidades de transporte. A variação da intensidade da amplitude exibida representa o movimento modal para diferentes perfis periódicos, de acordo com a direção do pulso da onda e características do tipo de operacionalidade de cada simulação. Quando $\beta = 0.1$, as amplitudes são abundantes e bem distribuídas no ponto central. Em $\beta = 0.5$, há um número intermediário de linhas devido a velocidade de oscilação. Em $\beta = 0.9$, as amplitudes são influenciadas pela proximidade do valor limite, onde as oscilações são maiores e a intensidade energética é menor.

5.2.2 – Análise da convergência do modelo II

A análise da convergência seguirá a mesma metodologia adotada no modelo anterior. Considerando a velocidade de transporte adimensional $\beta \in [0,1]$ e deformação axial $\alpha \in [0, 0,2]$ (MOTE Jr., 1966; BAPAT e SRINIVASAN, 1967).

A verificação da convergência neste modelo requer simulações do deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$ em função da coordenada longitudinal (ξ), analisando a dinâmica oscilatória do sistema em três combinações de valores de β e α : $\beta = 0,01, 0,5$ e $0,8$, e $\alpha = 0,05, 0,1$ e $0,2$. Estas simulações foram feitas para $N = 4, 8, 16, 32$ e 64 em $\tau = 2,5$. Os resultados estão representados na Fig. 5.6.

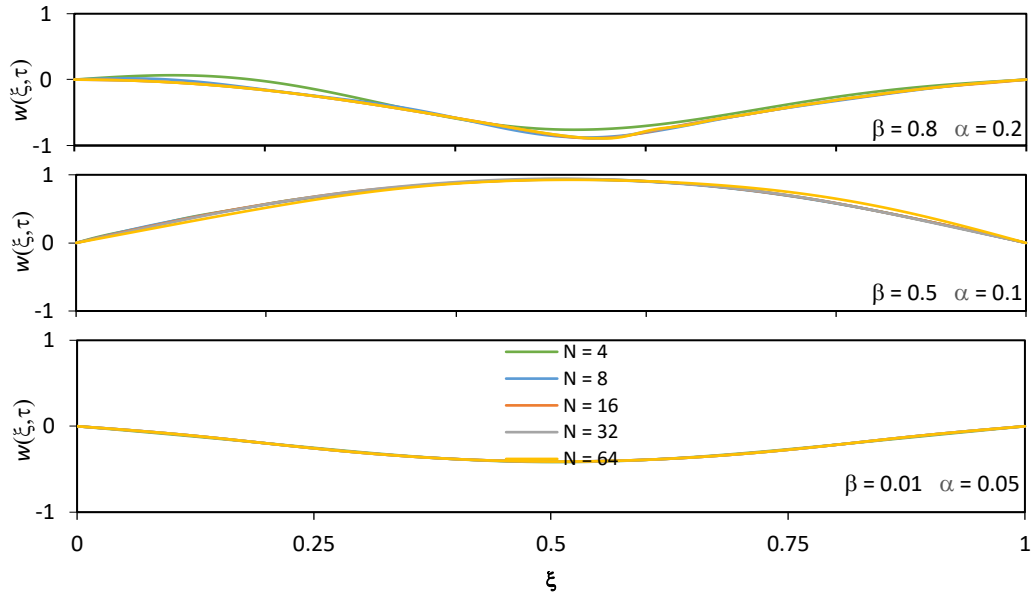


Figura 5.6 – Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo II.

Para esses resultados conforme os critérios adotados, o número mínimo e seguro de termos viável será quando $N \geq 8$, conforme o contexto específico de expansão das autofunções. Observa-se que, à medida que β cresce α também cresce, levando a um aumento no deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$ e na intensificação da propagação das deformações.

Essas mudanças são significativamente influenciadas pelas propriedades do material da corda, como sua elasticidade (MOTE Jr., 1966; PHAM e HONG, 2020). Entender a relação entre α e β pode ajudar a melhorar a eficácia da GITT e detectar problemas de convergência do modelo, permitindo ajustes para garantir resultados satisfatórios.

A avaliação da estabilidade numérica da EDO no campo transformado, é fundamental e garante a qualidade, confiança e representatividade dos resultados. A Fig. 5.7 representa a verificação da estabilidade numérica do modelo II, com deslocamento lateral $w(\xi, \tau) \times 10^2$ em função de τ e f para cinco pontos igualmente espaçados na coordenada ξ para $N = 32$.

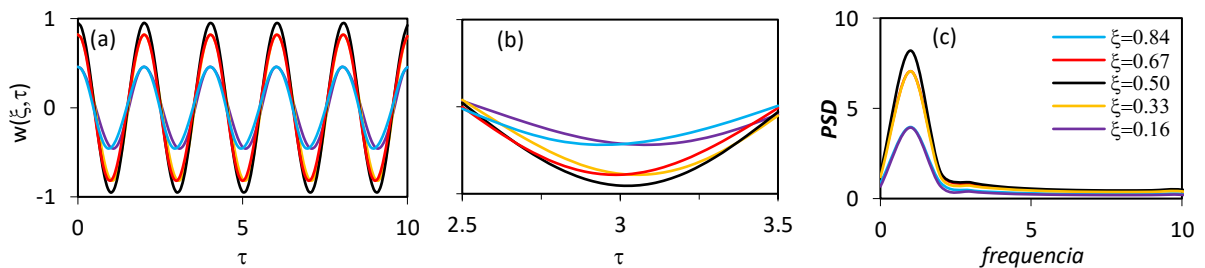


Figura 5.7 – Resultados da verificação da estabilidade do modelo II.

Assim como no modelo I, os gráficos da Fig. 5.7, destacam a evolução temporal da solução em cinco diferentes posições. Sendo 5.7(a) a evolução temporal da solução e 5.7(b) a estabilidade do método para $\tau \in [2,5;3,5]$. Em 5.3 (c) o espectro de potência e a distribuição de energia no domínio da frequência $f \in [0,10]$ determinado pela *FFT*, sendo menor que em 5.7(c). Isso é devido a resistência oferecida pela estrutura interna do material (α) (PHAM e HONG, 2020). A abordagem desse modelo possibilita identificar aspectos do comportamento do sistema verificando a distribuição de PSD ao longo do comprimento da corda.

A análise modal do modelo II, usou como exemplo a exploração experimental dos três primeiros modos de oscilação, com $\beta = 0,01$ e $\alpha = 0,2$, em $\tau = 2,5$, deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$ e $N = 32$. Os resultados obtidos estão mostrados na Fig. 5.8.

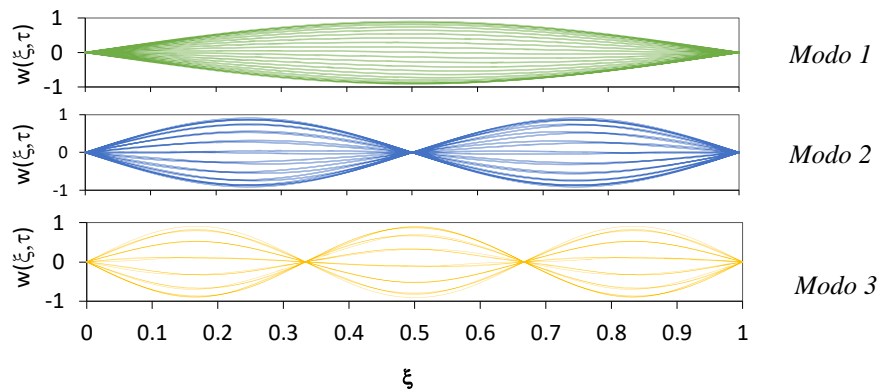


Figura 5.8 – Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo II.

A Fig. 5.8 mostra um leve desequilíbrio na estrutura dos modos vibracionais, provocado pela dependência do sistema em relação à tensão aplicada e à resistência do material da corda. Se a amplitude for constante a intensidade do estímulo influenciará β , tornando a caracterização sistêmica dependente dos efeitos de α . Pelo biengastamento, os pontos nodais nos extremos serão nulos. Por menor que seja o movimento giroscópico, eles afetam as oscilações e comprometem a estabilidade do sistema. Segundo a teoria oscilatória, o período de oscilação do modo fundamental (τ_t), $\beta \in [0,1]$, modifica-se pela inserção do movimento transversal (AMES *et al.*, 1965; MOTE Jr., 1966; BAPAT e SRINIVASAN, 1967), dado por:

$$\tau_t = \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2) + \frac{9}{32} \left(\frac{\pi \omega^*}{\alpha} \right)^2}} \quad (5.1)$$

Sendo ω^* igual a 0,01, os resultados das análises relacionadas a evolução temporal das oscilações do modelo II, Eq. (5.1), estão mostradas no gráfico da Fig. 5.9.

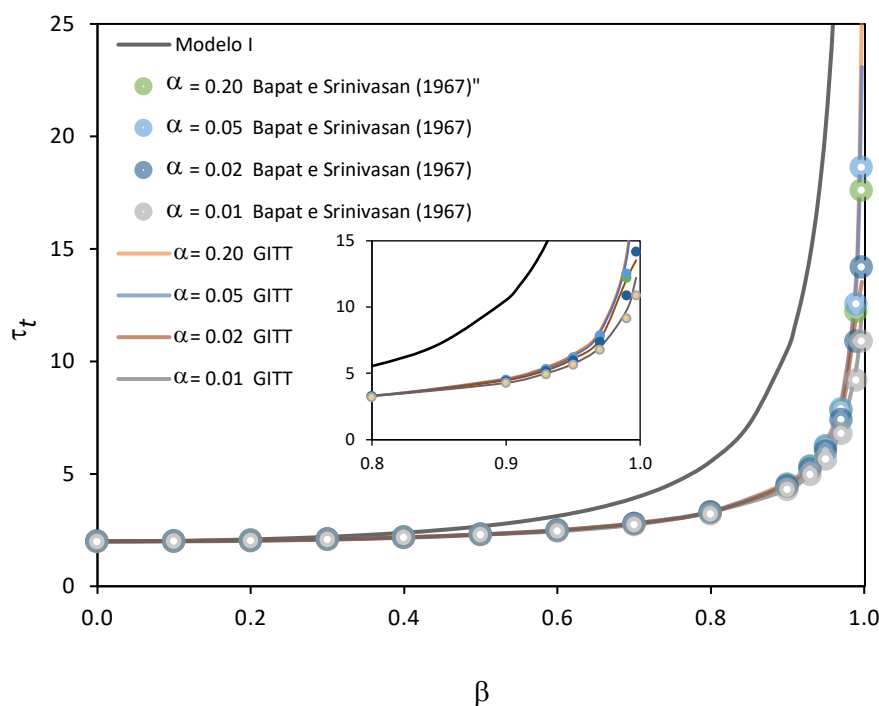


Figura 5.9 – Resultado da análise oscilatória do modelo II e variação de β em função de τ_t .

Na Fig. 5.9, está apresentada a relação frutífera entre α e β em função do período de oscilação na região de equilíbrio operacional ($\beta < 1$). É perceptível no gráfico a influência dos parâmetros β e a rigidez à deformação (α) na região de equilíbrio. Destacando que aumentando β resultará na diminuição de τ_t e da amplitude até alcançar o limite da deflexão ($\beta = 1$).

É importante notar que a eficácia dessa dinâmica pode variar conforme a rigidez à deformação axial (α) do material. Isso fica evidente ao observar o comportamento da curva do Modelo I, inserida no gráfico para efeito de comparação, já que esse modelo não leva em consideração o parâmetro (α) em sua equação. Como resultado, o ponto de transição da linearidade do modelo II é menor.

A comparação dos resultados de BAPAT e SRINIVASAN (1967) e da GITT, revela uma concordância satisfatória, destacando a representatividade aprimorada pela GITT evidenciado nas curvas resultantes. Isso sugere que o uso da sistemática empregada oferece resultados mais precisos do comportamento desse modelo. É fundamental considerar que a escolha do modelo pode variar dependendo das características específicas do sistema e dos objetivos da análise.

5.2.3 – Análise da convergência do modelo III

A análise da convergência seguirá a mesma metodologia adotada nos modelos anteriores. Com velocidade de transporte adimensional $\beta \in [1,5, 2,5]$ e frequência angular adimensional $\gamma \in [0, 0,5]$ (PAKDEMIRLI *et al.*, 1994; ZEN e MÜFTÜ, 2005 e 2006).

A verificação da convergência requer simulações no deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$ em função da coordenada longitudinal (ξ), analisando a dinâmica oscilatória do sistema em três combinações de valores da velocidade de transporte adimensional β e γ : $\beta = 0,01, 0,5$ e $0,8$, e $\gamma = 0,01, 0,3$ e $0,5$. Essas simulações foram realizadas para $N = 4, 8, 16, 32$ e 64 em $\tau = 2,5$. Os resultados estão representados graficamente na Fig. 5.10.

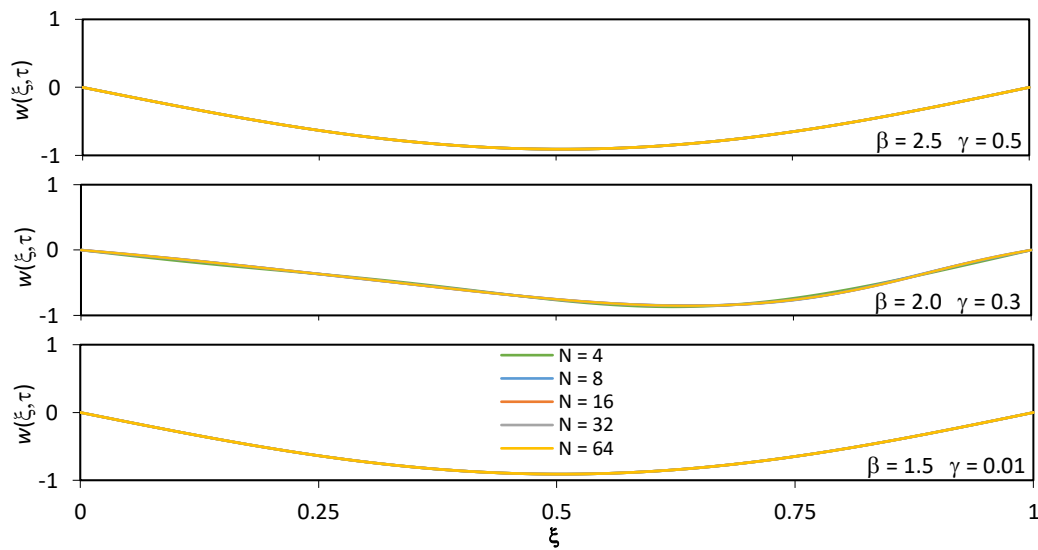


Figura 5.10 – Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo III.

De acordo com o critério adotado, o número mínimo de termos viável para o modelo segundo a expansão das autofunções é $N \geq 8$, considerado seguro e consistente à análise numérica. Os resultados apresentados mostram que com o crescimento de β e γ o deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$ se mantém e a intensidade da propagação das deformações não parecem ser notadas mesmo com grandes velocidades.

A avaliação da estabilidade numérica da solução da EDO para os campos transformados, é fundamental para garantir a qualidade e confiança dos resultados e sua representatividade. A Fig. 5.11 apresenta os gráficos da verificação da estabilidade numérica do modelo III, para o

deslocamento lateral $w(\xi, \tau) \times 10^2$ em função de τ e f , considerando $\beta = 2$, $\gamma = 0,01$, em cinco pontos igualmente espaçados ao longo da coordenada ξ simulado para $N = 32$.

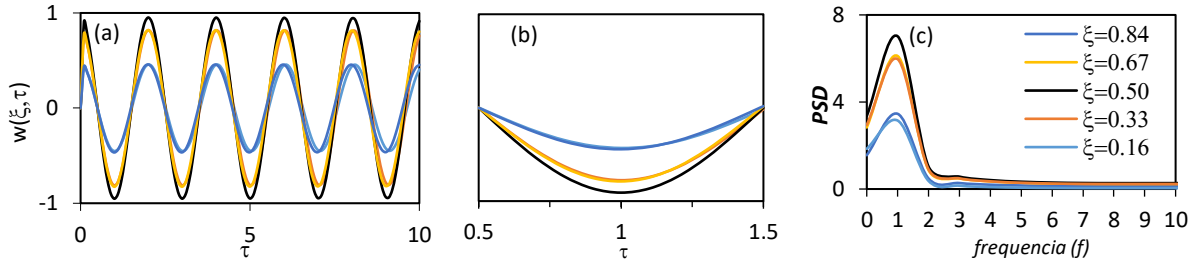


Figura 5.11 – Resultados da verificação da estabilidade do modelo III.

Na Fig. 5.11, destacam-se a evolução temporal da solução em cinco diferentes posições. Sendo em 5.11(a) a evolução temporal da solução e 5.11(b) a estabilidade numérica dos resultados. Em 5.11(c) o espectro de potência e a distribuição da energia no domínio da frequência (f) sendo menor que nos modelos anteriores, devido a pouca resistência oferecida pelas polias (PHAM e HONG, 2020).

Variações na rigidez podem afetar diretamente a amplitude e a frequência das vibrações, resultando em oscilações que demanda baixa energia para oscilar, o que poderia ser insuficiente para causar danos às polias (PAKDEMIRLI *et al.*, 1994). Os resultados da análise modal do modelo III, usou como exemplo exploratório experimental os três primeiros modos de oscilação, com $\beta = 0,01$ e $\gamma = 0,01$, em $\tau = 2,5$, deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$ e $N = 32$. Os resultados obtidos estão na Fig. 5.12.

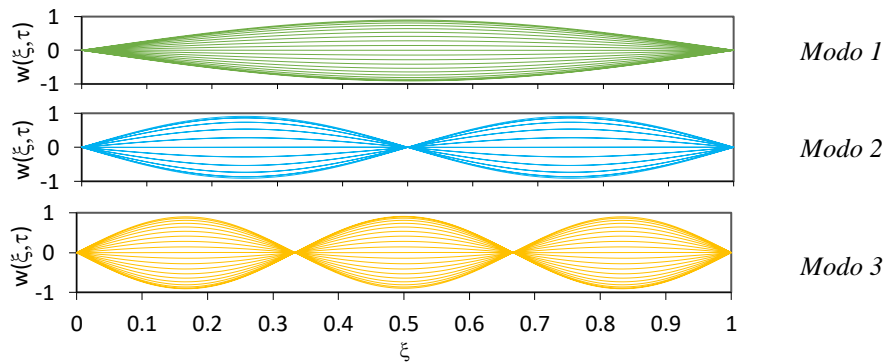
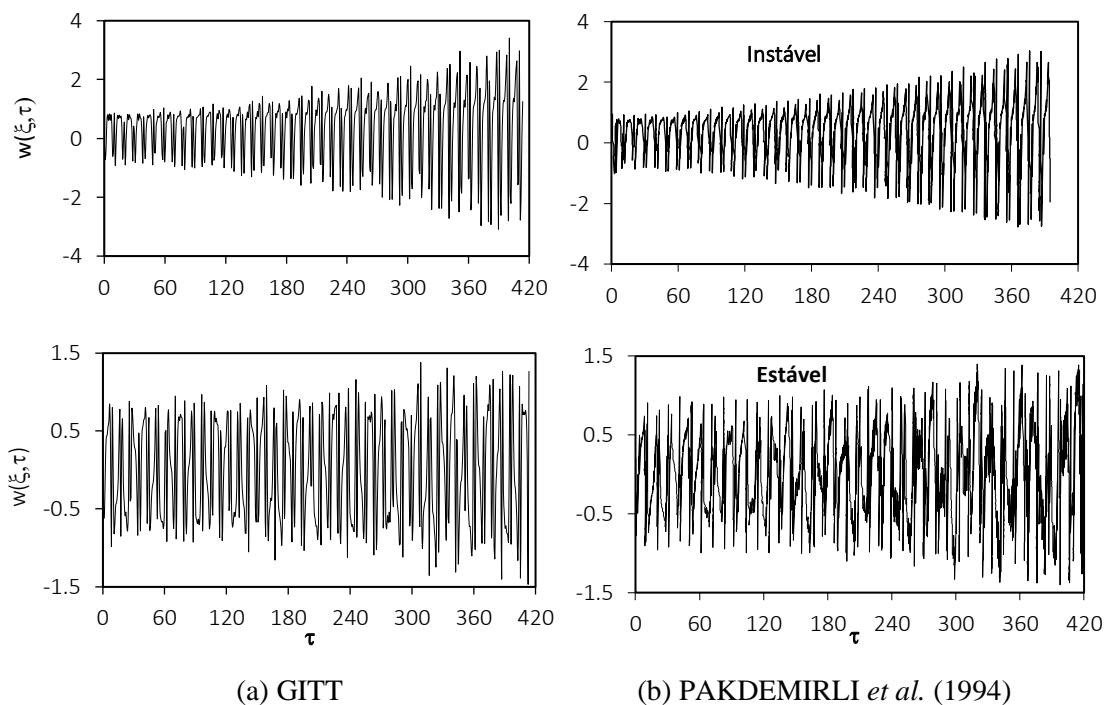


Figura 5.12 – Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo III.

A representação dos modos vibracionais da Fig. 5.12 revela que as oscilações observadas estão todas dentro das amplitudes máximas obtidas. Eles estão vinculados diretamente a β e γ , relacionados ao conjunto de parâmetros do modelo, as condições vibracionais do sistema e as movimentações e deformações do material. Mesmo os apoios sendo móveis (polias), eles são tratados no modelo como biengastada, o que implica na anulação da amplitude, velocidade e frequência angular nos contornos.

Nesse modelo apesar da velocidade variar com o tempo, não são identificadas mudanças significativas nos modos de vibração que identifiquem instabilidade do modelo. PAKDEMIRLI *et al.* (1994) observam que a rigidez desempenha um papel significativo na resposta vibratória do sistema, destacando a importância do tensionamento adequado para evitar harmônicos vibracionais indesejados ou ressonâncias que possam afetar o desempenho e a vida útil dele.

Assim é viável uma análise da dinâmica oscilatória do Modelo III, que tem como premissa comparar resultados gráficos obtidos pela GITT com modelos similares. Considerando o movimento oscilatório sempre no ponto médio ($\xi = 0,5$), discretizados na coordenada espacial ξ e temporal (τ), os resultados obtidos estão mostrados na Fig. 5.13.



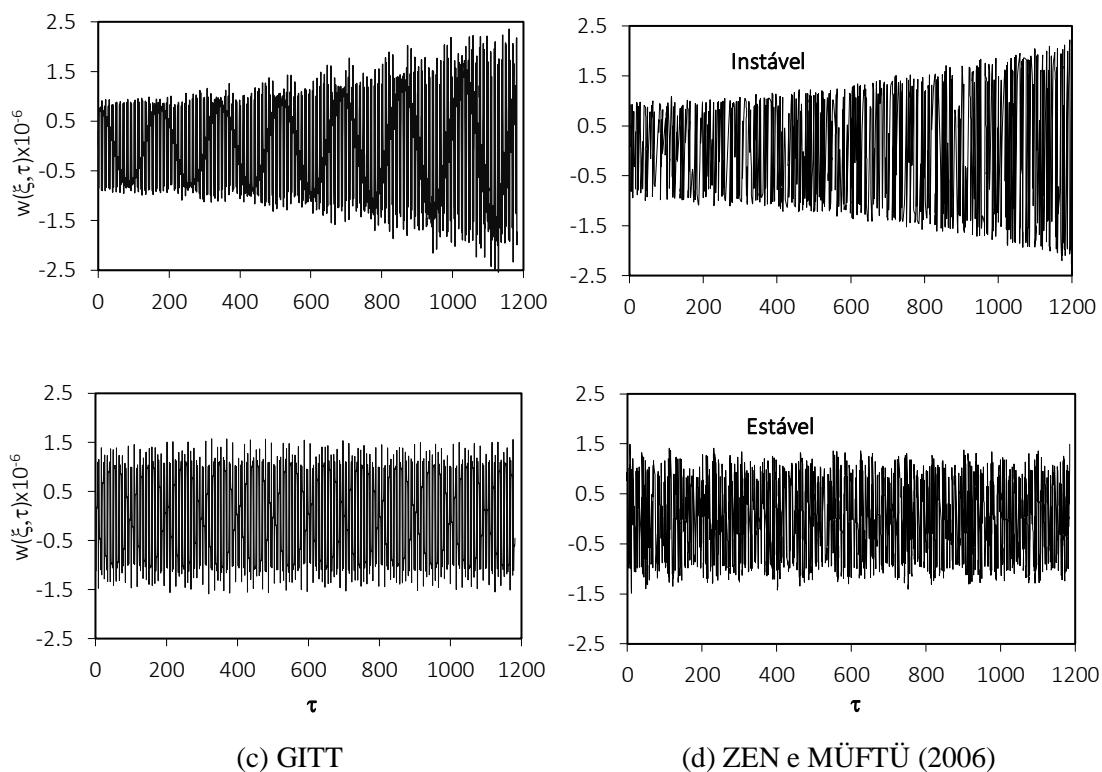


Figura 5.13 – Aferição dos Resultados da dinâmica do modelo III em função de τ .

A Fig. 5.13 permite visualizar a comparação direta dos métodos e a abrangência dos diferentes resultados. A comparação gráfica avalia a aplicabilidade da GITT frente a outros modelos, e qualificado pela Teoria de *Floquet* segundo PAKDEMIRLI *et al.* (1994), será *estável* se o gráfico permanecer constante e *instável* se aumentar continuamente a amplitude.

Na discretização do tempo ($t \rightarrow \tau$) foi considerado na desobstrução do adensamento dos resultados e o número de termos do problema, estabelecidos com o melhor valor no viés comportamental do modelo, ou seja, os modelos testados tomaram como base os dados operacionais e reais propostos nos artigos utilizados.

Em PAKDEMIRLI *et al.* (1994) é analisado o movimento de uma serra fita operando a velocidade variável $V(t)$. Para solucionar as equações diferenciais e observar a instabilidade operacional do sistema foi usado o método de *Galerkin*. O deslocamento generalizado é feito por uma *matriz monodrômica* criada pela teoria de *Floquet* para vários valores de N .

A semelhança comportamental da *Instabilidade* entre a GITT e PAKDEMIRLI *et al.* (1994) ocorreu com $\beta = 2,115$ e $\gamma = 0,322$ e a *Estabilidade* com $\beta = 2,069$ e $\gamma = 0,357$. O modelo de ZEN e MÜFTÜ (2006), utiliza o *princípio de Hamilton* e discretiza o espaço com o método dos elementos finitos (MEF) para fugir do uso de uma única função para aproximar L . A análise

da estabilidade desse sistema, foi feita usando os autovalores da matriz *monodrômica*. A *Instabilidade* ocorreu com $\beta = 1,839$ e $\gamma = 0,306$ e a *Estabilidade* com $\beta = 2,161$ e $\gamma = 0,374$.

5.2.4 – Análise da convergência do modelo IV

A análise da convergência seguirá a mesma metodologia adotada nos modelos anteriores. Com velocidade de transporte adimensional $\beta \in [0,01, 0,5]$, frequência angular $\gamma \in [0,01, 5]$, rigidez da mola $\kappa \in [0,5]$, fator de amortecimento $\delta \in [0,3]$ e força de excitação externa $F_0 \in [0,01, 2]$ (ZHANG e CHEN, 2016; PHAM e HONG, 2020).

A verificação da convergência requer simulações do deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$ em função da coordenada longitudinal (ξ), analisando a dinâmica do sistema para três combinações de valores de β , γ , κ , δ e F_0 : $\beta = 0,01, 0,3$ e $0,5$, $\gamma = 0,01, 3$ e 5 , $\kappa = 0, 2$ e 3 , $\delta = 0, 2$ e 3 , e $F_0 = 0,01, 0,05$ e 2 . Essas simulações foram realizadas para $N = 4, 8, 16, 32$ e 64 em $\tau = 1$. Os resultados estão representados graficamente na Fig. 5.14.

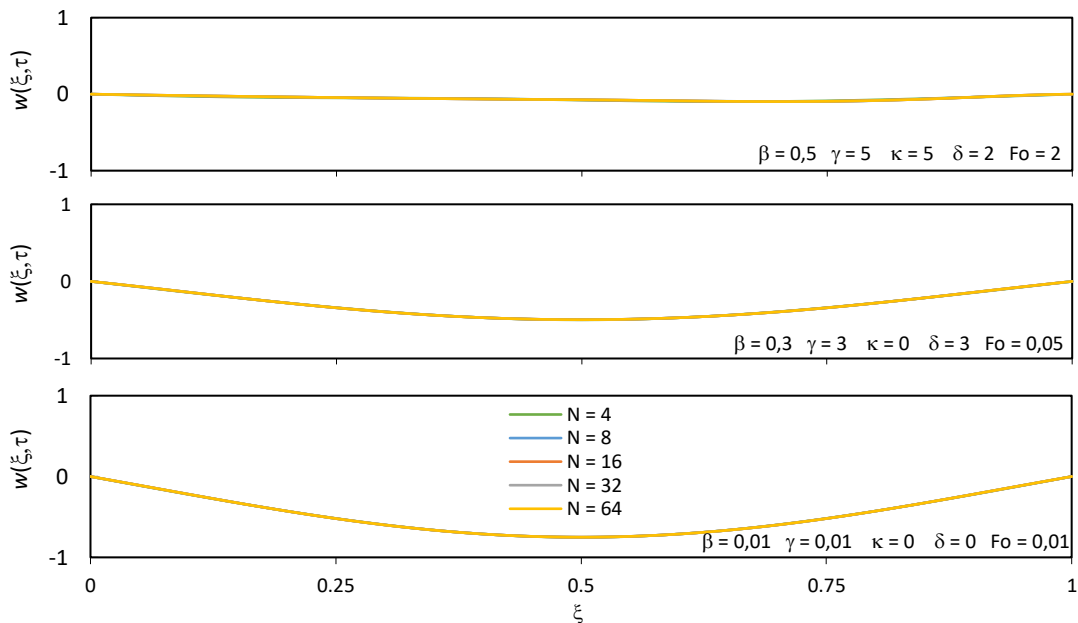


Figura 5.14 – Resultados numéricos da avaliação da convergência do modelo IV.

Conforme o critério adotado, o número mínimo de termos considerado seguro e consistente para a análise numérica do modelo será $N \geq 8$. Segundo a expansão das autofunções e de $w(\xi, \tau) \times 10^2$, a avaliação da estabilidade da EDO nos campos transformados garante a qualidade dos resultados e uma representatividade confiável do sistema em questão.

Os resultados apresentados mostram que, para o perfil homogêneo de excitação harmônica $F(\xi, \tau) = F_0 \cos(\gamma\tau)$. Por questão de modelagem, κ e $\delta = 0$, e por idealização da falta de rigidez ou amortecimento da corda, os valores de β e F_0 são iguais a 0,01 para manter as características harmônicas e preservar a equação do modelo. Segundo ZHANG e CHEN (2016) a rigidez da corda (κ) está relacionada à sua capacidade de resistir à deformação da força aplicada (F_0). Quanto maior a rigidez menos a corda se deforma sob tensão (T) (gráfico superior). Já o amortecimento (δ) é a dissipação da energia vibracional (gráfico do meio). Eles destacam que o equilíbrio entre κ e δ , com bom desempenho vibratório e amortecimentos adequados produz uma oscilação controlada e sustentada (gráfico inferior).

A avaliação da estabilidade numérica da solução da EDO para os campos transformados, é fundamental para garantir a qualidade e confiança dos resultados e sua representatividade. A Fig. 5.15 apresenta os gráficos da verificação da estabilidade numérica do modelo IV, para o deslocamento lateral $w(\xi, \tau) \times 10^2$ em função de τ e f , para $\beta = 0,5$, $\gamma = 5$, $\kappa = 0$, $\delta = 3$, $F_0 = 0,05$, em cinco pontos igualmente espaçados ao longo da coordenada ξ simulado em $N = 32$.

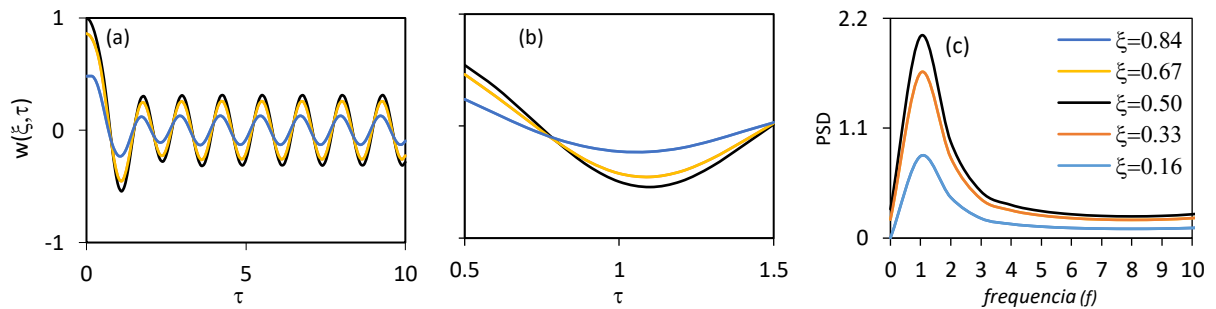


Figura 5.15 – Resultados da verificação da estabilidade do modelo IV.

Assim como nos outros modelos, os gráficos da Fig. 5.15(a) mostra a resposta do sistema no domínio de (τ) para as cinco posições longitudinais. Verifica-se que no início a amplitude é elevada devido a resposta livre, mas se estabiliza e mantém uniformemente o desempenho e estabilidade numérica vista na Fig. 5.15(b), com uma resposta oscilatória suave. Na Fig. 5.15(c) estão as densidades espectrais de potência dos resultados da Fig. 5.15(b).

A baixa magnitude do pico PSD mostra que a excitação externa não causará nocividade grave ao sistema mediante o efeito do amortecimento, que manterá o equilíbrio e os movimentos giroscópicos compensados pelas molas (k).

Os resultados da análise modal do modelo IV, usou como exemplo a exploração experimental dos três primeiros modos de oscilação, com $\beta = 0,01$, $\gamma = 2$, $k = 1$, $\delta = 1$ e $F_0 = 0,05$, em $\tau = 1$, deslocamento transversal $w(\xi, \tau) \times 10^2$ e $N = 32$. Os resultados obtidos estão mostrados na Fig. 5.16.

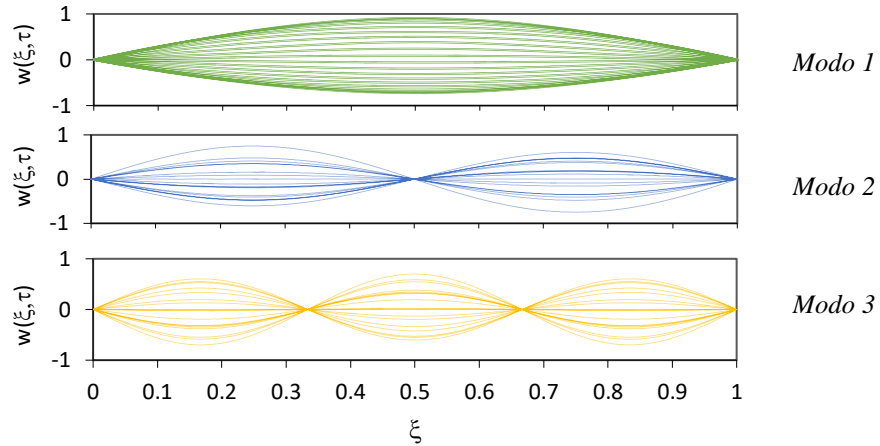


Figura 5.16 – Perfis vibracionais do 1º, 2º e 3º modos de oscilação do modelo IV.

Os modos vibracionais mostrados na Fig. 5.16, representam as fases de equilíbrio oscilatórios em função dos valores estabelecidos para os parâmetros do modelo avaliado, ou seja, todas as vibrações são aceitas desde que estejam dentro do intervalo de confiança das amplitudes máximas permitidas, conforme os gráficos da Fig. 5.16. O estímulo dado por F_0 foi escolhido de forma a não causar vibrações nocivas as molas e ao amortecimento, mas que pudesse ser representativo.

Devido a um número grande de graus de liberdade, há um desbalanceamento nas oscilações pela presença do sistema de amortecimento. Surgem movimentos giroscópicos apreciáveis que dificultam a resolução analítica da EDO desse modelo. Assim, dois testes de comparação entre os valores foram realizados com intuito de aprimorar os resultados.

O primeiro de teste de comparação, admite uma excitação harmônica externa uniforme dada pela expressão: $F(\xi, \tau) = F_0 \cos(\omega\tau)$, e um deslocamento inicial de amplitude $a_0 = 0,01$. Os resultados estão ilustrados nos gráficos da Fig. 5.17, sendo obtidos para os valores dos parâmetros $\kappa = 3,26$, $\delta = 1$, $\beta = 0,3$, $\omega = 3$, $F_0 = 0,03$ e $N = 32$.

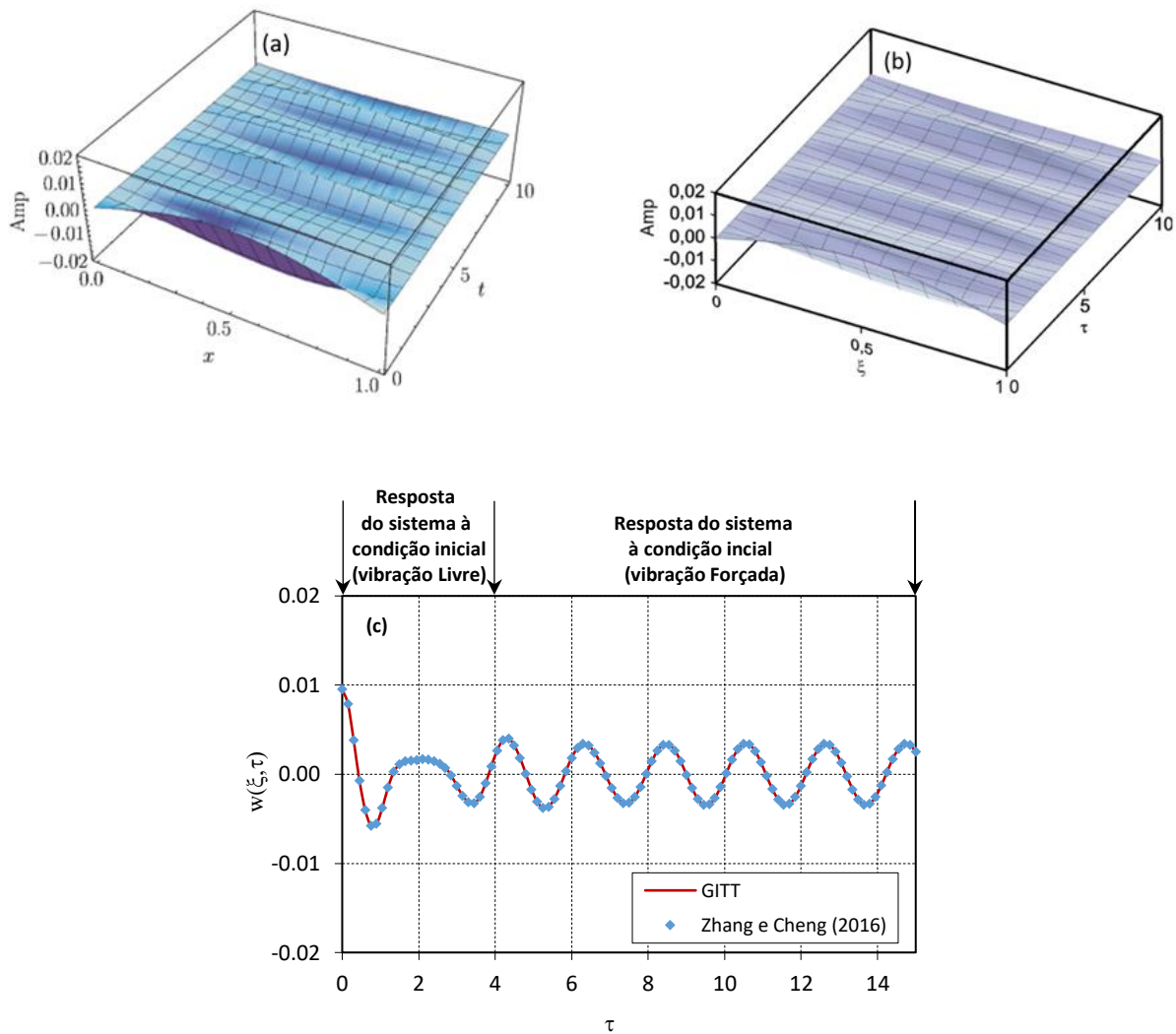


Figura 5.17 – Resposta harmônica à vibração forçada em função de $w(\xi, \tau)$.

Os resultados relatados em 5.17(b), estão em boa concordância com os de ZHANG e CHEN (2016) em 5.17(a), com ξ correspondendo a x e τ a t , representando a resposta forçada e amortecida do sistema quando $\xi = 0,6$. Nota-se em 5.17(c) que, a frequência da resposta forçada em estado estacionário é idêntica à frequência de excitação esperada.

A Fig. 5.18 mostra os resultados da GITT para a resposta forçada em função de ξ e τ , para os parâmetros: $\kappa = 0$, $\delta = 0$, $\beta = 0,3$, $\omega = 3$, $F_0 = 0,01$, $a_0 = 0$ e $N=32$. Os resultados de ZHANG e CHEN (2016) são apresentados como pontos azuis em 5.18(c) e os valores obtidos pela GITT como uma função contínua. Mostrando que o deslocamento transversal em $w(0,6;\tau)$ possuem excelente combinação.

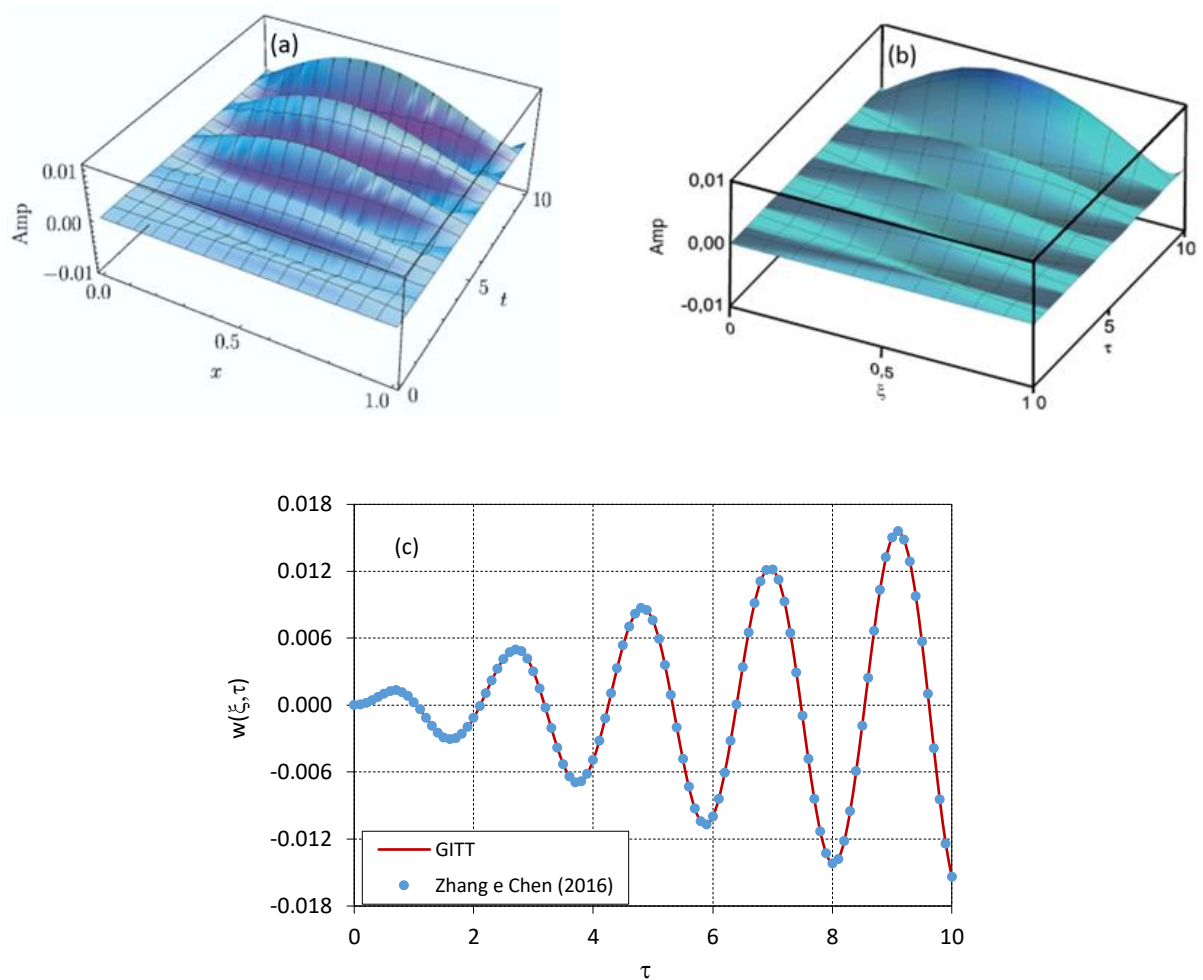


Figura 5.18 – Resposta do sistema à vibração forçada em função de $w(\xi, \tau)$.

Os resultados da GITT na posição $\xi = 0,6$ relatados em 5.18(b) estão em boa concordância com 5.18(a) conforme ZHANG e CHEN (2016). Nota-se que os resultados da Fig. 5.18(c) foram obtidos para amortecimento nulo do sistema ($\delta = 0$). Assim, a resposta forçada pode ser uma resposta harmônica cuja amplitude lateral cresce de maneira ilimitada com o decorrer do tempo.

No segundo teste de comparação de resultados, são adotados valores para os parâmetros: $\kappa = 0$, $\delta = 1$, $\beta = 0,3$, $\omega = 3$, $F_0 = 0$, $A_0 = 0,01$ e $N = 32$. Os resultados da GITT e os de ZHANG e CHEN (2016) para $w(\xi, \tau)$ são mostrados no gráfico da Fig. 5.19.

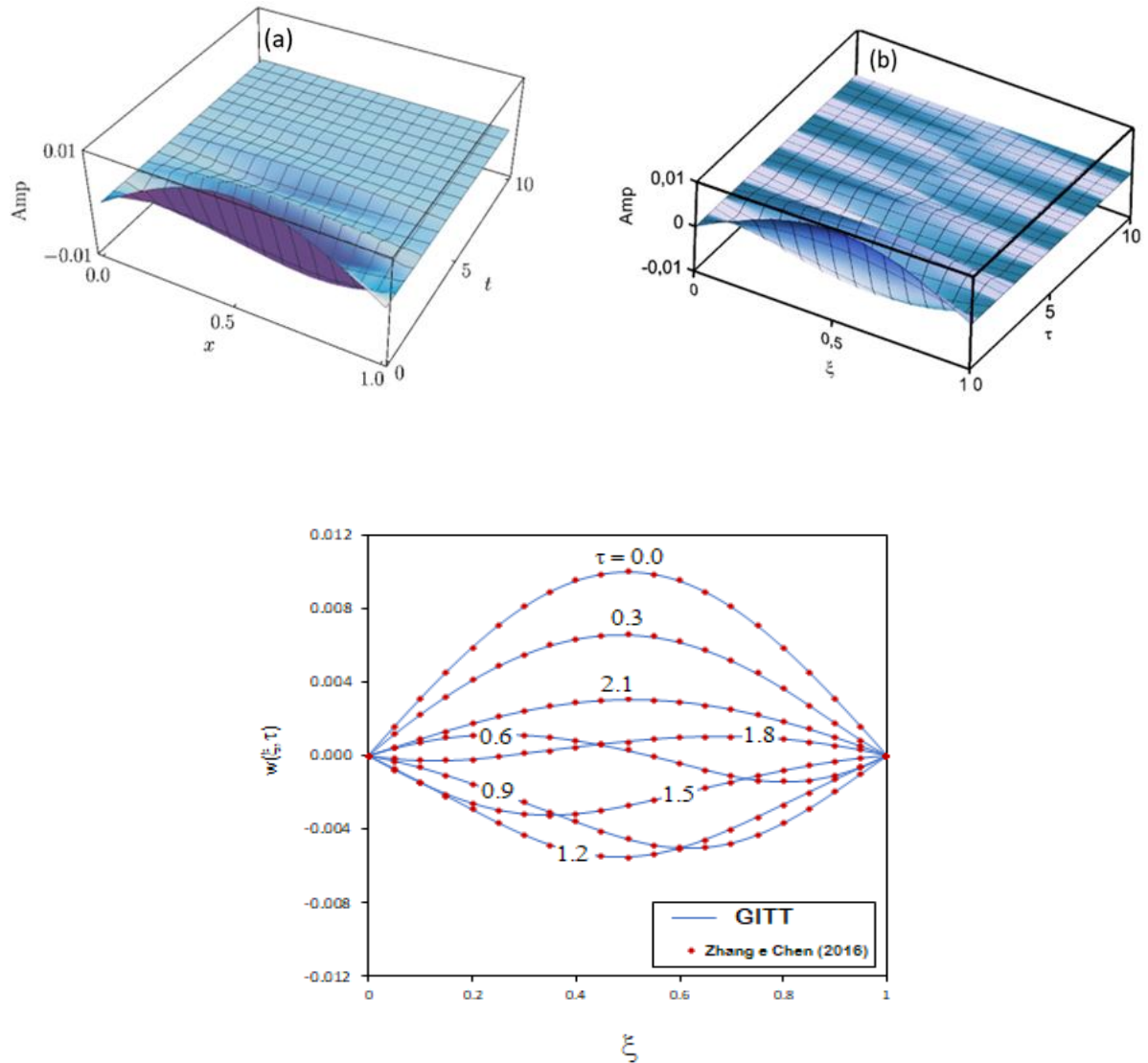


Figura 5.19 – Resultados da avaliação da convergência para vibração livre em função de diferentes valores de τ .

Na Fig. 5.19(a), (b) e (c), os resultados do GITT para a resposta da vibração livre coincidem exatamente com os relatados por ZHANG e CHEN (2016). Como nenhuma força de excitação foi aplicada ao sistema, o comportamento da vibração livre em 5.19(a) e 5.19(b) assemelha-se ao observado por CHUNG e KAO (2011). Nesses casos, uma perturbação semi senoidal com amplitude inicial $a_0 = 0,01$ é gradualmente reduzida devido ao amortecimento à medida que o tempo aumenta, indicando que o sistema atingiu o máximo ou a criticalidade.

5.3 – AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS DOS MODELOS DE CORDAS

5.3.1 – Resultados numéricos do modelo I

Esse modelo pode ser considerado como fundamental, uma vez que na equação geral a velocidade axial é unitária, e os efeitos relacionados à aceleração, rigidez, amortecimento e excitação são desprezados. A expressão que o descreve tem a forma:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \bar{w}(\tau)}{d\tau^2} + \mathbf{G} \frac{d\bar{w}(\tau)}{d\tau} + \mathbf{C} \bar{w}(\tau) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Nesse modelo, a análise da frequência (ω) em função da velocidade de transporte ($\beta=V/C$) é realizada considerando o período transversal de oscilação (τ_n), um pulso iniciado em um contorno que irá até o outro contorno retornando para o contorno original logo em seguida (AMES *et al.*, 1968; ZWIERS e BRAUN, 2007; MARYNOWSKI e KAPITANIAK, 2014).

$$\tau_n = \frac{L}{C+V} + \frac{L}{C-V} = \frac{2}{(1-\beta^2)} \frac{L}{C} \quad (5.3)$$

A interpretação numérica sobre a dinâmica desse modelo, foi feita através da Eq. (5.3) no intervalo $\tau_n \in [-\infty, +\infty]$, resultando em um perfil oscilatório característico no intervalo, $\beta \in [\pm 1]$. De acordo com AMES *et al.* (1968), essas raízes são iguais a $\frac{1}{(1 \pm \beta)}$, correspondendo às fases da onda, que estabelece um período fundamental da oscilação (τ_f) igual a:

$$\tau_f = \frac{2}{(1-\beta^2)} \quad (5.4)$$

Os resultados obtidos utilizando as Eqs. (5.2) e (5.4), considerando o intervalo da velocidade de transporte adimensional $0 < \beta < 1$. Estão mostrados no gráfico da Fig. 5.20.

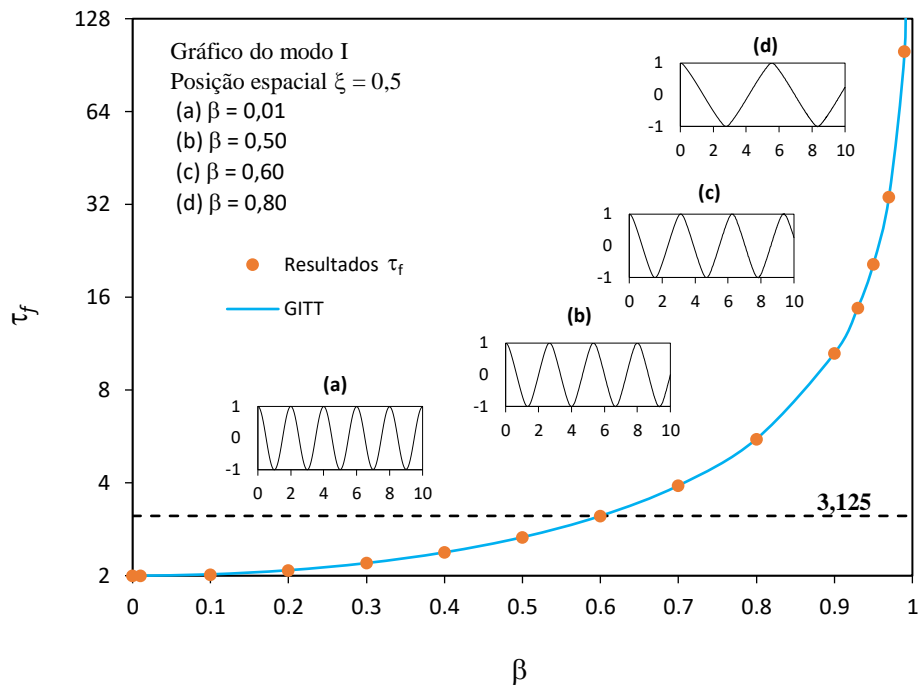


Figura 5.20 – Resultado das oscilações do período fundamental (τ_f) em função de β .

Na Fig. 5.20, o período fundamental (τ_f) cresce proporcional a $\beta \in [0,1]$ em direção a assíntota da curva ($\beta = 1$). Observa-se um aumento suave da curva em $3 < \tau_f < 4$, até o ponto de inflexão 0,6 sinalizando um perfil linear no modelo, característico para pequenos valores de β . O ponto de inflexão obtido por meio do método de *Newton-Raphson*, representado pela linha tracejada e correspondente ao controle da velocidade de oscilação (AMES *et al.*, 1968).

A medida que (β) aumenta a frequência das oscilações diminui, como observado nos gráficos (a), (b), (c) e (d) determinadas pela GITT. Por exemplo, se $\beta = 0,80$, próximo ao limite da velocidade de processo (assíntota), a frequência de oscilação diminui, resultando em uma redução nas vibrações. Isso faz com que a frequência natural do sistema dependa essencialmente de β . Quando $\beta \approx 1$, a frequência de excitação se torna muito grande, fazendo a equação do modelo não responde corretamente às perturbações e o sistema torna-se caótico, sem controle. Isso levar a corda a ficar próxima à tensão de ruptura tornando os movimentos de coriolis, torsionais e laterais predominantes.

O fator de frequência natural para o modo de oscilação original pode ser expresso por: $f_1=C/2L$ (MOTE Jr., 1966; AMES *et al.*, 1968; WICKERT e MOTE Jr., 1990), resultando na frequência natural de oscilação dada por:

$$f_n = \frac{(1-\beta^2)}{2} \frac{C}{L} = f_1 (1-\beta^2) \quad (5.5)$$

Considerando que a corda esteja em estado estacionário, a frequência natural de oscilação ser $\omega_n = n \omega_1$, dessa forma, a frequência natural exata para todos os modos de oscilação será dada por:

$$\omega_n = n\pi (1-\beta^2), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

A determinação de ω_n para o deslocamento transversal considerando a Eq. (5.4) (JOHNSON *et al.*, 1986; WICKERT e MOTE Jr., 1990; VAN HORSSSEN, 2003; VAN HORSSSEN e PONOMAREVA, 2005; ZWIERS e BRAUN, 2007; PAÏDOUSSIS, 2014), fará parte da seguinte solução transformada:

$$\bar{w}_n(\tau) = a_n e^{i\omega\tau}, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad \text{sendo } i = \sqrt{-1} \quad (5.7)$$

Sendo $a_n = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]^T$ o vetor amplitude dos deslocamentos. Substituindo a Eq. (5.7) na Eq. (5.3), resulta na equação característica das autofrequências naturais (ω_n) para $w(\xi, \tau)$ nos modos de oscilação do modelo I em função de (β), dada por:

$$-\omega_n^2 \mathbf{M} + i\omega_n \mathbf{G} + \mathbf{C} = 0 \quad \therefore i = \sqrt{-1} \quad (5.8)$$

A Eq. (5.8) toma como base os conceitos de sistemas lineares de dimensão $2N$ de coeficientes variáveis como nas equações de *Mathieu-Hill*. A solução dessa equação contém os autovalores (λ) iguais as autofrequências naturais (ω_n) (SINHA e BUTCHER, 1997; WANG e HALE, 2001; ZEN e MÜFTÜ, 2006; ZWIERS e BRAUN, 2007; RAO, 2007; RAVINDRA *et al.*, 2010; LAD e KARTIK, 2015). Para a formulação do espaço-estado, o vetor $\bar{X}(\tau)$ de potenciais transformados é definido por:

$$\bar{X}_{1i} = \bar{w}_i, \quad \bar{X}_{2i} = \dot{\bar{w}}_i \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.9)$$

A correspondente transformação da ordem do sistema, é reescrita da seguinte maneira:

$$\dot{\bar{\mathbf{X}}}(\tau) = \mathbf{A}(\tau) \bar{\mathbf{X}}(\tau) \quad (5.10)$$

Porém, as matrizes e vetores de estado envolvidos na Eq. (5.10), terão a configuração:

$$\bar{\mathbf{X}}(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix}_{2N}, \quad \mathbf{A}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}(\tau) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}(\tau) \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad (5.11)$$

A Eq. (5.11) representa o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, sendo $\mathbf{A}(\tau)$ uma matriz T periódica, com solução sujeita a condição inicial $\bar{\mathbf{X}}(0) = \bar{\mathbf{X}}_0$, sendo decomposta na matriz diagonal dos autovalores Λ , dos autovetores ϕ e sua inversa ϕ^{-1} , com $\mathbf{A} = \phi \Lambda \phi^{-1}$. Dessa forma, a solução será tratada como um problema algébrico de autovetores $\bar{\phi}_i$ nas colunas da matriz ϕ relacionados aos respectivos autovalores λ_i da matriz Λ , $i = 1, \dots, 2N$. Os autovalores e autovetores podem ser reais, complexos ou conjugados complexos, constituindo os autovalores da matriz Λ como as próprias autofrequências do sistema, dados por:

$$(\mathbf{A} - \omega_{ni} \mathbf{I}) \bar{\phi}_i = 0 \quad (5.12)$$

O processo de cálculo dos autovalores correspondentes às autofrequências da Eq. (5.12) utilizará a sub-rotina DGVLRG da IMSL Library, implementada no programa em Fortran-95 da Absoft Tools (2013). Essa sub-rotina emprega a técnica da GITT desenvolvida para determinar as vibrações da corda homogênea tratada nesse modelo. Ela utiliza o algoritmo QZ para transformar a matriz problema em uma matriz de *Hessenberg* e outra triangular, preparando-as para o método de *Francis*, que é o mais apropriado para esse tipo de problema oscilatório (IMSL, 2003).

A resposta dinâmica exata da movimentação da corda em relação à frequência angular, para os cinco modos de oscilação nas diferentes regiões de estabilidade com $\beta \in [0,1]$, conforme a Eq. (5.6), obtida com a Eq. (5.12) implementada pela GITT, está mostrada na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Frequência natural para cinco modos de oscilação com solução exata e GITT em função da velocidade (β).

β	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4		ω_5	
	Exata	GITT	Exata	GITT	Exata	GITT	Exata	GITT	Exata	GITT
0.00	3.1416	3.1416	6.2832	6.2832	9.4248	9.4248	12.5664	12.5664	15.7080	15.7080
0.01	3.1413	3.1413	6.2826	6.2826	9.4238	9.4238	12.5651	12.5651	15.7064	15.7064
0.10	3.1102	3.1102	6.2204	6.2205	9.3305	9.3309	12.4407	12.4420	15.5509	15.5539
0.20	3.0159	3.0160	6.0319	6.0324	9.0478	9.0497	12.0637	12.0678	15.0796	15.0932
0.30	2.8588	2.8590	5.7177	5.7187	8.5765	8.5810	11.4354	11.4449	14.2942	14.3173
0.40	2.6389	2.6391	5.2779	5.2793	7.9168	7.9237	10.5558	10.5755	13.1947	13.2312
0.50	2.3562	2.3565	4.7124	4.7144	7.0686	7.0769	9.4248	9.4538	11.7810	11.8570
0.60	2.0106	2.0110	4.0212	4.0239	6.0319	6.0413	8.0425	8.0724	10.0531	10.1535
0.70	1.6022	1.6026	3.2044	3.2077	4.8066	4.8179	6.4088	6.4390	8.0111	8.0949
0.80	1.1310	1.1314	2.2619	2.2653	3.3929	3.4055	4.5239	4.5609	5.6549	5.7753
0.90	0.5969	0.5972	1.1938	1.1961	1.7907	1.8002	2.3876	2.4198	2.9845	3.2293
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Na acima à medida que β aumenta a frequência angular diminui para todos os modos de oscilação (ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 e ω_5), isso é causado pelo atraso na velocidade característica e um aumento da velocidade do pulso. Nas frequências ω_1 e ω_2 , a diferença é devido às vibrações provocarem pouca interferência na velocidade do pulso. No entanto, em ω_3 as diferenças surgem devido às autofrequências interferirem na energia da oscilação, especialmente em valores elevados de β . Elas passam a ser mais notadas quando ω_4 e ω_5 , devido a quantidade de energia necessária para movimentos em períodos curtos.

A substituição dos valores (β) na Eq. (5.6), fornece as autofrequências (ω_n) dos cinco modos de oscilações pela GITT. Sendo $\beta \in [0,1]$ com $N = 32$, conforme o gráfico da Fig. 5.21.

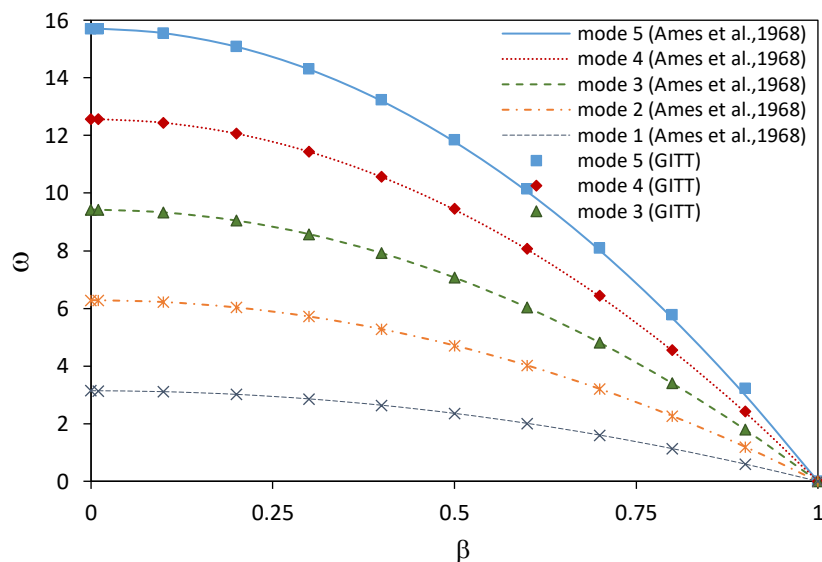


Figura 5.21 – Frequência natural para cinco modos de oscilação.

Na Fig. 5.21 os símbolos vazados representam os resultados das autofrequências obtidos com a GITT, enquanto as linhas representam os resultados de AMES *et al.* (1968). A partir dos máximos periódicos: π , 2π , 3π , 4π e 5π , as frequências diminuem em direção a 1, indicando que o modelo I está alinhado aos resultados estabelecidos na literatura referenciada.

5.3.2 – Resultados numéricos do modelo II

Conforme apresentado, neste modelo há a inclusão do termo referente à deformação longitudinal quantificada pelo parâmetro adimensional (α) (WICKERT e MOTE Jr., 1990; PHAM e HONG, 2020). A análise desse termo leva ao entendimento comportamental associado à tensão (T) que promove a modificação na distribuição da frequência das oscilações.

Nesse modelo as oscilações transversais são não-lineares, e os efeitos relacionados à rigidez do suporte viscoelástico, a deflexão do material e a variação da velocidade são desprezados. Assim, a equação que descreve o modelo II é descrita por:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \bar{w}(\tau)}{d\tau^2} + \mathbf{G} \frac{d\bar{w}(\tau)}{d\tau} + (\mathbf{C} + \mathbf{N}) \bar{w}(\tau) = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

Para melhor compreender a inserção de α no modelo II, três condições foram propostas como exemplo de aplicação: [I] $\alpha = 0,01$ (pequeno), [II] $\alpha = 0,05$ (médio) e [III] $\alpha = 0,20$ (grande). Os resultados obtidos com $\tau \in [0,10]$ para $N = 32$ e $\xi = 0,5$, no primeiro modo de oscilação. Estão apresentados na Fig. 5.22, sendo as condições modeladas em: [I] $\beta = 0$ e $\alpha = 0,01, 0,05$ e $0,20$, [II] $\beta = 0,5$ e $\alpha = 0,01, 0,05$ e $0,20$ e [III] $\beta = 0,8$ e $\alpha = 0,01, 0,05$ e $0,20$.

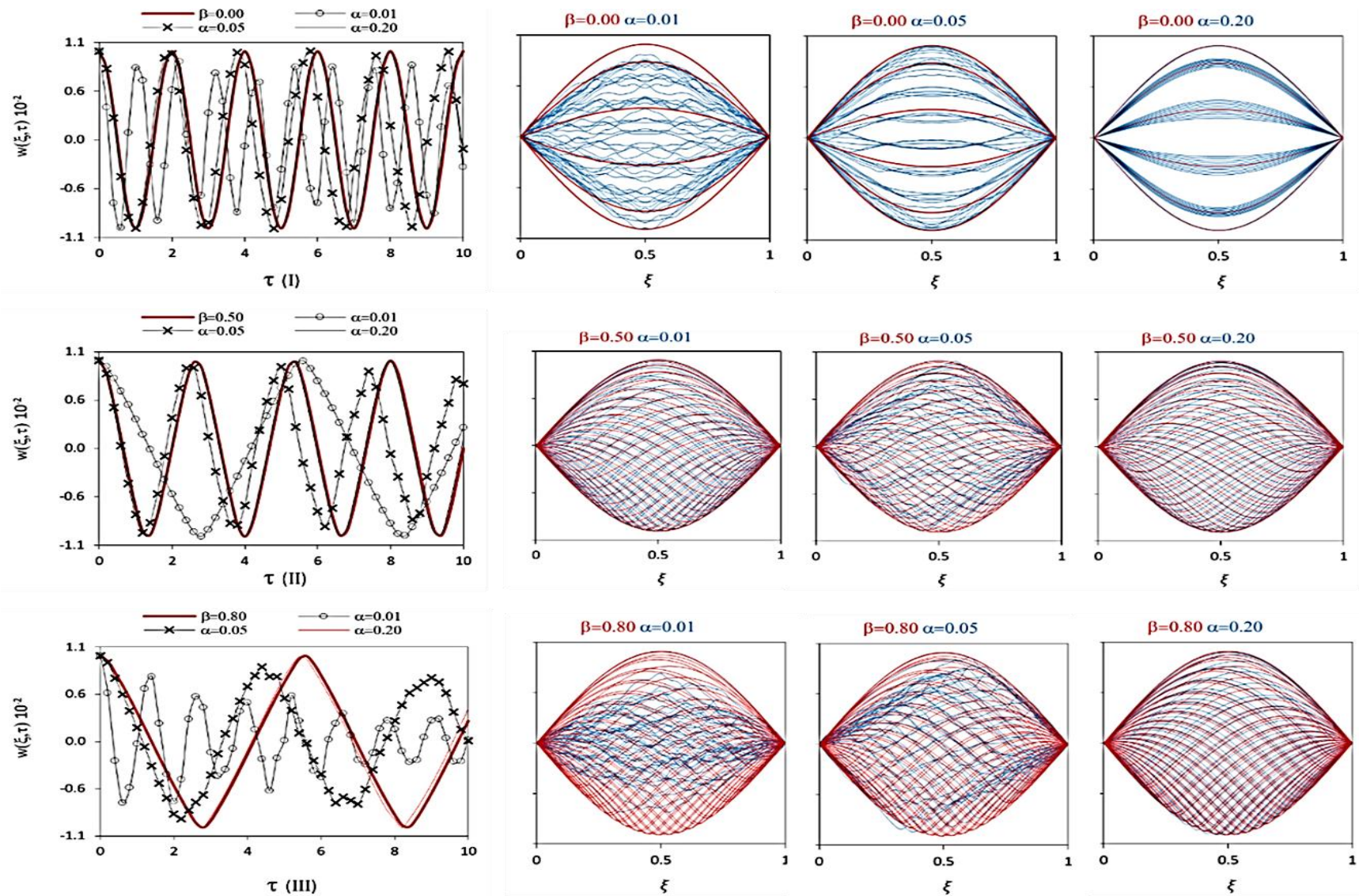


Figura 5.22 – Resultados das oscilações do modelo II no campo do deslocamento transversal $w(\xi, \tau)$ em função de τ e ξ .

Na análise qualitativa dos gráficos da Fig. 5.22. Na condição (I) com $\beta = 0$, observa-se um comportamento semelhante nas oscilações, com uma redução da frequência ao longo do tempo especialmente para $\alpha = 0,01$ e $0,05$. Também é notável uma diferença na amplitude das oscilações e um aumento da frequência quando α é reduzido, devido à baixa tensão, como visto nos gráficos da 2ª coluna.

Na condição (II) com $\beta = 0,50$, não há grandes diferenças nas amplitudes ou nos comportamentos oscilatórios em comparação com a condição (I), embora a frequência diminua, especialmente para $\alpha = 0,01$. No entanto, há uma boa concordância dos comportamentos ao longo do tempo, como evidenciado nos gráficos da 2ª coluna.

Na condição (III) com $\beta = 0,80$, todos os comportamentos oscilatórios são sistematicamente diferentes, resultando em frequências desiguais. À medida que os movimentos diminuem, tornam-se aleatórios, mostrando tendência de movimentos sub amortecidos devido à mudança na tensão.

A intervenção do parâmetro α nos comportamentos oscilatórios é evidente, principalmente em baixas tensões, afetando diretamente a deformação axial da corda. Quando $\alpha = 0,20$, a influência nos movimentos é mínima devido à alta tensão axial ou ao estado de ressonância com as ondas destacadas nos gráficos da 2ª coluna na condição (III).

Para valores de $\beta > 0,50$, observa-se uma tendência a movimentação mais aleatória das vibrações, conforme ilustrado nos gráficos da 1ª coluna. A velocidade é o fator de maior intervenção na tolerância à deformação longitudinalmente dos modos de oscilação da corda.

A análise interferencial das oscilações no Modelo II utilizou uma avaliação estatística do desvio absoluto médio. Descobriu-se que, para valores de $\alpha = 0,01$ e $0,05$, o desvio médio corresponde a cerca de 35% do valor original em relação a β , enquanto para $\alpha = 0,20$, está em torno de 5%. Isso evidencia que em níveis baixos e médios de tensão, a influência da velocidade é significativamente maior do que em tensões elevadas para este modelo.

Uma análise interpretativa e simultânea da contribuição de α e β pela GITT representa a tensão inicial induzida pelo alongamento longitudinal (ϵ) e a velocidade axial de transporte, que influencia as mudanças no período de oscilação. Os estudos de MOTE Jr. (1966), BAPAT e SRINIVASAN (1967) e AMES *et al.* (1968) abordam essa funcionalidade, considerando as seguintes relações:

$$\alpha = \sqrt{\frac{T_0}{AE}} \quad e \quad \beta = \frac{V}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}}, \quad \text{fazendo} \quad \lambda = \frac{V}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha \cdot \beta \quad (5.14)$$

Sendo λ um parâmetro adimensional criado para facilitar a interpretação dos resultados que envolve a contribuição simultânea de α e β ao modelo e representará a velocidade de deformação. Assim sendo, a Eq. (5.14) poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$\tau_I^* = \frac{2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2\right) + 2.8125 \times 10^{-5} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2}} \quad (5.15)$$

O resultado da avaliação simultânea da tensão axial (α) e da velocidade de transporte (β), representado pela resposta da velocidade de transporte (λ), usando a Equação (5.15) para uma tensão uniforme, é ilustrado no perfil gráfico da Fig. 5.23.

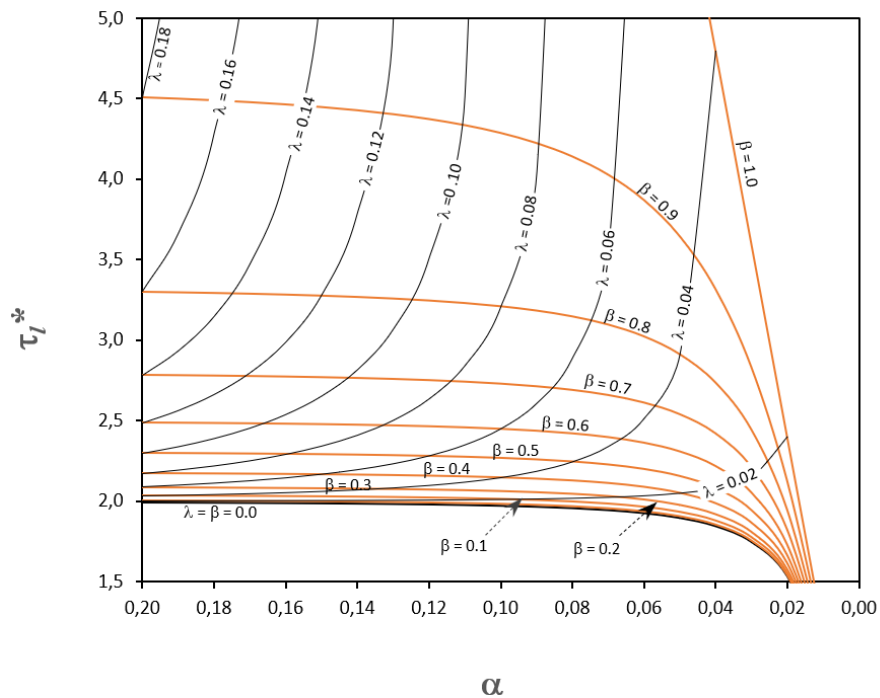


Figura 5.23 – Perfil comportamental dos parâmetros α , β e λ em função τ_I^* .

No gráfico da Fig. 5.23, são mostrados os resultados gráficos de τ_I^* apresentado no trabalho de BAPAT e SRINIVASAN (1967). Todos os valores de λ terminam na linha que representa o limite da velocidade da onda em $\beta = 1$ (assintota). À medida que β aumenta, o período cresce rapidamente, levando o modelo II a assumir seu caráter não linear como resposta comportamental. Esse efeito é mais pronunciado em menores valores de α , quando a tensão da corda diminui e o alongamento é maior.

Também pode-se afirmar que, conforme MOTE Jr. (1966), BAPAT e SRINIVASAN (1967), ao manter λ constante, a tensão (α) e a frequência aumentam. Por outro lado, se a tensão for mantida constante e λ aumentar, a frequência diminui. Em outras palavras, se, para um determinado α , o período (τ) aumentar com β , a frequência diminui mantendo β constante.

Durante cada processo de cálculo, os valores de λ e α são ajustados conforme indicado pelas linhas de β . Se, em um determinado valor de β , a tensão da corda diminuir, a resistência à oscilação também diminuirá e a velocidade da onda será sempre menor ou igual a λ .

5.3.3 – Resultados numéricos do modelo III

Neste modelo, através do comportamento oscilatório de uma estrutura semelhante a uma correia que se move entre duas polias na direção longitudinal (L), com velocidade variável $V(t)$. Buscamos quantificar o impacto das acelerações e desacelerações do sistema durante sua movimentação. Utilizando uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) nos campos transformados expressos por:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \bar{w}(\tau)}{d\tau^2} + \mathbf{G} \frac{d\bar{w}(\tau)}{d\tau} + (\mathbf{C} + \mathbf{H}) \bar{w}(\tau) = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

Reescrevendo a Eq. (5.16) na forma matricial em função das autofrequências naturais (ω_n) para os modos de oscilação avaliados, segundo a proposta de cálculo do modelo I, tem-se:

$$-\omega_n^2 \mathbf{M} + i\omega_n \mathbf{G} + (\mathbf{C} + \mathbf{H}) = 0 \quad \therefore i = \sqrt{-1} \quad (5.17)$$

A equação (5.17) tem como resolução os sistemas lineares de dimensão $2N$ com coeficientes variáveis, onde um sistema de 2^a ordem é reescrito como um sistema de 1^a ordem com coeficientes dependentes do tempo, utilizando a formulação: $\dot{\bar{X}}(\tau) = \mathbf{A}(\tau) \bar{X}(\tau)$, onde o vetor $\bar{X}(\tau)$ e a matriz de transição $\mathbf{A}(\tau)$ são definidas por:

$$\bar{\mathbf{X}}(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix}_{2N}, \quad \mathbf{A}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}(\tau) + \mathbf{H}(\tau)) & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}(\tau) \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad (5.18)$$

A Eq. (5.18) representa a divisão do espaço-estado em órbitas periódicas simples, com ciclos de rotação e vibrações autoexcitados pelos estimulados gerados nas variações oscilatórias

Considerando observar a influência da relação interna entre velocidade de transporte adimensional e frequência angular adimensional ($\beta \times \gamma$) na estabilidade do sistema. A forma definida foi usar a teoria das *Curvas de Lissajous* (MONTEIRO Jr., 2009) para observar os movimentos radiais empregando a dimensão espacial nas possíveis direções dos movimentos oscilatórios, sendo $\beta \in [0,1]$, $\gamma \in [0,1;0,5]$ para $\xi = 0,5$. Os resultados obtidos estão mostrados nos gráficos da Fig. 5.24.

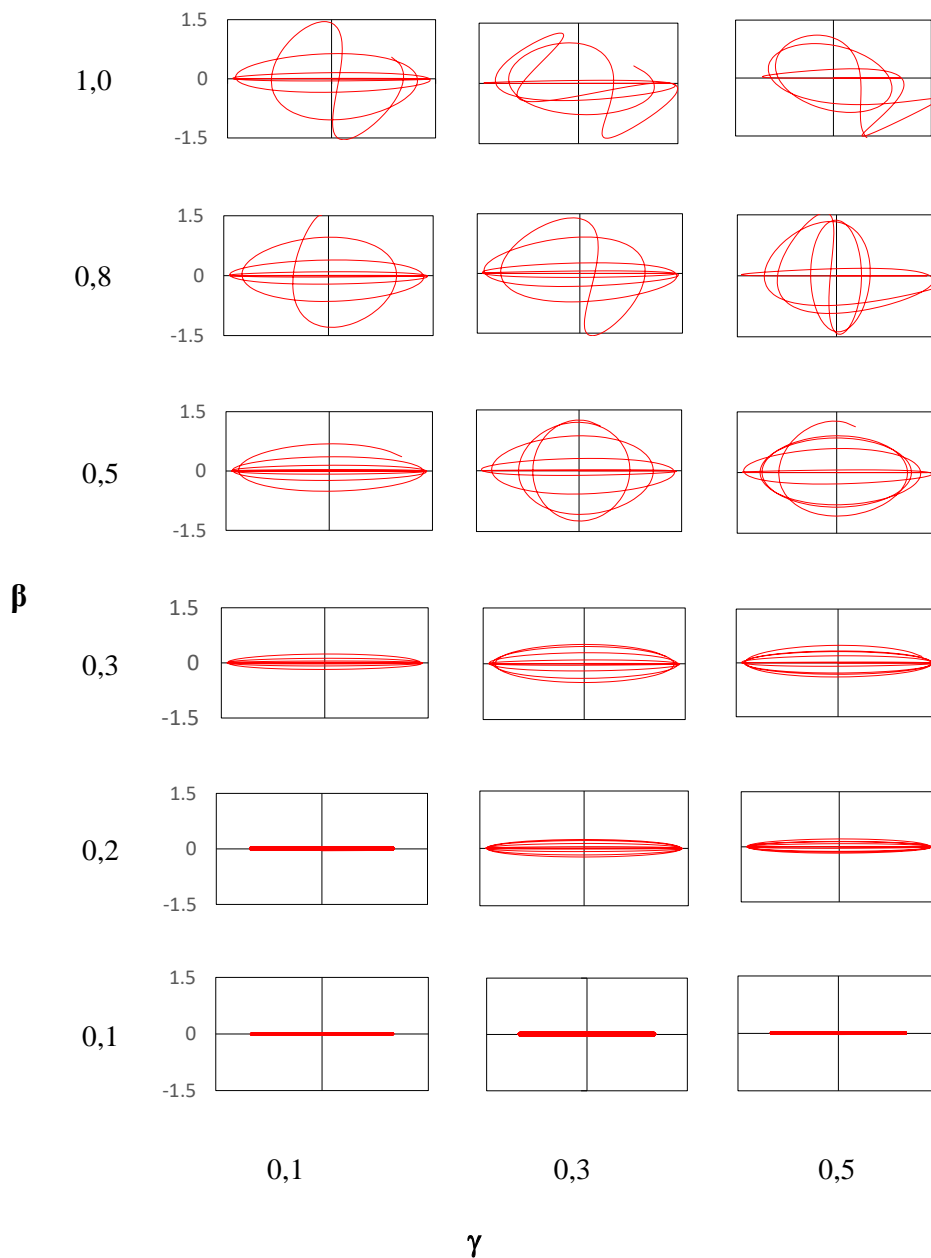


Figura 5.24 – Resultados do 1º modo de vibração do modelo III em curvas de *Lissajous* em função dos parâmetros $\beta \times \gamma$.

Os gráficos da Fig. 5.24, foram desenvolvidos com amplitude [-1,1] e deslocamento lateral igual a $w(\xi,\tau) \times 10^2$. O comportamento dinâmico longitudinal no campo $\xi \times \tau$, expresso por meio das curvas de *Lissajous*, inicialmente evoluem de forma similar para todos os valores de γ e crescem de acordo com a frequência ou velocidade.

Observa-se um descolamento das órbitas, onde seu crescimento e decréscimo, decorrente da instabilidade do movimento circular gera uma relação de equilíbrio 1:1. À medida que β aumenta, a relação de estabilidade se mantém até a crítica, $\beta > 0,3$ (0,6 e 0,5 nos modelos I e II), e qualquer mudança na velocidade resulta em uma modificação da órbita, causando uma defasagem na relação máxima 3:1. Esse comportamento provoca um torque de *Nutação* nos movimentos de *Precessão* das órbitas circulares, levando o movimento lateral a ficar descontrolado causando instabilidade na correia.

Para $\beta > 1$, não foram feitas apreciações de padrões gráficos, e a inclusão do termo correspondente à aceleração modificou a intensidade das oscilações longitudinais e transversais em relação à dinâmica comportamental dos demais modelos.

Para esse modelo a análise de estabilidade do sistema, visa garantir a sua operação na região de instabilidade em pontos determinados. Nessa análise é aplicado a transformada de *Lyapunov-Floquet*, que converte um sistema periódico variante no tempo em outro dinamicamente equivalente, usando a expressão: $\dot{\bar{X}}(\tau) = A(\tau)\bar{X}(\tau)$, usado na determinação dos autoexpoentes pelos multiplicadores característicos $|\rho_j|$ que indicam a instabilidade do sistema (PAKDEMIRLI, 1994; PERUZZI, 2005; ZEN e MÜFTÜ, 2006; ZWIERS e BRAUN, 2007; MESQUITA, 2007).

Como estratégia de avaliação da estabilidade do sistema, é muito apropriado aplicar a teoria de *Floquet*, em uma Matriz de Transição de Estado (STM) $A(\tau)$ transformada em duas outras matrizes de coeficientes periódicos $[P(t)]$ e coeficientes reais ou complexos $[B]$.

Nesse caso, simplesmente determinar os autovalores dessas matrizes não representa o propósito da análise de estabilidade (SINHA e BUTHER, 1997). É necessário empregar iterações de *Picard* combinadas com polinômios de *Chebyshev* para manipular as matrizes e obter a STM, que representará a transformação da solução no estado inicial $X(0)$ para o estado temporal $X(t)$ (SINHA e BUTHER, 1997; WANG e HALE, 2001; PERUZZI, 2005; ZEN e MÜFTÜ, 2006; ZWIERS e BRAUN, 2007; RAO, 2007; MESQUITA, 2007; RAVINDRA *et al.*, 2010; LAD e KARTIK, 2015).

A STM então, será tratada pela teoria de *Floquet* como uma matriz *monodrômica* constituída pelos autovalores (μ_i) conhecidos como multiplicadores característicos ou de

Floquet. Estes determinam a estabilidade do sistema através das raízes do polinômio característico, $p(\mu i) = \det(\mu i I - \Phi(T))$, utilizando a matriz fundamental $\Phi(T)$ obtida pela linearização das EDO's, com ciclo de frequência ω e período T.

Assim a estabilidade do sistema é testada pelos valores absolutos dos multiplicadores de *Floquet*, considerando assintoticamente estável se $|\rho_j| \leq 1$ e instável se $|\rho_j| > 1$,

Na estabilidade desse modelo, as matrizes periódicas $[G]$, $[C]$ e $[H]$ tem o mesmo período T, garantindo que $A(t) = A(t+T)$ as fará evoluir no mesmo espaço-estado em $\dot{\Phi}(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$. Isso estabelecerá a igualdade $\Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0) \cdot \Phi(T)$, onde $\Phi^{-1}(0) \cdot \Phi(T)$ corresponde a matriz *monodrômica* de termos e^{BT} , utilizada na solução da matriz fundamental $\Phi(t) = P(t) e^{Bt}$. Os autovalores μ_j , denominam os expoentes de *Floquet*, relacionados aos multiplicadores característicos por meio de $\rho_j = e^{\mu_j T}$.

Combinando a teoria de *Floquet* com o método de integração de *Adams-Bashforth* na região do espaço-estado limitada por $\beta x \gamma$, e discretizando a função 2π periódica com N termos. Os autovalores da STM indicarão a presença de instabilidade da dinâmica oscilatória do sistema. Os resultados da *matriz monodrômica* foram obtidos por um programa desenvolvido em ambiente *Scilab (6.0,2)* com base na semântica computacional da GITT de precisão de 10^{-10} . Os multiplicadores de *Floquet* determinados nesse trabalho pela GITT e os relatados por PAKDEMIRLI *et al.* (1994), estão apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Multiplicadores de *Floquet* para N=2.

V	ω	Magnitude dos Autovalores							
		PAKDEMIRLI	GITT	PAKDEMIRLI	GITT	PAKDEMIRLI	GITT	PAKDEMIRLI	GITT
75	50	1.000000	0.999990	1.000000	0.999990	1.026085	1.026085	0.974578	0.974578
79	48	0.990363	0.990356	0.990363	0.990356	1.009728	1.009731	1.009728	1.009731
82	45	1.000000	0.999991	1.000000	0.999991	1.016845	1.016849	0.983434	0.983430
84	22	1.000000	0.999975	1.000000	0.999975	1.019025	1.019027	0.981328	0.981328
84	35	1.000000	0.999984	1.000000	0.999984	1.031201	1.031202	0.969743	0.969742
89	40	1.000000	0.999985	1.000000	0.999985	1.066989	1.066989	0.937217	0.937217
91	31	1.000000	0.999980	1.000000	0.999980	1.057616	1.057616	0.945522	0.945522
92	38	1.000000	0.999984	1.000000	0.999984	1.047909	1.047909	0.954281	0.954281
92	50	1.000000	0.999988	1.000000	0.999988	1.069012	1.069013	0.935442	0.935442
93	25	1.000000	0.999975	1.000000	0.999975	1.046871	1.046871	0.955227	0.955228
94	48	1.000000	0.999986	1.000000	0.999986	1.067862	1.067863	0.936450	0.936450
96	35	1.000000	0.999985	1.000000	0.999985	1.036859	1.036860	0.964451	0.964450
99	33	1.000000	0.999981	1.000000	0.999981	1.037913	1.037913	0.963471	0.963471

Muito embora os resultados apresentados considerem N = 2, o programa estabelecido neste trabalho pode simular comportamentos com N-termos. Além disso, esse tipo de aplicação

é útil para avaliar soluções envolvendo a teoria de *Floquet*, permitindo simulações seguras de matrizes de ordem superior. Isso aumenta a observância do número de pontos de estabilidade desse sistema por meio do diagrama espaço-estado $\beta \times \gamma$ ($V \times \omega$). Assim, é possível mostrar um mapa das regiões críticas de funcionamento do modelo, por meio dos diagramas de estabilidade da Fig. 5.25.

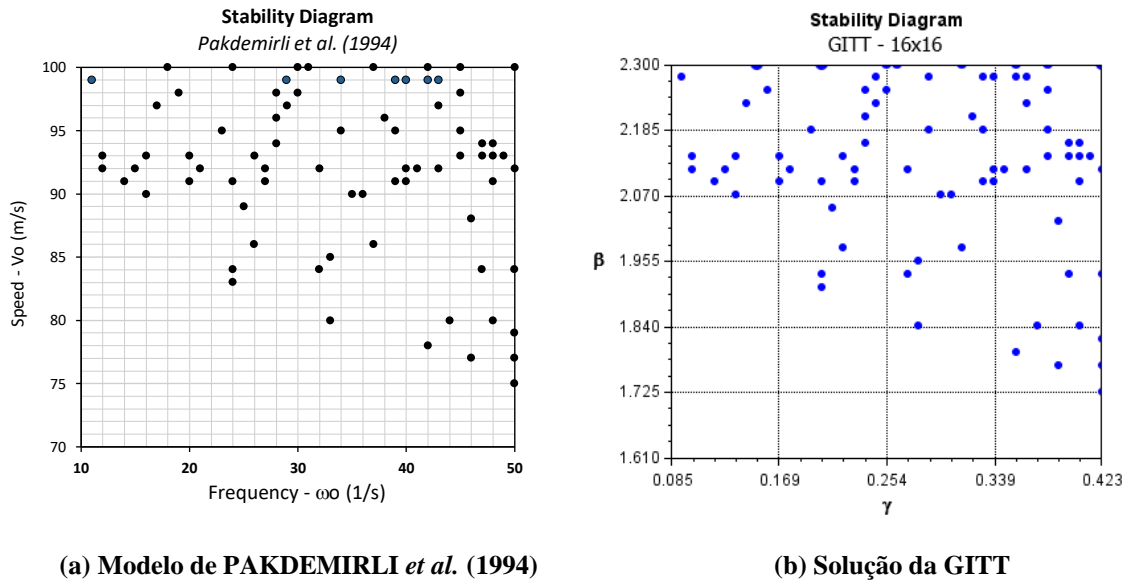


Figura 5.25 – Resultados do diagrama de estabilidade do modelo III para $N = 8$.

Na Fig. 5.25 os círculos preenchidos indicam pontos de instabilidade da movimentação desse sistema e revelam que os padrões de estabilidade obtidos pelos diferentes métodos são semelhantes no espaço-estado definido por $V_o \times \omega_o$ e $\beta \times \gamma$.

A Fig. 5.25, indica uma concentração de instabilidade na região nordeste do diagrama, onde a velocidade característica V_o é maior que a velocidade do pulso ($V_{crítica}$). Assim, na região subcrítica ($V_o \leq V_{crítica}$) todos os pontos serão estáveis (ZEN e MÜFTÜ, 2006).

Para confirmar a instabilidade de todos os pontos do diagrama apresentado na Fig. 5.25(b), foram utilizadas as teorias de *Floquet* e de *Lyapunov-Floquet*, e verificou-se que a equação do modelo é muito sensível às variações de V_o e ω_o .

Para fornecer uma visão mais detalhada dos pontos de instabilidade. Foi realizada uma simulação de uma região crítica no diagrama da Fig. 5.25, seguindo a mesma sistemática análise. Os resultados obtidos estão expressos no diagrama de estabilidade da Fig. 5.26.

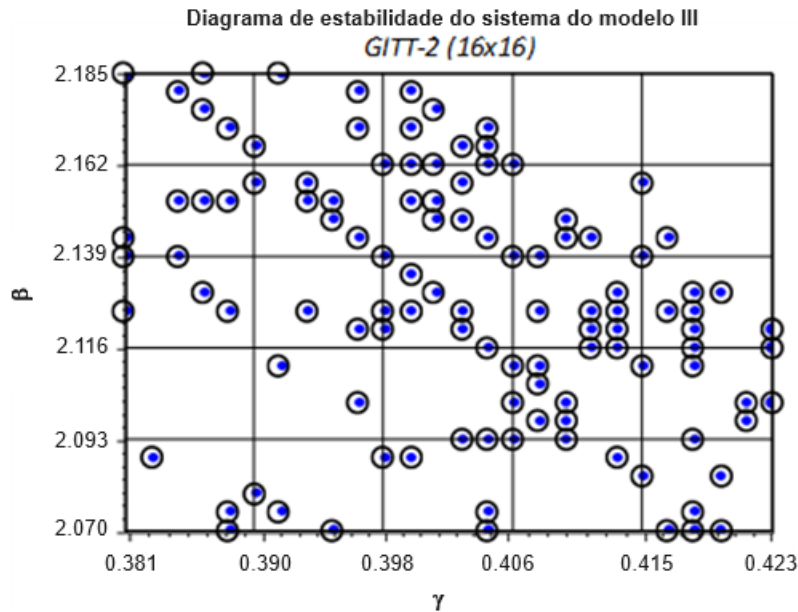


Figura 5.26 – Diagrama de estabilidade da região crítica do sistema para $N = 8$.

Na Fig. 5.26, os círculos representam os resultados do modelo de PAKDEMIRLI *et al.* (1994), com $90 \leq \mathbf{V}_0 \leq 95$ e $45 \leq \omega_0 \leq 50$, e os pontos cheios em azul os resultados da GITT no espaço-estado adimensional correspondente a $2,070 \leq \beta \leq 2,185$ e $0,381 \leq \gamma \leq 0,423$. Esse diagrama representa a região de análise da operacionalidade crítica desse sistema.

Pelo ao aumento no adensamento dos pontos de instabilidade, representado na Fig. 5.26, a diminuição do espaçamento da malha atinge o limite da verificação da estabilidade do sistema quando $|\rho_j| \leq 1$. Os valores conjugados tornam-se instáveis para $|\rho_j| > 1$, surgindo como pontos novos não percebidos no diagrama anterior, provocando um refinamento na observância da operacionalidade dentro dos limites de controle do sistema do modelo III.

A análise da estabilidade do sistema pode oferecer a garantia operativa segura dentro de uma região instável, tornando a transformada de *Lyapunov-Floquet* muito útil nessa determinação. Pois utiliza os próprios expoentes como os indicadores de instabilidade conforme a teoria de *Floquet* (PAKDEMIRLI e ULSOY, 1994; ZWIERS e BRAUN, 2007; ZEN e MÜFTÜ, 2006; PERUZZI, 2005; MESQUITA, 2005).

Ao progredir na redução do tamanho da malha de controle, conseguimos um detalhamento preciso da região crítica, o que facilita a compreensão da dinâmica operativa do sistema. Isso mostra peculiaridades intrínsecas relacionadas ao sistema, proporcionando uma visão clara da dinâmica do processo, conforme mostrado no diagrama da Fig. 5.27.

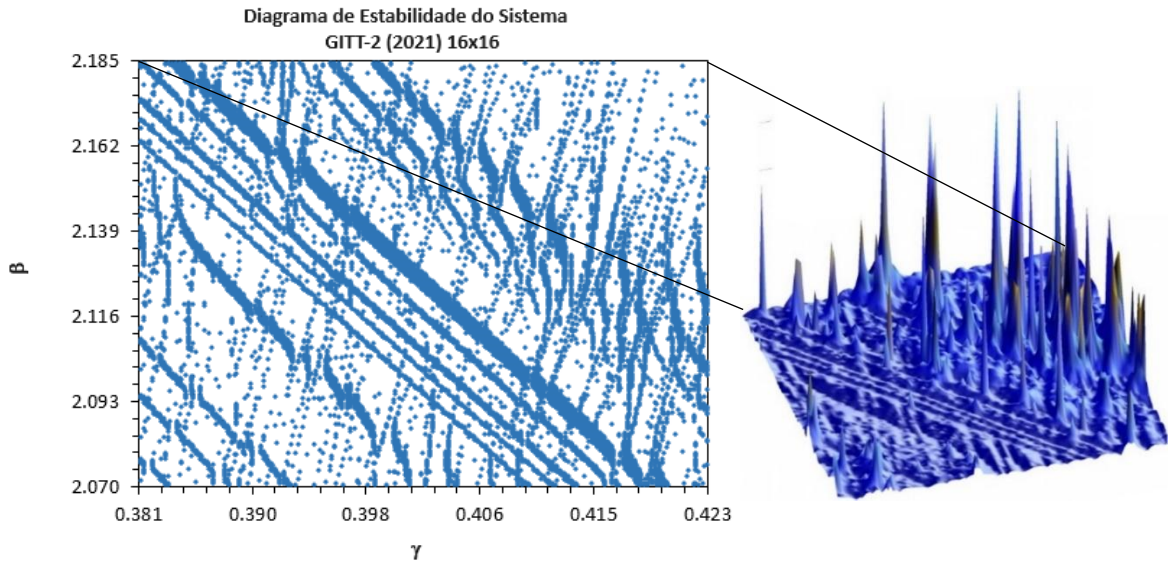


Figura 5.27 – Diagrama de estabilidade do modelo III com teste de *Lyapunov-Floquet* para $N=8$.

Na Fig. 5.27, os pontos azuis representam a instabilidade determinada pela GITT no intervalo $2,070 \leq \beta \leq 2,185$ e $0,381 \leq \gamma \leq 0,423$, e apresentam um mapa refinado da região crítica estabelecida, ilustrando a tendência comportamental através da distribuição dos pontos, indicando que no equilíbrio os perfis lineares do diagrama coincidem. Considerados como limiares de estabilidade para $|\rho_j| = 1$. Nas laterais dos perfis lineares, Fig. 3-D expandida, as elevações ultrapassam o nível máximo de equilíbrio, $\rho_j > 1$, indicando a região de instabilidade.

5.3.4 – Resultados numéricos do modelo IV

Nesse Modelo, será considerado a movimentação de um sistema semelhante a uma correia que se movimenta entre duas polias suportada em uma base viscoelástica, dividida em pequenos subsistemas com molas e amortecedores distribuídos ao longo do comprimento (L). A equação governante é definida pela seguinte expressão:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \bar{w}(\tau)}{d\tau^2} + (\mathbf{G} + \mathbf{D}) \frac{d\bar{w}(\tau)}{d\tau} + (\mathbf{C} + \mathbf{H} + \mathbf{K}) \bar{w}(\tau) = \mathbf{F} \quad (5.19)$$

Na Eq. (5.19) é considerado existir uma excitação externa e efeitos giroscópios, comum em estruturas flexíveis rotativas como a representada pelo modelo IV (WICKERT e MOTE Jr., 1990; CHUNG e KAO, 2011; ZHANG e CHEN, 2016).

A Fig. 5.28 apresenta os resultados obtidos pela GITT considerando uma função de excitação externa representada por $F(\xi, \tau) = F_0 \delta(\xi - \beta\tau)$, aplicada em $\xi \in [0, 1]$ para um ponto específico da correia e não de forma distribuída ou homogênea, para os valores dos parâmetros $\kappa = 2$, $\delta = 1$, $\beta = 0,5$, $\omega = 3$, $F_0 = 1,86$, $a_0 = 0,01$ e $N=32$. Em $\tau = 0, 0,25, 0,5, 1,0, 1,5$ e $2,0$.

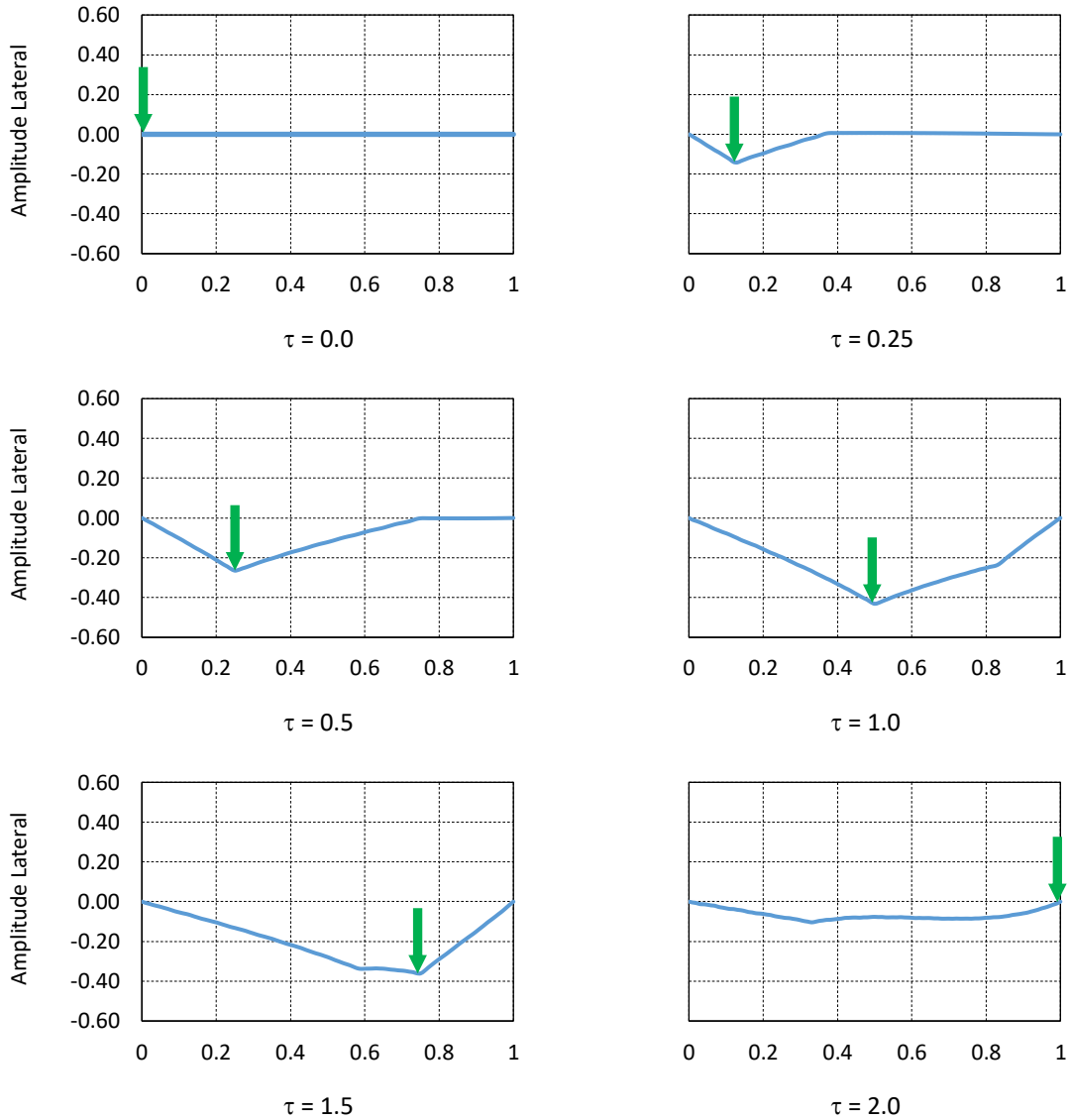


Figura 5.28 – Resultados da GITT para resposta à vibração forçada em função de τ .

Na Fig. 5.28, as setas verticais representam a resposta dinâmica do sistema nos pontos de aplicação da força de excitação (F) para os valores de $\tau = 0, 0,25, 0,5, 1,0, 1,5$ e $2,0$, determinados pela GITT e com o modelo de ZHANG e CHEN (2016). Os resultados obtidos apresentam boa concordância entre os modelos.

A associação do ponto de aplicação da força e a descontinuidade do pulso, localizados respectivamente em $\beta = 0, 0,125$ e $0,25$, viajam mais rápido que a velocidade característica ou de fase ($1+\beta$, ver modelo I), em $\tau = 0, 0,25$ e $0,5$, causando uma deformação no perfil de vibração. Para a velocidade de fase ($1-\beta$), refletida a partir da polia do lado direito, em $\beta = 0,5, 0,75$ e 1 para $\tau = 1, 1,5$ e 2 , ocorre uma região sem sensibilidade ou zona morta no perfil de vibração. Isso sugere que o tempo de resposta do sistema com base viscoelástica é mais suave do que sem a base.

Nos gráficos da Fig. 5.29, nota-se que o sistema de amortecimento é eficaz para conter vibrações que possam comprometer seu funcionamento. No entanto, a avaliação dessa eficácia será feita com base na resposta do modelo considerando vibração livre e forçada, aplicadas para diferentes fatores de amortecimento, com $\kappa = 3,26$, $\beta = 0,3$, $\omega = 3$, $a_0 = 0,01$, $N = 32$ em $w(0,6;\tau)$.

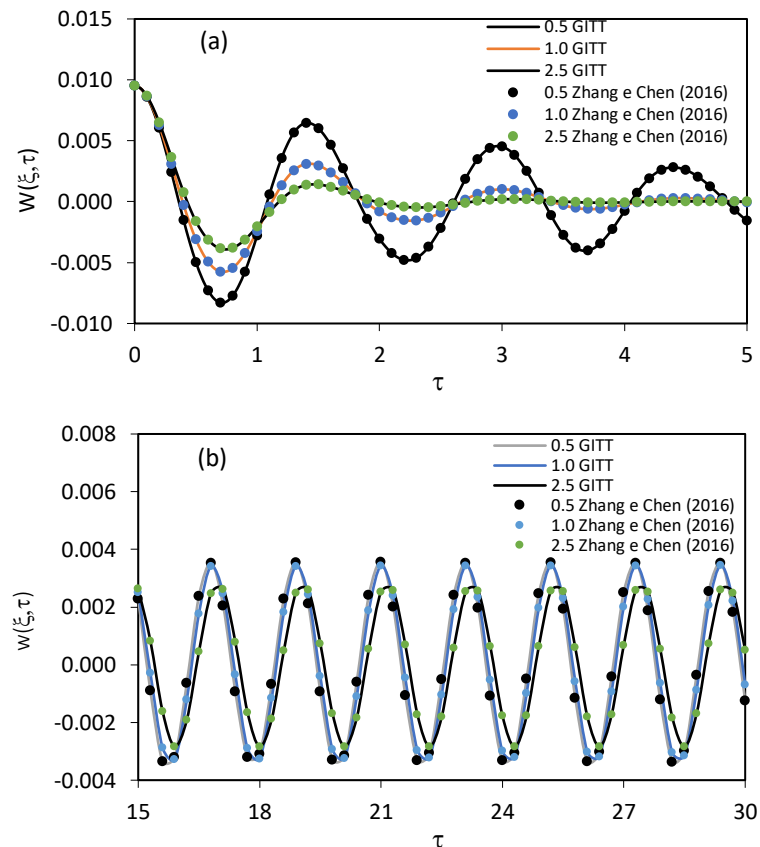


Figura 5.29 – Respostas das vibrações livres e forçadas para o modelo IV.

Conforme observado no gráfico da Fig. 5.29, os resultados obtidos pela GITT são semelhantes aos do trabalho de ZHANG e CHEN (2016). Em 5.29(a), com $\delta = 0,5, 1$ e $2,5$ em $\tau \in [0,5]$, o sistema está em vibração livre sem excitação externa ($F_0 = 0$). Nota-se uma redução

da amplitude das oscilações à medida que o fator de amortecimento aumenta, chegando a um valor supercrítico ou de forte amortecimento.

Na Fig. 5.29(b), com $\delta = 0,5, 1$ e $2,5$ em $\tau \in [15,30]$, o sistema apresenta vibração forçada com excitação externa ($F_0 = 0,03$), onde é perceptível a diminuição da amplitude à medida que δ aumenta. Nesse cenário, a frequência de oscilação da resposta do sistema corresponde à frequência da vibração, que permanece inalterada, indicando uma resposta coerente do sistema à excitação uniforme.

A Fig. 5.30 mostra a resposta do sistema em três diferentes cenários de amortecimento. O primeiro, na condição de exigência máxima com $\kappa = 5, \delta = 3, \beta = 1, \gamma = 0$ e $F_0 = 2$. Na situação de exigência média, com $\kappa = 3,26, \delta = 1, \beta = 0,5, \gamma = 3$ e $F_0 = 0,03$. Na condição de exigência mínima, com $\kappa = 1, \delta = 0,1, \beta = 0,01, \gamma = 5$ e $F_0 = 0,01$.

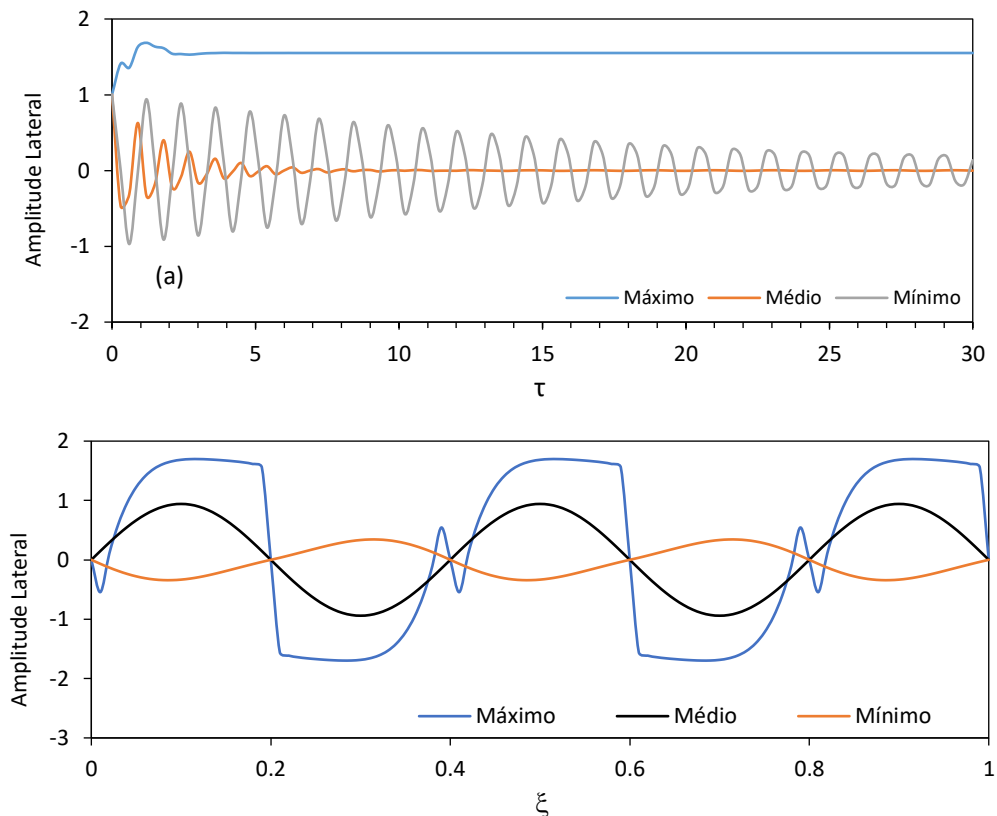


Figura 5.30 – Resultado das exigências operacionais para $N = 200$.

Observando os gráficos da Fig. 5.30, com $\xi = 0,5$ e $\tau = 1,2$. Na condição de exigência máxima o sistema é similar ao criticamente amortecido, onde as oscilações são rapidamente amortecidas, resultando em uma redução significativa na amplitude. Na situação de exigência média, o amortecimento é moderado, mantendo as oscilações em níveis intermediários. Já na

exigência mínima, o efeito do amortecimento é menos pronunciado, permitindo oscilações prolongadas com amplitudes relativamente maiores.

Um fator importante da vibração amortecida é o grau de qualidade (Q) do amortecimento. Ele é relacionado à dissipação da energia vibracional, que resulta em uma taxa de decaimento relativamente típica em cerca de 37% para cada ciclo oscilatório (KUNDUR, 1994). A taxa de amortecimento (ζ) pode ser calculada pela expressão:

$$\zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_a^2}} \quad (5.20)$$

Sendo σ a taxa de atenuação da amplitude, ω_a a frequência de oscilação amortecida, $\omega_a = \omega_N \sqrt{1 - \zeta^2}$ e ω_N a frequência natural do sistema, $\omega_N = \sqrt{\sigma^2 + \omega_a^2}$. O conjunto de resultados mostram os valores das taxas de amortecimento dadas por: $\zeta_I = 1$, $\zeta_{II} = 0,3163$ e $\zeta_{III} = 0,02$.

Os resultados indicam que os amortecimentos da Fig. 5.30, correspondentes a frequências naturais $\omega_{NI} = 3$, $\omega_{NII} = \sqrt{10}$ e $\omega_{NIII} = 5$, e segundo TIPLER (2009), a qualidade de um sistema amortecido pode ser determinada pela expressão:

$$Q = \sqrt{\frac{1}{8 \left(\frac{\omega_N - \omega_a}{\omega_N} \right)}} \quad (5.21)$$

Dessa forma, os fatores de qualidade do amortecimento do modelo IV serão: $Q_I = 0,5$, $Q_{II} = 1,6$ e $Q_{III} = 25$, de acordo com as seguintes justificativas:

- 1) Na condição de exigência Máxima, o sistema apresenta um valor de Q intermediário ou crítico, indicando que as oscilações não estão ausentes, como em um sistema com excesso de amortecimento, onde as perdas são altas e as oscilações atingem rapidamente um estado estacionário que não é ultrapassado. Nesse caso, o decaimento é instantâneo, tornando o conjunto rígido e sem flexibilidade, levando o sistema a um estado de amortecimento criticamente amortecido.

- 2) Na condição de exigência Média, o sistema é considerado de qualidade média e subamortecido. Isso ocorre devido à diminuição das vibrações com uma taxa de decaimento da amplitude fixa e uma frequência de amortecimento elevada, fazendo com que suas oscilações desapareçam rapidamente com o tempo.
- 3) Na condição de exigência Mínima, o sistema é considerado de alta qualidade e exageradamente subamortecido. Isso acontece porque, à medida que o valor de Q aumenta, a taxa relativa de amortecimento diminui, sustentando as oscilações por mais tempo. Isso torna o sistema puramente oscilatório, estável e limpo, convergindo para um valor de estado estacionário mínimo.

Portanto, o sistema de amortecimento viscoelástico deve ser dimensionado de forma a atender às demandas das vibrações do sistema, garantindo que a operacionalidade do processo oscilatório não seja comprometida. Isso permite que os ressonadores vibrem por mais tempo, mantendo a estabilidade e a eficiência do sistema.

5.4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS MODELOS DE VIGAS

Nessa discussão serão trabalhadas três hipóteses para a equação governante do modelo de vibrações de vigas, Eq. (4.4) dada abaixo. Cada hipótese será avaliada com relação às duas condições de contorno estudadas, ou seja, engastada-engastada (C – C) e engasta-massa na ponta (C-CM), sendo:

1ª hipótese – valores do parâmetro $a = 0$ e $b = 0$.

2ª hipótese – valores do parâmetro $a = 1$ e $b = 0$.

3ª hipótese – valores do parâmetro $a = 0$ e $b = 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2v \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} + \frac{dv}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) - (v^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) + \xi \mu_1^4 \bar{w}_i(\tau) \\ & - a \left[\frac{3}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{ijk\ell} \bar{w}_j(\tau) \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right] \\ & - b \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_{k\ell} \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

5.4.1 – ANÁLISE DOS RESULTADOS ASSUMINDO ($a = 0$ e $b = 0$)

Na realização dessa análise será considerada, a equação anterior ou Eq. (4.40), assumindo sem efeito o amortecimento e a vibração longitudinal na hipótese proposta, resultando na expressão:

$$\frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2v \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} + \frac{dv}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) - (v^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) + \xi \mu_1^4 \bar{w}_i(\tau) = 0 \quad (5.22)$$

5.4.1.1 – Análise da convergência da condição de contorno C–C

Foram selecionados conjunto de parâmetros nos pontos de baixa, média e alta deflexão, para poder representar de forma precisa o comportamento oscilatório de diversas curvas do sistema. Esse critério segue as diretrizes estabelecidas por Gu *et al.* (2013, 2016), para $\tau \in [0,10]$ e $\eta \in [0,1]$, com intervalos das variáveis definidos em MOTE Jr. (1966), BAPAT e SRINIVASAN (1967), PAKDEMIRLI *et al.* (1994), ÖZ *et al.* (1998), ÖZ e PAKDEMIRLI (1999), CHEN e YANG (2005), ZEN e MÜFTÜ (2005, 2006).

Essa avaliação está associada a aplicabilidade dos resultados, conforme PHAM e HONG (2020), e englobando a determinação da quantidade de termos (N) na equação do modelo para os seguintes parâmetros $\varepsilon \in [0,2]$, $\nu_0 \in [0,1]$, $\xi \in [0,1]$ e $\omega \in [0,20]$.

Dessa forma, as simulações da verificação da convergência, conduzidas com ordens de truncamento, $N = 8, 16, 32$ e 64 , tem seus resultados apresentados nos gráficos da Fig. 5.31.

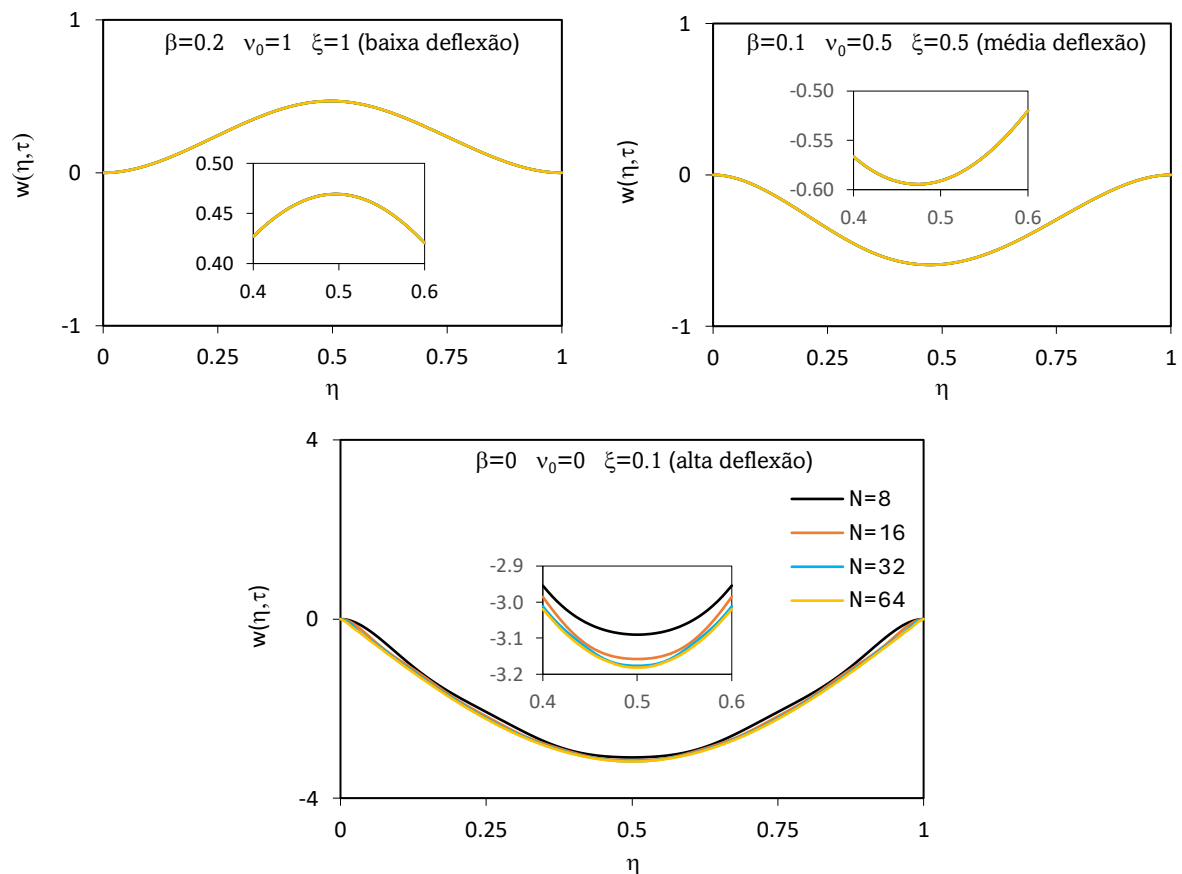


Figura 5.31 – Resultados da verificação da convergência para o contorno C–C da Viga.

Em $\tau = 1,5$ e deslocamento transversal $w(\eta,\tau) \times 10^4$, e a partir dos critérios adotados é possível afirmar que o conjunto de parâmetros simulados, que para $N \geq 8$ tem-se um valor seguro de termos a ser utilizado segundo a expansão das autofunções.

Uma outra verificação realizada é a avaliação da estabilidade da solução da EDO para os campos transformados. Um cálculo fundamental para garantir que a qualidade dos resultados seja confiável e representativa do sistema em questão. Essa avaliação implica na totalidade ou uma fração dos coeficientes permaneça estável mesmo para um subconjunto de valores testados em diferentes cronologias ou com grupos de variáveis com características próprias.

Na Fig. 5.32, estão apresentados os resultados da verificação da estabilidade numérica do modelo, em relação as oscilações como forma de observar a energia envolvida nos modos de oscilação, para o conjunto de parâmetros composto por: $\varepsilon = 0,1$, $\nu_0 = 1$, $\xi = 0,5$ e $N = 32$.

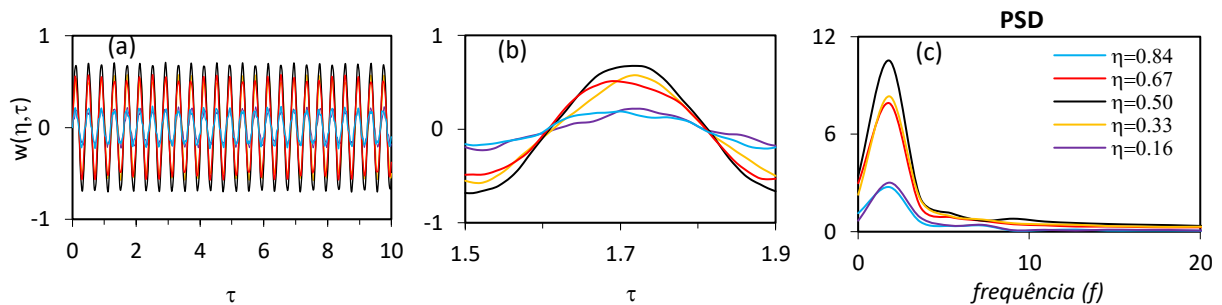


Figura 5.32 – Resultados da verificação da estabilidade em cinco pontos da coordenada espacial η em função de τ , para o modelo C–C da viga.

Na Fig 5.32(a) o deslocamento transversal é igual a $w(\eta,\tau) \times 10^4$, as oscilações são definidas apesar das reverberações nas vibrações, devido ao tipo de suporte analisado. Nos pontos $\eta = 0,16$ e $0,84$, as frequências são baixas e as oscilações são discretas nas proximidades dos suportes. Na Fig. 5.32(b) está a certificação da estabilidade no subconjunto $\tau \in [1,5;1,9]$, havendo uma excelente validação dos resultados, demonstrando a eficácia do método GITT em relação a τ . Na Fig. 5.32(c), está uma análise detalhada de 5.32(b) usando *FFT* (Fast Fourier Transform), mostrando o valor de PSD do campo de deslocamento transversal $w(\eta,\tau)$.

O sinal de resposta livre do sistema varia conforme a posição ao longo da viga, refletindo sua frequência em variações do espectro da frequência no campo do deslocamento transversal. A Fig. 5.32(c) ilustra tais mudanças, evidenciando a relação entre a posição e as características do sinal. Isso sugere que a resposta livre da viga é predominantemente influenciada pelo modo de vibração associado à sua primeira frequência natural.

5.4.1.2 – Análise da convergência da condição de contorno C–CM

Neste modelo a interferência no sistema surge pela rigidez excessiva e baixa, que resultar em situações de instabilidade. Um aumento abrupto da rigidez, pelo acréscimo de massa adicional (M), causa distorções severas por tração ou deformações extremas. A movimentação sem restrições pode levar à falta de convergência, frequentemente equilibrada pela interação entre a resistência estrutural do material e o esforço aplicado sobre ele (LAURA *et al.*, 1974 e 1976; BLEVINS, 1979; PHAM e HONG, 2020).

A avaliação da EDO da condição de contorno (C-CM), será testada considerando $\tau \in [0,10]$ e $\eta \in [0,1]$, sem considerar a inércia de massa e rotacional. Serão observadas a precisão e tolerância estabelecida para $\omega \in [0,20]$, $\nu_0 \in [0,5]$, $\varepsilon \in [0;0,2]$ e $\xi \in [0,1;10]$.

Os conjuntos de parâmetros representativos da dinâmica do sistema, de acordo com a proposição da sistemática de análise da convergência. Foram selecionados após a realização das simulações nas seguintes razões de massa: $\gamma = 0,1$ (Pequena Massa Concentrada - PMC), $\gamma = 1$ (Igual Massa Concentrada - IMC) e $\gamma = 10$ (Grande Massa Concentrada - GMC).

Devido à sensibilidade das oscilações, o valor de N será: $N = 8, 16, 32$ e 64 para cada valor de γ . Os resultados dessas simulações em $\tau = 1$, estão mostrados nos gráficos da Fig. 5.33.

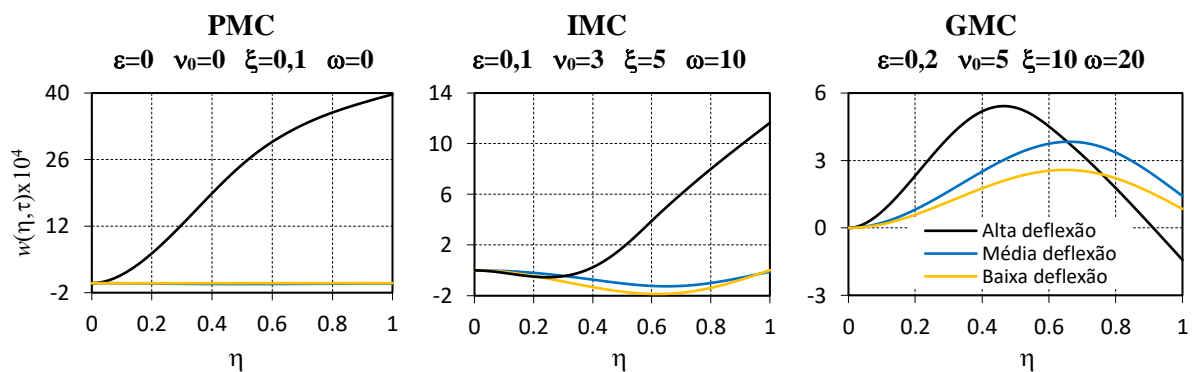


Figura 5.33 – Resultados da verificação da convergência do contorno C–CM.

Conforme as avaliações numéricas apresentadas, observa-se que as tendências são semelhantes e se modificam de acordo com o valor de γ , em PMC e IMC, destacando alta deflexão na viga devido às oscilações que ocorrem como se não houvesse resistência ao movimento, o que não é observado em GMC, onde os coeficientes de deflexão são menores.

Em relação aos valores de γ e ao número de termos adotados, pode-se afirmar que os resultados são favoravelmente convergentes, conforme observado e correspondendo às formas

dos modos (Blevins, 1979). Isso significa que, ao aumentar a rigidez (ξ), a velocidade média de movimentação (v_0) e a massa concentrada (M), as amplitudes de oscilação ficarão baixas.

Um teste de estabilidade garante a eficácia dos coeficientes da equação do modelo por meio da representatividade dos resultados, assegura que permaneçam estáveis mesmo estando em um subconjunto de dados avaliados em diferentes cronologias ou com variáveis de características próprias. Dessa forma, o teste de estabilidade da GITT foi conduzido com base nas informações apresentadas na Fig. 5.33, utilizando o conjunto de parâmetros $\varepsilon = 0,2$, $v_0 = 3$, $\xi = 5$, $\omega = 10$, $N = 32$ para $\tau = 1$, conforme demonstrado nos gráficos da Fig. 5.34.

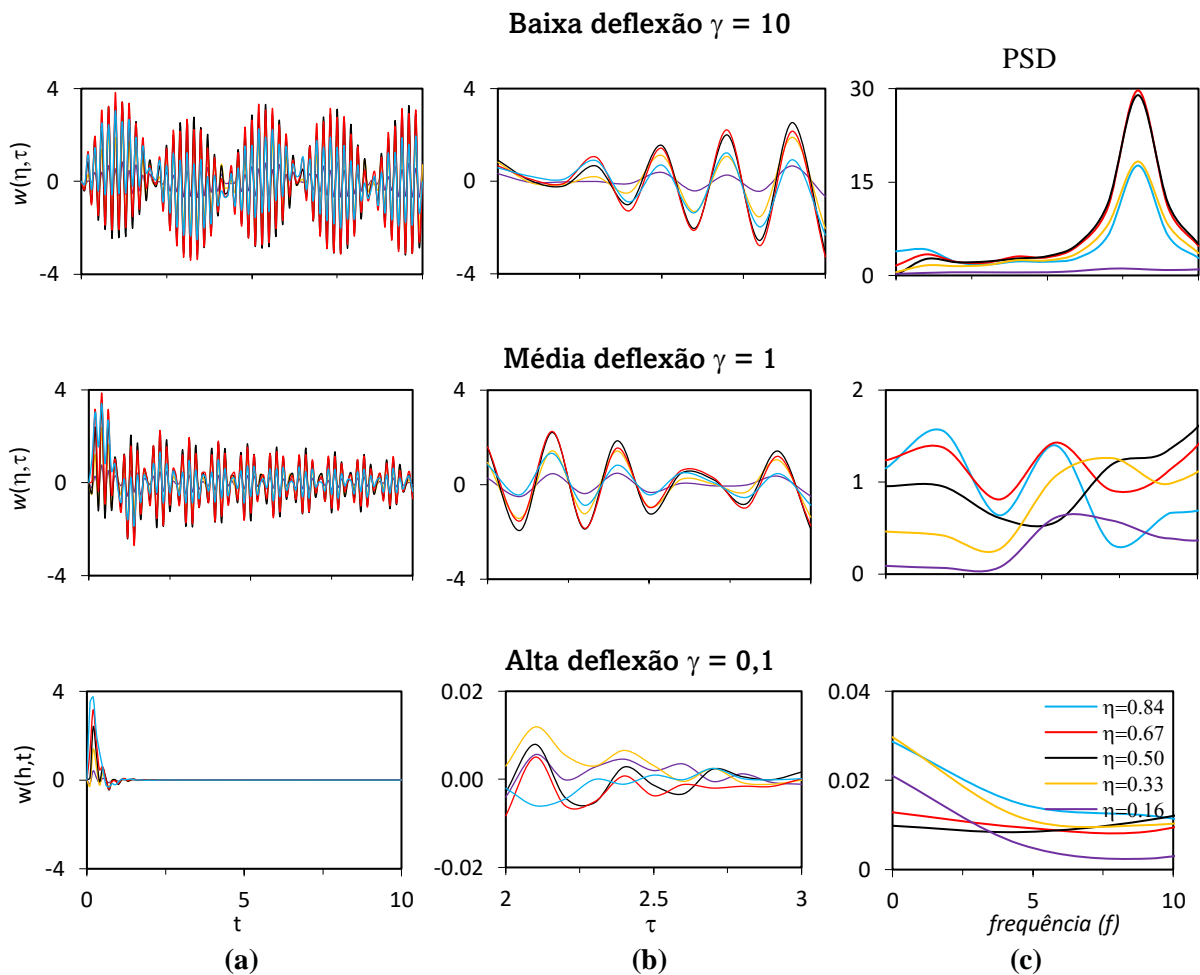


Figura 5.34 – Resultados da verificação da estabilidade da GITT na coordenada espacial η .

Nesta configuração, são identificados três padrões gráficos distintos em termos estruturais. Inicialmente, observa-se um desenvolvimento oscilatório com amplitudes significativas, que gradualmente tende a um comportamento estacionário em valores elevados

de τ , isso é atribuído à exigência de energia para movimentar a viga, conforme determinado pelos parâmetros de γ .

Em Fig. 5.34(a) o deslocamento transversal é igual a $w(\eta,\tau) \times 10^4$ para $\tau \in [0,10]$, se destaca uma tendência crescente no padrão oscilatório da estabilidade, evidenciando uma energia inicial elevada de mesmo para pequenas deflexões, culminando em um ciclo de movimentos estáveis. Em 5.34(b) está a certificação da estabilidade avaliada no subconjunto $\tau \in [2,3]$ e apresenta uma notável concordância nos resultados, descrevendo as oscilações relacionadas aos movimentos da viga em função de γ . Na 5.34(c), realiza-se uma varredura da 5.34(b), aplicando a *FFT* para observar a relação das deflexões em $f = 14,5$, com amplitudes das oscilações em torno de 30 PSD em $\eta = 0,50$ e $0,67$ para $\gamma = 10$.

Esta análise reflete o comportamento ilustrado na Fig. 5.33, que estabelece a relação entre a dissipação da energia vibracional das autofreqüências e os valores do esforço máximo do momento fletor na posição da massa concentrada.

Verifica-se que na condição SCM, os efeitos oscilatórios assemelham-se aos de um apoio engastado-livre. Em ECM, esses efeitos são equilibrados pela igualdade das massas. Já em BCM, o efeito do apoio C-CM é influenciado pela magnitude de M , influenciando na freqüência e na forma do modo. Aumentando ξ o sistema fica mais rígido, gerando redução da deflexão e do período de oscilação.

5.4.2 – AVALIAÇÃO NUMÉRICA ASSUMINDO ($a = 0$ e $b = 0$)

5.4.2.1 – Resultados da condição de contorno C – C

A dinâmica comportamental do contorno C – C é conduzida com base nos efeitos oscilatórios de vibrações transversais conhecidas como paramétricas. Essas vibrações são ocasionadas pela tensão inicial e variação da velocidade de transporte axial ou pulsante e sua derivada, expressas por:

$$v = v_0 + \varepsilon \text{sen}(\omega\tau) \Rightarrow \frac{dv}{d\tau} = \omega \varepsilon \text{cos}(\omega\tau) \quad (5.23)$$

Onde v é velocidade e transporte, v_0 velocidade de transporte média, ε coeficiente (*bookkeeping device*) dos desvios das pequenas flutuações de velocidade, ω frequência de oscilação e τ adimensional do tempo (ÖZ e PAKDEMIRLI, 1999; CHEN e YANG, 2005; CHEN *et al.*, 2007).

Dessa forma a verificação numérica considerando a análise dos resultados em três situações distintas envolvendo a velocidade de transporte (v) e a rigidez à flexão (ξ). As condições examinadas são: (i) $v = 0,15$, $\xi = 0,1$, (ii) $v = 1$, $\xi = 0,1$ e (iii) $v = 0,15$, $\xi = 1$. Os dados obtidos foram cuidadosamente simulados para $N = 30$ e comparados aos resultados de AN e SU (2011), apresentados de maneira detalhada na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Deslocamento transversal em função da velocidade axial (v) e rigidez a flexão (ξ).

η	GITT			An e Su (2011)		
	$v=0.15$ $\xi=0.1$	$v=1$ $\xi=0.1$	$v=0.15$ $\xi=1$	$v=0.15$ $\xi=0.1$	$v=1$ $\xi=0.1$	$v=0.15$ $\xi=1$
$\tau=5$						
0.1	0.00018007	0.00010341	0.00000199	0.00018008	0.00010340	0.00000199
0.3	0.00095540	0.00082161	0.00002380	0.00095541	0.00082158	0.00002380
0.5	0.00138820	0.00140000	0.00004363	0.00138819	0.00140005	0.00004361
0.7	0.00100210	0.00098775	0.00003411	0.00100207	0.00098775	0.00003410
0.9	0.00019381	0.00015709	0.00000539	0.00019381	0.00015709	0.00000539
$\tau=20$						
0.1	-0.00000042	0.00000908	0.00002008	-0.00000042	0.00000908	0.00002007
0.3	0.00013558	0.00042778	0.00011564	0.00013558	0.00042780	0.00011565
0.5	0.00030845	0.00111120	0.00015610	0.00030851	0.00111115	0.00015607
0.7	0.00022455	0.00102450	0.00012835	0.00022457	0.00102448	0.00012836
0.9	0.00003042	0.00021370	0.00002458	0.00003045	0.00021370	0.00002457
$\tau=100$						
0.1	0.00015936	-0.00019368	0.00005078	0.00015943	-0.00019369	0.00005077
0.3	0.00082185	-0.00101040	0.00032674	0.00082181	-0.00101042	0.00032674
0.5	0.00117510	-0.00135640	0.00048972	0.00117511	-0.00135640	0.00048971
0.7	0.00085378	-0.00095206	0.00032983	0.00085376	-0.00095205	0.00032984
0.9	0.00016247	-0.00018986	0.00005186	0.00016253	-0.00018984	0.00005185

Os resultados obtidos mostram uma concordância precisa com as soluções dos modelos, com precisão de até oito decimais. Isso sugere uma alta precisão, estabilidade e convergência do modelo nessas condições. O erro relativo é inferior a 0,1% para um deslocamento transversal máximo de aproximadamente $\pm 0,0014$. É relevante observar que, para valores de velocidade $v = 0,15$ e 1, as amplitudes crescem ao longo do tempo, enquanto para $\xi = 0,1$ e 1, elas diminuem com o aumento das frequências vibracionais (ver Fig. 5.32).

5.4.2.2 – Resultados da condição de contorno C – CM

Os resultados deste modelo serão comparados com os de outros que consideram os mesmos efeitos oscilatórios de uma viga flexível, comparando-a com de *Euler-Bernoulli*. A viga em questão é isotrópica, tem massa m_b e está fixa em uma extremidade, com uma massa M na outra extremidade, que pode representar uma carga estrutural morta concentrada ou um ponto de aplicação.

O efeito do movimento causado pela carga será avaliado por meio das frequências naturais (ω_n) resultantes quando o sistema é submetido aos valores de γ (0,1, 1, 9 e 10), correspondentes às regiões de baixa, média e alta deflexão da viga. A verificação numérica será realizada para as três primeiras frequências naturais ω_n ($n = 1, 2$ e 3) usando os dados do trabalho de WU e LIN (1990).

Os critérios estabelecidos para determinar os valores de ω_n , empregou métodos analíticos e numéricos considerando as seguintes propriedades do sistema: $L = 1,016$ m, $m_b = 16$ kg, modulo de elasticidade $E = 2,068428 \times 10^{11}$ N/m², diâmetro da viga $D = 0,0508$ m, massa por unidade de comprimento $\bar{m} = 15,75177$ Kg/m e densidade do material $\rho = 7850$ kg/m³.

Os valores de ω_n apresentados na Tab. 2, foram determinados por diferentes métodos, cada um utilizando processos distintos. LAURA *et al.* (1994) determinaram resultados analíticos com autovalores correspondentes aos respectivos γ . Enquanto de WU e LI (1990) os resultados são específicos para γ (1 e 9) e os demais valores foram determinados pelo método fornecido no próprio trabalho empregando as características do sistema. O Comsol 5.2 forneceu os resultados obtidos a partir da sua própria estrutura interna de cálculo.

O processo de resolução envolvendo a metodologia da GITT na determinação de ω_n usou a formulação matricial trabalha nos modelos de Cordas (Eq. 4.47), com $\nu = 0$ e $\xi = 10,351936$. Isso simplifica a operacionalidade dos cálculos e a verificação comportamental do sistema, devido ao uso da equação do modelo em forma de matriz.

Os resultados obtidos pela GITT e comparados com dados de WU e LIN (1990), LAURA *et al.* (1994), BLEVINS (1979) e Comsol 5.2 (2015). Permitem avaliar a consistência e a confiabilidade do uso da GITT na determinação ω_n do sistema em questão, conforme apresentado na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Frequências naturais (ω_n) em função γ e diferentes métodos de análise.

Frequências (ω_n)	GITT	Laura <i>et al.</i> (1974)	Wu e Lin (1990)	Comsol 5.2 (2015)
$\gamma = 0.1$				
ω_1	9.54885	9.54885	9.56913	9.49837
ω_2	62.27618	62.27618	62.40843	61.93992
ω_3	178.62676	178.62676	179.00610	178.03072
$\gamma = 1$				
ω_1	5.01052	5.01052	5.01108	4.98696
ω_2	52.28370	52.28370	52.35136	51.99592
ω_3	163.75443	163.75443	164.10220	162.84415
$\gamma = 9$				
ω_1	1.83372	1.83372	1.83400	1.82538
ω_2	49.94026	49.94026	50.02769	49.66271
ω_3	161.11440	161.11440	161.98820	160.21173
$\gamma = 10$				
ω_1	1.74184	1.74184	1.74621	1.73393
ω_2	49.90740	49.90740	49.93705	49.62769
ω_3	161.07916	161.07916	161.10450	160.17672

A comparação das frequências realizada na Tab. 5.4, tomaram como base as características da viga, onde as movimentações são suprimidas no apoio engastado e livre na extremidade da massa concentrada (M). As oscilações ocorrem de forma reativa diferente de zero, e causam uma deflexão que desempenha um papel crucial nas oscilações.

Na Tab. 5.4 os resultados da GITT apresentam semelhanças com os analíticos de LAURA *et al.* (1974) e estão na mesma ordem de grandeza que outros resultados e as autofrequências aumentam de acordo com o número dos modos de oscilação para os valores de γ , indicando concordância entre os resultados dos métodos utilizados.

5.4.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS ASSUMINDO ($a = 1$ e $b = 0$)

Essa análise será focada na Eq. (4.38) também sem os efeitos do amortecimento e movimentação longitudinal. A atenção é dada a influência da tensão, expressa por meio da velocidade (v) e da deformação axial (α), relacionadas à rigidez e à flexão distribuída, além da rigidez à flexão (ξ) (WICKERT, 1992; CHEN e YANG, 2005). Isso resulta no modelo descrito por uma *Equação Diferencial Parcial* (EDP).

Devido à utilização da EDP, a aplicabilidade do modelo estará condicionada aos valores estabelecidos pelos parâmetros nos seguintes intervalos: $\alpha \in [0,10]$, $\varepsilon \in [0,1]$, $v_0 \in [0,10]$, $\xi \in [0,10]$ e $\omega \in [0,50]$. Assim, a equação geral do modelo será agora expressa por:

$$\frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2\nu \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} + \frac{d\nu}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) - (\nu^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) + \xi \mu_1^4 \bar{w}_i(\tau) - \frac{3}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{ijkl} \bar{w}_j(\tau) \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) = 0 \quad (5.24)$$

5.4.3.1 – Análise da convergência da condição de contorno C-C

A análise do comportamento vibracional do apoio C-C será realizada com base nos valores numéricos relacionados aos resultados empregando os métodos de cálculos apresentados por DING e CHEN (2009) e o estabelecido pela GITT, Eq. (5.23).

Os valores empregados no caso exemplo, se referem a uma viga de aço biengastada com comprimento $L = 1$ m, módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa, densidade volumétrica do material (aço) $\rho = 7850$ kg/m³, tensão inicial $T_0 = 7850$ N, velocidade de transporte $V(t) = 10$ m/s, momento de inercia $I = 6,67 \times 10^{-12}$ m² e área da seção $A = 2 \times 10^{-5}$ m². Conforme DING e CHEN (2009, 2011), quando $\varepsilon = 0,1\%$ representam uma viga rígida de baixa amplitude e pequena deflexão, $0,5\%$ uma viga de média amplitude no limite da deflexão, e 1% indica uma viga de grande amplitude na região de deformação do material,

Para o caso avaliado, a excitação harmônica será uniforme e a condição inicial terá uma taxa média de amplitude igual a $0,5\%$ de η . Os resultados das vibrações determinados utilizando os valores dos parâmetros: $\alpha = 0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $\nu_0 = 0,045$, $\xi = 0,00017843$, $\omega = 67$ e $N = 32$, junto a metodologia da GITT, estão apresentados nos gráficos da Fig. 5.35.

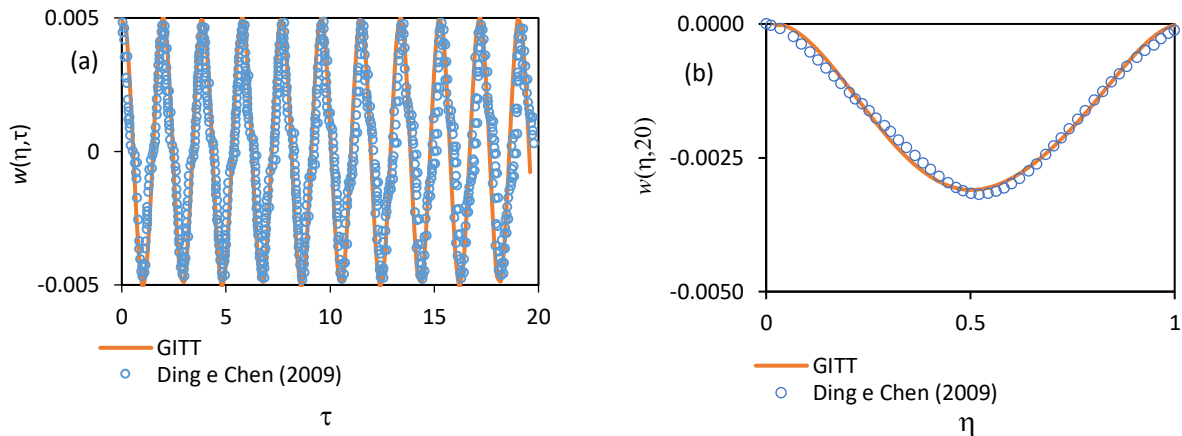


Figura 5.35 – Representação gráfica da dinâmica de oscilações da viga com suporte C-C.

Os valores mostrados nos gráficos da Fig. 5.35(a) representam o perfil temporal (τ) e em 5.35(b) o perfil espacial (η) em $\tau = 20$ mostram que os resultados de DING e CHEN (2009) estão de acordo com os obtidos pela GITT. A pequena diferença nos resultados é oriunda dos tipos de métodos computacionais empregados e as precisões trabalhadas. A escala do tempo adimensional é a mesma para ambas as análises.

A inserção do parâmetro relacionado a deformação axial (α) na equação, exerce baixa influência na dinâmica de oscilação da viga, que passa a ter comportamento semelhante aos modelos tratados com os princípios da viga de *Euler-Bernoulli*.

O mesmo acontece com a rigidez a flexão (ξ) que depende essencialmente da velocidade de transporte. Essas constâncias não ocorrem quando a velocidade de transporte (v) aumenta, devido a interrelação com a deformação da viga que pode ficar mais acentuada ao longo do comprimento e com o passar do tempo.

Esses fenômenos podem ser atribuídos ao fato de o sistema ser feito de aço e estar sujeito a períodos curtos de tração e compressão, resultantes do tipo de contorno e da pequena área transversal. Nessas condições, a deformação por alongamento ou compressão das seções do material estará em equilíbrio sistêmico, mesmo quando a frequência de oscilação é elevada.

5.4.3.2 – Análise da convergência da condição de contorno C–CM

Neste problema típico da engenharia, a viga exibe deslocamentos laterais, rotacionais e deflexionais devido a vibrações transversais. Essas vibrações são causadas por uma tensão inicial, resultante de uma força localizada ou variação na velocidade de transporte, que flutua periódica e harmonicamente em torno de um valor médio (PHAM e HONG, 2020).

O termo de deformação axial (α) é introduzido na Eq. (5.21), relacionando as flutuações da velocidade de transporte empregando uma EDP na resolução do problema, conforme descrevem WU e LIN (1990); CHEN *et al.* (2004); CHEN e YANG (2005); ÖZKAYA e PAKDEMIRLI (2002); DING e CHEN (2009); SHAFQAT (2015); HUO e WANG (2016); VARGHAEI *et al.* (2019).

A avaliação numérica será essencial para demonstrar a inclusão de α na equação do modelo e estabelecer uma relação direta com informações da literatura. Devido à dificuldade em obter dados específicos para essa condição de contorno, optou-se por utilizar as informações dos testes de convergência e da verificação numérica.

Nesse contexto, aplicou-se uma taxa de excitação uniforme com amplitude harmônica (ε) de 0,1% de η , considerada pequena conforme DING e CHEN (2015). A resposta numérica dessa aplicação, para o apoio C–CM, considerando $\alpha = 0, 0,001$ e 10 e os autovalores empregados junto à GITT obtidos para $\gamma = 1$, utilizando o conjunto de parâmetros: $\varepsilon = 0,001$, $\gamma = 1$, $\nu_0 = 0,001$, $\xi = 2$ e $\omega = 5$, para $N = 32$ e $\tau \in [0,20]$, estão apresentadas na Fig. 5.36.

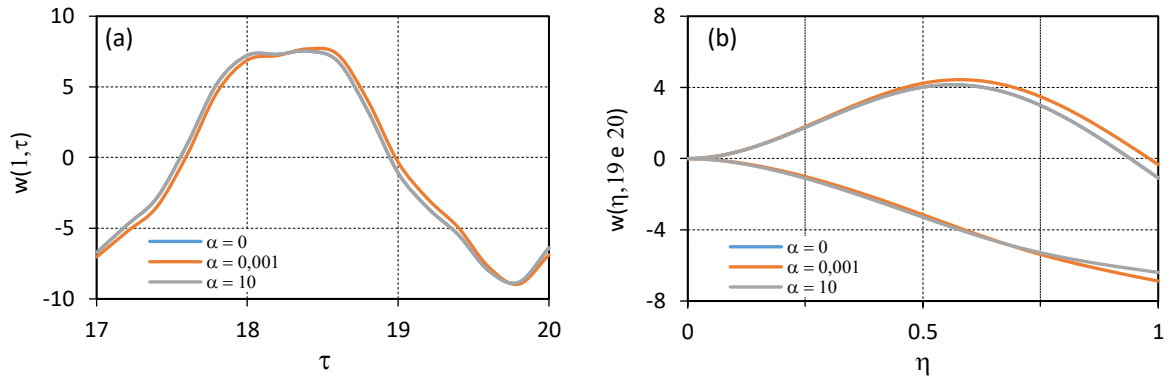


Figura 5.36 – Resultados da inclusão de α como termo da EDP no contorno C–CM.

A Fig. 5.36(a) exibe os resultados do deslocamento transversal $w(\eta, \tau) \times 10^4$, utilizado para avaliar a influência do termo relacionado a α nas variáveis da Eq. (5.21). Sendo um parâmetro dependente da natureza física do sistema, α está associado a elongações específicas do material, geralmente muito pequenas devido à influência do coeficiente de elasticidade (E).

Na Fig. 5.36(b), destacam-se dois momentos oscilatórios representantes da dinâmica vibracional da viga, selecionados nas inúmeras curvas geradas nas simulações, especificamente os perfis $\tau = 19$ e 20 , por serem mais expressivos que os demais. Com isso, verifica-se que α exerce pouca influência na movimentação da viga, especialmente quando o valor da rigidez à flexão (ξ) é elevado. Isso sugere uma deflexão reduzida e uma deformação quase-estática. Entretanto, à medida que ξ diminui, o parâmetro α passa a desempenhar um papel mais significativo nos eventos, tornando a deformação da viga menos significativa.

Para esta opção de cálculo depende da EDP, com $\alpha = 0$ ou 10 , o comportamento segue o mesmo padrão estabelecido anteriormente, aproxima o modelo à teoria da viga de *Euler-Bernoulli*. No entanto, quando $\alpha = 0,001$, observa-se uma ligeira diferença nos resultados. Isso pode ser atribuído à predominância numérica do termo que contém α ou à possibilidade de a viga ter sido submetida a uma deformação excessiva (AE) durante a vibração.

5.4.4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS ASSUMINDO ($\alpha = 0$ e $b = 1$)

Nessa condição, o amortecimento é desprezado e o alongamento é muito pequeno, levando os efeitos da presença de α a compartilhar os esforços atribuídos ao deslocamento longitudinal, definindo um processo quase-estático de deformação provocado pela movimentação do sistema como descrevem WICKERT (1992), CHEN e YANG (2005), DING e CHEN (2009) e RAVINDRA *et al.* (2010).

Por se tratar de um problema de resolução analítica diferenciada, a aplicação do método da transformada-integral converte o termo não linear da equação em uma configuração algébrica empregando uma *Equação Diferencial Integro-Parcial* (EDIP), atribuindo a aplicação dos efeitos devidos exclusivamente ao deslocamento transversal. Isso contempla um estiramento quase-estático resultante da deformação axial (α), gerado pela inércia longitudinal e influenciado pela rigidez à flexão média. A solução da EDIP ficará associada aos valores dos intervalos estabelecidos para: $\alpha \in [0,10]$, $\varepsilon \in [0,1]$, $v_0 \in [0,1]$, $\xi \in [0,10]$ e $\omega \in [0,50]$. Assim, a equação geral passa a ter a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}_i(\tau)}{d\tau^2} + 2v \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j(\tau)}{d\tau} + \frac{dv}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{w}_j(\tau) - (v^2 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) + \xi \mu_1^4 \bar{w}_i(\tau) \\ - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j(\tau) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_{k\ell} \bar{w}_k(\tau) \bar{w}_\ell(\tau) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.4.4.1 – Análise da convergência da condição de contorno C–C

A análise do comportamento vibracional do apoio C–C será realizada considerando a deformação longitudinal muito reduzida, a equação do modelo aborda aspectos da perturbação em (v), manifestando-se de forma rítmica com ligeiras flutuações periódicas devido ao tipo de apoio considerado (CHEN e YANG, 2005; DING e CHEN, 2009).

O teste de aplicação da Eq. (5.25), será conduzido por meio de uma avaliação comparativa da que utiliza a EDP e a EDIP para o mesmo modelo e sistema. Essas abordagens

são capazes de lidar tanto com pequenas quanto grandes amplitudes de oscilações segundo DING e CHEN (2009).

A taxa média de amplitude harmônica (ε) estabelecida para essa condição é 0,5% de η , e os valores das propriedades usadas junto a GITT são os mesmos estabelecidas anteriormente. Os resultados obtidos para $N = 32$ e $\tau = 20$, estão mostrados na Fig. 5.37.

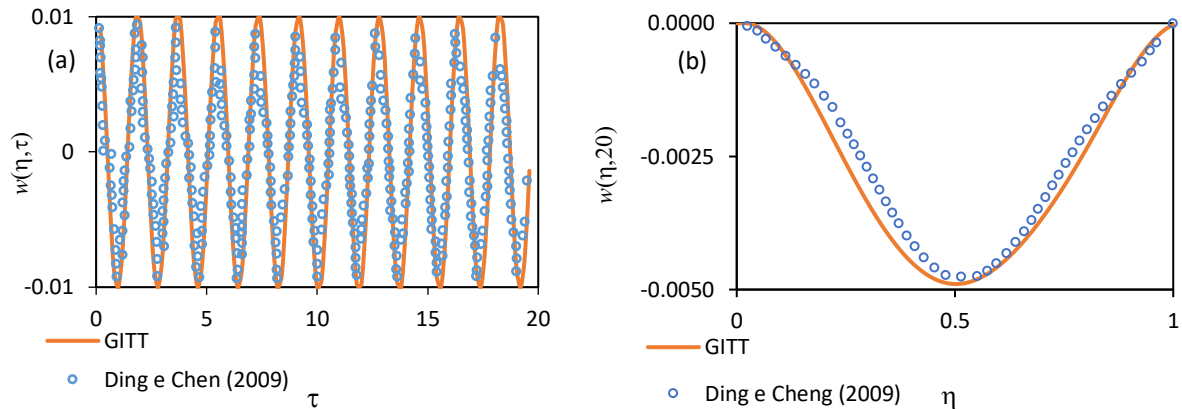


Figura 5.37 – Representação gráfica da dinâmica de oscilações da viga com contorno C–C.

Os gráficos da Fig. 5.37(a) apresentam o perfil temporal (t) e da Fig. 5.37(b) o perfil espacial (η), mostram que a EDIP dos movimentos transversais se destaca por evidenciar as perturbações e tensões do sistema, demonstrando que as diferenças nos resultados são relativamente pequenas mesmo para vibrações de média magnitude. É perceptível que essas diferenças podem aumentar à medida que as disparidades entre os resultados das amplitudes de oscilações $w(\eta, \tau)$ e da velocidade axial (v) crescerem. Essa observação sugere que a EDIP oferecer resultados mais ajustados que a EDP para esse tipo de apoio.

5.4.4.2 – Análise da convergência da condição de contorno C–CM

Com base nos critérios adotados para avaliar a inclusão de α no termo não linear da Eq. (5.25), a análise das vibrações induzidas pelo deslocamento transversal, rotacional e deflexional é realizada mediante a aplicação da condição de contorno C – CM, que resulta na EDIP que determina as vibrações transversais decorrentes da influência de uma tensão inicial localizada ou gerada pela velocidade de transporte.

A verificação da aplicação de α foi realizada utilizando uma taxa de excitação harmônica (ε) uniforme com amplitude de 0,1% de η . Os resultados considerando $\alpha = 0,0001$ e 10,

juntamente com os autovalores obtidos pela GITT para $\gamma = 1$, foram determinados para o conjunto de parâmetros: $\varepsilon = 0,001$, $\gamma = 1$, $v_0 = 0,001$, $\xi = 2$ e $\omega = 5$, para $N = 32$ e $\tau \in [0;20]$. Os resultados obtidos estão apresentados nos gráficos da Fig. 5.38.

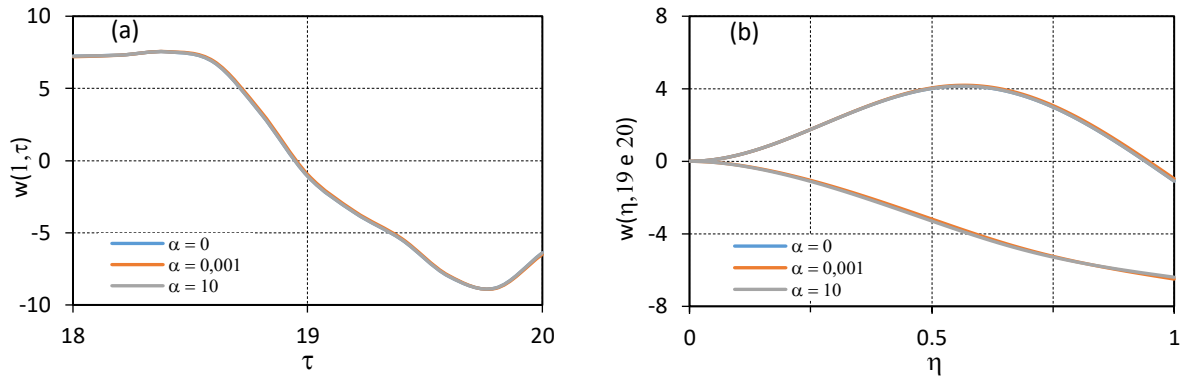


Figura 5.38 – Resultados da inclusão de α no termo EDIP do contorno C–CM.

Na Fig. 5.38(a) destaca-se o perfil temporal (τ) em função do deslocamento transversal $w(\eta, \tau) \times 10^4$, e o resultado da inserção do efeito Integro Parcial (EDIP) na equação do modelo em $\eta = 1$. Sendo estável e mais consistente em comparação com outros resultados. Isso suaviza as curvas, contrário ao que ocorre com o modelo representado pela EDP (DING e CHEN, 2009).

Em 5.38(b), para $\tau = 19$ e 20 , são mostradas duas curvas de oscilação nas inúmeras simuladas, para evidenciar a eficácia no uso de uma EDIP como equação geral do modelo. Nota-se que o perfil é consistente em todo o comprimento da viga, ao contrário do que ocorre com o modelo na configuração de uma EDP, que apresenta divergências a partir de $\eta > 0,25$.

Dessa forma, verifica-se que os resultados da Fig. 5.38, devido à presença de (α) na equação na forma EDIP, não exercem influência direta na dinâmica vibracional da viga para esse apoio, mesmo modificando a rigidez à flexão (ξ). Ao contrário do que ocorre com uma EDP. Esse comportamento é atribuído principalmente à presença da massa concentrada M que provoca um amortecimento natural ao sistema.

5.4.5 – AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA CONDIÇÃO DE CONTORNO C–C E C–CM

Nessa aplicação, a perspectiva é envolver o avançar do uso da GITT para analisar sistemas de vibração que se comportem como uma viga fina e flexível. Abrangendo a avaliação

da influência dos parâmetros na equação governante, analisando as intervenções que impactam na compreensão das características dinâmicas da viga.

Para consolidar esse estudo, a análise da movimentação da viga pode considerar a descrição comportamental estabelecida na EDIP, onde $a = 0$ e $b = 1$. Essa escolha foi preterível devido à sua precisão na interpretação dos dados, facilitando na análise e compreensão do sistema analisado.

5.4.5.1 – Resultados da condição de contorno C – C

As análises considerando o contorno C – C, para $N = 32$ com excitação harmônica (ε) uniforme para o primeiro modo de oscilação seguindo as condições estabelecidas DING e CHEN (2009). Obtiveram os resultados do deslocamento transversal em função da velocidade de transporte (v) ao longo de (η), considerando: $\alpha = 0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $\xi = 0,0001783$ e $\omega = 67$. Os resultados estão mostrados nos gráficos da Fig. 5.39.

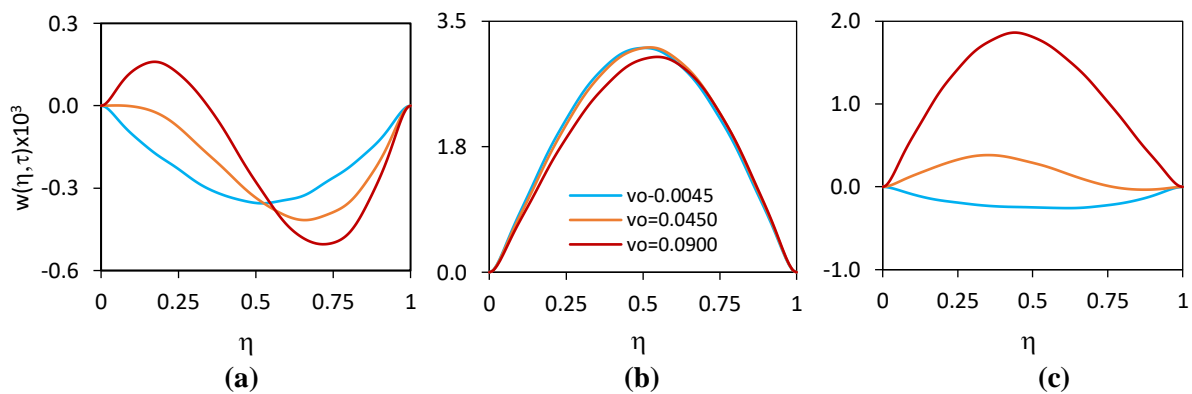


Figura 5.39 – Efeito da velocidade (v) sobre $w(\eta, \tau)$ em função de η e contorno C–C.

As curvas Da Fig. 5.39 representam uma infinidade de outras curvas quando $\tau = 1$, em 5.39(a), $\tau = 14$ em 5.39(b) e $\tau = 28$ em 5.39(c). Esses resultados mostram a relação existente entre a resposta dinâmica da viga e a interferência da variação da velocidade de transporte (v).

Observa-se que a amplitude mantém o perfil oscilatório devido ao apoio ser C–C, e a medida que as velocidades aumentam, há um desequilíbrio das oscilações que sugere uma correlação direta entre a velocidade de transporte axial (v) e a distribuição da energia vibracional da resposta dinâmica da viga.

A relação existente entre (v) e as flutuações da velocidade (ε) e a frequência angular (ω), foi analisada utilizando $\alpha = 0,04323$, $v_0 = 0,045$, $\xi = 0.0001783$ e $\omega = 67$. Os resultados das simulações estão representados nos gráficos da Fig. 5.40.

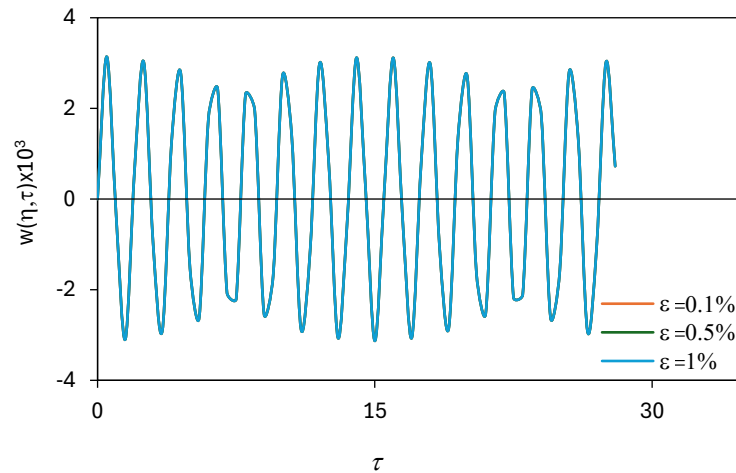


Figura 5.40 – Efeito da variação da velocidade (ε) sobre $w(\eta,\tau)$ em função de τ contorno C–C

A Fig. 5.40, mostra que as variações harmônicas (ε) influem diretamente na resposta do sistema em relação à velocidade de transporte (v) e o tempo de oscilção. O valor de $\varepsilon = 0,1\%$ representam uma viga rígida de baixa amplitude e pequena deflexão, $0,5\%$ uma viga de média amplitude no limite da deflexão, e 1% indica uma viga de grande amplitude na região de deformação do material, conforme Ding e Chen (2009, 2011). A relação entre a rigidez a flexão (EI) e a intensidade da tensão aplicada (T) para o apoio C–C em função de ξ . Sendo $\alpha = 0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $v_0 = 0,045$ e $\omega = 67$, tem os resultados das simulações do efeito do deslocamento lateral $w(\eta,\tau)$, representado na Fig. 5.41.

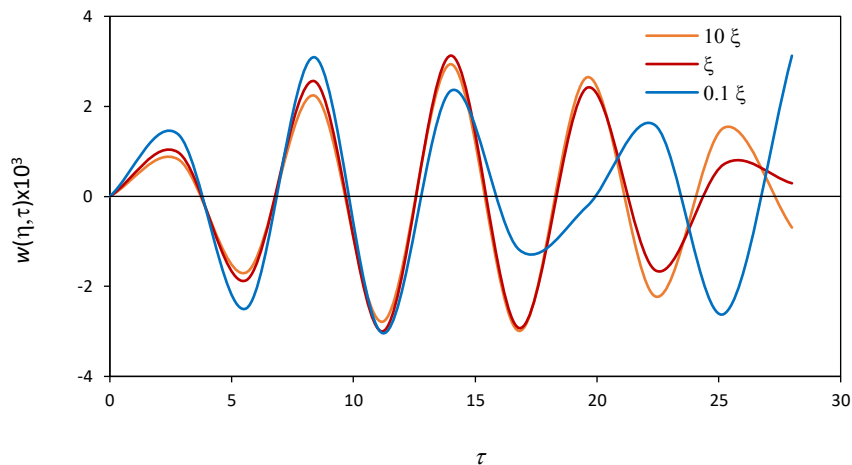


Figura 5.41 – Efeito da rigidez à flexão (ξ) sobre $w(\eta,\tau)$ em função de τ e contorno C–C.

Essa análise destaca a intensidade de ξ em função de τ , mostrando que com uma resistência à flexão de 10ξ , há uma alta tensão, resultando em ciclos oscilatórios contínuos. Para um ξ simples, a viga oscila no limite da tensão, sem aparentar bases para instabilidade. No entanto, ao considerar $0,1\xi$, a resistência à flexão atinge seu limite próximo a $\tau = 14$, devido à baixa tensão aplicada.

Esse tipo de avaliação é importante porque pode prever possíveis falhas e garantir a durabilidade da estrutura e a capacidade da viga em suportar deformações elásticas e tensões sem prejudicar a estrutura. Essa adaptação busca manter estabilidade, integridade e assegurar que a rigidez à flexão, está vinculada às propriedades geométricas do material.

Uma relação importante é o teste da resistência da estrutura por meio da área da seção (A) e a frequência angular (ω). Essa relação é testada com $\alpha = 0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $\nu_0 = 0,045$ e $\xi = 0,0001783$, e os resultados dessas modelagens estão apresentados nos gráficos da Fig. 5.42.

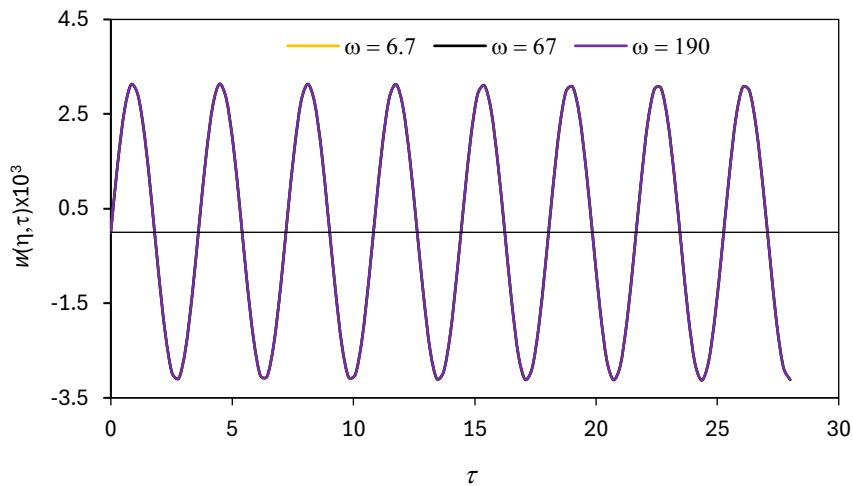


Figura 5.42 – Efeito da frequência angular (ω) sobre $w(\eta, \tau)$ em função de τ e contorno C–C.

A variação da área da seção transversal (A) exerce pouco ou nenhum impacto em ω ao longo do tempo. Para uma área de $0,2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ e um $\omega = 6,7$ o sistema opera próximo ao limite inferior das oscilações, revelando um equilíbrio delicado entre energia e deslocamento. Ao ampliar a uma área de $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, associada a um $\omega = 67$, o sistema atinge uma região de equilíbrio mais estável. Com uma área de $7 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ e um $\omega = 190$, o sistema se aproxima do limite superior das oscilações, que pode se tornar instável e de comportamentos pouco previsíveis, indicando gasto energético à manter o movimento.

Essas observações evidenciam que as oscilações desse sistema se tornam sensíveis nas proximidades dos contornos e dos limites vibracionais. Podem prejudicar o funcionamento do

sistema devido ao relaxamento ou enrijecimento da viga, associada à espessura que limita a flexão e deformação. Essas constatações destacam a relevância da interação da geometria do sistema e sua dinâmica vibracional, sublinhando a necessidade de considerações precisas para otimizar seu desempenho e resguarda a segurança.

5.4.5.2 – Resultados da condição de contorno C – CM

Considerando a análise paramétrica da Eq. (5.22), para o apoio C–CM. Considerando o efeito da velocidade de transporte (v) sobre o deslocamento transversal, utilizando os valores numéricos $\alpha=0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $\xi = 0,0001783$ e $\omega = 9, 5$ e 2 . Os resultados obtidos estão representados nos gráficos da Fig. 5.43.

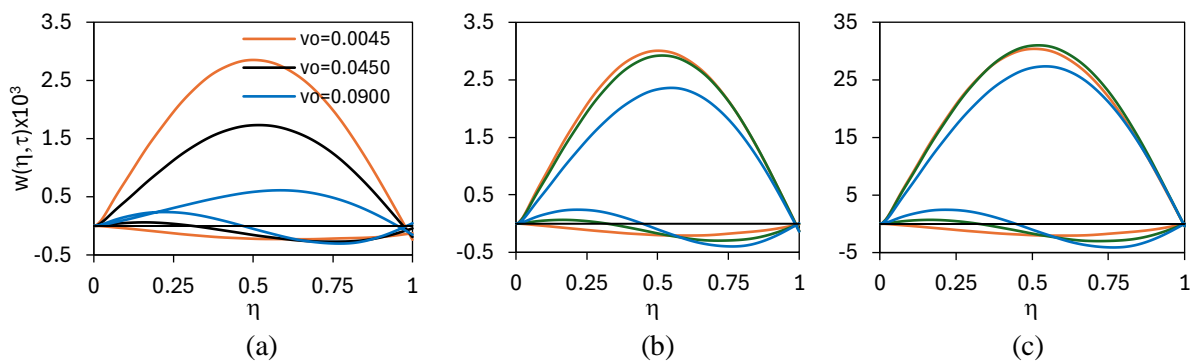


Figura 5.43 – Efeito da velocidade (v) sobre $w(\eta,t)$ em função de η e contorno C-CM.

Os resultados da Fig. 5.43(a) para $\gamma = 0,1$, 63(b) para $\gamma = 1$ e 63(c) para $\gamma = 10$, mostram a relação entre a resposta dinâmica da viga e a velocidade de transporte (v) orientada pela razão de massa (γ) em função de τ . Dentre as infinitas curvas geradas, foram destacadas as curvas representantes para $\tau = 1$ na parte inferior do gráfico e $\tau = 28$ na parte superior. Essas curvas mostram a cedência da viga devido a γ , elevando a amplitude da oscilação à medida que v intervêm na flexibilidade relacionada a energia consumida na movimentação da viga.

A análise da relação entre a velocidade de transporte (v) e o desvio harmônico da velocidade (ε) foi realizada utilizando os valores de $\alpha = 0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $v_0 = 0,045$ e $\omega = 9, 5$ e 2 . Os resultados dessas simulações estão apresentados nos gráficos da Fig. 5.44.

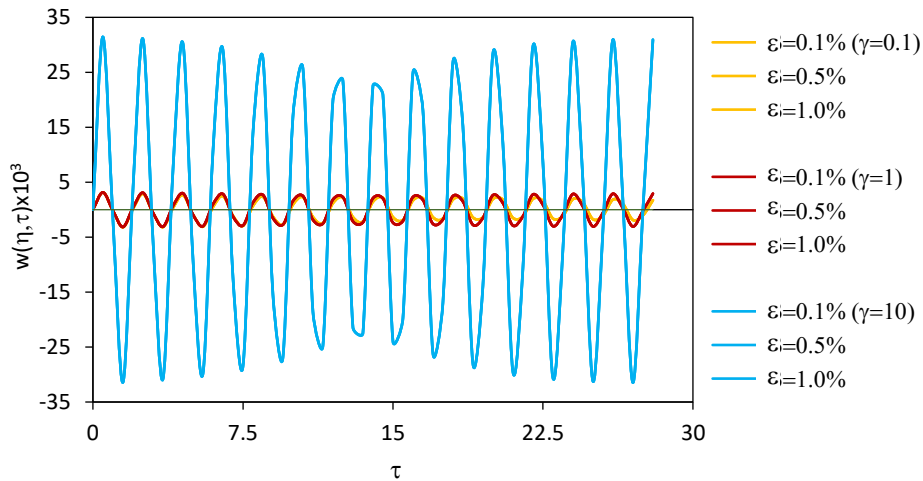


Figura 5.44 – Efeito das flutuações da velocidade (ε) em função de τ e contorno C–CM.

Os resultados da Fig. 5.44 apresentam os efeitos das flutuações (ε) da velocidade sobre o deslocamento transversal em diferentes valores de γ . Os resultados, independentemente de γ , indicam que o comportamental da viga é similar em todas as situações.

O conceito de rigidez estabelecido em DING e CHEN (2009, 2011) são válidos mesmo para valores de $\varepsilon < 0,5\%$. A movimentação é dinamicamente idêntica, com a mesma amplitude, enquanto acima desse valor apenas ocorre o aumento da amplitude. Para $\gamma = 0,1$, o desvio da flutuação tende a diminuir pela estática da viga. Em $\gamma = 0,1$, o perfil permanece constante ao longo do tempo, e em $\gamma = 10$, a flexão passa a ser preponderante devido à ação de M.

A análise da relação entre a rigidez a flexão (EI) e a intensidade da tensão aplicada (T) através do adimensional ξ para o apoio C–CM, utiliza $\alpha = 0,04323$, $\varepsilon = 0,005$, $\nu_0 = 0,045$ e $\omega = 9, 5$ e 2 . Os resultados dessas modelagens estão apresentados nos gráficos da Fig. 5.45.

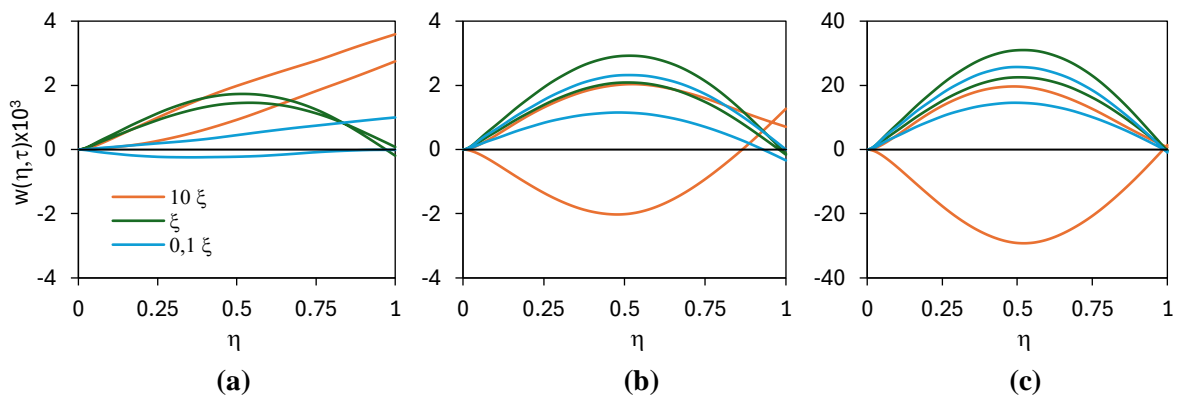


Figura 5.45 – Efeito da rigidez a flexão (ξ) em função de η e contorno C–CM.

Essa análise evidencia o impacto da intensidade de ξ para diferentes valores de γ , em (a) $\gamma=0,1$, (b) $\gamma=1$ e (c) $\gamma=10$, cujo perfil oscilatório é mantido mesmo diante da variação do deslocamento lateral $w(\eta,\tau)$. Nas áreas centrais dos gráficos, são observadas as deflexões para $\tau=14$ e nas partes mais extremas as deflexões para $\tau=28$.

Quando a resistência à flexão é de 10ξ , ocorrem ciclos oscilatórios amplos. Para um ξ simples, a movimentação ocorre em amplitudes de equilíbrio no ciclo oscilatório. Com uma resistência à flexão de $0,1\xi$, há certo relaxamento das oscilações atingindo limites intermediários de amplitude.

A interação entre γ e ξ , mostra uma dinâmica influenciada pelo valor de M que ocasiona um retardo nas movimentações e gera uma frequência compensatória ao ciclo oscilatório, contribuindo para a instabilidade do sistema, e mostrando que a complexidade do comportamento estrutural é influenciada pela resposta dinâmica e energia envolvida nas movimentações devido ao apoio C–CM.

Quando $\gamma=0.1$, as oscilações são predominantemente causadas pelas deflexões da própria viga, para $\gamma=1$, o sistema concentra seus esforços em manter o equilíbrio das forças deflexionais, buscando minimizar quaisquer desvios significativos. Por outro lado, quando $\gamma=10$, as oscilações tendem a induzir ao longo do tempo uma simetria nas deflexões devido à influência da massa concentrada. De alguma forma, esse tipo de apoio gerou a formação de modos vibracionais diferentes dos modos clássicos apresentados em LAURA *et al.* (1974).

A resistência estrutural da viga é medida pela relação entre a área da seção (A) e a frequência angular (ω). Essa relação foi testada para $\alpha=0,04323$, $\varepsilon=0,005$, $\nu_0=0,045$ e $\xi=0,0001783$. Os resultados das simulações estão apresentados nos gráficos da Fig. 5.46.

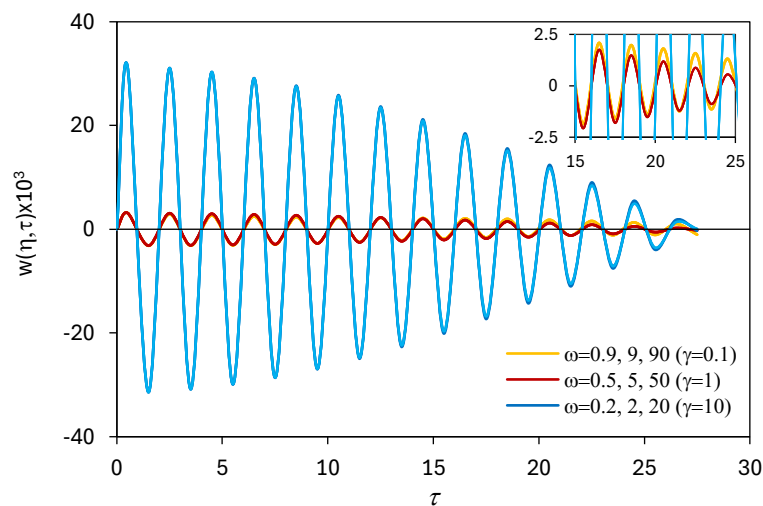


Figura 5.46 – Efeito da frequência angular (ω) em função de τ e contorno C–CM.

Na Fig. 5.46, cada conjunto de curvas de ω corresponde a diferentes valores de γ . A associação de ω com ν influencia escalonadamente na amplitude ao longo de τ . A variação da área está relacionada à variação da espessura da viga. Com uma área de $0,2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, os valores de ω são menores; com uma área de $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, os valores são intermediários; e com uma área de $20 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, eles são maiores. A relação entre ω , γ e a área (A) mostra como as características geométricas da viga afetam sua resposta dinâmica sob diferentes tipos de massa e energia.

Quando $\gamma = 0,1$, as oscilações seguem um padrão de movimentos que leva mais tempo para dissipar a energia da carga aplicada, resultando em oscilações significativamente maiores que de equilíbrio causado pela interferência da massa da viga independente do aumento da rigidez e de M. Por outro lado, para $\gamma = 1$, as oscilações concentram-se na movimentação provocada pela presença de M, resultando em um equilíbrio dinâmico próprio devido à semelhança das massas, o que causa uma perda gradual de energia ao longo do ciclo oscilatório. Quando $\gamma = 10$, as movimentações são coordenadas pela presença de M, que leva o sistema a um elevado patamar de amplitude, mantendo o perfil oscilatório independente da rigidez. Isso é devido à compensação da perda de energia pela baixa frequência de oscilação.

Essas observações destacam como diferentes valores de γ influenciam na dinâmica e dissipação de energia no sistema. Evidenciando a sensibilidade das oscilações nas proximidades dos limites vibracionais. A interação entre a geometria do sistema e dinâmica vibracional ressalta a importância de observações precisas da otimização do desempenho e garantia da segurança, especialmente em relação à rigidez da viga que limita a sua flexão.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUTURAS

6.1 – CONCLUSÕES

Esta tese se dedica à análise de sistemas cujas vibrações podem comprometer sua operacionalidade, integridade e segurança do sistema. Os resultados numéricos obtidos fornecem conclusões úteis para projetos de engenharia enfrentando esse desafio, contribuindo para aprimorar a eficácia operacional e a integridade dos sistemas em questão.

Dessa forma, o objetivo do trabalho passou a ser a verificação do comportamento de estruturas simples ou complexas frequentemente dependem de sistemas que se assemelham a cordas ou vigas, podendo estar simplesmente apoiada, restritas ou livres, com ou sem amortecimento.

Esses objetivos quando aplicados, podem fornecer modelos que controlem as vibrações ou dissipação da energia acumulada. Que possam ser empregados em uma variedade de setores, incluindo: construção civil, indústria naval, indústria de alimentos, ferrovias, elevadores em geral, linhas de transmissão ou distribuição elétrica, correias, serras de corte, cabos teleféricos, manipuladores robóticos, tubulações, vigas, e outras aplicações.

Na história dessa temática, notou-se uma progressiva complexidade evolutiva dos modelos, em contraste aos primeiros modelos que essencialmente eram idênticos. Essa evolução trouxe um aumento no grau de dificuldade na resolução matemática e com isso, a necessidade do uso de computadores.

A inclusão da computação desempenhou um papel importante na melhoria das simulações, possibilitando executar modelos cada vez mais aprimorados. Tendo uma maior eficiência na quantidade de termos, nas condições de contorno e na precisão dos resultados. Por conseguinte, os projetos se tornaram mais dinâmicos e adaptáveis às necessidades específicas de cada problema.

Assim, o desenvolvimento desse trabalho se fundamentou nas equações dos modelos originais (primários) de vibrações de cordas e vigas flexíveis, examinando as aplicações teóricas e práticas de cada caso. Destacando a relevância da contribuição das metodologias empregadas na atualização dessas informações devido a aplicação da *Técnica da Transformada Integral Generalizada* – GITT.

Os casos estudados foram selecionados de forma a oferecer uma avaliação e atualização dos métodos estabelecidos envolvendo o comportamento de estruturas homogêneas, esbeltas e flexíveis sujeitas a oscilações transversais e movimentações longitudinais. Considerando diferentes condições de contorno, como engastada e móvel, considerando ou não a presença de amortecimento.

As diferentes formas de avaliar as equações incluiu a aplicação do princípio de *Hamilton* para estabelecer quatro modelos distintos de vibração de Cordas e um modelo de vibração de Vigas, ampliada para a teoria da viga de *Euler-Bernoulli*. Que relaciona o cálculo da deflexão de uma viga ao carregamento dinâmico, formulada a partir de uma equação diferencial parcial de 4ª ordem.

Todas as equações foram obtidas usando a técnica da GITT, sendo apresentadas em termos de funções elementares ou específica para cada sistema. Essas equações basearam-se nas informações paramétricas incorporadas aos modelos, avaliando e discutindo os efeitos das vibrações e das frequências naturais, levando em consideração a sensibilidade do método e a característica dinâmica individual de cada sistema.

Buscou-se explorar a aplicabilidade da GITT como metodologia eficaz na solução de uma gama de problemas, incluindo equações integro-diferenciais. Essas equações combinam simultaneamente características de Equações Diferenciais Integro Parciais (EDIP) e Equações Diferenciais Parciais (EDP). A técnica da GITT pôde então, lidar com essa classe específica de problema e proporcionar valiosas considerações para soluções futuras.

A contribuição mais marcante e INÉDITA foi a introdução de uma nova forma de cálculo que soluciona os problemas de valores de contorno, especificamente para condições de contorno não clássicas (C – CM), na formulação da solução pela GITT. Essa abordagem depende dos autovalores sem a necessidade de utilizar filtros, evitando modificar a propriedade de ortogonalidade das autofunções. Essa solução inovadora permitirá lidar com uma série de problemas, ampliando o uso dessa metodologia e fornecendo soluções para outros tipos de caso.

Uma outra contribuição significativa foi o desenvolvimento de uma abordagem modular das equações governantes, que permite ajustar os modelos desenvolvidos pela GITT de acordo com a necessidade de cada problema. Determinando uma gama de possibilidades na escolha do mais apropriado para o uso operacional. Tudo isso, empregando uma única equação tanto para o modelo de Cordas e como para o modelo de Vigas.

Esse enfoque flexibiliza ou desabilita a incorporação de parâmetros e permite adicionar ou remover termos específicos nos modelos, conforme a necessidade de estudo em diferentes

casos. Possibilita também a inserção de dados físicos e a realização de simulações mais abrangentes. Viabiliza uma variedade de combinações e uma plataforma de arranjos, que podem ajudar nas análises mais profundas e a exploração de inúmeros cenários de aplicação. Identificando comportamentos e padrões que não seriam possíveis de serem observados com outros modelos.

As estruturas analisadas foram submetidas a pontos de fixação ou apoios, os quais foram convertidos em condições de contorno chamadas de Clássicas (C – C) e as Não-clássicas (C – CM). Estas últimas envolvem combinações de apoios estruturados conforme os princípios de articulação e funcionalidade do sistema. Levando em conta fatores como tensão, deformação, cisalhamento, flexão, velocidade de transporte, rigidez do material, amortecimento e intensidade da carga. As aplicações dessas condições de contorno foram analisadas e seus resultados foram testados e validados utilizando valores de outros autores, demonstrando compatibilidade entre os resultados.

Em todos os modelos foi observado que a velocidade de transporte tem um protagonismo em pequenos valores. Para valores maiores, seu comportamento torna-se complexo e limitado ao regime estabelecido pela velocidade de processo, produzindo harmônicos de amplitudes diferentes que servem como indicativos de mudança de frequência e propostas de análises experimentais.

Tanto na vibração de Condas como em Vigas a frequência angular é crucial para a integridade comportamental do sistema e para garantir o bom funcionamento do sistema. Alguns modelos consideram o autoexcitação ou estímulos externos como causas de vibrações que podem ser nocivas aos suportes ou desbalancear o amortecimento. Nesses modelos, apesar das oscilações características serem diferentes conforme as autofrequências, a dissipação de energia se mantém relativamente baixa, mesmo o esforço sendo máximo na posição central.

A flexão nos modelos, é um parâmetro que afeta a capacidade de oscilação. Na oscilação de cordas, se for pequena, causa deformação e reduz a amplitude da oscilação e se for grande, pode causar deformidades longitudinais severas. Em oscilação de vigas, exerce pouca influência devido à rigidez do material (AE). Sua influência é significativa se estiver atuando em conjunto à velocidade do sistema.

Os demais parâmetros são próprios de cada modelo. Como a velocidade característica, que interfere de maneira específica na estabilidade do sistema devido à aceleração e desaceleração da movimentação longitudinal. Essa ação gera pontos de instabilidade ($\|\rho_j\| > 1$) que são identificados pela *teoria de Lyapunov-Floquet*.

Para o apoio C-C a deformação axial exercer influência de acordo com o tipo de material da viga. Se a rigidez a flexão for grande (pouca flexibilidade) e a velocidade de transporte elevada as oscilações serão semelhantes a uma viga de *Euler-Bernoulli*, mas se for pequena, a deformação ganha espaço e se acentua com o passar do tempo e ao longo da viga.

Para o apoio C-CM, os padrões de análise variam devido a relação de massa, provocada pela presença da massa adicional (M). Resultando em um comportamento oscilatório amplo no início, que diminui com o tempo até alcançar um equilíbrio oscilatório sem dissipação de energia. Também se observa um consumo elevado de energia mesmo para pequenas deflexões.

Portanto, a proposta do trabalho foi contribuir com a resolução de problemas específicos por meio da aplicação da técnica da GITT, abrindo uma perspectiva de resolução matemática para vários tipos de problemas. Sua aplicação pode levar a abordagens contemporâneas que promovam uma compreensão mais profunda e precisa dos fenômenos estudados, resultando em avanços significativos no campo de análise de vibrações em estruturas flexíveis.

6.2 – RECOMENDAÇÕES FUTURAS

A continuação deste trabalho seguira a trajetória da técnica da GITT aplicada nesse tipo de análise, que se torna um tema de grande relevância devido à sua influência na determinação das vibrações de sistemas flexíveis homogêneos e esbeltos.

Esses resultados podem ser estendidos e aplicados em outros ambientes e contextos, ampliando assim o impacto e a aplicabilidade da técnica. Conforme seguem abaixo uma lista de recomendações para a continuação da pesquisa em etapas subsequentes:

1. Realizar uma análise mais aprofundada dos parâmetros de entrada, como α , β , δ e ω , para entender melhor seu impacto no comportamento de sistemas flexíveis como cordas e vigas.
2. Explorar as condições de contorno em diferentes estruturais geometrias, para avaliar a robustez dos modelos propostos em uma variedade de cenários da engenharia.
3. Empregar métodos estatísticos de análise de dados para investigar as inúmeras combinações dos parâmetros dos modelos, e depois determinar os valores ideais visando otimizar e melhorar o desempenho e a eficiência do sistema analisado.

4. Validar experimentalmente os resultados obtidos teoricamente por meio de simulações computacionais, garantindo a confiabilidade e a aplicabilidade prática dos modelos desenvolvidos.
5. Estender a análise para incluir maiores interações não lineares e fenômenos de acoplamento, para uma compreensão mais abrangente do comportamento do sistema em condições reais.
6. Usar as condições de contorno sem aplicação de filtro e com aplicação de filtro, para testar esse ponto da contextualização desse tipo de problema.
7. Realizar aplicações práticas dos modelos desenvolvidos em diferentes campos de aplicação, como na análise dinâmica de transporte de fluidos de diferentes densidades em condutos com vários regimes de escoamento. Para demonstrar a utilidade e a relevância dos modelos em outras áreas da engenharia.

Além disso, vale considerar:

- Aplicar esses conceitos em sistemas que testam materiais existentes ou novos materiais que precisam de uma resposta rápida para projetos de engenharia que precisam ambientar uma garantia de continuidade ou funcionamento eficaz para que possam entrar em operação.
- Ampliar esses conceitos para outros sistemas de uso comum no cotidiano humano ou em processos de fabricação, como os que operam utilizando cordas e vigas flexíveis ou similares, e processos que fazem uso de sistemas semelhantes como placas finas, estruturas espessas, longas, vazadas, etc., ou processos que empregam vigas fixas ou móveis, articuladas ou não, como em estruturas mais complexas, de cama elástica olímpica, guindastes, pontes elevadiças, cabos submarinos e outros sistemas desse porte.
- Complementar a pesquisa com o uso de resultados experimentais obtidos em laboratórios específicos de vibração, o que aprimoraria o uso dos modelos e refinaria os resultados da GITT, aproximando para casos mais realísticos de sistemas de engenharia, desde estruturas simples até estruturas mais planejadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRO, Kashif Ali; ATANGANA, Abdon; KHOSO, Ali Raza, 2021. Dynamical behavior of fractionalized simply supported beam: An application of fractional operators to Bernoulli-Euler theory. *Nonlinear Engineering*, v. 10, n. 1, p. 231-239. <http://dx.doi.org/10.1515/nleng-2021-0017>. Acessado em: 02 abr 2024.

AGHAMOHAMMADI, Mehrdad; S'OROKIN, Vladislav; MACE, Bria, 2023. Nonlinear dynamics of parametrically excited cantilever beams with a tip mass considering nonlinear inertia and Duffing-type nonlinearity. *Nonlinear Dyn*, v. 111, n. 8, p. 7251-7269. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08236-w>. Acessado em: 20 jun 2024.

ALI, Sajid; HAWWA, Muhammad A., 2023. Dynamics of axially moving beams: A finite difference approach, *Ain Shams Engineering Journal*, Volume 14, Issue 1, 2023, 101817, ISSN 2090-4479, <https://doi.org/10.1016/j.asej.2022.101817>. Acessado em: 13 abr 2024.

ALMEIDA, Marcio Tadeu, 1990. **Vibrações Mecânicas para Engenheiros**. 2ª ed., Edgard Blücher.

AN, chen; SU, Jian, 2011. Dynamic response of clamped axially moving beams: Integral transform solution. *Applied Mathematics and Computation*. 218(2), p. 249–259. ISSN 0096-3003, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.05.035>. Acessado em: 09 abr 2024.

AN, Chen; SU, Jian, 2017. Dynamic Behavior of axially functionally graded pipes conveying fluid. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2017, Article ID 6789634, 11 pages. <https://doi.org/10.1155/2017/6789634>. Acessado em: 11 abr 2024.

AMES, W. F., 1965. Nonlinear vibrations of moving threadline. In: AMES, W. F. *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. London: Academic Press, Cap. 7. p. 464-466. Disponível: https://www.google.com.br/books/edition/Nonlinear_Partial_Differential_Equations/xwaZP3fxAzIC?hl=pt-BR&gbpv=1&dq=inauthor:%22W.+F.+Ames%22&printsec=frontcover. Acessado em: 20 jun 2024.

AMES, W. F.; LEE, S. Y.; ZAISER, J. N., 1968. Non-linear vibration of a traveling threadline. *International Journal of Non-linear mechanics*, v. 3, n. 4, p. 449-456, [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(68\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0020-7462(68)90031-0). Acessado em: 09 abr 2024.

BAPAT, V. A.; SRINIVASAN, P., 1967. Nonlinear Transverse Oscillations in Traveling Strings by the Method of Harmonic Balance. *Journal of Applied Mechanics*, v. 34, n. 3, p. 775-777. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3607783>. Acessado em: 07 jun 2020.

- BARRY, Joubaneh, O. R.; OGUAMANAM, Donatus C. D., 2019. Vibrations of sandwich beams with tip mass: Numerical and experimental investigations. *Composite Structures*, Volume 210, Pages 628-640. ISSN 0263-8223, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.079>. *Acessado em: 06 mai 2024*.
- BANICHUK, Nikolay; Ivanova, Svetlana; JERONEN, Juha; TUOVINEN, Tero, 2014. *Periodic spectral Instability Analysis of Axially Moving Beam with Elastic Supports*. *Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)*, v. 47, n. 1, p. 1-16. Disponível: https://www.researchgate.net/publication/263988068_Periodic_spectral_instability_analysis_of_axially_moving_beam_with_elastic_supports. *Acessado em: 20 Jul 2024*.
- BLEVINS, Robert D.; PLUNKETT, R., 1979. Fórmulas for natural frequency and mode shape. *Journal of Applied Mechanics*, v. 47, n. 2, p. 461. <https://doi.org/10.1115/1.3153712>. *Acessado em: 19 mar 2021*.
- CHAKRABORTY, G.; MALLIK, A. K.; HATWAL, H., 1999. Non-linear vibration of a travelling beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 34, n. 4, p. 655-670. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00017-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00017-1). *Acessado em: 09 abr 2024*.
- CHAPRA, Steven. C.; CANALE, Raymond. P., 2020. *Numerical Methods for Engineers*. 6th ed., McGraw-Hill Education. p. 994. *Acessado em: 21 abr 2024*.
- CHEN, Li-Qun, 2005. Analysis and Control of Transverse Vibrations of Axially Moving Strings. *Applied Mechanics Reviews*, v. 58, n. 2, p. 91-116. <http://dx.doi.org/10.1115/1.1849169>. *Acessado em: 10 abr 2024*.
- CHEN, Li-Qun; YANG, Xiao-Dong; CHENG, Chang-Jun, 2004. Dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, v. 23, n. 4, p. 659-666, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.01.002>. *Acessado em: 29 ago 2022*.
- CHEN, Li-Qun; YANG, Xiao-Dong, 2005. Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models. *International Journal of Solids and Structures*, v. 42, n. 1, p. 37-50. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.07.003>. *Acessado em: 10 abr 2022*.
- CHEN, S. H.; HUANG, J. L.; SZE, K. Y., 2007. Multidimensional Lindstedt–Poincaré method for nonlinear vibration of axially moving beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 306, n. 1-2, p. 1-11, set. 2007. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.05.038>. *Acessado em: 10 abr 2022*.
- CHUNG, Chunhui; KAO, Imin, 2011. Modeling of axially moving wire with damping: Eigenfunctions, orthogonality and applications in slurry wiresaws. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 12, p. 2947-2963. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.01.008>. *Acessado em: 10 abr 2024*.

COMSOL Multiphysics® v. 5.2, Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2015. ISO/IEC. (2011). ISO/IEC 25010:2011. Systems and software engineering - Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE) - System and software quality models. Disponível: < <https://sol.sbc.org.br/livros/index.php/sbc/catalog/download/7/13/39-1?inline=1>>.

COTTA, R. M.; NAVEIRA-Cotta, C. P.; KNUPP, D. C., 2015. Nonlinear Eigenfunction Expansions for the Solution of Nonlinear Diffusion Problems. *Proc. of the 1st Thermal and Fluid Engineering Summer Conference*, ASTFE Digital Library, Paper no. TFESC-13652, New York, August 9-12, p.1103-1116.

COTTA, R. M.; NAVEIRA-Cotta, C. P.; KNUPP, D. C., 2016. Nonlinear eigenvalue problem in the integral transform's solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions. *Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. v. 26, n. 3/4, p. 767-789. INSS: 0961-5539. <https://doi.org/10.1108/HFF-08-2015-0309>. Acessado em: 21 jun 2024.

COTTA, R. M., KNUPP, D. C., QUARESMA, J. N. N., 2018. Analytical Methods in Heat Transfer. In: Handbook of Thermal Science and Engineering, 1st ed. *Springer International Publishing*, p. 3054. ISBN: 978-3-319-28573-3. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26695-4>. Acessado em: 21 jun 2024.

CORDEIRO, C. E. Z.; STUTZ, L. T.; KNUPP, D. C., MATT, C. F. T., 2022. Generalized Integral Transform and Hamiltonian Monte Carlo for Bayesian structural damage identification, 2002. *Applied Mathematical Modelling*, Volume 104, 2022, Pages 243-258, ISSN 0307-904X, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.11.026>. Acessado em: 10 abr 2024.

COUTINHO, Paulo André Amaral, 2021. *A técnica da transformada integral generalizada aplicada na solução da equação de Black-Scholes para avaliação de derivativos*. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal do Pará (UFPA). Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos, maio de 2021. p. 47. Disponível: <https://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/13588>. Acessado em: 21 jun 2024.

DING, Hu; CHEN, Li-Qun. 2009. On two transverse nonlinear models of axially moving beams. *Science in China Series E: Technological Sciences*, v.52, n.3, p. 743-751. <https://doi.org/10.1007/s11431-009-0060-1>. Acessado em: 10 abr 2024.

DING, Hu; CHEN, Li-Qun, 2011, Equilibria of axially moving beams in the supercritical regime. *Arch Appl Mech*. Vol. 81, pp. 51–64. <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0394-y>. Acessado em: 10 abr 2024.

DING, Hu; TAN, Xia; DOWELL, Earl H., 2017. Natural frequencies of a super-critical transporting Timoshenko beam. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, v. 66, p. 79-93. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.06.007>. Acessado em: 27 mai 2024.

FUNG, Rong-Fong; CHANG, Han-Chi, 2001. Dynamic and energetic analyses of a string/slider non-linear coupling system by variable grid finite difference. *Journal of sound and vibration*, v. 239, n. 3, p. 505-514. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3140>. Acessado em: 10 abr 2024.

GHAYESH, Mergen H.; KAFIABAD, Hossein A.; REID, Tyler, 2012. Sub- and super-critical nonlinear dynamics of a harmonically excited axially moving beam. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 49(1), 2012, pp. 227-243, ISSN 0020-7683, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.007>. Acessado em: 10 abr 2024.

GHAYESH, Mergen H.; FAROKHI, Hamed; HUSSAIN, Shahid, 2016. Viscoelastically coupled size-dependent dynamics of microbeams, *International Journal of Engineering Science*, Volume 109, p. 243-255, ISSN 0020-7225, <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.09.004>. Acessado em: 10 abr 2024.

GU, Ji-jun; AN, Chen; LEVI, Carlos, 2012. Prediction of vortex-induced vibration of long flexible cylinders modeled by a coupled nonlinear oscillator: integral transform solution. *Journal of Hydrodynamics*, v. 24, n. 6, p. 888-898. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(11\)60317-X](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(11)60317-X). Acessado em: 10 abr 2024.

GU, Ji-jun; AN, Chen; DUAN, Menglan; LEVI, Carlos; SU, Jian, 2013. Integral transform solutions of dynamic response of a clamped-clamped pipe conveying fluid. *Nuclear Engineering and Design*. 254, pp. 237-245, ISSN 0029-5493. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2012.09.018>. Acessado em: 10 abr 2024.

GU, Ji-jun; MA, Tianqi; DUAN, Menglan, 2016. Effect of aspect ratio on the dynamic response of a fluid-conveying pipe using the Timoshenko beam model. *Ocean Engineering*, v. 114, p. 185-191. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.01.021>. Acessado em: 09 abr 2024.

GÜRGÖZE, M., 1984. A note on the vibrations of restrained beams and rods with point masses. *Journal of Sound and Vibration*, v. 96, n. 4, p. 461-468. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90633-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90633-3). Acessado em: 10 abr 2024.

HARRISON, H. R.; NETTLETON, T., 1998. Hamilton's Principle. In: HARRISON, H. R.; NETTLETON, T. *Advanced Engineering Dynamics*. London: Arnold. Cap. 3. p. 46-54. Acessado em: 21 jun 2024.

HE, Y., AN, C.; SU, Jian, 2020. Generalized integral transform solution for free vibration of orthotropic rectangular plates with free edges. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 42, 183. <https://doi.org/10.1007/s40430-020-2271-0>. Acessado em: 12 abr 2024.

HUANG, Jeng-Sheng; FUNG, Rong-Fong; LIN, Chih-Hung, 1995. Dynamic stability of a moving string undergoing three-dimensional vibration. *International journal of mechanical sciences*, v. 37, n. 2, p. 145-160. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)93347-9](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)93347-9). Acessado em: 10 abr 2024.

HUO, Yinlei; WANG, Zhongmin, 2016. Dynamic analysis of a vertically deploying/retracting cantilevered pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, v. 360, p. 224-238. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.014>. Acessado em: 11 abr 2024.

HECHT, Eugene, 1991. **Óptica**. 2ª ed. Portuguesa, Fundação Calouste Gulbenkian. 720 pag., nº chamada UFPA: 535 H447o. ISBN: 972310542X.

IKE, Charles C., 2023. Free Vibration of Thin Beams on Winkler Foundations Using Generalized Integral Transform Method. *Engineering and Technology Journal*. 41(11), pp. 1286 – 1297. <http://doi.org/10.30684/etj.2023.140343.1462>. Acessado em: 10 abr 2024.

IMSL, 2003, *IMSL Fortran Library version 5.0*, MATH/LIBRARY, vol. 2. Visual Numeric, Inc., Houston, TX, 2003.

JOHNSON, R. O.; STONEKING, J. E.; CARLEY, T. G., 1986. Unstable oscillation of tubular cantilevered beams conveying a compressible fluid, *Nuclear Engineering and Design*, Volume 96, Issue 1, p. 33-45, ISSN 0029-5493. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(86\)90160-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(86)90160-3). Acessado em: 10 abr 2024.

KUNDUR, Prabha, 1994. *Power System Stability and Control*. Reino Unidos, McGraw Hill Education. Disponível: <https://powerunit-ju.com/wp-content/uploads/2018/01/Power-System-Stability-and-Control-by-Prabha-Kundur.pdf>. Acessado em: 20 jun 2024.

KUMAR, Sanjay, 2016. Comparison of deflection and slope of cantilever beam with analytical and finite element method for different loading conditions. *International Journal of Engineering Science and Innovative Technology (IJESIT)*, v. 5, n. 6, p. 45-51. Disponível: https://www.ijesit.com/Volume%205/Issue%206/IJESIT201606_07.pdf. Acessado em: 20 jun 2024.

LAD, Pranav; KARTIK, V., 2015. Dynamics and Stability of a Travelling String Subjected to an Axial Follower Force. In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers*, p. V04BT04A065. <https://doi.org/10.1115/IMECE2015-52301>. Acessado em: 11 abr 2024.

LAURA, P. A. A.; MAURIZI, M. J.; POMBO, J. L., 1975. A note on the dynamic analysis of an elastically restrained-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, v. 41, n. 4, p. 397-405. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(75\)80104-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80104-0). Acessado em: 10 abr 2024.

LAURA, P. A. A.; POMBO, J. L.; SUSEMIHL, E. A., 1974. A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, v. 37, n. 2, p. 161-168. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80325-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80325-1). Acessado em: 10 abr 2024.

LEE, E. W., 1957. Non-linear forced vibration of a stretched string. *Br. J. Appl. Phys.* **8**(411), p. 411-1413. <https://doi.org/10.1088/0508-3443/8/10/308>. Acessado em: 23 jun 2024.

LEITÃO, Antonio, 2001, **Cálculo Variacional e Controle Ótimo**. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA). Publicações Matemáticas. UFSC. Disponível: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/23_CBM_01_02.pdf. Acessado em: 07 jun. 2024.

LEMONIS, Minas E., 2020. **Calculation tools & Engineering Resources: Calc Resource**. 2020. Disponível em: <https://calresource.com/statics-cantilever-beam.html#anchor-2> and <https://www.youtube.com/watch?v=FpwtAWbX-A>. Acessado em: 27 jun 2020.

LI, X. F.; TANG, A. Y.; XI, L. Y., 2013. Vibration of a Rayleigh cantilever beam with axial force and tip mass, *Journal of Constructional Steel Research*, Volume 80, 2013, p. 15-22, ISSN 0143-974X, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2012.09.015>. Acessado em: 13 abr 2020.

LI, Fangqiu; AN, Chen; DUAN, Menglan; SU, Jian, 2020. Combined damping model for dynamics and stability of a pipe conveying two-phase flow, *Ocean Engineering*, v. 195, 106683, ISSN 0029-8018, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106683>. Acessado em: 23 jun 2020.

LIMA, Miguel A. Araujo, 2022. **Modelo computacional para análises estática e dinâmica de estruturas de aço e madeira com seções genéricas e inércias variáveis em mísulas**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas e Construção. Disponível: <http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/16405>. Acessado em: 29 fev 2020.

LU, Lei; YANG, Xiao-Dong; ZHANG, Wei; LAI, Siu-Kai, 2019. On travelling wave modes of axially moving string and beam. *Shock and Vibration*, Hindawi,, v. 2019, n. 13, ID 9496180, <http://doi.org/10.1155/2019/9496180>. Acessado em: 20 out 2024.

MA, Jinkui K.; SU, Jian; LU, Changhou H.; LI, Jianmei M., 2006. Integral transform solution of the transverse vibration of an axial moving string. *Journal of Vibration Measurement & Diagnosis*, v. 26, n. 117, p. 104-107. Disponível: <https://www.researchgate.net/publication/291805251>. Acessado em: 24 jun 2024.

MARYNOWSKI, Krzysztof; KAPITANIAK, Tomasz, 2014. Dynamics of axially moving continua. *International Journal of Mechanical Sciences*. v. 81, p. 26-41. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.01.017>. Acessado em: 02 jul 2024.

MATT, Carlos F. Trotta, 2009. On the application of generalized integral transform technique to wind-induced vibrations on overhead conductors. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 78, n. 8, p. 901-930. <https://doi.org/10.1002/nme.2513>.

MATT, Carlos F. Trotta, 2013. Simulation of the transverse vibrations of a cantilever beam with an eccentric tip mass in the axial direction using integral transforms. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, p. 9338-9354. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.068>. Acessado em: 03 jul 2020.

MATT, Carlos F. Trotta, 2021. Combining integral transform and a generalized probabilistic approach of uncertainties to quantify model-parameter and model uncertainties in computational structural dynamics: The stochastic GITT method, *Applied Mathematical Modelling*, 99, pp. 673-703, ISSN 0307-904X, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.07.008>. Acessado em: 24 jun 2024.

MESQUITA, Amábile J. Neiris, 2007. **Análise da estabilidade de sistemas dinâmicos periódicos usando Teoria de Sinha**. 2007. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São Paulo. Disponível: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/b4d37095-12af-4e46-a2ab-59cf4bf5ac7d/content>. Acessado em: 24 jun 2024.

MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M., 1998. Heat conduction with non-linear boundary conditions via integral transforms and symbolic computation. *Proceedings of the 11th International Heat Transfer Conference*, Vol. 7, South Korea, August, pp. 77-81. <https://doi.org/10.1615/IHTC11.760>. Acessado em: 24 jun 2024.

MIYAGAWA, Helder K.; PONTES, Fábio de A.; CURCINO, Ingrid V.; FERREIRA, Jackline Rodrigues F.; PONTES, Péricles C.; MACEDO, Emanuel Negrão; QUARESMA, João N. N., 2019. Transformação integral do escoamento MHD com transferência de calor e massa de um biofluido em um canal de placa paralela. *Brazilian Journal of Development*. v. 5, n. 10, p. 17851-17868, ISSN 2525-8761. <https://doi.org/10.34117/bjdv5n10-052>. Acessado em: 24 jun 2024.

MONTEIRO Jr., Francisco N.; CALUZI, João J., 2009. O Aparato de Lissajous e o Ensino Experimental das Vibrações. *Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*. VII Enpec, Florianópolis, 8 de novembro de 2009. Disponível: <https://fep.if.usp.br/~profis/arquivos/viienpec/VII%20ENPEC%20-%202009/www.foco.fae.ufmg.br/cd/pdfs/349.pdf>. ISSN: 21766940. Acessado em: 22 abr 2024.

MOTE Jr, C. D., 1965. A study of band saw vibrations. *ASME Journal of the Franklin institute*, v. 279, n. 6, p. 430-444. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(65\)90273-5](https://doi.org/10.1016/0016-0032(65)90273-5). Acessado em: 11 abr 2024.

MOTE Jr, C. D., 1966. On the Nonlinear oscillation of an axially moving string. *Journal of applied mechanics*. vol. 33, n. 2, p. 463-464. <https://doi.org/10.1115/1.3625075>. Acessado em: 06 jul 2020.

MOUSAVI, Mohsen; HOLLOWAY, Damien; OLIVIER, J. C., 2019. Using a moving load to simultaneously detect location and severity of damage in a simply supported beam. *Journal of Vibration and Control*, v. 25, n. 15, p. 2108-2123, 2019. Disponível: <https://journals.sagepub.com/doi/epub/10.1177/1077546319849>

772. <https://doi.org/10.1177/1077546319849772>. Acessado em: 24 jun 2024.

NAJAFI, M.; DEHGOLAN, F. Rahimi, 2017. Non-linear vibration and stability analysis of an axially moving beam with rotating-prismatic joint. *Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, v. 11, n. 4, p. 780-789. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3439045>. Acessado em: 24 jun 2024.

NI, Q.; ZHANG, Z. L.; WANG, Lin, 2011. Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid. *Applied Mathematics and Computation*, v. 217, n. 16, p. 7028-7038. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.116>. Acessado em: 11 abr 2024.

ÖZKAYA, E.; PAKDEMIRLI, M., 2000. Vibrations of an axially accelerating beam with small flexural stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, v. 234, n. 3, p. 521-535. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2890>. Acessado em: 09 abr 2024.

ÖZKAYA, E.; PAKDEMIRLI, M., 2002. Group - theoretic approach to axially accelerating beam problem. *Acta Mechanica*, v. 155, p. 111-123. Disponível: <https://www.researchgate.net/publication/226663106>. <https://doi.org/10.1007/BF01170843>. Acessado em: 24 jun 2024.

ÖZKAYA, E.; ÖZ, H. R., 2002. Determination of natural frequencies and stability regions of axially moving beams using artificial neural networks method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 4, n. 252, p. 782-789. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3991>. Acessado em: 09 abr 2024.

ÖZ, H. R., 2003. Natural frequencies of axially travelling tensioned beams in contact with a stationary mass. *Journal of sound and vibration*, v. 259, n. 2, p. 445-456. [doi:10.1006/jsvi.2002.5157](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5157). Acessado em: 18 jul 2020.

ÖZ, H. R.; PAKDEMIRLI, M.; ÖZKAYA, E., 1998. Transition behaviour from string to beam for an axially accelerating material. *Journal of Sound and Vibration*, v. 215, n. 3, p. 571-576. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1572>. Acessado em: 24 jun 2024.

ÖZ, H. R.; PAKDEMIRLI, M., 1999. Vibrations of an axially moving beam with time-dependent velocity. *Journal of Sound and Vibration*, v. 227, n. 2, p. 239-25. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2247>. Acessado em: 09 abr 2024.

ÖZISIK, M. Necati. **Heat conduction**. John Wiley & Sons, 2nd ed., 1993.

PAÏDOUSSIS, M. P., 2014. *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. Academic Press Inc. Vol. 1, 2ª Ed., Cap. 2, San Diego, CA. ISBN 0-12-544360-9. Disponível: https://books.google.com.br/books?id=2utyRRQLspgC&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_view_API&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false. Acessado em: 03 jul 2024.

PAKDEMIRLI, Mehmet; ULSOY, A. Galip; CERANOGLU, A., 1994. Transverse vibration of an axially accelerating string. *Journal of Sound and Vibration*, v. 169, n. 2, p. 179-196. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1012>. Acessado em: 06 abr 2021.

PAKDEMIRLI, M.; ULSOY, A. G., 1997. Stability analysis of an axially accelerating string. *Journal of Sound and Vibration*, v. 203, n. 5, p. 815-832. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0935>. Acessado em: 22 set 2020.

PAKDEMIRLI, M.; ÖZ, H. R., 2008. Infinite mode analysis and truncation to resonant modes of axially accelerated beam vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 311, n. 3-5, p. 1052-1074. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.003>. Acessado em: 24 jun 2024.

PARNELL, L. A.; COBBLE, M. H., 1976. Lateral displacements of a vibrating cantilever beam with a concentrated mass. *Journal of Sound and Vibration*, v. 44, n. 4, p. 499-511. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90092-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90092-4). Acessado em: 15 abr 2024.

PELLICANO, Francesco; VESTRONI, F., 2002. Complex dynamics of high-speed axially moving systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 258, n. 1, p. 31-44. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5070>. Acessado em: 15 abr 2024.

PEREIRA, Luiz Mariano, 2000. **Solução das Equações de Navier-Stokes e da Energia em Coordenadas Cilíndricas via Transformação Integral**. 178 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ciências em Engenharia de Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000. Disponível: https://minerva.ufrj.br/F/?func=direct&doc_number=000474789&local_base=UFR01. Acessado em: 19 out 2023.

PERUZZI, Nelson José, 2005. **Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não-ideais periódicos**. 183 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005. 10.47749/T/UNICAMP.2005.336044. Disponível: <https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/336044>. <https://doi.org/10.47749/UNICAMP.2005.336044>. Acessado em: 07 jan 2021.

PHAM, Phuong-Tung; HONG, Keum-Shik, 2020. Dynamic models of axially moving systems: A review. *Nonlinear Dynamics*, v. 100, n. 1, p. 315-349. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05491-z>. Acessado em: 15 mar 2020.

PIOVANA, Marcelo T.; SAMPAIO, Rubens, 2008. Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials. *Thin-Walled Structures*, v. 46, n. 2, p. 112-121. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.08.031>. Acessado em: 15abr 2024.

- QUARESMA, J. N. N.; CRUZ, C. C. S.; CAGNEY, N.; COTTA, R. M.; BALABANI, S., 2020. Effect of mixed convection on laminar vortex breakdown in a cylindrical enclosure with a rotating bottom plate. *International Journal of Thermal Sciences*, 155, 106399. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2020.106399>. Acessado em: 09 abr 2024.
- QUEIROZ, M. S.; DAWSON, D. M.; RAHN, C. D.; ZHANG, F., 1999. Adaptive Vibration Control of an Axially Moving String. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 121, n. 1, p. 41-49. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2893946>. Acessado em: 15 abr 2024.
- RAO, Singiresu S., 2007. Vibration of Discrete Systems: brief review. In: RAO, Singiresu S. *Vibration of Continuous Systems*. Miami: John Wiley & Sons. Cap. 2. p. 33-67. Disponível: <https://wp.kntu.ac.ir/hrahmanei/Adv-Vibrations-Books/Continuous-Vibrations-Rao.pdf>. ISBN: 978-0-471-77171-5. Acessado em: 25 jun 2024.
- RANDIVE, V. K; ADMUTHE, A., 2020, Natural Frequencies of The Hollow Cantilever Beam with Tip Mass. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research (JETIR)*. Volume 7, Issue 8, p. 1176-1186. Disponível: <http://www.jetir.org/papers/JETIR2008148.pdf>. Acessado em: 15 abr 2024.
- RAVINDRA, V.; PADMANABHAN, C.; SUJATHA, C., 2010. Static and free vibration studies on a pulley-belt system with ground stiffness. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 32, p. 61-70. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782010000100009>. Acessado em: 16 abr 2024.
- RIBEIRO, Aureliano R. B., 2021. **Análise de Vibração em Estruturas Sanduíche com Materiais Compósitos e Núcleo Viscoelástico Utilizando o Método da Transformada Diferencial**. 194 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá-MG, 2021. Acessado em: 26 jan 2024.
- SACK, R. A., 1954. Transverse oscillations in travelling strings. *British Journal of Applied Physics*, v. 5, n. 6, p. 224. <https://doi.org/10.1088/0508-3443/5/6/307>. Acessado em: 26 mai 2024.
- SANTOS, Tharcísio Castro, 2017. **Identificação de danos em vigas utilizando o Método de Energia de Deformação**. Dissertação de graduação em Engenharia Automotiva, Universidade de Brasília, Campus Gama, DF, 65 p. Disponível: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/19783/1/2017_TharcisioCastroSantos_tcc.pdf. Acessado em: 25 jun 2024.
- SHAFQAT, Baran, 2015. Vibration analysis of cantilever beam with different computational techniques as a single degree of freedom system. *Online: Slideshare*, 2015. 17 slides, color. <https://www.slideshare.net/QaziBaran1/vibration-analysis-and-modelling-of-cantilever-beam#1>. Acessado em: 30 jul 2023.

SHEN, D.; YE, G., 2013. Study on the Dynamic Characteristics of Warp in the Process of Weaving. *Fibres & Textiles in Eastern Europe*, v. 21, n.2(98), p. 68-73. Disponível: <http://www.fibtex.lodz.pl/article896.html>. Acessado em: 12 jun 2020.

SIBTAIN, Moaz; SMITH, Saxon; YEGANEHMEHR, Alireza; ONG, Oscar Zi Shao; GHAYESH, Mergen H., 2023. Vibrations of axially travelling CNT reinforced beams with clamped-clamped boundary condition and an elastic support. *Procedia Structural Integrity*. Disponível: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0>. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2023.05.006>. Acessado em: 20 abr 2024.

SILVA, João F.; NASCIMENTO, Lucas A. D.; HOEFEL, Simone S., 2016. Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams under non-classical boundary conditions. In: **IX Congresso Nacional de Engenharia Mecânica CONEM 2016**, Fortaleza-CE, Brasil. 2016. <https://doi.org/10.20906/CPS/CON-2016-1053>. Acessado em: 25 jun 2024.

SILVA, Elizeu M., 2017. *Solução do Problema do Rebaixamento de Lençóis Freáticos com Poços Verticais ou Horizontais próximos a Correntes por Transformadas Integrais*. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, Belém, PA. 108 p. Disponível: <https://www.proderna.propesp.ufpa.br/ARQUIVOS/teses/2017/Tese%20Elizeu%20Melo%20-%202007-06-17.pdf>. Acessado em: 09 jul 2024.

SINHA, Subhash C.; BUTCHER, Eric A., 1997. Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 206, n. 1, p. 61-85. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1079>. Acessado em: 12 jan 2021.

STYLIANOU, M.; TABARROK, B., 1994. Finite element analysis of an axially moving beam, part I: time integration. *Journal of Sound and Vibration*, v. 178, n. 4, p. 433-453. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1497>. Acessado em: 15 abr 2024.

SUWEKEN, Gede, 2003. *A mathematical analysis of a belt system with a low and time-varying velocity*. pp. 113. Master of Mathematical Sciences. University of Adelaide, Technische Universiteit Delft. South Australia, geboren te Singaraja, Bali, Indonesie. https://www.academia.edu/67197641/A_mathematical_analysis_of_a_belt_system_with_a_low_and_time_varying_velocity. Acessado em: 23 out 2022.

SUWEKEN, Gede; VAN HORSSSEN, W. T., 2003. On the transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity. Part I: the string-like case. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, n. 1, p. 117-133. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01168-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01168-9). Acessado em: 05 set 2023.

SWOPE, Richard Dale; AMES, William F., 1963. Vibrations of a moving threadline. *Journal of the Franklin Institute*, v. 275, n. 1, p. 36-55. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(63\)90619-7](https://doi.org/10.1016/0016-0032(63)90619-7). Acessado em: 09 abr 2024.

- TAN, Xia; MAO, Xiao-Ye; DING, Hu; CHEN, Li-Qun, 2018. Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, v. 428, p. 104-118. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2018.04.041>. Acessado em: 15 abr 2024.
- TAN, Jian; ZHANG, Yulong; ZHANG, Li; DUAN, Qingfeng; AN, Chen; DUAN, Menglan, 2023. Vibrational Responses of an Ultra-Large Cold-Water Pipe for Ocean Thermal Energy Conversion: A Numerical Approach. *J. Mar. Sci. Eng.* 11, 2093. <https://doi.org/10.3390/jmse11112093>.
- TANG, You-Qi; CHEN, Li-Qun; YANG, Xiao-Dong, 2009. Nonlinear vibrations of axially moving Timoshenko beams under weak and strong external excitations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 320, n. 4-5, p. 1078-1099. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.08.024>. Acessado em: 15 abr 2024.
- TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, 2009. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Tradução Paulo Machado Mors, Vol. 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica. 6ª Ed., Disponível: <https://pt.scribd.com/archive/plans?slideshare=true>. Acessado em: 25 jun 2024.
- TÜFEKCI, Mertol; DEAR, John P.; SALLES, Loïc, 2024. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps, *Applied Mathematical Modelling*, Volume 128, 2024, Pages 450-469, ISSN 0307-904X, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>. Acessado em: 05 abr 2024.
- TUO, Yu-hang; FU, Guang-ming; SUN, Bao-jiang; LOU, Min; SU, Jian, 2022. Stability of axially functionally graded pipe conveying fluid: Generalized integral transform solution, *Applied Ocean Research*, 125, 103218, ISSN 0141-1187. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2022.103218>. Acessado em: 10 abr 2024.
- ULSOY, A. G.; MOTE Jr., C. D.; SZYMNI, R., 1978. Principal developments in band saw vibration and stability research. *Holz als Roh-und Werkstoff*, v. 36, p. 273-280. <https://doi.org/10.1007/BF02610748>. Acessado em: 11 abr 2024.
- VAN HORSSSEN, W. T., 2003. On the influence of lateral vibrations of supports for an axially moving string. *Journal of Sound and Vibration*, v. 268, n. 2, p. 323-330. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00362-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00362-6). Acessado em: 25 jun 2024.
- VAN HORSSSEN, W. T.; PONOMAREVA, S. V., 2005. On the construction of the solution of an equation describing an axially moving string. *Journal of Sound and Vibration*, v. 287, n. 1-2, p. 359-366. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.026>. Acessado em: 12 abr 2024.
- VARGHAEI, Pegah; KHARAZMI, Ehsan; SUZUKI, Jorge; ZAYERNOURI, Mohsen, 2019. Vibration Analysis of Geometrically Nonlinear and Fractional Viscoelastic Cantilever Beams. *Identification: arXiv:1909.02142v1 [math.NA]*. Disponível: <https://www.researchgate.net/publication/335651214>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.02142>. Acessado em: 03 dez 2023.

YANG, Xiao-Dong; CHEN, Li-Qun, 2005. Bifurcation and chaos of an axially accelerating viscoelastic beam. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 23, n. 1, p. 249-258. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.04.008>. Acessado em: 15 abr 2024.

WANG, L. H.; HU, Z. D.; ZHONG, Z.; JU, J. W., 2008. Hamiltonian dynamic analysis of an axially translating beam featuring time-variant velocity. *Acta Mechanica*, v. 206, n. 3-4, p. 149-161. <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-008-0104-9>. Acessado em: 16 abr 2024.

WANG, Xiaodong; HALE, Jack K., 2001. On monodromy matrix computation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 190, n. 18-19, p. 2263-2275. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00243-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00243-7). Acessado em: 15 abr 2024.

WANG, Binghui; WANG, Zhihua; ZUO, Xi, 2017. Frequency Equation of Flexural Vibrating Cantilever Beam Considering the Rotary Inertial Moment of an Attached Mass. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2017, p. 1-5. Disponível: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1155/2017/1568019>. <http://dx.doi.org/10.1155/2017/1568019>. Acessado em: 25 jun 2024.

WANG, Hongjin; QINGFENG, Meng; WUWEI, Feng, 2014. Discussion of the Improved Methods for Analyzing a Cantilever Beam Carrying a Tip-Mass under Base Excitation. *Shock And Vibration*, v. 2014, p. 1-15. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/981053>. Acessado em: 25 jun 2024.

WICKERT, J. A.; MOTE Jr, C. D., 1990. Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua. *Journal of Applied Mechanics*, v. 57, n. 3, p. 738-744. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2897085>. Acessado em: 07 set 2020.

WICKERT, J. A., 1992. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 27, n. 3, p. 503-517. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7462\(92\)90016-z](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7462(92)90016-z). Acessado em: 09 abr 2024.

WICKERT, J. A., 1996. Transient vibration of gyroscopic systems with unsteady superposed motion. *Journal of Sound and Vibration*, v. 195, n. 5, p. 797-807. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1996.0462>. Acessado em: 16 abr 2024.

WOLFRAM, Stephen, 2003. **The Mathematica books**. 5ª Ed. Wolfram Research, Inc. www.wolfram.com. Disponível: http://www.wagak.cs.uni-kl.de/webMathematica3/Production/Docs/Mathematica_V5_Book.pdf.

WU, J. S.; LIN, T. L., 1990. Free vibration analysis of a uniform cantilever beam with point masses by an analytical-and-numerical-combined method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 136, n. 2, p. 201-213. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-460x\(90\)90851-p](http://dx.doi.org/10.1016/0022-460x(90)90851-p). Acessado em: 16 abr 2024.

ZEN, G.; MÜFTÜ, Sinan, 2005, **Proceedings of WTC2005 World Tribology, Congress III**, Washington, D.C., USA. September 12-16. *Acessado em: 15 abr 2024.*

ZEN, G.; MÜFTÜ, S., 2006. Stability of an axially accelerating string subjected to frictional guiding forces. *Journal of Sound and Vibration*, v. 289, n. 3, p. 551-576. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.02.026>. *Acessado em: 16 abr 2024.*

ZHANG, Haijuan; CHEN, Liqun, 2016. Vibration of an Axially Moving String Supported by a Viscoelastic Foundation. *Acta Mechanica Solida Sinica*, v. 29, n. 3, p. 221-231. [http://dx.doi.org/10.1016/s0894-9166\(16\)30157-4](http://dx.doi.org/10.1016/s0894-9166(16)30157-4). *Acessado em: 09 abr 2024.*

ZHANG, L.; ZU, J. W., 1998. non-linear vibrations of viscoelastic moving belts, part i: free vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 216, n. 1, p. 75-91. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1998.1688>. *Acessado em: 15 abr 2024.*

ZWIERS, U.; BRAUN, M., 2007. Modelling and stability analysis of strings in axial motion. **In: 12th IFToMM World Congress**, Besançon, France, jun 18-21. Disponível: <https://www.researchgate.net/publication/262006198>. *Acessado em: 25 jun 2024.*